



LA FUNCIÓN LINEAL, UNA NOCIÓN QUE EMPLEA LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA MODELAR LA VARIACIÓN

ROSA EDITH RAMÍREZ JARAMILLO

Código: 0762129

JOSÉ JULIÁN TORO CÓRDOBA

Código: 0762121

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
ZARZAL
2012



LA FUNCIÓN LINEAL, UNA NOCIÓN QUE EMPLEA LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA MODELAR LA VARIACIÓN

ROSA EDITH RAMÍREZ JARAMILLO

Código: 0762129

JOSÉ JULIÁN TORO CÓRDOBA

Código: 0762121

Trabajo de grado presentado para optar al título de
Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Asesor

Jorge Enrique Galeano Cano

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
ZARZAL
2012



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta:

1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	La función lineal, una noción para modelar la variación mediante los registros de representación		
Se trata de:	Proyecto ☐	Informe Final ☒	
Director:	Jorge E. Galeano Cano		
1er Evaluador:	Ana Katherine Valencia		
2do Evaluador:	Maritza Pedreus		
Fecha y Hora	Año:	Mes:	Día: Hora:
Estudiantes			
Nombres y Apellidos completos		Código	Programa Académico
Rosa Edith Ramirez		0762129	
Jose' Julian Toro C		0762121	

Evaluación					
Aprobado	☒	Meritorio	☐	Laureado	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐	Incompleto	☐
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo		1er Evaluador	2do Evaluador		
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:					
Año:	Mes:	Día:	Hora:		
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					

Firmas:		
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

Es largo el proceso y de mucho esfuerzo cuando se quiere lograr un objetivo, pero es más liviano cuando Dios está conmigo. A él gracias por darme sabiduría y permitirme conocer a personas tan especiales que estuvieron a mi lado apoyándome cuando más lo necesité. A ellos un enorme agradecimiento,

A mi familia,

María Elvia Jaramillo, mi mamá quien me motivó a realizar una carrera profesional y aunque no esté en vida, siempre está en mi corazón siendo la fuente de mi inspiración, José Arcadio Ramírez, mi padre, quien con su esfuerzo me ha apoyado en este largo camino, creyendo en mí, a él espero brindarle los frutos de mi esfuerzo, Néstor, Carmenza y Ferney, mis hermanos, por creer en mí y apoyarme cuando más lo necesitaba, y a todos aquellos familiares que de alguna manera han estado ahí.

A Steven Vargas, mi compañero sentimental y su mamá, que además de brindarme un apoyo moral incondicional han sido un motor muy importante para seguir adelante y culminar esta etapa.

A mis compañeros de estudio, profesores y amigos, por esos momentos inolvidables, por creer en mí y darme una voz de aliento cuando perdía las esperanzas.

Rosa Edith Ramírez Jaramillo

Después de un largo y arduo camino es momento de recoger los frutos, los cuales son producto de incontables esfuerzos y deseos de muchas personas, por tal motivo infinitas gracias.....

A Dios, por la vida y su luz que guió mi camino para culminar con éxito.

A mi hija Natalia y esposa Angélica, quienes son el motivo de mis luchas y deseos de superación.

A mis padres, por sus esfuerzos para hacer de mí un profesional.

José Julián Toro Córdoba

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de grado es producto de innumerables esfuerzos que deben ser compartidos con muchas personas, desde el inicio de hasta su culminación. Desde estas líneas deseamos poner de manifiesto nuestros más sinceros agradecimientos a todas las personas que nos han acompañado y alentado en este difícil proceso.

En primer lugar a Dios por habernos dado fortaleza y sabiduría para culminar con éxito esta etapa de nuestras vidas.

A nuestros padres, familiares y amigos, por el apoyo incondicional que nos dieron a lo largo de la carrera.

A Jorge Enrique Galeano, nuestro director de este trabajo de grado, quien con su esfuerzo y dedicación nos acompañó y orientó por este largo camino, con mucha paciencia y sabiduría.

A los docentes que nos brindaron sus conocimientos y apoyo incondicional, los cuales hoy son reflejo de nuestra formación.

A Ana Katherine Valencia y Maritza Pedreros, nuestras evaluadoras, quienes con sus mejores sugerencias enriquecieron nuestro trabajo.

A los estudiantes que participaron en la implementación de la prueba de diagnóstico y a la Institución Educativa Santa Teresita por abrirnos las puertas.

A todos ellos y cada una de las personas que hicieron parte de este proceso agradecemos por el esfuerzo y apoyo que en todo momento nos brindaron, por su comprensión y sabios consejos que hoy darán sus frutos en la culminación de una etapa más dentro de nuestra formación personal y profesional. Una vez más, gracias.

Contenido

RESUMEN.....	ix
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1:.....	5
ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	5
1.1. CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	5
1.2. OBJETIVOS.....	10
1.2.1 Objetivo general.....	10
1.2.2 Objetivos Específicos.....	10
1.3. JUSTIFICACIÓN.....	11
1.4. ANTECEDENTES.....	18
CAPÍTULO 2:.....	25
MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	25
2.1. PERSPECTIVA HISTÓRICA	25
2.2. PERSPECTIVA COGNITIVA	30
2.2.1. Complejidad del objeto matemático.....	30
2.2.2 Variedad de registros de representación semiótica	32
2.3. PERSPECTIVA CURRICULAR.....	42
2.3.1. Procesos generales:	45
2.3.2 Conocimientos básicos	49
2.3.3 Contexto	50
2.4. PERSPECTIVA MATEMÁTICA.....	52
CAPÍTULO 3:.....	56
LA FUNCIÓN LINEAL, UNA NOCIÓN QUE EMPLEA LOS	56
REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIOTICA.....	56
PARA MODELAR LA VARIACIÓN	56
3.1 DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	57
3.1.1. Fases de planificación y desarrollo de la indagación.....	57
3.1.2. Estudio de la situación problema propuesta en la prueba diagnóstico	59

3.1.2.1	Situación problema.....	59
3.1.2.2	Contenido matemático de la situación.....	60
3.2.	PRUEBA DIAGNÓSTICO.....	66
3.2.1	Análisis Preliminar.....	67
3.2.1.1	Prueba diagnóstico.....	67
3.2.1.2	Análisis de la prueba diagnóstico.....	71
3.2.2	Análisis de los resultados.....	77
3.2.2.1	Descripción general de la aplicación de la prueba diagnóstico.....	77
3.2.2.2	Análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados de la prueba diagnóstico.....	78
3.2.3	Conclusiones generales de la aplicación de la prueba diagnóstico.....	88
3.3.	SITUACIÓN DE APRENDIZAJE.....	89
3.3.1	Aspectos Generales.....	89
3.3.2	Situaciones.....	91
3.3.2.1	Análisis de la situación 1.....	96
3.3.2.2	Análisis de la situación 2.....	104
3.3.2.3	Análisis de la situación 3.....	109
3.3.2.4	Análisis de la situación 4.....	114
3.3.3	Elementos para la justificación de la propuesta presentada en la situación de aprendizaje.....	117
CAPÍTULO 4:.....		120
CONCLUSIONES GENERALES.....		120
BIBLIOGRAFÍA.....		124
ANEXOS.....		129

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Algoritmo del proceso de modelación. Gómez y Maestre, 2008.....	24
Ilustración 2. Algoritmo del proceso de modelación en la prueba diagnóstico.....	74
Ilustración 3. Porcentaje de estudiante que emplean expresiones algebraicas.	79
Ilustración 4. Porcentaje de estudiantes que emplean operaciones aritméticas.....	81
Ilustración 5. Porcentaje de respuestas. (Actividad 2 - punto 1).....	83
Ilustración 6. Porcentaje de respuestas (Actividad 2 - punto 2).....	84
Ilustración 7. Porcentaje de respuestas (Actividad 2 - punto 3).....	84
Ilustración 8. Porcentaje de respuestas, tablas de intervalos.....	86
Ilustración 9. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 1	98
Ilustración 10. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 2	106
Ilustración 11. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 3	110
Ilustración 12. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 4	116

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Relaciones establecidas entre registros. (Font, 2001, pp. 182).....	38
Tabla 2. Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro algebraico .	39
Tabla 3. Variables y unidades significantes de la función afín en el registro gráfico. (Tomada de Duval 1992, p128).....	40
Tabla 4. Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro tabular (tomada de Gutiérrez y Parada, 2007. Pág. 40).	41
Tabla 5. Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro lengua natural.	42
Tabla 6. Elementos de una función	52
Tabla 7. Resumen de tablas en la actividad 2.....	73
Tabla 8. Tipos de respuestas encontradas en la actividad 2.....	82

RESUMEN

El trabajo que se presenta a continuación plantea una propuesta sobre la función lineal como una noción para modelar la variación mediante los registros de representación semiótica. Se realiza a partir de una prueba que busca diagnosticar las restricciones del trabajo con dicha noción en los estudiantes del grado 9° de la institución Educativa Santa Teresita de la Victoria-Valle, y emprender una indagación de las causas de dicha restricción, para ello se tendrá en cuenta las dificultades en la transformación (tratamiento-conversión), planteadas por Duval (2004), hasta proponer el diseño de una situación de aprendizaje que supere las restricciones de la prueba inicial.

El diseño, implementación, análisis de resultados y la justificación de la situación de aprendizaje propuesta se realizan desde un marco de referencia conceptual que abarca los componentes históricos, cognitivos, curriculares y matemáticos. El componente histórico basado en que la interpretación y comprensión de la noción de función desde su aparición ha tenido múltiples dificultades; el cognitivo, basado en el análisis del funcionamiento cognitivo propuesto por Raymond Duval en la teoría de *registros de representación semiótica*; el curricular, tiene como base las orientaciones sobre la temática dadas en los Lineamientos y Estándares Curriculares del área de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional; y el componente matemático, asentado desde la teoría de las funciones lineales.

Por lo tanto, este trabajo aporta referentes teóricos y prácticos a un campo problemático de la educación matemática, los cuales se sintetizan en algunas reflexiones importantes sobre los resultados de la implementación y la situación de aprendizaje como propuesta para análisis futuros.

Palabras Claves: Función lineal, situación de aprendizaje, registros de representación semiótica, variación, modelación.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado está inscrito en la Línea de Investigación Lenguaje, Razonamiento y Comunicación de Saberes Matemáticos de La Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle.

Se estudiaron algunos aspectos relacionados con los modelos¹ lineales dada su importancia en las matemáticas, ya que éstos permiten resolver aquellos problemas de las ciencias que se comportan linealmente y aproximar otros cuya modelación² es no lineal; se da prioridad a la función lineal como un modelo de representación para las situaciones de variación en el mundo cultural y social a través de la implementación de situaciones de aprendizaje en un escenario experimental en el grado noveno de la educación básica. Para tal propósito se contempla la observación de situaciones del entorno, descripción de las mismas y su respectiva modelación a través de los registros de representación semiótica³ (tablas, gráficas, expresiones algebraicas, etc.)

El interés por la noción de función surge por ser uno de los temas de mayor importancia en la enseñanza de las matemáticas desde los primeros años de escolaridad (López, 2009; Monzoy, s.f.); aunque se presenta con el nombre de función sólo en la educación básica secundaria, esta noción está presente de forma implícita en conceptos y procedimientos matemáticos trabajados en la primaria, por ejemplo en las operaciones aritméticas elementales las cuales actúan como una función.

¹ Se entiende este desde lo planteado por los lineamientos curriculares (2006, p 77) “es el proceso que conduce desde la situación problemática real hasta el modelo matemático ”

² Se entiende este desde lo planteado por los lineamientos curriculares (2006, p 76) “forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas.

³ Siguiendo a Duval (1993), por registro de representación entendemos a un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

Dada la complejidad en el aprendizaje de esta noción matemática, en la escuela se presentan muchas dificultades para apropiarse de ella, dificultades de origen cognitivo como son la diversidad de registros de representación semiótica para un mismo objeto matemático, en este caso para la función lineal; de origen epistemológico como la diversidad de definiciones e interpretaciones para la noción de función; unas de origen curricular como las transformaciones que ha sufrido la noción de función desde su aparición hasta su llegada a los currículos escolares; y por último unas matemáticas producto de la misma complejidad del objeto matemático, todo esto es abordado con más detalle en el marco teórico.

Es así como el presente trabajo buscó identificar las dificultades a las cuales se enfrenta el estudiante durante el estudio de la noción de función lineal, dificultades que conllevan a un bajo desempeño matemático en especial para interpretar y solucionar situaciones sujetas a una variación; por tanto el estudio se centra en el análisis de aquellas dificultades que pueden catalogarse como consecuencia de la restricción que tienen los estudiantes para aplicar la noción de función lineal como una herramienta de modelación y solución de situaciones de variación en diferentes contextos, e igualmente los que provocan en el estudiante la confusión entre el objeto matemático y su representación.

Al respecto de esta problemática, se emprende una indagación retomando algunas de las causas como es la falta de transformación (tratamiento⁴-conversión⁵), que según autores como Duval (2004) son el origen de los problemas que presentan los estudiantes al trabajar con las representaciones semióticas como instrumentos necesarios en el aprendizaje e implementación de la noción de función lineal y las cuales se tuvieron en cuenta en la elección, ejecución y análisis de las situaciones a utilizar en pro de ayudar a los estudiantes a superar las dificultades detectadas. El marco teórico en el que se desarrolló el

⁴ Siguiendo a Duval un tratamiento es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. El tratamiento es, pues una transformación estrictamente interna a un registro.

⁵ Una conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro A en otra representación del mismo objeto en un registro B. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (objeto en el sentido estricto, situación...), pero sin conservar la explicitación de las mismas propiedades de ese objeto.

trabajo es principalmente la teoría de *registros de representación semiótica* desarrollada por R. Duval, no solamente porque permite explicar el nivel de conceptualización con base en los cambios entre representaciones, sino porque además los problemas sujetos a una variación exigen al estudiante la familiaridad con diversos registros de representaciones para una función lineal, dado que cada registro pone de manifiesto una característica particular de la noción de función permitiendo la aprehensión de la misma de una forma integral.

De manera que, el desarrollo del trabajo expresa cómo las restricciones que presentan los alumnos referentes al concepto función lineal, pueden ser explicadas con base en las dificultades a las cuales se enfrentan al abordar el tema; igualmente, permitirán obtener un marco de referencia sobre las consideraciones a tomar, si se pretende disminuir en cierto grado, las restricciones asociadas a la enseñanza de la función lineal.

Como resultado de este trabajo se espera aportar desde lo teórico y de alguna manera en lo metodológico, en la comprensión de la noción de función como un modelo de las situaciones de variación que rodean la vida del individuo a través de los registros de representación semiótica. En general, este trabajo se plantea como una estrategia dirigida a aportar a la enseñanza de esta noción matemática y para promover la formación de pensamiento matemático de los estudiantes del grado noveno de la Educación Básica y en particular los estudiantes de la Institución Educativa Santa Teresita de la Victoria Valle.

La organización del trabajo de grado ***La función lineal, una noción que emplea registros de representación semiótica para modelar la variación***, se presenta en cuatro capítulos:

En el *Capítulo 1*, se hace un planteamiento general de la investigación, describiendo la contextualización del problema que se aborda, y las características del trabajo desarrollado: objetivos generales y específicos, justificación y los antecedentes que presentan una revisión de investigaciones relacionadas con el tema.

El *Capítulo 2*, constituye el marco de referencia conceptual desde el cual se desarrolló el trabajo y proporciona los referentes teóricos para indagar sobre la necesidad de emplear los registros de representación y su adecuado manejo, para promover la comprensión de la noción de función lineal a partir del diseño y aplicación de una primera prueba(diagnóstico), la cual busca determinar las restricciones que presentan los estudiantes en el trabajo con dicha noción y que serán las bases para el diseño de una situación de aprendizaje como una propuesta que busca superar las dificultades que se muestren. La distribución del capítulo está organizada desde cuatro perspectivas: *histórica, cognitiva, curricular y matemática*, que orientan el diseño e implementación de la prueba de diagnóstico, así como también el análisis de los resultados que permitieron realizar algunas conclusiones para el posterior diseño de la situación de aprendizaje.

En el *Capítulo 3*, se aborda el diseño e implementación de una prueba diagnóstico y la propuesta de la situación de aprendizaje. Primero se expone el modelo metodológico que sigue el diseño de la prueba diagnóstico y la situación de aprendizaje, las fases que las componen y el estudio matemático de la situación propuesta. Luego se presenta la prueba diagnóstico con el análisis preliminar, descripción de los resultados y conclusiones de lo ocurrido, lo que posteriormente permite el diseño de la situación de aprendizaje con el análisis preliminar y justificación de la pertinencia de dicha situación.

En el último capítulo, tras los resultados y análisis obtenidos, se presentan las conclusiones generales de este trabajo y algunas recomendaciones, que dan cuenta de los objetivos propuestos y los aportes que dejó este trabajo.

Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas utilizadas y complementa el trabajo un conjunto de anexos donde se presentan algunas de las pruebas de diagnóstico completas desarrolladas por los estudiantes y sus correspondientes registros.

CAPÍTULO 1:

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Desde hace mucho tiempo se reconoce a las matemáticas como una disciplina de alta trascendencia en los adelantos de la humanidad (Zuñiga, 2009); una de las principales nociones que ha permitido dicho adelanto es la de función, dado que en muchas situaciones, ya sean naturales, sociales o culturales, existen cantidades que están en relación sea esta de dependencia, proporcionalidad o variación, como por ejemplo, la dosis de los medicamentos que se suministra proporcional al peso del paciente o la velocidad en la caída libre de los cuerpos que depende del tiempo.

La noción de función dentro de las matemáticas mismas juega un papel muy importante, dado que muchos conceptos o procesos que se manejan en esta disciplina se comportan como una función, es el caso de las operaciones fundamentales de la aritmética donde a partir de unas reglas de aplicación se llega a la transformación de cantidades numéricas, allí se puede notar la función como una relación de cambio; igualmente esta noción es un cimiento para abordar el estudio del cálculo (Manfredi, 2008).

Por otro lado, la noción de función en el campo físico ha permitido al ser humano solucionar una variedad de situaciones, tales como describir el movimiento de los cuerpos en donde el espacio recorrido depende del tiempo o determinar la

cantidad de agua que hay en un depósito después de transcurrir un intervalo de tiempo; además, ha permitido interpretar fenómenos de inversión y movimiento económico en sectores como el comercio; estos ejemplos nos permiten un acercamiento en la comprensión de la relación de esta ciencia con la realidad.

La noción de función ha existido desde hace muchos siglos, las primeras señales de una noción, bastante distante de la actual, se encuentran en tablas de correspondencias confeccionadas a partir de la observación de fenómenos naturales; durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales y las ideas se desarrollan alrededor de cantidades variables independientes y dependientes sin definir ni diferenciar cada una de ellas; una función se definía mediante una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, sin utilizar fórmulas (Sastre et al, 2005). Sin embargo la función como concepto individualizado, es decir, como un objeto de estudio desde un ambiente geométrico y algebraico se remonta al siglo XVII, pensadores como Descartes y Leibniz hacen referencia a esta noción; este último introdujo los términos “variable”, “constante” y “parámetro”; así como Johann Bernoulli quien definió función como una cantidad formada de cualquier manera por variables y constantes (Escandón, 2007) concepto que hace pensar la función como una expresión algebraica compuesta por variables y constantes; más adelante Leonhard Euler acuñó la expresión $f(x)$ y la siguiente definición “una función de una cantidad variable, es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de la cantidad variable y de números o cantidades constante” (Escandón, 2007), una posible interpretación de este enunciado es la noción de función como una fórmula que involucra ideas de cambio, sin realizar una distinción entre el concepto y su representación.

Con el transcurrir de los años, en el siglo XIX la definición publicada por Euler fue ampliada por Cauchy y Weierstrass logrando cambiar la naturaleza y el significado de la función. Cauchy, en 1821, definió la función como una dependencia entre variables:

... si cantidades variables son unidas entre ellas de tal modo que el valor de una de ellas está dado, se puede llegar a los valores de todas las otras; uno ordinariamente concibe estas distintas cantidades como expresadas mediante una de ellas, la cual entonces toma el nombre de variable independiente; las otras cantidades expresadas mediante la variable independiente son aquellas a las que se llaman funciones de esta variable (López, 2009, p.13).

Fourier, quien se ocupó del problema del flujo del calor en los cuerpos materiales, trabajó la temperatura en función de dos variables (tiempo y espacio), en 1822, dio la siguiente definición:

... en general, la función representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa, hay un número igual de ordenadas. Todas tienen valores numéricos, ya sean positivos, negativos o cero. No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; se siguen unas a otras de una forma cualquiera y cada una de ellas está dada como si fuera una cantidad sola (López, 2009, p.13.).

Dirichlet logró que una función fuera representada mediante una serie de Fourier, además aclaró la diferencia existente entre la función y su representación, lo cual no era claro en los trabajos de Euler. Goursat en 1923, presenta la definición de función que conocemos actualmente: “Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un valor de y . Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$ ” (Escandón, 2007). Concepto que hace referencia a la función como una relación de correspondencia entre cantidades variables.

Como se puede ver la función ha tenido diferentes conceptualizaciones, así mismo comprende distintas clasificaciones, entre las cuales están la función cuadrática, la función logarítmica, las funciones trigonométricas y la de nuestro interés de análisis: la función lineal.

La función lineal es una función cuyo dominio y codominio son los números reales y su expresión analítica es un polinomio de primer grado.

$$f: R \rightarrow R$$

$$f(x) = mx + b, \text{ donde } m \text{ y } b \text{ son números reales}$$

Las funciones lineales se caracterizan porque representación gráfica corresponde a una línea recta, cuya inclinación está determinada por la pendiente m y el corte en el eje y determinado por el valor de la constante b ; entre este tipo de funciones encontramos la función de proporcionalidad directa; la función afín y la función constante.

Como se ha mencionado la noción de función ha permitido interpretar y solucionar situaciones del mundo físico, de las mismas matemáticas y de otras ciencias; también facilita la comprensión de conceptos matemáticos tales como continuidad, sucesiones, límite y derivada, entre otros; así la noción de función es una herramienta que permite analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas de la actividad práctica del hombre, de otras ciencias y de las mismas donde la variación se encuentra como un sustrato de ellas (MEN, Lineamientos Curriculares, 1998); así esta noción llega a los currículos escolares, en los cuales se enfatiza el desarrollo de conocimientos básicos de los cuales hacen parte pensamientos como el numérico, el geométrico, el métrico, el aleatorio y el que nos incumbe en este trabajo, el pensamiento variacional⁶.

En este pensamiento, tal como se percibe en los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos De Competencias, se sitúa la función como un concepto altamente significativo, dada su importancia como herramienta para modelar o representar situaciones del mundo real que involucran una variación, es decir, un conocimiento necesario para vincular patrones de variación y prever un fenómeno estable o inestable; esta noción es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, pues se le considera un componente generalizador y de naturaleza

⁶ Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

modelizadora; por tal motivo es un tema de estudio en las Instituciones Educativas dentro de distintos niveles.

Sin embargo como lo mencionan López y Sosa (2007) dada la complejidad de este contenido matemático en la escuela se presentan muchas dificultades en su enseñanza; dichas dificultades vienen asociadas entre otras a la forma mecánica de enseñanza, es decir, se enseña a los estudiantes bajo tres partes claramente definidas, primero como una correspondencia entre conjuntos, luego se le asigna un registro algebraico y posteriormente un registro gráfico, buscando el desarrollo de habilidades pero olvidando un contexto que de vida a la noción y sin aclarar la transición entre estos registros de representación; también porque la noción de función involucra muchos registros de representación que obligan a que los estudiantes cambien de una a otra, lo que se conoce como conversión (Duval, 2004), no obstante dicha conversión no se realiza de una forma espontanea, sino que requiere el reconocimiento de las unidades significantes de cada registro de representación lo cual genera confusiones en el estudiante; y por último según Del Castillo y Montiel (2007) porque esta noción involucra muchos otros subconceptos como dominio, codominio, variables, entre otros.

En el caso de las funciones el empleo de registros de representación como el numérico, tabular, gráfico, algebraico, la lengua natural y el escrito, implica una serie de variables que deben ser tenidas en cuenta al momento de realizar un tratamiento o una conversión entre registros; por ejemplo, la comprensión de un enunciado matemático en lengua natural implica la conversión de este a una expresión matemática, una ecuación por ejemplo, y para dicha conversión es necesario discriminar en el enunciado la designación de los objetos pertinentes (Duval, 2004), esto en aras de facilitar el paso de un registro a otro y por ende mayor comprensión en la noción matemática. De igual forma, en el registro gráfico para la función lineal se tiene el sentido de la inclinación, ángulos con respecto a los ejes, posición con respecto al eje vertical (Duval, 1998), variables que inciden en el paso de una gráfica a su expresión algebraica. Todo esto genera en los

estudiantes la confusión entre el registro de representación y la noción misma, es decir, consideran que una noción como la de función se explicita del todo con una gráfica o una ecuación, lo que se convierte en un problema clave en el proceso de aprendizaje matemático (Peralta, 2003).

La diversidad en los sistemas de representación para una misma noción en este caso la de función, produce que la mayoría de los estudiantes no logren diferenciar el modelo de la situación representada o por el contrario separan completamente el modelo y la situación real, como consecuencia de tomar la noción de función como un simple conocimiento matemático lejano de las situaciones concretas. Es así como nuestro estudio pretende dar respuesta al interrogante:

¿Cómo emplear la noción de función lineal, y sus distintos registros de representación semiótica para modelar las situaciones de variación?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

Emplear la noción de función lineal y sus distintos registros de representación semiótica para modelar las situaciones de variación, y avanzar en la construcción del pensamiento variacional en los estudiantes de grado noveno de la I.E. Santa Teresita.

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Indagar y describir las causas que conllevan a que los estudiantes de grado 9°, de la I.E Santa Teresita, presenten dificultades en el manejo de las diferentes formas de representación semiótica de la noción de función lineal.

2. Determinar y analizar los elementos necesarios para el diseño de una situación de aprendizaje que involucre el uso de modelos lineales, y que contribuya al aprendizaje y empleo de la noción de función lineal.
3. Aportar elementos para el empleo de la función lineal y de sus distintas representaciones semióticas como herramientas para modelar y resolver situaciones del entorno.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Al situarnos en el contexto de la educación básica secundaria, particularmente en el aprendizaje de las matemáticas, encontramos que la noción de función es fundamental (De la Rosa, 2000), siguiendo esta línea nos hemos situado en la noción de función lineal dada su estrecha relación con los procesos algebraicos, no tanto por la prioridad de utilizar el lenguaje simbólico del álgebra, sino, por las diferentes formas de representación que ésta ofrece para estudiar las situaciones de variación, además de las relaciones que podemos establecer entre dichas representaciones y los procesos de modelación matemática en diferentes tipos de situaciones.

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ocupan un amplio lugar en la formación académica de nuestros estudiantes, y por ende se ha convertido en campo de estudio durante varios años (Kilpatrick, 1992). Muchos son los fenómenos como objeto de investigación, entre ellos está la manera de conocer, aprender y operar mentalmente con los objetos matemáticos, los obstáculos para construir conocimiento matemático, el dominio de los sistemas conceptuales, la destreza y el manejo comprensivo de los sistemas simbólicos, el desarrollo del pensamiento matemático, entre otros. En cuanto a este último, los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias plantean los aspectos necesarios que se deben tener en cuenta a la hora de hacer una organización

curricular, proponiendo entre muchos aspectos la oportunidad de encaminarse hacia la contextualización del álgebra con el propósito de que el estudiante dé sentido a los objetos de estudio. Igualmente en ellos se plantean cinco tipos de pensamiento matemático que potencializan el desarrollo del conocimiento en los estudiantes, entre ellos está el pensamiento variacional, en el cual se ubica con mayor relevancia la función lineal. (Lineamientos Curriculares, 1998. Estándares Básicos de Competencias, 2006)

Según los Lineamientos es primordial relacionar los contenidos del aprendizaje con la experiencia cotidiana y con los saberes que circulan en la escuela, entre éstos, desde luego, las disciplinas científicas. Estándares y Lineamientos se relacionan en cuanto a que cada uno maneja una coherencia, uno entre un Estándar y otro, y los Lineamientos entre pensamientos; y allí surge un vínculo que busca aproximar a la enseñanza con los ambientes del entorno.

1.3.1 Una referencia desde los Lineamientos Curriculares

Se deben tener en cuenta para la organización curricular tres aspectos: *los conocimientos básicos, los procesos generales y el contexto*. El primero tiene que ver con conocimientos referidos a los procesos cognitivos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y a los sistemas propios de las matemáticas (sistemas simbólicos, sistemas de representación, estructuras). Principalmente el pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos involucran el reconocimiento de regularidades y patrones, identificación de variables, descripción de fenómenos de cambio y dependencia (conceptos y procedimientos asociados a la variación directa y a la proporcionalidad; a la variación lineal, en contextos aritméticos y geométricos, a la variación inversa, al concepto de función); el segundo, tiene que ver con los pasos a seguir para lograr el aprendizaje y aplicación de las nociones matemáticas, en nuestro caso el aprendizaje y la adecuada aplicación de la noción de función lineal, entre estos pasos o procesos tenemos: el razonamiento, el planteamiento y resolución de

problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración y ejercitación de procedimientos; ocupando el proceso de modelación un lugar de mayor jerarquía en este trabajo dada su importancia para lograr el objetivo, que es emplear la noción de función lineal como un objeto matemático que permite modelar situaciones del entorno que están sujetas a una variación, así la modelación permite identificar matemáticas específicas en un contexto general (situación problemática real), formular y visualizar un problema en formas diversas, identificar relaciones y regularidades, traducir a un modelo matemático, representar por una fórmula o relación, solucionar, verificar y validar. Finalmente el tercero, tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende; el contexto del aprendizaje es el lugar desde donde se construye sentido y significado para los contenidos matemáticos, y por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con las ciencias, con la vida sociocultural y con otros ámbitos de las matemáticas mismas.

De tal forma que los conocimientos básicos, los procesos generales en especial la modelación y el contexto, son aspectos de suma importancia dentro del trabajo; el primero de ellos nos permite comprender qué conocimientos se requieren para abordar el estudio de la noción de función lineal, el segundo vislumbra los diversos modelos que se deben abordar y el último toma en consideración la necesidad de un contexto que de sentido a la función lineal dentro de las expectativas e intereses del estudiantado.

1.3.2 Una referencia desde los Estándares

Un estándar no puede verse aislado de los demás estándares de un determinado pensamiento, ni de los de otros pensamientos, además refleja el enfoque de los Lineamientos Curriculares, en el sentido de organizar éste y relacionar los procesos generales del aprendizaje, los contextos y los conocimientos básicos, que constituyen la orientación conceptual que debe tener el currículo, permitiendo

reconocer no sólo las relaciones entre nociones asociadas a un mismo pensamiento, sino las relaciones con nociones de otros pensamientos.

No obstante la enseñanza de la función lineal en las Instituciones Educativas, por lo general se presenta de manera mecánica, es decir, se presenta a los estudiantes primero como una correspondencia entre conjuntos, luego se le asigna un registro algebraico y posteriormente un registro gráfico, buscando el desarrollo de habilidades pero olvidando un contexto que de vida a la noción y sin aclarar la transición entre estos registros de representación; dejando de lado que se pueden proponer diferentes representaciones de una situación de variación para que sean modeladas e interpretadas por los estudiantes. Así como también plantear problemas para que el estudiante pueda producir una representación a partir de otra, puesto que las representaciones son fundamentales en la comprensión de las matemáticas, pues sus objetos de estudio son construcciones de la mente y se requieren de representaciones para interactuar con ellos. (Duval, 1996).

Muestra de ello son las conclusiones de las pruebas Saber⁷ 2009, las cuales muestran los resultados obtenidos a nivel nacional, hallándose que el estudiantado promedio que logra reconocer distintas maneras de representar una función se encuentra en un nivel mínimo. Cifras como, en noveno grado el 52% de los alumnos está en nivel mínimo de desempeño, estos estudiantes sólo distinguen la manera de representar una función, solucionan problemas en contextos aditivos y multiplicativos e identifican algunas propiedades de figuras planas y sólidos; pero no logran hacer un cambio de registro entre las distintas representaciones semióticas, lo que podría ser a causa de la enseñanza repetitiva del mismo cambio de registro para un objeto matemático.

1.3.3 El uso de las representaciones semióticas

⁷ Pruebas que se realizan a los estudiantes de los grados 5° y 9°, cuyos resultados se clasifican en los niveles; insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado.

Las situaciones de cambio exigen emplear distintas representaciones semióticas, y es así como estas se convierten en necesarias, pues permiten captar la complejidad de la situación a abordar. Duval (1993) sostiene la necesidad de emplear diversos sistemas semióticos ligados a un mismo objeto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como lo son los objetos comúnmente llamados físicos.

Cuando se trata de una noción como la que nos ocupa, es amplia la teoría que lo fundamenta como por ejemplo la de *los registros de representación semiótica* desarrollada por R. Duval. Ésta y otras teorías (García, 2005; Gatica et al, 2008.) serán fundamentales tanto para hacer un análisis sobre los registros de representación semiótica, como para tratar de explicar en alguna medida las dificultades que lleva a que los estudiantes no obtengan una comprensión significativa de la noción y por ende tengan bajos resultados en las pruebas. Se hace una reflexión detallada que permite indagar y describir las causas de la problemática que surge en el aula de clase en el grado 9º, teniendo en cuenta algunos elementos teóricos que permiten orientar hacia los fenómenos que llevan a que los estudiantes presenten dificultades al momento de adoptar la función lineal como una noción que permite modelar las situaciones de variación mediante los registros de representación semiótica.

Es significativo mencionar que la necesidad de hacer un estudio de la noción de función lineal se debe, por un lado, a que el estudio de las funciones en la escuela se inicia desde los primeros grados de escolaridad y se va profundizando a lo largo de la enseñanza hasta llegar a la básica secundaria en 9º, donde generalmente aparece la función lineal, y aunque los resultados muestran que la complejidad del mismo concepto ha generado ideas erróneas en los estudiantes dada la forma como se enseña (López y Sosa, 2007), ubicar la función lineal como una noción modeladora del cambio mediante los registros de representaciones

semióticas, permite acercarse al objeto matemático que involucra la importancia de esta noción y que le da sentido a la comprensión por parte de los estudiantes.

.... se trata de abandonar el enfoque rígido de los sistemas y superar la enseñanza de los contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados que ha gobernado por un tiempo la actividad matemática escolar. El énfasis está en la ubicación en el dominio de un campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas. (MEN, Lineamientos Curriculares 1998, p.49.).

Sin embargo, y como ya se mencionó, existen investigaciones (Gatica et al, 2008; Duval, 2004; Peralta, 2003; López y Sosa, 2007; García, 2005; Del Castillo, s.f.) que arrojan como resultado la existencia de una fuerte problemática frente a las concepciones que poseen los estudiantes sobre las funciones y en especial sobre la función lineal; dificultades como cambiar la representación de los objetos o relaciones matemáticas entre un sistema semiótico a otro es siempre un salto cognitivo como es el caso de la conversión. Así, diferentes errores y maneras de concebir los procesos de cambio entre las diferentes representaciones semióticas generan dificultades de aprendizaje en los estudiantes que incluso persisten en estudiantes de la educación media y hasta universitaria.

Es un hecho que todo educador debería estar consciente de la problemática en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función lineal a partir de un registro de representación semiótica, el cual debe estar acompañado de un amplio conocimiento matemático que facilite la comprensión del mismo en los estudiantes .

Así pues se ve la necesidad de indagar sobre la problemática ¿Cómo emplear la noción de función lineal, y sus distintos registros de representación semiótica para modelar las situaciones de variación?, en pro de identificar desde una perspectiva

local la concepción que los estudiantes de 9º de educación básica tienen sobre la función lineal, para llevar a cabo una situación de aprendizaje que caracterice en los estudiantes el pensamiento variacional y desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de variación, además que sean capaz de modelarlos y transformarlos.

Es en este orden de ideas en donde surge la necesidad de presentar un estudio de la función lineal, como una noción que emplea los registros de representación semiótica para modelar las situaciones de variación, en tanto que existe una preocupación por indagar sobre las dificultades que presentan los estudiantes cuando deben relacionar la noción de función lineal a través de una de sus representaciones semióticas, con una situación de variación presente en el entorno, para lo cual no diferencian la representación del objeto representado.

Con el estudio realizado en este trabajo también se determina la importancia que genera no sólo tener en cuenta los aspectos que proponen los Lineamientos Curriculares para llevar a cabo la enseñanza, sino que estando enmarcados estos aspectos en el currículo de matemáticas de las Instituciones Educativas también deben saberse aplicar. Asumiendo que los currículos escolares le brindan al estudiante la oportunidad de apropiarse de los conocimientos, no se deben pasar por alto pues si es así se corre el riesgo de enseñar las nociones matemáticas siguiendo una secuencia lineal de contenidos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se hace importante el desarrollo de este trabajo en tanto brinda elementos de análisis a docentes y futuros investigadores, además de importantes sugerencias y estrategias a tener en cuenta en el momento de abordar en el aula el tema objeto de estudio. Aportar, de una parte, literatura existente en este campo, y de otra, contribuir a la formación de docentes en educación matemática, una vez terminado el trabajo de investigación y sus respectivos análisis.

1.4. ANTECEDENTES

Este trabajo surge como fruto de la preocupación, ya generalizada, por las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la noción de función lineal, y en su desempeño frente a situaciones que exigen la aplicación de procesos como la modelación de las situaciones de variación mediante las representaciones semióticas. Dichas dificultades se evidencian en recurrentes fracasos al relacionar variables, establecer correspondencias y/o dependencias entre magnitudes en fenómenos de variación.

Teniendo como referente la importancia de las matemáticas en la interpretación, modelación y solución de problemas del mundo que nos rodea, los trabajos en esta área se ven obligados a contribuir en estos aspectos; por tal razón es de nuestro interés indagar y mostrar cómo la noción de función lineal permite modelar situaciones del entorno y por ende facilitar la solución de una situación problema en particular.

No obstante, los objetos matemáticos como la función lineal no son directamente accesibles por medio de los sentidos y solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a ellos. Por tal motivo, es importante analizar el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático. Ya autores como Duval (1993, 1995, 1999), Hiebert y Carpenter (1992), Hitt (1996), Del Castillo (s.f.), entre otros, han hecho énfasis en la importancia de estas representaciones y de las tareas de conversión entre ellas para acceder a los objetos matemáticos y así al conocimiento y manejo de los mismos.

Por su parte Duval (1993), caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la siguiente manera:

....un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la Semiosis:

- 1) La presencia de una representación identificable....
- 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...

3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial (pág. 177).

De tal forma la construcción de una noción como la de función, requiere la conversión entre distintas representaciones del mismo objeto matemático, dado que cada una es parcial con respecto a lo que representa, es decir, explícita algunas características del objeto matemático pero nunca en su totalidad. Según esto, una noción como la de función lineal se construye mediante trabajos que impliquen el manejo de diferentes registros de representación y promuevan la articulación coherente entre ellos; así el conocimiento de un individuo sobre una noción matemática es estable si él o ella es capaz de articular diferentes representaciones de la noción libre de contradicciones, logrando una comprensión efectiva y articuladora que posibilita la transferencia de los conocimientos aprendidos.

Se comprende entonces que los registros de representación, deben ser analizados mediante estos aspectos teóricos. Un claro ejemplo de la necesidad de la conversión entre registros y las dificultades que presentan los estudiantes al realizar este proceso, es el trabajo de Duval (1992) el cual nos explica que la dificultad del paso de la representación gráfica a una ecuación tiene que ver con el desarrollo de la habilidad para distinguir las variables visuales que entran en juego en la resolución de un ejercicio como el de pasar de la gráfica de una recta a la ecuación, igualmente menciona algunas dificultades que muestran los estudiantes para leer e interpretar gráficas cartesianas, entre otras:

- No establecen la relación entre la pendiente y la dirección de la recta en el plano.
- Confunden la pendiente y la altura.
- No encuentran fácilmente la ecuación de la recta a partir de su representación gráfica.

Señala que la articulación entre los registros gráfico y algebraico no queda plenamente establecida después de haber estudiado las funciones lineales. Adicionalmente, descarga de culpa a los conceptos matemáticos involucrados e incrimina directamente al desconocimiento de las reglas de correspondencia semiótica entre el registro de representación gráfico y el algebraico, así como a los fenómenos de no congruencia entre registros.

También menciona que la interpretación global requiere de la articulación de la variable visual de la representación gráfica con la unidad significativa de la representación algebraica, mientras que los tratamientos que hacen referencia a la acción de localizar y leer puntos aislados, y a los procesos de interpolación y extrapolación para obtener valores, dejan de lado las características generales de la gráfica y centran su atención en los puntos, lo cual se constituye en un obstáculo para la interpretación global.

Este investigador concluye que el pasaje del registro gráfico al algebraico requiere de la identificación precisa de todos los valores de las variables visuales pertinentes y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica correspondientes, de estos dos aspectos presenta una metodología que permite discriminarlos.

Por su parte Guzmán (1998), se apoya en la teoría de Duval y describe una experiencia en la que se explora el sentido que tienen para algunos estudiantes de ingeniería ciertas nociones asociadas a la función, en términos de los registros gráfico, algebraico y la lengua natural. El estudio reporta dentro de las conclusiones que:

- Las respuestas de los estudiantes están dadas en un solo registro que generalmente corresponde al algebraico o a aquel en el que aparece la pregunta.
- Las respuestas de los estudiantes revelan cierta debilidad para dar explicaciones verbales, lo cual sugiere que el registro del lenguaje natural debe tener mayor relevancia dentro del aula.

- La traducción de un lenguaje a otro y la coordinación de registros no es un objetivo de enseñanza que se tome en cuenta explícitamente, y esto sin duda no favorece ni ayuda a los estudiantes a formular sus explicaciones. Muchas veces los estudiantes saben más de lo que son capaces de expresar y redactar, lo que es fácil comprobar en entrevistas con ellos: dar una explicación verbal es más fácil que darla por escrito.” (Guzmán, 1998, p.18)
- Los análisis muestran deficiencias conceptuales como resultado de la falta de coordinación y la poca familiaridad para hacer conversiones entre los registros algebraico, gráfico y lenguaje natural; lo cual no surge de manera espontánea sino que requiere de un aprendizaje.
- Los estudiantes no son hábiles para leer e interpretar gráficos movilizando conceptos pertinentes que aprendieron en lenguaje formal o natural.
- Cuando la pregunta está dada en registro gráfico, las respuestas hacen referencia a lecturas gráficas sin explicaciones de las mismas.
- No existe interés por parte de los estudiantes, en hacer corresponder las unidades significantes de los registros gráfico y algebraico.

Esta investigación identifica de manera específica los registros movilizados por los estudiantes universitarios, en nociones asociadas al concepto de función.

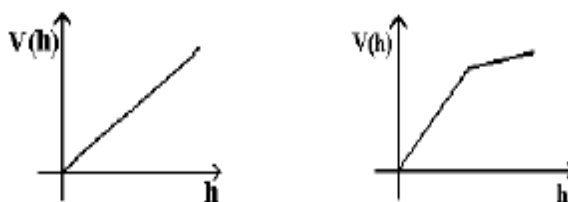
Otra investigación que se enmarca dentro de la teoría de Raymond Duval y explora las dificultades asociadas al aprendizaje de la función es la de Peralta (2003) y titulada Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal, específicamente la mirada se centra en las conversiones entre representaciones gráficas, algebraicas y tabulares. Entre las conclusiones destaca que:

- La noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Los estudiantes no asocian el signo de la pendiente con la inclinación de la recta, lo cual se revela con mayor fuerza en las conversiones en las que el registro de partida es el gráfico.

- “Los errores registrados no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara” (Peralta, 2002, p.173)
- Los estudiantes eluden las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica, y encuentran la respuesta correcta por la vía del punteo.
- El registro tabular es visto solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación en sí misma.
- Es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de oferta y demanda; ya que no muestran una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones, lo que lleva a pensar que no hay una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio.

Igualmente los registros de representación semiótica son importantes en la resolución de problemas, un ejemplo de ello lo presenta Hitt (1996) relacionado con el concepto de función.

....Se les solicitó a 30 profesores de enseñanza media que de la representación gráfica de un fenómeno que tiene que ver con el llenado de un recipiente (variable independiente altura de un líquido, y variable dependiente el volumen), dibujaran la forma de un recipiente que cumpliera con las características del fenómeno representado.



En esta investigación Hitt intenta demostrar que la intuición global se opone al pensamiento analítico; los resultados reportan que los profesores:

- Tienen gran dificultad para pasar de la gráfica que representa el llenado, al dibujo del recipiente, así como el proceso inverso.
- No asocian la variable independiente con la dependiente en un contexto analítico.
- Elaboran la gráfica de llenado de acuerdo a la forma del recipiente, sin un análisis previo.

Se concluye de manera general que, la intuición global se opone al pensamiento analítico y que el concepto de función de dichos profesores no es un conocimiento estable ya que no articulan las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones.

Bajo estos aspectos teóricos, además de la necesidad de una adecuada conversión entre los registros de representación, también cobra mucha importancia la noción de transferencia, entendida esta como la capacidad de trasladar los conocimientos adquiridos a otros contextos ya sean matemáticos o de otras disciplinas.

Este último aspecto, la noción de transferencia nos permite abordar otro referente importante en el desarrollo del presente trabajo “modelación matemática”; dado que esta transferencia no sólo se da del conocimiento matemático al entorno sino también en sentido contrario, es decir, permite traer una situación presente en el mundo real a un modelo matemático.

El proceso de modelación consta de tres momentos, los cuales constituyen sus indicadores: el primero consiste en identificar las variables y las constantes involucradas en el problema o situación; el segundo establecer relaciones entre éstas mediante los procesos ya sean matemáticos o del mismo entorno; y por último la verificación del modelo regresándolo a la situación real.

En lo que concierne a la investigación sobre modelación en la educación matemática, actualmente se entiende ésta como un método de enseñanza-

aprendizaje, en donde los estudiantes pueden desarrollar competencias y capacidades para desenvolverse satisfactoriamente en el mundo actual (Aravena, *et. al*, 2008), otros por su parte consideran a la modelación como un proceso donde los estudiantes aplican las matemáticas, con el ánimo de relacionar las matemáticas y la realidad, dado que el modelaje es el medio de conjugarlos; de modo que modelización, modelaje y modelo es considerado un método de investigación y una estrategia de enseñanza- aprendizaje (Biembengut, Hein, 2006), es decir, de alguna manera se basan en la matematización entendida como el proceso de describir en términos matemáticos un fenómeno real, obteniendo resultados matemáticos y la evaluación e interpretación matemática de una situación real (Gómez y Maestre, 2008). Estas propuestas se basan en que los estudiantes aprendan el ciclo que muestra la siguiente ilustración:

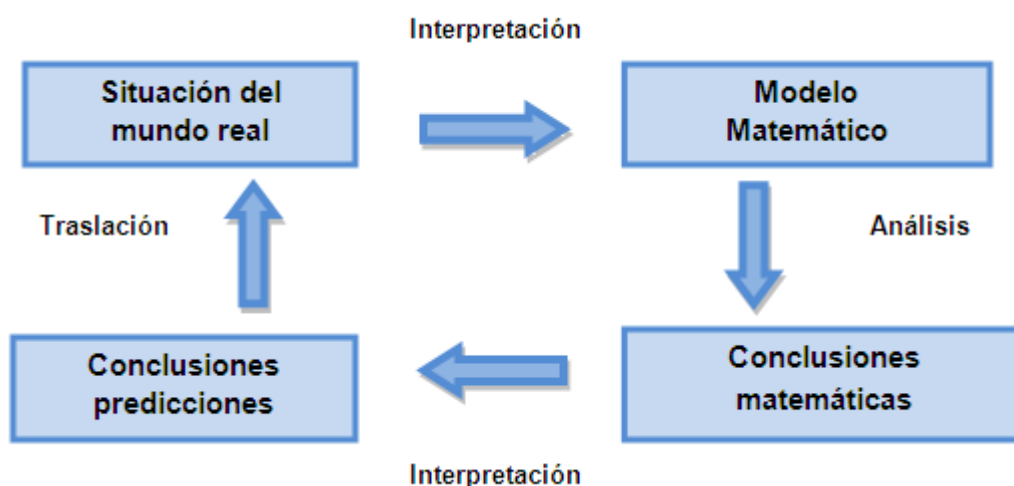


Ilustración 1. Algoritmo del proceso de modelación. Gómez y Maestre, 2008.

De modo que estos son algunos de los antecedentes que promueven nuestro estudio hacia la necesidad de los registros de representación y del proceso de modelación en la construcción, conceptualización y aplicación de la noción de función lineal en las situaciones del entorno que vienen sujetas o experimentan una variación.

CAPÍTULO 2:

MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

En este capítulo se presenta el marco de referencia conceptual en el que se desarrolla el trabajo; se tomaron en consideración algunos referentes teóricos y estrategias metodológicas que permitieron interpretar, analizar y organizar el estudio de las condiciones y limitaciones que están involucradas en el aprendizaje de la noción de función lineal dentro del marco de las representaciones semióticas, como herramientas no solo de modelación de las situaciones de variación sino de comprensión de la noción matemática. Se busca entonces presentar los elementos que permitan identificar y explicar las dificultades cognitivas y/o epistemológicas asociadas a la noción de función lineal, igualmente indagar sobre la necesidad de emplear los registros de representación y su adecuado manejo para promover una verdadera comprensión de la noción por parte de los estudiantes. El marco conceptual es analizado desde cuatro perspectivas a saber: *perspectiva histórica, cognitiva, curricular y matemática*; que orientan el diseño de la situación de aprendizaje y posterior interpretación de los resultados obtenidos en la aplicación de la situación.

2.1. PERSPECTIVA HISTÓRICA

Desde esta perspectiva se puede plantear que la interpretación y comprensión de la noción de función desde su aparición ha tenido múltiples dificultades; para mencionar algunas tenemos, por ejemplo, que de este único objeto matemático se

han generado distintas definiciones y por ende diferentes interpretaciones; Ruiz (1998) organizó el análisis histórico e identificó las siguientes ideas sobresalientes en distintos períodos de la evolución de esta noción:

1. La función como variación

Los babilonios lograron hacer uso de una intuición primitiva del concepto de función, ya que buscaban regularidades en los fenómenos naturales que luego intentaron generalizar mediante el uso de la aritmética; establecieron relaciones sistemáticas entre variaciones de las causas y los efectos de fenómenos que estaban sujetos a un cambio como: el calor, la luz, la distancia, la velocidad, entre otras.

Los babilonios tuvieron un instinto de funcionalidad, dado que en las tablas de cálculo que construyeron está presente una relación general por la que se asocian elementos de dos conjuntos. Sin embargo, existe una distancia muy grande entre instinto de funcionalidad y la noción de función (Ibíd. p.108.). Así durante la época antigua no existía una idea abstracta de variable y las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos, es decir, todos los desarrollos fueron explicados verbalmente, en tablas, gráficamente o por ejemplos.

2. La función como proporción

Esta idea aparece con los griegos donde las ideas de cambio y de cantidad variable estaban dentro de su pensamiento, se consideraba el cambio y el movimiento como algo externo a las matemáticas; esto llevó a los matemáticos de esta época a considerar los objetos matemáticos como algo invariante y por tanto a hablar en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esto conduce a las proporciones y ecuaciones, y no a las funciones (Ibíd. p 108).

Dado el significado geométrico que tenían para los griegos las magnitudes variables sólo establecían en forma homogénea sus proporciones: comparaban longitudes con longitudes, áreas con áreas, volúmenes con volúmenes, lo cual en

cierta medida pudo dificultar el desarrollo de la noción de función; como lo plantea René de Cotret, 1985 citado por Farfán y García (s.f.).

.... La homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza pudo ser un obstáculo al desarrollo de la noción de función puesto que impedía encontrar de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional (p.4).

Otras nociones que evitaron la evolución del concepto de función fueron “la proporcionalidad, la inconmensurabilidad, y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud” (Ibíd. p.2) Este período está marcado por el predominio de una concepción estática: la función como proporción.

3. La función como gráfica

Durante la Edad Media, se estudiaron fenómenos naturales y las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes sin definir las específicamente. Una función se definía mediante una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, sin utilizar fórmulas.

Los principales núcleos de desarrollo fueron las escuelas de Oxford y París. El principal representante de la escuela francesa es Nicolás Oresme, quien ya en el siglo XIV utiliza el grafismo para representar los cambios y así describirlos y compararlos. Utiliza segmentos para representar las intensidades de una cualidad de una determinada magnitud continua que depende de otra magnitud continua. Estas gráficas representaban las relaciones desde lo cualitativo más que desde lo cuantitativo, pues los gráficos se consideraban como modelos geométricos de las relaciones y no necesitaban representar fielmente dichas relaciones.

Durante el período que abarca los siglos XV y XVI, siglos conocidos por los historiadores como “períodos auxiliares” ya que se logran aportes sobresalientes a la noción de función, sin embargo, se sientan las bases de la simbología algebraica que permite una manipulación práctica y eficiente, esencialmente al diferenciar entre “variable” de una función e “incógnita” de una ecuación.

4. La función como curva

Fueron Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) quienes dieron el paso fundamental que permitió en algún modo liberar a la aritmética y el álgebra de su subordinación a la geometría. Se trataba de la representación de curvas geométricas en sistemas de coordenadas. A principios del siglo XVII, ellos descubren el mundo de la representación analítica al conectar los problemas de dos ramas de las matemáticas: la geometría y el álgebra. Se renuncia a las concepciones griegas de número y magnitud y se logra fusionarlas, y según Yousvhkevitch (1976), es aquí donde por primera vez se sostiene la idea de que una ecuación en x e y es un medio para introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondientes a los valores dados de la otra (Ruiz, 1998).

La concepción dominante, la función como curva, hace que surja el segundo obstáculo en la evolución de la noción de función, cuando se asocia la gráfica con la trayectoria de puntos en movimiento y no con conjuntos de puntos que satisfacen condiciones en una relación funcional.

5. La función como expresión analítica

La concepción de función como expresión analítica nace en el siglo XVII y continúa con Euler y Bernoulli en el siglo XVIII; con ellos la noción de función es considerada una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra f para caracterizar una función, escribiendo entonces: $\langle\langle fx \rangle\rangle$, lo que evolucionó con Euler, para escribirse como $f(x)$.

En la definición que propone Euler del concepto de función, reemplaza el término cantidad hasta ese momento por el de expresión analítica:

“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes”

Así Euler define la función como una expresión analítica que relaciona dos dominios: el álgebra y la geometría; sin embargo no realizó una distinción entre la función y su representación, dado que su definición, siguiendo el transcurso de la historia, hace pensar que la noción de función es simplemente una expresión analítica; e igualmente, teniendo en cuenta la definición actual, la definición hecha por él deja por fuera la función constante al carecer esta de variación.

Esta concepción se constituye en otro obstáculo para la evolución de la noción función en relación con sus ideas de dependencia y variabilidad. El punto de vista que predominó en este periodo fue el aspecto puramente formal más que de relación entre variables; se entiende que una función es una combinación de operaciones dada por una expresión analítica.

6. La función como regla de correspondencia: aplicación

Esta concepción de función como aplicación aparece con los últimos trabajos de Euler sobre “funciones arbitrarias”, siglo XVIII, continuando en el siglo XIX con los de Fourier sobre series trigonométricas y los de Cauchy, Dedekind y otros sobre números reales.

A partir del problema de la cuerda vibrante de Euler, surge la noción de correspondencia general: se dice que “una cantidad es función de otra u otras”, aunque no se conozca por qué operaciones atravesar para llegar de una a la otra. Más tarde, Euler se ve en la necesidad de considerar funciones más generales que las funciones analíticas, tomando en cuenta funciones arbitrarias, especiales, no derivables, a las que él llama discontinuas o mixtas: las funciones arbitrarias en las cuales si x designa una cantidad variable, entonces todas las otras cantidades que dependen de x , no importa de qué manera, son funciones de x .

El término función se corresponde con la expresión $f(x)$, y más tarde se representará como

$$f: X \rightarrow Y, \text{ o } x \rightarrow f(x)$$

Continúa el uso de los ejes cartesianos y aparece una nueva representación: los diagramas de Venn.

Otra definición más actual es la función en términos computacionales “una función es un procedimiento P que toma una o más entradas que salidas, y que tiene la propiedad de que cualesquiera dos llamadas a P con la misma entrada regresa a la misma salida” (Planchart, 2005).

Las dificultades que originan estas interpretaciones para el concepto de función se evidencian en la dificultad para diferenciar el objeto matemático de su representación, dado que los estudiantes terminan por entender que una función es una gráfica o una expresión algebraica, dificultades que posiblemente se evidencian en la actualidad al abordar la noción de función lineal; igualmente dificultad para relacionar variables, establecer correspondencias y/o dependencias entre magnitudes en fenómenos de variación.

2.2 PERSPECTIVA COGNITIVA

Numerosas investigaciones (Ruiz, 1998; López y Sosa, 2007; Gatica et al, 2008; Peralta, 2003; Acosta, Rondero y Tarasenko, 2007) se han realizado alrededor de la enseñanza de las matemáticas y la manera como se da su aprendizaje en la escuela, igualmente sobre los contenidos a ser enseñados, y los problemas de comprensión a los cuales se enfrentan gran parte de los estudiantes de matemáticas en la Educación Básica, como es la complejidad de los mismos objetos matemáticos y el empleo e interacción de distintos lenguajes para acceder a contenidos cada vez más abstractos.

2.2.1. Complejidad del objeto matemático

La noción de función implica el uso de ciertos términos que dificultan su comprensión, como son entre otros el de pendiente, dominio, codominio y variables; la primera de ellas implica una doble mirada como el grado de

inclinación y el trazo de la gráfica (descendente-ascendente), lo cual la mayoría de los estudiantes no toman en cuenta al momento de interpretar una situación de variación que involucra una linealidad, lo que dificulta el paso del registro gráfico al algebraico, entonces, no puede haber utilización correcta de las representaciones gráficas sin discriminación explícita de las variables visuales pertinentes y sin una correspondencia sistemáticamente establecida entre los valores de esas variables en este caso el de pendiente y las unidades significativas de la expresión algebraica (Duval, 1992). La linealidad es una noción empleada en situaciones cotidianas tales como el cálculo que realiza una persona sobre los interés simples, producto de una deuda o de la inversión de capital; o en los problemas de movimiento rectilíneo uniforme; así según Acosta, Rondero y Tarasenko (2007) la noción de linealidad está relacionada con el concepto de proporcionalidad y estos a su vez se encuentran vinculados en la noción de función lineal.

El problema con las nociones de dominio, codominio y rango se evidencian, entre otros casos, al interpretar una situación donde los valores negativos no tienen lugar, es decir, situaciones que poseen una restricción en el dominio como el costo de producción de un artículo, incremento en una población, etc.; puesto que el estudiante está encasillado en que tanto el dominio como el codominio de la función lineal son los números reales; además, estas dos nociones tienen involucrados la idea de variable, la dependiente relacionada con el codominio y la independiente relacionada con el dominio; relación de dependencia que produce la necesidad de reconocer y estudiar el comportamiento de la variable dependiente al asignar diferentes valores en la variable independiente; la dependencia es un elemento importante en la noción de función, en este sentido, René de Cotret (1985) expresa que la idea de dependencia- íntimamente ligada a las de variación y de variable- conlleva la existencia de un vínculo (ligazón) entre cantidades. Un cambio en una de ellas provocará un cambio sobre las otras. En efecto, el modo de percibir que una cosa depende de otra es hacer variar una y constatar cuál es el efecto en la otra. Esto se conoce con el nombre de covariación o aspecto covariante de las funciones.

Finalmente se tiene la dificultad de confundir la noción de función con una ecuación, es decir, definir la función a partir de una expresión analítica; y por tanto confusión entre variable e incógnita, lo cual no permite al estudiante identificar cuando un problema debe ser abordado con ecuaciones y cuando con funciones; dificultades que de acuerdo con López y Sosa (2007) se presentan entre otras razones porque el tratamiento algebraico hecho a ambos es similar, suelen limitarse a encontrar el resultado de una suma, resta, composición, etc.; y, porque las principales representaciones de la noción de función son el registro algebraico y el gráfico, los mismos que emplea la ecuación.

2.2.2 Variedad de registros de representación semiótica

Hasta al momento se han mencionado algunas dificultades que presentan los estudiantes al abordar el concepto de función, sin embargo la gran mayoría hacen parte de un campo más amplio como es el de la diversidad de registros de representación para un mismo objeto matemático, esta diversidad exige que el estudiante adquiera cierto manejo de estas representaciones y por tanto necesita aprender a realizar no sólo un tratamiento al interior de los registros sino también una conversión entre ellos con el ánimo de que haya comprensión de la noción en general. Según Duval (2004) existen al menos dos características cognitivas implicadas en las actividades matemáticas, por una parte se recurre a varios sistemas de representación semiótica para un mismo objeto matemático; y por otra, los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción, como lo son los objetos de otras disciplinas; por tanto una actividad matemática combina generalmente tratamientos y conversiones, la diferenciación funcional⁸ de registros de representación y la coordinación entre ellos, es decir, discriminar y coordinar los sistemas semióticos de representación constituyen los dos procesos claves para un aprendizaje.

⁸ Es la que les da a los sistemas semióticos su potencia de representación. Esto quiere decir que la actividad cognitiva que los moviliza va a llevar a funcionamientos diferentes de esos sistemas según la función que deban cumplir en el contexto de una tarea, de una démarche en vía de efectuación (Duval, 2004).

La noción de representación es necesaria en el aprendizaje de las matemáticas ya que para acceder a un objeto o noción matemática se requiere la utilización de al menos un registro de representación que lo haga explícito, lo que se da según D'Amore (2004) porque todo concepto matemático remite a “no-objetos”; por lo que la conceptualización no es y no se puede basar sobre significados que se apoyen en la realidad concreta, así todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de “objetos” para exhibir en su lugar; entonces, solo es posible la actividad con los objetos matemáticos mediante las representaciones semióticas. Sin embargo, esta necesidad de representación es lo que produce en gran parte el error de confundir el objeto representado y la representación, es decir, por ejemplo comprender o conceptualizar una noción como la de función lineal a partir de una ecuación o una gráfica; lo que se puede contrarrestar mediante los dos tipos de transformaciones de sistemas semióticos: el procesamiento que se da dentro de un mismo sistema de representación (tratamiento) y la conversión entre dos sistemas de representación distintos; sólo los estudiantes que son capaces de hacer esta conversión, no confunden al objeto matemático con su representación, y pueden transferir sus conocimientos matemáticos a otros contextos diferentes de aprendizaje (Duval, 1999).

Duval (1999) afirma que “la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos” (p.46). Entre los aspectos que dificultan esta transformación menciona la comprensión de un contenido limitada algunas veces a la representación en que se aprendió, la falta de coordinación entre los registros⁹, o el desconocimiento de alguno de los dos registros de representación.

Así en la comprensión de un concepto es inevitable la coordinación de los diferentes registros de representación, dado que cada representación pone de

⁹ La coordinación (o articulación) entre registros se establece como una condición necesaria para la conceptualización. Se ha destacado que no es suficiente con mostrar el objeto en diferentes representaciones, es necesario enseñar cómo se hace el paso de una a otra y cómo se coordinan entre sí. (Duval, 2004).

manifiesto una característica o propiedad particular del objeto matemático, por tal motivo quedarse en un solo registro implica que el concepto no sea comprendido integralmente; sin embargo, la conversión entre registros no se realiza de forma espontánea, pues se requiere un proceso de identificación de las unidades significantes¹⁰ en cada registro; esto se explica por el hecho de que las posibilidades de representación del sistema utilizado para producir la representación de partida, son totalmente diferentes de las del sistema utilizado para producir la representación de llegada (Duval, 2004).

Duval menciona que la conversión entre dos representaciones es congruente, si al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones.

El primero de estos criterios hace referencia a que a cada unidad significativa del registro de salida se le puede asociar una unidad significativa elemental en el registro de llegada; el segundo establece que cada unidad significativa elemental de la representación de partida se relaciona con una única unidad significativa elemental en el registro de llegada y el tercero se refiere a que existe igual orden de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros. Según Duval (2004):

.....las consecuencias de los fenómenos de no congruencia¹¹ son el encerramiento de los registros entre sí, o lo que llamaremos una comprensión mono-registro en la cual el objeto es confundido con el contenido de la representación. De allí la imposibilidad de transferencia (p.30).

¹⁰ Entendemos por unidades significantes los valores que pueden tomar las diferentes variables en un registro determinado.

¹¹ Se da cuando el paso de un registro a otro no se realiza de forma espontánea, la representación del registro de partida se hace opaca y no deja pensarse como una representación en el registro de llegada.

Cuando hay congruencia entre los registros la conversión se realiza de forma casi inmediata, como lo muestra el ejemplo de Guzmán (1998) dada la función $f(x) = x$, se ve en la grafica una recta que es bisectriz del primer y tercer cuadrante, además que es creciente y pasa por el origen, allí la mayoría de los estudiantes tienen éxito; por el contrario, cuando no hay congruencia la tarea puede ser difícil y no exitosa para gran parte de los estudiantes, por ejemplo dada la función $f(x) = x^2$ cuya representación gráfica es una parábola centrada y se pide al estudiantado graficar la parábola que representa la expresión $f(x) = (x + 1)^2$, la mayoría de los estudiantes fracasan debido a que se trata de una parábola trasladada hacia la izquierda y cuyo vértice coincide con la pareja (-1,0), y ellos se dejan llevar por el signo y la trasladan una unidad a la derecha; esta es una tarea de conversión de un registro algebraico a uno gráfico donde no existe congruencia entre el registro de partida y el registro de llegada.

Muchas investigaciones (Gatica et al, 2008; Duval, 2004; Peralta ,2003; López y Sosa, 2007), ponen de manifiesto que gran parte de los estudiantes no reconocen que se está trabajando un mismo objeto matemático y que se explicita a través de representaciones que son dadas en registros semióticos diferentes. En particular, la noción de función admite una gran variedad de registros de representación, por lo que la comprensión integral de esta noción requiere la coordinación de sus numerosos registros; lo cual según Duval (2004) se puede lograr mediante una discriminación de las unidades significantes en cada registro de representación semiótica.

Dentro de los registros utilizados en la representación de la noción de función y en nuestro caso la función lineal se cuenta con una gran variedad, se hará mayor énfasis en los siguientes: registro algebraico, definición de función mediante una expresión algebraica; registro en lengua natural, la función definida a partir de situaciones de entorno; registro tabular, la función representada en tablas de valores y el registro gráfico, que es la representación en el plano cartesiano. Las razones de la elección de estos registros de representación es entre otras porque

se ha mostrado que la dificultad de los estudiantes se presenta en la conversión entre un registro plurifuncional¹² como la lengua natural a un registro analítico o algebraico, ya que toda conversión que se hace a partir de un enunciado en lengua natural, implica al menos una operación compleja de redesignación de los objetos, operación más próxima a una recategorización o a una redesccripción del objeto que a la atribución de una simple letra (Duval, 2004); y la conversión de un registro gráfico a la lengua natural porque involucran un cambio de dimensión.

Duval (2004) afirma que todo discurso o texto involucra dos aspectos: uno relacionado con la redacción (lingüística) y el otro con los objetos de conocimiento. Así, comprender el enunciado de un problema obliga a diferenciar la descripción de la situación y el tratamiento matemático para su solución. El primer aspecto activa una tarea de conversión en la que se debe discriminar la información pertinente, esto probablemente es lo que mayor dificultad genera en la comprensión de los enunciados. La conversión consiste en hallar una representación (algebraica, gráfica, aritmética) que permita seleccionar y organizar la información pertinente del enunciado, para así poder plantear el tratamiento matemático que da respuesta al interrogante de manera sencilla. La dificultad radica en el nivel de congruencia que pueda presentarse entre los dos registros. Para ejemplificar lo anterior se presenta un ejercicio propuesto en la situación de aprendizaje (situación 1):

Excursión colegial

Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

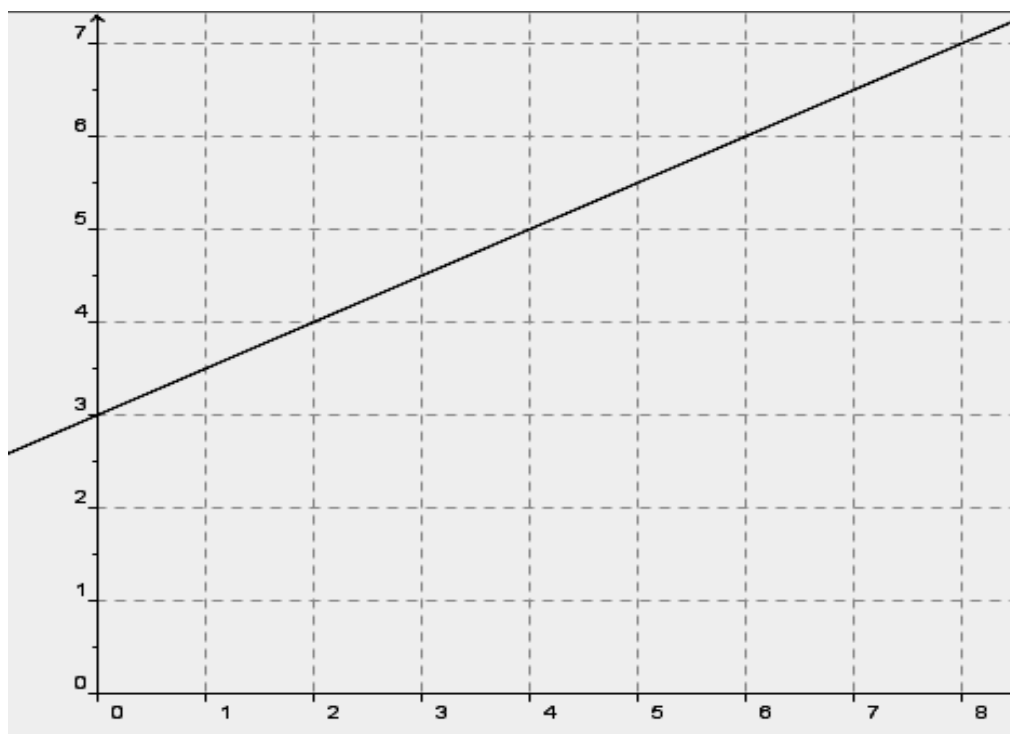
¹² Los registros plurifuncionales son registros que se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social. Tienen la ventaja de prestarse a un espectro extremadamente amplio de tratamientos.

- a. Explícite una forma de encontrar el valor del servicio del bus para cualquier número de km recorridos en cada una de las agencias.

Para realizar esta conversión correctamente los estudiantes deben identificar las magnitudes dependientes e independientes que intervienen dentro del enunciado y reconocer el tipo de relación que se establece entre ellas, así mismo reconocer el valor del término cargo fijo y su relación con la letra b de la expresión $y = mx + b$ que es precisamente a lo que se desea llegar.

Para el caso de la conversión del registro gráfico a la lengua natural, se proponen actividades como:

Plantee una situación que se ajuste a los datos que representa la gráfica.



Este tipo de conversión como se ha mencionado requiere de un cambio de dimensión, dado que se pretende pasar de un registro monofuncional-no discursivo a un registro plurifuncional-discursivo, para ello el estudiante debe identificar el comportamiento de las magnitudes y dar significado al corte en el eje y , y lo más importante explicar qué tipo de relación funcional se establece entre las magnitudes.

Por su parte Font (2001) presenta la siguiente tabla que exhibe las relaciones tanto de tratamiento y de conversión en y entre registros.

Desde Hacia	Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Expresión analítica
Descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación/cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lecturas de las relaciones numéricas	Modificación de la Tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico
Expresión analítica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Tabla 1. Relaciones establecidas entre registros. (Font, 2001, pp. 182).

Las posibles relaciones que se pueden establecer entre los registros de representación, las relaciones en el mismo registro podrían corresponder a tratamientos en términos de la teoría de Duval, mientras que en diferentes registros corresponderían a conversiones.

Según Duval, la naturaleza de las unidades significantes y su discriminación dependen de cada registro. A continuación se mencionan las unidades significantes en cada uno de los registros de representación de la noción de función lineal, las cuales han sido tomadas de investigaciones realizadas por Duval (1992), Gúmera (2011), Gutiérrez y Parada (2007).

- Registro algebraico

La ecuación general de la función lineal tiene la estructura $y = f(x) = mx + b$, en la cual se reconocen dos unidades significantes que son el coeficiente m y el término independiente b , el primero que hace referencia a la pendiente de la recta y el segundo al punto de corte en el eje y ; estos términos pueden tomar los valores que aparecen en la tabla.

Variables	Unidades significantes
M	$m > 1$
	$m = 1$
	$m < 1$
	$m > -1$
	$m = -1$
	$m < -1$
B	$b > 0$
	$b = 0$
	$b < 0$

Tabla 2. Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro algebraico

La elección de estas unidades significantes se justifica debido a la relevancia que tienen los rangos de valores que podría tomar el coeficiente m .

Por ejemplo, si:

I. $m < -1$ La función $f(x) = mx$ cumple con la siguiente condición

Sean $x, y \in R$, tales que si $x < y \rightarrow f(x) > f(y)$.

II. $m > 1$ La función $f(x) = mx$ cumple con la siguiente condición

Sean $x, y \in R$, tales que si $x > y \rightarrow f(x) > f(y)$

III. $m = 1$ La función $f(x) = mx$, se escribe de la siguiente manera:

$f(x) = x$ que representa la función identidad.

IV. $m < 1$ La función $f(x) = mx$,
se comporta como una función contractiva (Gúmera, 2011).

- Registro gráfico

La función lineal está representada bajo la gráfica de una línea recta que puede o no contener al origen de coordenadas, en el segundo caso se habla de función afín, un caso que cumple las mismas propiedades de la función lineal con la diferencia de que ésta posee una constante aditiva llamada ordenada al origen.

Variables	Unidades significantes
Sentido de la inclinación del trazo	El trazo sube de izquierda a derecha
	El trazo desciende de izquierda a derecha
Los ángulos del trazo con los ejes	Hay una partición simétrica del cuadrante atravesado
	El ángulo formado con el eje horizontal es menor que el formado con eje vertical
	El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical
La posición del trazo respecto al origen del eje vertical	El trazo corta el eje y arriba del origen
	El trazo corta el eje y abajo del origen
	El trazo corta el eje y en el origen

Tabla 3. Variables y unidades significantes de la función afín en el registro gráfico. (Tomada de Duval 1992, p128)

- Registro tabular

Corresponde a los valores numéricos de la función organizados en tablas de valores. Dados valores específicos para x , preferiblemente ordenados se determina los correspondientes valores de y ; no se consideran el caso de las funciones con pendiente cero y no definida. En la mayoría de los casos el uso de

las tablas se considera solo como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano cartesiano, a partir de una representación algebraica y no como una representación en sí misma, por el contrario en este trabajo se toma como registro de representación que permite analizar los cambios que se produce entre las variables de manera horizontal y vertical.

Variables	Unidades significantes
La relación que guardan los valores de la variable independiente.	La variación entre términos consecutivos es constante, es decir, $x_n - x_{n-1} = k$
	La variación entre términos consecutivos no es constante.
La relación que guardan los valores de las variables dependientes e independientes	Hay una partición simétrica del cuadrante atravesado
	A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los de la variable dependiente también.
	A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los de la variable dependiente disminuyen.
El valor que toma la variable independiente	Es igual a cero
	Es diferente de cero
El valor que toma la variable dependiente	Es igual a cero
	Es diferente de cero

Tabla 4. Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro tabular (tomada de Gutiérrez y Parada, 2007. Pág. 40).

- Registro en lengua natural

En este registro la función admite como representación una descripción en lenguaje natural palabras asociadas para describir la variación tales como aumenta, disminuye, permanece constante; y las unidades significantes para este tipo de registro dependen de la situación analizada, es decir, son de carácter particular y no tan general como el caso de los otros registros de representación.

Para ejemplificar lo anterior, se considerará un problema propuesto en el texto de grado 9°, editorial Santillana (2005), por ser la editorial empleada en la Institución Educativa donde se realizó el trabajo.

La fuerza que aplica la Tierra sobre un cuerpo se denomina peso. Aunque el peso y la masa están muy relacionados al ser magnitudes directamente proporcionales, son conceptos muy diferentes. La masa de un cuerpo es siempre la misma, mientras que el peso de un cuerpo en la Luna es la sexta parte de su peso en la Tierra.

En la Tierra, la relación entre el peso y la masa está bien definida: el peso de un cuerpo equivale a 10 veces su masa.

Variable	Unidades significantes en el registro lengua natural
Relación entre las magnitudes variables.	...el peso y la masa están muy relacionados al ser magnitudes directamente proporcionales
Valor de la constante de proporcionalidad.	En la Tierra, la relación entre el peso y la masa está bien definida: el peso de un cuerpo equivale a 10 veces su masa.

Tabla 5. Variables y unidades significantes de la función lineal en el registro lengua natural.

En consecuencia, para lograr el aprendizaje de una noción como la de función se debe pasar de la enunciación del concepto en diferentes registros y enfatizar en el tratamiento y sobre todo en la conversión, de igual forma reconocer cuándo estos registros evocan una función y bajo qué relación se encuentran las variables.

2.3. PERSPECTIVA CURRICULAR

En esta perspectiva se abordan aquellas dificultades que se pueden atribuir a la forma de enseñanza de la noción de función lineal, como marco de referencia para indagar sobre las causas en las dificultades que presentan los estudiantes al abordar el tema en mención, e igualmente como herramienta para la elección de la situación de aprendizaje a aplicar.

En el ámbito escolar, la noción de función lineal es abordada ya que de ella se desprenden una serie de razonamientos y aplicaciones propias de las matemáticas y de otras ciencias, lo que conlleva a la necesidad de que los

estudiantes adquieran cierta comprensión y manejo de la noción, desarrollando en ellos un pensamiento matemático que le permita analizar fenómenos reales que involucren una variación y modelarlos.

La noción de función lineal es una de las más importantes en matemáticas, por lo que su aprendizaje es un tema obligado en los distintos niveles de la enseñanza (Quintero y García, s.f.), por este motivo se ha tenido la necesidad de llevarlo a las aulas escolares y como consecuencia ha sufrido varias transformaciones hasta consolidarse como la noción que hoy conocemos; transformaciones que han alterado de alguna manera su esencia y por ende ha creado dificultades de origen cognitivo en los estudiantes como los ya mencionados.

Por otra parte, la enseñanza de la noción de función como lo plantea Hitt (1996) se restringe regularmente al paso de una expresión algebraica o tabla a una representación gráfica, se descuida en la instrucción el paso de una representación gráfica a una expresión algebraica, siendo ésta una tarea difícil pero necesaria en este contexto teórico para la construcción de la noción de función; así la noción creada en el estudiante es inestable y sujeta a contradicciones; igualmente las tablas se toman en la mayoría de los casos como una herramienta o medio para pasar de una expresión algebraica a la gráfica; que como un registro distinto (tabular) que pone de manifiesto características particulares de la función.

Todo esto se evidencia en la enseñanza, dado que esta se ha centrado en una transmisión de conocimientos y la noción de función no ha estado exenta de ello, su enseñanza se realiza siguiendo una secuencialidad en su mayoría guiada por los libros de texto, que inicia con una relación de correspondencia entre conjuntos, fragmentando las ideas del concepto como son las relaciones de dependencia, de proporcionalidad y de variación. Así es necesario que la enseñanza de la noción de función se lleve a cabo integralmente, es decir, abordar las distintas relaciones que se pueden establecer entre dos o más variables y que se pueda evocar sin

contradicciones en sus distintas representaciones, desde su definición, manejo de gráficas, hasta el empleo de las representaciones en la resolución de problemas.

La enseñanza de las matemáticas supone varios procesos de llevar a cabo un determinado conocimiento a las aulas de clase, pero es necesario que tal conocimiento genere en los estudiantes un aprendizaje significativo y comprensivo, es por esto que con motivo de diseñar una situación de aprendizaje nos remitimos al punto de vista con que los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) describen lo que para ellos se considera una situación de aprendizaje.

Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas escolares son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos. (p.72.).

El Ministerio de Educación Nacional desde los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 1998, 2006), plantean el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, orientándose en tres grandes aspectos que permiten organizar el currículo, estos son: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

Estos tres aspectos organizan el currículo de manera tal que los contenidos de aprendizaje se relacionen con la experiencia de los alumnos, y éstos a su vez con los ambientes que los rodean, es decir, que propicie aprendizajes de mayor alcance y den sentido a las matemáticas que aprenden, que permitan el desarrollo del pensamiento matemático, su capacidad de reflexión e intercambio de conocimientos y que la enseñanza se dé en un contexto de situaciones problemáticas, donde se posibilite al alumno la toma de decisiones, la adaptación a situaciones nuevas y la exposición de sus opiniones.

Atendiendo a esta propuesta, la función lineal, como una noción modeladora de la variación en la formulación de una situación de aprendizaje, se enmarca en tres aspectos: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto; cabe mencionar que se hará mayor énfasis en el proceso de modelación, dado que es un aspecto de suma importancia en el trabajo.

2.3.1. Procesos generales:

- Resolución y planteamiento de problemas

Según los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas (2006) “las situaciones problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos” (p. 52).

En la resolución y planteamiento de problemas, una situación permite desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas.

- Modelación

Desde los estándares de competencias para el área de matemáticas (MEN, 2006):

La modelación puede hacerse de formas diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella. Un buen modelo mental o gráfico permite al estudiante buscar distintos caminos de solución, estimar una solución aproximada o darse cuenta de si una aparente solución encontrada a través de cálculos numéricos o

algebraicos sí es plausible y significativa, o si es imposible o no tiene sentido (p.53).

En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales.

El proceso de modelación al igual que todas las actividades que se realizan en el campo matemático, viene permeados por la necesidad de los registros de representación, así como se ha dicho anteriormente los registros que se tuvieron en cuenta son la lengua natural, gráfico, tabular y algebraico.

Desde este aspecto, comprender la noción de función lineal como un modelo matemático de cierta situación que en términos generales es presentado en lengua natural, implica la conversión a otro registro de representación; desde un punto de vista variacional, este paso se hace a partir de las unidades significantes de cada registro, las cuales han sido especificadas anteriormente.

Siguiendo con este aspecto para dar inicio a la tarea de construir la función lineal como modelo matemático, implica tener en cuenta, según Posada, et.al (2007) las siguientes actividades:

- Discriminar las magnitudes cognitivamente pertinentes. Aquellas que serán correlacionadas.
- Identificar la posible covariación entre las magnitudes cognitivamente pertinentes, por ejemplo: diferencias, incrementos, razón de diferencias, cantidad de magnitud asociada al valor cero y uno de la magnitud independiente.
- Cuantificar la relación mediante tablas de valores.
- Identificar la razón de cambio constante y el orden en que aparece.

- Reconocer la razón de cambio constante en el primer orden como un caso particular de la función lineal.
- Generar actividad cognitiva de conversión entre los diferentes registros de representación para objetivar la noción matemática de función lineal.

Teniendo en cuenta algunas de las problemáticas planteadas en investigaciones (Planchart, 2005; Janvier, 1996), en cuanto al cuidado que se debe tener en la fase de formulación de la construcción de un modelo matemático, con respecto a los procesos cognitivos implicados en la comprensión y la dificultad de ver la función polinómica (lineal) como representante de un conjunto de determinadas situaciones, por ello se debe poner especial atención en los siguientes aspectos:

- Los enunciados presentados en lenguaje natural son de múltiples categorías.
- Los errores y aciertos que se pueden tener en la experimentación y toma de datos son determinantes en la formulación y validación del modelo matemático.
- La simplificación respecto a factores externos a la situación que la afecta puede generar divergencia en los resultados.
- La generalidad de los resultados matemáticos frente a la particularidad de las situaciones y viceversa.
- El papel que juegan los sistemas de representación semiótica en la construcción de modelos matemáticos.
- La validez de los resultados obtenidos.

Es así como en la formulación de un modelo matemático que involucre el paso de un registro a otro, es necesario que en los procesos cognitivos, se movilicen diferentes niveles de conceptualización matemática, puesto que las condiciones de pasar de un registro a otro no son las mismas que cuando se pretende realizar el proceso inverso.

- Comunicación

En el proceso de comunicación según los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas (MEN, 2006)

.....las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. (p.54).

Podría decirse con Raymond Duval (2004) que si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender en gran parte dicho contenido.

- Razonamiento

Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), declaran:

El razonamiento debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes y por consiguiente, este eje se debe articular con todas sus actividades matemáticas. Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.

- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar (p.51).

2.3.2 Conocimientos básicos

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998).

Los conocimientos básicos tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros. Los sistemas son aquéllos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos (p.16).

Como elemento organizador de la situación de aprendizaje que se pretende diseñar se tiene en cuenta el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos analíticos dados sus características. Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucren

procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. En estos problemas los números usados deben ser controlados y los procesos aritméticos también se deben ajustar a la aritmética que se estudia. Igualmente, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados en la solución de los problemas. (MEN, Lineamientos Curriculares 1998, p.47.).

Además, en las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo de este tipo de pensamiento, esto se logra a través de la elaboración e interpretación de ciertas representaciones matemáticas, que permiten tratar con situaciones de variación, cambio y dependencia en la resolución de problemas.

2.3.3 Contexto

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998).

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que da sentido a las matemáticas que aprenden, variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, debe tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas. La situación de aprendizaje a diseñar debe responder a una necesidad del contexto sociocultural de los estudiantes de manera que encuentren interés y utilidad en su resolución, es decir las doten de significado (p.16).

Estándares Básicos de competencias de Matemáticas asociados al pensamiento variacional.

Son objeto de construcción o afianzamiento en este trabajo los siguientes estándares:

(Grados 6° a 7°)

1. Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
2. Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.
3. Reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
4. Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.

(Grados 8° a 9°)

1. Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
2. Modelar situaciones de variación con funciones lineales.
3. Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una recta que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

Los Estándares mencionados son asociados al pensamiento variacional y a los sistemas algebraicos y analíticos en la educación secundaria, ellos presentan los contenidos matemáticos que serán tomados en cuenta para el diseño de la situación de aprendizaje, estos proponen el reconocimiento de las cantidades que varían en una situación determinada y la relación y cambio que produce dicha variación. Es así como además de modelar situaciones y diversos fenómenos de variación, se involucra en este trabajo el uso de las variables, la interpretación de las mismas, en una situación de aprendizaje que no sólo busca movilizar conocimiento sino que se genere un aprendizaje significativo y comprensivo.

2.4. PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Desde el inicio del ciclo de Educación Básica, el estudiante es enfrentado a una teoría matemática transpuesta, presentada como definiciones y propiedades que orientan su actividad matemática; expuesta principalmente, a través de los textos escolares y el discurso del docente.

En esta perspectiva se hace referencia a la teoría matemática formal que rige la manera como se aborda la noción de función lineal en la escuela.

Aspectos Formales

El estudio de los objetos matemáticos en la escuela, están mediados por la conceptualización y formalización de los mismos, apoyados en la teoría matemática construida a través del tiempo. A continuación se realiza una exposición de la forma como en la mayoría de los casos se estudia la noción de función lineal en los contextos escolares.

La noción de función como se ha mencionado con anterioridad ha sufrido muchas transformaciones, actualmente una función es definida como una relación o correspondencia entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda, que llamamos imagen.

A la función se le suele designar por f y a la imagen por $f(x)$ o simplemente y , la siguiente tabla muestra algunos de los elementos o conceptos que hacen parte de la noción de función:

Terminología	Significado	Ejemplos
Constante	Una letra o símbolo que representa un elemento <i>específico</i> de un conjunto.	5, $-\sqrt{2}$, π .
Variable	Una letra o símbolo que representa <i>cualquier</i> elemento de un conjunto.	Generalmente x denota la variable independiente e y la variable dependiente.

Tabla 6. Elementos de una función

Las funciones son vistas análogamente como máquinas a las que se les introduce un elemento x y devuelven otro valor y .

Por ejemplo, la función $f(x) = 3x + 1$ es la que a cada número le asigna su triple más uno. Así $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

Igualmente dentro de la noción de función existen otros conceptos importantes; los conceptos de dominio, codominio y rango, el primero de ellos se define como “el conjunto formado por los elementos que tienen imagen. Los valores que le damos a “ x ” (variable independiente) forman el conjunto de partida. Gráficamente lo miramos en el eje horizontal (abscisas). El dominio de una función está formado por aquellos valores de “ x ” (números reales) para los que se puede calcular la imagen $f(x)$, así en el ejemplo anterior el dominio está formado por todos los números reales.

El codominio por su parte está conformado por todos los posibles valores que puede tomar la variable independiente, es el conjunto de llegada, en el caso anterior serán todos los números Reales; por último el rango “es el conjunto formado por las imágenes. Son los valores que toma la función “ y ” (variable dependiente), por eso se denomina “ $f(x)$ ”, su valor depende del valor que le demos a “ x ”. Gráficamente lo miramos en el eje vertical (ordenadas). El Rango de una función es el conjunto formado por las imágenes $f(x)$ de los valores de “ x ” que pertenecen al dominio de dicha función.

Todo esto nos abre camino para acceder a la conceptualización de nuestro objeto de estudio la noción de función lineal. La función lineal es una función cuyo dominio y codominio son los números reales y su expresión analítica es un polinomio de primer grado.

Tal función se puede escribir como:

$$f(x) = mx + b$$

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$0 = Ax + By + C$, donde m y b son números reales.

Las funciones lineales se caracterizan por las líneas rectas que forman su gráfica (representación en el plano cartesiano), la inclinación de dicha recta está determinada por la pendiente m y la ordenada en el origen es b .

Entre las funciones lineales tenemos: la función de proporcionalidad directa $y = mx$; la función afín $y = mx + b$, correspondiente a una recta que pasa por $(0, b)$; la recta constante $y = b$, la cual gráficamente queda paralela al eje x . En este tipo de funciones los valores numéricos de m y b son de importancia pues determinan el grado de inclinación de la recta y el punto de corte sobre el eje y (Manfredi, 2008).

Se le llama función de proporcionalidad directa o, simplemente, función lineal a cualquier función que relacione dos magnitudes directamente proporcionales (x, y) . Su ecuación tiene la forma $y = mx$ o $f(x) = mx$, el factor m es la constante de proporcionalidad y recibe el nombre de pendiente de la función porque indica la inclinación de la recta que la representa gráficamente.

Las funciones de proporcionalidad directa se representan gráficamente como líneas rectas. Además, como $y = mx$, si $x = 0$, entonces $y = 0$; por lo tanto la gráfica de este tipo de funciones pasa por el punto $(0, 0)$.

Para dibujar la gráfica basta con obtener las coordenadas de otro punto, dando un valor arbitrario a la x y unir ese punto con el origen de coordenadas $(0, 0)$.

Si $x = 1$, entonces $y = m$, por tanto m representa la variación de y por cada unidad de x , es decir, la inclinación o pendiente de la recta. Si m es positiva, representa la cantidad que asciende y por cada unidad de x y si m es negativa la cantidad que desciende.

Por su parte si a dos magnitudes directamente proporcionales se les aplica alguna condición inicial, la función que la liga ya no es totalmente lineal (*las magnitudes*

ya no son proporcionales). Se dice que es una función afín y su forma es $y = mx + b$ ó $f(x) = mx + b$, estas funciones se representan también mediante líneas rectas, pues el término constante que las diferencia de las funciones de proporcionalidad solo produce una traslación vertical de la gráfica de éstas.

Para dibujar la gráfica necesitamos obtener dos puntos; uno nos lo proporciona la propia ecuación, pues, la ordenada en el origen b , nos indica que la recta pasa por el punto $(0, b)$; y el otro punto se obtiene dando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y ; uniendo los dos puntos tenemos la gráfica de la función. En cuanto a la función constante como ya se ha mencionado es una función cuya fórmula es $y = b$, donde b es un número real. Su representación gráfica es una línea recta paralela al eje x que corta al eje de ordenadas en el punto b .

Finalmente, se puede plantear que las dificultades que presentan los estudiantes al abordar una noción como la de función lineal y las dificultades en su utilización como herramienta para solucionar situaciones del entorno son de corte epistemológico y didáctico; y donde una posible solución luego de investigaciones (Duval, 1993; Font, 2001; Gatica et al, 2008) es el equilibrio tratamiento-conversión que se le debe otorgar al uso de los diferentes registros de representación en la construcción y manejo de la noción; es decir, es importante que se tengan en cuenta los distintos registros de representación así como las coordinaciones y transformaciones que necesariamente tienen que establecerse entre ellos.

CAPÍTULO 3:

LA FUNCIÓN LINEAL, UNA NOCIÓN QUE EMPLEA LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIOTICA PARA MODELAR LA VARIACIÓN

En este capítulo se aborda el diseño e implementación de una prueba diagnóstica así como también el diseño de una situación de aprendizaje presentada cada una en el desarrollo de este trabajo. La prueba y la situación de aprendizaje están enmarcadas principalmente en la teoría de los registros de representación semiótica propuestas por Duval (1993, 2004), el algoritmo a seguir en el proceso de modelación propuestos por Gómez y Maestre (2008) y apoyados en cuatro perspectivas como son: histórica, cognitiva, curricular y matemática.

Es así como se exponen a lo largo de este capítulo, el modelo metodológico que sigue el diseño de la prueba diagnóstica y la situación de aprendizaje a partir de cada una de las fases que las componen y el estudio matemático de la situación problema adoptada. Luego se presenta la prueba diagnóstica con los respectivos análisis preliminar y de lo ocurrido, lo que posteriormente permite el diseño de la situación de aprendizaje propuesta, la cual además de superar las dificultades de la prueba inicial, busca mejorar en los estudiantes el empleo de la función lineal y la coordinación entre los distintos registros de representación semióticas como herramientas para modelar la variación y resolver situaciones del entorno.

3.1 DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Con miras a alcanzar los objetivos propuestos, se pretende realizar un trabajo de indagación dado que este en las aulas asume formas variadas de análisis, como evidenciar y proponer explicaciones sobre la interpretación, comprensión, interrogantes, razonamiento y restricciones que presenten los estudiantes.

El Diccionario de la Lengua Española define indagar como “intentar averiguar, inquirir una cosa discurriendo o con preguntas” Nótese cómo el significado de la palabra hace más énfasis en la búsqueda que en la misma respuesta; en el proceso más que en el producto, el descubrimiento de un problema o una pregunta significativa es el paso más importante del proceso de indagación es la pregunta la que moviliza el trabajo de investigación.

Teniendo en cuenta lo anterior se busca indagar sobre el razonamiento y la comprensión que tienen algunos estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Santa Teresita de La Victoria Valle, sobre el empleo de la noción de función lineal cuando se ponen en juego los registros de representación semiótica y el proceso de modelación. Para tal indagación se aplica una prueba diagnóstico y se realiza una descripción cualitativa y cuantitativa con base en los resultados obtenidos, éstos a su vez se analizan teniendo en cuenta algunas teorías, principalmente las de Duval (1993, 2004) y la de Gómez y Maestre (2008). Con los resultados obtenidos se determinan los elementos necesarios para el diseño de una situación de aprendizaje que involucre el uso de modelos lineales, para generar en los estudiantes una actividad cognitiva de conversión entre los diferentes registros de representación, para objetivar la noción matemática de función lineal y así dar respuesta al interrogante: ¿Cómo emplear la noción de función lineal y sus distintos registros de representaciones semiótica para modelar las situaciones de variación?

3.1.1. Fases de planificación y desarrollo de la indagación.

A continuación se describen las diferentes fases que se tienen en cuenta en el desarrollo del trabajo expuesto en este documento, que constituyen la organización y estructura de la prueba diagnóstica y la situación de aprendizaje: planificación, implementación y análisis de los resultados.

Fase de planificación y organización

En esta fase se consideraron los análisis previos a tener en cuenta para la planeación y organización del diseño de la prueba diagnóstica y la situación de aprendizaje, su desarrollo y análisis de resultados, orientada por los referentes teóricos expuestos en el marco de referencia conceptual en el cual se distinguen cuatro perspectivas: histórica, curricular, cognitiva y matemática. Se realizará un estudio bibliográfico para recopilar información pertinente que permita identificar las restricciones que llevan a que los estudiantes presenten dificultades al trabajar con los diferentes registros de representación semiótica de la noción de función lineal, y sobre los que resulten al razonar en el momento de modelar situaciones que relacionen dicha noción con el entorno. Además se prepara y diseña la prueba diagnóstica que se lleva a cabo, la cual estará organizada bajo aspectos que permiten abordar el tema de la función lineal para determinar las características de los estudiantes con los cuales se realiza la experiencia y valorar su razonamiento.

Fase de experimentación o implementación

En esta fase se consideraron las formas y métodos a partir de los cuales se va a llevar a cabo la prueba diagnóstica, la aplicación y observación de la misma. La forma de trabajo es individual y a cada estudiante se le entrega la prueba para que la desarrolle, los observadores por su parte recopilarán información que les sirva para un posterior análisis. Una vez terminada la prueba empieza un proceso de organización de resultados obtenidos que, junto con la información tomada de la observación, serán objeto de una descripción de las causas que conllevan a que los estudiantes presenten dificultad en el manejo de las diferentes formas de representación semiótica del concepto de función lineal.

Fase de análisis de los resultados

Esta fase se lleva a cabo para conocer datos o informaciones de determinada situación. Con la ayuda del soporte bibliográfico, la observación, organización, recopilación y descripción de las causas se procederá a hacer un estudio sobre las restricciones que resulten como producto de las falencias que presenten los estudiantes en el manejo de las diferentes formas de representación semiótica de la noción de función lineal y la modelación de las situaciones variación. Con los resultados obtenidos se tiene como fin proponer una situación de aprendizaje que aporte elementos para el empleo de la función lineal y de sus distintas representaciones semióticas como herramientas para modelar y resolver situaciones del entorno, además promover la formación de pensamiento matemático variacional de los estudiantes y el empleo de la función lineal mediante el cambio entre registros de representación semiótica como herramientas para modelar y resolver situaciones de variación. Por último, se hará una justificación del por qué la situación de aprendizaje propuesta supera las restricciones que presentaron los estudiantes en la prueba diagnóstica, y la cual permita dar cuenta de lo ocurrido durante el trabajo de indagación.

3.1.2. Estudio de la situación problema propuesta en la prueba diagnóstica

A continuación se presenta la situación problema en la cual se ha enmarcado la prueba diagnóstica y el contenido matemático de la misma.

3.1.2.1 Situación problema

Para las actividades a realizar, se ha tomado como referente una situación problema de las pruebas PISA (2006), con la cual se pretende que los estudiantes logren caracterizar la función lineal a partir de un modelo que se construye desde una situación del entorno. A partir de ella se ha diseñado la prueba diagnóstica adaptando cada una de las actividades en relación con la situación problema.

Excursión colegial

Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

¿Qué empresa deberá elegir la clase para cada uno de los recorridos totales de la excursión?

3.1.2.2 Contenido matemático de la situación

Ecuaciones

Tomando a “**y**” como el valor a pagar por el alquiler del bus y a “**x**” como el número de km recorridos, tenemos:

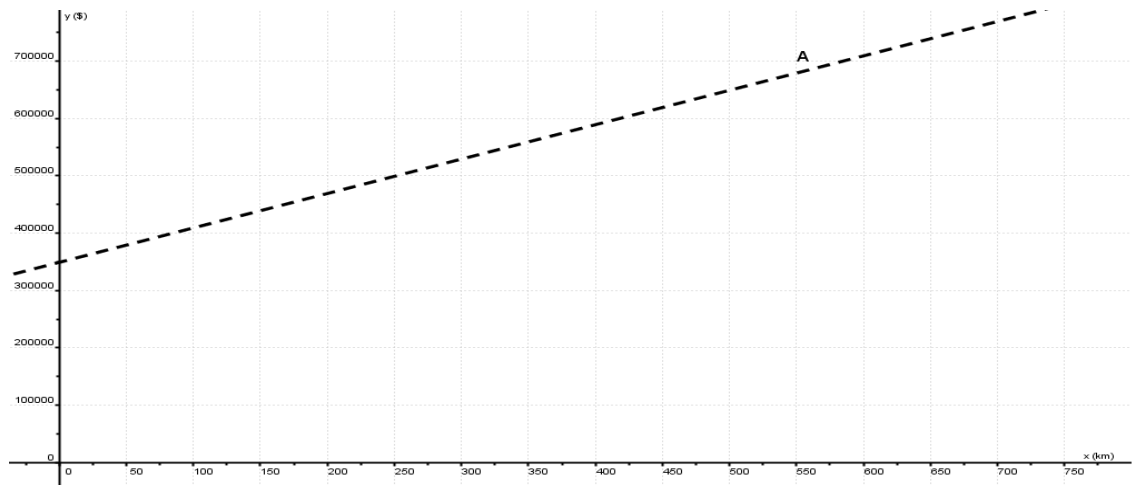
$$\text{Agencia A : } y = 600x + 350000$$

$$\text{Agencia B : } y = 650x + 260000$$

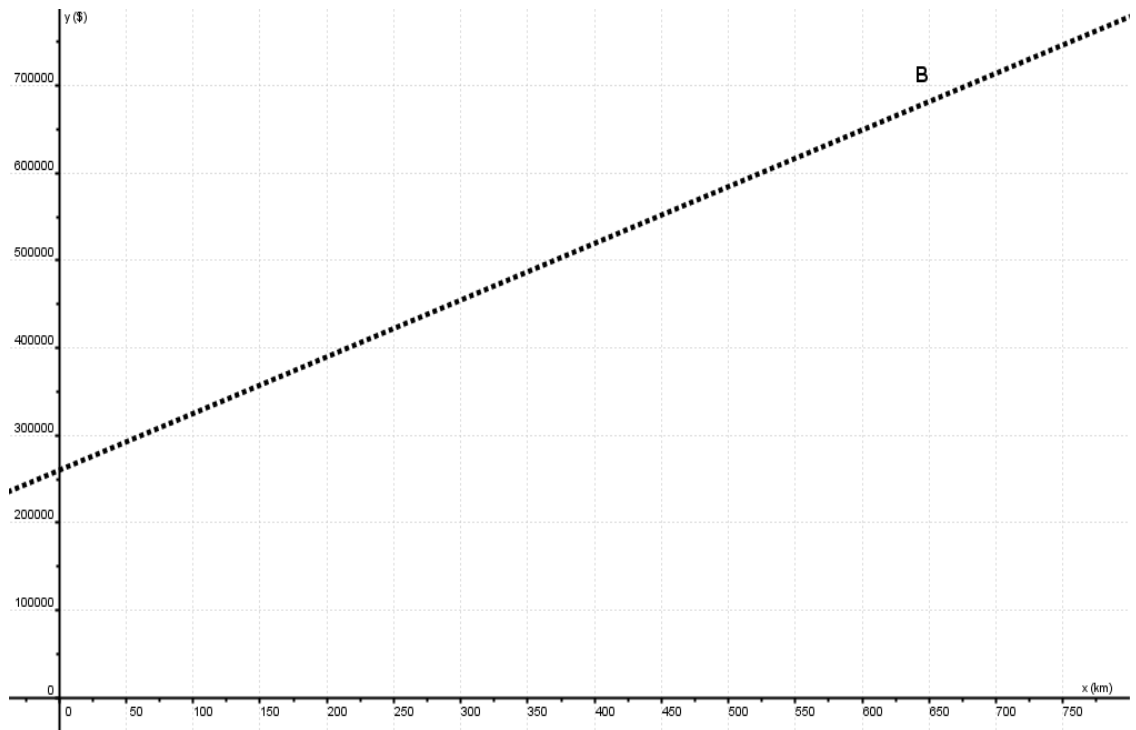
$$\text{Agencia C : } \begin{cases} 300000, & \text{si } x < 250 \\ 300000 + 1000(x - 250), & \text{si } x > 250 \end{cases}$$

Gráficas

- 1) Gráfica de la situación de la primera agencia



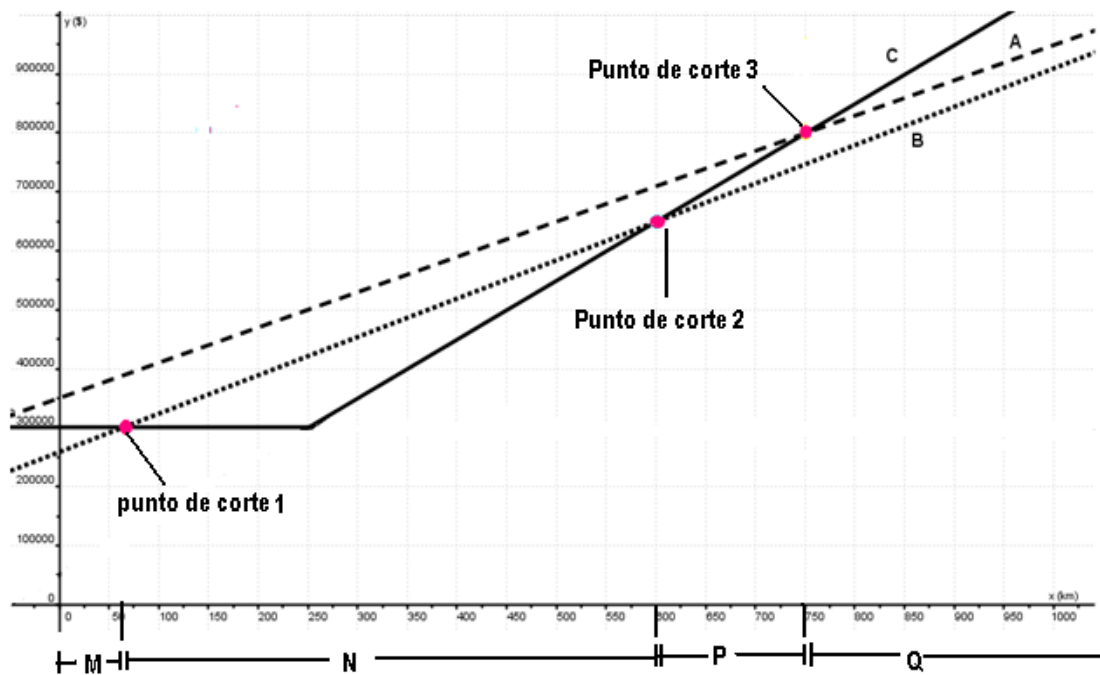
2) Gráfica de la situación de la segunda agencia



3) Gráfica de la situación de la tercera agencia

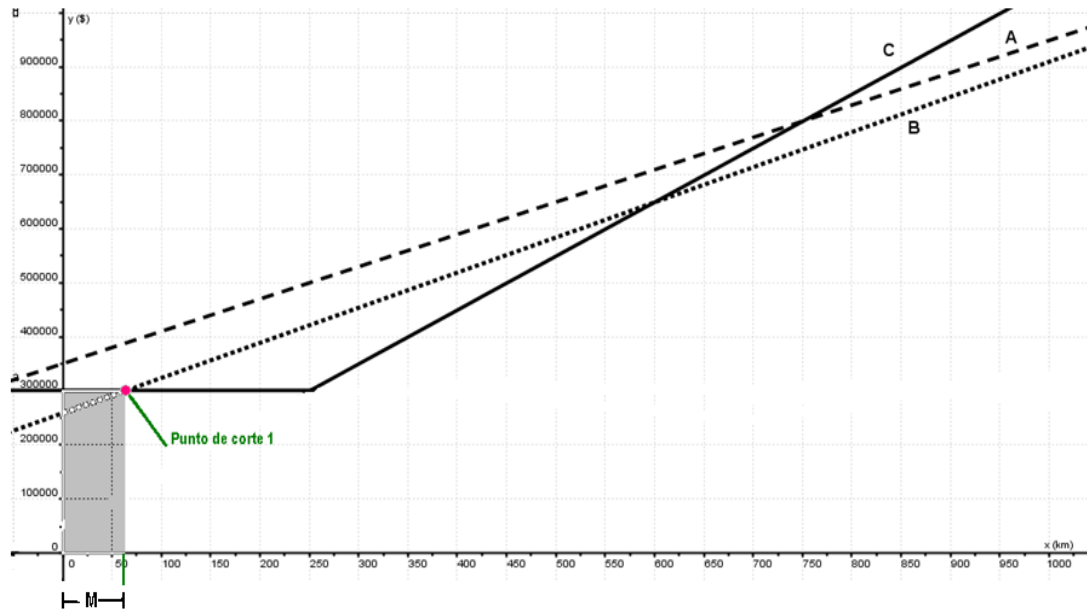


d. Gráfica de las tres agencias



Análisis gráfico de las ecuaciones

Punto de corte 1

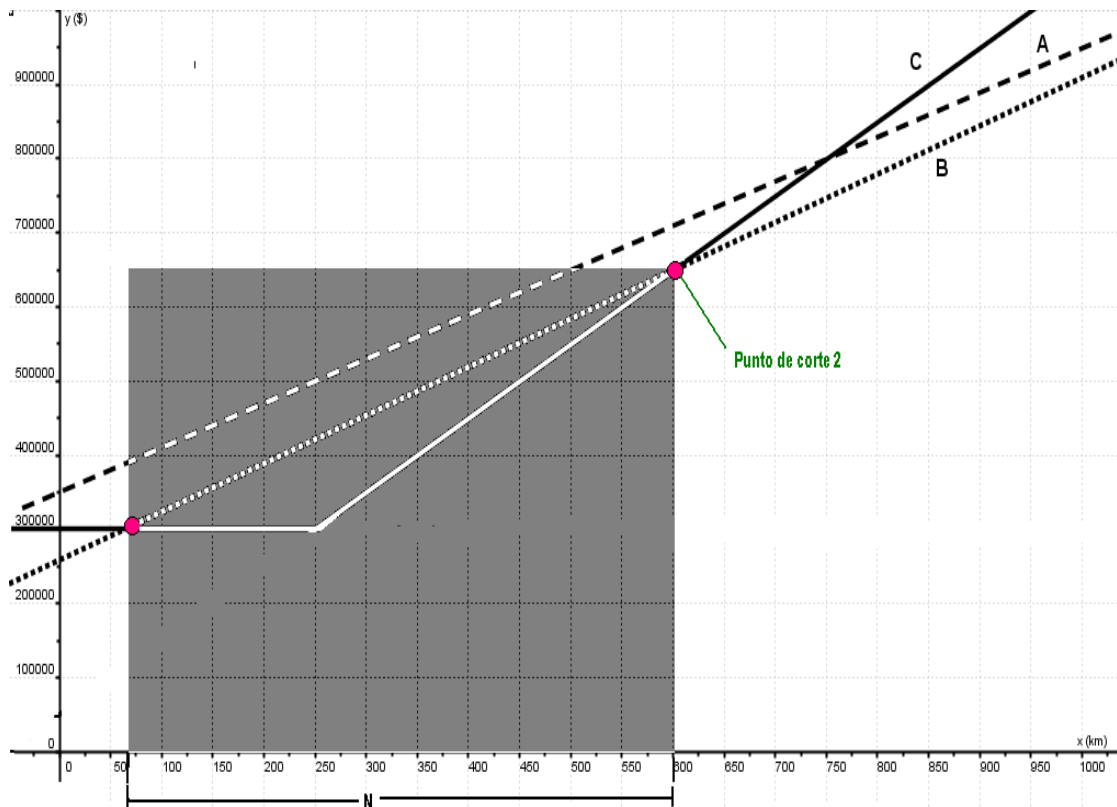


Punto de intersección de B y C es $(61.54, 300000)$, es decir, que el valor a pagar en ambas agencias es el mismo cuando se recorren 61.54 km aprox. Dada la forma de la expresión de C, se encuentran nuevamente en el punto de corte 2.

Con este punto de corte 1 se determina la región M, como el intervalo de valores de x (km) que son menores de 61.54 km. En éste las agencias se organizan, según el costo así:

Bajo	Medio	Alto
B	C	A

Punto de corte 2

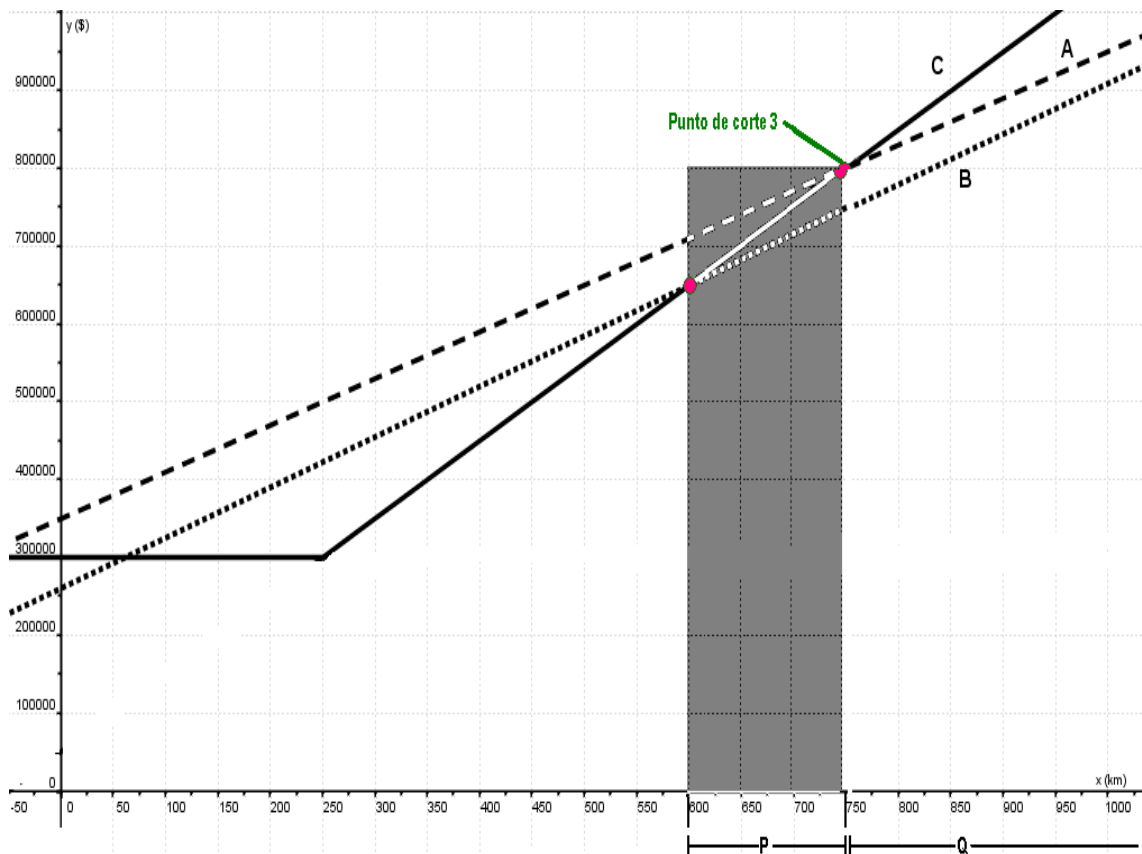


Punto de intersección de C y B, como ocurre después de 250 km se usa la segunda expresión para C, es (600, 650000), es decir, que el valor a pagar en ambas agencias es igual solo cuando se recorren 600 km.

Con este punto de corte 2 se determina la región N, como el intervalo de valores de x (km) que son mayores que 61.54 km y menores que 600 km. En éste las agencias se organizan, según el costo así:

Bajo	Medio	Alto
C	B	A

Punto de corte 3



Punto de intersección de A y C, pero ahora C tiene otra expresión analítica, como ocurre después de 250 km, se usa la segunda expresión para C, es (750, 800000), es decir, que el valor a pagar en ambas agencias es igual solo cuando se recorren 750 km. Ese valor a pagar es igual a 800000.

Con este punto de corte 3 se determinan las regiones P y Q, La región P está determinada por los valores de x (km) que son mayores que 600 km y menores que 750 km; En éste las agencias se organizan, según el costo así:

Bajo	Medio	Alto
B	C	A

La región Q está determinada por los valores de x (km) que son mayores que 750 km, cabe mencionar que no se tuvo en cuenta el punto de corte entre la recta A y

B en el punto (1800, 1430000) dado que el número de km excedía el “normal” para un viaje en bus En éste las agencias se organizan, según el costo así:

Bajo	Medio	Alto
B	A	C

Relación de los costos entre las tres agencias: Tabla Resumen

Región Costos	$x < 61.54$	$61.54 < x < 600$	$600 < x < 750$	$750 < x < \infty$
	(0, 61.54)	(61.54, 600)	(600, 750)	(750, ∞)
	Región M	Región N	Región P	Región Q
Bajo	B	C	B	B
Medio	C	B	C	A
Alto	A	A	A	C

3.2. PRUEBA DIAGNÓSTICO

La prueba diagnóstico, permite que a partir de la mayoría de las actividades que la componen los estudiantes realicen tratamientos y conversiones entre las distintas representaciones semióticas que se pueden extraer de una situación problema como es “**excursión colegial**”, un problema que con un detallado estudio brindará buenos resultados para un posterior análisis matemático, semiótico, y cognitivo, así como también para una mejor aproximación hacia la elección de una situación de aprendizaje que aporte elementos para el empleo de la función lineal y de sus distintas representaciones semióticas como herramientas para modelar y resolver situaciones del entorno.

3.2.1 Análisis Preliminar

A continuación se presenta la prueba diagnóstico y el respectivo análisis preliminar, en el cual se exponen las expectativas de desempeño de los estudiantes al momento de enfrentarse al objeto matemático en cada actividad (descripción general y contenido matemático movilizado en la actividad: análisis matemático, registros de representación semiótica que intervienen, y resultados esperados).

3.2.1.1 Prueba diagnóstico

GOBERNACIÓN DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "SANTA TERESITA"
Resolución de reconocimiento Oficial 1748 del 5 de julio de 2006
CÓDIGO DANE 1764030000-79. NIT. 821000993-7



Grado noveno

Nombre del estudiante: _____ **Fecha:** _____

Excursión colegial

Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

Actividad 1: Hallar la ecuación

Los datos que se presentan en las siguientes tablas corresponden a la información que cada agencia suministra sobre el costo que se debería pagar si la distancia fuera de 300 km recorridos.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	300	\$180.000	\$530.000
Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
B	\$260.000	\$650	300	\$195.000	\$455.000

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	300	\$50.000	\$350.000

- 1) Teniendo en cuenta las tablas y la información suministrada por cada agencia. Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus.

Agencia	Ecuación
A	
B	
C	

Actividad 2: Completar las tablas

Para cada uno de los numerales 1, 2, 3 que se presentan a continuación encontraran unas tablas con algunos datos, los cuales les permitirán hallar el valor a pagar para cada una de las agencias A, B, C cuando se han recorrido distintos km durante la excursión.

- 1) En las siguientes tablas, hallar el valor a pagar en cada agencia al recorrer 200 Km y 300 Km respectivamente.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	X=200 km		
B	\$260.000	\$650	X=200 km		

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	X=200 km		

- a) Teniendo los resultados de las tablas ¿cuál es el mejor plan hasta los 200 km recorridos? Justifica tu respuesta.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	X=300 km		
B	\$260.000	\$650	X=300 km		

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	X=300 km		

- b) Teniendo los resultados de las tablas ¿cuál es el mejor plan hasta los 300 km recorridos? Justifica tu respuesta.

- 2) En las siguientes tablas, hallar el valor a pagar en cada agencia al recorrer 400 Km y 480 Km respectivamente.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	X=400 km		
B	\$260.000	\$650	X=400 km		

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	X=400 km		

- a) Teniendo los resultados de las tablas ¿cuál es el mejor plan hasta los 400 km recorridos? Justifica tu respuesta.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	X=480 km		
B	\$260.000	\$650	X=480 km		

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	X=480 km		

- b) Teniendo los resultados de las tablas ¿cuál es el mejor plan hasta los 480 km recorridos? Justifica tu respuesta.

- 3) En las siguientes tablas, hallar el valor a pagar en cada agencia al recorrer 61 Km, 600 Km y 750 Km respectivamente.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	X=61 km		
B	\$260.000	\$650	X=61 km		

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	X=61 km		

- a) Teniendo los resultados de las tablas ¿cuál es el mejor plan hasta los 61 km recorridos? Justifica tu respuesta.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	X=600 km		
B	\$260.000	\$650	X=600 km		

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	X=600 km		

- b) Teniendo los resultados de las tablas ¿cuál es el mejor plan hasta los 600 km recorridos? Justifica tu respuesta.

Agencia	Cargo fijo	Valor por km	Km Recorridos (x)	Valor total km	Valor total
A	\$350.000	\$600	X=750 km		
B	\$260.000	\$650	X=750 km		

Agencia	Cargo fijo hasta 250 km	Valor por km adicional	Km Recorridos (x)	Valor total km adicionales	Valor total
C	\$300.000	\$1.000	X=750 km		

- c) Teniendo los resultados de las tablas ¿cuál es el mejor plan hasta los 750 km recorridos? Justifica tu respuesta.

Actividad 3: Caracterizar intervalos

Hay momentos en los que dos agencias pagan el mismo valor cuando se ha recorrido la misma distancia, lo cual determina unos intervalos de kilómetros recorridos (x). Cuando esto ocurre se forman regiones en cada intervalo que denominaremos M, N, P y Q.

Región	Región M	Región N	Región P	Región Q
Intervalos km recorridos (x)	(0 , 61)	(61 , 600)	(600 , 750)	(750 , ∞)

- 1) Termina de completar la siguiente tabla teniendo en cuenta en qué nivel (bajo, medio, alto), se ubica cada agencia A, B, C de acuerdo a los intervalos dados y los valores totales encontrados en las tablas del numeral 3 de la actividad (2).

Región Costos	Región M	Región N	Región P	Región Q
Bajo		C		
Medio			C	
Alto	A			

3.2.1.2 Análisis de la prueba diagnóstico

Expectativas de desempeño en los estudiantes al momento de enfrentarse al objeto matemático en cada actividad.

Descripción general

La prueba diagnóstico es diseñada a partir de la situación problema **excursión colegial** mencionada con anterioridad, ésta tiene que ver con la necesidad de unos estudiantes de un colegio al alquilar un bus y hacer una excursión, para lo cual se ponen en contacto con tres agencias con el fin obtener información sobre sus precios, y a partir de varias circunstancias o en particular desde varios recorridos en kilómetros se generan variaciones entre el valor a pagar y las distancias recorridas, lo que lleva a la puesta en práctica de varias actividades que inmersas en una prueba buscan diagnosticar las debilidades y fortalezas de los estudiantes del grado noveno de una institución en el trabajo con la función lineal.

Actividad 1: hallar la ecuación.

Consta de un único punto. Se busca que a partir de la información suministrada en la situación problema, el estudiante logre encontrar las ecuaciones lineales que representan el fenómeno que allí se presenta. Para ello se da un ejemplo donde la información está organizada en una tabla y se muestran los resultados del valor total cuando se han recorrido 300 km.

Con ésta primera parte se pretende que el estudiante apoyado por un registro de representación tabular, se familiarice con las características de cada plan. Cada

enunciado busca que el estudiante se acerque a una expresión general, que describa la relación que existe entre el valor básico a pagar por el alquiler del bus y los kilómetros adicionales que se recorran según la información suministrada por cada agencia, tal expresión viene de una representación verbal y debe ser expresada en una representación simbólica correspondiente al modelo funcional $f(x) = mx + b$. Para cada uno de los planes, el significado de cada una de las variables involucradas con respecto a la situación planteada permite llegar a comprender el funcionamiento de cada variable y su correspondencia simbólica, es decir que al usar símbolos no se cambia el significado de las variables, sin embargo la información proporcionada en cada enunciado dirige al estudiante hacia la construcción de una expresión que involucre operaciones fijas, reconociendo que la variación está dada por el número de kilómetros recorridos en este caso 300 km.

Actividad 2: valor numérico de cada ecuación (completar las tablas)

Consta de tres puntos, estos están asociados al mismo contexto de la actividad 1, en donde cada enunciado busca que el estudiante se acerque a una expresión simbólica general que describa la relación que existe entre el valor a pagar en cada agencia y la distancia recorrida, y con lo cual se busca el cálculo operacional para determinar el valor total a pagar por cada agencia en distintos recorridos.

Los puntos de esta actividad se abordan en conjunto, donde las variables utilizadas son distintas aumentando en cada punto el nivel de dificultad en busca del planteamiento y aplicación de expresiones algebraicas de la forma $y = mx + b$, así como también de la interpretación de la variación del valor total a pagar en cada una de las agencias cuando se tiene en cuenta la distancia recorrida, donde en algunos casos el valor a pagar para dos agencias es el mismo, en otros el valor a pagar es igual al cargo fijo, puesto que la constante de proporcionalidad no sobrepasa el cargo fijo hasta una determinada distancia de recorrido, como es en el caso particular de la agencia C.

El punto 1 consta de dos pares de tablas las cuales comprenden unos datos que permiten hallar el valor a pagar por cada una de las agencias A, B, y C cuando se han recorrido distintos kilómetros durante la excursión. Cada par de tablas con una consigna de preguntas cuyos enunciados hacen referencia a la escogencia del mejor plan hasta determinada distancia de kilómetros recorridos, teniendo en cuenta los resultados de cada par de tablas. En cada consigna se busca que el estudiante, apoyado por un registro de representación tabular, se familiarice con las características de cada plan, principalmente los planes bajo, medio y alto, y justifique de manera individual cuál es el más bajo.

El punto 2 tiene la misma estructura del punto 1 con diferencias en la variable x .

El punto 3 a diferencia de los puntos 1 y 2 consta de tres pares de tablas y para cada par de tablas una consigna, teniendo como resultado tres consignas, de resto tiene la misma estructura que los puntos 1 y 2 con diferencias en la variable x . Es así como la actividad 2 consta de tres puntos a saber:

Tablas Punto	1° par de tablas	2° par de tablas	3° par de tablas
Punto 1	Consigna a	Consigna b	
Punto 2	Consigna a	Consigna b	
Punto 3	Consigna a	Consigna b	Consigna c

Tabla 7. Resumen de tablas en la actividad 2

Actividad 3: caracterizar intervalos

Consta de un único punto. Se pide completar los datos de una tabla ubicando a cada una de las agencias A, B o C según corresponda al nivel del costo total de recorrido sea bajo, medio o alto. Para ello los estudiantes deben recurrir a la información suministrada en esta actividad y que está relacionada con los momentos en que dos agencias pagan el mismo valor de la excursión cuando se han recorrido la misma distancia y que determinan unos intervalos de kilómetros

recorridos (x), cuyos datos son puestos en una tabla en correspondencia con las regiones M, N, P y Q, las cuales se forman a partir de cada uno de los intervalos, además deben recurrir al registro tabular del punto (3) de la actividad inmediatamente anterior.

Contenido matemático movilizado en las actividades

Proceso de modelación involucrado en las actividades

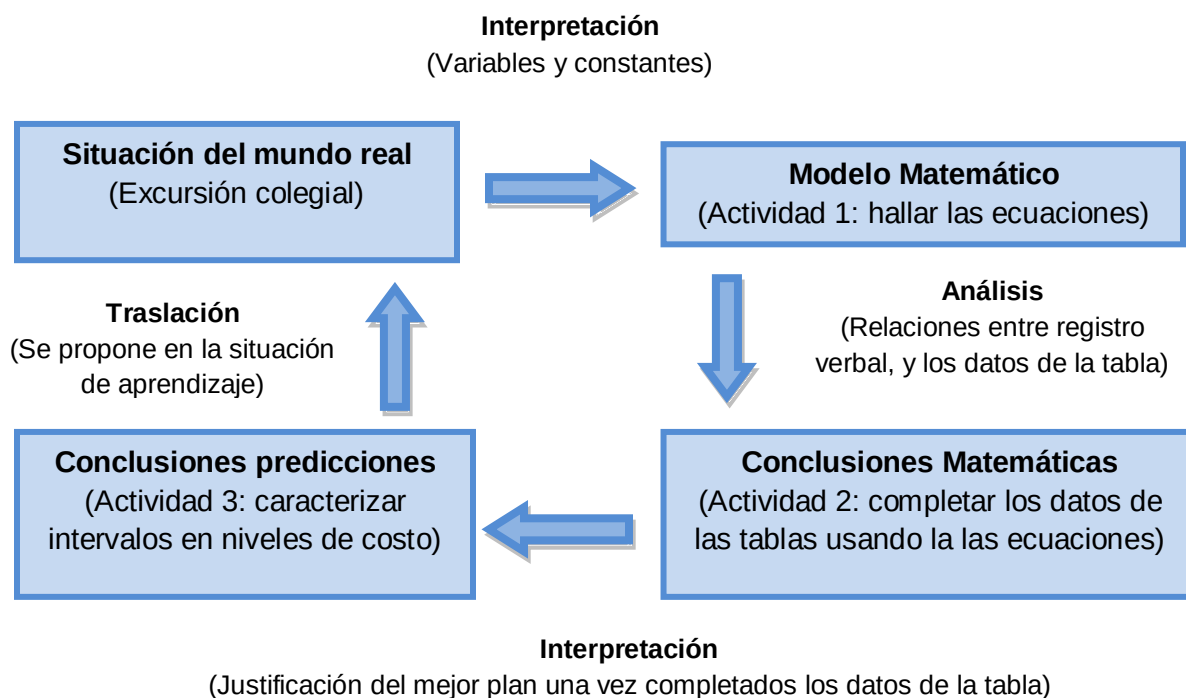


Ilustración 2. Algoritmo del proceso de modelación en la prueba diagnóstico

Análisis matemático

El contenido matemático movilizado es el modelo de función lineal, cuya expresión matemática es $f(x) = mx + b$. El estudiante debe encontrar y dar significado al valor de x , como la constante de proporcionalidad que determina las relaciones establecidas entre x y y . En donde la variable independiente x está asociada a los kilómetros recorridos, y b representa el valor del cargo fijo, para los cuales la

variación de x afecta el comportamiento del valor total a pagar en el alquiler del bus en cada agencia.

Este modelo funcional permite reconocer relaciones de dependencia entre las variables involucradas en la función lineal, el cociente entre la variable independiente y la variable dependiente es una constante (constante de proporcionalidad), sin embargo, no se busca abordar el estudio de la proporcionalidad, sino utilizar dicho concepto como modelo funcional y hacer un primer acercamiento a la construcción de expresiones algebraicas lineales de la forma $y = kx$ y $y = mx + b$; debido a que dichas relaciones muestran magnitudes que varían una en relación con la otra, además, reconocer el comportamiento de sus relaciones.

Es así como se debe reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí a una situación concreta de variación.

Registros de representación semiótica que intervienen en la actividad

En el diseño de la prueba diagnóstica se ha decidido trabajar principalmente con tres registros: el registro en lengua natural, el registro tabular y a partir de ellos, llegar a la construcción del registro algebraico con expresiones algebraicas del tipo $y = mx + b$ a través de la variabilidad.

El registro en lengua natural permite que haya una comunicación entre el estudiante y el contenido presentado en la actividad, debido a las diferentes interpretaciones que el estudiante puede hacer del enunciado en lengua natural, este se puede convertir en una tarea compleja, puesto que el estudiante se enfrenta con un enunciado que está en lengua natural cuando en realidad es un contenido matemático lo que hace que el propósito de la actividad cause dificultad.

Cuando se ponen en práctica los registros en lengua natural y tabular, el problema se da por la discriminación de las unidades significantes en el contenido del enunciado, es por ello que se ha dado claridad en los enunciados y estos son acordes con la información del texto inicial de la situación problema de modo que

se establezca una congruencia con las unidades significantes. También se pone en juego para las actividades que requieren una conversión de un registro a otro los fenómenos de congruencia y no congruencia, estos se encuentran entre el enunciado y su respectiva simbolización donde el estudiante debe realizar un cambio de registro de la lengua natural a un registro simbólico.

La finalidad es que el estudiante logre representar a través de un modelo funcional una determinada situación problema, es decir, expresar simbólicamente una situación que se le presenta en un enunciado en lengua natural. Para hacer directamente esta conversión se requiere una segmentación de cada registro en sus unidades significantes estableciendo una correspondencia semántica, univocidad semántica terminal y una conservación en el orden de las unidades en cada registro.

Resultados esperados

En la primera actividad el único punto asignado es de orden discursivo, encaminado a la construcción de relaciones entre magnitudes (dependencia) a través de una situación problema relacionada con la necesidad de un grupo de estudiantes por alquilar un bus utilizando para ello una situación del mundo real, con el fin de hacer la actividad familiar y de interés para los estudiantes (contextualizada); toda la prueba ha sido diseñada teniendo en cuenta este contexto.

Para dar respuesta a este punto, se requiere por parte de los estudiantes hacer comparaciones en sus observaciones, y cálculos básicos (uso de operaciones fundamentales: la adición, la sustracción y la multiplicación), con un orden específico que lleve al estudiante a encontrar las ecuaciones que le permiten a cada agencia encontrar el valor total del servicio del bus dada la representación tabular con los datos necesarios en relación con la información inicial. El objetivo es lograr que los estudiantes, a partir de la información suministrada en una situación problema, logren encontrar las ecuaciones lineales que representan el fenómeno que allí se presenta. Para ello se muestra un ejemplo donde la

información está organizada en una tabla y se revelan los resultados del valor total cuando se han recorrido 300 km.

En la segunda actividad, las tablas que se presentan tienen la misma estructura que la tabla suministrada en la primera actividad, en éstas los estudiantes deben aplicar la ecuación lineal para operar correctamente en las tablas. Se desea saber el valor total a pagar para diferentes distancias, con el propósito de analizar qué tanto puede variar ese valor entre una y otra distancia, respuesta que debe ser justificada en cada una de las consignas.

En cada punto de la segunda actividad el estudiante debe reconocer y estudiar el comportamiento de la variable dependiente, que es el costo total del transporte al asignar diferentes valores a la variable independiente x (km recorridos), de este modo se hace constatar cuál es el efecto que produce la variación cuando el costo total del recorrido en cada una de las agencias varía dependiendo de algo y en este caso varía dependiendo de los kilómetros recorridos lo que se conoce como aspecto covariante de las funciones.

En la tercera actividad se debe realizar un análisis en la variación de los precios (bajo, medio, alto), teniendo en cuenta los valores totales a pagar en los intervalos de recorrido de una tabla de la actividad anterior. Para ello se presentan las regiones con los intervalos correspondientes a partir de los cuales los estudiantes deben establecer dicha variación haciendo una comparación entre estos y los valores totales de la tabla del punto 3 de la actividad anterior.

3.2.2 Análisis de los resultados

3.2.2.1 Descripción general de la aplicación de la prueba diagnóstica

Aplicada al grado: 9º

Número de estudiantes: 16

La prueba fue aplicada el jueves 13 de abril de 2012 a la 9:30 am y el tiempo utilizado en el desarrollo fue de 1:30 minutos, con la participación de 16 estudiantes del grado 9º de la Institución Educativa Santa Teresita de la Victoria Valle.

Se da inicio a la actividad luego de repartir a cada estudiante una copia y hacer lectura del contenido. El profesor hace una introducción del enunciado inicial de la actividad, exponiendo las características de la información suministrada por la situación problema así como también la suministrada por cada agencia, pues es alrededor de éstas que giran las actividades diseñadas en la prueba diagnóstico. De forma individual cada estudiante comienza a desarrollar la prueba.

3.2.2.2 Análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados de la prueba diagnóstico

A continuación se presenta para cada una de las actividades un análisis matemático con los porcentajes de respuestas encontradas y su respectiva descripción, así como también los resultados desde los registros de representación semiótica que intervienen en cada actividad (ver anexos). Los diagramas circulares que se muestran, representan la división de los porcentajes de respuestas, de modo que se exprese la cantidad de estudiantes que realizan el mismo procedimiento para hallar las ecuaciones según el tipo de respuesta que asumen como se describe al lado de cada diagrama.

Actividad 1: Hallar la ecuación

Resultados desde el contenido matemático

Durante la ejecución de la prueba para la actividad 1, no todos los estudiantes usaron un modelo de ecuaciones para resolver el problema. Dado esto, detallamos a continuación los resultados en dos grupos:

1. Estudiantes que usan ecuaciones.

2. Estudiantes que sólo usan operaciones aritméticas.

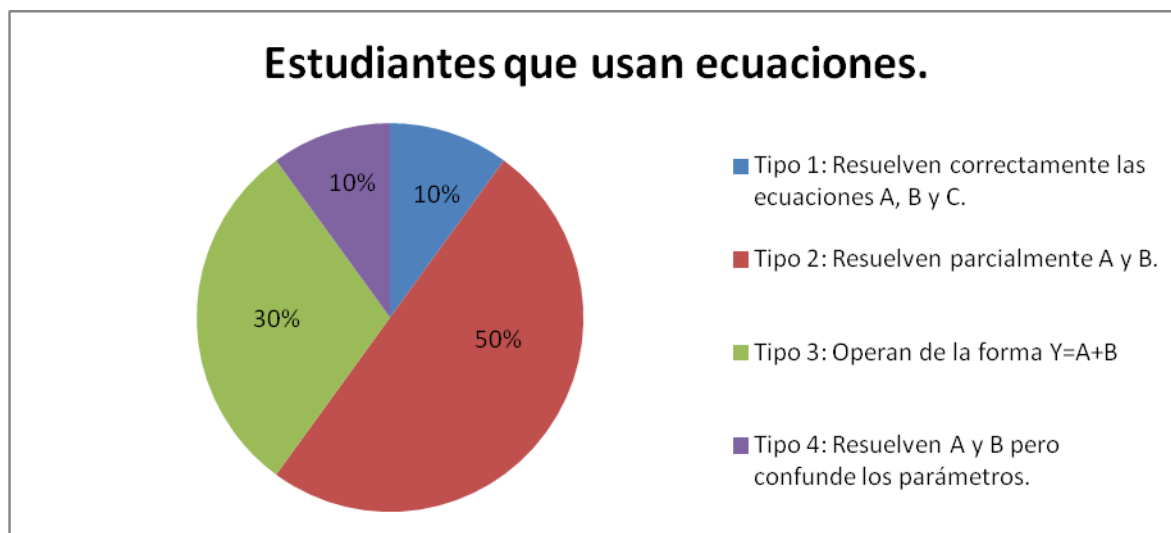


Ilustración 3. Porcentaje de estudiante que emplean expresiones algebraicas.

Descripción de los resultados

El primer grupo lo conforman diez estudiantes quienes usan ecuaciones para resolver el problema de las agencias A, B y C:

- El 60% utiliza ecuaciones lineales para designar la información que permite hallar el valor total del servicio del bus, de ellos sólo el 10% (tipo 1) resuelve correctamente toda la actividad mientras que el otro 50% (tipo 2) resuelve algunas de las ecuaciones A y B pero ninguno resuelve la ecuación para la agencia C. Se pueden evidenciar restricciones en la forma algebraica $y = mx + b$ donde los estudiantes realizan el procedimiento incorrecto cometiendo errores como:
 - Confundir los parámetros (valor por kilometro por valor total) y los ubican mal en la ecuación.
 - No usan la variable sino el valor de la variable.
 - Omiten los miles en las cantidades numéricas.
- El 30% (tipo 3) de los estudiantes no hallan las ecuaciones lineales y operan de la forma $y = a + b$. De estos el 10% explica el procedimiento que

para ellos corresponde al valor de “a” y lo expresan en las explicaciones que hacen como el producto de “a*m”, posteriormente lo resuelven, escriben el resultado en la ecuación de la casilla que corresponda y le adicionan el valor de “b” que es el cargo fijo, estos estudiantes sólo hallan el valor total para las agencias A y B. Otro 10% opera de la misma manera pero no explica el procedimiento sino que lo simplifica expresándolo en la primera ecuación de la agencia A, y para la agencia B lo hace directamente, estos tampoco logran hallar la ecuación para la agencia C. El 10% restante sólo hace operaciones aritméticas para todas las ecuaciones sin analizar el sentido de las variables, aunque no siguen la consigna de hallar las ecuaciones, el procedimiento de hallar el valor total de km para las agencias A y B es correcto y por consiguiente el valor total del servicio del bus también lo es pero no les permite realizar el procedimiento para la agencia C de éstos estudiantes se puede inferir que operan de manera directa sin discriminar las unidades significantes entre las diferentes agencias.

- El 10% (tipo 4) restante confunde los parámetros en su intento por encontrar el valor del recorrido del bus en cada una de las agencias, lo que hacen es realizar operaciones aritméticas con los valores de la tabla hasta encontrar el valor total empleando incorrectamente las operaciones con las variables dependiente e independiente.

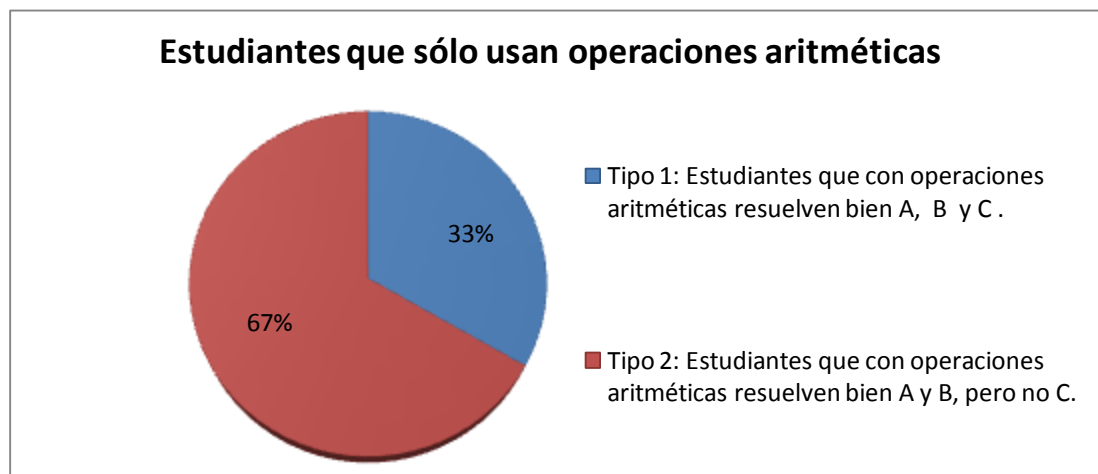


Ilustración 4. Porcentaje de estudiantes que emplean operaciones aritméticas

Descripción de los resultados

Seis estudiantes conforman el segundo grupo, estos evidencian restricciones en la escritura de las ecuaciones, omiten las variables pertinentes para la ecuación que se pide hallar en la consigna. Es así como realizan operaciones aritméticas donde:

- El 33% (tipo 1) encuentran el resultado correcto para las agencias A y B.
- El 67% (tipo 2) no utilizan adecuadamente las operaciones aritméticas y no logran hallar el valor total dado en la tabla.

Resultados desde los registros de representación semiótica

La actividad 1 involucra una relación entre varios registros de representación que van desde:

1. Una descripción verbal hasta la tabla (lectura de las relaciones numéricas).
2. Una descripción verbal hasta una expresión analítica (interpretación de la formula con sus parámetros).
3. Una tabla hasta una expresión analítica (cálculo dando valores).

Relación que podría caracterizar una conversión congruente. Pero para ello los estudiantes debían analizar la naturaleza de las unidades significantes que de que de los registros hacían parte y hacer la discriminación de las mismas para llegar al objetivo que era hallar la ecuación, es decir que dada la situación real y los datos

que en ella se presentan se podrían establecer relaciones con los datos de la tabla que hacen parte de la situación y determinar que x es la variable independiente que corresponde a los km recorridos, m la pendiente un termino independiente que representa el punto de corte con el eje y que corresponde a el valor por km recorrido, b la constante que corresponde al cargo fijo y que y es la variable dependiente que corresponde al valor total del servicio de bus para cada agencia, así una vez segmentadas las representaciones verbal y tabular en sus unidades significantes se hallaría la ecuación. Pero muy pocos estudiantes hicieron este procedimiento formulando en sus respuestas ecuaciones erróneas y en la mayoría de los casos esto ocurrió porque confunden el orden de las unidades en la expresión algebraica de la función lineal.

Actividad 2: Completar las tablas

Resultados desde el contenido matemático

Para ésta actividad se ha caracterizado la tipología de respuestas que aparece en la tabla dado que a diferencia de las ecuaciones para la agencias A y B, la ecuación para la agencia C tiene un mayor nivel de dificultad por ser una función a trozos y se requiere saber que tanto afecta el trabajo con esta clase de ecuaciones en el proceso de discriminación de las unidades significativas pertinentes para encontrar la ecuación así como también cuando se debe realizar la escogencia del plan mas favorable del servicio de bus.

Porcentajes por tipo de respuesta	
Tipo	Descripción
1	Estudiantes que resuelven correctamente las ecuaciones para las agencias A, B y C.
2	Estudiantes que resuelven correctamente las ecuaciones para las agencias A y B pero no para la agencia C.
3	Estudiantes que no resuelven correctamente las ecuaciones para las agencias A, B y C.

Tabla 8. Tipos de respuestas encontradas en la actividad 2

Porcentajes de respuestas: punto 1

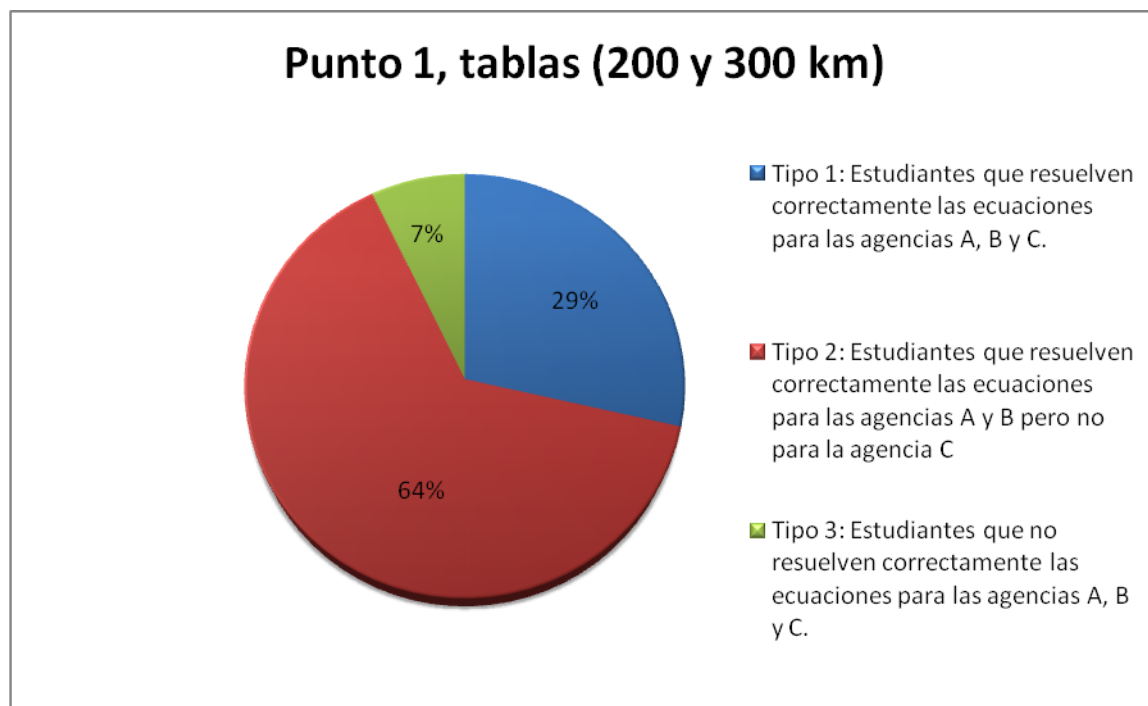


Ilustración 5. Porcentaje de respuestas. (Actividad 2 - punto 1)

Descripción de los resultados

El 29% (tipo 1) de los estudiantes hallan correctamente las ecuaciones para las agencias A, B y C, resuelven adecuadamente las operaciones indicadas, las ecuaciones y la interpretación para realizar la respectiva justificación.

Otro 64% (tipo 2) sólo completan bien los datos para las agencias A y B pero no para la agencia C, lo que puede ser a causa de la mala formulación de la ecuación en la actividad anterior.

El 7% (tipo 3) completa incorrectamente los datos para las agencias A, B y C, sus argumentos son deficientes y no alcanzan a interpretar los datos. Aunque los resultados sean erróneos los estudiantes deberían tener la capacidad explicar lo encontrado cuando deben realizar la justificación a la pregunta que se hace, esto evidencia la falta de interpretación y argumentación de estos estudiantes.

Porcentajes de respuestas: punto 2

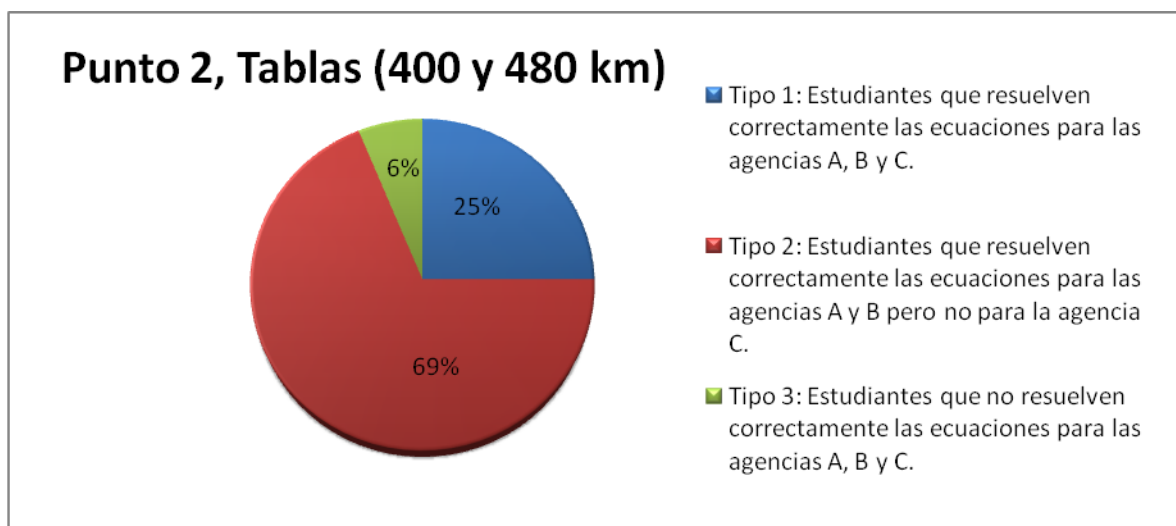


Ilustración 6. Porcentaje de respuestas (Actividad 2 - punto 2)

Descripción de los resultados

El 25% (tipo 1) de los estudiantes resuelven correctamente A, B y C, resuelven adecuadamente las operaciones indicadas, las ecuaciones y la interpretación para realizar la respectiva justificación. Otro 69% (tipo 2) completa bien los datos para las agencias A y B pero no en C. El 6% (tipo 3) restante resuelve mal A, B y C.

Porcentajes de respuestas: punto 3

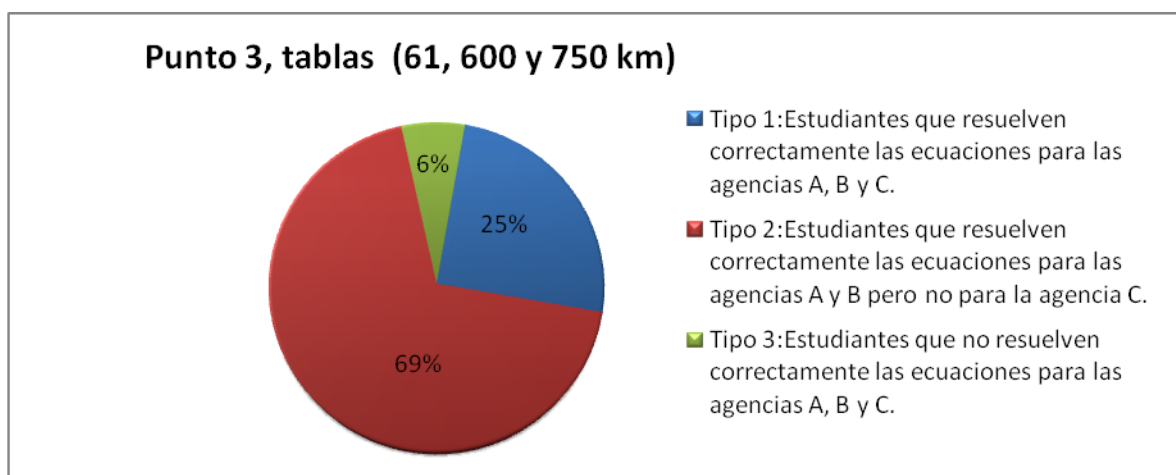


Ilustración 7. Porcentaje de respuestas (Actividad 2 - punto 3)

Descripción de los resultados

El 25% (tipo 1) de los estudiantes resuelven correctamente A, B y C, resuelven adecuadamente las operaciones indicadas, las ecuaciones y la interpretación para realizar la respectiva justificación. Otro 69% (tipo 2) sólo completan bien los datos para las agencias A y B pero no en C, lo que puede ser a causa de la mala formulación en la ecuación en la actividad anterior. El 6% (tipo 3) resuelve mal A, B y C, no alcanzan a interpretar los datos que aunque estén erróneos debería estar en capacidad de explicar lo encontrado.

Resultados desde los registros de representación semiótica

La actividad 2 involucra una relación entre varios registros de representación que van desde:

1. Una expresión algebraica (actividad 1) hasta una tabla (ajuste numérico).
2. Una tabla hasta una descripción verbal (estimación/cálculo de la tabla).

Las relaciones que se pueden establecer entre uno y otro registro corresponden a conversiones, pero en la mayoría de los casos no se realizaron las transformaciones adecuadamente. Los estudiantes debían haber encontrado las ecuaciones correctas en la actividad anterior para poder hacer los cálculos correctos y por consiguiente la mejor la estimación del mejor plan hasta los diferentes km recorridos, dados las restricciones para hallar las ecuaciones correctas, muchas de las estimaciones en esta actividad fueron erróneas. Es así como el registro en las tablas dados los valores de la variable x y una vez discriminadas las unidades significativas, determinan los correspondientes valores para y . En la actividad no se considera el caso para las funciones con pendiente cero y no definida. En cuanto a las unidades significantes para esta actividad se presentaron muchas restricciones pues los estudiantes no se aseguraron de que en la relación que guardaba la variable independiente x ésta era constante, el valor que toma la variable independiente x siempre era diferente de cero y que si

fuese cero no significaba que no se debía pagar ningún valor puesto que siempre había un cargo fijo.

Actividad 3: Caracterizar intervalos

Resultados desde el contenido matemático

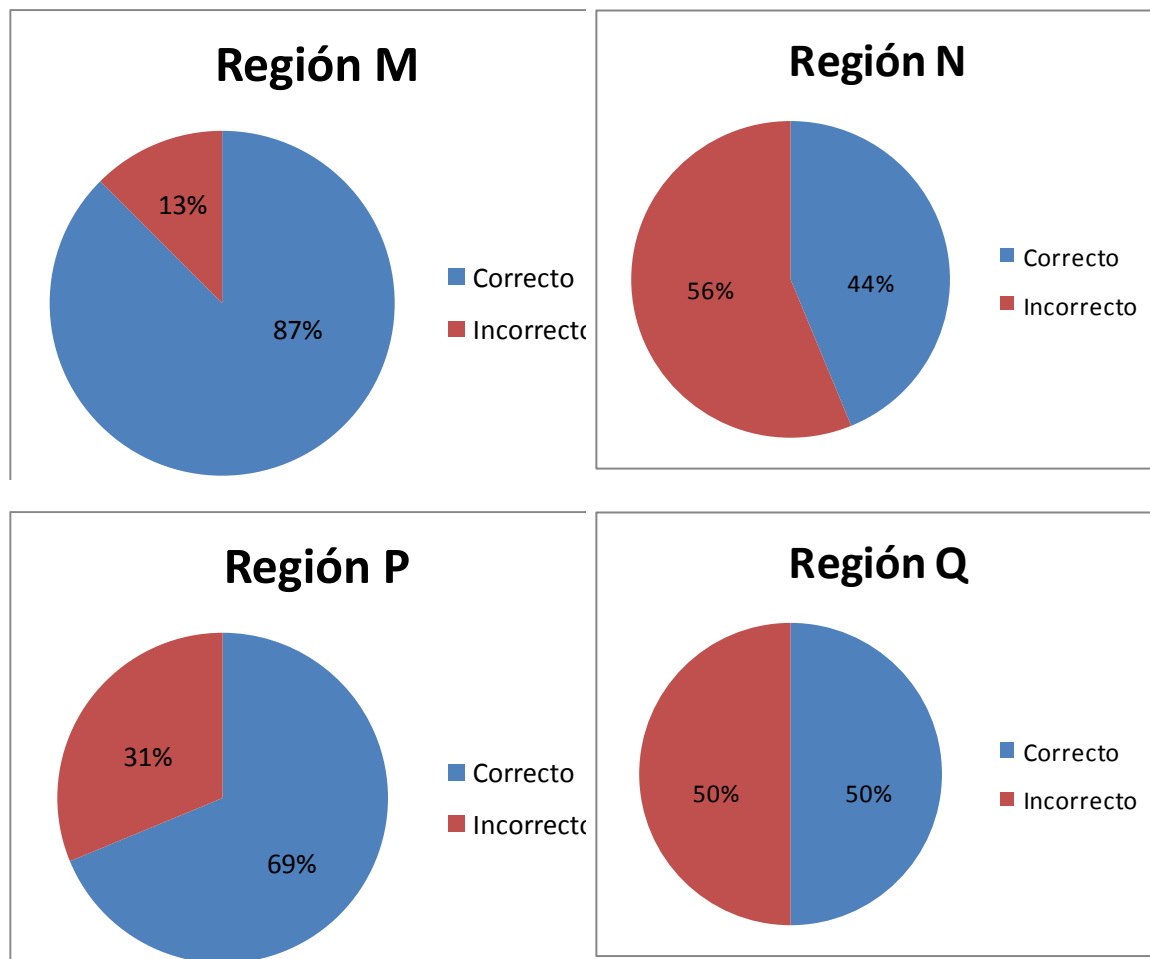


Ilustración 8. Porcentaje de respuestas, tablas de intervalos

Descripción de los resultados

En la actividad 3, el 20% de estudiantes completan bien la tabla, incluso para aquellas regiones donde el valor a pagar es el mismo ponen en las casillas a las dos agencias que allí hacen parte, el 6% de ellos explica el fenómeno que se presenta entre las tres agencias cuando se hace el recorrido más largo. Otro 19% de los estudiantes tienen dificultades para ubicar a las agencias según el costo del

transporte en las regiones N y P, esto puede ser resultado de los datos erróneos al hallar el valor total por kilómetro y valor total por transporte en la actividad anterior la cual hace parte de la interpretación que se le puede dar a esta actividad, restricción que se presenta al ubicar a las agencias en otras regiones como es el caso del 12% de los estudiantes que ubican las agencias en la región Q, otros 12% en la región N y Q, un 6% en la región P y Q, otro 6% en la región Q; un 6% tuvo muchas dificultades en tres de las regiones, específicamente las regiones M, N y Q, en esta última no tiene resultados como es el caso de otro 13% donde además se les dificulta ubicar las agencias en la región N. Por último un 6% de los estudiantes no realizan la actividad 3, afirmando no entender la actividad.

Resultados desde los registros de representación semiótica

La actividad 3 involucra una relación entre varios registros de representación que van desde:

1. Una descripción verbal hasta una tabla (lectura de las relaciones numéricas)
2. Una tabla hasta una descripción verbal (estimación/cálculo de la tabla).

Las relaciones que se pueden establecer entre uno y otro registro corresponden a conversiones, y de igual manera que en las actividades anteriores los estudiantes debían discriminar las unidades significantes en cada uno de los registros para que la transformación de conversión fuera posible. En la mayoría de los casos los estudiantes hicieron la lectura de las relaciones verbales adecuadamente, partiendo desde la descripción verbal en el enunciado de la actividad hasta llegar a interpretar la tabla donde se presentaban los intervalos numéricos. Dado que en el enunciado en lengua natural se describe la variación que permanece constante en el caso en que dos agencias pagan el mismo valor. La interpretación que hacen favorece el paso de la tabla de intervalos a la siguiente descripción verbal correspondiente al enunciado que deben tener en cuenta para completar los datos de la tabla de costos, allí los estudiantes discriminan que es necesario tener en cuenta los valores totales del numeral 3 de la actividad anterior como la unidad

mas significativa para la escogencia de los costos bajo, medio o alto según sea el caso en el que se ubique cada agencia dependiendo del valor total hallado. Aunque la mayoría de los estudiantes acertaron en la escogencia de los costos según los resultados que tenían en la tabla de la actividad anterior, los datos no fueron los correctos, dado que los resultados no eran acertados, de ello se puede asegurar que los estudiantes son capaces de hacer estimaciones entre varios datos.

3.2.3 Conclusiones generales de la aplicación de la prueba diagnóstico

Con los resultados obtenidos de la aplicación de la prueba y la descripción de las posibles causas que llevan a que los estudiantes de grado 9°, de la I.E Santa Teresita, presenten dificultades en cambio de registro entre las diferentes formas de representación semiótica de la noción de función lineal se puede concluir que:

- Los estudiantes no logran significar las variables que intervienen en la situación problema y cuándo cierta variable tiene cambios o variaciones que determinan cambios en otra.
- La representación algebraica para la ecuación de la agencia C no fue trivial para los estudiantes, pues esta requiere de la discriminación de las variables a través de símbolos que dejen expresar las relaciones algebraicamente, así como también el apoyo de representaciones auxiliares como las tabulares y cartesianas.
- Con los tipos de registros de representación verbal, tabular y algebraico que se utilizaron en la prueba se logró realizar observaciones importantes de la variación. Además, el uso de sistemas de representaciones posibilitó la puesta en juego del alcance de conocimiento de los estudiantes en lo referente a la comprensión de los objetos matemáticos.
- Desde de la metodología del diseño de la prueba, se encontró que el trabajo sólo con las tareas propuestas desde los registros verbal. algebraico

y tabular no es suficiente para movilizar los procedimientos que intervienen en el trabajo con la noción de función lineal.

- En la actividad 3 la mayoría de los estudiantes tienen dificultades y muchos no tienen en cuenta los momentos en que dos de las agencias pagan el mismo valor total en un recorrido y esto hace parte de la actividad así que deberían ubicar ambas agencias en la casilla correspondiente. Esto puede ser a causa de la redacción de la actividad pues se tiene demasiada información lo cual dificulta el proceso de razonamiento por parte de los estudiantes, es decir, se dificulta la discriminación de las unidades significantes que se piden como son los símbolos que expresan las relaciones algebraicamente.
- El razonamiento de los estudiantes está atrapado en un trabajo mono registro, no operan con claridad la expresión algebraica de la ecuación lineal así como tampoco el significado que tienen cada una de las variables que de ellas hacen parte. Tienen manejo de la aritmética (operaciones entre números) pero se evidencia que no alcanzan a pasar a la generalidad que implica el álgebra.

3.3. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Teniendo en cuenta los resultados encontrados en la aplicación de la prueba diagnóstico, se propone la situación de aprendizaje, con la cual se pretende atender las dificultades presentadas por los estudiantes al ser enfrentados a una prueba, cuya principal característica es el trabajo en cuatro registros: la lengua natural, el tabular, el gráfico y el algebraico.

3.3.1 Aspectos Generales

La situación de aprendizaje ha sido diseñada en cuatro partes (situaciones), para las dos primeras se ha tenido en cuenta la información de la prueba diagnóstico,

cada una de las situaciones han sido diseñadas con propósitos particulares en donde se hacen una serie de cuestionamientos encaminados a lograr que los estudiantes empleen la noción de función lineal para modelar situaciones de variación presentes en el entorno.

De manera general, con las actividades de la primera situación, se pretende lograr que los estudiantes identifiquen las variables (dependiente e independiente) que intervienen dentro de una situación de variación tanto de manera gráfica como simbólica, al igual que la relación que se establece entre dichas variables; además que analicen e interpreten información presente en gráficos que los lleve a obtener conclusiones importantes para el empleo de la noción de función lineal.

Con las tareas de la segunda situación se procura conseguir que los estudiantes comprendan que las variables que intervienen dentro de una situación que se comporta linealmente son directamente proporcionales, además que empleen el álgebra, al generalizar la forma de calcular cualquier valor en una de las variables conociendo el correspondiente valor en la otra variable; igualmente se busca que identifiquen las relaciones aditivas y multiplicativas que presentan las variables directamente proporcionales e igualmente que comprendan las características particulares de las variables, cuya relación es de proporcionalidad directa como son la linealidad y la relación que existe entre la razón de las variables y la inclinación de la gráfica.

Las tareas de la tercera situación procuran lograr que los estudiantes interpreten los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación; y la cuarta que los estudiantes interpreten, analicen y modelen situaciones de variación del entorno que se pueden generalizar aplicando la función lineal, estas dos últimas situaciones maneja otros contextos con el fin de evaluar los alcances de la situación de aprendizaje.

Cada situación se describe posteriormente con más detalle y su análisis se realiza teniendo en cuenta el aspecto matemático de cada situación y los registros de representación semiótica que intervienen en la actividad, igualmente se plantea

cómo las actividades de la situación de aprendizaje responden no sólo a las dificultades encontradas con la prueba diagnóstica, sino también a las dificultades planteadas en el marco teórico.

3.3.2 Situaciones

Situación 1: excursión colegial

GOBERNACIÓN DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "SANTA TERESITA"
Resolución de reconocimiento Oficial 1748 del 5 de julio de 2006
CÓDIGO DANE 1764030000-79. NIT. 821000993-7



Grado noveno

Nombre del estudiante: _____ **Fecha:** _____

Situación 1

Lee cuidadosamente la siguiente información:

Excursión colegial

Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

Actividad 1: Identificación de magnitudes

1. Teniendo en cuenta que una magnitud es una cantidad que puede ser medible (tiempo, distancia, etc), responde las siguientes preguntas:
 - a. Identifique las magnitudes intervinientes en el problema.
 - b. ¿Cómo varía cada magnitud?, explica tu respuesta.
 - c. ¿Cómo afecta el cambio en el número de km en el valor del servicio del bus en cada una de las agencias?

2. De acuerdo a lo anterior, explique la relación que existe entre las magnitudes, la variación en cada una de ellas y la variación de una con relación a la otra. Discuta con sus compañeros de grupo las apreciaciones obtenidas.

3. Completa las siguientes tablas:

Agencia A: valor km: \$600 cargo fijo: \$350.000

Distancia recorrida (km)	0	50	100	200	420	480
Valor servicio del bus (\$)	350.000	380.000				

Agencia B: valor km adicional: \$1.000 cargo fijo: \$260.000

Distancia recorrida (km)	0	50	100	200	420	480
Valor servicio del bus (\$)	260.000	292.500				

Agencia C: valor km adicional: \$650 cargo fijo hasta 250 km: \$300.000

Distancia recorrida (km)	0	50	100	250	300	480
Valor servicio del bus (\$)	300.000	300.000				

b. Describa la manera cómo se aprecia en las tablas la variación entre número de km recorridos y el valor del servicio del bus.

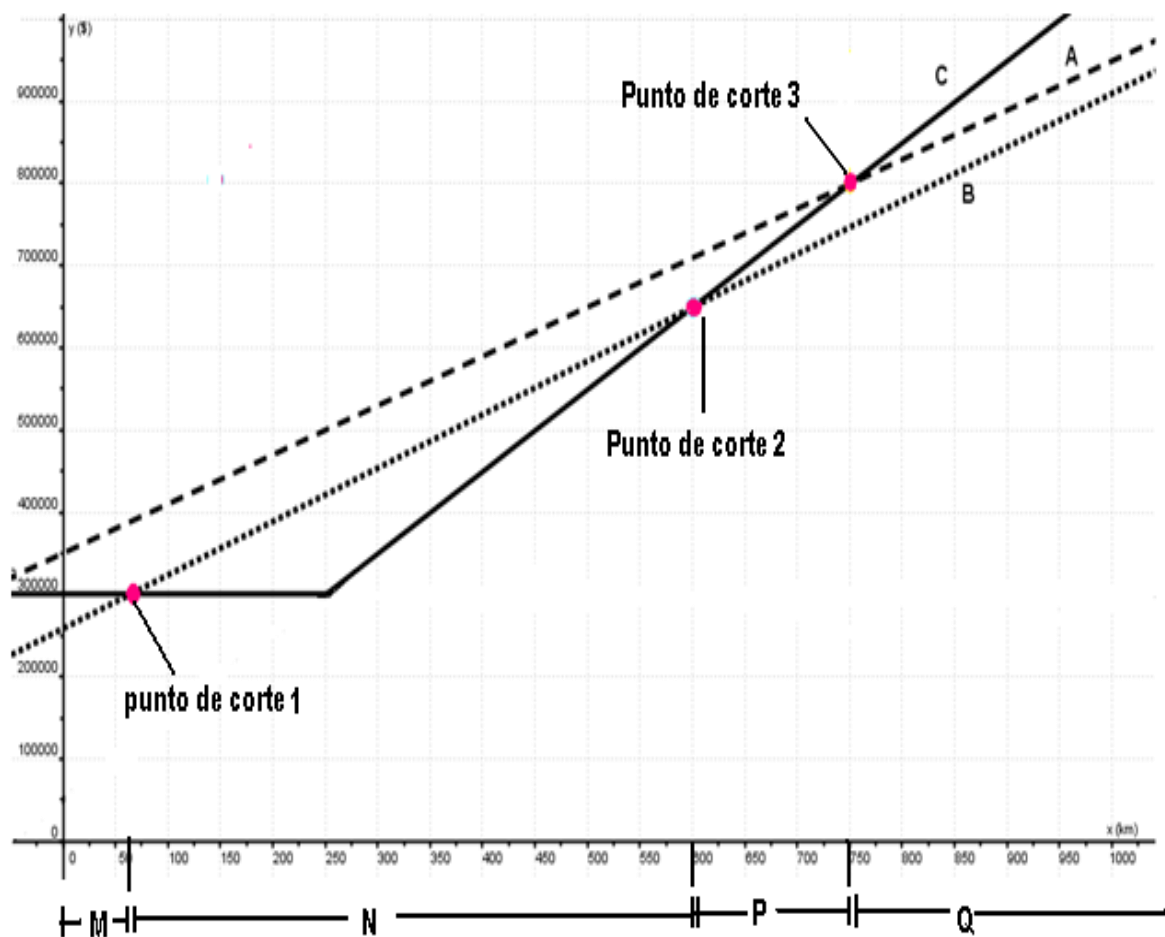
c. Explique cómo encontraste los datos faltantes.

d. Explícite una forma de encontrar el valor del servicio del bus para cualquier número de km recorridos en cada una de las agencias.

4. Si representamos el valor del servicio del bus con la letra y , y la cantidad de de km recorridos con la letra x , represente la información de las tablas en un grafico cartesiano.

Actividad 2: Valor numérico de cada ecuación (Aproximado)

La siguiente gráfica representa la relación entre valor del servicio del bus y los kilómetros recorridos para cada una de las tres agencias de transporte. Tomando a “ y ” como el valor a pagar por el alquiler del bus y a “ x ” como el número de km recorridos.



1. Teniendo en cuenta la gráfica y la información suministrada por cada agencia:
 - a. Calcule el valor del servicio del bus para 250 km, 320 km, 500 km, 780 km, en cada una de las agencias.
 - b. ¿Cuál es el mejor plan para cada uno de los recorridos anteriores? justifique su respuesta.
 - c. ¿Qué significado tiene en la situación anterior los puntos de corte 1, 2 y 3?
 - d. ¿En qué valor la gráfica de cada agencia corta el eje y ? ¿qué significado tienen estos valores dentro de la situación?
 - e. La agencia C cobra un cargo fijo hasta los 250 km de \$ 300.000, ¿Cómo se refleja esto en la gráfica? ¿qué sucede con el valor del servicio del bus de los 250 km en adelante?

Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus cuando se recorre una cierta cantidad de km. Muestre el procedimiento utilizado.

Agencia	Ecuación
A	
B	
C	

2. Hay momentos en que el valor a pagar y la distancia en km entre dos agencias es el mismo. Esto está determinado en la gráfica por los puntos de intersección 1, 2, 3 que se forman entre dos agencias mediante sus rectas.

- Halle el valor numérico de (x,y) para las rectas ____ y ____ cuando forman el punto de corte 1.
- Halle el valor numérico de (x,y) para las rectas ____ y ____ cuando forman el punto de corte 2.
- Halle el valor numérico de (x,y) para las rectas ____ y ____ cuando forman el punto de corte 3.

Actividad 3: Caracterizar intervalos

Un intervalo de kilómetros recorridos (x) está determinado por cada una de las regiones que se han denominado M, N, P y Q.

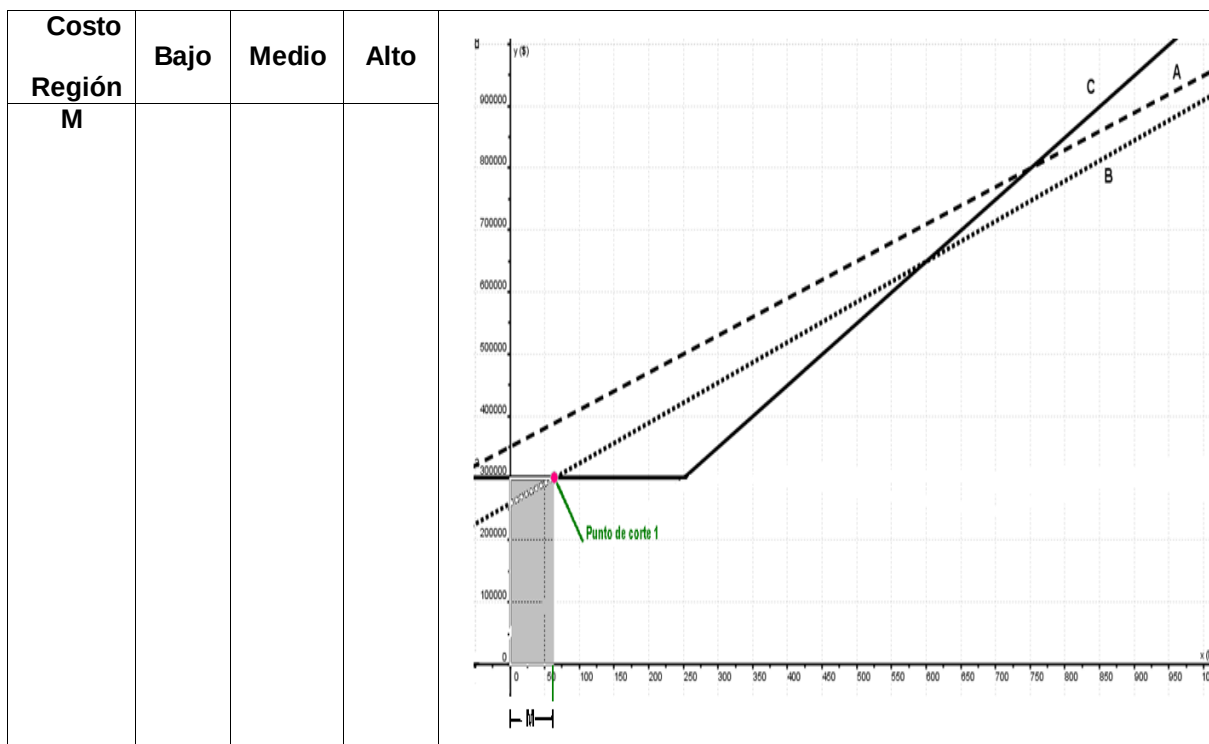
- Analice cada una de las regiones ubicadas en la gráfica y halle intervalos que determinan cada región para ubicarlos en la siguiente tabla.

Región	Región M	Región N	Región P	Región Q
Intervalos km recorridos (x)				

Actividad 4: Análisis gráfico

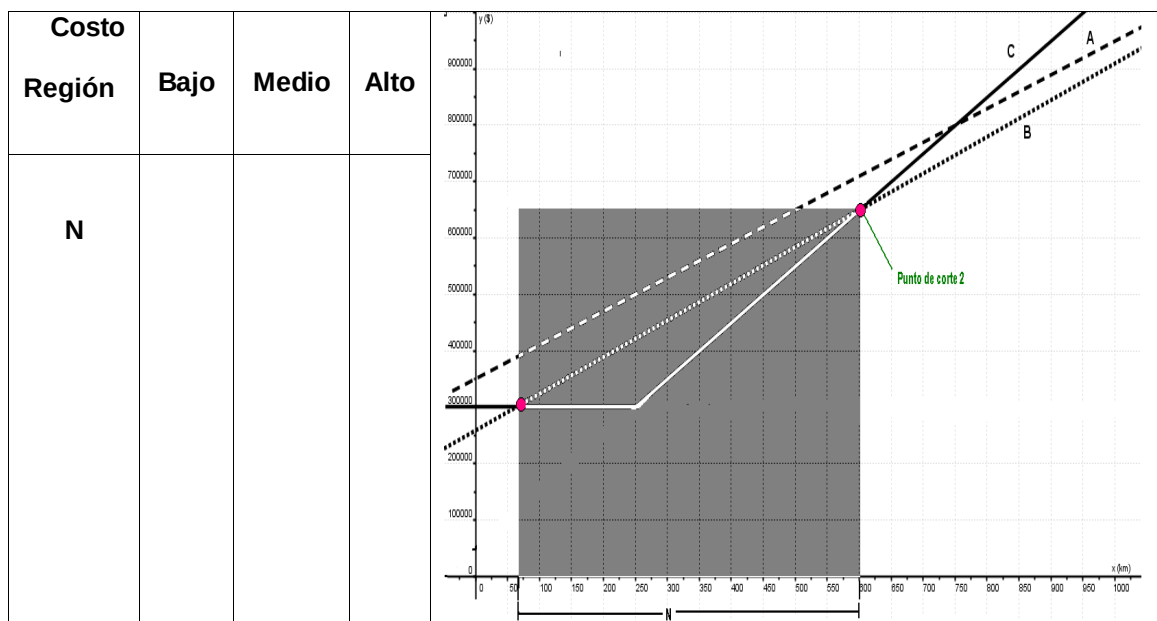
Analice detalladamente la gráfica ubicada al lado derecho de cada tabla y ubique en cada casilla la agencia que corresponda según el costo en una determinada región.

- Entre las rectas B y C se forma el primer punto de corte _____. Con ese punto de corte se determina la región M, en esta las agencias se organizan según el costo así:



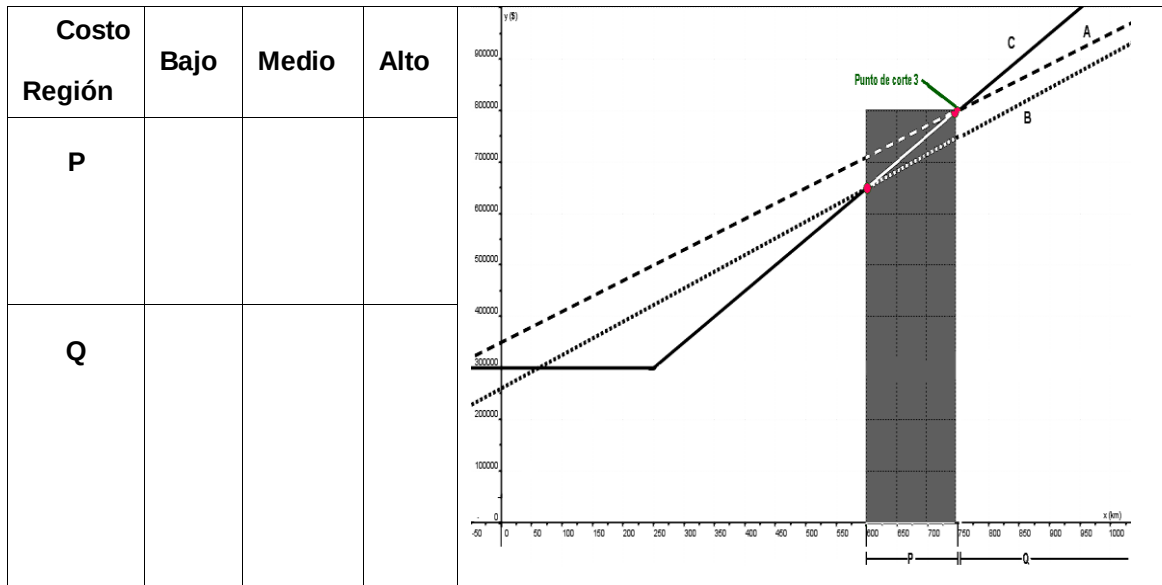
a. Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 61.5 km recorridos? Justifica tu respuesta.

2. Entre las rectas B y C se forma el segundo punto de corte _____. Con ese punto de corte se determina la región N, en esta las agencias se organizan según el costo así:



a. Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 600 km recorridos? Justifica tu respuesta.

3. Entre las rectas A y C se forma el tercer punto de corte _____. Con ese punto de corte se determinan las regiones P y Q, en estas las agencias se organizan según el costo así:



a. Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 750 km recorridos? Justifica tu respuesta.

3.3.2.1 Análisis de la situación 1

Descripción general

Esta situación esta presenta una situación en lengua natural y de donde se plantean cuatro actividades a saber:

Actividad 1: identificación de magnitudes.

En el primer numeral de esta actividad se plantean tres interrogantes que llevan a los estudiantes a partir del concepto de magnitud, a que identifiquen estas dentro de una situación funcional; en el numeral 2 se les pide a los estudiantes que describan la relación que presentan las magnitudes que intervienen en la

situación; en el numeral 3 el estudiante debe completar una tabla para cada agencia, pero antes de ello se les especifica el valor que cobra por cada km y el cargo fijo, esto para las dos primeras agencias, para la tercera se les aclara el cargo fijo hasta qué cantidad de km se conserva y el valor del km adicional, en este mismo numeral se hacen 3 interrogantes que aproximan al estudiante a generalizar; en el último punto se busca una conversión del registro tabular a un registro gráfico, tarea cotidiana en el trabajo con funciones.

Actividad 2: valor numérico de cada ecuación (Aproximado)

Esta actividad tiene dos puntos los cuales se desprenden de cierta información presentada en lengua natural y que va acompañada de una gráfica; del primer punto se desglosan 6 literales: en el primero de ellos los estudiantes deben hallar el valor del servicio del bus para cierta cantidad de km pero sin realizar cálculos; en el siguiente se pide al estudiante justificar la mejor opción para la excursión, lo cual busca desarrollar en el estudiante la argumentación; en el tercer y cuarto literal se lleva al estudiante a observar unas características importantes del gráfico como son los puntos de corte tanto con el eje y como entre las líneas de cada agencia, esto con el objetivo de que comprendan la relación que tienen con enunciados como cargo fijo e igualdad en el cobro de las agencias; el literal e por su parte tiene un objetivo similar a los anteriores, con el agravante de que lleva al estudiante a relacionar la no variación hasta 250 km con la línea paralela al eje x ; y el último literal tiene como propósito que el estudiante a partir del gráfico y de las respuestas dadas anteriormente realicen una conversión de un registro gráfico al algebraico.

El numeral 2 de esta actividad consta de 3 literales con los cuales se busca que el estudiante complemente la respuesta del literal c del punto anterior, dado que se le facilita el trabajo porque parte de la información está dada y él sólo debe completar, aunque esto no significa que no se requiera de análisis gráfico.

Actividad 3: caracterizar intervalos

Esta actividad consta de un solo punto donde el estudiante debe identificar los intervalos que se forman con los puntos de intersección de las rectas de cada agencia, con el propósito de realizar un análisis más detallado de la información que brinda la gráfica dado que se realiza de forma segmentada.

Actividad 4: análisis gráfico

Esta actividad consta de 3 numerales correspondientes a las tres agencias en mención, cada punto presenta una información incompleta en lengua natural y una tabla donde se clasifica cada agencia de acuerdo a su precio en el cobro del servicio, esto se realiza teniendo en cuenta una gráfica donde se resalta el intervalo a analizar; igualmente se interroga al estudiante sobre la mejor opción para la excursión en este intervalo, lo cual orienta al estudiante a comprender qué cada agencia presenta cambios con referencia a las otras en intervalos específicos, es decir, entender que una agencia puede pasar de ser la mejor opción en un intervalo a no serlo en otro.

Contenido matemático movilizado en la actividad

Proceso de modelación en la situación 1

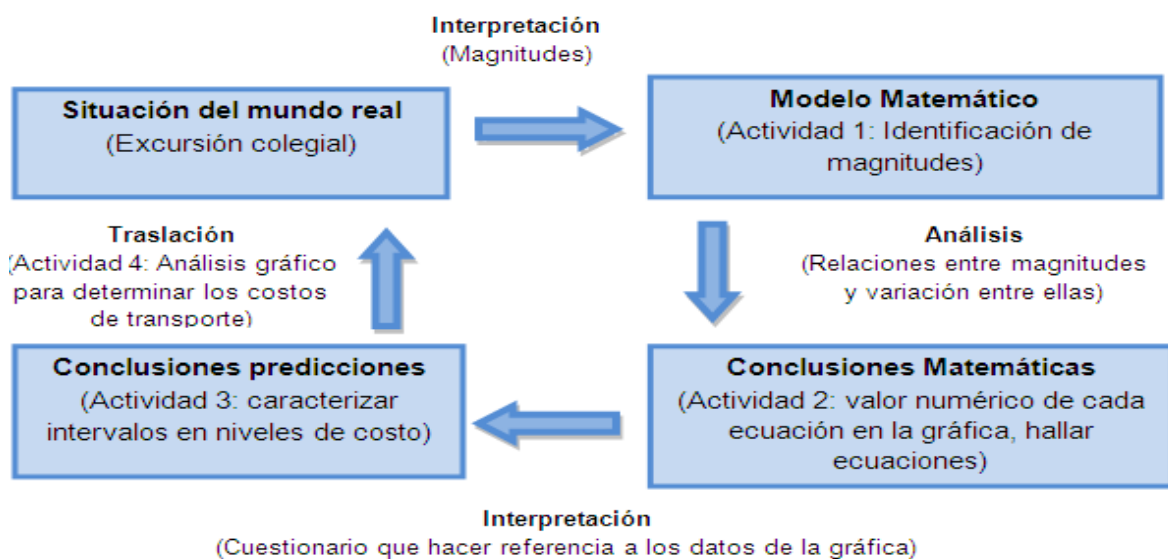


Ilustración 9. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 1

Análisis matemático

La situación 1 pone de manifiesto aspectos importantes de la noción de función lineal como son la determinación e identificación de las magnitudes dependientes e independientes que intervienen dentro de una situación funcional, así mismo busca el reconocimiento de la relación que se establece entre las magnitudes como son la dependencia que es un elemento importante en la noción de función, ya que está ligada a la noción de variación, lo cual se experimenta al observar como el cambio de una de las variables provocará un cambio sobre las otra; el modo de percibir que una cosa depende de otra se logra al hacer variar una y constatar cuál es el efecto en la otra, lo que se conoce con el nombre de covariación o aspecto covariante de las funciones. Todo esto se busca obtener mediante un análisis en cuatro registros distintos la lengua natural, el registro tabular, el gráfico y el algebraico.

Otro aspecto matemático importante en esta situación es la generalización de las situaciones de funcionalidad lineal mediante expresiones algebraicas como $y = mx + b$; lo cual se propone lograr a partir de los registros tabular, gráfico y la lengua natural, para ello se lleva al estudiante al reconocimiento de las variables pertinentes en cada registro, como son: para el caso de la lengua natural el término cargo fijo; para el gráfico, los puntos de corte en el eje y ; para el tabular, se muestra lo que sucede cuando el número de km es cero para las agencias A y B, y en el caso de la agencia C se muestra la variación para valores que oscilan por debajo y por encima de 250 km; todo ello relacionado con la constante b de la expresión algebraica.

Registros de representación semiótica que intervienen en la actividad

Como ya se ha mencionado en esta situación se trabaja en cuatro registros distintos: la lengua natural, el tabular, el algebraico y el gráfico, buscando en todos los casos una conversión al registro algebraico; también se proponen otras conversiones más comunes en el trabajo escolar tales como del registro tabular al gráfico y de la lengua natural al tabular.

Resultados esperados

Con las actividades de esta situación se pretende dar solución a la dificultad que presentaron los estudiantes para interpretar una situación cuyo comportamiento corresponde a una función lineal, de igual manera brindar herramientas para que el estudiante logre llegar a un proceso de generalización al expresar en lenguaje algebraico situaciones de variación, a través de la identificación de las variables pertinentes dentro de un registro específico. También se considera que las actividades conllevan a que el estudiante explore la variación en diferentes registros permitiéndole distinguir entre una situación que se aborda como una función de una que se aborda como una ecuación.

Situación 2: excursión colegial

GOBERNACIÓN DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARIA DE EDUCACION DEPARTAMENTAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "SANTA TERESITA"
Resolución de reconocimiento Oficial 1748 del 5 de julio de 2006
CÓDIGO DANE 1764030000-79. NIT. 821000993-7



Grado noveno

Nombre del estudiante: _____ **Fecha:** _____

Situación 2

Lee cuidadosamente la siguiente información:

“una agencia D no cobra cargo fijo, pero cobra \$ 1200 por cada km recorrido, un precio un poco más alto que las agencias anteriores”.

Actividad 1: magnitudes directamente proporcionales

1. De acuerdo con la situación anterior, completa la siguiente tabla:

Km recorridos	100		230		550
Valor servicio del bus	120.000	150.000		480.000	

- Describe la manera de hallar el número de km recorridos con \$150.000.
- Describe la manera de hallar el valor del servicio del bus para 230 km.
- Encuentra una operación que permita obtener la cantidad de km recorridos conociendo el valor del servicio del bus.

d. Encuentra una operación que permita calcular el valor del servicio del bus conociendo el número de km recorridos.

e. ¿Qué sucede si el número de km recorridos aumenta?

f. Si el valor del servicio del bus disminuye, ¿qué sucede con los km recorridos?

2. Completa las siguientes tablas, realizando en cada una de ellas la operación indicada:

Km recorridos	Valor servicio del bus	km + servicio
10	12.000	12.010
20	24.000	
30	36.000	
40	48.000	

a. Que característica o particularidad presentan los resultados de la tercera columna

3. Completa los esquemas realizando la operación indicada:

Km recorridos				
10	+	20	=	30
↕		↕		↕
12.000	+	24.000	=	36.000
Valor servicio del bus				

Km recorridos				
60	+		=	130
↕		↕		↕
	+	84.000	=	
Valor servicio del bus				

Km recorridos				
	+		=	210
↕		↕		↕
108.000	+		=	
Valor servicio del bus				

Km recorridos				
	+		=	
↕		↕		↕
120.000	+	240.000	=	
Valor servicio del bus				

Km recorridos				
150	+	320	=	
↕ ↕ ↕				
	+		=	
Valor servicio del bus				

Km recorridos				
	+	400	=	
↕ ↕ ↕				
360.000	+		=	
Valor servicio del bus				

- a. ¿Qué característica observas en las respuestas?
- b. ¿Qué sucede cuando se suman dos valores de la magnitud (cantidad de km recorridos), y se suman también sus correspondientes valores en la magnitud (valor del servicio del bus)?
- c. ¿Qué conclusión se puede obtener de los ejercicios hechos en los puntos 2 y 3 de esta actividad?

4. Completa la siguiente tabla, realizando la operación indicada:

Valor servicio del bus(\$)	Distancia recorrida (km)	Fracción	Distancia/Galones
12.000	10	12.000/10	12.000/10=1200
24.000	20		
60.000	50		
120.000	100		
240.000	200		
600.000	500		

- a. ¿Qué característica observas en las respuestas?
- b. ¿Qué relación numérica (razón) se puede establecer entre las magnitudes que intervienen en la situación?
- c. ¿Qué conclusión se puede obtener del ejercicio anterior?

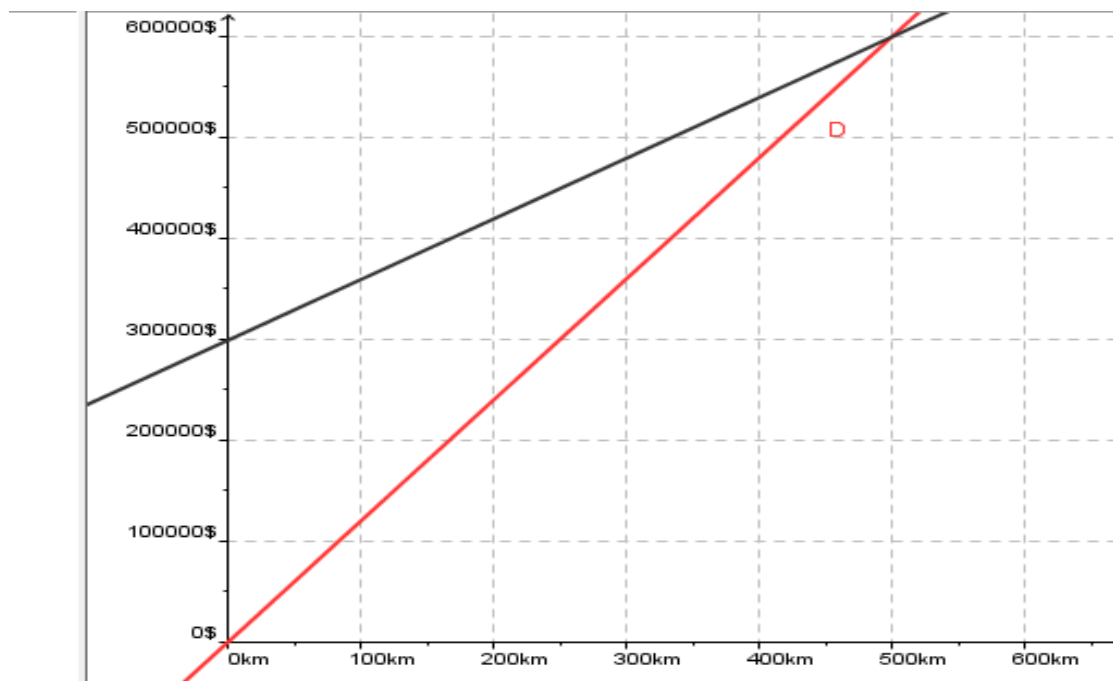
5. Si representamos la distancia recorrida con la letra x , y el valor del servicio del bus con la letra y , represente la información de la tabla siguiente en un gráfico cartesiano.

X	Km recorridos	100	200	300	400	500
Y	Valor servicio del bus	120.000	240.000	360.000	480.000	600.000

- Teniendo en cuenta la situación. ¿Qué significado tiene si se unen los puntos? Justifique la respuesta.
- ¿Qué clase de grafica se obtiene?
- Conociendo la cantidad de km recorridos, ¿podrías hallar el valor del servicio del bus a partir de la gráfica?
- ¿Qué relación puedes establecer entre la razón de las magnitudes y la inclinación de la recta con relación al eje x positivo?

Actividad 2: análisis gráfico

A continuación se presentan las gráficas correspondientes a las agencias A y D.



Teniendo en cuenta la información que presenta la gráfica, responde:

- a. ¿Para qué cantidad de km recorridos el valor del servicio del bus es igual?
- b. Antes y después de ese valor ¿cuál es la mejor opción para la excursión? Justifica la respuesta.
- c. ¿Qué diferencia encuentras entre la gráficas de cada agencia con respecto al corte en el eje y ? ¿qué significado tiene dentro de la situación?
- d. Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus cuando se recorre una cierta cantidad de km.
- e. ¿Qué diferencia encuentras entre cada ecuación?

3.3.2.2 Análisis de la situación 2

Descripción general

Esta situación inicia con una información sobre una nueva agencia de transporte en donde se expresa claramente que la agencia no cobra cargo fijo y el valor de cada km recorrido, teniendo en cuenta esa información los estudiantes deben realizar dos actividades a saber:

Actividad 1: magnitudes directamente proporcionales

Esta actividad contiene 5 numerales; en el primero se propone completar una tabla donde se deben realizar cálculos numéricos que permitan hallar los datos faltantes, de allí se desprenden 6 literales que llevan a los estudiantes a la formulación de las expresiones (ecuaciones) que permiten calcular el servicio del bus conociendo los km recorridos y la que permite hallar los km recorridos conociendo el valor del servicio; también se promueve el descubrimiento de una característica de las magnitudes directamente proporcionales: que ambas aumentan o ambas disminuyen proporcionalmente.

En el segundo numeral, se propone completar una tabla que contiene tres columnas, en las dos primeras se especifican las magnitudes de la situación y la

tercera se debe completar con la suma del valor una de las magnitudes y su correspondiente valor en la otra magnitud, el numeral 3 por su parte propone seis esquemas el primero de ellos se presenta como ejemplo, allí los estudiantes deben realizar cálculos numéricos para calcular los datos faltantes, luego se proponen tres literales que buscan a partir de cuestionamientos que los estudiantes reconozcan las características aditivas de las magnitudes directamente proporcionales.

El cuarto numeral, propone una tabla que debe ser completada por los estudiantes, una columna con la fracción que forman los valores de cada magnitud y otra con el cociente entre los valores; de allí se hacen tres cuestionamientos que van orientados a que el estudiante descubra la propiedad fundamental de la proporcionalidad directa $\frac{y}{x} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad y la cual está relacionada con la pendiente de la recta. Con el último numeral de esta actividad se busca el diseño de una gráfica a partir de los datos de una tabla; los cuestionamientos de este punto buscan el reconocimiento por parte de los estudiantes de la noción de linealidad y su relación con las cantidades continuas, e igualmente la razón de cambio y su relación con la inclinación de la recta.

Actividad 2: análisis gráfico

Esta actividad inicia con una gráfica que representa la información de dos agencias de transporte A y D; a partir de esta gráfica los estudiantes deben dar respuesta a 5 literales, los cuales orientan a los estudiantes para descubrir la importancia de los puntos de corte entre las líneas y el eje y (variables pertinentes), con el propósito de que formulen las ecuaciones correspondientes a cada recta, e igualmente se les indaga por la diferencia que presentan dichas ecuaciones.

Contenido matemático movilizado en la actividad

Proceso de modelación en la situación 2

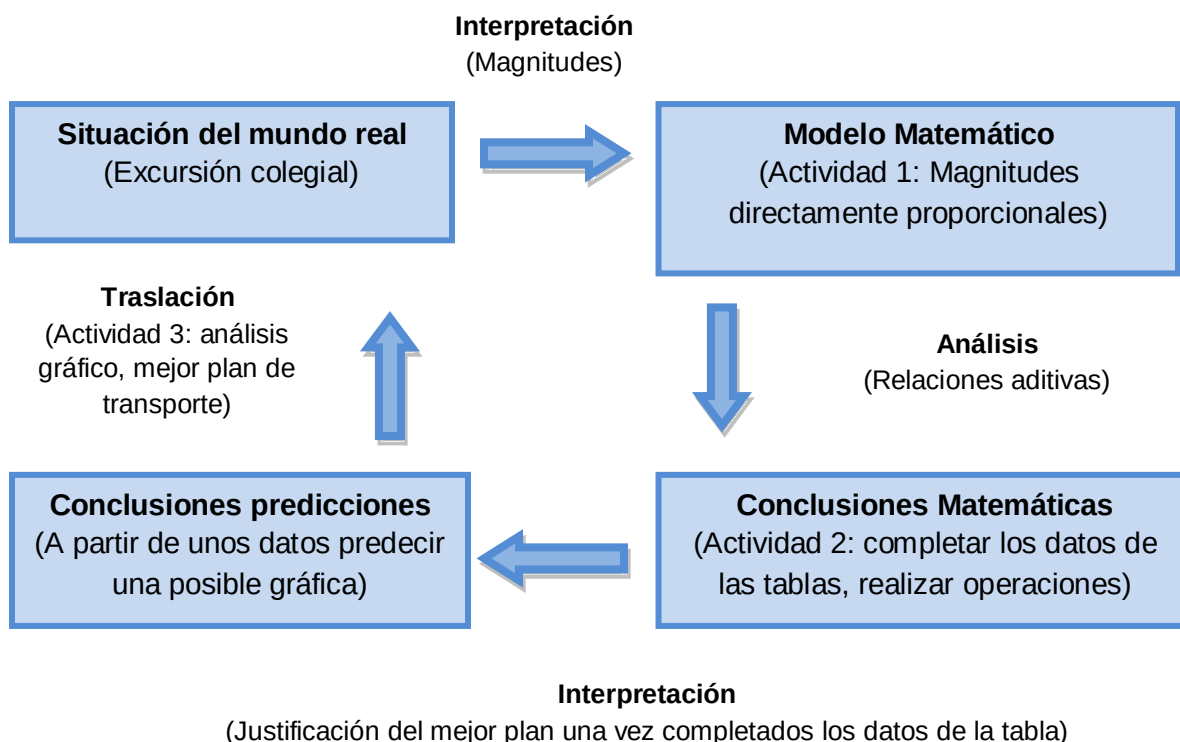


Ilustración 10. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 2

Análisis matemático

La situación 2 hace notorio aspectos de la noción de función lineal como es la proporcionalidad directa, se induce a los estudiantes al descubrimiento de que las magnitudes que intervienen dentro de una situación que se comporta linealmente son directamente proporcionales, identificando las relaciones aditivas que presentan este tipo de magnitudes: la primera que la suma de las componentes de cada pareja ordenada es un múltiplo del número obtenido al sumar los términos de la razón que relaciona las magnitudes, y la segunda, que la suma de dos o más valores de una magnitud es correspondiente a la suma de los valores de la otra, lo que se puede escribir como $x_1 \rightarrow y_1 ; x_2 \rightarrow y_2 ; x_1 + x_2 \rightarrow y_1 + y_2$; e igualmente que identifiquen las relaciones multiplicativas que presentan las magnitudes directamente proporcionales, es decir, la propiedad fundamental de la

proporcionalidad directa, el cociente de cualquier valor de una magnitud con su correspondiente valor en la otra magnitud es constante $\frac{y}{x} = m$, donde m es la constante de proporcionalidad y la cual determina la pendiente (inclinación) de la recta; y por último, que potencialicen el empleo del álgebra al generalizar la forma de calcular cualquier valor en una de las magnitudes conociendo el correspondiente valor en la otra magnitud, es decir, ecuaciones de la forma: $y = mx$ y $x = y/m$; para posteriormente llegar a las expresiones algebraicas que caracterizan las funciones lineales $y = mx$ y $y = mx + b$.

Registros de representación semiótica que intervienen en la actividad

Dentro de esta situación se ponen de manifiesto como registros de representación la lengua natural, el tabular y el gráfico, en estos registros se realizan tratamientos que van orientados a que los estudiantes logren una conversión de estos al registro algebraico, conversión que como ya se ha mencionado es la de mayor complejidad para la mayoría de los estudiantes, sin embargo se proponen otros tipos de conversiones como son del registro tabular al gráfico y de la lengua natural al tabular.

Resultados esperados

Con el desarrollo de las actividades de esta situación se espera que la mayoría de los estudiantes identifiquen cuándo una situación problema debe ser resuelta como una situación de funcionalidad lineal, dado que se han expuesto los aspectos que caracterizan este tipo de situaciones, así mismo que avancen en los procesos de conversión entre registros como consecuencia del trabajo hecho en la identificación de variables en cada registro por ejemplo, en el gráfico (puntos de corte); en el tabular (razón-pendiente), en la lengua natural los términos cargo fijo, no cobra cargo fijo y valor de cada km recorrido; también que a partir de los tratamientos hechos en cada registro se logre un claro análisis de las situaciones de variación.

Situación 3: Pintar la pared

GOBERNACIÓN DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DEPARTAMENTAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "SANTA TERESITA"
Resolución de reconocimiento Oficial 1748 del 5 de julio de 2006
CÓDIGO DANE 1764030000-79. NIT. 821000993-7



Grado noveno

Nombre del estudiante: _____ Fecha: _____

Situación 3

Lee cuidadosamente la siguiente información:

“La pintura que se gasta para cubrir una vivienda es directamente proporcional a la superficie que se desea pintar. Para pintar una pared de 16 metros cuadrados se necesitan 0,8 litros de pintura”.

Actividad 1: variación y pendiente

1. Analiza y Contesta las siguientes preguntas:
 - a. Con sólo estos datos, ¿es posible realizar el gráfico de la cantidad de pintura en función de la superficie de las paredes?, explique su respuesta.
 - b. Identifique las variables, luego complete la tabla.

	4	8	12	16
				0.8

- c. Verifiqué la gráfica según los valores obtenidos en la tabla, ¿corresponde a una función lineal?, ¿por qué se pueden unir los puntos?, explique su respuesta.
 - d. Observe la tabla, ¿se presentan cambios en la cantidad de pintura?, ¿por qué?, explique tu respuesta.
 - e. Según la tabla, ¿cuál es la diferencia de la cantidad de pintura entre el 2º dato con el 1º, el 4º con el 3º, se observan cambios?, ¿los cambios son constantes?, ¿qué puedes concluir?; explica tu respuesta.
 - f. Calcula la pendiente de la recta y compara este valor con la constante de proporcionalidad, ¿qué puedes concluir?
 - g. Escriba una expresión que relaciona la cantidad de pintura con la superficie por pintar.
 - h. ¿De qué manera se puede calcular la cantidad de pintura para cualquier superficie?

2. En la siguiente tabla se relaciona la edad de una persona con su estatura:

Edad (años)	1	2	3	4	5	6
Estatura (cm)	74	85	94	101	108	114

Analiza y contesta las siguientes preguntas:

- Identifica ¿Cómo varían las magnitudes? ¿Se puede afirmar que son directamente proporcionales? Explique su respuesta.
- ¿Cómo son las diferencias entre las estaturas? ¿Qué significado tiene que estas diferencias no sean constantes con relación a que las magnitudes sean o no directamente proporcionales?
- Represente los datos de la tabla en un gráfico cartesiano. ¿De qué depende que se puedan unir los puntos resultantes?
- Une los puntos y escribe un significado en el contexto de las edades y estaturas para este hecho.
- Escriba una expresión algebraica que permita calcular la edad de una persona con su estatura. Relacione esta expresión con los datos de la tabla y el gráfico cartesiano. Escriba una conclusión al respecto.

3.3.2.3 Análisis de la situación 3

Descripción general

Actividad 1: variación y pendiente

Consta de dos numerales cada uno de ellos presenta una situación de variación, el primer numeral presenta una situación de proporcionalidad directa que se sitúa en un contexto de cantidad de pintura y área a pintar, de esta información que es presentada en lengua natural se hacen 8 cuestionamientos que conllevan a que los estudiantes descubran por si mismos que se trata de una situación de proporcionalidad directa y de funcionalidad lineal; igualmente promueven que los estudiantes establezcan la relación existente entre la constante de proporcionalidad y la pendiente de la recta, llevándolos a que la empleen para realizar la gráfica de la situación, es decir, que utilicen el método punto pendiente; por último, uno de los literales busca que el estudiante complete una tabla empleando cálculos numéricos

e identifique las variables que entran en juego, así mismo 2 de los literales indagan por las expresiones algebraicas que relacionan las variables.

El segundo numeral presenta una estructura similar al anterior con algunas variantes como la presentación de la información la cual se realiza en un registro tabular y aborda la relación entre la edad de una persona y su estatura, de allí se desprenden 5 literales que conducen a que el estudiante descubra si se trata de una función lineal y por ende si las magnitudes son directamente proporcionales, esto se logra a partir de tareas como el cálculo de las diferencias entre los valores de las estaturas, de la elaboración del gráfico cartesiano y de la expresión algebraica que representa la información; en términos generales con estos puntos se busca lograr que los estudiantes interpreten los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación y que distingan las particulares de una de una situación que se comporta como una función lineal.

Contenido matemático movilizado en la actividad

Proceso de modelación en la situación 3

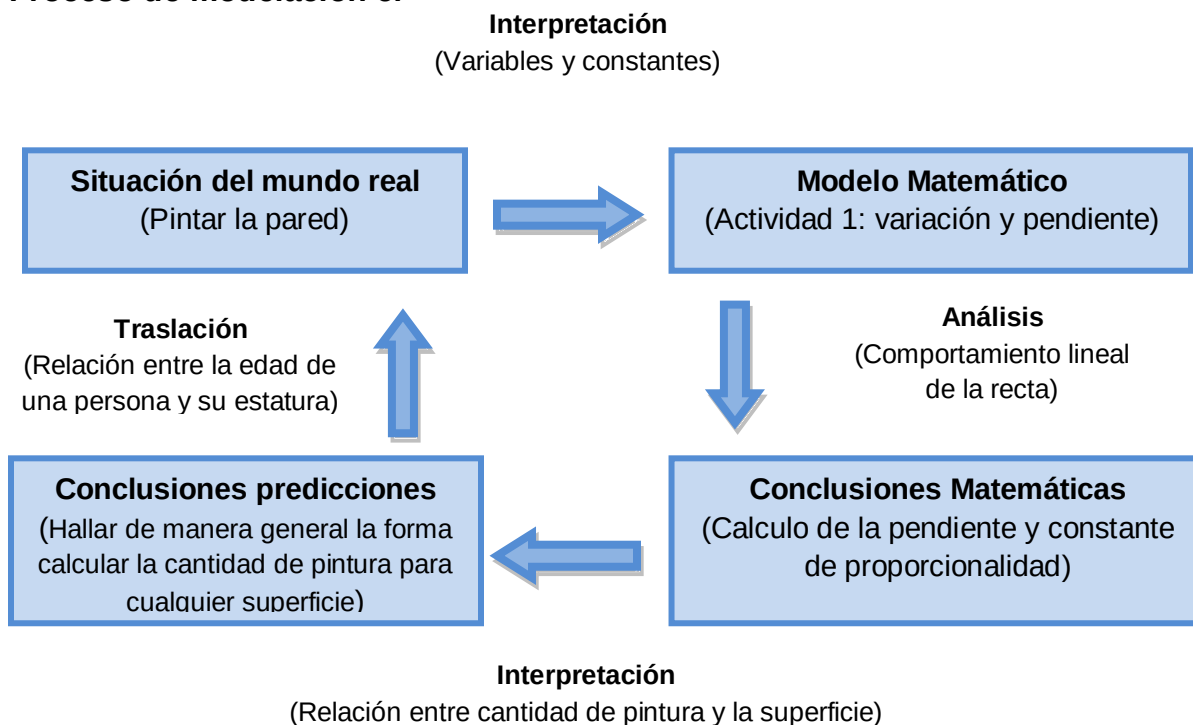


Ilustración 11. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 3

Análisis matemático

Los puntos de esta situación además de profundizar en el planteamiento de la expresión algebraica para representar situaciones de variación y de seguir clarificando el cálculo de la constante de proporcionalidad como prioritaria para comprender el significado que tiene la inclinación de la recta y como variable pertinente para encontrar la ecuación de la misma, tiene como objetivo primordial llevar a los estudiantes a identificar cuando una situación de variación presenta un comportamiento lineal y por ende responde a una función de este tipo, lo cual se logra con los tratamientos realizados en los distintos registros como son los ya mencionados lengua natural, tabular, algebraico, gráfico y la conversión entre ellos; con la realización de estas tareas se pone en evidencia otra característica de las funciones lineales que se puede enunciar como la diferencia entre dos valores de la segunda magnitud siempre es constante: si $y_1, y_2, y_3, y_4 \dots y_n$ son valores de la segunda magnitud entonces se cumple que $y_2 - y_1 = k, y_4 - y_3 = k$.

Registros de representación semiótica que intervienen en la actividad

Dentro de esta situación se ponen de manifiesto como registros de representación la lengua natural y el tabular, en estos registros se realizan tratamientos que van orientados a que los estudiantes logren una conversión de estos al registro grafico y algebraico.

Resultados esperados

Con las actividades de esta situación se espera que los estudiantes logren diferenciar, dentro de una situación problema, si se trata de una situación de variación y cuando su comportamiento describe una de carácter lineal.

Situación 4: fenómenos culturales y función lineal

GOBERNACIÓN DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DEPARTAMENTAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "SANTA TERESITA"
Resolución de reconocimiento Oficial 1748 del 5 de julio de 2006
CÓDIGO DANE 1764030000-79. NIT. 821000993-7



Grado noveno

Nombre del estudiante: _____ **Fecha:** _____

Situación 4

Actividad 1: función lineal

1. Teniendo en cuenta la tabla adjunta de valores, planteen una situación que se ajuste a los datos.

	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
	30	60	90	120	150	180	210

- a. Determinen su representación gráfica cartesiana y el comportamiento de la variación de una magnitud en relación a la otra en ese gráfico. Establezcan la relación entre datos de la tabla y puntos cartesianos.

- b. Enuncien verbalmente el comportamiento proporcional de las magnitudes y determinen una expresión que permita calcular cualquier punto.

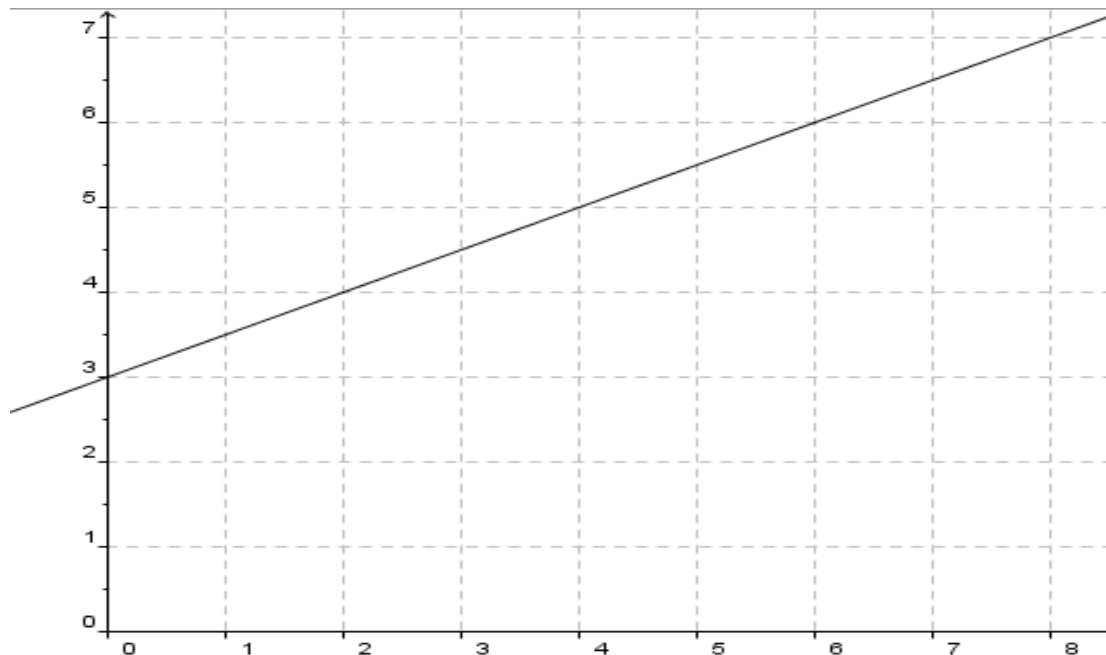
2. Lee cuidadosamente la siguiente información:

"Para reparar las instalaciones eléctricas de una casa, el servicio técnico cobra \$25.000 como básico y \$10.000 más por hora adicional"

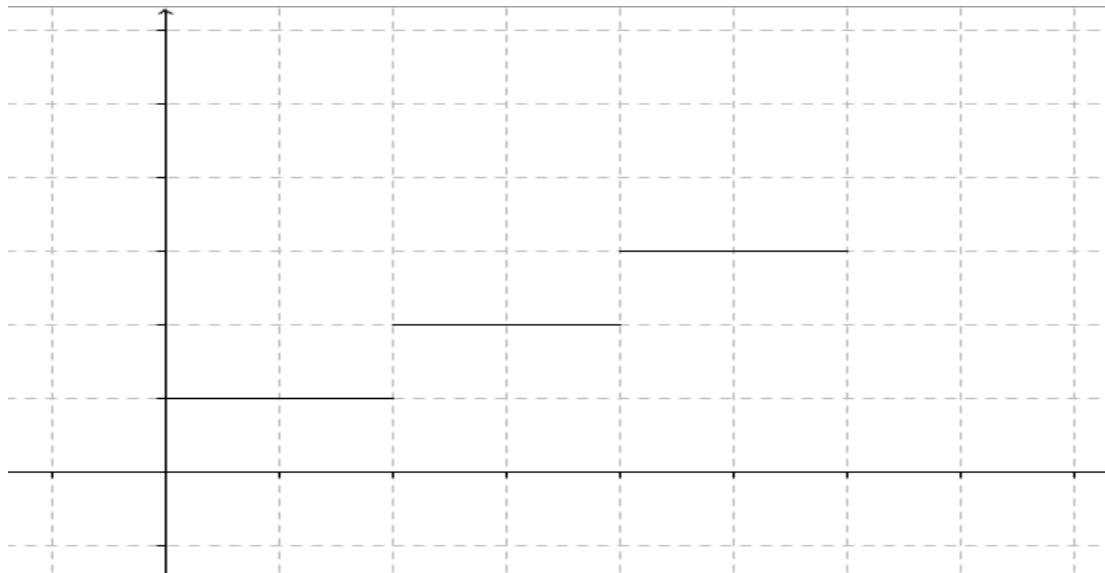
- a. Identifique si la relación entre las magnitudes es directamente proporcional. Especifique un método para realizar tal análisis.
- b. Realice una tabla donde se registre los datos para 5 salarios posibles del técnico eléctrico. Determine las magnitudes constantes y las variables.
- c. Especifique de qué depende el salario que devenga el técnico y establezca una expresión que permita calcular el salario para cualquier número de horas adicionales.
- d. Determine el número de horas adicionales que debe trabajar un técnico para devengar un salario de \$120.000. Explique el proceso que realizó para obtener la respuesta.

- e. Determine el costo de mano de obra de una persona que trabaja 8 horas diarias, 6 días a la semana durante 2 meses.
- f. Realice un gráfico cartesiano de la situación sin utilizar los valores de la tabla. Haga un trazo de cómo es el comportamiento de los datos sin especificarlos.

3. Plantee una situación que se ajuste a los datos que representa la gráfica.



- a. Identifique el comportamiento de los valores en el eje X y los valores en el eje Y.
- b. ¿Qué significado tiene el punto de corte en el eje Y para la situación que ha planteado?
- c. ¿Se puede afirmar que la relación que está representada gráficamente es lineal?
¿Por qué?
- d. Plantee una expresión algebraica para la situación que representa la gráfica.
- e. Realice las mismas tareas con el siguiente gráfico.



4. Teniendo en cuenta la expresión $y = -10x + 500$, resuelve:

Escribe un enunciado o situación que de sentido a la expresión

- ¿Qué significado tiene el valor 500 dentro de la situación que enunciaste? Justifica tu respuesta
- ¿Qué cambios consideras produce en la gráfica la pendiente negativa? Justifica tu respuesta
- Realiza un gráfico cartesiano que represente la situación

3.3.2.4 Análisis de la situación 4

Descripción general

Actividad 1: función lineal

Consta de 3 numerales, éstos han sido diseñados como parámetros de evaluación de los alcances obtenidos por los estudiantes con las tareas efectuadas en situaciones anteriores, de la situación 4 se desglosan 4 puntos a saber:

En el primer numeral, se les pide inicialmente a los estudiantes que completen la tabla con una situación que implica unos valores cuya relación es de proporcionalidad directa, luego se proponen dos literales en los cuales se espera que los estudiantes realicen una conversión de ese registro tabular al lenguaje natural, después al gráfico y posteriormente al algebraico, todo esto realizando un análisis detallado sobre la variación y la relación establecida entre las magnitudes.

En el segundo numeral se presenta a los estudiantes una situación problema en lengua natural al cual se adhieren 6 literales los cuales conducen a los estudiantes a determinar si la situación es o no de proporcionalidad directa, es decir, si representa una función lineal, también se les pide calcular valores específicos en cada una de las magnitudes; por último, se propone que realicen un cambio de registro, que lleven esta situación en lengua natural a un registro tabular, luego a un registro algebraico y por ultimo al gráfico.

El tercer numeral presenta dos gráficos, el primero correspondiente a una función lineal (afín) y el segundo a una función constante, allí los estudiantes deben formular una expresión en lengua natural que se ajuste a cada uno de los gráficos, identificando el comportamiento de las magnitudes y dando significado al corte en el eje y , a sí mismo deben plantear la expresión algebraica para cada gráfico y lo más importante explicar qué tipo de relación funcional se establece entre las magnitudes. El último punto presenta una expresión de la forma $y = mx + b$, a partir de la cual los estudiantes deben plantear una expresión en lengua natural que se ajuste a la expresión, especificando el significado de la constante y de la pendiente negativa en el gráfico cartesiano.

En sí con la cuarta situación se pretende lograr que los estudiantes interpreten, analicen y modelen situaciones de variación del entorno que se pueden generalizar aplicando la función lineal, esta actividad maneja otros contextos con el fin de evaluar los alcances de la situación de aprendizaje.

Contenido matemático movilizado en la actividad

Proceso de modelación en la situación 4

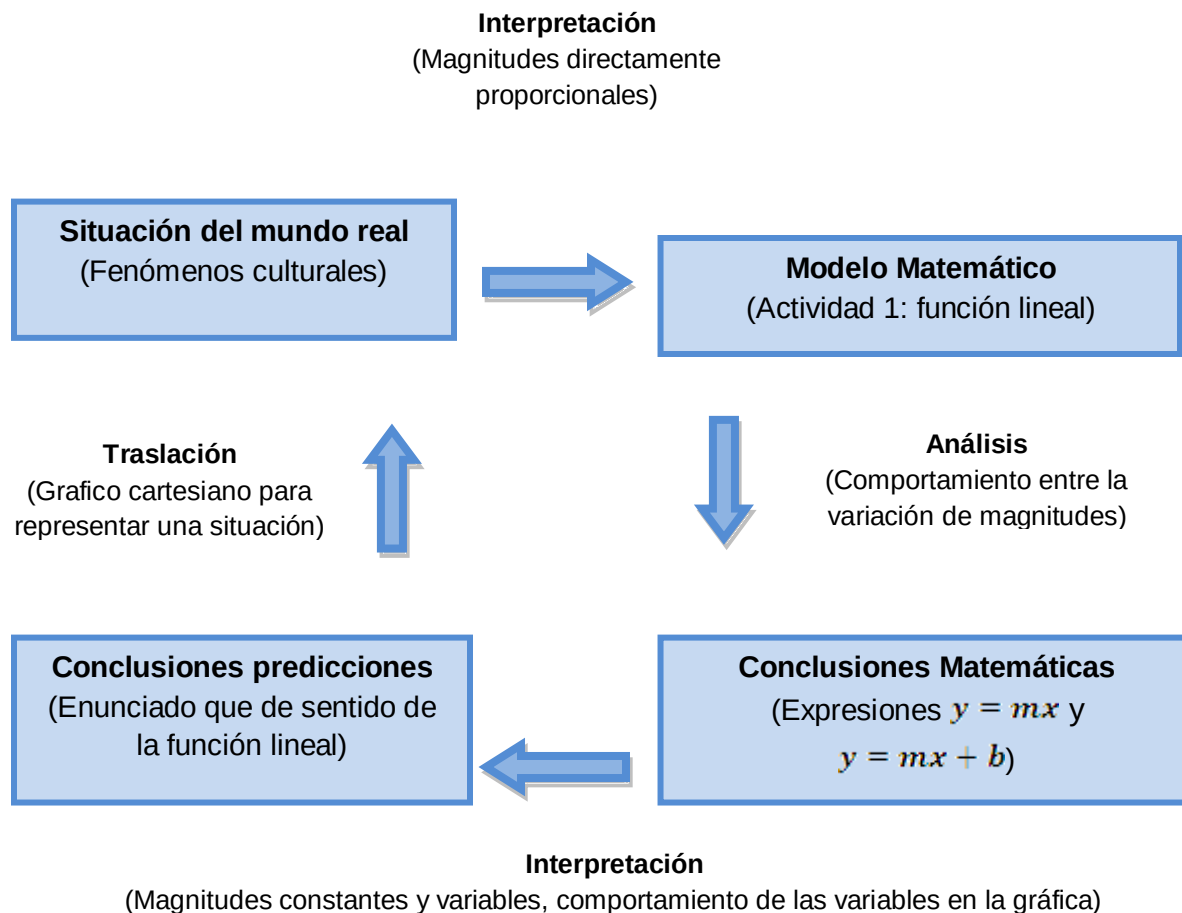


Ilustración 12. Algoritmo del proceso de modelación en la situación 4

Análisis matemático

Los puntos de esta situación como ya se mencionó permiten evaluar la pertinencia de las situaciones anteriores, dado que en ella los estudiantes deben identificar y emplear las unidades significantes en cada registro para poder realizar adecuadamente las conversiones, unidades como por ejemplo: $\frac{y}{x} = m$, para el primer numeral que es presentado en un registro tabular y que permite reconocer si se trata de magnitudes directamente proporcionales, y por ende de una función de

la forma $y = mx$; para el segundo numeral deben identificar términos como cargo básico y hora adicional importantes para llegar a la expresión $y = mx + b$; en el tercer numeral deben tener en cuenta los cortes en el eje y , y el comportamiento de los valores de cada magnitud en el eje x y y para llegar a expresiones de la forma $y = mx + b$, $y = a$; y en el cuarto el valor de la constante como el corte en el eje y , la pendiente y los cambios que produce en el gráfico al ser negativa.

Registros de representación semiótica que intervienen en la actividad

Dentro de esta situación igualmente se ponen de manifiesto los cuatro registros de representación que el trabajo quiere abordar; además se proponen tratamientos y conversiones como prioritarios para que nuestros estudiantes empleen la noción de función lineal y los registros de representación para analizar e interpretar situaciones de variación.

Resultados esperados

Con las tareas de esta situación se espera que los estudiantes logren analizar e interpretar en diferentes registros las situaciones de variación, las cuales se pueden generalizar aplicando la noción de función lineal y haciendo uso de las variables pertinentes en cada registro que clarifique los procesos de conversión, proceso indispensable para generar comprensión del objeto matemático.

3.3.3 Elementos para la justificación de la propuesta presentada en la situación de aprendizaje

En este apartado se presenta la justificación del por qué la situación de aprendizaje que se ha propuesto, ofrece en cierta medida solución a las dificultades que presentan los estudiantes al emplear la noción de función lineal, para modelar las situaciones de variación. De acuerdo a los estudios que hemos realizado sobre dicha problemática, nuestra experiencia en torno a los resultados

de pruebas externas y evaluaciones en el salón de clase, consideramos que es importante una mirada al desarrollo del pensamiento variacional y su relación con lo algebraico.

Partimos del reconocimiento que fenómenos relacionados con la variación están presentes en muchos campos y contextos, como los cotidianos, los mismos matemáticos (geométricos, numéricos, aleatorios etc.) y de otras disciplinas, lo que hace que podamos modelar muchos de estos fenómenos en tareas propias de la escolaridad. Es en este sentido que hemos enfocado nuestro trabajo en: las gráficas cartesianas como representación de la variación y de la relación entre magnitudes, empleo de la lengua natural especializada utilizando los símbolos y el vocabulario adecuado, la construcción de gráficas, la interpretación y elaboración de tablas, la resolución de problemas, todo esto en el marco de contextos significativos a los estudiantes y que justifican la tarea que nos propusimos.

En este análisis encontramos que la proporcionalidad, magnitudes directa e inversamente proporcionales, variables dependientes e independientes, relaciones, variación y variable, así mismo como los procesos de pensamiento relacionados con la representación gráfica, algebraica y tabular, la interpretación de gráficas, el reconocimiento de patrones de variación, son elementos sin los cuales no se puede estudiar de manera significativa y funcional las funciones lineales.

En muchas ocasiones la información matemática que se obtiene de los objetos y fenómenos naturales, sociales, económicos, etc, viene dada en forma de relaciones entre magnitudes que es indispensable para su manipulación y análisis, ser representada en forma numérica, gráfica y algebraica. Por tanto, y sobre todo con los estudiantes, es indispensable hacer acercamientos a estas representaciones, tratamientos y conversiones de unas a otras para facilitar la comprensión de modelos funcionales y su uso.

El trabajo con la situación de aprendizaje permite que los estudiantes a partir de cuestionamientos dirigidos por el docente y diversos tratamientos, identifique las

variables pertinentes de cada registro de representación para la función lineal que les permite realizar adecuadamente el proceso de conversión; además consideramos que con las actividades de la situación se puede lograr que los estudiantes:

- Identifiquen magnitudes dependientes e independientes con base problemas verbales en contextos de diferente naturaleza.
- Organicen datos en una tabla, hallen la razón de cambio y puedan verificar la relación de esta con el valor de la pendiente de la recta.
- Identifiquen la colinealidad de los puntos que representan situaciones lineales.
- Propongan situaciones a partir de datos y gráficos cartesianos. Hecho importante que dota de sentido a estos registros y su vez dejan ver el nivel de comprensión de los modelos lineales.
- Realicen un trabajo más profundo y detallado para conocer, identificar y construir la expresión algebraica de una función lineal.

Para terminar la aplicación, análisis y valoración de lo aquí expuesto hace parte de un nuevo trabajo que queda a disposición de la comunidad de educadores matemáticos, no obstante cabe mencionar que la situación de aprendizaje aquí propuesta ha sido diseñada a partir de las dificultades que presentaron los estudiantes en la prueba diagnóstico y queda abierta la invitación para validar los aspectos que se han expuesto mediante estudios complementarios y puesta en práctica de las propuestas del presente.

CAPÍTULO 4:

CONCLUSIONES GENERALES

Las conclusiones de este trabajo se describen teniendo en cuenta los objetivos propuestos al inicio del mismo. A continuación se presentan cada uno de los objetivos específicos y su respectiva conclusión:

Indagar y describir las posibles causas que conllevan a que los estudiantes de grado 9°, de la I.E Santa Teresita, presenten dificultades en el manejo de las diferentes formas de representación semiótica de la noción de función lineal.

Para el cumplimiento de este objetivo, se realizó el diseño y aplicación de una prueba diagnóstico teniendo en cuenta la fundamentación teórica, es decir, las investigaciones hechas por autores como Duval que nos orientaron en la identificación de las principales dificultades que presentan los estudiantes en el manejo e interpretación de las diversas formas de representación para noción de función lineal; la aplicación de dicha prueba nos permitió confirmar dificultades como la conversión entre registros, en especial los que se realizan de un registro gráfico o en lengua natural a un registro algebraico, dificultad para relacionar variables, establecer correspondencias y/o dependencias entre magnitudes en fenómenos de variación; y otras específicas de nuestra población de estudio, donde la más marcada fue la falta de generalización mediante expresiones algebraicas, lo que se evidenció con estudiantes que al pedírseles que plantearan

la ecuación -que le permitía a cada agencia determinar el valor del servicio del bus- utilizaban datos concretos (algún valor de la variable), es decir, particularizaban la situación.

Los resultados de esta prueba fueron la principal base para el diseño de la situación de aprendizaje, la cual aunque no fue aplicada, está estructurada para en cierta medida dar solución a dichas dificultades como se ha justificado con anterioridad.

Para el segundo objetivo específico:

Determinar y analizar los elementos necesarios para el diseño de una situación de aprendizaje que involucre el uso de modelos lineales, y que a su vez contribuya al aprendizaje y empleo de la noción de función lineal.

La elaboración de un marco de referencia contextual a partir de cuatro perspectivas (histórica, cognitiva, curricular y matemática) y la aplicación de la prueba diagnóstica aportaron factores fundamentales para el diseño de la propuesta de la situación de aprendizaje, tales como: la necesidad de conjugar diferentes registros de representación en el estudio del objeto matemático y sus transformaciones (tratamiento, conversión) para llegar a su significación y comprensión, por tales motivos la propuesta involucró cuatro registros de representación: la lengua natural, el registro gráfico, el tabular y el algebraico; en cada uno de ellos se propone una serie de cuestionamientos y procedimientos (tratamientos) que orientan el reconocimiento de las unidades significantes en cada registro que facilitan el proceso de conversión entre ellos; la identificación de componentes curriculares a partir de los Lineamientos y Estándares Curriculares de matemáticas del MEN, nos permitió orientar la propuesta al estudio de la variación a partir de contextos significativos para los estudiantes que motiven el estudio, empleo y aprehensión de la noción de función lineal; finalmente, elementos matemáticos que sustentan la introducción del objeto matemático desde un enfoque funcional en donde se reconozca el significado de la pendiente, el intercepto en el eje y , las variables y la relación que se establece entre ellas.

Para el tercer objetivo específico:

Aportar elementos para el empleo de la función lineal y de sus distintas representaciones semióticas como herramientas para modelar y resolver situaciones del entorno.

Para el cumplimiento de este objetivo se diseñó una situación de aprendizaje que, como se ha mencionado anteriormente, retoma las dificultades encontradas en análisis preliminares, la cual prioriza el trabajo en diferentes registros de representación (tratamientos, conversiones) donde los estudiantes pueden identificar sus variables significantes e interpretar la variación entre dos magnitudes desde distintos puntos de vista, sin embargo la verificación de este propósito queda en cierta medida supeditado a la aplicación de la misma, con la que se obtendrían unos resultados más claros y el análisis no estaría sujeto tanto a la teoría y a la experiencia.

El proceso de fundamentación teórica de este trabajo, la aplicación de pruebas y el diseño de la situación nos permiten afirmar:

- El Diseño una situación de aprendizaje como una alternativa en el empleo de la noción de función lineal para modelar situaciones de variación, a partir de la experimentación en contextos significativos y que involucra diferentes registros de representación, pueden orientar a la construcción de expresiones de la forma $y = kx$ o $y = mx + b$, gráficos, tablas y expresiones en lengua natural, puesto que los estudiantes se ven en la necesidad de usar herramientas para simbolizar y manipular las situaciones dotando de significado cada variable, en tanto reconocen que cuando cierta variable tiene cambios o variaciones determina cambios en otra, de esta manera se logra un acercamiento inicial a la construcción de expresiones simbólicas que de paso a una generalización, apoyando sus procesos en diferentes registros para describir la variación.

- El proceso de ejecución de este proyecto nos permitió una apropiación de aspectos fundamentales en la formación matemática de los estudiantes tales como: la necesidad de innovación en las situaciones que se presentan en el fomento del pensamiento variacional, las cuales recreen un ambiente participativo que no se enfatice solo en el desarrollo de habilidades procedimentales y que estimulen la construcción autónoma de conocimiento; por último, la gran necesidad de exploración de los objetos matemáticos en diversos registros, donde el estudiante pueda caracterizar y comprender los objetos matemáticos, al igual que evaluar los alcances y limitaciones de cada uno, es así como el uso de diferentes registros es indispensable en el estudio de cualquier objeto matemático ya que los distintos tipos de representación que se utilizan permiten realizar observaciones importantes del objeto, por ejemplo, en el caso de la situación propuesta en este trabajo, las observaciones se centran en la variación entre cantidades desde cada registro de representación: tabular (variación vertical y horizontal de cada magnitud involucrada), cartesiana (relaciones entre las coordenadas (x, y) y las variaciones que causa los cambios de cada una en la otra), etc. De esta manera la comprensión del objeto no se limita al contenido de un solo registro.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, J; Rondero, C y Tarasenko, A. (2007). *El papel de la linealidad como una noción articuladora en didáctica de las matemáticas*. Universidad Autónoma de Estado de Hidalgo. Red de Centros de Investigación en Educación Matemática. pp.118 -130.

Aravena, M; Caamaño, C y Giménez, J. (2008). *Modelos matemáticos a través de proyectos*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.11 (1), pp. 51.

Biembengut, M y Hein, N. (2006). *Modelaje matemático como método de investigación en clase de matemáticas*. V Festival de Internacional de Matemática de Costa a Costa Matemática para interpretar nuestro entorno.

D'Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Uno. Barcelona, España. pp. 35 – 90 -106.

Del Castillo, A. (s.f). *El concepto de función: una manera de explorar la conversión del registro gráfico al algebraico con cabrí*. Universidad de Sonora.

Del Castillo, A y Montiel, G. (2007). *El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional*. Red de Centros de Investigación en Educación Matemática. pp. 568-580.

De la Rosa, A. (2000). *El concepto de función en secundaria: conocer el grado de visualización de función lineal en el alumno*. En F. Hitt y A. Hernández (Editores), experimentaciones en educación matemática en los niveles medio superior y universitario. pp. 43-53.

Duval, R. (1992). *Gráficas y ecuaciones. La articulación de dos registros*. Antología en Educación Matemática. Cinvestav. IPN. México.

Duval, R. (1993). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* Grupo Editorial Iberoamérica, México. pp. 173-201.

Duval, R. (1996). *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3),. (Traducción libre. M. Vega compilación de trabajo de maestría psicología cognitiva y educación matemática. Universidad del Valle. 1998). pp. 349-382

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad Del Valle.

Escandón, C. (2007). *Traducción historia del concepto de función*.

Farfán, R y García, M. (s.f). *El concepto de función: Un Breve Recorrido Epistemológico*. Cinvestav-IPN México.

Font, V. (2001). *Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola*. *Revista EMA*. 6(2), pp. 180-200.

García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones graficas cartesiana presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que hacen de ellas en el aula*. Universidad de Granada. Tesis de Maestría. Departamento de las ciencias experimentales de la facultad de ciencias de la educación.

Gatica, N; Cosci, C; May, G; Baracco, M; Muratona, S; Zambrano, G y Quiroga, J. (2008). *La necesidad de conversiones entre registros para la comprensión del concepto de función*. Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis. Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. Enseñanza de la Matemática. *Revista de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT)*. 17(1), pp. 107–121.

Gómez, I y Maestre, N. (2008). *Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. Enseñanza de la Matemática*. Revista de la Asociación Venezolana de Educación Matemática (ASOVEMAT). 17(1), pp. 107–121.

Gúmera, C. (2011). *Registros de representación semiótica utilizados para la proporcionalidad y la función lineal en los textos de matemáticas de 8º año básico y 1er año medio*. Entregados por el MINEDUC en Chile 2010-11. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Tesis de Maestría. Facultad de Ciencias. Instituto de Matemáticas

Gutiérrez, S y Parada, D. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: el caso de la función afín en el marco de las aplicaciones*. Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Bogotá D. C.

Guzmán, I. (1998). *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: Voces de estudiantes*. Comité Latinoamericano de Matemática educativa, México, marzo pp. 5-21.

Hiebert, J y Carpenter, T. (1992). *Learning and teaching with understanding*. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company. pp. 65-97.

Hitt, F. (1996). *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*. Investigaciones en Matemática Educativa México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 245-264.

Janvier, C. (1996): *Modeling and the initiation into Algebra*, In Bednarz et al (eds), *Approaches to Algebra*, pp. 225-236.

Kilpatrick, J. (1992). *Investigación en Educación Matemática: su Historia y algunos temas de la actualidad*. Universidad de Georgia. pp. 115-116

López, J y Sosa, L. (2007). *¿Funciones o Ecuaciones? Dificultades Conceptuales y Procedimentales*. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán. Red de Centros de Investigación en Educación Matemática. pp. 165-175.

López, S. (2009). *Un estudio sobre la noción de función constante*. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Yucatán.

Manfredi, V. (2008). *Funciones matemáticas ¿Para qué se utilizan?*. San Miguel, Buenos Aires. Instituto de Formación Docente.

Monzoy, José A. C.C.H. Naucalpan & endash; UNAM.

MEN. *Estándares Básicos de Competencias*. Ministerio de Educación Nacional. Editorial Magisterio. 1º edición. Santa fe de Bogotá. 2006.

MEN. *Lineamientos Curriculares*. Ministerio de Educación Nacional. Editorial Magisterio. 1º edición. Santa fe de Bogotá. 1998.

PISA. *Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos*. Marco de la Evaluación: Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lecturas. 2006.

Peralta, J. (2003). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: El caso de la función lineal*. Instituto Tecnológico de Sonora.

Planchart, O (2005). *La Modelación Matemática: Alternativa Didáctica en la Enseñanza de Pre -cálculo*.

Posada, F; Gallo, O; Gutiérrez, J; Jaramillo, C; Monsalve, O; Múnera, J; Obando, G; Silva, G y Vanegas, M. (2007). *Pensamiento variacional y razonamientos algebraico*. Secretaría de Educación para la cultura de Antioquia.

Quintero, C y García, L. (s.f.). *Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado*. Universidad de Antioquia. Maestría en Educación. "Grupo Matemática, Educación y Sociedad (MES)".

REA. Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española*, 22^a ed., Madrid, España, 2001.

René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique. En la enseñanza de las funciones y la condición de univalencia*. Patricia Detzel Universidad Nacional del Comahue - Argentina Agosto de 2006.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén. España.

Sastre, P., Boubée., Rey, G., Maldonado, S y Villacampa, Y. (2005). *Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol.19, pp. 22-27.

Youshevitch, A.P. (1976). *The concept of function up to the middle of the 19th Century*. En la enseñanza de las funciones y la condición de univalencia. Patricia Detzel Universidad Nacional del Comahue - Argentina Agosto de 2006.

Zuñiga, M. (2009). *Tesis: El estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización*. Honduras. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

ANEXOS



CÓDIGO

GOBERNACIÓN DEL VALLE DEL CAUCA
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DEPARTAMENTAL
INSTITUCIÓN EDUCATIVA "SANTA TERESITA"
Resolución de reconocimiento Oficial 1748 del 5 de julio de 2006
DANE 1764030000-79. NIT. 821000993-7

Grado noveno

Nombre del estudiante: Alvaro Rodriguez

Fecha: 13-04-2012

Excursión colegial

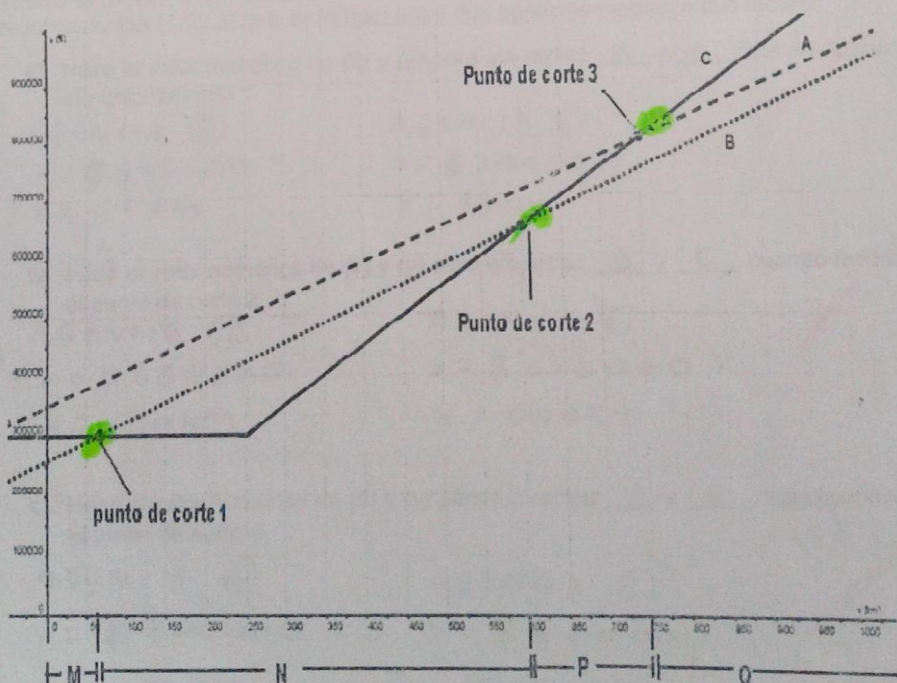
Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

La siguiente gráfica representa la relación entre valor y kilometro recorrido para cada una de las tres agencias de transporte. Tomando a "y" como el valor a pagar por el alquiler del bus y a "x" como el número de km recorridos.



Actividad 1: valor numérico de cada ecuación (Aproximado)

1) Teniendo en cuenta la gráfica y la información suministrada por cada agencia. Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus cuando se recorrieron 300km.

Agencia	Ecuación	Total
A	$y = 600x + 350000$	530000
B	$y = 650x + 260000$	455000
C	$y = 300000 + 1000(x - 250)$	350000

Muestre el procedimiento utilizado.

AGENCIA (A)

$$y = 600x + 350000$$

$$y = 600(300) + 350000$$

$$y = 180000 + 350000$$

$$y = 530000$$

AGENCIA (B)

$$y = 650x + 260000$$

$$y = 650(300) + 260000$$

$$y = 195000 + 260000$$

$$y = 455000$$

AGENCIA (C)

$$y = 300000 + 1000(x - 250)$$

$$y = 300000 + 1000(300 - 250)$$

$$y = 300000 + 1000(50)$$

$$y = 300000 + 50000$$

$$y = 350000$$

2) Hay momentos en que el valor a pagar entre dos agencias es el mismo cuando se recorre la misma distancia en km. Esto está determinado en la gráfica por los puntos de intersección (1, 2, 3) que se forman entre dos agencias mediante sus rectas.

a) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 1.

AGENCIA (B)

$$y = \$299650$$

$$x = 67 \text{ km}$$

AGENCIA (C)

$$y = \$300000$$

$$x = 67 \text{ km}$$

b) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 2.

AGENCIA (B)

$$y = \$650000$$

$$x = 600 \text{ km}$$

AGENCIA (C)

$$y = \$650000$$

$$x = 600 \text{ km}$$

c) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas A y C cuando forman el punto de corte 3.

AGENCIA (A)

$$y = \$800000$$

$$x = 750 \text{ km}$$

AGENCIA (C)

$$y = \$800000$$

$$x = 750 \text{ km}$$

Actividad 2: Caracterizar intervalos

Un intervalo de kilómetros recorridos (x) está determinado por cada una de las regiones que se han denominado M, N, P y Q.

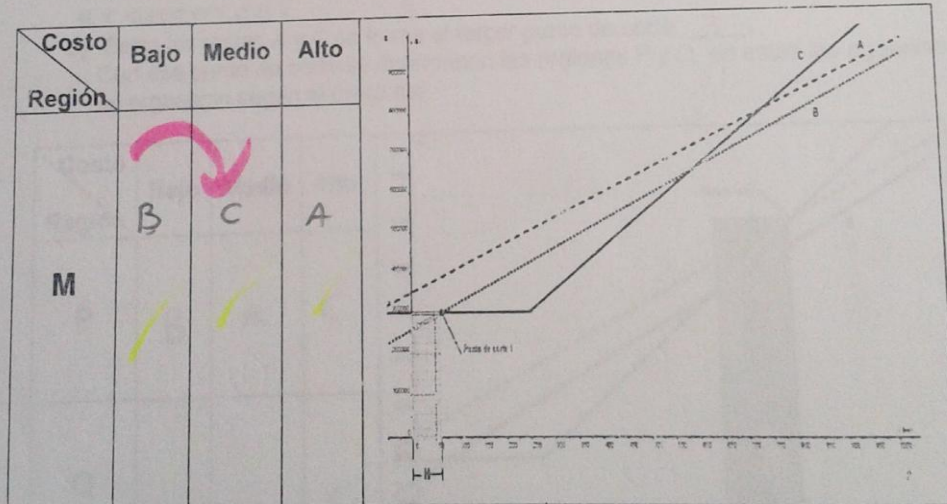
1. Analice cada una de las regiones ubicadas en la gráfica y halle los intervalos que determinan cada región para ubicarlos en la siguiente tabla.

Región	Región M	Región N	Región P	Región Q
Intervalos km recorridos (x)	$(0, 61)$	$(61, 600)$	$(600, 750)$	$(750, \infty)$

Actividad 3: Análisis gráfico

Analice detalladamente la gráfica ubicada al lado derecho de cada tabla y ubique en cada casilla la agencia que corresponda según el costo en una determinada región.

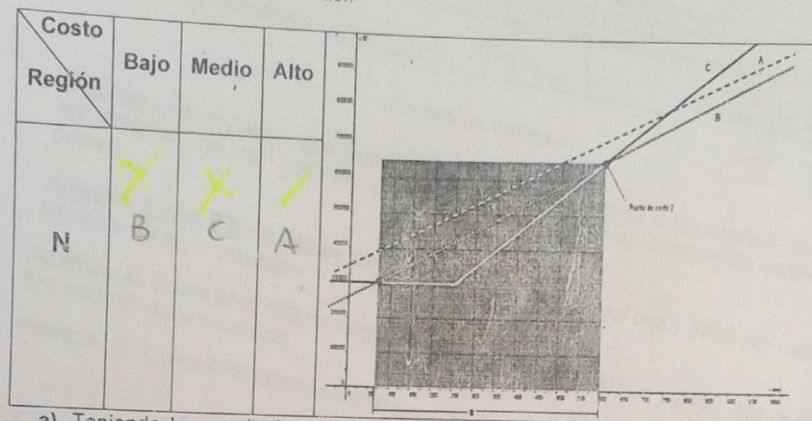
- 1) Entre las rectas B y C se forma el primer punto de corte 1.
Con ese punto de corte se determina la región M, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 61.5 km recorridos? Justifica tu respuesta.

Hasta los 61,5 km recorridos el mejor plan es el de la agencia B pues, es el más económica.

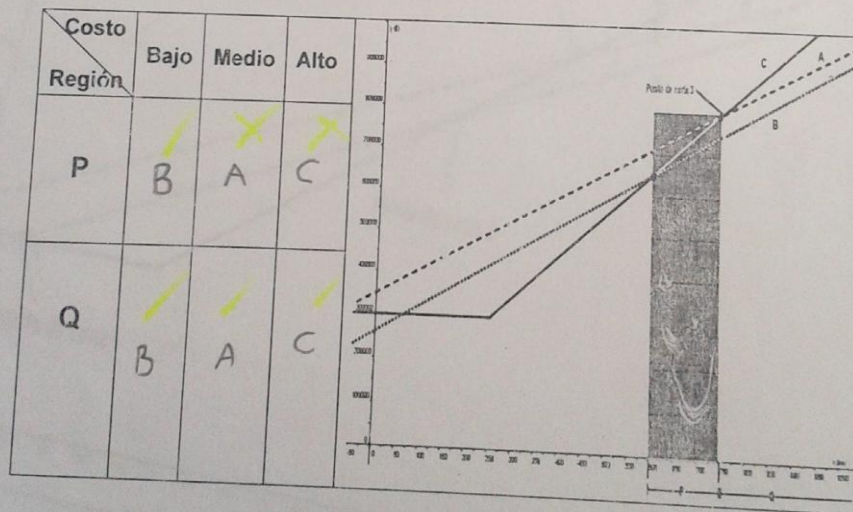
- 2) Entre las rectas B y C se forma el segundo punto de corte 2.
Con ese punto de corte se determina la región N, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 600 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

Hasta los 600km recorridos se puede escoger entre el plan de la agencia B y C ya que tienen el mismo costo y son los mas economicos

- 3) Entre las rectas A y C se forma el tercer punto de corte 3.
Con ese punto de corte se determinan las regiones P y Q, en estas las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 750 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

Hasta los 750km el mejor plan es el de la agencia A ya que el de la B y la C son igual de costosos.
* Y apartir de los 750km la agencia B tendra un costo bajo, la A un costo medio y la C un costo Alto



8

CÓDIGO

Grado noveno

Nombre del estudiante: Luisa Nieto

Fecha: 13-09-12

Excursión colegial

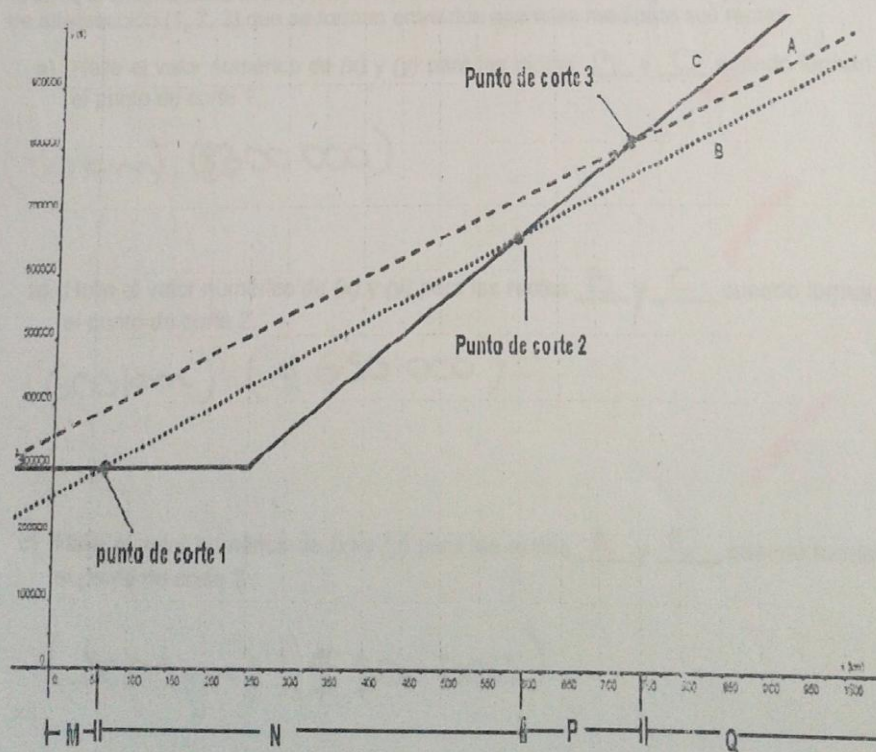
Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

La siguiente gráfica representa la relación entre valor y kilometro recorrido para cada una de las tres agencias de transporte. Tomando a "y" como el valor a pagar por el alquiler del bus y a "x" como el número de km recorridos.



Actividad 1: valor numérico de cada ecuación (Aproximado)

1) Teniendo en cuenta la gráfica y la información suministrada por cada agencia. Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus cuando se recorrieron 300km.

Agencia	Ecuación	Total
A	(750km) (\$ 800.000)	600.000
B	(50 km) (\$ 300.000)	150.000
C	(600 km) (\$ 650.000)	390.000

Muestre el procedimiento utilizado.

$$(750^x \text{ km}) \cdot (800.000) = 600.000$$

$$(50 \text{ km}) \cdot (300.000) = 150.000$$

$$(600 \text{ km}) \cdot (650.000) = 390.000$$

2) Hay momentos en que el valor a pagar entre dos agencias es el mismo cuando se recorre la misma distancia en km. Esto está determinado en la gráfica por los puntos de intersección (1, 2, 3) que se forman entre dos agencias mediante sus rectas.

a) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 1.

$$(50 \text{ km}) \cdot (300.000)$$

b) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 2.

$$(600 \text{ km}) \cdot (650.000)$$

c) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas A y C cuando forman el punto de corte 3.

$$(800 \text{ km}) \cdot (800.000)$$

Actividad 2: Caracterizar intervalos

Un intervalo de kilómetros recorridos (x) está determinado por cada una de las regiones que se han denominado M, N, P y Q.

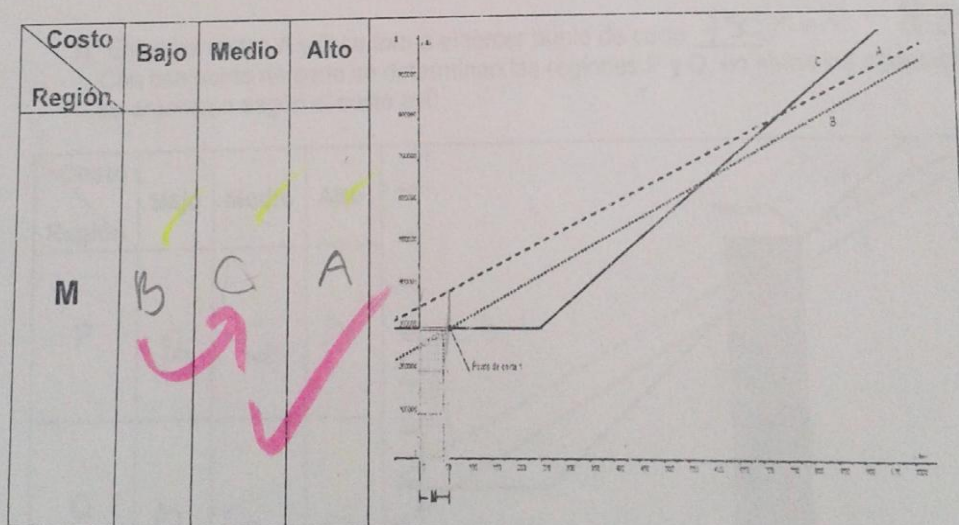
1. Analice cada una de las regiones ubicadas en la gráfica y halle los intervalos que determinan cada región para ubicarlos en la siguiente tabla.

Región	Región M	Región N	Región P	Región Q
Intervalos km recorridos (x)	(0, 50)	(51, 600)	(601, 750)	(751, ∞)

Actividad 3: Análisis gráfico

Analice detalladamente la gráfica ubicada al lado derecho de cada tabla y ubique en cada casilla la agencia que corresponda según el costo en una determinada región.

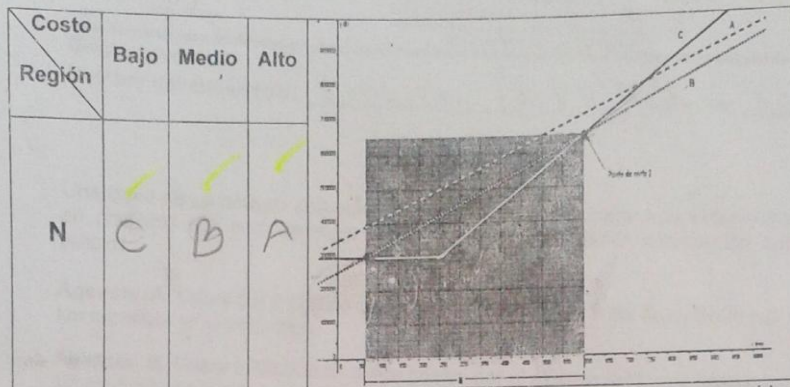
- 1) Entre las rectas B y C se forma el primer punto de corte 50 Km - \$300.000
Con ese punto de corte se determina la región M, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 61.5 km recorridos? Justifica tu respuesta.

la mas economica es la B

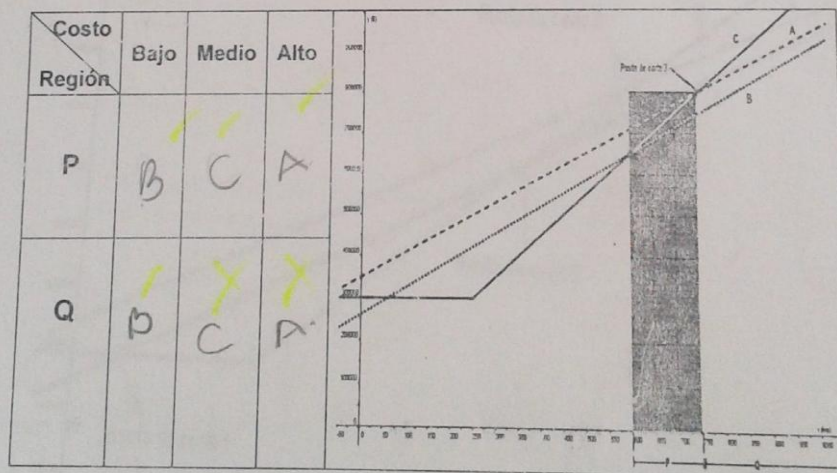
- 2) Entre las rectas B y C se forma el segundo punto de corte 600 km - \$ 650.000
 Con ese punto de corte se determina la región N, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 600 km recorridos?
 Justifica tu respuesta.

El mejor plan hasta 600 km recorrido es la C

- 3) Entre las rectas A y C se forma el tercer punto de corte 750 km - \$ 800.000
 Con ese punto de corte se determinan las regiones P y Q, en estas las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 750 km recorridos?
 Justifica tu respuesta.

El mejor plan es la B por que es mas economico



CÓDIGO

Grado noveno

Nombre del estudiante: Laura Lopez Fecha: 13 de abril

Excursión colegial

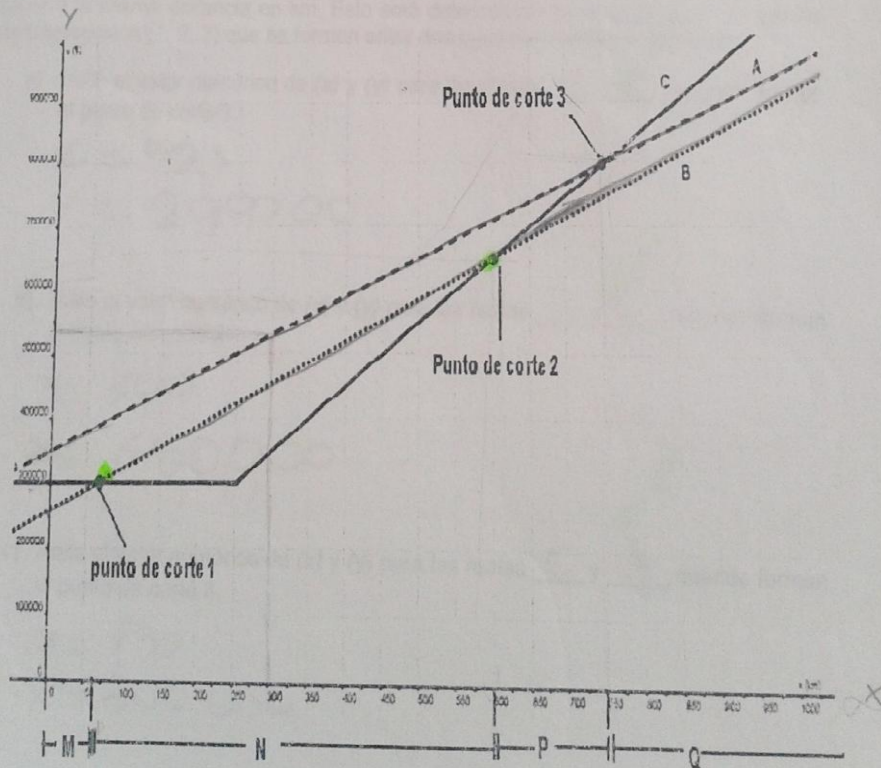
Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

La siguiente gráfica representa la relación entre valor y kilómetro recorrido para cada una de las tres agencias de transporte. Tomando a "y" como el valor a pagar por el alquiler del bus y a "x" como el número de km recorridos.



Actividad 1: valor numérico de cada ecuación (Aproximado)

1) Teniendo en cuenta la gráfica y la información suministrada por cada agencia. Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus cuando se recorrieron 300km.

Agencia	Ecuación	Total
A	$y = 600 + 300$	520000
B	$y = 1500 + 300$	450000
C	$y = 1200 + 300$	340000

Muestre el procedimiento utilizado.

2) Hay momentos en que el valor a pagar entre dos agencias es el mismo cuando se recorre la misma distancia en km. Esto está determinado en la gráfica por los puntos de intersección (1, 2, 3) que se forman entre dos agencias mediante sus rectas.

a) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 1.

$$x = 32,5$$
$$y = 299000$$

b) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 2.

$$x = 600$$
$$y = 650000$$

c) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas C y A cuando forman el punto de corte 3.

$$x = 750$$
$$y = 800000$$

Actividad 2: Caracterizar intervalos

Un intervalo de kilómetros recorridos (x) está determinado por cada una de las regiones que se han denominado M, N, P y Q.

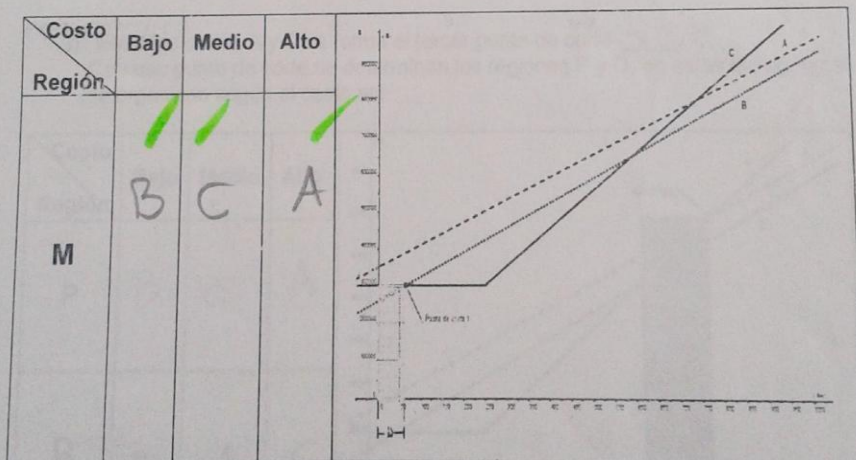
1. Analice cada una de las regiones ubicadas en la gráfica y halle los intervalos que determinan cada región para ubicarlos en la siguiente tabla.

Región	Región M	Región N	Región P	Región Q
Intervalos km recorridos (x)	0 - 52	53 - 600	601 - 750	751 - ∞

Actividad 3: Análisis gráfico

Analice detalladamente la gráfica ubicada al lado derecho de cada tabla y ubique en cada casilla la agencia que corresponda según el costo en una determinada región.

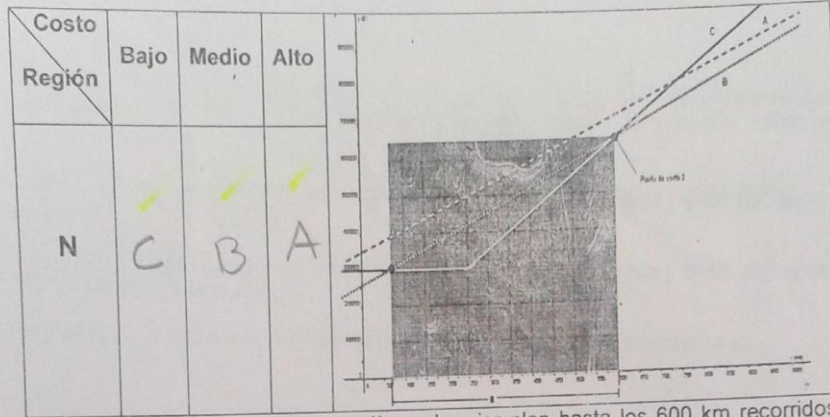
- 1) Entre las rectas B y C se forma el primer punto de corte 1.
Con ese punto de corte se determina la región M, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 61.5 km recorridos? Justifica tu respuesta.

El mejor plan fue B. ya que fue más barata y llegaron al mismo lugar.

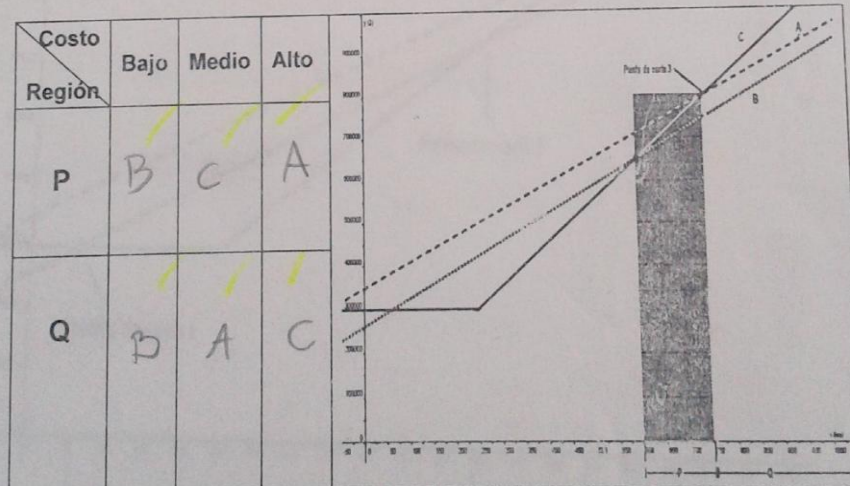
- 2) Entre las rectas B y C se forma el segundo punto de corte 2.
Con ese punto de corte se determina la región N, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 600 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

Yo creo que es el C ya que cuesta menos.

- 3) Entre las rectas A y C se forma el tercer punto de corte 3.
Con ese punto de corte se determinan las regiones P y Q, en estas las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 750 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

el mejor plan es el B. ya que es más económico en las dos regiones.



CÓDIGO

Grado noveno

Nombre del estudiante: Marco antonio solo P.

Fecha: 13/04/2017

Excursión colegial

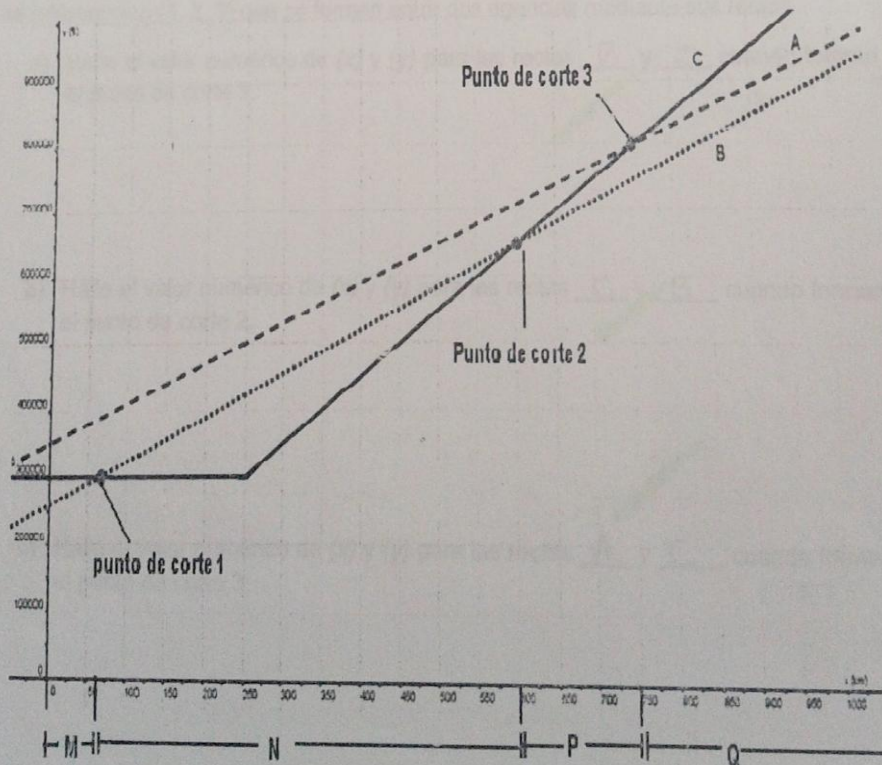
Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

La siguiente gráfica representa la relación entre valor y kilometro recorrido para cada una de las tres agencias de transporte. Tomando a "y" como el valor a pagar por el alquiler del bus y a "x" como el número de km recorridos.



Actividad 1: valor numérico de cada ecuación (Aproximado)

1) Teniendo en cuenta la gráfica y la información suministrada por cada agencia. Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus cuando se recorrieron 300km.

Agencia	Ecuación	Total
A	$X = (600 \times 300 \text{ km}) + 800.000$	$\$ 980.000$
B	$X = 180.000 + 650.000$	$\$ 830.000$
C	$X = 180.000 + 800.000$	$\$ 980.000$

Muestre el procedimiento utilizado.

$$\text{A) } X = (600 \times 300 \text{ km}) + 800.000$$

$$X = 180.000 + 800.000$$

$$X = 980.000$$

$$\text{B) } X = (600 \times 300 \text{ km}) + 650.000$$

$$X = 180.000 + 650.000$$

$$X = 830.000$$

$$\text{C) } X = (600 \times 300 \text{ km}) + 800.000$$

$$X = 180.000 + 800.000$$

$$X = 980.000$$

2) Hay momentos en que el valor a pagar entre dos agencias es el mismo cuando se recorre la misma distancia en km. Esto está determinado en la gráfica por los puntos de intersección (1, 2, 3) que se forman entre dos agencias mediante sus rectas.

a) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 1.

b) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas C y B cuando forman el punto de corte 2.

c) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas A y C cuando forman el punto de corte 3.

Actividad 2: Caracterizar intervalos

Un intervalo de kilómetros recorridos (x) está determinado por cada una de las regiones que se han denominado M, N, P y Q.

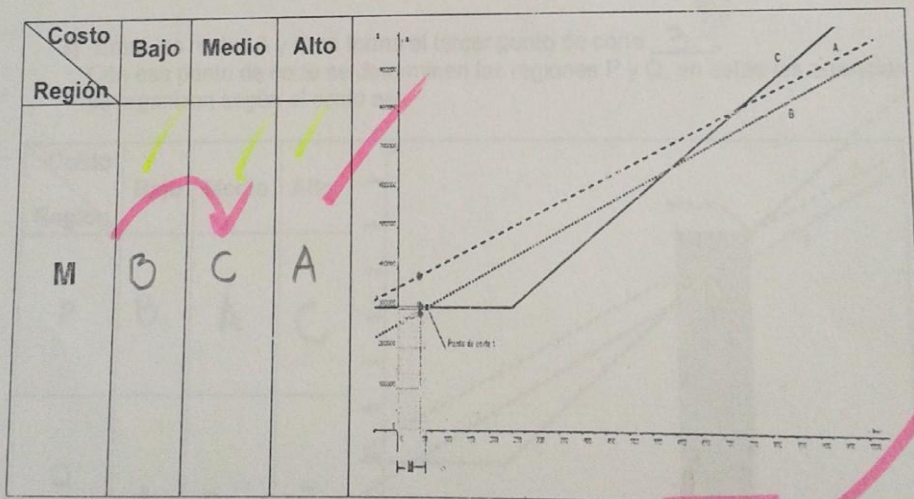
1. Analice cada una de las regiones ubicadas en la gráfica y halle los intervalos que determinan cada región para ubicarlos en la siguiente tabla.

Región	Región M	Región N	Región P	Región Q
Intervalos km recorridos (x)	(0, 50)	(50, 600)	(600, 750)	(750, ∞)

Actividad 3: Análisis gráfico

Analice detalladamente la gráfica ubicada al lado derecho de cada tabla y ubique en cada casilla la agencia que corresponda según el costo en una determinada región.

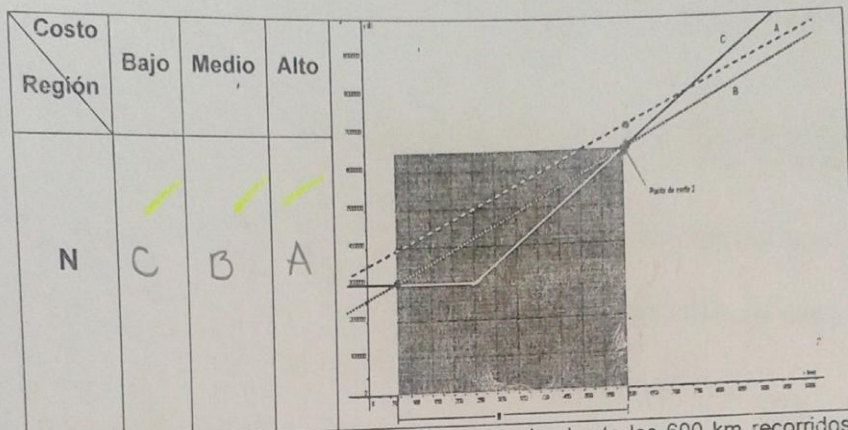
- 1) Entre las rectas B y C se forma el primer punto de corte 1.
Con ese punto de corte se determina la región M, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 61.5 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

R/ el mejor plan para viajar es la agencia B tiene mejor precio bajo.

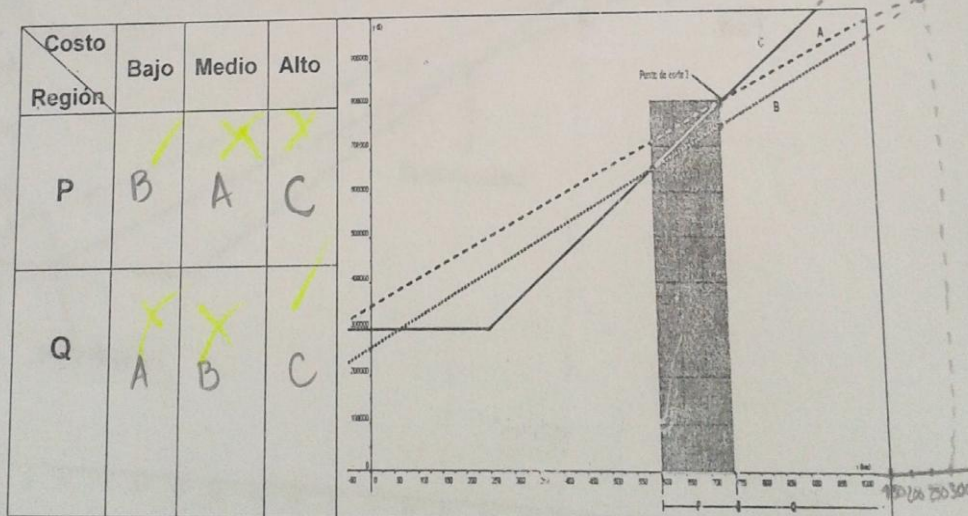
- 2) Entre las rectas B y C se forma el segundo punto de corte 2.
Con ese punto de corte se determina la región N, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 600 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

R/ la agencia C por que es mas economica.

- 3) Entre las rectas A y C se forma el tercer punto de corte 3.
Con ese punto de corte se determinan las regiones P y Q, en estas las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 750 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

R/ la B es mas barata.



CÓDIGO

Grado noveno

Nombre del estudiante: CRISTIAN CAMILO FRANCO C. Fecha: 13/09/2012

Excursión colegial

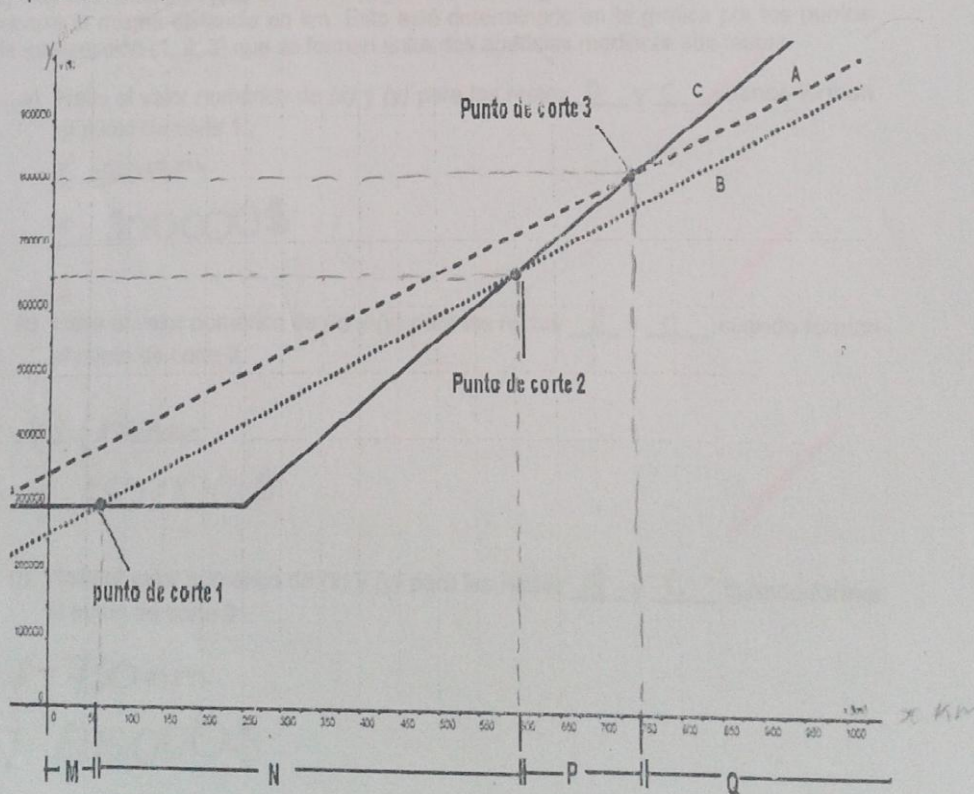
Una clase de un colegio que quiere alquilar un bus para hacer una excursión se pone en contacto con tres agencias de transporte para obtener información sobre sus precios.

Agencia A. Cobra \$350.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$600 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia B. Cobra \$260.000 de cargo básico por el alquiler del bus y \$650 por cada km recorrido en la excursión.

Agencia C. Cobra \$300.000 hasta 250 km y \$1.000 por cada km adicional.

La siguiente gráfica representa la relación entre valor y kilómetro recorrido para cada una de las tres agencias de transporte. Tomando a "y" como el valor a pagar por el alquiler del bus y a "x" como el número de km recorridos.



Actividad 1: valor numérico de cada ecuación (Aproximado)

1) Teniendo en cuenta la gráfica y la información suministrada por cada agencia. Halle las ecuaciones que le permitieron a cada agencia encontrar el valor total del servicio de bus cuando se recorrieron 300km.

Agencia	Ecuación	Total
A	600	
B		
C		

Muestre el procedimiento utilizado.

2) Hay momentos en que el valor a pagar entre dos agencias es el mismo cuando se recorre la misma distancia en km. Esto está determinado en la gráfica por los puntos de intersección (1, 2, 3) que se forman entre dos agencias mediante sus rectas.

- a) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 1.

$$x = 50 \text{ km}$$

$$y = 300.000 \$$$

- b) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas B y C cuando forman el punto de corte 2.

$$x = 600 \text{ km}$$

$$y = 650.000 \$$$

- c) Halle el valor numérico de (x) y (y) para las rectas A y C cuando forman el punto de corte 3.

$$x = 750 \text{ km}$$

$$y = 800.000 \$$$

Actividad 2: Caracterizar intervalos

Un intervalo de kilómetros recorridos (x) está determinado por cada una de las regiones que se han denominado M, N, P y Q.

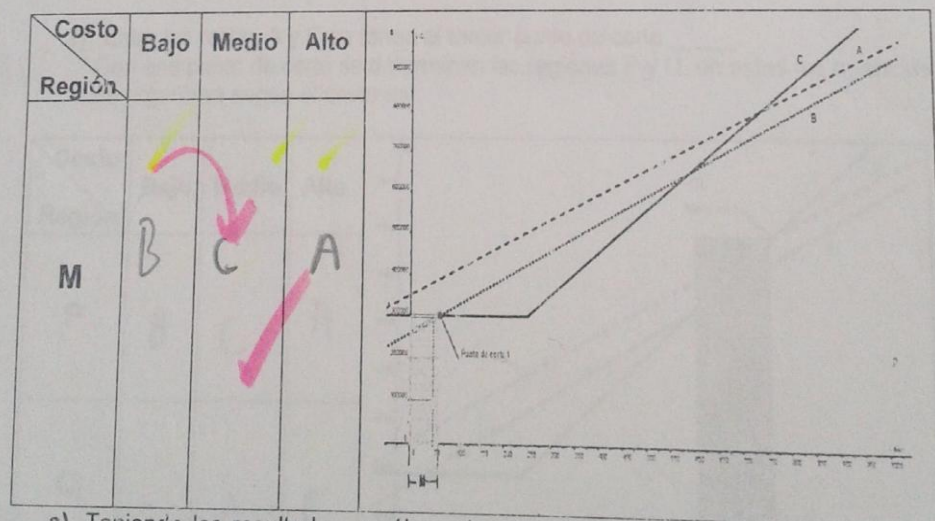
1. Analice cada una de las regiones ubicadas en la gráfica y halle los intervalos que determinan cada región para ubicarlos en la siguiente tabla.

Región	Región M	Región N	Región P	Región Q
Intervalos km recorridos (x)	de 0 a 50 km	50 A 600	600 A 750	750 A ∞

Actividad 3: Análisis gráfico

Analice detalladamente la gráfica ubicada al lado derecho de cada tabla y ubique en cada casilla la agencia que corresponda según el costo en una determinada región.

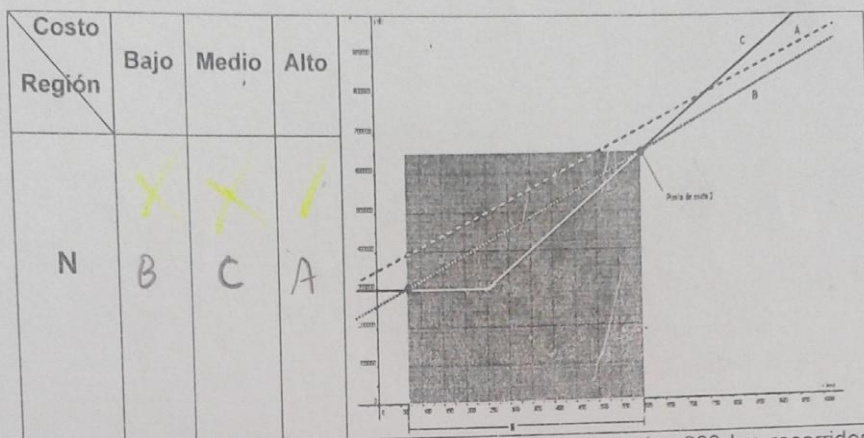
- 1) Entre las rectas B y C se forma el primer punto de corte 1.
Con ese punto de corte se determina la región M, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 61.5 km recorridos? Justifica tu respuesta.

La B por que es la mas barata

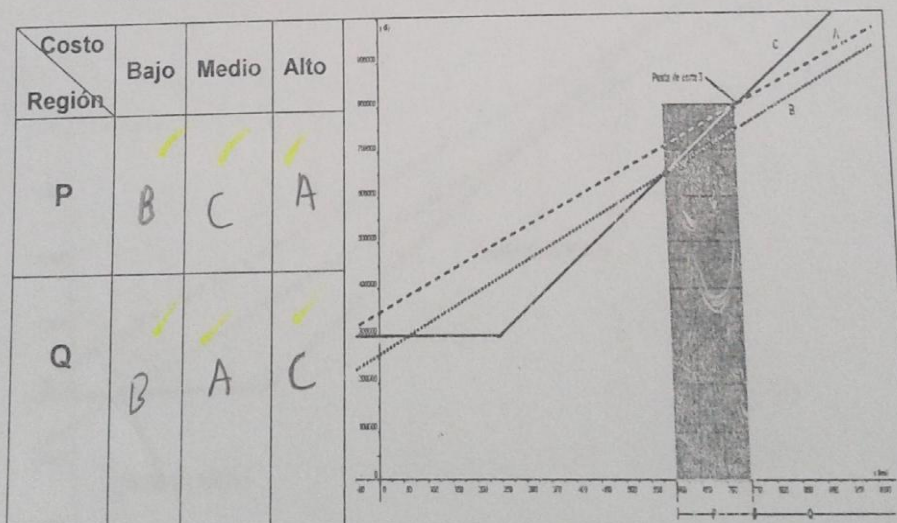
- 2) Entre las rectas B y C se forma el segundo punto de corte 2.
Con ese punto de corte se determina la región N, en esta las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 600 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

la B por que es la mas economica

- 3) Entre las rectas A y C se forma el tercer punto de corte _____.
Con ese punto de corte se determinan las regiones P y Q, en estas las agencias se organizan según el costo así:



- a) Teniendo los resultados ¿cuál es el mejor plan hasta los 750 km recorridos?
Justifica tu respuesta.

la B porque es la mas barata