

SOBRE SUPREMOS GENERADOS A PARTIR DE FUNCIONES DE MCNAUGHTON EN UNA VARIABLE

JOSE ESTEBAN BASTIDAS ZAPATA



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2024

SOBRE SUPREMOS GENERADOS A PARTIR DE FUNCIONES DE MCNAUGHTON EN UNA VARIABLE

Jose Esteban Bastidas Zapata

Trabajo presentado para optar por el título de
MATEMÁTICO

Dirigido por:

Luz Victoria de la Pava Castro, Ph.D.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y
EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS (3147)
SANTIAGO DE CALI

2024

Agradecimientos

Agradezco a mi madre Alba, a mi padre Jaime, y a mis hermanos y hermana Jaime, Chavela, Ian y Jerónimo por su apoyo incondicional, en momentos de bienestar y de dificultad, y por nunca perder la unidad. A mi pareja Noralba por las enseñanzas y compañía que me ha dedicado a lo largo de nuestra relación, con lo que he podido crecer como persona. A Gandalf, por ser la mejor mascota que uno podría desear, y ser mi compañero de viaje.

Le doy las gracias a mi mejor amigo Carlos, de quien he aprendido incontablemente, y en quien siempre he encontrado un espacio para respirar. A mis compañeros de carrera y colegas Catalina, Sebastián y Daniel, con quienes compartí mis años de carrera y me brindaron la mano cuando más lo requerí. A mis amigos Nahúm, Alexander y Steven, quienes constantemente estuvieron pendientes de mí, y de los cuales he recibido infinito aprecio.

Agradezco a los profesores, el Ph.D. Héber Mesa y el Ph.D. Guillermo Ortiz, quienes siempre me manifestaron estima, tanto humana como profesional, y que me aconsejaron y brindaron oportunidades con mis desafíos académicos. A la profesora Ph.D. Doris Hinestroza, que en paz descanse, a quien le atribuyo lo más mágico de mi vida: mi gusto por la Matemática.

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle, por su calidez, que siempre motivó en este proceso. Al equipo de rugby Lobos Univalle, con quienes aprendí en manada a ser más transversal y coherente.

Finalmente, le doy las gracias a mi asesora, la Ph.D. Luz Victoria de la Pava, quien supo recibirme, entenderme y guiarme. Que con sus conocimientos me instruyó y me invitó a superarme. Que supo encontrar las palabras que necesitaba en el momento preciso. Y que con su paciencia y comprensión permitió que este documento pudiese culminarse.

Índice

Introducción	1
I Preliminares	3
1. Elementos de la Topología, el Análisis y el Álgebra	3
1.1. Elementos de Topología	3
1.2. Elementos de Análisis	5
1.3. Elementos de Álgebra	7
2. MV-álgebras	12
2.1. MV-álgebras	12
2.2. MV-ecuaciones	14
2.3. MV-álgebras libres	15
2.4. Funciones de McNaughton	19
3. MV-álgebras de Riesz	20
3.1. MV-álgebras de Riesz	20
3.2. Funciones de Riesz-McNaughton	21
II Sobre supremos en $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{RM}_1$	23
4. Sobre supremos generados a partir de $\mathcal{M}_1$	23
4.1. Propiedades de Λ -puntos y $\hat{\Lambda}$ -puntos	23
4.2. Estructura algebraica derivada de $Sup(\mathcal{M}_1)$	31
5. Sobre supremos generados a partir de $\mathcal{RM}_1$	47
6. El siguiente paso	62
6.1. Preguntas abiertas e interrogantes	62
6.2. Mayores dimensiones	66
Conclusiones	69
Apéndices	71
Apéndice 1: Ejemplo 4.2.12	71

Apéndice 2: Ejemplo 5.16	74
Apéndice 3: Ejemplo 5.24	77
Referencias	82

Índice de figuras

1.	Visualización para escritura estándar de funciones f y g	24
2.	Visualización para escritura estándar de una suma $h = f \oplus g$.	25
3.	Algunos valores de b para un $\hat{\Lambda}$ -punto	30
4.	Supremo e ínfimo de dos funciones de McNaughton	35
5.	Una función discontinua de $Sup(\mathcal{M}_1)$	41
6.	Función suma que no pertenece a $Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1)$	44
7.	Una función en $\mathcal{RM}_1$ con partición estándar no contenida en $\mathbb{Q}$	49
8.	Una función discontinua de $Sup(\mathcal{RM}_1)$	53
9.	Aproximación de una función continua en $Sup(\mathcal{RM}_1)$	59
10.	Funciones en $\mathcal{M}_2$ que se intersectan en un punto.	67
11.	Funciones en $\mathcal{M}_2$ que se intersectan en una recta.	68
12.	Simulaciones para Ejemplo 4.2.12 con $n = 1, 2, 5, 25, 100, 1000$.	73
13.	Simulaciones para Ejemplo 5.16 con $n = 4, 6, 10, 25, 100, 1000$.	76
14.	Simulaciones para Ejemplo 5.24 con $n = 1$ y $n = 2$	81

Resumen

Palabras clave: *MV-álgebras, función de McNaughton, función de Riesz-McNaughton, supremos e ínfimos.*

En este trabajo se estudian las MV-álgebras de funciones de McNaughton y de Riesz-McNaughton en una variable, y se profundiza en la estructura algebraica que se origina al cerrar estas MV-álgebras por supremos arbitrarios, así como las propiedades de las funciones que habitan en esta cerradura. El autor define y estudia propiedades de un conjunto especial de puntos, los Λ -puntos, puntos en los que existen distintas representaciones laterales de funciones de McNaughton que se intersectan. Se construyen de manera general funciones con discontinuidades finitas en Λ -puntos tanto en el contexto de las funciones de McNaughton como de Riesz-McNaughton, y se demuestra que toda función continua es límite uniforme de funciones de Riesz-McNaughton, pero no de funciones de McNaughton. Finalmente, se muestra explícitamente la relación dual entre supremos e ínfimos por medio de la operación negación, y se construyen conjuntos a partir de la unión entre supremos e ínfimos que dan pie a subálgebras no triviales de $[0, 1]^{[0, 1]}$.

Introducción

Las MV-álgebras son estructuras definidas en 1958 por Chang [4], como la contraparte del cálculo proposicional $\aleph_0$ -valuado de Łukasiewicz, de la misma manera que las álgebras Booleanas lo son de la lógica bivaluada. Más aún, las álgebras Booleanas son un tipo particular de MV-álgebras, por lo que es normal preguntarse qué tantos resultados pueden extenderse de un dominio a otro. Un ejemplo de esto puede encontrarse en cómo Russo [17] extiende la clásica dualidad de Stone a una dualidad entre las MV-álgebras *limit cut complete* (*lcc*) y los espacios *MV-topológicos de Stone*.

Una de las MV-álgebras más importantes es la MV-álgebra estándar $[0, 1]$ con las operaciones $x \oplus y := \min\{1, x + y\}$ y $\neg x := 1 - x$. De hecho, parte de la motivación de la forma en que se definen las MV-álgebras corresponde a una forma de capturar información del intervalo unitario. Su importancia se revela en el teorema de completitud de Chang [4]: una ecuación se cumple en cualquier MV-álgebra si, y sólo si, esta se cumple en $[0, 1]$. Como consecuencia de esto, es posible describir muchas clases de MV-álgebras como álgebras de funciones continuas $[0, 1]$ -valuadas sobre algún espacio de Hausdorff compacto. Un tipo importante de estas MV-álgebras es la MV-álgebra libre sobre n generadores, denotada por $Free_n$, pues actúa como objeto universal al poder representar a cualquier MV-álgebra con n generadores [5]. Esta es descrita como la MV-álgebra de funciones continuas $[0, 1]$ -valuadas definidas sobre $[0, 1]^n$, lineales a trozos, y actúan para las MV-álgebras de la misma manera en que las funciones $\{0, 1\}$ -valuadas actúan para las álgebras Booleanas.

Otro tipo especial de MV-álgebras son las MV-álgebras de Riesz [7], que incorporan la noción de multiplicación por un escalar en $[0, 1]$ a las MV-álgebras. Esto permite conectar las MV-álgebras con los espacios vectoriales reales, ordenados reticularmente (Espacios de Riesz), en el análisis funcional [18]. Al tener un fundamento en las MV-álgebras, es posible extender gran cantidad de los resultados de estas a las MV-álgebras de Riesz. Particularmente, Di Nola, Lenzi y Vitale en [9], con intención de extender lo desarrollado por Marra y Spada [16], se puede ahondar en la MV-álgebra de Riesz de funciones continuas de $[0, 1]^n$ en $[0, 1]$ y su subálgebra de funciones continuas lineales a trozos, dando pie a las funciones de Riesz-McNaughton que describen a las MV-álgebras de Riesz libres. La incorporación de esta multiplicación por escalar presente en las MV-álgebras de Riesz las convierten en

estructuras sobre las que se pueden explorar y construir teorías análogas a las ya conocidas, como presentan Bede y Di Nola [2], o sobre las cuales pueden desarrollarse conexiones importantes, por ejemplo con redes neuronales, como proponen Di Nola, Gerla y Leuştean en [8].

En el presente trabajo, se estudian las MV-álgebras $Free_1$ de funciones de McNaughton en una variable, y RM_1 de funciones de Riesz-McNaughton en una variable, a las cuales denotaremos por $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{RM}_1$, respectivamente. En particular, estudiamos la estructura algebraica que se origina al cerrar estas MV-álgebras por supremos arbitrarios, así como las propiedades de las funciones que habitan en esta cerradura.

Para ello, en el capítulo 4 definimos los Λ - puntos y los $\hat{\Lambda}$ - puntos, los primeros son puntos del cuadrado $[0, 1]^2$ que son intersección de funciones de McNaughton, y los segundos puntos que no lo son. Caracterizamos estos puntos, y aprovechamos sus propiedades para profundizar en el estudio del conjunto de funciones que se obtienen como supremos (resp. ínfimos) de funciones de McNaughton en un variable, $Sup(\mathcal{M}_1)$ (resp. $Inf(\mathcal{M}_1)$); estudiamos conjuntos relacionados tales como la intersección $Sup(\mathcal{M}_1) \cap Inf(\mathcal{M}_1)$, la unión $Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1)$, el conjunto suma $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$, y el de las funciones lineales a trozos con las aquí definidas Λ - discontinuidades finitas. En el capítulo 5, presentamos los resultados obtenidos para el caso de las funciones que son supremo (resp. ínfimo) de funciones de Riesz McNaughton.

Tanto en el capítulo 4 como en el 5, se presentan dos teoremas importantes para construir funciones no triviales en estas clausuras, tanto para $\mathcal{M}_1$ como para $\mathcal{RM}_1$. Se presenta el marco de los desplazamientos inferiores para aproximar inferiormente funciones continuas en $[0, 1]$ por funciones de Riesz-McNaughton con una precisión arbitraria.

Finalmente, en el capítulo 6 se proponen algunas preguntas que han surgido a lo largo del trabajo y que por cuestiones de tiempo no hemos explorado a fondo, así como algunos posibles afirmaciones cuya veracidad se puede investigar a futuro. Presentamos además, algunas posibles aplicaciones en esta línea de trabajo.

Parte I

Preliminares

1. Elementos de la Topología, el Análisis y el Álgebra

En esta sección se presentarán definiciones y resultados que serán importantes a lo largo del documento, y de las nociones necesarias para construirlas. Se separarán en tres secciones, a saber, Topología, Análisis y Álgebra, cada una en la cual las referencias utilizadas pueden ser encontradas en textos enfocados en las mismas.

1.1. Elementos de Topología

Al analizarse los supremos de conjuntos de funciones de manera puntual, vale la pena incorporar ideas topológicas en $[0, 1]$; específicamente nos interesan las de compacidad y densidad. Las siguientes definiciones son típicas de cualquier texto básico en Topología, tomándose como referencia [12].

Definición 1.1.1 (Topología). Sea X un conjunto. Una topología (o estructura topológica) en X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface:

1. La unión de miembros de τ es a su vez un elemento de τ .
2. La intersección finita de miembros de τ es a su vez un elemento de τ .
3. $\emptyset$ y X son elementos de τ .

Definición 1.1.2 (Espacio topológico). Una pareja (X, τ) que consiste de un conjunto X y una topología τ en X es llamada un espacio topológico.

Los elementos de un espacio topológico son llamados puntos. Los miembros de τ son llamados los conjuntos abiertos del espacio topológico (X, τ) (o de la topología τ).

Definición 1.1.3 (Vecindad). Sea (X, τ) un espacio topológico. Por una vecindad de un elemento $x \in X$ se entiende a cualquier conjunto abierto (esto es, un miembro de τ) que contenga a x .

Definición 1.1.4 (Base de una topología). Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es llamada una base para τ si cada conjunto abierto (esto es, un miembro de τ) es la unión de elementos de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ también es llamada una base para el espacio (topológico) X , y sus elementos los conjuntos abiertos básicos de la topología τ .

Definición 1.1.5 (Conjunto cerrado). Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que A es cerrado si su complemento $X - A$ es un conjunto abierto.

Definición 1.1.6 (Clausura). Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in X$ es adherente a A si cada vecindad de x contiene por lo menos un punto de A (el cual podría ser el mismo x). El conjunto

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall U(x) : U(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

de todos los puntos en X adherentes a A es llamado la clausura de A .

Definición 1.1.7 (Conjunto denso). Sea (X, τ) un espacio topológico. Un subconjunto $D \subseteq X$ es denso en X si $\overline{D} = X$.

Una forma más agradable de verificar que un conjunto es denso es:

Proposición 1.1.8. Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que un subconjunto $D \subseteq X$ es denso en X si, y sólo si, todo conjunto abierto en X contiene algún elemento de D .

Definición 1.1.9 (Espacio de Hausdorff). Un espacio topológico (X, τ) es Hausdorff (o separado) si cada dos puntos distintos poseen vecindades disjuntas, esto es, para cualesquiera $p \neq q$ en X , existen vecindades $U(p)$ y $V(q)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.1.10 (Cubrimiento por abiertos). Sea (X, τ) un espacio topológico y Y un subconjunto de X . Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de conjuntos abiertos se llama cubrimiento de Y por abiertos si $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$.

Se dice que un subconjunto $\{B_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ de $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es un subcubrimiento si a su vez, $Y \subseteq \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} B_\beta$.

Definición 1.1.11 (Espacio compacto). Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff. Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice compacto si cada cubrimiento por abiertos de Y admite un subcubrimiento finito.

1.2. Elementos de Análisis

La noción fundamental que se trabajará a lo largo del documento es la de supremo (ínfimo) de un conjunto. Este concepto se sustenta en que de antemano, existe algún orden sobre el conjunto en cuestión. Comenzamos con una presentación de conjuntos parcialmente ordenados; estas ideas se toman principalmente de [3].

Definición 1.2.1 (Posets y cadenas). *Una relación binaria $\leq$ definida sobre un conjunto A es un orden parcial sobre el conjunto A si las siguientes condiciones se satisfacen en todo A :*

- i) $a \leq a$ (reflexividad)
- ii) $a \leq b$ y $b \leq a$ implican $a = b$ (antisimetría)
- iii) $a \leq b$ y $b \leq c$ implican $a \leq c$ (transitividad).

Si, en adición, para todos a y b en A ,

- iv) $a \leq b$ o $b \leq a$

entonces se dice que $\leq$ es un orden total sobre A . Un conjunto no vacío con un orden parcial sobre él es llamado un conjunto parcialmente ordenado, o más brevemente, un poset; y si la relación es un orden total entonces se habla de un conjunto totalmente ordenado, o un conjunto linealmente ordenado, o simplemente una cadena. En un poset A se utiliza la expresión $a < b$ para indicar $a \leq b$ pero $a \neq b$.

Ejemplo 1.2.2. El orden usual $\leq$ sobre los números reales $\mathbb{R}$ es un orden total. El orden restringido a $[0, 1]$ es un orden total sobre $[0, 1]$.

Ejemplo 1.2.3. Sea X un conjunto. En $[0, 1]^X$, el conjunto de funciones de X en $[0, 1]$, se define $\leq$ sobre $[0, 1]^X$ por $f \leq g$ si, y sólo si, $f(a) \leq g(a)$ en el orden usual de $[0, 1]$, para todo $a \in X$; este orden es un orden parcial.

Definición 1.2.4 (Supremo e Ínfimo). *Sea A un subconjunto de un poset P . Un elemento p en P es una cota superior para A si $a \leq p$ para todo $a \in A$. Un elemento p en P es la menor cota superior de A (m.c.s de A), o supremo de A ($\sup(A)$) si p es una cota superior de A , y $a \leq p$ para todo $a \in A$ implica $p \leq b$ (esto es, p es la menor entre todas las cotas superiores de A). Similarmente se puede definir qué significa que p sea una cota inferior de A ,*

y que p sea la mayor cota inferior de A (m.c.i. de A), también llamada el ínfimo de A ($\inf(A)$).

Realizar las definiciones de supremos sobre posets permite visualizar los dos casos de interés: el presentado en el Ejemplo 1.2.2 para $[0, 1]$, y el presentado en el Ejemplo 1.2.3 para $[0, 1]^X$. Para el primero, es posible hallar el supremo de cualquier subconjunto no vacío en virtud de estar acotado, gozar de completitud y poseer un orden total. Para el segundo, también es posible hallar el supremo y el ínfimo de cualquier subconjunto no vacío, esta vez en virtud de que el análisis del sup se realiza de manera puntual, recayendo en el primer caso.

Por otra parte, a lo largo del trabajo será lo usual trabajar con familias contables de funciones, lo cual puede pensarse como sucesiones de funciones. Algunas de las construcciones de estas sucesiones son crecientes en el sentido del Ejemplo 1.2.3, por lo que puede pensarse al supremo de tal familia como el límite de estas sucesiones. Esta idea permite que si se desea explotar algunos resultados presentados en este trabajo, pueda hacerse explorando la teoría de convergencia para sucesiones de funciones. En [15] se encuentran ideas asociadas a esto, las cuales se presentan a continuación.

Definición 1.2.5 (Sucesión de funciones). Una sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es una correspondencia que asocia a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, una función f_n definida en $[0, 1]$ que toma valores en $[0, 1]$.

Definición 1.2.6 (Convergencia puntual). Se dice que una sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, converge puntualmente a una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cuando, para cada $x \in [0, 1]$, la sucesión de números $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge al número $f(x)$.

Definición 1.2.7 (Convergencia uniforme). Se dice que una sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente a una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cuando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0, 1]$.

La convergencia uniforme permite garantizar bastantes resultados fuertes sobre límites de funciones, entre ellos el siguiente.

Teorema 1.2.8. Si la sucesión de funciones f_n converge a f uniformemente en $[0, 1]$ y todas las funciones f_n son continuas en un punto $a \in [0, 1]$, entonces f es continua en a .

De esta referencia, también presentamos un teorema vital en el estudio de los números reales, que permite garantizar algunos resultados sobre $[0, 1]$.

Teorema 1.2.9 (de Borel-Lebesgue). *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado. Todo cubrimiento $F \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de F por abiertos admite un subcubrimiento finito:*

$$F \subseteq A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}.$$

Los últimos elementos del Análisis que se necesitarán competen a la escritura de estas funciones que se utilizarán. Particularmente, como se operará con funciones que se definen a trozos, es conveniente contar con una escritura que recoja esta información. Para ello, se incluye la descripción de partición, como se realiza en cualquier texto de cálculo integral.

Definición 1.2.10 (Partición normal). *Una partición normal de $[0, 1]$ es un subconjunto finito $P = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ de $[0, 1]$, donde $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ y, $a_0 = 0$ y $a_n = 1$. Al número positivo $\|P\| := \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i - a_{i-1}\}$ se le denomina norma de la partición.*

Las particiones normales permiten aprovechar ideas como la utilizada por Bauer en [1] para expresar funciones por tramos a través de funciones características.

Definición 1.2.11 (Función característica). *Sea X un conjunto y A un subconjunto de X . La función*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases},$$

es llamada la función indicadora o característica de A .

Es claro que si f es una función que se define a trozos, cada uno de estos trozos define una función característica en las que f puede descomponerse.

1.3. Elementos de Álgebra

Para caracterizar, o en su defecto, poder dar una descripción de algunos de los objetos que se definirán en este documento y que son fundamentales, son necesarios algunos resultados de la teoría de números, específicamente relacionados a aproximación de números por racionales y ecuaciones diofánticas.

La presentación realizada en [14] es sucinta y elegante, y es por la que se opta en las siguientes proposiciones.

Teorema 1.3.1 (de aproximación de Dirichlet). *Para cada número real α y número natural N , puede encontrarse un número natural $n \leq N$ y un entero p con*

$$\left| \alpha - \frac{p}{n} \right| < \frac{1}{Nn}.$$

En particular,

$$|n\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Corolario 1.3.2 (Teorema principal en las ecuaciones diofánticas lineales). *Para cada fracción $\frac{a}{b}$ en términos reducidos, pueden encontrarse enteros x, y tal que*

$$ax - by = 1.$$

Este resultado se extiende de manera trivial para a y b enteros con factores comunes, y es posible caracterizar todas sus soluciones, como se propone en [13].

Proposición 1.3.3. *Para enteros dados a, b y c , pueden encontrarse enteros x, y tal que*

$$ax + by = c$$

si, y sólo si, c es múltiplo de $\gcd(a, b)$. Si x_0, y_0 son soluciones de esta ecuación, la solución general está dada por

$$x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a, b)}t \quad \text{y} \quad y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a, b)}t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, las nociones de las estructuras algebraicas con las que trabajaremos serán tomadas en el contexto del Álgebra Universal, y las definiciones subyacentes que utilizaremos son las presentadas en [3].

Definición 1.3.4 (Operación). *Para un conjunto no vacío A y n un entero no negativo, se define $A^0 = \{\emptyset\}$, y, para $n > 0$, A^n es el conjunto de n -uplas de elementos de A . Una operación n -aria (o función) sobre A es cualquier función f de A^n a A ; n es la aridad (o rango) de f . Una operación finitaria es una operación n -aria para algún n . La imagen de $(a_1, \dots, a_n)$*

bajo una operación n -aria f es denotada por $f(a_1, \dots, a_n)$. Una operación f sobre A es llamada constante si su aridad es cero; esta está completamente determinada por la imagen $f(\emptyset)$ en A del único elemento $\emptyset$ de A^0 , y como tal es conveniente identificarla con el elemento $f(\emptyset)$. Así, una operación constante es pensada como un elemento de A . Una operación f sobre A es unaria, binaria o terciaria si su aridad es 1, 2 o 3 respectivamente.

Definición 1.3.5 (Lenguaje de álgebras). Un lenguaje (o tipo) de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$ de funciones de símbolos tal que un entero no negativo n es asignado a cada miembro f de $\mathcal{F}$. Este entero es llamado la aridad (o rango) de f , y f se dice ser un símbolo de función n -ario. El subconjunto de símbolos de funciones n -arias en $\mathcal{F}$ es denotado por $\mathcal{F}_n$.

Definición 1.3.6 (Álgebra). Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces una álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ es un par ordenado $\langle A, F \rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexadas por el lenguaje $\mathcal{F}$ tal que correspondiente a cada símbolo de función n -aria f en $\mathcal{F}$, existe una operación n -aria $f^{\mathbf{A}}$ sobre A . El conjunto A es llamado el universo (o conjunto subyacente) de $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle$, y las $f^{\mathbf{A}}$'s son llamadas las operaciones fundamentales de $\mathbf{A}$. (En la práctica se prefiere escribir simplemente f en vez de $f^{\mathbf{A}}$). Si $\mathcal{F}$ es finita, dígame $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_k\}$, se suele escribir $\langle A, f_1, \dots, f_k \rangle$ para $\langle A, F \rangle$, usualmente adoptando la convención:

$$\text{aridad } f_1 \geq \text{aridad } f_2 \geq \dots \geq \text{aridad } f_k.$$

Una álgebra $\mathbf{A}$ es unaria si todas sus operaciones son unarias, y es mono-unaria si únicamente tiene una operación unaria. $\mathbf{A}$ es un grupoide si tiene únicamente una operación binaria; esta operación es usualmente denotada por $+$ o $\cdot$, y se escribe $a + b$ o $a \cdot b$ (o simplemente ab) para la imagen de (a, b) bajo esta operación, y se le llama la suma o el producto de a y b , respectivamente. Una álgebra $\mathbf{A}$ es finita si $|A|$ es finito, y trivial si $|A| = 1$.

La definición de álgebra permite incorporar en una teoría general a una gran cantidad de estructuras algebraicas, desde grupos a anillos, hasta retículos y demás, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.3.7 (Grupo). Un grupo $\mathbf{G}$ es una álgebra $\langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ con una operación binaria, una unaria y una constante, en la cual las siguientes identidades son verdaderas:

$$\text{G1: } x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$$

$$\text{G2: } x \cdot 1 \approx 1 \cdot x \approx x$$

$$\text{G3: } x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x \approx 1.$$

Un grupo $\mathbf{G}$ se dice abeliano es abeliano (o conmutativo) si la siguiente identidad es verdadera:

$$\text{G4: } x \cdot y \approx y \cdot x.$$

Se da la definición de monoide, pues es una de las estructuras que nombraremos en del desarrollo del documento.

Ejemplo 1.3.8 (Semigrupos y monoides). Una semigrupo es un grupoide $\langle G, \cdot \rangle$ en el que (G1) es verdad. Es conmutativo (o abeliano) si se da (G4). Un monoide es una álgebra $\langle M, \cdot, 1 \rangle$ con una operación binaria y una constante que satisfacen (G1) y (G2).

Se incorporan dos ejemplos más para ilustrar el amplio alcance de la definición.

Ejemplo 1.3.9 (Anillo). Un anillo es una álgebra $\langle R, +, \cdot, -, 0 \rangle$ donde las operaciones $+$ y $\cdot$ son binarias, $-$ es unaria y 0 es una constante, satisfaciendo las condiciones siguientes:

$$\text{R1: } \langle R, +, -, 0 \rangle \text{ es un grupo abeliano.}$$

$$\text{R2: } \langle R, \cdot \rangle \text{ es un semigrupo.}$$

$$\begin{aligned} \text{R3: } x \cdot (y + z) &\approx (x \cdot y) + (x \cdot z) \\ (x + y) \cdot z &\approx (x \cdot z) + (y \cdot z). \end{aligned}$$

Un anillo con identidad es una álgebra $\langle R, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ tal que (R1)-(R3) y (G2) se cumplen.

Ejemplo 1.3.10 (Retículo). Un retículo es una álgebra $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ con dos operaciones binarias que satisfacen

$$\begin{aligned} \text{L1: } x \vee y &\approx y \vee x \\ x \wedge y &\approx y \wedge x \end{aligned} \quad (\text{leyes conmutativas})$$

$$\begin{aligned} \text{L2: } x \vee (y \vee z) &\approx (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) &\approx (x \wedge y) \wedge z \end{aligned} \quad (\text{leyes asociativas})$$

$$\begin{aligned}\text{L3: } x \vee x &\approx x \\ x \wedge x &\approx x\end{aligned}$$

(leyes de idempotencia)

$$\begin{aligned}\text{L4: } x &\approx x \vee (x \wedge y) \\ x &\approx x \wedge (x \vee y)\end{aligned}$$

(leyes de absorción)

Se dice que el retículo es distributivo si satisface cualquiera de las leyes distributivas

$$\text{D1: } x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$\text{D2: } x \vee (y \wedge z) \approx (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

2. MV-álgebras

En esta sección se presentarán los elementos básicos de la teoría de las Álgebras Multivaluadas y se realizarán las construcciones generales asociadas a las MV-álgebras libres y su representación por medio de las llamadas funciones de McNaughton. Para ello, la sección se divide en dos partes: la primera, dedicada a la presentación moderna de las MV-álgebras y de las ecuaciones bajo las cuales se expresan; y la segunda, dedicada a las MV-álgebras libres y su representación más estándar. Las definiciones y resultados se han tomado principalmente de [5], salvo donde se especifique lo contrario.

2.1. MV-álgebras

Definición 2.1.1 (MV-álgebra). *Una MV-álgebra es una álgebra $\langle A, \oplus, \neg, \mathbf{0} \rangle$, siendo $\oplus$ una operación binaria, $\neg$ una operación unaria y $\mathbf{0}$ una constante que satisfacen para todo $x, y, z \in A$ las ecuaciones siguientes:*

$$\text{MV1)} \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$$

$$\text{MV2)} \quad x \oplus y = y \oplus x,$$

$$\text{MV3)} \quad x \oplus \mathbf{0} = x,$$

$$\text{MV4)} \quad \neg \neg x = x,$$

$$\text{MV5)} \quad x \oplus \neg \mathbf{0} = \neg \mathbf{0},$$

$$\text{MV6)} \quad \neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

Una MV-álgebra $\langle A, \oplus, \neg, \mathbf{0} \rangle$ se denota por su universo A , y se dice que es no trivial si este tiene más de un elemento.

En cada MV-álgebra A se define la constante $\mathbf{1}$ y dos operaciones derivadas $\odot$ y $\ominus$ como

- $\mathbf{1} := \neg \mathbf{0}$,
- $x \odot y := \neg(\neg x \oplus \neg y)$,
- $x \ominus y := x \odot \neg y$.

Con esta notación, de las definiciones anteriores son claras las identidades

$$\text{MV7)} \quad \neg \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

$$\text{MV8)} \quad x \oplus y = \neg(\neg x \odot \neg y),$$

$$\text{MV9)} \quad x \oplus \neg x = \mathbf{1},$$

y los axiomas **MV5)** y **MV6)** pueden escribirse como

$$\text{MV5')} \quad x \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

$$\text{MV6')} \quad (x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x.$$

Aquí, se consideran la operación $\neg$ más vinculante que cualquier otra operación, y la operación $\odot$ más vinculante que $\oplus$ y $\ominus$.

Ejemplo 2.1.2 (Una MV-álgebra clásica). Si $\langle A, \vee, \wedge, -, 0, 1 \rangle$ es un álgebra booleana, entonces $\langle A, \vee, -, 0 \rangle$ es una MV-álgebra.

En los ejemplos **2.1.3** y **2.1.4** de MV-álgebras de números reales, considérese para todo x, y , las operaciones $x \oplus y := \min\{1, x + y\}$ y $\neg x = 1 - x$.

Ejemplo 2.1.3 (Una MV-álgebra finita no trivial). Para cada $n \geq 2$, la cadena (de Łukasiewicz) de n elementos

$$L_n := \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$$

genera la MV-álgebra $\langle L, \oplus, \neg, 0 \rangle$.

Ejemplo 2.1.4. Se verifica fácilmente que son MV-álgebras $\langle [0, 1], \oplus, \neg, 0 \rangle$ y $\langle \mathbb{Q} \cap [0, 1], \oplus, \neg, 0 \rangle$.

Ejemplo 2.1.5. Sea $\langle A, \oplus, \neg, 0 \rangle$ una MV-álgebra y X un conjunto no vacío. El conjunto A^X de todas las funciones $f : X \rightarrow A$ se vuelve una MV-álgebra al considerar las operaciones de manera puntual: si $f, g \in A^X$, entonces $(f \oplus g)(x) := f(x) \oplus g(x)$ y $(\neg f)(x) := \neg(f(x))$ para cualquier $x \in X$, y $\mathbf{0}$ es la función constante asociada a $0 \in A$. Son particularmente interesantes las MV-álgebras con A la MV-álgebra $[0, 1]$.

Definición 2.1.6 (Subálgebra). Una subálgebra de una MV-álgebra A es un subconjunto S de A que contiene el elemento cero de A y es cerrado para las operaciones de A restringidas a S .

Observación: Las MV-álgebras $\mathbb{L}_n$ y $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ son subálgebras de $[0, 1]$.

La estructura de MV-álgebra posee una teoría similar a la que puede encontrarse para otro tipo de álgebras, como los anillos o los retículos. En toda MV-álgebra A es posible definir un orden $\leq$ denominado *orden natural*, que induce una estructura de retículo en A , relacionándolas con la teoría de posets. Por otro lado, también es posible definir las nociones de homomorfismos e ideales (y sus duales, los filtros) análogos a las de las estructuras de anillos, siendo posible trasladar muchos de los resultados de la teoría de anillos a la de las MV-álgebras.

2.2. MV-ecuaciones

Definición 2.2.1 (Palabra). *Por una palabra sobre un conjunto no vacío S se entiende a una lista finita de elementos de S , los cuales son llamados símbolos del alfabeto S .*

Definición 2.2.2 (MV-término). *Para cada número natural $t \geq 1$, sea $S_t := \{\mathbf{0}, \neg, \oplus, x_1, \dots, x_t, (,)\}$. Un MV-término en las variables $x_1, \dots, x_t$ es una palabra sobre S_t que surge a partir de una aplicación finita de las reglas siguientes:*

- (T1) *Los elementos $\mathbf{0}$ y x_i , para $i = 1, \dots, t$, considerados como palabras de un elemento, son MV-términos.*
- (T2) *Si la palabra τ es un MV-término, también lo es $\neg\tau$.*
- (T3) *Si las palabras τ y σ son MV-términos, también lo es $(\tau \oplus \sigma)$.*

Para indicar que τ es un MV-término en las variables $x_1, \dots, x_n$, usaremos la notación $\tau(x_1, \dots, x_n)$, y de igual manera que en lenguajes lógicos, se sobreentenderán los paréntesis externos en T3.

Definición 2.2.3 (Función de términos). *Sea A una MV-álgebra, τ un MV-término en las variables $x_1, \dots, x_t$ y $a_1, \dots, a_t$ elementos de A . Sustituyendo un elemento $a_i \in A$ en todas las instancias en que aparece la variable x_i en τ , para $i = 1, \dots, t$, e interpretando los símbolos $\mathbf{0}$, $\oplus$ y $\neg$ como las correspondientes operaciones en A , se obtiene un elemento de A , denotado por $\tau^A(a_1, \dots, a_t)$. Así, dada una MV-álgebra A , se puede asociar a cada*

MV-término τ en las variables $x_1, \dots, x_n$ con una función $\tau^A : A^n \rightarrow A$; funciones que surgen así son llamadas funciones de términos en A .

Ejemplo 2.2.4. Considérese la MV-álgebra $[0, 1]$. Son MV-términos en la variable x las cadenas $\tau := x \oplus x$ y $\sigma := \neg \mathbf{0}$. Las funciones de términos asociadas son respectivamente

$$\begin{aligned} \tau^{[0,1]} : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \tau^{[0,1]}(x) = x \oplus x, \\ \\ \sigma^{[0,1]} : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ x &\rightarrow \sigma^{[0,1]}(x) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Definición 2.2.5 (MV-ecuación). Una MV-ecuación (o simplemente ecuación) en las variables $x_1, \dots, x_t$ es un par (τ, σ) de MV-términos en las variables $x_1, \dots, x_n$.

De acuerdo a la cotidianidad, se escribe $\tau = \sigma$ en lugar de (τ, σ) . Una MV-álgebra A satisface la MV-ecuación $\tau = \sigma$, en símbolos $A \models \tau = \sigma$, si, y sólo si, $\tau^A(a_1, \dots, a_t) = \sigma^A(a_1, \dots, a_t)$ para todos $a_1, \dots, a_t \in A$.

Formalizar la sintáxis y la semántica que surge a partir de las MV-álgebras por medio de MV-términos es importante, no sólo por el hecho que concede una caracterización de las MV-álgebras libres que introduciremos en la siguiente sección como conjuntos de funciones de términos específicas, sino que también permite establecer a la MV-álgebra $[0, 1]$ como referente fundamental para cualquier otra, como se consagra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.6 (de completitud). Una ecuación se satisface en $[0, 1]$ si, y sólo si, se satisface en toda MV-álgebra.

2.3. MV-álgebras libres

Las anteriores ideas pueden extenderse a un dominio más amplio. En caso de contar con distintas variables proposicionales $X_0, X_1, \dots, X_\alpha, \dots$ para cada ordinal $\alpha < \kappa$, con κ un cardinal finito o infinito mayor o igual que 1 fijo, cada MV-término τ en las variables $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ es una palabra finita de símbolos sobre el alfabeto $\{\mathbf{0}, \neg, \oplus, (,), X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$.

Para toda MV-álgebra A , dado este κ , los elementos de A^κ son de la forma $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_\alpha, \dots)_{\alpha < \kappa}$, donde $x_\alpha \in A$ para cada $\alpha < \kappa$.

Definición 2.3.1 (Proyección). Dado $\mathbf{x} \in A^\kappa$, se define la α -ésima proyección $\pi_\alpha : A^\kappa \rightarrow A$ como la función $\pi_\alpha(\mathbf{x}) = x_\alpha$. Se denota por

$$\text{Proj}_\kappa^A := \{\pi_\alpha : \alpha < \kappa\}$$

al conjunto de proyecciones de A^κ .

Definición 2.3.2 (Función de términos). Para cada término τ en las variables $\{X_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$, las funciones de términos $\tau^A : A^\kappa \rightarrow A$ se definen como se hizo en el caso finito por medio de un proceso inductivo con las definiciones

$$(I) \quad X_\alpha^A := \pi_\alpha.$$

$$(II) \quad 0^A := 0, \text{ la función constante } 0 \text{ sobre } A^\kappa.$$

$$(III) \quad (\neg\rho)^A := \neg(\rho^A).$$

$$(IV) \quad (\rho \oplus \sigma)^A := (\rho^A \oplus \sigma^A),$$

y al conjunto de todas las funciones de términos sobre A^κ se denota por

$$\text{Term}_\kappa^A.$$

Proposición 2.3.3. Para cada MV-álgebra A y un cardinal $\kappa \geq 1$, Term_κ^A es la subálgebra más pequeña de A^{A^κ} que contiene cada proyección $\pi_\alpha \in \text{Proj}_\kappa^A$.

Definición 2.3.4 (MV-álgebra libre). Se dice que una MV-álgebra A es libre sobre (el conjunto generador) Y , $Y \subseteq A$, y se denota $A = \text{Free}_Y$, si, y sólo si, para cada MV-álgebra B y cada función $f : Y \rightarrow B$, f puede ser extendida de manera única a un homomorfismo de A en B .

La siguiente proposición puede demostrarse fácilmente por la propiedad universal de las álgebras libres. Sin embargo, se presenta una demostración por parte del autor para ilustrar la definición de MV-álgebra libre.

Proposición 2.3.5. Para cualesquiera dos conjuntos Y y Y' con igual cardinalidad κ , si A es libre sobre Y y A' es libre sobre Y' , entonces $A \cong A'$.

Demostración: Procederemos mostrando que existe un isomorfismo entre A y A' , esto es, un homomorfismo biyectivo $h : A \rightarrow A'$. Al ser Y y Y' de la

misma cardinalidad, existe alguna función biyectiva $g : Y \rightarrow Y'$ con inversa g^{-1} . De la definición de MV-álgebra libre, para cualesquiera MV-álgebra B y $f : Y \rightarrow B$ existe un único homomorfismo $\hat{f} : A \rightarrow B$ tal que $\hat{f}|_Y = f$; similarmente, para cualesquiera MV-álgebra B' y $f' : Y' \rightarrow B'$ existe un único homomorfismo $\hat{f}' : A' \rightarrow B'$ tal que $\hat{f}'|_{Y'} = f'$.

Siendo A una MV-álgebra, es posible considerar $B = A$ y $f = i_Y$, siendo $i_Y : Y \rightarrow A$ la función inclusión dada por $i_Y(y) = y$ para todo $y \in Y$, obteniéndose el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i_Y \uparrow & & \searrow \widehat{i_Y} \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & A \end{array}$$

donde $\widehat{i_Y}$ es único, esto es, existe un único homomorfismo que fija a Y . Como la función identidad $id_A : A \rightarrow A$ es un homomorfismo que fija a Y , debe coincidir con $\widehat{i_Y}$, esto es, $\widehat{i_Y} = id_A$.

Abusando notación, expandamos el codominio de la función g a la función $g : Y \rightarrow A'$, y el de la función g^{-1} a la función $g^{-1} : Y' \rightarrow A$. Ahora bien, consideremos a $B := A'$, $B' := A$, $f := g$ y $f' := g^{-1}$, obteniéndose respectivamente los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i_Y \uparrow & & \searrow \hat{g} \\ Y & \xrightarrow{g} & A' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A' & \\ i_{Y'} \uparrow & & \searrow \widehat{g^{-1}} \\ Y' & \xrightarrow{g^{-1}} & A \end{array}$$

Para mostrar que $\hat{g}$ es el isomorfismo deseado entre A y A' , falta mostrar que es biyectivo, esto es, que tiene inversa; más aún, podemos demostrar que esta es $\widehat{g^{-1}}$. Para ello, verificaremos las igualdades $\widehat{g^{-1}} \circ \hat{g} = id_A$ y $\hat{g} \circ \widehat{g^{-1}} = id_{A'}$.

Respecto a la igualdad $\widehat{g^{-1}} \circ \hat{g} = id_A$, verifiquemos que $\widehat{g^{-1}} \circ \hat{g}$ es un homomorfismo que fija a Y : es claro que se trata de un homomorfismo al ser una composición de homomorfismos; por otro lado, si $y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} (\widehat{g^{-1}} \circ \hat{g})(y) &= \widehat{g^{-1}}(\hat{g}(y)) \\ &= \widehat{g^{-1}}(g(y)) \\ &= g^{-1}(g(y)) \\ &= y. \end{aligned}$$

Así pues, $\widehat{g^{-1}} \circ \hat{g}$ efectivamente es un homomorfismo de A en A que fija a Y , pero anteriormente se demostró que id_A es el único homomorfismo de A en A que hace esto, y por tanto, se concluye que $\widehat{g^{-1}} \circ \hat{g} = id_A$. Un análisis análogo muestra que $\hat{g} \circ \widehat{g^{-1}} = id_{A'}$, de donde se concluye que $\hat{g^{-1}} = \widehat{g^{-1}}$, y por tanto, $\hat{g}$ es el isomorfismo deseado. $\square$

Así pues, lo realmente relevante es la cardinalidad de Y , por lo que si esta es κ , no hay espacio para ambigüedad al decir que A es la MV-álgebra generada por κ generadores y se escribe $A = Free_\kappa$.

Proposición 2.3.6. *Para cada cardinal $\kappa \geq 1$, $Term_\kappa^{[0,1]}$ es la MV-álgebra libre sobre el conjunto generador $Proj_\kappa^{[0,1]}$, esto es,*

$$Term_\kappa^{[0,1]} = Free_\kappa.$$

Demostración: Sean B una MV-álgebra arbitraria, y $f : Proj_\kappa^{[0,1]} \rightarrow B$ una función, con la intención de extender de manera única f a un homomorfismo $\hat{f} : Term_\kappa^{[0,1]} \rightarrow B$. Sea $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_\alpha, \dots)_{\alpha < \kappa} \in B^\kappa$ dado por $b_\alpha := f(\pi_\alpha)$. Sea la función φ que a cada término τ (en las variables X_α) le asigna el elemento $\tau^B(\mathbf{b}) \in B$, donde $\tau^B \in Term_\kappa^B$ es la función de términos en B^κ determinada por τ . Por la definición 2.2.5, y en virtud del Teorema de **Completitud**, para cualesquiera dos términos ρ y σ , se tiene

$$[0, 1] \models \rho = \sigma \implies B \models \rho = \sigma \implies \rho^B(\mathbf{b}) = \sigma^B(\mathbf{b}).$$

Dicho de otra manera, siempre que $\rho^{[0,1]} = \sigma^{[0,1]} \in Term_\kappa^{[0,1]}$, entonces φ envía a ρ y a σ en el mismo elemento de B . Dado que $\varphi(X_\alpha) = X_\alpha^B(\mathbf{b}) = b_\alpha = f(\pi_\alpha)$, entonces φ naturalmente define una extensión $\hat{f}$ de f . Por inducción se puede observar que $\hat{f}$ es en efecto un homomorfismo de $Term_\kappa^{[0,1]}$ en B . Para probar la unicidad, sea $g : Term_\kappa^{[0,1]} \rightarrow B$ un homomorfismo que extiende a f . Dado que $\hat{f}$ y g coinciden sobre una subálgebra de A^{A^κ} que contiene a todas las proyecciones, entonces por la Proposición 2.3.3, ellos coinciden en todo $Term_\kappa^{[0,1]}$. $\square$

La importancia de las MV-álgebras libres radica en que al ser objetos universales, una ecuación es satisfecha en $Free_n$, es satisfecha en cualquier MV-álgebra generada por n elementos. A continuación, expondremos una descripción agradable de las MV-álgebras libres.

2.4. Funciones de McNaughton

La manera en la que se expone a $Free_\kappa$ no es trivial, y en un principio, no permite manipular sus elementos de manera tan inmediata. Una forma de describir a $Free_\kappa$ es por medio de las funciones de McNaughton.

Definición 2.4.1 (Función de McNaughton sobre $[0, 1]^n$). Para n entero positivo, la función $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es llamada una función de McNaughton sobre $[0, 1]^n$ si, y sólo si, satisface las condiciones siguientes:

- (i) f es continua respecto a la topología natural de $[0, 1]^n$;
- (ii) existen polinomios lineales $p_1, \dots, p_k$ con coeficientes enteros,

$$p_i(x_0, \dots, x_{n-1}) = b_i + m_{i0}x_0 + \dots + m_{i(n-1)}x_{n-1},$$

$(b_i, m_{it} \in \mathbb{Z})$, tales que para cada punto $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{n-1}) \in [0, 1]^n$, existe algún índice $j \in \{1, \dots, k\}$ con $f(\mathbf{y}) = p_j(\mathbf{y})$.

Esta definición se extiende a cualquier cardinal infinito λ de la siguiente manera.

Definición 2.4.2 (Función de McNaughton sobre $[0, 1]^\lambda$). Una función $g : [0, 1]^\lambda \rightarrow [0, 1]$ es una función de McNaughton sobre $[0, 1]^\lambda$ si, y sólo si, hay ordinales $\alpha(0) < \dots < \alpha(m-1) < \lambda$ y una función de McNaughton sobre $[0, 1]^m$ tal que para cada $\mathbf{x} \in [0, 1]^\lambda$, $g(\mathbf{x}) = f(x_{\alpha(0)}, \dots, x_{\alpha(m-1)})$.

Para el cardinal $\kappa \geq 1$, al conjunto de funciones de McNaughton sobre $[0, 1]^\kappa$ lo denotaremos por $\mathcal{M}_\kappa$ a lo largo de este trabajo. Una vez definidas las funciones de McNaughton, es posible desarrollar una serie definiciones y resultados que caracterizan a $Free_\kappa$ de la siguiente manera, como presentan formalmente Cignoli et al [5].

Teorema 2.4.3 (Teorema de McNaughton). Para cada cardinal κ , la MV-álgebra libre $Free_\kappa$ está dada por las funciones de McNaughton sobre $[0, 1]^\kappa$ con las operaciones definidas de manera puntual, esto es,

$$Free_\kappa = \mathcal{M}_\kappa.$$

3. MV-álgebras de Riesz

En esta sección se presentan las MV-álgebras de Riesz como un tipo especial de MV-álgebra y se extiende la noción de función de McNaughton al contexto de las MV-álgebras de Riesz, obteniéndose las funciones de Riesz-McNaughton. Las definiciones y resultados de las MV-álgebras de Riesz se han tomado principalmente de [10] y [11], y la presentación de funciones de Riesz-McNaughton de [9].

3.1. MV-álgebras de Riesz

Definición 3.1.1 (MV-álgebra de Riesz). *Una MV-álgebra de Riesz es una estructura $(R, \cdot, \oplus, \neg, \mathbf{0})$, donde $(R, \oplus, \neg, \mathbf{0})$ es una MV-álgebra y la operación $\cdot : [0, 1] \times R \rightarrow R$ satisface para todos $x, y \in R$ y $r, q \in [0, 1]$ las propiedades siguientes:*

$$\mathbf{RMV1)} \quad (r \cdot x) \odot (r \cdot y) = 0 \text{ y } r \cdot (x \oplus y) = (r \cdot x) \oplus (r \cdot y) \text{ siempre que } x \odot y = 0.$$

$$\mathbf{RMV2)} \quad (r \cdot x) \odot (q \cdot x) = 0 \text{ y } (r \oplus q) \cdot x = (r \cdot x) \oplus (q \cdot x) \text{ siempre que } r \odot q = 0.$$

$$\mathbf{RMV3)} \quad (r \cdot q) \cdot x = r \cdot (q \cdot x).$$

$$\mathbf{RMV4)} \quad 1 \cdot x = x.$$

Por simplicidad, las MV-álgebras de Riesz son denotadas por RMV-álgebras, y la multiplicación por escalar se denota de la forma usual como $r \cdot x =: rx$. Esta presentación, introducida en [11] puede resultar tediosa en cuanto a que hay que verificar las condiciones **RMV1** y **RMV2** para todos los casos en que $x \odot y = 0$ y $r \odot q = 0$, $x, y \in R$, $r, q \in [0, 1]$, los cuales pueden no ser conocidos a priori. Una caracterización que puede ser más cómoda es la presentada en [11]:

Proposición 3.1.2. *La estructura $(R, \cdot, \oplus, \neg, \mathbf{0})$ con $(R, \oplus, \neg, \mathbf{0})$ una MV-álgebra, y $\cdot : [0, 1] \times R \rightarrow R$ una operación, es una RMV-álgebra si, y sólo si, satisface las siguientes identidades para todos $x, y \in R$, $r, q \in [0, 1]$:*

$$\mathbf{RMV1')} \quad r(x \odot \neg y) = (rx) \odot \neg(ry).$$

$$\mathbf{RMV2')} \quad (r \odot \neg q)x = (rx) \odot \neg(qx).$$

$$\mathbf{RMV3')} \quad (rq)x = r(qx).$$

RMV4') $1x = x$.

Ejemplo 3.1.3. $([0, 1], \cdot)$ es una RMV-álgebra, siendo $[0, 1]$ la MV-álgebra estándar y $\cdot$ es el producto de $\mathbb{R}$ restringido a $[0, 1]$. Esta RMV-álgebra es llamada la RMV-álgebra estándar.

Ejemplo 3.1.4. Si X es un espacio de Hausdorff compacto, entonces el conjunto $C(X)$ de funciones continuas de X en $[0, 1]$ con la topología usual, forma una RMV-álgebra al definir la multiplicación escalar de la manera típica, como $(rf)(x) = rf(x)$ para todo $x \in X$. Es de interés particular el caso en que $X = [0, 1]$.

Las ideas concernientes a ideales, homomorfismos y congruencias se extienden a las RMV-álgebras de manera natural a cómo se definen en el caso de las MV-álgebras. La extensión de las ideas sintácticas y semánticas al universo de las RMV-álgebras requiere un salto considerable en la explicitación del alfabeto a usar.

3.2. Funciones de Riesz-McNaughton

La incorporación de la operación $\cdot$ se interpreta en el lenguaje de las RMV-álgebras por medio de funciones unarias ρ_r para cada escalar $r \in [0, 1]$, que denotan a la multiplicación escalar por r , $x \xrightarrow{\rho_r} rx$.

Definición 3.2.1 (MV-término). Para cada número natural $t \geq 1$, sea $S_t := \{\mathbf{0}, \neg, \oplus, \{\rho_r\}_{r \in [0, 1]}, x_1, \dots, x_t, (,)\}$. Un RMV-término en las variables $x_1, \dots, x_t$ es una palabra sobre S_t definida de manera análoga a las construidas sobre los MV-términos, permitiendo la condición adicional

(T4) Si la palabra τ es un RMV-término, también lo es $\rho_r(\tau)$.

Para indicar que τ es un RMV-término en las variables $x_1, \dots, x_n$, usaremos la notación $\tau(x_1, \dots, x_n)$. Un resultado análogo al Teorema de **Comple-titud** se obtiene para las MV-álgebras, y permite simplificar la definición de las funciones de términos a $[0, 1]^n$ de la manera usual.

Teorema 3.2.2. Una ecuación σ en la teoría de las RMV-álgebras se cumple en todas las RMV-álgebras si, y sólo si, se cumple en la RMV-álgebra estándar $[0, 1]$.

En el contexto de las MV-álgebras de Riesz, se definen los MV-polinomios de Riesz como aquellas expresiones construidas a partir de variables y $\mathbf{0}$ aplicando las operaciones $\cdot$, $\oplus$, $\neg$ y la multiplicación por cualquier número $c \in [0, 1]$. Un caso particular de MV-polinomios de Riesz son los denominados *funciones de Riesz-McNaughton*, los cuales forman una MV-álgebra de Riesz de funciones de $[0, 1]^n$ en $[0, 1]$ denotada por RM_n .

Definición 3.2.3 (Función de Riesz-McNaughton sobre $[0, 1]^n$). Una función $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ se llama de Riesz-McNaughton sobre $[0, 1]^n$ si, y sólo si, satisface las condiciones siguientes:

- (i) f es continua respecto a la topología natural de $[0, 1]^n$;
- (ii) existen polinomios lineales $f_1, \dots, f_m$ con coeficientes reales, tales que para cualquier punto $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$, existe algún $i \in \{1, \dots, m\}$ para el que $f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$.

Para el natural $n \geq 1$, al conjunto de funciones de McNaughton sobre $[0, 1]^n$ lo denotaremos por $\mathcal{RM}_n$ a lo largo de este trabajo. Es fácil observar que las funciones de McNaughton son las funciones de Riesz-McNaughton restringidas a coeficientes enteros, y gran parte de su importancia es que responden de manera similar a lo que se esperaría, como se garantiza en el siguiente teorema

Teorema 3.2.4. Si $\tau(v_1, \dots, v_n)$ es un RMV-término en el lenguaje de las RMV-álgebras, entonces la función de términos $f_\tau : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es una función de Riesz-McNaughton.

En [11], Di Nola y Leustean demostraron por medio del cálculo proposicional que tiene a las RMV-álgebras como modelos, que dado $n \geq 1$, para cualquier función continua $h : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, existe una sucesión de fórmulas en este cálculo proposicional, tales que h es el límite uniforme de las funciones de términos asociadas a estas fórmulas. Este resultado puede alcanzarse sin incurrir en la teoría de este cálculo proposicional, sino únicamente de la naturaleza de $\mathcal{RM}_n$ como conjunto de funciones.

Parte II

Sobre supremos en $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{RM}_1$

4. Sobre supremos generados a partir de $\mathcal{M}_1$

Este capítulo consta de dos secciones y está dedicado a las funciones de McNaughton en una variable, $\mathcal{M}_1$. En la primera, investigamos qué condiciones son necesarias para alcanzar imágenes por medio de funciones de McNaughton; para ello hemos definido el concepto de Λ -punto y de $\hat{\Lambda}$ -punto, y estudiamos su naturaleza y sus propiedades. En la segunda, estudiamos la estructura algebraica que se obtiene al cerrar $\mathcal{M}_1$ por supremos y por ínfimos arbitrarios, denotadas por $Sup(\mathcal{M}_1)$ e $Inf(\mathcal{M}_1)$, y la de conjuntos específicos construidos a partir de estos, a saber: intersección, unión, suma $\oplus$ y el conjunto de discontinuidades finitas. Se desarrollan ejemplos que permitan ilustrar los objetos definidos y aquellos que puedan construirse por medio de los procedimientos presentados; para ello, la caracterización de los Λ -puntos es fundamental.

4.1. Propiedades de Λ -puntos y $\hat{\Lambda}$ -puntos

La manera en la que las funciones de McNaughton se han definido en la literatura da una visualización por tramos o trozos, pero para fines operativos no son tan versátiles. En el estudio que haremos en este trabajo, y según sea conveniente, optaremos por una escritura en términos de funciones características.

Definición 4.1.1 (Escritura normal). *Una escritura normal de una función de McNaughton f es una pareja $(P, \mathcal{F})$, siendo $P = \{a_0, a_1, \dots, a_{n+1}\}$ una partición de $[0, 1]$ y $\mathcal{F} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ una colección de funciones lineales con coeficientes enteros definidas en $[0, 1]$, tal que*

$$f = p_0 \chi_{\{0\}} + \sum_{i=0}^n p_i \chi_{(a_i, a_{i+1}]} = p_0 \chi_{[a_0, a_1]} + \sum_{i=1}^n p_i \chi_{(a_i, a_{i+1}]}.$$

Definición 4.1.2 (Escritura estándar). *Una escritura estándar de una función de McNaughton f es una escritura normal en la que, al retirar cualquier elemento de su partición, deja de tener una escritura normal.*

Una escritura estándar es aquella que permite visualizar las funciones de McNaughton por tramos maximales, y a raíz de ello, toda función de McNaughton f posee una escritura estándar única (asociada a una partición de $[0, 1]$ única, a la que se denominará *estándar para f*). Por otro lado, la necesidad de definir las escrituras normales radica en que permite homogeneizar la manera en que se estudian conjuntos de funciones de McNaughton, facilitando operar o comparar por tramos, y garantizar fácilmente, en algunos escenarios, que los objetos que se obtienen son nuevamente funciones de McNaughton.

Ejemplo 4.1.3. En la Figura 1 se encuentra en **rojo** la función f con escritura estándar

$$f(x) = 0\chi_{[0, \frac{1}{3}]} + (3x - 1)\chi_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} + (-3x + 3)\chi_{(\frac{2}{3}, 1]},$$

mientras que en **azul** a la función g con escritura estándar

$$g(x) = (-6x + 1)\chi_{[0, \frac{1}{6}]} + 0\chi_{(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}]} + (6x - 5)\chi_{(\frac{5}{6}, 1]}.$$

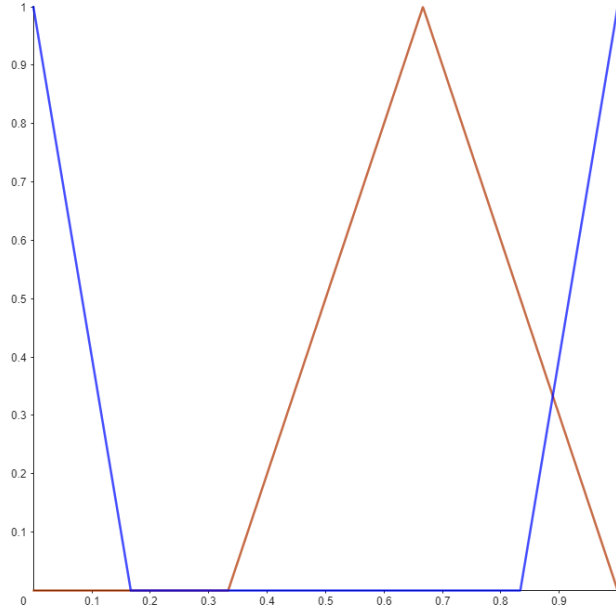


Figura 1. Visualización para escritura estándar de funciones f y g

Para realizar la suma de manera cómoda, son más útiles las escrituras normales

$$f(x) = 0\chi_{[0, \frac{1}{6}]} + 0\chi_{(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]} + (3x - 1)\chi_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} + (-3x + 3)\chi_{(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]} + (-3x + 3)\chi_{(\frac{5}{6}, 1]},$$

$$g(x) = (-6x + 1)\chi_{[0, \frac{1}{6}]} + 0\chi_{(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]} + 0\chi_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} + 0\chi_{(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]} + (6x - 5)\chi_{(\frac{5}{6}, 1]},$$

de donde, la suma $h = f \oplus g$ se calcula sumando las funciones características en sus respectivos intervalos, y está dada por la escritura normal

$$h(x) = (-6x + 1)\chi_{[0, \frac{1}{6}]} + 0\chi_{(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]} + (3x - 1)\chi_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} + (-3x + 3)\chi_{(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}]} + (3x - 2)\chi_{(\frac{5}{6}, 1]},$$

que resulta ser su propia escritura estándar (no necesariamente tenía que serlo). En la Figura 2 se observa a la función $h = f \oplus g$.

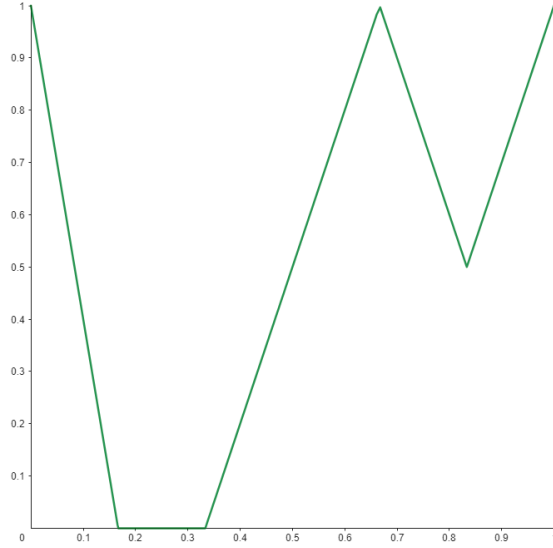


Figura 2. Visualización para escritura estándar de una suma $h = f \oplus g$

Definición 4.1.4 (Representación lateral izquierda y derecha alrededor de un punto). Dado $a \in [0, 1]$, una representación lateral izquierda de una función de McNaughton f alrededor de a es una función lineal g tal que existe un $\varepsilon > 0$ con el que $g : (a - \varepsilon, a] \rightarrow [0, 1]$ y $f|_{(a - \varepsilon, a]} = g$. Análogamente, se definen las representaciones laterales derechas.

Definición 4.1.5 (Representación local alrededor de un punto). *Dado $a \in [0, 1]$, una representación local de una función de McNaughton f alrededor de a es una función lineal g tal que existe un $\varepsilon > 0$ con el que $g : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow [0, 1]$ y $f|_{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)} = g$.*

Por abuso de notación, al referirse a una representación lateral o local no se especificará el dominio de la representación, sino únicamente a la expresión lineal, entendiéndose que estas siempre pueden hallarse bajo las siguientes condiciones.

Proposición 4.1.6. *Una función de McNaughton tiene*

- i) *representaciones laterales izquierdas alrededor de a si, y sólo si, $a > 0$, esto es, $a \in (0, 1]$.*
- ii) *representaciones laterales derechas alrededor de a si, y sólo si, $a < 1$, esto es, $a \in [0, 1)$.*
- iii) *representaciones locales alrededor de a si, y sólo si, a no pertenece a su partición estándar.*

A continuación presentamos dos conceptos propios del autor, Λ -punto y $\hat{\Lambda}$ -punto, los cuales surgieron en el camino de esta investigación y son necesarios en este trabajo para el análisis puntual de las funciones de McNaughton, pues permiten capturar formalmente los puntos de quiebre que se forman en las funciones de McNaughton, lo cual va a ser esencial para los resultados que obtenemos.

Definición 4.1.7 (Λ -punto y $\hat{\Lambda}$ -punto). *Diremos que $(a, b) \in [0, 1]^2$ es un Λ -punto si puede verse como un punto de intersección entre dos funciones de McNaughton con representaciones locales distintas, mientras que será un $\hat{\Lambda}$ -punto si no. Al conjunto de Λ -puntos se le denotará por Λ y al de $\hat{\Lambda}$ -puntos por $\hat{\Lambda}$.*

Proposición 4.1.8. *La contención $\Lambda \subseteq (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$ es propia y no vacía, y si $(a, b) \in \Lambda$, entonces b puede tomar únicamente una cantidad finita de valores.*

Demostración: Supóngase que (a, b) es un Λ -punto, por lo que existen funciones de McNaughton f y g con representaciones laterales distintas dadas por $f(x) = m_1x + d_1$, $g(x) = m_2x + d_2$ alrededor de a , tales que $f(a) = g(a) = b$.

Si $m_1 = m_2$, estas representaciones serían la misma, así que debe tenerse que $m_1 \neq m_2$. De la igualdad $f(a) = g(a)$, se tiene que

$$m_1 a + d_1 = m_2 a + d_2 \quad \longrightarrow \quad a = \frac{d_2 - d_1}{m_1 - m_2} \in \mathbb{Q},$$

dígase $a = \frac{p}{q}$ con $\gcd(p, q) = 1$, y de $b = f(a) = m_1 a + d_1$, se impone a su vez que $b \in \mathbb{Q}$. Sin embargo, b no puede ser un racional arbitrario:

$$\begin{aligned} m_1 a + d_1 = b & \quad \longleftrightarrow \quad m_1 \frac{p}{q} + d_1 = b \\ & \quad \longleftrightarrow \quad m_1 p + d_1 q = bq, \end{aligned}$$

de donde claramente debe tenerse que $bq \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto, b debe ser de la forma $b = \frac{r}{q}$, para algún $r \in \mathbb{Z}$; más aún, como $0 \leq b \leq 1$, entonces r es algún entero entre 0 y q . Es inmediato ver que r puede tomar cualquier valor en $\mathbb{Z} \cap [0, q]$, pues al reemplazar en la última equivalencia, se tiene que

$$m_1 p + d_1 q = r,$$

y como $\gcd(p, q) = 1$, esta ecuación tiene soluciones para m_1 y d_1 en $\mathbb{Z}$, y análogamente para la ecuación correspondiente para m_2 y d_2 . Estas dos condiciones garantizan que si $(a, b) \in \Lambda$, entonces $(a, b) \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$, y que los posibles valores de b son $\{0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}, 1\}$, donde $a = \frac{p}{q}$ con $\gcd(p, q) = 1$ $\square$

Corolario 4.1.9. *Por cada Λ -punto $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{q}\right)$ donde $\gcd(p, q) = 1$ y r está en $\mathbb{Z} \cap [0, q]$, pasan infinitas funciones de McNaughton. Si $f(x) = m_0 x + d_0$ es una representación lateral de alguna de estas funciones, entonces cualquier otra función de estas tiene por representaciones laterales $g(x) = mx + d$, con*

$$m = m_0 + qt \quad \text{y} \quad d = d_0 - pt, \quad \text{para algún } t \in \mathbb{Z}.$$

Observación: Por cada Λ -punto pueden encontrarse infinitas funciones de McNaughton con pendientes m positivas y negativas que superen cualquier cota, esto es, $|m| > N$ para cualquier $N \in \mathbb{N}$ fijo.

Lema 4.1.10. *Para cada $m \in \mathbb{Z}$ y $a \in [0, 1]$, existe algún $d \in \mathbb{Z}$ tal que $ma + d \in [0, 1]$.*

Demostración: Haciendo $d := \lceil -ma \rceil$ (la función techo de $-ma$), se verifica que $0 \leq ma + d \leq 1$. Nótese que si $ma \notin \mathbb{Z}$, entonces d es único. $\square$

Proposición 4.1.11. *Para cada $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ y $m \in \mathbb{Z}$, existe algún Λ -punto (a, b) .*

Demostración: Sea $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ de la forma $a = \frac{p}{q}$ con $\gcd(p, q) = 1$. Dado $m \in \mathbb{Z}$, escójase d apropiadamente de acuerdo al Lema 4.1.10, y considérese las representaciones laterales $f(x) = (m + q)x + (d - p)$, $g(x) = mx + d$ alrededor de a . Se observa directamente que

$$f(x) - g(x) = qx - p \rightarrow f(a) - g(a) = 0,$$

de donde $f(a) = g(a)$, y por tanto, $(a, g(a)) \in \Lambda$. □

Corolario 4.1.12. *El conjunto de los Λ -puntos, Λ , se caracteriza como*

$$\Lambda = \{(a, b) \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2 : a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \gcd(p, q) = 1, b = \frac{r}{q}, r \in \mathbb{Z} \cap [0, q]\}.$$

Ejemplo 4.1.13. Los únicos Λ -puntos con primera componente $a = \frac{1}{2}$ son $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1)$, obtenidos a partir de las intersecciones entre las funciones:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}, 0\right) &\rightarrow f(x) = -2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = 2x - 1; \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &\rightarrow f(x) = -x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x; \\ \left(\frac{1}{2}, 1\right) &\rightarrow f(x) = 2x \quad \text{y} \quad g(x) = -2x + 2. \end{aligned}$$

Por otra parte, nótese que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ no es un Λ -punto ($\frac{1}{3}$ no es un múltiplo entero de $\frac{1}{2}$), pues de serlo, existirían enteros m y d tales que $\frac{1}{3} = \frac{m}{2} + d$, esto es,

$$2 = 3m + 6d = 3(m + 2d),$$

lo cual no es posible. La condición de escritura en fracción reducida para $\frac{1}{2}$ también es necesaria, pues aunque $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, números como $\frac{1}{4}$ no son alcanzables en $x = \frac{1}{2}$, pues de serlo, existirían m y d tales que $\frac{1}{4} = \frac{m}{2} + d$, esto es,

$$1 = 2m + 4d = 2(m + 2d),$$

lo cual también es imposible.

La ventaja de caracterizar a Λ radica en que todo punto $(a, b) \in \Lambda \cup \hat{\Lambda}$ con $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, es un Λ -punto, y por tanto, b está finitamente restringido en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ por a . Por otro lado, si $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, entonces necesariamente $b \in ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]) \cup \{0, 1\}$, por lo que caracterizarlos es una tarea más ardua. La siguiente proposición permite visualizar propiedades de estos puntos.

Proposición 4.1.14. *Sea $(a, b) \in \Lambda \cup \hat{\Lambda}$ con $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Entonces:*

- (I) *Existen únicos $m, d \in \mathbb{Z}$ tales que $ma + d = b$.*
- (II) *El conjunto de valores que puede tomar b es denso contable en $[0, 1]$, y corresponden a las partes decimales de los múltiplos de a .*

Demostración:

- (I) En primera instancia, demostremos que dado $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, existe $b \in [0, 1]$ con $(a, b) \in \Lambda \cup \hat{\Lambda}$; para ello, tómese $b = a$, notándose que para $m = 1$ y $d = 0$, $b = ma + d$. Ahora bien, dado $(a, b) \in \Lambda \cup \hat{\Lambda}$ con $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, la existencia de m y d con $ma + d = b$ se garantiza debido a que $(a, b) \in \Lambda \cup \hat{\Lambda}$, mientras que la unicidad se sigue debido a que si existiesen dos pares distintos de estos, se tendría que $(a, b) \in \Lambda$ y por tanto, $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, lo cual es contradictorio.
- (II) Considérese un intervalo abierto $(\alpha, \beta) \subseteq [0, 1]$, y se desea buscar un $b \in [0, 1]$ de la forma $b = ma + d$ con $m, d \in \mathbb{Z}$. Por el teorema de aproximación de **Dirichlet**, existen enteros p y q para los cuales se tiene que $0 < pa + q < \beta - \alpha$, y por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(pa + q) \leq \alpha$ pero

$$\begin{aligned} \alpha < (n+1)(pa + q) &= n(pa + q) + (pa + q) \\ &< \alpha + (\beta - \alpha) = \beta. \end{aligned}$$

Así pues, el b buscado es $b = (n+1)pa + (n+1)q$. Para mostrar que sólo existe una cantidad contable de estos b , nótese que para cada $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, por el Lema **4.1.10**, existe un único $d \in \mathbb{Z}$ para el que se verifica $b := ma + d \in [0, 1]$, y esta es la única representación de b , de acuerdo al ítem anterior. Así pues, los valores irracionales de b vienen correspondidos biunívocamente $b \longleftrightarrow m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mientras que $b = 0$ y $b = 1$ vienen asociados a $m = 0$. $\square$

El Corolario 4.1.12 y la Proposición 4.1.14 muestran que para todo punto (a, b) en $\Lambda \cup \hat{\Lambda}$, la naturaleza (racional o irracional) de b queda totalmente determinada por a , salvo en los casos particulares en los que $b = 0$ y $b = 1$, que deben observarse puntualmente.

Veamos una visualización que ilustra mejor esta descripción de los $\hat{\Lambda}$ -puntos: Sea C una circunferencia de radio $\frac{1}{2\pi}$ con perímetro 1, y sea $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Es fácil verificar que $\varphi = 2\pi a$ es el ángulo que subtiende un arco de longitud a en C . Fijando un punto P en C , recórrase en sentido horario un ángulo $m\varphi$, $m \in \mathbb{Z}$ a partir de P (si $m < 0$, se recorre en sentido antihorario), y sea Q el punto final en la circunferencia. La longitud del arco PQ recorrido en sentido horario es el elemento b asociado a m mencionado en la Proposición 4.1.14. Cuando $m = 0$, el punto final es $Q = P$, y el arco PQ puede entenderse como un punto ($b = 0$) o como la circunferencia completa ($b = 1$). Un análisis análogo puede utilizarse para visualizar el caso en que $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, sólo que en este caso, m no es único. A continuación se ejemplifica esta construcción.

Ejemplo 4.1.15. Sea $a = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Para los siguientes valores de b en la Figura 3, $(a, b) \in \Lambda \cup \hat{\Lambda}$:

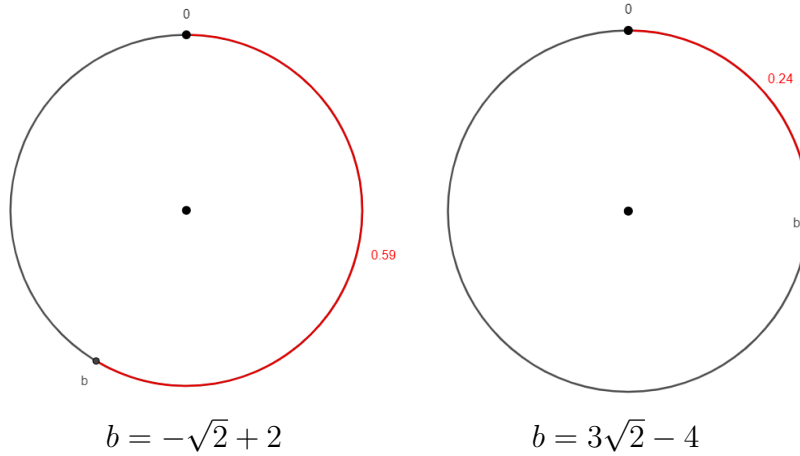


Figura 3. Algunos valores de b para un $\hat{\Lambda}$ -punto

Como se puede observar, la primera es la correspondiente a la representación local $-2x + 2$, mientras que la segunda es la correspondiente a la

representación local $6x - 4$. Se verifica que toman los valores en la figura:

$$-2\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 0.58\dots \quad \text{y} \quad 6\frac{\sqrt{2}}{2} - 4 = 0.24\dots$$

Como breve resultado de la Proposición 4.1.14, y de la construcción realizada para el Ejemplo 4.1.15, se tiene el siguiente resultado, inesperado en este contexto.

Corolario 4.1.16. *Para todos $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ y $m \in \mathbb{Z}$, existe algún $n \in \mathbb{Z}$ para el que se satisfacen en simultaneo las desigualdades*

$$0 < |\cos(2\pi am) - \cos(2\pi an)| < \varepsilon, \quad \text{y} \quad 0 < |\sin(2\pi am) - \sin(2\pi an)| < \varepsilon.$$

4.2. Estructura algebraica derivada de $Sup(\mathcal{M}_1)$

Aunque las funciones de McNaughton se pueden expresar individualmente por medio de una cantidad finita de funciones, el considerar familias infinitas puede inducir cambios abruptos de un punto a otro, y generar funciones que no son de McNaughton.

Definición 4.2.1 ($Sup(\mathcal{M}_1)$). *Se define al conjunto de supremos de funciones de McNaughton por*

$$Sup(\mathcal{M}_1) := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \exists \{f_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}_1, \sup_{i \in I} \{f_i\} = f \right\}.$$

Proposición 4.2.2. *$Sup(\mathcal{M}_1)$ es cerrado para $\oplus$, esto es, si $f, g \in Sup(\mathcal{M}_1)$, entonces existe una familia de funciones de McNaughton $\{h_i\}_{i \in I}$ con*

$$\sup_{i \in I} \{h_i\} = f \oplus g.$$

Demostración: Realizaremos un análisis puntual. Al ser $f, g \in Sup(\mathcal{M}_1)$, existen familias de McNaughton $\{f_i\}_{i \in I}$ y $\{g_j\}_{j \in J}$ que satisfacen

$$f(x) = \sup_{i \in I} \{f_i(x)\} \quad \text{y} \quad g(x) = \sup_{j \in J} \{g_j(x)\}.$$

Se verifica que

$$\begin{aligned}
(f \oplus g)(x) &= \sup_{i \in I} \{f_i(x)\} \oplus \sup_{j \in J} \{g_j(x)\} \\
&= \min \left\{ 1, \sup_{i \in I} \{f_i(x)\} + \sup_{j \in J} \{g_j(x)\} \right\} \\
&= \min \left\{ 1, \sup \{ \{f_i(x)\}_{i \in I} + \{g_j(x)\}_{j \in J} \} \right\} \\
&= \min \left\{ 1, \sup_{(i,j) \in I \times J} \{f_i(x) + g_j(x)\} \right\} \\
&= \min \left\{ 1, \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\} \right\},
\end{aligned}$$

de donde $(f \oplus g)(x)$ puede tomar dos posibles valores, los cuales se pueden estudiar de manera independiente. Por una parte,

$$\begin{aligned}
\min \left\{ 1, \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\} \right\} &= \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\} \\
\iff \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\} &\leq 1 \\
\iff \forall (i,j) \in I \times J, (f_i + g_j)(x) &\leq 1 \\
\iff \forall (i,j) \in I \times J, \min\{1, (f_i + g_j)(x)\} &= (f_i + g_j)(x) \\
\iff \sup_{(i,j) \in I \times J} \{\min\{1, (f_i + g_j)(x)\}\} &= \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\} \\
\iff \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i \oplus g_j)(x)\} &= \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\},
\end{aligned}$$

esto es,

$$\min \left\{ 1, \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\} \right\} = \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i \oplus g_j)(x)\}.$$

Un análisis análogo muestra que por otra parte, cuando

$$\min \left\{ 1, \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i + g_j)(x)\} \right\} = 1,$$

se llega a la misma igualdad, y se tiene que

$$(f \oplus g)(x) = \sup_{(i,j) \in I \times J} \{(f_i \oplus g_j)(x)\}.$$

Nótese que al ser f_i y g_j , $(i, j) \in I \times J$ funciones de McNaughton, $f_i \oplus g_j$ es a su vez de McNaughton, por lo que $\{f_i \oplus g_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ es la familia buscada que genera a $f \oplus g$. $\square$

La clausura para $\oplus$ en $Sup(\mathcal{M}_1)$, deviene en el siguiente resultado.

Corolario 4.2.3. *$(Sup(\mathcal{M}_1), \oplus, \mathbf{0})$ es un monoide conmutativo.*

Infortunadamente, esto no indica per se qué ocurre para $\neg$. Para esta segunda operación, abordaremos un estudio más detallado de algunos objetos de $Sup(\mathcal{M}_1)$ asociados a Λ -puntos. Primero, veamos que la familia I en la definición de $Sup(\mathcal{M}_1)$ se puede presentar de una manera agradable.

Proposición 4.2.4. *$\mathcal{M}_1$ es infinito contable.*

Demostración: Para $n \in \mathbb{N}$, defínase el conjunto $A_n := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^n$. Nótese que A_n es contable, al ser producto de countables. De igual manera, el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable por ser la unión countable de countables. Consideremos la función $\varphi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ con regla de asignación $f \rightarrow \varphi(f)$ dada por lo siguiente: si f posee partición estándar $P = \{x_0, \dots, x_k\}$, entonces

$$\varphi(f) = ((x_0, f(x_0)), \dots, (x_k, f(x_k))).$$

Se verifica que la función φ está bien definida y es inyectiva.

- i. **(Buena definición)** Cada función de McNaughton posee partición estándar única, por lo que f posee imagen única bajo φ . Como en los valores de la partición estándar la función cambia de una representación lateral a otra, los puntos $(x_j, f(x_j))$, $0 \leq j \leq k$, son Λ -puntos, y por tanto, pertenecen a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. De esta manera, $\varphi(f) \in A_{k+1} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
- ii. **(Inyectividad)** Sean f y g funciones de McNaughton con particiones estándares $P_f = \{x_0, \dots, x_k\}$ y $P_g = \{y_0, \dots, y_{k'}\}$ respectivamente. Si $\varphi(f) = \varphi(g)$, primeramente debe darse que $k = k' =: K$, y segundamente, debe tenerse que $x_j = y_j =: a_j$, y por tanto $f(a_j) = g(a_j) =: b_j$,

$0 \leq j \leq K$. Como f y g constan de los segmentos de recta que unen a los puntos (a_i, b_i) y (a_{i+1}, b_{i+1}) , $0 \leq i \leq K - 1$, ellas coinciden en todo $[0, 1]$, esto es, $f = g$, garantizándose inyectividad.

Como φ es una función inyectiva, debe tenerse que $|\mathcal{M}_1| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = \aleph_0$. Por otra parte, el Corolario 4.1.9 y la Proposición 4.1.14 indican explícitamente que $|\mathcal{M}_1| \geq \aleph_0$. En conjunto, se concluye que $|\mathcal{M}_1| = \aleph_0$ $\square$

Así pues, si $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ es una familia arbitraria de funciones de McNaughton, entonces es de la forma $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ (finita) o $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (infinita contable). En cada caso, el comportamiento bajo sup puede ser distinto.

Proposición 4.2.5. $\mathcal{M}_1$ es cerrado bajo supremos finitos, esto es, si $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una familia finita de funciones de McNaughton, entonces $\sup_{1 \leq i \leq n} \{f_i\}$ es una función de McNaughton.

*Demostración*¹: Procederemos por inducción sobre el número de funciones de McNaughton. Para un par de funciones de McNaughton f y g con escrituras normales

$$f = p_0 \chi_{\{0\}} + \sum_{i=0}^n p_i \chi_{(a_i, a_{i+1}]} \quad \text{y} \quad g = q_0 \chi_{\{0\}} + \sum_{i=0}^m q_i \chi_{(b_i, b_{i+1}]}$$

en las particiones $P_A = \{a_0, \dots, a_{n+1}\}$ y $P_B = \{b_0, \dots, b_{m+1}\}$ respectivamente, sea $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ el conjunto de puntos de intersección donde f y g no poseen representaciones locales iguales. La unión $P = P_A \cup P_B \cup C$ representa una nueva partición normal $P = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{r+1}\}$ en la que, $f|_{(\xi_j, \xi_{j+1})}$ y $g|_{(\xi_j, \xi_{j+1})}$ son funciones lineales que, o bien son iguales, o no se intersectan. Así pues, cada $t_j := \sup\{f|_{(\xi_j, \xi_{j+1})}, g|_{(\xi_j, \xi_{j+1})}\}$, $0 \leq j \leq r$ es una función lineal del conjunto $\{p_i|_{(\xi_j, \xi_{j+1})}, q_{i^*}|_{(\xi_j, \xi_{j+1})}\}_{0 \leq i \leq n, 0 \leq i^* \leq m}$, y por tanto se cuenta con la escritura

$$\sup\{f, g\} = t_0 \chi_{\{0\}} + \sum_{i=0}^r t_i \chi_{(\xi_i, \xi_{i+1}]};$$

como el sup de funciones continuas es una función continua, se sigue que esta escritura es normal, y por tanto, $\sup\{f, g\}$ es una función de McNaughton.

¹Este resultado es una consecuencia natural de que $\mathcal{M}_1$ sea una MV-álgebra. Sin embargo, presentamos una demostración distinta que no usa la estructura de MV-álgebra.

Asumamos, como hipótesis inductiva, que para dado $N \in \mathbb{N}$ y $\{f_1, \dots, f_N\}$ un conjunto finito de funciones de McNaughton, $\sup\{f_1, \dots, f_N\}$ es una función de McNaughton. Ahora, para un conjunto $\{f_1, \dots, f_{N+1}\}$ de $N+1$ funciones de McNaughton, nótese que por su naturaleza finita, se sigue fácilmente que para todo $x \in [0, 1]$,

$$\sup\{f_1(x), \dots, f_{N+1}(x)\} = \sup\{\sup\{f_1(x), \dots, f_N(x)\}, f_{N+1}(x)\},$$

de donde se garantiza la igualdad

$$\sup\{f_1, \dots, f_N, f_{N+1}\} = \sup\{\sup\{f_1, \dots, f_N\}, f_{N+1}\};$$

como $\sup\{f_1, \dots, f_N\}$ es función de McNaughton (hipótesis inductiva), entonces $\sup\{\sup\{f_1, \dots, f_N\}, f_{N+1}\}$ es función de McNaughton (caso base), obteniéndose el resultado que se deseaba. $\square$

Intuitivamente, puede verse que la escritura normal que recoge las escrituras normales de las funciones involucradas y los puntos de intersección es vital. En la figura, puede verse a la derecha en negro (verde) el supremo (ínfimo) generado por las funciones f en azul y g en rojo a la izquierda.

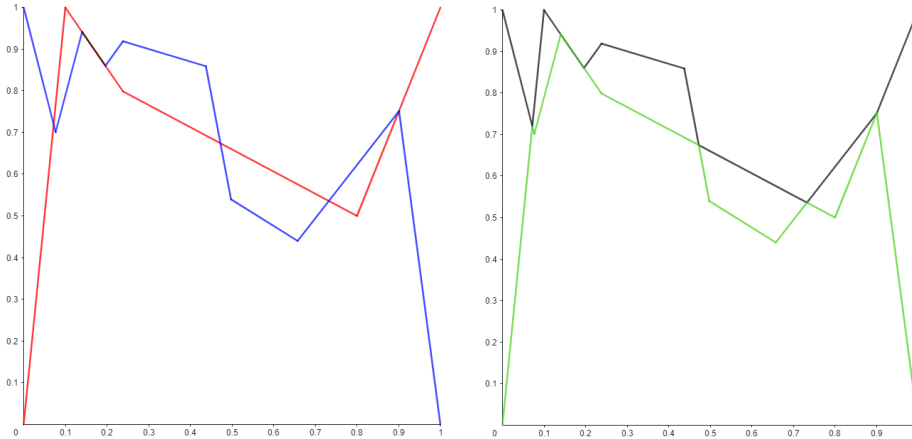


Figura 4. Supremo e ínfimo de dos funciones de McNaughton

Esta técnica es efectiva a raíz de la naturaleza finita de cada función de McNaughton, aunque la escritura obtenida puede no estar en su escritura estándar. Cuando se consideran familias infinitas, este enfoque ya no es válido, como precisaremos a continuación.

Proposición 4.2.6. Si $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, entonces, existe alguna familia $\{f_i\}_{i \in I}$ de funciones de McNaughton tales que

$$\sup_{i \in I} \{f_i\}(a) = b$$

si, y sólo si, (a, b) es un Λ -punto con $f_i(a) = b$ para algún $i \in I$.

Demostración: Al ser $a \in \mathbb{Q}$, es de la forma $a = \frac{p}{q}$ con $\gcd(p, q) = 1$. Sea $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de funciones de McNaughton, por lo que debe tenerse que $f_i(a) \in \{0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}, 1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En consecuencia, se cumple que $\sup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i(a)\} \in \{0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}, 1\}$, y en cualquiera de estas elecciones, $(a, \sup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i\}(a))$ es un Λ -punto. El recíproco es trivial: tómese el singletón $\{f\}$ de una función de McNaughton f que pase por el Λ -punto en cuestión $\square$

Corolario 4.2.7. La subálgebra $C[0, 1]$ de $[0, 1]^{[0, 1]}$ no está como subconjunto en $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$, esto es, $C[0, 1] \not\subseteq \text{Sup}(\mathcal{M}_1)$.

Demostración: La función constante $\frac{1}{2} \in C[0, 1]$ no está en $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$, pues $\frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$, pero $(0, \frac{1}{2})$ no es un Λ -punto. $\square$

Para nuestros fines, construiremos funciones discontinuas específicas en $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$ por medio de sucesiones de funciones de McNaughton, haremos uso de sucesiones racionales según el siguiente resultado.

Lema 4.2.8. Dados p, q enteros positivos y k, r números reales con k no negativo, la sucesión

$$x_n = \frac{pn + r}{qn + k}$$

- i) es estrictamente creciente si, y sólo si, $qr - pk < 0$;
- ii) es estrictamente decreciente si, y sólo si, $qr - pk > 0$.

Demostración: Se procede directamente por equivalencias:

$$\begin{aligned} \frac{pn + r}{qn + k} &< \frac{p(n + 1) + r}{q(n + 1) + k} \\ \iff (pn + r)(qn + k) + q(pn + r) &< (pn + r)(qn + k) + p(qn + k) \\ \iff qr < pk &\iff qr - pk < 0. \end{aligned}$$

Análogamente para la otra desigualdad. $\square$

El Teorema 4.2.9, y su posterior generalización en el Teorema 4.2.10, que se presentan a continuación, justifican en gran medida la importancia del marco de los Λ -puntos, y permiten observar explícitamente muchos de los objetos que se encuentran en $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$. No sólo eso, son suficientes para limitar su estructura algebraica, y la naturaleza de las discontinuidades sobre Λ -puntos que puedan encontrarse ahí. Más adelante observaremos cómo motiva la formación de diferentes conjuntos en los que se encuentran estructuras de subálgebras.

Teorema 4.2.9. *Si f y g son funciones de McNaughton que pasan por los Λ -puntos (a, b) y (a, β) respectivamente con $0 < a < 1$, entonces para cualquier otro Λ -punto (a, c) , si $c \leq \min\{b, \beta\}$, existe una familia (que puede tomarse como una sucesión creciente) de funciones de McNaughton $\{h_i\}_{i \in I}$ con*

$$\sup_{i \in I} \{h_i\}(x) = f(x)\chi_{[0,a)} + c\chi_{\{a\}} + g(x)\chi_{(a,1]},$$

mientras que si $c > \min\{b, \beta\}$, tal familia no puede existir. Para $a = 0$ y $a = 1$ el resultado es válido omitiendo el término apropiado en la escritura.

Demostración: Sean $p(x) = mx + d$ y $q(x) = Mx + D$ representaciones laterales izquierda y derecha de f y g alrededor de a respectivamente, de tal forma que

$$f|_{(a-\varepsilon, a]} = p \quad \text{y} \quad g|_{(a, a+\varepsilon]} = q$$

para algún $\varepsilon > 0$ común apropiado que será utilizado más adelante. El caso $c = b = \beta$ es la proposición anterior, por lo que consideraremos $c < \min\{b, \beta\}$, en caso de existir. Primero realicemos un análisis a izquierda de $a > 0$, y para el análisis derecho se procederá de manera análoga ($a < 1$). Al ser $(a, b), (a, c) \in \Lambda$, debe tenerse que $a = \frac{p}{q}$ con $\gcd(p, q) = 1$, $b = \frac{r}{q}$ y $c = \frac{s}{q}$. La idea es construir sucesiones $\{a_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{m_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{d_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

- (I) $a_n^- \rightarrow a$ es racional y estrictamente creciente,
- (II) $m_n^- \rightarrow -\infty$ es entera,
- (III) $d_n^- \rightarrow \infty$ es entera,
- (IV) $m_n^- a + d_n^- = c$,

que permitan aproximar la función deseada por representaciones laterales izquierdas. Para ello, al ser (a, c) un Λ -punto, existe alguna función de

McNaughton con representación lateral izquierda $f^-(x) = m^-x + d^-$ alrededor de a con $f^-(a) = c$. Por el Corolario 4.1.9, m^- puede escogerse con $m^- \leq m$, y todas las representaciones laterales de funciones de McNaughton que pasan por este punto son de la forma

$$f_t^-(x) = (m^- + qt)x + (d^- - pt) \quad \text{para algún } t \in \mathbb{Z},$$

todas ellas satisfaciendo la condición (IV); para satisfacer las condiciones (II) y (III) basta tomar las sucesiones $m_n^- = m^- - qn$ y $d_n^- = d^- + pn$ para $n \geq 1$, de donde $f_{-n}^-(x) = m_n^-x + d_n^-$. La sucesión $\{a_n^-\}$ se obtiene a partir de las intersecciones entre f_{-n}^- y p :

$$(m^- - qn)a_n^- + (d^- + pn) = ma_n^- + d = \rightarrow a_n^- = \frac{pn + d^- - d}{qn + m - m^-} \in \mathbb{Q},$$

siendo clara la convergencia $a_n^- \rightarrow a = \frac{p}{q}$, y la buena definición de la sucesión a raíz de que $m - m^- > 0$. La cualidad de estrictamente creciente se da en virtud del Lema 4.2.8, pues

$$\begin{aligned} q(d^- - d) - p(m - m^-) &= q((c - m^-a) - (b - ma)) - p(m - m^-) \\ &= q(c - b) + aq(m - m^-) - p(m - m^-) \\ &= q(c - b) < 0, \end{aligned}$$

recordando que $c < b$. Para finalizar el análisis por izquierda, como $a_n^- \rightarrow a$, tómese un $N^- \in \mathbb{N}$ tal que $a_n^- \in (a - \varepsilon, a]$ para todo $n \geq N^-$. Para el análisis derecho, se realiza un procedimiento análogo construyéndose sucesiones $\{a_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{m_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{d_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

- (I) $a_n^+ \rightarrow a$ es racional y estrictamente decreciente,
- (II) $m_n^+ \rightarrow \infty$ es entera,
- (III) $d_n^+ \rightarrow -\infty$ es entera,
- (IV) $m_n^+a + d_n^+ = c$,

que permitan aproximar la función deseada por representaciones laterales derechas. Para la sucesión $a_n^+ \rightarrow a$ se toma un $N^+ \in \mathbb{N}$ tal que $a_n^+ \in (a, a + \varepsilon]$ para todo $n \geq N^+$. Ahora, para cada $n \geq N := \max\{N^-, N^+\}$ se construye la familia de funciones $\{h_n\}_{n \geq N}$ como

$$h_i = f\chi_{[0, a_i^-]} + f_{-i}^-\chi_{(a_i^-, a]} + g_i^+\chi_{(a, a_i^+]} + g\chi_{(a_i^+, 1]},$$

que son de McNaughton por la forma en que se construyeron las sucesiones $\{a_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{a_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$, y, las funciones f_{-n}^- y g_n^+ . Se verifica que:

i) Para todo $n \geq N$, $h_n(a) = f_{-n}^-(a) = c$, luego

$$\sup_{n \geq N} \{h_n\}(a) = c.$$

ii) Para $0 \leq x < a$,

$$\sup_{n \geq N} \{h_n\}(x) = f(x).$$

En efecto, debe darse que $x \leq a_N^-$ (donde directamente se da el resultado) o que exista $\hat{n} > N$ (único) para el que $a_{\hat{n}}^- < x \leq a_{\hat{n}+1}^-$ a raíz de que $a_n \rightarrow a$ es estrictamente creciente, de donde $h_{\hat{n}}(x) = f_{-\hat{n}}^-(x)$ pero $h_{\hat{n}+1}(x) = f(x)$. Para $n > \hat{n}$, $h_n(x) = f(x)$ por la forma en que fueron construidas, por lo que hay que analizar los $N < n \leq \hat{n}$. Sin embargo, nótese que f está representado por el segmento de recta que pasa por los puntos (a, b) y $(a_n^-, f(a_n^-))$, y f_{-n}^- por el segmento de recta que pasa por los puntos (a, c) y $(a_n^-, f_{-n}^-(a_n^-)) = (a_n^-, f(a_n^-))$, y al ser $c < b$, se tiene que $f_{-n}^- \leq f$ en $[a_n, a]$, de donde se concluye que $f(x) \geq f_{-n}^-(x)$. Estas condiciones garantizan lo deseado.

iii) Para $a < x \leq 1$,

$$\sup_{n \geq N} \{h_n\}(x) = g(x),$$

siguiendo un análisis análogo al realizado en ii).

Estos resultados en conjunto muestran que

$$\sup_{i \in I} \{h_i\}(x) = f(x)\chi_{[0,a)} + c\chi_{\{a\}} + g(x)\chi_{(a,1]}.$$

Para el caso $c > \min\{b, \beta\}$, sin pérdida de generalidad asúmase que $\min\{b, \beta\} = b$. Si $\{h_i\}_{i \in I}$ fuese una familia de funciones de McNaughton con $\sup\{h_i\}(a) = c$, por la Proposición 4.2.6 debe tenerse que para algún $i \in I$, $h_i(a) = c$, y por tanto, $(h_i - f)(a) = h_i(a) - f(a) = c - b > 0$. Al ser h_i y f continuas, existe alguna vecindad $(a - \delta, a + \delta)$ en la que $h_i - f > 0$, y por tanto para cualquier x en ella,

$$\sup_{i \in I} \{h_i\}(x) \geq h_i(x) > f(x),$$

garantizando que no existe familia que satisfaga lo solicitado. $\square$

La elección de un $\varepsilon > 0$ apropiado en el anterior teorema permite que la construcción de la familia de McNaughton deseada se haga de manera local. Se puede extender este resultado a una cantidad arbitraria finita de discontinuidades.

Teorema 4.2.10. Sean $f_1, \dots, f_{k+1}$ una cantidad finita de funciones de McNaughton y $a_1 < \dots < a_k$ racionales en $[0, 1]$. Para cualquier sucesión de Λ -puntos $\{(a_j, c_j)\}_{1 \leq j \leq k}$, si $c_j \leq \min\{f_j(a_j), f_{j+1}(a_j)\}$, entonces existe una familia (que puede tomarse como una sucesión creciente) de funciones de McNaughton $\{h_i\}_{i \in I}$ con

$$\sup_{i \in I} \{h_i\} = f_1 \chi_{[0, a_1)} + \sum_{i=1}^k c_i \chi_{\{a_i\}} + \sum_{i=1}^{k-1} f_{i+1} \chi_{(a_i, a_{i+1})} + f_{k+1} \chi_{(a_k, 1]},$$

mientras que si para algún $1 \leq j \leq k$, $c_j > \min\{f_j(a_j), f_{j+1}(a_j)\}$, tal familia no puede existir. Para $a_1 = 0$ y/o $a_k = 1$ el resultado es válido omitiendo el término apropiado en la escritura.

Corolario 4.2.11. $\mathcal{M}_1$ no es cerrado bajo supremos arbitrarios, esto es, existen familias de funciones de McNaughton $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ con $\sup_{\sigma \in \Sigma} \{f_\sigma\} \notin \mathcal{M}_1$.

Este resultado es sumamente importante, pues a raíz de él puede mostrarse explícitamente que $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$ no se comporta como se desearía.

Ejemplo 4.2.12. Tomando en el Teorema 4.2.9 a $a = \frac{1}{2}$, $f = \mathbf{1}$ y $g = \mathbf{1}$, se construyen las sucesiones

$$\{a_n^-\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \{a_n^+\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Es inmediato observar que $\{a_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y $\{a_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente, ambas en sentido estricto, con $a_n^-, a_n^+ \rightarrow \frac{1}{2}$. La familia $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de McNaughton está dada por

$$\begin{aligned} h_n(x) = & 1 \chi_{[0, a_n^-]}(x) + (-2nx + n) \chi_{(a_n^-, \frac{1}{2}]}(x) + \\ & + (2nx - n) \chi_{(\frac{1}{2}, a_n^+]}(x) + 1 \chi_{(a_n^+, 1]}(x) \end{aligned}$$

y verifica que

$$h(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{h_n(x)\} = 1 \chi_{[0, \frac{1}{2})} + 0 \chi_{\{\frac{1}{2}\}} + 1 \chi_{(\frac{1}{2}, 1]},$$

que es discontinua en $x = \frac{1}{2}$, y por tanto, no es de McNaughton. Una visualización de la sucesión se puede encontrar en el [Apéndice 1](#).

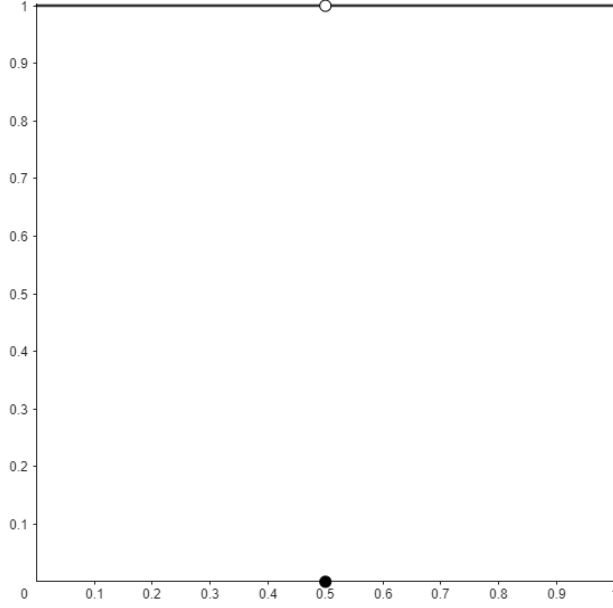


Figura 5. Una función discontinua de $Sup(\mathcal{M}_1)$

Aunque este supremo no es particularmente especial, es suficiente para imposibilitar: i) una estructura de MV-álgebra en $Sup(\mathcal{M}_1)$, y, ii) que $Sup(\mathcal{M}_1)$ surja de convergencia uniforme de funciones de McNaughton.

Corolario 4.2.13. $Sup(\mathcal{M}_1)$ no es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$.

Demostración: Considérese la función $h \in Sup(\mathcal{M}_1)$ del Ejemplo 4.2.12, y mostremos que $\neg h \notin Sup(\mathcal{M}_1)$. En caso de existir $\neg h$, por tratarse $\mathcal{M}_1$ de una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$, debería tenerse que

$$(\neg h)(x) = 1 - h(x) = 0\chi_{[0, \frac{1}{2})} + 1\chi_{\{\frac{1}{2}\}} + 0\chi_{(\frac{1}{2}, 1]},$$

función que no pertenece a $Sup(\mathcal{M}_1)$ en virtud del Teorema 4.2.10. $\square$

La manera en que se utilizó a la función h del Ejemplo 4.2.12 para imposibilitar la presencia de $\neg h$ en $Sup(\mathcal{M}_1)$ se debe en esencia a que se pueden construir discontinuidades “hacia abajo”, pero no “hacia arriba”, como se

establece en el Teorema 4.2.10; esto, a su vez, se debe a que los supremos absorben superiormente a las funciones que estén por debajo. De manera dual, los ínfimos absorben inferiormente, y es viable esperar que por medio de ínfimos, esta falencia se solvente. Aunque este enfoque resuelve el problema para $\neg$, lo genera para $\oplus$; sin embargo, permite considerar otros conjuntos más allá de $Sup(\mathcal{M}_1)$.

Definición 4.2.14 ($Inf(\mathcal{M}_1)$). *Se define al conjunto de ínfimos de funciones de McNaughton por*

$$Inf(\mathcal{M}_1) := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \exists \{f_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}_1, \inf_{i \in I} \{f_i\} = f \right\}.$$

Como $\sup$ e $\inf$ pueden verse como operadores duales, los resultados válidos para $Sup(\mathcal{M}_1)$ también lo son para $Inf(\mathcal{M}_1)$ en su versión dual.

Proposición 4.2.15. $f \in Sup(\mathcal{M}_1)$ si, y sólo si, $\mathbf{1} - f \in Inf(\mathcal{M}_1)$.

Demostración: Sea $f \in Sup(\mathcal{M}_1)$, luego existe alguna familia de funciones de McNaughton $\{f_i\}_{i \in I}$ con $\sup_{i \in I} \{f_i(x)\} = f(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Considérese la familia de funciones de McNaughton $\{\neg f_i\}_{i \in I}$, y nótese que

$$\begin{aligned} \inf_{i \in I} \{(\neg f_i)(x)\} &= \inf_{i \in I} \{1 - f_i(x)\} \\ &= \inf_{i \in I} (\{1\} + (-1)\{f_i(x)\}_{i \in I}) \\ &= \inf_{i \in I} \{1\} + \inf_{i \in I} \{(-1)f_i(x)\} \\ &= 1 - \sup_{i \in I} \{f_i(x)\} \\ &= 1 - f(x) \\ &= (\mathbf{1} - f)(x), \end{aligned}$$

de donde $\mathbf{1} - f \in Inf(\mathcal{M}_1)$. Un procedimiento análogo muestra la otra implicación. $\square$

De esta manera, al considerar conjuntos contruidos a partir de $Sup(\mathcal{M}_1)$ y de $Inf(\mathcal{M}_1)$ de manera simple, se garantiza la cerradura para $\neg$ en el sentido del MV-álgebra $[0, 1]^{[0, 1]}$. Sin embargo, como se había mencionado anteriormente, no se puede asegurar el mismo resultado para $\oplus$.

Proposición 4.2.16. $Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1)$ no es subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$.

Demostración: No se posee clausura para $\oplus$; para mostrar ello, considérese la siguiente construcción. Dado que la función

$$f(x) = 1\chi_{[0, \frac{1}{3}]} + (-3x + 2)\chi_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} + 0\chi_{(\frac{2}{3}, 1]}$$

es de McNaughton, por el Teorema 4.2.10 existe alguna familia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de McNaughton tales

$$f^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} = 1\chi_{[0, \frac{1}{3}]} + 0\chi_{\{\frac{1}{3}\}} + (-3x + 2)\chi_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} + 0\chi_{(\frac{2}{3}, 1]}.$$

Por otra parte, como la función

$$g(x) = 0\chi_{[0, 1]}$$

también es de McNaughton, por la versión dual del Teorema 4.2.10 para $\text{Inf}(\mathcal{M}_1)$, existe alguna familia $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de McNaughton tales

$$g^*(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \{g_n(x)\} = 0\chi_{[0, \frac{2}{3}]} + 1\chi_{\{\frac{2}{3}\}} + 0\chi_{(\frac{2}{3}, 1]}.$$

La función $f^* \oplus g^*$ viene dada por

$$(f^* \oplus g^*)(x) = 1\chi_{[0, \frac{1}{3}]} + 0\chi_{\{\frac{1}{3}\}} + (-3x + 2)\chi_{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} + 1\chi_{\{\frac{2}{3}\}} + 0\chi_{(\frac{2}{3}, 1]}.$$

A raíz de la discontinuidad inferior en $x = \frac{1}{3}$, $f^* \oplus g^*$ no puede ser el ínfimo de una familia de funciones de McNaughton, mientras que a raíz de la discontinuidad superior en $x = \frac{2}{3}$, $f^* \oplus g^*$ no puede ser el supremo de una familia de funciones de McNaughton. Así pues, $f^* \oplus g^* \notin \text{Sup}(\mathcal{M}_1) \cup \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$. $\square$

Pese a que $\text{Sup}(\mathcal{M}_1) \cup \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$ falla en tener estructura, genera una observación importante: para que un conjunto construido a partir de $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$ sea MV-álgebra, debe tener a sus duales por $\neg$, que pertenecen a $\text{Inf}(\mathcal{M}_1)$, y debe contar de objetos que garanticen la clausura en $\oplus$ entre elementos de $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$ e $\text{Inf}(\mathcal{M}_1)$. Es a raíz de esto que se consideran dos conjuntos especiales.

Proposición 4.2.17. $\text{Sup}(\mathcal{M}_1) \cap \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$.

Demostración: Es claro que $\text{Sup}(\mathcal{M}_1) \cap \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$ es no vacío, pues $\mathcal{M}_1$ está contenido en él. Para la clausura de $\oplus$, si $f, g \in \text{Sup}(\mathcal{M}_1) \cap \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$, particularmente están en $\text{Sup}(\mathcal{M}_1)$ y $f \oplus g \in \text{Sup}(\mathcal{M}_1)$; análogamente se tiene que

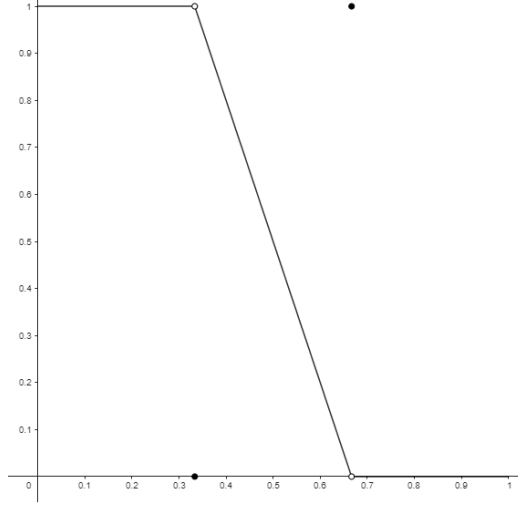


Figura 6. Función suma que no pertenece a $Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1)$

$f \oplus g \in Inf(\mathcal{M}_1)$, obteniéndose la pertenencia a la intersección. Para la clausura de $\neg$, si $f \in Sup(\mathcal{M}_1) \cap Inf(\mathcal{M}_1)$, particularmente está en $Sup(\mathcal{M}_1)$, y por tanto, $1-f \in Inf(\mathcal{M}_1)$; análogamente se tiene que $1-f \in Sup(\mathcal{M}_1)$, obteniéndose la pertenencia a la intersección. Estas dos condiciones garantizan el resultado. $\square$

Definición 4.2.18. (Suma $\oplus$ entre conjuntos). Se define el conjunto Suma $\oplus$ entre $Sup(\mathcal{M}_1)$ e $Inf(\mathcal{M}_1)$ como

$$Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1) := \{f \oplus g : f \in Sup(\mathcal{M}_1) \text{ y } g \in Inf(\mathcal{M}_1)\}.$$

Aunque en nuestro desarrollo es una pregunta abierta si el conjunto $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$, en ella puede considerarse un subconjunto inesperado asociado a discontinuidades en Λ -puntos, que resulta ser subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$, en virtud del Teorema 2.2.10 y de su versión dual, como se construye a continuación.

Definición 4.2.19 (Λ -discontinuidad). Sea $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Se dice que una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ posee una Λ -discontinuidad en a si, y sólo si, f no es continua en a y $(a, f(a))$ es un Λ -punto.

Definición 4.2.20 ($DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$). Se denota por $DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$ al conjunto de funciones en $[0, 1]^{[0, 1]}$ definidas a trozos por representaciones locales

de funciones de McNaughton, cuyas discontinuidades son únicamente una cantidad finita de Λ -discontinuidades.

Proposición 4.2.21. *$DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$ que satisface*

$$\mathcal{M}_1 \subseteq DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1) \subseteq Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$$

Demostración: Primero demostremos las contenencias. Es claro que cada función de McNaughton está definida a trozos por representaciones locales, y no posee Λ -discontinuidades, por lo que $\mathcal{M}_1 \subseteq DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$. Para la segunda contenencia, sea $f \in DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$; supóngase que f no posee Λ -discontinuidades en 0 y en 1, por lo que puede escribirse de la forma

$$f = f_1\chi_{[0, a_1]} + \sum_{i=1}^k c_i\chi_{\{a_i\}} + \sum_{i=1}^{k-1} f_{i+1}\chi_{(a_i, a_{i+1})} + f_{k+1}\chi_{(a_k, 1]},$$

siendo $f_1, \dots, f_{k+1}$ representaciones locales de funciones de McNaughton, y $(a_1, c_1), \dots, (a_k, c_k)$ Λ -puntos. Por el Teorema 4.2.10, la función

$$h = f_1\chi_{[0, a_1]} + \sum_{i=1}^k 0\chi_{\{a_i\}} + \sum_{i=1}^{k-1} f_{i+1}\chi_{(a_i, a_{i+1})} + f_{k+1}\chi_{(a_k, 1]}$$

está en $Sup(\mathcal{M}_1)$, mientras que por su versión dual, la función

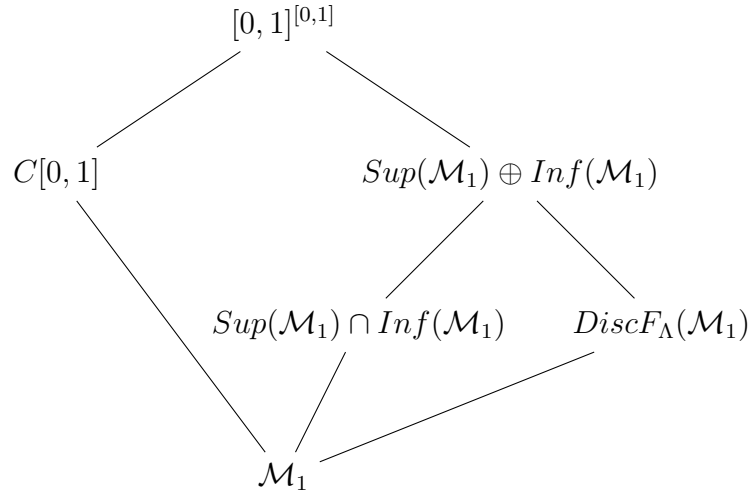
$$g = 0\chi_{[0, a_1]} + \sum_{i=1}^k c_i\chi_{\{a_i\}} + \sum_{i=1}^{k-1} 0\chi_{(a_i, a_{i+1})} + 0\chi_{(a_k, 1]}$$

está en $Inf(\mathcal{M}_1)$. Se observa directamente que $f = h \oplus g$, de donde se garantiza que $f \in Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$; para el caso en que 0 o 1 sean Λ -discontinuidades de f , se procede de igual manera excluyendo los términos apropiados en la escritura, y se tiene la inclusión deseada.

Para observar que $DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$, es inmediato ver que si $f, g \in DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$ con n y m Λ -discontinuidades respectivamente, entonces $f \oplus g$ tendrá a lo sumo $n + m$ Λ -discontinuidades, y está definida a trozos por representaciones locales de funciones de McNaughton (se realizan las sumas de las representaciones locales definidas en una partición común, como en el Ejemplo 4.1.3), por lo que $f \oplus g \in DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$. Por otro lado, $1 - f$ tiene la misma cantidad de Λ -discontinuidades que f , y está

definida a trozos por negaciones de funciones de McNaughton, que a su vez son funciones de McNaughton, garantizado que $\neg f = 1 - f \in DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$. $\square$

Junto a este último resultado, y asumiendo que $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$, el siguiente diagrama es una visualización que resume cómo están organizados los conjuntos con estructura de MV-álgebras aquí presentados.



5. Sobre supremos generados a partir de $\mathcal{RM}_1$

En el presente capítulo, expondremos la amplia brecha entre los conjuntos $Sup(\mathcal{M}_1)$ e $Inf(\mathcal{M}_1)$ respecto a sus análogos en $\mathcal{RM}_1$, mostrando que, tanto el tipo de discontinuidades que se pueden construir es de una cardinalidad mayor, y enfatizando que las funciones continuas se pueden aproximar poligonalmente con una precisión arbitraria; estas distinciones conllevan a que el esquema de MV-álgebras consideradas se organice de manera distinta.

Como se ha observado anteriormente, las funciones de McNaughton presentan bastantes limitaciones a raíz de la naturaleza de sus coeficientes, ejemplo de ello presentándose en los extremos de $[0, 1]$, donde para cualquier función f en $Sup(\mathcal{M}_1)$ y en $Inf(\mathcal{M}_1)$ se verifica que $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$. No obstante, muchas de las ideas que se definen para $\mathcal{M}_1$ pueden extenderse a $\mathcal{RM}_1$, pues $\mathcal{M}_1$ es la restricción de $\mathcal{RM}_1$ a coeficientes enteros, y por tanto, únicamente deberían cambiar algunos resultados que dependan del uso de estos coeficientes.

Definición 5.1 (Escritura normal). *Una escritura normal de una función de Riesz-McNaughton f es una pareja $(P, \mathcal{F})$, siendo $P = \{a_0, a_1, \dots, a_{n+1}\}$ una partición de $[0, 1]$ y $\mathcal{F} = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ una colección de funciones lineales con coeficientes reales definidas en $[0, 1]$, tal que*

$$f = p_0\chi_{\{0\}} + \sum_{i=0}^n p_i\chi_{(a_i, a_{i+1}]} = p_0\chi_{[a_0, a_1]} + \sum_{i=1}^n p_i\chi_{(a_i, a_{i+1}]}.$$

Definición 5.2 (Escritura estándar). *Una escritura estándar de una función de Riesz-McNaughton f es una escritura normal en la que, al retirar cualquier elemento de su partición, deja de tener una escritura normal.*

Al igual que en las funciones de McNaughton, las escrituras normales permiten un análisis por tramos no necesariamente maximales, útil para operar o comparar. Por otro lado, la escritura estándar permite saber dónde se encuentran los puntos de quiebre de la función, otorgando existencia y unicidad, y determinando una partición estándar a cada función de Riesz-McNaughton.

Definición 5.3 (Representación lateral izquierda y derecha alrededor de un punto). *Dado $a \in [0, 1]$, una representación lateral izquierda de una función de Riesz-McNaughton f alrededor de a es una función lineal*

g tal que existe un $\varepsilon > 0$ con el que $g : (a - \varepsilon, a] \rightarrow [0, 1]$ y $f|_{(a-\varepsilon, a]} = g$. Análogamente, se definen las representaciones laterales derechas.

Definición 5.4 (Representación local alrededor de un punto). Dado $a \in [0, 1]$, una representación local de una función de Riesz-McNaughton f alrededor de a es una función lineal g tal que existe un $\varepsilon > 0$ con el que $g : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow [0, 1]$ y $f|_{(a-\varepsilon, a+\varepsilon)} = g$.

Por abuso de notación, al referirse a una representación lateral o local no se especificará el dominio de la representación, sino únicamente a la expresión lineal, entendiéndose que estas siempre pueden hallarse bajo las siguientes condiciones.

Proposición 5.5. Una función de Riesz-McNaughton tiene

- i) representaciones laterales izquierdas alrededor de a si, y sólo si, $a > 0$, esto es, $a \in (0, 1]$.
- ii) representaciones laterales derechas alrededor de a si, y sólo si, $a < 1$, esto es, $a \in [0, 1)$.
- iii) representaciones locales alrededor de a si, y sólo si, a no pertenece a su partición estándar.

Las representaciones locales y laterales permiten estudiar a las funciones de Riesz-McNaughton de manera local de la misma manera en que lo permiten sus equivalentes en las funciones de McNaughton. Una primera diferencia entre estos dos tipos de funciones surge en los puntos de $[0, 1]^2$ que son alcanzables.

Proposición 5.6. Sea $m \in \mathbb{R}$; para todo punto $(a, b) \in [0, 1]^2$ existe un único $d \in \mathbb{R}$ para el que $p(x) = mx + d$ corresponde a alguna representación lateral de alguna función de Riesz-McNaughton. Similarmente, sea $d \in \mathbb{R}$; para todo punto $(a, b) \in (0, 1] \times [0, 1]$ existe un único $m \in \mathbb{R}$ para el que $q(x) = mx + d$ corresponde a alguna representación lateral de alguna función de Riesz-McNaughton.

Observación: Para dados $d \in \mathbb{R}$ y $(0, b) \in \{0\} \times [0, 1]$, no se puede hallar $m \in \mathbb{R}$ si $d \neq b$, mientras que si $d = b$, m puede tomar cualquier valor real.

Corolario 5.7. *Dados $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k = 1$ y $c_0, \dots, c_k$ números reales, existe una única función de Riesz-McNaughton con partición estándar $P = \{a_0, \dots, a_k\}$ que pasa por los puntos (a_j, c_j) , $0 \leq j \leq k$.*

Demostración: Aplíquese la Proposición 5.6 recursivamente, construyéndose representaciones laterales derechas que conecte a los puntos (a_i, c_i) y (a_{i+1}, c_{i+1}) , $0 \leq i \leq k-1$, garantizando existencia; al ser estas representaciones determinadas por pendientes e interceptos únicos, se sigue la unicidad $\square$

Ejemplo 5.8. En la imagen se encuentra la función f con escritura estándar

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}\right) \chi_{[0, \frac{3}{2\pi}]} + \left(-\frac{8\pi}{8\pi - 15}x + \frac{40\pi - 15}{40\pi - 75}\right) \chi_{(\frac{3}{2\pi}, \frac{4}{5}]} + (1-x) \chi_{(\frac{4}{5}, 1]}.$$

Nótese que f pasa por los puntos $(0, \frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{4}, \frac{\pi+2}{8})$, que no pertenecen a $\Lambda \cup \hat{\Lambda}$ en el sentido de $\mathcal{M}_1$, y por el punto $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$, que sí pertenece (en particular, es un Λ -punto en el sentido de $\mathcal{M}_1$).

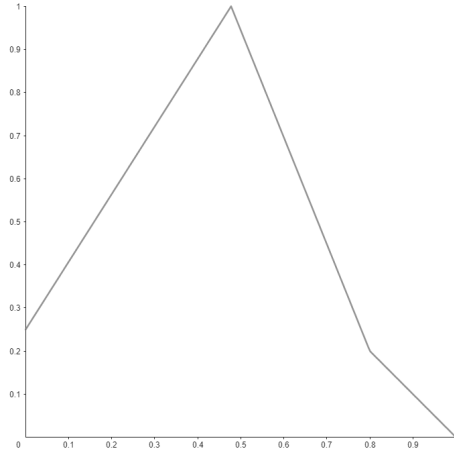


Figura 7. Función f de RieszMcNaughton con partición estándar $\{0, \frac{3}{2\pi}, \frac{4}{5}, 1\}$

Así pues, las nociones de Λ -punto y de $\hat{\Lambda}$ -punto pierden relevancia, ya que todo punto de $[0, 1]^2$ es un equivalente a un Λ -punto. De esta manera, los resultados obtenidos para los supremos de funciones de McNaughton siguen siendo válidos en el contexto de las funciones de Riesz-McNaughton, sin las restricciones que surgían por la distinción que existía.

Definición 5.9 ($Sup(\mathcal{RM}_1)$). Se define al conjunto de supremos de funciones de Riesz-McNaughton por

$$Sup(\mathcal{RM}_1) := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \exists \{f_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{RM}_1, \sup_{i \in I} \{f_i\} = f \right\}.$$

Proposición 5.10. $Sup(\mathcal{RM}_1)$ es cerrado para $\oplus$, esto es, para todo par de funciones $f, g \in Sup(\mathcal{RM}_1)$, existe una familia de funciones de Riesz-McNaughton $\{h_i\}_{i \in I}$ con

$$\sup_{i \in I} \{h_i\} = f \oplus g.$$

Demostración: Se procede de igual manera que en la Proposición 4.2.2 $\square$

La clausura para $\oplus$ indica que hay cierta riqueza algebraica en $Sup(\mathcal{RM}_1)$, específicamente la de monoide.

Corolario 5.11. $(Sup(\mathcal{M}_1), \oplus, \mathbf{0})$ es un monoide conmutativo.

A diferencia de $Sup(\mathcal{M}_1)$, la familia I que puede escogerse para $Sup(\mathcal{RM}_1)$ ya no puede ser únicamente de naturaleza finita o infinita contable.

Proposición 5.12. $\mathcal{RM}_1$ es no contable.

Demostración: Considérese la inyección de $[0, 1]$ en $\mathcal{RM}_1$ dada por $c \rightarrow f_c$, $f_c(x) = c$ para todo $x \in [0, 1]$. Es claro pues que $|\mathcal{RM}_1| \geq |[0, 1]| > \aleph_0$. $\square$

Para nuestro alcance esta diferencia no será problemática; los resultados que se presentarán pueden realizarse con familias I finitas e infinitas contables a raíz de la naturaleza de los coeficientes que se pueden usar.

Proposición 5.13. $\mathcal{RM}_1$ es cerrado bajo supremos finitos, esto es, si $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una familia finita de funciones de Riesz-McNaughton, entonces $\sup_{1 \leq i \leq n} \{f_i\}$ es una función de Riesz-McNaughton.

Demostración: Se procede de igual manera que en la Proposición 4.2.5 $\square$

Sin embargo, junto al hecho que cualquier punto en $[0, 1]^2$ puede ser alcanzado de manera arbitraria por funciones de Riesz-McNaughton como se especifica en la Proposición 5.6 y el Corolario 5.7, muchas condiciones dejan de ser tan estrictas en algunas proposiciones.

Teorema 5.14. Sean $f_1, \dots, f_{k+1}$ funciones de Riesz-McNaughton y sean $a_1 < \dots < a_k$ números reales en $[0, 1]$. Para cualquier sucesión de puntos $\{(a_j, c_j)\}_{1 \leq j \leq k}$ en $[0, 1]^2$, si $c_j \leq \min\{f_j(a_j), f_{j+1}(a_j)\}$, entonces existe una familia (que puede tomarse como una sucesión creciente) de funciones de Riesz-McNaughton $\{h_i\}_{i \in I}$ con

$$\sup_{i \in I} \{h_i\} = f_1 \chi_{[0, a_1)} + \sum_{i=1}^k c_i \chi_{\{a_i\}} + \sum_{i=1}^{k-1} f_{i+1} \chi_{(a_i, a_{i+1})} + f_{k+1} \chi_{(a_k, 1]},$$

mientras que si para algún $1 \leq j \leq k$, $c_j > \min\{f_j(a_j), f_{j+1}(a_j)\}$, tal familia no puede existir. Para $a_1 = 0$ y/o $a_k = 1$ el resultado es válido omitiendo el término apropiado en la escritura.

Demostración: Se procede de igual manera que para el Teorema 4.2.10 $\square$

Aunque en el Teorema 4.2.10, que se fundamenta en los procesos del Teorema 4.2.9, las sucesiones $\{a_n^-\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{a_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$ se construyen de manera meticulosa, para el Teorema 5.14 no es necesario, siendo suficiente cualquier sucesión estrictamente creciente y cualquier sucesión estrictamente decreciente respectivamente que converjan a cada uno de los puntos de discontinuidad. Esto se debe a la diferencia entre funciones en $\mathcal{M}_1$ que cuentan con coeficientes enteros, y las funciones en $\mathcal{RM}_1$ que cuentan con coeficientes reales.

Corolario 5.15. $\mathcal{RM}_1$ no es cerrado bajo supremos arbitrarios, esto es, existen familias de funciones de Riesz-McNaughton $\{f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ para las cuales $\sup_{i \in I} \{f_i\} \notin \mathcal{RM}_1$.

Ejemplo 5.16. Tomando en el Teorema 5.14 los puntos $(a_1, c_1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ y $(a_2, c_2) = (1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, y las funciones de Riesz-McNaughton

$$f_1(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right) \chi_{[0, \frac{1}{3}]}(x) + \frac{2}{3} \chi_{(\frac{1}{3}, 1]}(x),$$

$$\begin{aligned} f_2(x) = & 1 \chi_{[0, \frac{1}{3}]}(x) + \left(-\frac{6 + 9\sqrt{2}}{7}x + \frac{9 + 3\sqrt{2}}{7}\right) \chi_{(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]}(x) + \\ & + (2x - \sqrt{2}) \chi_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]}(x), \end{aligned}$$

se pueden considerar las sucesiones

$$\{a_{1,n}^-\}_{n \geq 3} = \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 3}, \quad \{a_{1,n}^+\}_{n \geq 3} = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 3},$$

$$\{a_{2,n}^-\}_{n \geq 4} = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 4}.$$

Es inmediato observar que $\{a_{1,n}^-\}_{n \geq 3}$ y $\{a_{2,n}^-\}_{n \geq 4}$ son crecientes, y $\{a_{1,n}^+\}_{n \geq 3}$ es decreciente, todas en sentido estricto, con $a_{1,n}^-, a_{1,n}^+ \rightarrow \frac{1}{3}$ y $a_{2,n}^- \rightarrow 1$. La sucesión creciente $\{h_n\}_{n \geq 4}$ de funciones de McNaughton está dada por

$$\begin{aligned} h_n(x) = & \left(x + \frac{1}{3}\right) \chi_{[0, a_{1,n}^-]}(x) + \left(\left(-\frac{1}{6}n + 1\right)x + \frac{1}{18}n + \frac{1}{6}\right) \chi_{(a_{1,n}^-, \frac{1}{3}]}(x) + \\ & + \left(\left(\frac{1}{2}n - \frac{6 + 9\sqrt{2}}{7}\right)x - \frac{1}{6}n + \frac{11 + 6\sqrt{2}}{14}\right) \chi_{(\frac{1}{3}, a_{1,n}^+]}(x) + \\ & + \left(-\frac{6 + 9\sqrt{2}}{7}x + \frac{9 + 3\sqrt{2}}{7}\right) \chi_{(a_{1,n}^+, \frac{\sqrt{2}}{2}]}(x) + \\ & + (2x - \sqrt{2}) \chi_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, a_{2,n}^-]}(x) + \\ & + \left(\left(\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)n + 2\right)x + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)n - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \chi_{(a_{2,n}^-, 1]}(x), \end{aligned}$$

y verifica que

$$\begin{aligned} h(x) := \sup_{n \geq 4} \{h_n(x)\} = & \left(x + \frac{1}{3}\right) \chi_{[0, \frac{1}{3}]}(x) + \frac{1}{2} \chi_{\{\frac{1}{3}\}}(x) + \\ & + \left(-\frac{6 + 9\sqrt{2}}{7}x + \frac{9 + 3\sqrt{2}}{7}\right) \chi_{(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}]}(x) + \\ & + (2x - \sqrt{2}) \chi_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)}(x) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \chi_{\{1\}}(x), \end{aligned}$$

que es discontinua en $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$, y por tanto, no es de Riesz-McNaughton. Una visualización de la sucesión se puede encontrar en el [Apéndice 2](#). De manera similar a $Sup(\mathcal{M}_1)$, se concluye que $Sup(\mathcal{RM}_1)$ no surge de convergencia uniforme de funciones de Riesz-McNaughton.

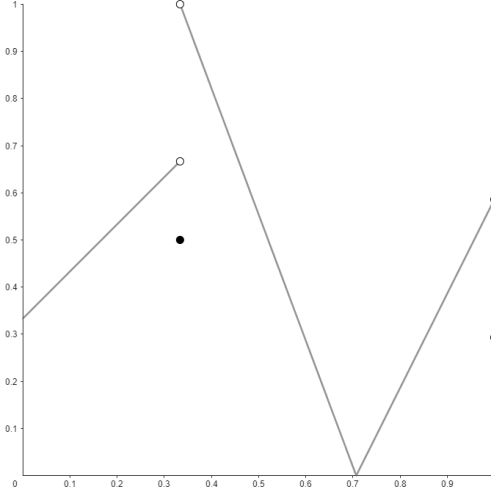


Figura 8. Una función discontinua de $Sup(\mathcal{RM}_1)$

Corolario 5.17. $Sup(\mathcal{RM}_1)$ no es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$.

Demostración: Considérese la función $1 - h$ para la función h del Ejemplo 5.16 y aplíquese el Teorema 5.14. $\square$

Al ser los c_j , $1 \leq j \leq k$, del Teorema 5.14 libres y no restringidos como en el caso de $\mathcal{M}_1$ con los Λ -puntos, ya no se puede descartar que la subálgebra $C[0, 1]$ de $[0, 1]^{[0,1]}$ no pueda obtenerse por las construcciones extendidas de las realizadas en el caso de $\mathcal{M}_1$. De hecho, esta libertad permite crear funciones de Riesz-McNaughton tan próximas a una función continua como se desee. Las siguientes ideas ilustrarán la manera de realizar esta aproximación.

Definición 5.18 (Desplazamiento inferior). *Dados una función de Riesz-McNaughton f y un número real $\eta \in [0, 1]$, se define la función desplazamiento inferior de f por η , denotada por $f_{\downarrow\eta}$, de manera puntual como*

$$f_{\downarrow\eta}(x) = \max\{f(x) - \eta, 0\}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

A η se le llama parámetro del desplazamiento, y el conjunto de desplazamientos inferiores de f se denota por

$$f[\downarrow] := \{g : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \exists \eta \in [0, 1], g = f_{\downarrow\eta}\}.$$

Proposición 5.19. *Sea f una función de Riesz-McNaughton. El conjunto $f[\downarrow]$ está linealmente ordenado.*

Demostración: Esto es consecuencia del orden de $[0, 1]$. Se verifica inmediatamente que los elementos de $f[\downarrow]$ son de la forma $f_{\downarrow\eta}$, y que si $f_{\downarrow\eta_1}, f_{\downarrow\eta_2} \in f[\downarrow]$,

$$\eta_1 \geq \eta_2 \rightarrow \max\{f(x) - \eta_1, 0\} \leq \max\{f(x) - \eta_2, 0\} \longleftrightarrow f_{\downarrow\eta_1}(x) \leq f_{\downarrow\eta_2}(x) \square$$

Proposición 5.20. *Si $f_{\downarrow\eta}$ es un desplazamiento inferior de una función de Riesz-McNaughton f , entonces $f_{\downarrow\eta}$ es una función de Riesz-McNaughton.*

Demostración: Sea $h : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$ la función definida puntualmente por $h(x) = f(x) - \eta$; nótese que h es lineal a trozos y está bien definida, pues, como $0 \leq f(x) \leq 1$ y $0 \leq \eta \leq 1$, entonces $-1 \leq f(x) - \eta \leq 1$. Al ser f continua, h también lo es, y por un argumento análogo al usado en la Proposición 5.13, $\sup\{h, \mathbf{0}\}$ también es lineal a trozos. Más aún, su imagen está contenida en $[0, 1]$ y se tiene que $h(x) = f_{\downarrow\eta}(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, de donde se sigue que $f_{\downarrow\eta}$ es de Riesz-McNaughton. $\square$

Intuitivamente hablando, un desplazamiento inferior de una función de Riesz-McNaughton g es una traslación de la función g hacia abajo con truncamiento en 0. Esta idea permite acotar inferiormente a una función cualquiera por medio de una función de Riesz-McNaughton. En particular, un desplazamiento inferior por 0 no altera la función, y un desplazamiento inferior por 1 corresponde siempre a la función de Riesz-McNaughton nula $\mathbf{0}$, esto es, $g_{\downarrow 0} = g$ y $g_{\downarrow 1} = \mathbf{0}$ para toda función de Riesz-McNaughton g .

Lema 5.21. *Sean $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ una partición de $[0, 1]$ y $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la única función de Riesz-McNaughton con partición estándar P , que coincide con f en cada x_j , $0 \leq j \leq n$. El conjunto*

$$\{h \in g[\downarrow] : h \leq f\}$$

está linealmente ordenado y posee máximo.

Demostración: Sean f , P y g como se indican. La existencia y unicidad de g está determinada por el Corolario 5.7. El ordenamiento lineal se debe a ser un subconjunto de $g[\downarrow]$. Para la existencia del máximo, considérese el conjunto

$$S := \{\eta \in [0, 1] : g_{\downarrow\eta} \leq f\}.$$

Es claro que S está acotado inferiormente por $\eta = 0$ y es no vacío, pues siempre se tiene que $\eta = 1 \in S$, por lo que posee ínfimo $\alpha := \inf(S)$. Si se

tuviese que $\alpha \notin S$, para algún $x \in [0, 1]$ se tendría que $g_{\downarrow\alpha}(x) > f(x) \geq 0$. La desigualdad estricta garantiza la existencia de algún $\varepsilon > 0$ para el que $g_{\downarrow\alpha+\varepsilon}(x) = g_{\downarrow\alpha}(x) - \varepsilon > f(x)$, de donde $\alpha + \varepsilon$ sería cota inferior de S , lo cual es contradictorio. Así pues, $\alpha \in S$, esto es, $\alpha = \min(S)$, y en consecuencia, $g_{\downarrow\alpha}$ es el máximo del conjunto $\{h \in g[\downarrow] : h \leq f\}$. $\square$

Definición 5.22 (Desplazamiento inferior asociado a una partición).

Sean f , P y g como en el Lema 5.21. A la función $\max\{h \in g[\downarrow] : h \leq f\}$ se le denomina el desplazamiento inferior óptimo de f asociado a la partición P , y se le denota por $P^\downarrow(f)$.

Teorema 5.23 (de aproximación). $C[0, 1] \subseteq \text{Sup}(\mathcal{RM}_1)$, esto es, para $f \in C[0, 1]$, existe alguna sucesión creciente $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de funciones de Riesz-McNaughton con $\sup_{i \in \mathbb{N}} \{f_i\} = f$ uniformemente.

Demostración: Sea $f \in C[0, 1]$. Si f fuese una función de Riesz-McNaughton, el resultado sería trivial, bastando tomar la familia constante $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{f\}$. Así pues, supóngase que f no es una función de Riesz-McNaughton. En particular como f es continua con $f \neq \mathbf{0}$ y $f \neq \mathbf{1}$, existe algún $x_0 \in [0, 1]$ para el que $0 < f(x_0) < 1$. La prueba se realizará en dos pasos. En el primero construiremos una sucesión de particiones que garantice la aproximación de f deseada por medio de desplazamientos inferiores óptimos, esto es, que dado $\varepsilon > 0$, pueda encontrarse una partición P en la sucesión que posea un desplazamiento inferior óptimo de f , $P^\downarrow(f)$, para el que $0 \leq f - P^\downarrow(f) \leq \varepsilon$. Para ello, sea $\varepsilon_n \rightarrow 0$ una sucesión positiva y decreciente. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, el cual se acotará posteriormente. Como f es continua, se garantiza lo siguiente.

i) Existe algún $\delta_{n,0} > 0$ para el que

$$x \in [0, \delta_{n,0}) \quad \rightarrow \quad f(x) \in \left(f(0) - \frac{\varepsilon_n}{4}, f(0) + \frac{\varepsilon_n}{4}\right) \cap [0, 1];$$

se define $I_{n,0} := (-\delta_{n,0}, \delta_{n,0})$.

ii) Existe algún $\delta_{n,1} > 0$ para el que

$$x \in (1 - \delta_{n,1}, 1] \quad \rightarrow \quad f(x) \in \left(f(1) - \frac{\varepsilon_n}{4}, f(1) + \frac{\varepsilon_n}{4}\right) \cap [0, 1];$$

se define $I_{n,1} := (1 - \delta_{n,1}, 1 + \delta_{n,1})$.

iii) Similarmente, para cualquier $\xi \in (0, 1)$, existe algún $\delta_{n,\xi} > 0$ para el que

$$x \in (\xi - \delta_{n,\xi}, \xi + \delta_{n,\xi}) \rightarrow f(x) \in \left(f(\xi) - \frac{\varepsilon_n}{4}, f(\xi) + \frac{\varepsilon_n}{4}\right) \cap [0, 1];$$

este $\delta_{n,\xi}$ se escoge de tal forma que $I_{n,\xi} := (\xi - \delta_{n,\xi}, \xi + \delta_{n,\xi}) \subseteq (0, 1)$.

Como la familia $\{I_{n,\xi}\}_{\xi \in [0,1]}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto $[0, 1]$, puede hallarse un subcubrimiento finito $\{I_{n,\xi_j}\}_{0 \leq j \leq N_n}$ de $[0, 1]$ en virtud del Teorema de **Borel-Lebesgue**, esto es, $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j=0}^{N_n} I_{n,\xi_j}$; este subcubrimiento se escoge de tal manera que I_{n,x_0} esté en él, dígase $x_0 = \xi_s$. Nótese que 0 y 1 se alcanzan únicamente a partir de $I_{n,0}$ e $I_{n,1}$ respectivamente, por lo que sin pérdida de generalidad, puede tomarse $I_{n,\xi_0} = I_{n,0}$ e $I_{n,\xi_{N_n}} = I_{n,1}$; sin embargo, estos abiertos integran a su vez elementos por fuera de $[0, 1]$. Para obtener la igualdad, obsérvese que para $0 < j < N_n$, $I_{n,\xi_j} \subseteq (0, 1)$, por lo que abusando de notación, y redefiniendo $I_{n,\xi_0} := [0, \delta_{n,0})$ e $I_{n,\xi_{N_n}} := (1 - \delta_{n,1}, 1]$, se obtiene la igualdad $\bigcup_{j=0}^{N_n} I_{n,\xi_j} = [0, 1]$. Ahora, considérese la partición P_n dada por los puntos medios y extremos de los intervalos I_{n,ξ_j} , esto es,

$$P_n := \{0, \delta_{n,0}, 1 - \delta_{n,1}, 1\} \cup \{\xi_j - \delta_{n,\xi_j}, \xi_j, \xi_j + \delta_{n,\xi_j}\}_{0 < j < N_n} := \{\zeta_{n,0}, \dots, \zeta_{n,N_n^*}\}.$$

Al haber surgido esta partición a partir de un cubrimiento de $[0, 1]$, se puede garantizar que cada $\zeta_{n,k}$ pertenece a algún intervalo I_{n,ξ_j} , así como también cada punto interno de la partición $\zeta \in (\zeta_{n,j}, \zeta_{n,j+1})$. Por la forma en que se construyó P_n , se garantiza que cada intervalo de la partición está contenido en algún elemento del subcubrimiento finito, esto es, para todo $0 \leq i \leq N_n^* - 1$ existe algún ξ_{j_i} para el que $(\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1}) \subseteq I_{n,\xi_{j_i}}$. Esto garantiza que

$$x \in (\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1}) \rightarrow f(x) \in \left(f(\xi_{j_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4}, f(\xi_{j_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4}\right) \cap [0, 1];$$

más aún, por ser f continua, esto se extiende a que

$$x \in [\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1}] \rightarrow f(x) \in \left[f(\xi_{j_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4}, f(\xi_{j_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4}\right] \cap [0, 1].$$

Como $f(\xi_s) = f(x_0) > 0$ y la sucesión positiva $\varepsilon_n \rightarrow 0$ es decreciente, existe algún natural M a partir del cual, si $n \geq M$, $f(\xi_s) - \frac{\varepsilon_n}{2} > 0$. Impóngase en nuestro análisis que $n \geq M$, y sea g_n la única función de Riesz-McNaughton

con partición estándar P_n que coincide con f en P_n . De lo dicho anteriormente, se verifica que $g_{n\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}} \neq \mathbf{0}$, pues $\xi_s \in P$ y por tanto,

$$g_{n\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}}(\xi_s) = \max \left\{ g_n(\xi_s) - \frac{\varepsilon_n}{2}, 0 \right\} = \max \left\{ f(\xi_s) - \frac{\varepsilon_n}{2}, 0 \right\} > 0.$$

Ahora, veamos que $g_{\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}}$ acota inferiormente a f por un argumento puntual. Tómese un $x \in [0, 1]$, luego $x \in [\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1}]$ para algunos $\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1} \in P_n$. Particularmente se tiene que $[\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1}] \subseteq I_{n,\xi_{k_i}}$ para algún ξ_{k_i} por la forma en que fue construida P_n , por lo que

$$f(x), f(\zeta_{n,i}), f(\zeta_{n,i+1}) \in \left[f(\xi_{k_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4}, f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} \right] \cap [0, 1],$$

y del comportamiento lineal de g en $[\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1}]$ garantiza que

$$x \in [\zeta_{n,i}, \zeta_{n,i+1}] \rightarrow g_n(x) \in \left[f(\xi_{k_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4}, f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} \right] \cap [0, 1].$$

Se verifica por casos lo siguiente:

- i. Si $g_n(x) - \frac{\varepsilon_n}{2} \leq 0$, entonces

$$g_{n\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}}(x) = 0 \leq f(x).$$

- ii. Si $g_n(x) - \frac{\varepsilon_n}{2} > 0$, entonces

$$\begin{aligned} g_{n\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}}(x) &= g_n(x) - \frac{\varepsilon_n}{2} \leq \min \left\{ f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4}, 1 \right\} - \frac{\varepsilon_n}{2} \\ &\leq \min \left\{ f(\xi_{k_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4}, 1 - \frac{\varepsilon_n}{2} \right\} \leq f(\xi_{k_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4} \\ &\leq \max \left\{ f(\xi_{k_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4}, 0 \right\} \leq f(x). \end{aligned}$$

Ambos casos en conjunto permiten concluir que $g_{n\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}}(x) \leq f(x)$. Para observar que $(f - g_{n\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}})(x) \leq \varepsilon_n$, se realiza el siguiente análisis puntual.

$$\begin{aligned} f(x) - g_{n\downarrow\frac{\varepsilon_n}{2}}(x) &\leq f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} - \max \left\{ g_n(x) - \frac{\varepsilon_n}{2}, 0 \right\} \\ &= f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} + \min \left\{ -g_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{2}, 0 \right\} \\ &= \min \left\{ f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} - g_n(x) + \frac{\varepsilon_n}{2}, f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} \right\} \\ &\leq \min \left\{ f(\xi_{k_i}) + \frac{3\varepsilon_n}{4} - \left(f(\xi_{k_i}) - \frac{\varepsilon_n}{4} \right), f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} \right\} \\ &= \min \left\{ \varepsilon_n, f(\xi_{k_i}) + \frac{\varepsilon_n}{4} \right\} \\ &\leq \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Como esto vale para a todo $x \in [0, 1]$, se concluye pues que $0 \leq f - g_{n\downarrow \frac{\varepsilon_n}{2}} \leq \varepsilon_n$ para todo $n \geq M$. En particular, esto garantiza que $0 \leq f - P_n^\downarrow(f) \leq \varepsilon_n$ para todo $n \geq M$, por lo que la sucesión de particiones buscada es $\{P_n\}_{n \geq M}$.

El segundo paso es definir las funciones de Riesz-McNaughton f_i asociadas a cada elemento de la sucesión de particiones, y mostrar que efectivamente la familia en cuestión es creciente. Aunque la familia dada por $f_i := P_i^\downarrow(f)$, $i \geq M$ garantiza la convergencia uniforme $P_i^\downarrow(f) \rightarrow f$ por lo mostrado anteriormente, estos desplazamientos inferiores óptimos no garantizan que la familia $\{f_i\}_{i \geq M}$ sea creciente. Para ello, se procede a definir $f_M := P_M^\downarrow(f)$ asociado a la partición P_M , y definido f_n para $n \geq M$, se construye la función f_{n+1} recursivamente de la forma

$$f_{n+1} := \sup\{f_n, P_{n+1}^\downarrow(f)\}, \quad n \geq M,$$

que es de Riesz-McNaughton en virtud de la Proposición 5.13. Se verifica para todo $n \geq M$ que $f_n \leq f_{n+1}$ por cómo se construye f_{n+1} , e inductivamente que $f_{n+1} \leq f$, pues el caso base corresponde a $f_M = P_M^\downarrow(f) \leq f$, y para el caso general, tomando por hipótesis inductiva $f_n \leq f$, y junto a que $P_{n+1}^\downarrow(f) \leq f$, por definición de sup se tiene que $\sup\{f_n, P_{n+1}^\downarrow(f)\} \leq f$. La sucesión $\{f_n\}_{n \geq M}$ garantiza las condiciones del teorema. $\square$

Ejemplo 5.24. En la Figura 9 puede visualizarse una etapa del proceso de aproximación para la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con regla de asignación

$$f(x) = \left(16 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4\right) \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) + (-16(x-1)^4 + 1) \chi_{(\frac{1}{2}, 1]}(x).$$

Para ello, se ha considerado la partición $P = \{0, \frac{1}{10}, \dots, \frac{9}{10}, 1\}$ de $[0, 1]$, y se ha aplicado la aproximación $P^\downarrow(f)$ como se construye en el Teorema de Aproximación en dos subintervalos distintos: de $[0, \frac{1}{2}]$ por su compartamiento estrictamente convexo, y de $[\frac{1}{2}, 1]$ por su comportamiento estrictamente cóncavo. En el Apéndice 3 se presenta en mejor detalle la construcción asociada por desplazamientos inferiores de manera global.

Aunque este resultado es fuerte y habla de la gran diferencia que existe entre $Sup(\mathcal{M}_1)$ y $Sup(\mathcal{RM}_1)$, no aporta en el interés de extender a $Sup(\mathcal{RM}_1)$ de tal manera que se obtenga una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$, por lo que es igualmente necesario introducir las definiciones y resultados para ínfimos.

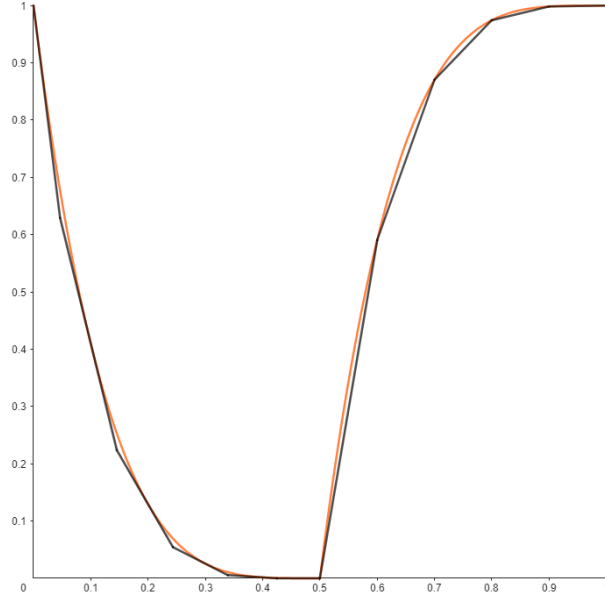


Figura 9. Aproximación de una función continua no lineal a trozos en $Sup(\mathcal{RM}_1)$

Definición 5.25 ($Inf(\mathcal{RM}_1)$). Se define al conjunto de ínfimos de funciones de Riesz-McNaughton por

$$Inf(\mathcal{RM}_1) := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] : \exists \{f_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{RM}_1, \inf_{i \in I} \{f_i\} = f \right\}.$$

En la siguiente proposición se recogen los resultados para $\mathcal{RM}_1$ equivalentes a los de $\mathcal{M}_1$.

Proposición 5.26.

1. $f \in Sup(\mathcal{RM}_1)$ si, y sólo si, $1 - f \in Inf(\mathcal{RM}_1)$.
2. $Sup(\mathcal{RM}_1) \cup Inf(\mathcal{RM}_1)$ no es subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$.
3. $Sup(\mathcal{RM}_1) \cap Inf(\mathcal{RM}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$.

Demostración: Se procede de igual manera que en la Proposición 4.2.15 para 1, la Proposición 4.2.16 para 2 y la Proposición 4.2.17 para 3. $\square$

Se extiende los conjuntos sobre los que se estudia la estructura de MV-álgebra considerando la suma $\oplus$ en el contexto de $\mathcal{RM}_1$.

Definición 5.27 (Suma $\oplus$). *Se define el conjunto $\text{Suma } \oplus$ entre $\text{Sup}(\mathcal{RM}_1)$ e $\text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$ como*

$$\text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \oplus \text{Inf}(\mathcal{RM}_1) := \{f \oplus g : f \in \text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \text{ y } g \in \text{Inf}(\mathcal{RM}_1)\}.$$

De manera análoga a $\mathcal{M}_1$ no se sabe si $\text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \oplus \text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$ es una subálgebra, pero se espera que el resultado en el contexto de $\mathcal{M}_1$ se extienda naturalmente al contexto de $\mathcal{RM}_1$, como ha pasado con la mayoría de resultados. Por otro lado, también existe una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$ inesperada en virtud del Teorema 5.14 y de su versión dual que surge al considerar $\text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \oplus \text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$. Al no existir la restricción de los Λ -puntos, la noción de Λ -discontinuidad desaparece en el contexto de $\mathcal{RM}_1$.

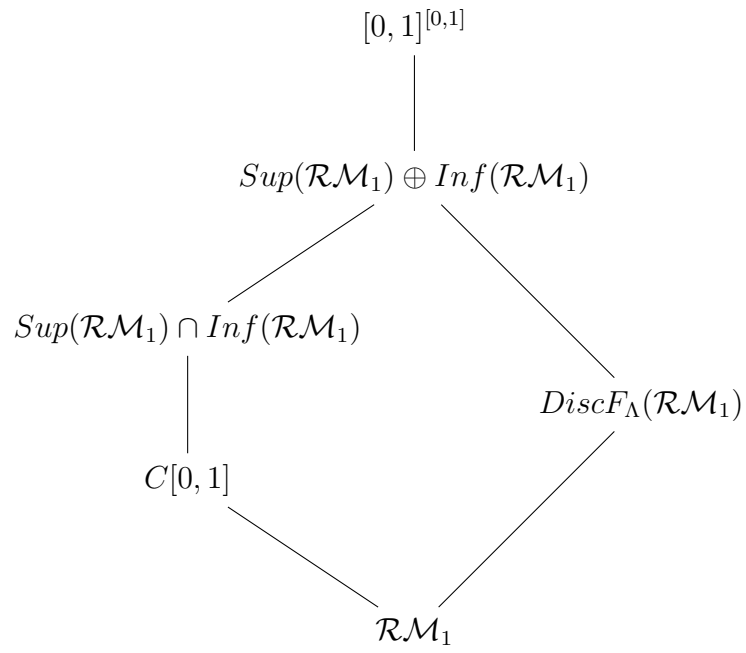
Definición 5.28 ($\text{DiscF}(\mathcal{RM}_1)$). *Se denota por $\text{DiscF}(\mathcal{RM}_1)$ al conjunto de funciones en $[0, 1]^{[0, 1]}$ definidas a trozos por representaciones locales de funciones de Riesz-McNaughton con finitas discontinuidades.*

Proposición 5.29. *$\text{DiscF}(\mathcal{RM}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$ que satisface*

$$\mathcal{RM}_1 \subseteq \text{DiscF}(\mathcal{RM}_1) \subseteq \text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \oplus \text{Inf}(\mathcal{RM}_1).$$

Demostración: Se procede de igual manera en la Proposición 4.2.21 $\square$

Junto a este último resultado, asumiendo que $\text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \oplus \text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$ y teniendo en cuenta el Teorema de Aproximación, en el siguiente esquema se puede visualizar cómo están organizadas los conjuntos con estructura de MV-álgebras aquí presentados.



6. El siguiente paso

En el presente capítulo se presentan, en primer lugar, las preguntas abiertas e interrogantes que han surgido en el desarrollo de este trabajo, las cuales requieren quizás un estudio más profundo y detallado; extendemos además nuestras inquietudes a mayores dimensiones esperando tener ciertos resultados análogos en lo referente a los Λ -puntos.

6.1. Preguntas abiertas e interrogantes

Las definiciones y resultados dados a lo largo del **cuarto** y **quinto** capítulo tienen como finalidad enriquecer la teoría de las funciones de McNaughton y de Riesz-McNaughton por medio de herramientas que no son propias de cálculos proposicionales o del Álgebra Universal, que son bajo las cuales inicialmente se motivan. No obstante, al ser el objetivo de este trabajo responder puntualmente sobre la estructura algebraica que se obtiene al considerar a $Sup(\mathcal{M}_1)$ y a $Sup(\mathcal{RM}_1)$, las ideas se direccionan en construcciones suficientes para imposibilitar o garantizar propiedades de los objetos considerados.

Una de las primeras dificultades que se ponen en manifiesto ocurre a raíz de la Proposición **4.1.14**, en la que se da una descripción vaga de la naturaleza de los $\hat{\Lambda}$ -puntos. Sin embargo, esto es suficiente para concluir el Corolario **4.1.16**, que no es un resultado propio de las $\mathcal{M}_1$, sino que se enmarca en la Teoría de Números. Estos dos aspectos generan las siguientes preguntas.

Pregunta 6.1.1. *¿Existe una caracterización más cómoda para $\hat{\Lambda}$?*

Pregunta 6.1.2. *¿Cómo se pueden relacionar y aprovechar a los Λ -puntos y los $\hat{\Lambda}$ -puntos en otras áreas?*

Por otra parte, uno de los teoremas importantes de este trabajo es el Teorema **4.2.10** (respectivamente **5.14**), bajo el cual se puede concluir que $Sup(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $Sup(\mathcal{RM}_1)$) no goza de estructura de subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$. Para su demostración, se consideraron únicamente discontinuidades por Λ -puntos, y se garantizó la presencia de funciones lineales a trozos con cualquier cantidad finita de discontinuidades, por lo que surgen las dos siguientes preguntas.

Pregunta 6.1.3. *¿Qué puede ocurrir en los $\hat{\Lambda}$ -puntos cuando consideramos objetos en $Sup(\mathcal{M}_1)$?*

Pregunta 6.1.4. *¿Es posible que una función en $Sup(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $Sup(\mathcal{RM}_1)$) tenga infinitos puntos de discontinuidad?*

Ya que en los $\hat{\Lambda}$ -puntos (a, b) el conjunto de posibles valores de b es denso (Proposición 4.1.14), entonces para todo número $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ y todo número $c \in [0, 1]$, se puede encontrar alguna familia de funciones de McNaughton cuyo supremo pase por (a, c) . Es probable que esto implique que en alguna vecindad perforada de a (una vecindad que excluye el punto), la función sea idénticamente $\mathbf{1}$, y por tanto, no sea muy interesante.

Interrogante 6.1.5. *Sea $(a, c) \in [0, 1]^2$ con $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$. Existe alguna familia $\{f_i\}_{i \in I}$ de funciones de McNaughton para la cual $\sup_{i \in I} \{f_i\}(a) = c$. Si $(a, c) \notin \hat{\Lambda}$, entonces para alguna vecindad perforada de a , $(V - \{a\}) \cap [0, 1]$, $\sup_{i \in I} \{f_i\}|_{(V - \{a\}) \cap [0, 1]} = \mathbf{1}|_{(V - \{a\}) \cap [0, 1]}$.*

Por otro lado, si en $Sup(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $Sup(\mathcal{RM}_1)$) existe alguna función con infinitas discontinuidades, debe haber algún número $a \in [0, 1]$ del dominio en el cual estas deban acumularse (no necesariamente debe existir un único punto de acumulación). Si el Interrogante 6.1.5 es cierto, a no podría ser un irracional. Como las discontinuidades en valores racionales de a deben ocurrir en Λ -puntos, por la forma en que se obtienen estas discontinuidades por medio del Teorema 4.2.10 (respectivamente 5.14), debe haber absorción por arriba, lo que hace creer que estas discontinuidades tienen restricción local, y por tanto, no pueden existir tales acumulaciones.

Interrogante 6.1.6. *En $Sup(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $Sup(\mathcal{RM}_1)$) no existen funciones con una cantidad infinita de discontinuidades.*

Debido a que para cualquier función $f \in Sup(\mathcal{M}_1)$, $a \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ implica que $(a, f(a))$ es un Λ -punto, no es posible generar funciones continuas arbitrarias (Corolario 4.2.7), a diferencia de lo que ocurre en $Sup(\mathcal{RM}_1)$. Por la naturaleza restrictiva de los Λ -puntos, una pregunta natural es:

Interrogante 6.1.7. *Las únicas funciones continuas en $Sup(\mathcal{M}_1)$ son las funciones de McNaughton.*

Concerniente a los conjuntos contruidos a partir de $Sup(\mathcal{M}_1)$ e $Inf(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $Sup(\mathcal{RM}_1)$ e $Inf(\mathcal{RM}_1)$), obsérvese que exceptuando a $DiscF_{\Lambda}(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $DiscF(\mathcal{RM}_1)$), surgen a partir de consideraciones bastante naturales: intersección, unión y suma de conjuntos. Estas

operaciones están relacionadas a optimización de estructuras en distintas áreas, como sucede por ejemplo en el Álgebra. Las siguientes afirmaciones se dejan para futuras investigaciones.

Interrogante 6.1.8.

1. $Sup(\mathcal{M}_1) \cap Inf(\mathcal{M}_1)$ es la mayor MV-álgebra que está contenida en $Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1)$, esto es, si M es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$ con $M \subseteq Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1)$, entonces $M \subseteq Sup(\mathcal{M}_1) \cap Inf(\mathcal{M}_1)$.
2. $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$.
3. $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$ es la MV-álgebra más pequeña que contiene a $Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1)$, esto es, si M es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$ con $Sup(\mathcal{M}_1) \cup Inf(\mathcal{M}_1) \subseteq M$, entonces $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1) \subseteq M$.

De manera análoga, surgen preguntas en el contexto de $\mathcal{RM}_1$, y se espera que su valor de verdad sea igual al de sus análogas.

Interrogante 6.1.9.

1. $Sup(\mathcal{RM}_1) \cap Inf(\mathcal{RM}_1)$ es la mayor MV-álgebra que está contenida en $Sup(\mathcal{RM}_1) \cup Inf(\mathcal{RM}_1)$, esto es, si M es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$ con $M \subseteq Sup(\mathcal{RM}_1) \cup Inf(\mathcal{RM}_1)$, entonces se tiene que $M \subseteq Sup(\mathcal{RM}_1) \cap Inf(\mathcal{RM}_1)$.
2. $Sup(\mathcal{RM}_1) \oplus Inf(\mathcal{RM}_1)$ es una subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$.
3. $Sup(\mathcal{RM}_1) \oplus Inf(\mathcal{RM}_1)$ es la mínima MV-álgebra que contiene a $Sup(\mathcal{RM}_1) \cup Inf(\mathcal{RM}_1)$, esto es, si M es subálgebra de $[0, 1]^{[0,1]}$ con $Sup(\mathcal{RM}_1) \cup Inf(\mathcal{RM}_1) \subseteq M$, entonces $Sup(\mathcal{RM}_1) \oplus Inf(\mathcal{RM}_1) \subseteq M$.

Aunque la noción de $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente para el caso de $Sup(\mathcal{RM}_1) \oplus Inf(\mathcal{RM}_1)$) se introdujo para solventar el problema para $\oplus$, infortunadamente genera que la clausura para $\neg$ no sea verificada de manera inmediata. Sin embargo, es posible mostrar que estos conjuntos son cerrados para $\neg$ si, y sólo si, se satisface lo siguiente:

Interrogante 6.1.10. Sean $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones de $Sup(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $Sup(\mathcal{RM}_1)$) y $\{g_j\}_{j \in J}$ una familia de funciones de $Inf(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $Inf(\mathcal{RM}_1)$)

1. $\inf_{i \in I} \{f_i\} \in \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $\text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$).
2. $\sup_{j \in J} \{g_j\} \in \text{Sup}(\mathcal{M}_1)$ (respectivamente $\text{Sup}(\mathcal{RM}_1)$).

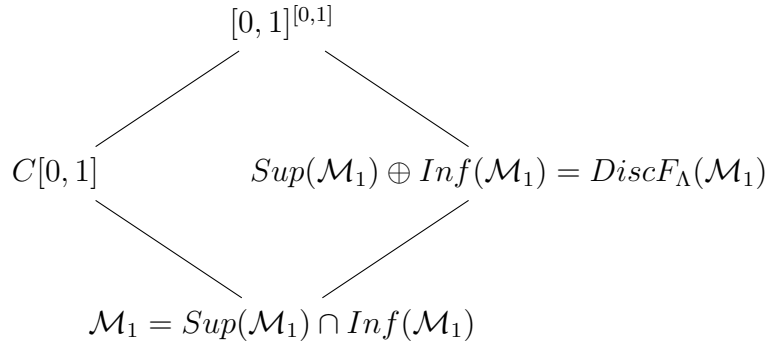
Como $C[0, 1]$ se encuentra en $\text{Sup}(\mathcal{RM}_1)$ (Teorema 5.23), por su versión dual también está en $\text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$, luego $C[0, 1] \subseteq \text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \cap \text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$, por lo que $\mathcal{RM}_1 \neq \text{Sup}(\mathcal{RM}_1) \cap \text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$. Esto genera una diferencia irreparable con respecto a $\mathcal{M}_1$, en la que se espera que la igualdad sea cierta, considerando que el Interrogante 6.1.6 y el Interrogante 6.1.7 sean ciertos.

Interrogante 6.1.11. $\mathcal{M}_1 = \text{Sup}(\mathcal{M}_1) \cap \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$.

Si además, el Interrogante 6.1.6, el Interrogante 6.1.7 y el Interrogante 6.1.8, literal 2, son verdaderos, se garantizaría entonces que

Interrogante 6.1.12. $\text{DiscF}_\Lambda(\mathcal{M}_1) = \text{Sup}(\mathcal{M}_1) \oplus \text{Inf}(\mathcal{M}_1)$.

En caso de garantizar el Interrogante 6.1.11 y el Interrogante 6.1.12, el esquema de MV-álgebras para el contexto de $\mathcal{M}_1$ quedaría así.



En cuanto al contexto de $\mathcal{RM}_1$, únicamente se hizo uso de familias countables, sabiendo que es posible usar familias no countables. Esta es una pregunta que puede explorarse, para saber si el análisis de $\text{Sup}(\mathcal{RM}_1)$ e $\text{Inf}(\mathcal{RM}_1)$ puede realizarse únicamente considerando familias numerables.

Pregunta 6.1.13. ¿Qué tipo de funciones se pueden obtener a partir de supremos de familias no countables de Riesz-McNaughton que no puedan obtenerse a partir de familias countables?

Siendo de interés saber qué tanto pueden extenderse las ideas del Teorema 4.2.10 (respectivamente 5.14) a los resultados del Teorema 5.23 y la Proposición 5.29, se espera que $DiscF(\mathcal{RM}_1)$ pueda extenderse a un conjunto que no considere únicamente funciones lineales a trozos, sino funciones continuas, motivado por el siguiente interrogante.

Interrogante 6.1.14. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua a trozos con finitas discontinuidades. Entonces $f \in Sup(\mathcal{RM}_1) \oplus Inf(\mathcal{RM}_1)$.*

Una última pregunta que surge a raíz de cómo se han construido las funciones discontinuas en el Teorema 4.2.10 (respectivamente 5.14), se da al considerar los puntos de la forma $(a, 0)$, que están íntimamente relacionados con la teoría de ideales. Para ello, vale la pena anotar que los conjuntos de funciones en $\mathcal{M}_1$ que se anulan en un único punto común, resultan ser ideales maximales de $\mathcal{M}_1$.

Pregunta 6.1.15. *¿Qué relación existe entre ideales maximales en $\mathcal{M}_1$ (respectivamente $\mathcal{RM}_1$) y las discontinuidades en puntos del tipo $(a, 0)$ como se presentan en el Teorema 4.2.10 (respectivamente 5.14)?*

6.2. Mayores dimensiones

De la teoría de MV-álgebras libres [5] se sabe que

Proposición. *Para cualquier función de McNaughton $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ con sus constituyentes lineales $p_1, \dots, p_k$, existe un conjunto $\mathcal{S}$ de simplejos compactos n -dimensionales con vértices racionales tales que*

- (i) *La unión de todos los simplejos en $\mathcal{S}$ coinciden con el cubo $[0, 1]^n$.*
- (ii) *Dos simplejos cualesquiera en $\mathcal{S}$ son, o disjuntos, o se intersectan en una cara común.*
- (iii) *Para cada simplejo $W \in \mathcal{S}$, existe algún índice $u \in \{1, \dots, k\}$ para el cual, bajo restricción a W , las dos funciones f y p_u coinciden.*

Aquí, los simplejos se entienden en el sentido usual, determinados por una cantidad de puntos y definidos como el politopo que coincide con la envolvente convexa de estos puntos, los cuales forman los vértices del politopo. En el caso $n = 1$, que es el que compete a este trabajo, estos simplejos

corresponden a intervalos de la forma $[a, b] \subseteq [0, 1]$, con los cuales se han realizado las particiones de $[0, 1]$ para realizar la escritura bajo funciones características. Que la naturaleza de los Λ –puntos sea racional se entrevé en que los vértices de los simplejos en $\mathcal{S}$ sean racionales. De esta manera, la noción de Λ –punto puede extenderse al contexto de mayores dimensiones; más aún, ya que funciones de McNaughton con representaciones locales distintas en mayores dimensiones pueden intersectarse ya no únicamente en puntos, se extiende el tipo de resultados que pueden obtenerse.

Para ilustrar lo anterior, en la Figura 10 se visualiza que existen familias de funciones de McNaughton en dos variables que se intersectan en un único punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, considerando a las funciones de McNaughton $(x, y) \rightarrow y$ (rojo), $(x, y) \rightarrow x$ (cian), $(x, y) \rightarrow 1 - y$ (púrpura) y $(x, y) \rightarrow 1 - x$ (verde); se visualiza además que su supremo tiene a este punto de intersección como punto de particular interés. En la Figura 11 se visualiza que existen familias de funciones de McNaughton en dos variables que se intersectan en una cantidad infinita de puntos, como lo es toda la recta truncada $y = \frac{1}{2}$, considerando las funciones de McNaughton $(x, y) \rightarrow y$ (rojo) y $(x, y) \rightarrow 1 - y$ (azul); se visualiza además que su supremo tiene a esta recta de intersección como lugar de particular interés.

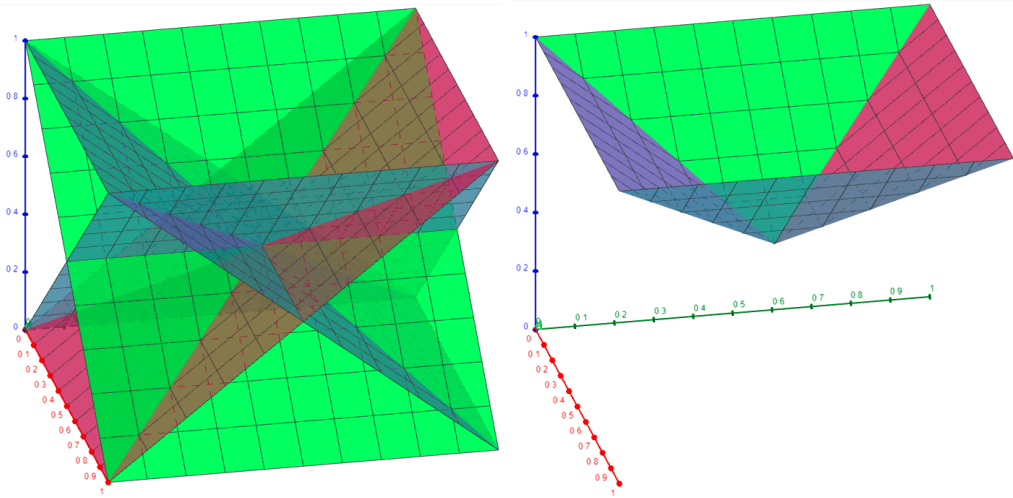


Figura 10. Funciones en $\mathcal{M}_2$ que se intersectan en un punto.

Lo anterior justifica que la noción de Λ –punto se extienda a la noción de Λ –símplice, y se reformule, junto a la noción de $\hat{\Lambda}$ –punto, en términos de

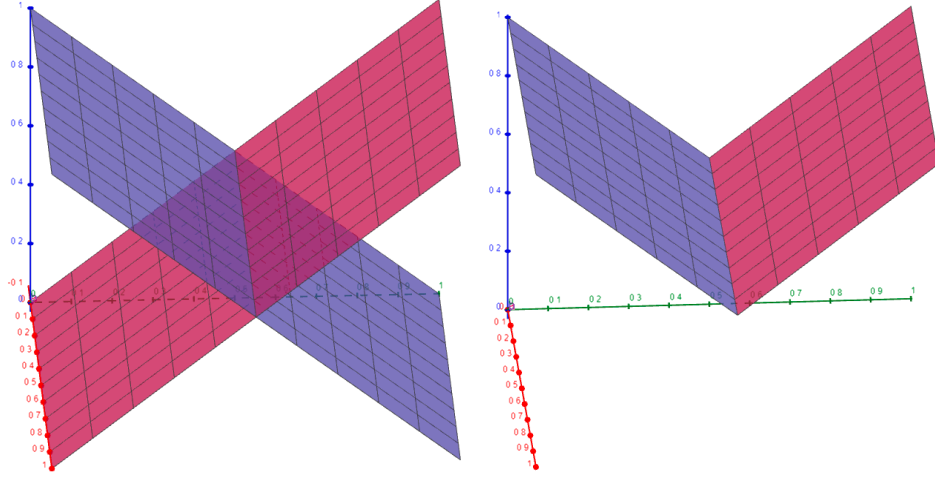


Figura 11. Funciones en $\mathcal{M}_2$ que se intersectan en una recta.

símplices, pues como se se observa en la Figura 11, las funciones de McNaughton consideradas se intersectan en puntos no racionales, como por ejemplo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Una formulación apropiada de los Λ —símplices podría permitir extender los resultados de este trabajo en dimensiones superiores, y sería posible mostrar: i) en la misma línea del Teorema 4.2.10 (respectivamente 5.14), que se pueden construir discontinuidades sobre símplexes de cualquier dimensión menor, y; ii) en la misma línea del Teorema 5.23, que cualquier función continua en $C[0, 1]^n$ puede obtenerse como el límite uniforme de una sucesión creciente de funciones de Riesz-McNaughton.

Conclusiones

En este trabajo, hemos desarrollado un marco bajo el cual estudiar a las funciones de McNaughton y de Riesz-McNaughton de manera puntual, y qué puntos son alcanzables en $[0, 1]^2$ a través de límites de sucesiones de estas. También se han definido los conjuntos $Sup(\mathcal{M}_1)$ y $Sup(\mathcal{RM}_1)$ de supremos generados por familias arbitrarias de funciones de McNaughton y Riesz-McNaughton, respectivamente, y se han considerado conjuntos que surgen de estos que admiten estructura de subálgebra de $[0, 1]^{[0, 1]}$.

En el Capítulo 4 se han definido los Λ -puntos y los $\hat{\Lambda}$ -puntos para las funciones de McNaughton, y se han caracterizado los Λ -puntos, que resultan ser aquellos puntos racionales que permiten los quiebres de cualquier función de McNaughton. Se ha mostrado en el Teorema 4.2.10 que en $Sup(\mathcal{M}_1)$ se pueden construir explícitamente sucesiones crecientes de funciones de McNaughton que generen discontinuidades inferiores en Λ -puntos, pero no es posible construir discontinuidades superiores. Se define $Inf(\mathcal{M}_1)$ y se demuestra que se comporta como dual de $Sup(\mathcal{M}_1)$, a partir del cual se construyen al conjunto $Sup(\mathcal{M}_1) \oplus Inf(\mathcal{M}_1)$, y a las subálgebras no triviales de $[0, 1]^{[0, 1]}$, $Sup(\mathcal{M}_1) \cap Inf(\mathcal{M}_1)$ y $DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$.

En el Capítulo 5 se pierde la noción de Λ -punto y de $\hat{\Lambda}$ -punto, al poderse encontrar infinitas representaciones laterales de funciones de Riesz-McNaughton que pasen por cualquier punto de $[0, 1]^2$. Se realizan las extensiones de las definiciones y resultados en el contexto de $\mathcal{M}_1$ y se presenta el Teorema 5.14, que extiende el resultado del Teorema 4.2.10, pero esta vez con construcciones explícitas más libres. Se incorporan las nociones de desplazamientos inferiores, y con ello se demuestra que existen sucesiones crecientes de Riesz-McNaughton que convergen uniformemente a cualquier función continua de $C[0, 1]$; infortunadamente la construcción de esta familia no es explícita. Se finaliza realizando las construcciones y los resultados que involucran a $Sup(\mathcal{RM}_1)$ e $Inf(\mathcal{RM}_1)$ por medio de la unión, la intersección y la suma $\oplus$, y presentando al conjunto $DiscF(\mathcal{RM}_1)$ como equivalente a $DiscF_\Lambda(\mathcal{M}_1)$, el cual también es una subálgebra no trivial de $[0, 1]^{[0, 1]}$.

El concepto de Λ -punto, así como sus propiedades, muestra ser eficiente, pues permite analizar puntualmente a las funciones de McNaughton, así como los supremos generados a partir de estas. Sin embargo, el enfoque desarrollado en este trabajo hace uso de estos puntos de manera aislada, siendo necesario

extender los análisis a familias más generales de Λ –puntos. No sólo eso, también resulta de interés estudiar más detalladamente qué comportamientos ocurren para estos supremos en los $\hat{\Lambda}$ –puntos, cuya naturaleza es un poco más esquiva. Por otra parte, y de manera similar a supremos en $Sup(\mathcal{M}_1)$, vale la pena ahondar en la línea de caracterizar a $Sup(\mathcal{RM}_1)$, pues esto podría generar un mejor entendimiento de algunos interrogantes que han surgido a lo largo del trabajo, y que motivan conexiones con otras líneas de trabajo.

Apéndices

Apéndice 1: Ejemplo 4.2.12

La función $f = \mathbf{1}$ es claramente de McNaughton, y los tramos para la construcción de la función h son, trivialmente,

$$\begin{aligned} C_1 & : 1 & \text{ en } & \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ C_2 & : 1 & \text{ en } & \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

1. Para $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ por la izquierda, el punto $Q_n^-(a_n^-, f(a_n^-))$ consta de

$$\begin{aligned} a_n^- &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, & n \in \mathbb{N} \\ C_1(a_n^-) &= 1, \end{aligned}$$

con pendiente

$$m_n^- = \frac{0 - C_1(a_n^-)}{\frac{1}{2} - a_n^-} = \frac{-1}{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)} = -2n.$$

La ecuación de la recta que pasa por P y Q_n^- se construye como

$$\begin{aligned} y - 0 &= -2n \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \rightarrow y &= -2nx + n & \text{ en } & \left[a_n^-, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

2. Para $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ por la derecha, el punto $Q_n^+(a_n^+, f(a_n^+))$ consta de

$$\begin{aligned} a_n^+ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, & n \in \mathbb{N} \\ C_2(a_n^+) &= 1, \end{aligned}$$

con pendiente

$$m_n^+ = \frac{C_2(a_n^+) - 0}{a_n^+ - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}} = 2n.$$

La ecuación de la recta que pasa por P y Q_n^+ se construye como

$$y - 0 = 2n \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow y = 2nx - n \quad \text{en} \quad \left[\frac{1}{2}, a_n^+ \right].$$

El cálculo de las rectas generadas se da en este caso de manera amena debido a que la función h que se ha querido simular se ha pensado para ilustrar el proceso general que se puede seguir. Funciones más complejas se abordan de igual manera, con diferencia únicamente en los valores con los que se realizan los cálculos. Ejemplo de cálculos más elaborados se encuentran en el [Apéndice 2](#), dedicado a la función presentada en el [Ejemplo 5.16](#).

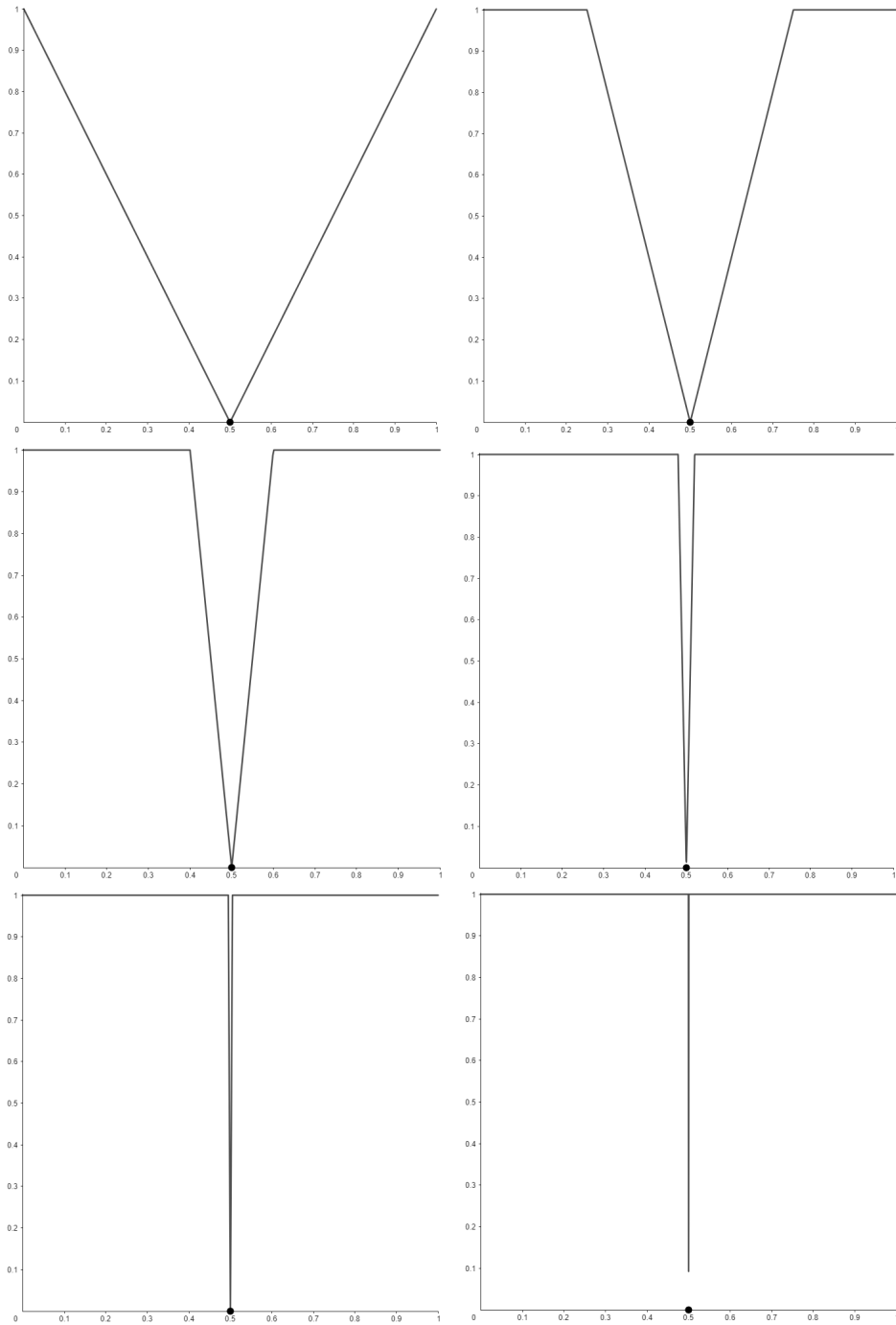


Figura 12. Simulaciones para Ejemplo 4.2.12 con $n = 1, 2, 5, 25, 100, 1000$.

Apéndice 2: Ejemplo 5.16

Las funciones f_1 y f_2 se construyen como se indica en el Corolario 5.7, y los tramos para la construcción de la función h son los siguientes

$$\begin{aligned} C_1 &: x + \frac{1}{3} && \text{en } \left[0, \frac{1}{3}\right], \\ C_2 &: -\frac{6+9\sqrt{2}}{7}x + \frac{9+3\sqrt{2}}{7} && \text{en } \left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ C_3 &: 2x - \sqrt{2} && \text{en } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

1. Para $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ por la izquierda, el punto $Q_{1,n}^-(a_{1,n}^-, f(a_{1,n}^-))$ consta de

$$a_{1,n}^- = \frac{1}{3} - \frac{1}{n}, \quad n \geq 4$$

$$C_1(a_{1,n}^-) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{n},$$

con pendiente

$$m_{1,n}^- = \frac{\frac{1}{2} - C_1(a_{1,n}^-)}{\frac{1}{3} - a_{1,n}^-} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right)} = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -\frac{1}{6}n + 1.$$

La ecuación de la recta que pasa por P y $Q_{1,n}^-$ se construye como

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} &= \left(-\frac{1}{6}n + 1\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) \\ \rightarrow \quad y &= \left(-\frac{1}{6}n + 1\right)x + \frac{1}{18}n + \frac{1}{6} \quad \text{en } \left[a_{1,n}^-, \frac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

2. Para $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ por la derecha, el punto $Q_{1,n}^+(a_{1,n}^+, f(a_{1,n}^+))$ consta de

$$a_{1,n}^+ = \frac{1}{3} + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$C_2(a_{1,n}^+) = -\frac{6+9\sqrt{2}}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right) + \frac{9+3\sqrt{2}}{7} = 1 - \frac{6+9\sqrt{2}}{7} \frac{1}{n},$$

con pendiente

$$m_{1,n}^+ = \frac{C_2(a_{1,n}^+) - \frac{1}{2}}{a_{1,n}^+ - \frac{1}{3}} = \frac{\left(1 - \frac{6+9\sqrt{2}}{7} \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}n - \frac{6+9\sqrt{2}}{7}.$$

La ecuación de la recta que pasa por P y $Q_{1,n}^+$ se construye como

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{2}n - \frac{6+9\sqrt{2}}{7}\right) \left(x - \frac{1}{3}\right) \\ \rightarrow y &= \left(\frac{1}{2}n - \frac{6+9\sqrt{2}}{7}\right) x - \frac{1}{6}n + \frac{11+6\sqrt{2}}{14} \quad \text{en} \quad \left[\frac{1}{3}, a_{1,n}^+\right]. \end{aligned}$$

3. Para $R\left(1, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ por la izquierda, el punto $Q_{2,n}^-(a_{2,n}^-, f(a_{2,n}^-))$ consta de

$$\begin{aligned} a_{2,n}^- &= 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 4 \\ C_3(a_{2,n}^-) &= 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} - \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

con pendiente

$$\begin{aligned} m_{2,n}^- &= \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - C_3(a_{2,n}^-)}{1 - a_{2,n}^-} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(2 - \sqrt{2} - \frac{2}{n}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\ &= \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) n + 2. \end{aligned}$$

La ecuación de la recta que pasa por P y $Q_{2,n}^-$ se construye como

$$\begin{aligned} y - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \left(\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) n + 2\right) (x - 1) \\ \rightarrow y &= \left(\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) n + 2\right) x + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) n - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{en} \quad \left[a_{1,n}^-, \frac{1}{3}\right]. \end{aligned}$$

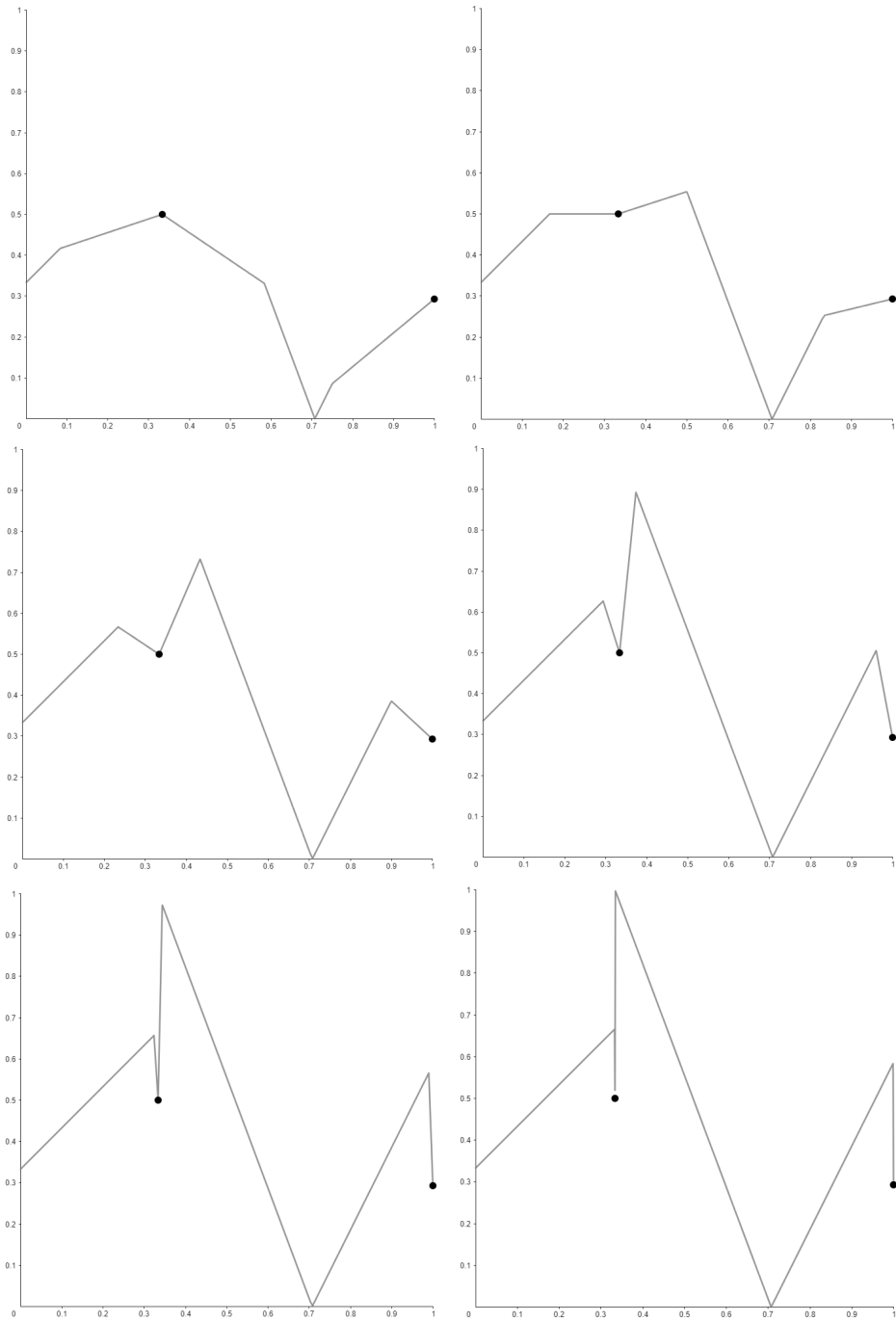


Figura 13. Simulaciones para Ejemplo 5.16 con $n = 4, 6, 10, 25, 100, 1000$.

Apéndice 3: Ejemplo 5.24

El Teorema de aproximación garantiza la existencia de una sucesión suficiente para la aproximación, mas no única, y presenta un método para construirla. Este método, al ser recursivo, consume muchos más cálculos que los presentados en el Apéndice 1 y el Apéndice 2 asociados a los Teoremas 4.2.10 y 5.14 respectivamente. Se presentarán las dos primeras iteraciones de construcción de la función

$$f(x) = \left(16 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4\right) \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) + (-16(x-1)^4 + 1) \chi_{(\frac{1}{2}, 1]}(x)$$

del Ejemplo 5.24, siguiendo el método presentado en el Teorema 5.23. Se seleccionarán valores apropiados para ε_n que permitan visualizar los cálculos correspondientes a cubrimientos y las particiones correspondientes. Como dato importante, nótese que la función alcanza el valor mínimo 0 en $x = \frac{1}{2}$ y el valor máximo 1 en $x = 0$ y $x = 1$, y al ser continua, su rango es todo $[0, 1]$.

1. **Iteración** $n = 1$. Tómese $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$. Como $0 \leq f \leq 1$, entonces

$$f(x) \in \left(f(0) - \frac{3}{2}, f(0) + \frac{3}{2}\right) \cap [0, 1] = [0, 1],$$

$$f(x) \in \left(f(1) - \frac{3}{2}, f(1) + \frac{3}{2}\right) \cap [0, 1] = [0, 1],$$

para todo $x \in [0, 1]$, por lo que puede tomarse el cubrimiento finito $\{[0, 1), (0, 1]\}$, que genera la partición $P_1 = \{0, 1\}$ de $[0, 1]$. La única función que tiene por partición estándar a P_1 y que coincide con f en P_1 es $g_1 = \mathbf{1}$, y como f alcanza el valor 0 en $x = \frac{1}{2}$, se tiene que $P_1^\downarrow(f) = g_{1\downarrow 1} = \mathbf{0}$.

2. **Iteración** $n = 2$. Tómese $\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$. El rango de f puede obtenerse con el cubrimiento $\{[0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, 1]\}$, los cuales satisfacen que

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right] = \left(f(0) - \frac{2}{3}, f(0) + \frac{2}{3}\right) \cap [0, 1] = \left(f(1) - \frac{2}{3}, f(1) + \frac{2}{3}\right) \cap [0, 1],$$

$$\left[0, \frac{2}{3}\right) = \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}, f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\right) \cap [0, 1].$$

Se observa que $\frac{1}{2}$ es una imagen que pertenece a ambos elementos del cubrimiento de la imagen, por lo que vale la pena tomar valores cercanos a donde ocurre esto para construir el cubrimiento del dominio. Para ello

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} & \longleftrightarrow 16 \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad -16(x-1)^4 + 1 = \frac{1}{2} \\ & \longleftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \quad \vee \quad x = 1 - \frac{1}{2\sqrt[4]{2}} \\ & \approx 0.07955 \dots \quad \quad \quad \approx 0.57955 \dots \end{aligned}$$

Tómese los valores $\xi_1 = 0.079 = \frac{79}{1000} < \frac{1}{2}$, $\xi_2 = 0.08 = \frac{2}{25} < \frac{1}{2}$, $\xi_3 = 0.579 = \frac{579}{1000} > \frac{1}{2}$ y $\xi_4 = 0.58 = \frac{29}{50}$. Teniendo en cuenta que $\xi_1 < \xi_2$ y $\xi_3 < \xi_4$, es fácil verificar que

- i. $f(\xi_2) - \frac{1}{3} > 0$, luego $f(\xi_2) > \frac{1}{3}$. Como f es decreciente en $[0, \frac{1}{2}]$ y $f(0) = 1$, se garantiza que

$$x \in [0, \xi_2] \rightarrow f(x) \in \left(\frac{1}{3}, 1\right];$$

en particular,

$$x \in [0, \xi_1] \vee x \in [\xi_1, \xi_2] \rightarrow f(x) \in \left(\frac{1}{3}, 1\right].$$

- ii. $f(\xi_1) - \frac{2}{3} < 0$, luego $f(\xi_1) < \frac{2}{3}$. Como f es decreciente en $[0, \frac{1}{2}]$ y $f(\frac{1}{2}) = 0$, se garantiza que

$$x \in \left[\xi_1, \frac{1}{2}\right] \rightarrow f(x) \in \left[0, \frac{2}{3}\right),$$

en particular,

$$x \in [\xi_1, \xi_2] \vee x \in \left[\xi_2, \frac{1}{2}\right] \rightarrow f(x) \in \left[0, \frac{2}{3}\right).$$

- iii. $f(\xi_4) - \frac{2}{3} < 0$, luego $f(\xi_4) < \frac{2}{3}$. Como f es creciente en $[\frac{1}{2}, 1]$ y $f(\frac{1}{2}) = 0$, se garantiza que

$$x \in \left[\frac{1}{2}, \xi_4\right] \rightarrow f(x) \in \left[0, \frac{2}{3}\right);$$

en particular,

$$x \in \left[\frac{1}{2}, \xi_3 \right] \vee x \in [\xi_3, \xi_4] \quad \rightarrow \quad f(x) \in \left[0, \frac{2}{3} \right).$$

iv. $f(\xi_3) - \frac{1}{3} > 0$, luego $f(\xi_3) > \frac{1}{3}$. Como f es creciente en $[\frac{1}{2}, 1]$ y $f(1) = 1$, se garantiza que

$$x \in [\xi_3, 1] \quad \rightarrow \quad f(x) \in \left(\frac{1}{3}, 1 \right],$$

en particular,

$$x \in [\xi_3, \xi_4] \vee x \in [\xi_4, 1] \quad \rightarrow \quad f(x) \in \left(\frac{1}{3}, 1 \right].$$

Estas consideraciones muestran que el cubrimiento del dominio puede tomarse como $\{[0, \xi_2), (\xi_1, \xi_4), (\xi_3, 1]\}$, y la partición asociada será $P_2 = \{0, \xi_1, \xi_2, \frac{1}{2}, \xi_3, \xi_4, 1\} = \{\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6\}$. La función de Riesz-McNaughton g_2 que tiene por partición estándar P_2 y coincide con f en P_2 , se construye tramo a tramo, por medio de las ecuaciones de las rectas que conectan cada pareja de puntos consecutivos. Las imágenes corresponden a

$$\begin{aligned} f(\zeta_0) &= 1, \\ f(\zeta_1) &= \frac{421^4}{2^8 \times 5^{12}}, \\ f(\zeta_2) &= \frac{3^4 \times 7^4}{5^8}, \\ f(\zeta_3) &= 0, \\ f(\zeta_4) &= \frac{11 \times 29 \times 41 \times 13921 \times 182427241}{2^8 \times 5^{12}}, \\ f(\zeta_5) &= \frac{2^4 \times 13 \times 23 \times 41}{5^8}, \\ f(\zeta_6) &= 1, \end{aligned}$$

por lo que g_2 está dada por

$$g_2(x) = 1\chi_{\{0\}} + \sum_{i=0}^5 \left(\frac{f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} x + \frac{\zeta_{i+1}f(\zeta_i) - \zeta_i f(\zeta_{i+1})}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \right) \chi_{(\zeta_i, \zeta_{i+1}]}. \quad \chi_{(\zeta_i, \zeta_{i+1}]}$$

Para ilustrar un poco mejor la forma de g_2 , se puede ver que

$$\begin{aligned} g_2(x) \approx & (-6.25x + 1)\chi_{[0, \zeta_1]} + (-4.76x + 0.88)\chi_{(\zeta_1, \zeta_2]} + \\ & + (-1.19x + 0.59)\chi_{(\zeta_2, \zeta_3]} + (6.30x - 3.15)\chi_{(\zeta_3, \zeta_4]} + \\ & + (4.76x - 2.26)\chi_{(\zeta_4, \zeta_5]} + (1.19x - 0.19)\chi_{(\zeta_5, 1]}. \end{aligned}$$

Para determinar el desplazamiento inferior óptimo asociado a P_2 , realícense algunas observaciones que facilitarán el proceso. En primera instancia, la función f es cóncava en $[\frac{1}{2}, 1]$, por lo que en esta sección, el desplazamiento inferior parcial de g_2 es ella misma; así pues, $P_2^\downarrow(f)$ estará totalmente determinada por el comportamiento de la función en $[0, \frac{1}{2}]$. En este tramo, la función es convexa y derivable en el sentido de $\mathbb{R}$, por lo que puede hallarse el parámetro del desplazamiento calculándose en cada intervalo de la partición, el punto en el que f posee tangente paralela a g en ese intervalo, de la misma manera que se realiza en el Análisis. Para esto, nótese que

$$\frac{df|_{[0, \frac{1}{2}]}}{dx}(x) = 64 \left(x - \frac{1}{2} \right)^3,$$

y para $0 \leq i \leq 2$ se toma por x_i a la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{df|_{[0, \frac{1}{2}]}}{dx}(x) &= \frac{f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \\ \rightarrow \quad x_i &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i}}, \end{aligned}$$

la cual recae en el intervalo $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$. El parámetro de desplazamiento que aporta este intervalo será

$$\begin{aligned} \eta_i &= g_2(x_i) - f(x_i) \\ &= \frac{f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} x_i + \frac{\zeta_{i+1} f(\zeta_i) - \zeta_i f(\zeta_{i+1})}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} - 16 \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^4 \\ &= \frac{f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \left(\frac{1}{2} - \zeta_i + \frac{3}{16} \sqrt[3]{\frac{f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i}} \right) + f(\zeta_i). \end{aligned}$$

El parámetro de desplazamiento buscado será $\eta = \max\{\eta_0, \eta_1, \eta_2\}$, para el cual se puede verificar que $\eta = \eta_2$, y por tanto $P_2^\downarrow(f)$ viene dada por

$$\begin{aligned} P_2^\downarrow(f)(x) &= \sup\{P_1^\downarrow(f), g_{2\downarrow\eta}\}(x) = \sup\{\mathbf{0}, g_{2\downarrow\eta}\}(x) = g_{2\downarrow\eta}(x) \\ &= \max \left\{ \sum_{i=0}^5 \left(\frac{f(\zeta_{i+1}) - f(\zeta_i)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} x + \frac{\zeta_{i+1}f(\zeta_i) - \zeta_i f(\zeta_{i+1})}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} - \eta_2 \right) \chi_{(\zeta_i, \zeta_{i+1}]}(x) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \eta_2) \chi_{\{0\}}(x), 0 \right\} \end{aligned}$$

Numéricamente se puede ilustrar que

$$\begin{array}{lll} x_0 \approx 0.03950 \in [\zeta_0, \zeta_1], & \eta_0 \approx 0.03361 \\ x_1 \approx 0.07946 \in [\zeta_1, \zeta_2], & \eta_1 \approx 0.00133, & \text{y} \\ x_2 \approx 0.23508 \in [\zeta_2, \zeta_3], & \eta_2 \approx 0.23145 \end{array}$$

$$\begin{aligned} P_2^\downarrow(f)(x) \approx & (-6.25x + 0.7686) \chi_{[0, \zeta_1]} + (-4.76x + 0.6486) \chi_{(\zeta_1, \zeta_2]} + \\ & + (-1.19x + 0.3586) \chi_{(\zeta_2, 0.30134]} + 0 \chi_{(0.30134, 0.53673]} + \\ & + (6.30x - 3.3814) \chi_{(0.53673, \zeta_4]} + (4.76x - 2.4914) \chi_{(\zeta_4, \zeta_5]} + \\ & + (1.19x - 0.4214) \chi_{(\zeta_5, 1]}. \end{aligned}$$

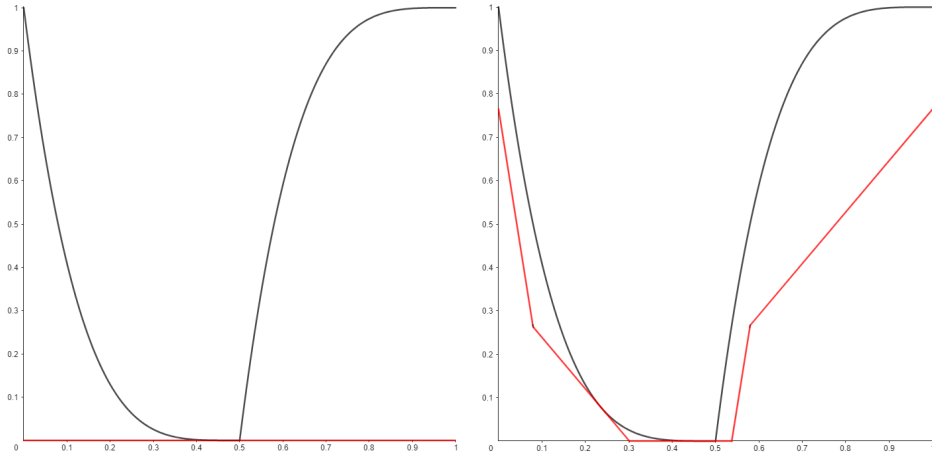


Figura 14. Simulaciones en rojo para Ejemplo 5.24 con $n = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$, $P_1 = \{0, 1\}$, y, $n = 2$, $\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$, $P_2 = \left\{0, \frac{79}{1000}, \frac{2}{25}, \frac{1}{2}, \frac{579}{1000}, \frac{29}{50}, 1\right\}$.

Referencias

- [1] H. Bauer. *Measure and Integration Theory*. De Gruyter Studies in Mathematics, 2001.
- [2] A. Bede, B.; Di Nola. Elementary calculus in Riesz MV-álgebras. *International Journal of Approximate Reasoning*, 36:129–149, 2004.
- [3] H.P. Burris, S.; Sankappanavar. *A Course in Universal Algebra*. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 1981.
- [4] C. Chang. Algebraic analysis of many valued logic, 467–490. *Transactions of the American Mathematical Society*, 88:467–490, 1958.
- [5] I.; Mundici D. Cignoli, R.; D’Ottaviano. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [6] L. de la Pava. *On MV-Topologies*. PhD thesis, Universidad del Valle, 2018.
- [7] A. Di Nola, A.; Lettieri. Coproduct MV-algebras, nonstandard reals, and Riesz spaces. *Journal of Algebra*, 185:605–620, 1996.
- [8] B.; Leuştean I. Di Nola, A.; Gerla. Adding real coefficients to lukasiewicz logic: an application to neural networks. *Fuzzy Logic and Applications*, pages 77–85, 2013.
- [9] G.; Vitale G. Di Nola, A.; Lenzi. Riesz-McNaughton functions and Riesz MV-álgebras of nonlinear functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 311:1–14, 2016.
- [10] I. Di Nola, A.; Leuştean. Lukasiewicz logic and Riesz spaces. *Soft Computing*, 18:2349—2363, 2014.
- [11] I. Di Nola, A.; Leustean. Riesz MV-algebras and their logic. *Proceedings of EUSFLAT-LFA*, pages 140–145, 2011.
- [12] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, 1966.
- [13] R. Dummit, D.; Foote. *Abstract Algebra*. Prentice Hall, 1991.
- [14] J.; Taschner R. Hlawka, E.; Schoißengeier. *Geometric and Analytic Number Theory*. Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics, 1991.

- [15] E. Lima. *Curso de Análise Vol. 1*. Colección Textos del IMCA, 1997.
- [16] L. Marra, V.; Spada. The dual adjunction between MV-algebras and Tychonoff spaces. *Studia Logica*, 100:253–278, 2012.
- [17] C. Russo. An extension of Stone Duality to fuzzy topologies and MV-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, 303:80–96, 2015.
- [18] H. Schaefer. *Banach Lattices and Positive Operators*. Springer, 1974.