

MEDIDAS VECTORIALES Y ANÁLISIS ARMÓNICO

LILIANA POSADA VERA



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
DICIEMBRE DE 2018

MEDIDAS VECTORIALES Y ANÁLISIS ARMÓNICO

TESIS DE DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LILIANA POSADA VERA

**JUAN CARLOS MUÑOZ, Ph.D.
UNIVERSIDAD DEL VALLE
DIRECTOR DE TESIS**

**JULIO DELGADO, Ph.D.
IMPERIAL COLLEGE LONDON
CO-DIRECTOR DE TESIS**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE DOCTORADO EN
CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
DICIEMBRE DE 2018**

*Dedicada al profesor
Guillermo Restrepo Sierra ...
Mi maestro y mentor.*

*Cuando era niño me encantaba ir
a la escuela. El mismo instructor
nos enseñó a leer, escribir y hacer
aritmética, cantando (él tocó un pe-
queño violín para acompañarnos), la
arqueología del hombre prehistórico y
el descubrimiento del fuego. No re-
cuerdo que nadie se haya aburrido
en la escuela. Había la magia de los
números y la magia de las palabras
signos y sonidos ...
A. Grothendieck: Récoltes et Sema-
illes.*

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer de manera muy especial a la Universidad del Valle quien me permitió culminar mis estudios de doctorado.

A la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia por el apoyo que me brindaron para realizar comenzar mis estudios doctorales en la Universidad del Valle.

A los profesores Gonzalo García Camacho y Carlos Alexis Gómez por su apoyo total y confiar en mí para culminar mis estudios.

Al profesor Guillermo Restrepo, quien fuese mi maestro y director de tesis durante la maestría y parte del doctorado. En tú honor va este documento. Gracias por acompañarme hasta el final.

A mi director Juan Carlos Muñoz por aceptarme y ayudarme a encontrar el apoyo que facilitaría la culminación de este trabajo.

A ti Julio Delgado: Todo, y como diría Mario Cerati: *Gracias Totales*. No tengo mejor forma de describir mi agradecimiento. Gracias por ser quien eres como persona y como académico y por enseñarme tanto de ambas. Nuevamente gracias.

Al profesor Michael Rushansky por su gestión y recibimiento en Londrés para la realización de mi pasantía.

A los jurados, los profesores Michael Rushansky, Guillermo Rodriguez Blanco y Jairo Roa por sus importantes observaciones y sugerencias que ayudaron enormemente a la claridad del documento final de la tesis.

A mis amigos Michell Gómez, Yéferson Fernández, Diana Narváez y Andrés Felipe Tello por su dedicación y tiempo. Gracias por su amistad incondicional a lo largo de todos estos años.

A John Ericson por la edición de este documento.

A Julian y su familia...a mi familia...Infinitas gracias.

Índice general

Lista de símbolos	v
Resumen	ix
Introducción	xi
1 Producto Tensorial de Espacios de Banach	1
1.1 Producto Tensorial y Normas Tensoriales	1
1.2 Normas Tensoriales	8
1.3 Algunas Conexiones del Producto Tensorial con otras Áreas	12
2 Medidas Vectoriales, Integración Vectorial y los Espacios L^p	15
2.1 Medidas Vectoriales	16
2.2 Funciones Medibles	19
2.3 Integral de Bochner	20
2.4 Integral de Bartle - Lewis.	24
2.5 Integral de Stefánsson.	28
2.6 Integral de Bartle	30
2.7 Medidas Vectoriales Radonianas y Aportes	34
2.8 Espacios L^p	42
3 Convergencia de Medidas y Análisis de Fourier	59
3.1 Convergencia Fuerte de Medidas	59
3.2 Convergencia Débil de Medidas	62
3.3 Transformada de Fourier de una Medida Vectorial	64
3.4 Fourier: Integral de Bochner	68
3.5 Fourier: Integral de Bartle-Lewis	72
4 Medidas Solución y Ecuaciones Diferenciales	77
4.1 Motivación	77
4.2 Medidas Solución	79
5 Convergencia Débil de Redes de Medidas Radonianas	85
5.1 Retículos de Banach	86
5.2 La ϵ -norma como Norma Reticular.	96

5.3	Medidas Positivas	98
5.4	Medidas Radonianas, Apretadas y Suaves	100
5.5	Teorema de la Convergencia Diagonal	103
5.6	Convergencia Débil del Producto de Convolución	106
Conclusiones y Perspectivas de Investigación		111
Índice alfabético		113
Bibliografía		117

Lista de símbolos

$\mathbb{K}$	El campo de los números reales $\mathbb{R}$ o el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.
X^*	Dual algebraico del espacio vectorial X .
$\mathcal{B}(X \times Y)$	El espacio vectorial de las funciones bilineales de $X \times Y$ en $\mathbb{K}$.
$X \otimes Y$	Producto tensorial algebraico de X e Y .
$\mathcal{B}(X \times Y, Z)$	El espacio vectorial de las funciones bilineales de $X \times Y$ en Z .
$\mathcal{F}(\Omega, X)$	El conjunto de todas las funciones de Ω en X con la estructura inducida por X .
$(\Omega, \mathcal{A})$	Espacio medible.
X'	El dual topológico de X .
α'	Norma dual de α .
$X \otimes_\alpha Y$	El producto tensorial de X e Y con la norma α .
$X \widehat{\otimes}_\alpha Y$	El completante del producto tensorial de X e Y con la norma α .
$X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$	El completante del producto tensorial inyectivo de X e Y .
$X \widehat{\otimes}_\pi Y$	El completante del producto tensorial proyectivo de X e Y .
$\mathcal{C}(K)$	Las funciones continuas de K compacto en $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}(K, X)$	Las funciones continuas de K compacto en X .
c_0	El espacio de las sucesiones que convergen a cero.
$\mathcal{G}(X, Y)$	Los operadores compactos de X en Y .
$\alpha \backslash$	norma tensorial inyectiva a derecha.
$/\alpha$	norma tensorial inyectiva a izquierda.
$\alpha /$	norma tensorial proyectiva a derecha.
$\backslash \alpha$	norma tensorial proyectiva a izquierda.
$\mathcal{M}(\mathcal{A}, X)$	El espacio de las medidas vectoriales de $\mathcal{A}$ en X .
$\mathcal{M}_{va}(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales de variación acotada.
$\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales σ -aditivas.
$\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales σ -aditivas de variación acotada.

$\mathcal{M}_{\sigma,rad}(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales radonianas que son σ -aditivas.
$\mathcal{M}_{\sigma,rad}^+(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales radonianas que son σ -aditivas y positivas.
$\mathcal{M}_{RN}(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales que tienen la propiedad de Radon-Nikodym.
$\mathcal{M}_{\mu}(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales que son μ -continuas.
$\mathcal{M}_{\mu,rrc}(\mathcal{A}, X)$	El espacio vectorial de las medidas vectoriales que son μ -continuas con rango relativamente compacto.
$L(H)$	Espacio de las funciones lineales y continuas de H en H .
$L(X, Y)$	Espacio de las funciones lineales y continuas de X en Y .
$L^p(\mu, X)$	Espacios Lebesgue-Bochner.
$L^p(\nu)$	Espacios de las funciones de valor real p -integrables con respecto a ν .
$L_w^p(\nu)$	Espacios de las funciones de valor real débilmente integrables de orden p con respecto a ν .
$L^p(\nu, X, Y)$	Espacio de las funciones vector-valuadas, ν -medibles que son $\otimes$ -integrables de orden p .
$L_w^p(\nu, X, Y)$	Espacio de las funciones vector-valuadas, ν -medibles que son débilmente $\otimes$ -integrables de orden p .
$bor(T)$	La σ -álgebra de los borelianos de T .
$\mathcal{C}_b(T)$	El espacio de las funciones continuas y acotadas de T en $\mathbb{R}$.
$\widehat{\nu}$	Transformada de Fourier de una medida vectorial.
δ_a	Medida vectorial Delta de Dirac centrada en a .
$\widehat{f}$	Transformada de Fourier de una función.
$\mathcal{F}(f)$	Transformada de Fourier de una función.
$\mathcal{A}_c$	La álgebra generada por los cerrados de un espacio topológico normal Ω .
$\sigma(\mathcal{A}_c)$	La σ -álgebra generada por $\mathcal{A}_c$.
$\mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$	El espacio de las medidas regulares y acotadas con la norma de la variación.
$\mathcal{M}_{r,ac}(\sigma(\mathcal{A}_c))$	El espacio de las medidas regulares σ -aditivas y acotadas con la norma de la variación.
$\mathcal{M}_{r,pro}(\mathcal{A}_c)$	El espacio de las medidas regulares probabilísticas sobre $\mathcal{A}_c$.
$I = [0, T]$	El intervalo $[0, T]$ con $T < \infty$.
$L^1(\lambda, \mathcal{C}_b(\Omega))$	El espacio Lebesgue-Bochner de las funciones vector valuadas de I en $\mathcal{C}_b(\Omega)$ con la medida de Lebesgue.
$L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c))$	El espacio de las funciones débilmente medibles de I en $\mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$.
A	El generador infinitesimal de un semigrupo analítico sobre un espacio de Banach.

A^α	La potencia fraccionaria del operador A de orden α .
$\mathbf{B}(X)$	El espacio de las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$.
$\mathcal{H}(H_1, H_2)$	El espacio de los operadores de Hilbert Schmidt de H_1 en H_2 .
$\mathcal{U}_b(T, X)$	El espacio de las funciones acotadas y uniformemente continuas de T en X .
$\mathcal{U}_b(T)$	El espacio de las funciones acotadas y uniformemente continuas de T en $\mathbb{R}$.

Resumen

En este manuscrito nos hemos centrado en el estudio de propiedades fundamentales de la teoría de medidas vectoriales: integración vectorial, diferentes tipos de convergencia de medidas vectoriales, espacios L^p asociados a medidas vectoriales, análisis armónico y algunas aplicaciones a las ecuaciones diferenciales.

Dicho estudio ha requerido del desarrollo de otros conceptos como el producto tensorial de espacios de Banach, medida producto de medidas vectoriales, Teorema de Fubini, producto de convolución y producto tensorial de retículos de Banach.

Introducción

La motivación principal de esta tesis es el desarrollo del análisis armónico para medidas vectoriales. Nuestro objetivo es establecer las diferentes conexiones de las medidas vectoriales en el campo de la teoría de la medida y las ecuaciones diferenciales: Integración vectorial, espacios L^p , transformada de Fourier, convergencia de medidas y ecuaciones diferenciales de dimensión infinita manejado por medidas vectoriales son algunos de los tópicos desarrollados en este manuscrito.

El estudio de las medidas vectoriales tuvo incursión en los años 30, debido al estudio de la geometría y algunos aspectos básicos en la teoría de los espacios de Banach. El estudio de los Teoremas de Radon-Nikodym y Orlicz-Pettis han servido para reestablecer los lazos entre las medidas vectoriales y la teoría analítica y geométrica de los espacios de Banach. En las últimas décadas las medidas vectoriales han incursionado en la teoría de control, las ecuaciones diferenciales estocásticas, la teoría de juegos y la estadística. De esa manera la teoría de medidas vectoriales ha contribuido no solamente al desarrollo del análisis funcional, sino a otras disciplinas.

Uno de los principales espacios de funciones en análisis es el espacio L^p y sus versiones Sobolev sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ o una variedad suave. En este trabajo estudiamos los espacios $L^p_w(\nu, X, Y)$ para funciones fuertemente medibles y medidas vectoriales. Propiedades como la separabilidad y densidad de las funciones simples son propias de estos espacios, son resultados nuevos que someteremos a publicación (Ver [44]). La propiedad de Radon-Nikodym aparece en el desarrollo de ecuaciones diferenciales estocásticas manejadas por medidas de operadores valuados o medidas vectoriales. Ver [1], [2], [3] y [4].

Entre los tópicos desarrollados en este trabajo está la convergencia de medidas vectoriales, una generalización de la definición de convergencia de medidas en el caso real, y el concepto de convergencia débil de medidas. La definición de convergencia débil de sucesiones de medidas probabilísticas se debe a Alexandrov (ver [6]). Si X es un espacio de Tichonov, según Alexandrov, una sucesión $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de medidas probabilísticas converge débilmente a la medida μ ($\mu_n \xrightarrow{w} \mu$) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) d\mu_n(x) = \int_X f(x) d\mu(x),$$

para toda función continua y acotada f de X en $\mathbb{R}$. Esta es la propuesta más aceptada en la actualidad como generalización del concepto de convergencia débil de distribuciones de medidas probabilísticas en el caso real.

La definición de Alexandrov es motivada de un lado por el estudio de aspectos geométricos de la teoría de cuerpos convexos y de otro lado por las aplicaciones a la física mediante el concepto de carga. Alexandrov demuestra que la convergencia débil de medidas probabilísticas puede ser reducido a la convergencia débil de las cargas.

La generalización de la convergencia débil de medidas vectoriales empezó a mediados de los años 70 por M. Dekiert. Gracias a esta definición de convergencia débil, el estudio de las propiedades topológicas de los espacios de medidas vectoriales presenta problemas nuevos e interesantes en el campo de las medidas vectoriales.

El segundo elemento a desarrollar en este trabajo es el Análisis de Fourier en espacios de Banach. Es conocido históricamente que aunque el motivo original era resolver la ecuación de calor, tiempo después fue obvio que se podía usar el análisis de Fourier en un gran conjunto de problemas físicos y matemáticos y sus repercusiones actuales tiene que ver con aplicaciones en la ingeniería eléctrica, análisis de vibraciones, acústica, óptica, procesamiento de señales, retoque fotográfico, mecánica cuántica, econometría, etcétera.

El desarrollo del análisis de Fourier y medidas vectoriales son campos relativamente recientes, pues estos van unidos al desarrollo de la integración vectorial. En este documento presentamos dos desarrollos del análisis de Fourier y el producto de convolución de funciones. Cabe destacar que aquí se presentan resultados nuevos, sobre propiedades que se conservan en el caso real.

En la primera presentación definimos la transformada de Fourier para medidas vectoriales. Propiedades que funcionan en el caso real igualmente funcionan en el caso vectorial. Como caso particular de lo anterior, si ν es una medida vectorial que tiene densidad f , una función vector valuada con respecto a μ , una medida real finita, entonces podemos definir la transformada de Fourier de f , $\hat{f}$, como una función vector valuada que cumple una serie de propiedades análogas al caso real. Esta es la transformada de Fourier para una función Bochner integrable.

La segunda presentación de la transformada de Fourier, se refiere a la transformada de Fourier $\hat{f}$ para una función f medible, de valor escalar y una medida vectorial ν . El desarrollo del análisis de Fourier en este caso va ligado estrechamente a las propiedades que se tienen con respecto a esta integral que aunque en su primera definición fue dada por Bartle en 1955, sólo en estas últimas décadas han tenido un fuerte desarrollo asociado a los espacios $L^p(\nu)$ y $L_w^p(\nu)$. En esta dirección las principales contribuciones han sido el fruto de un grupo de autores en universidades españolas quienes han trabajado una transformada de Fourier distinta a la que se define en este documento y va dirigido para funciones pertenecientes al espacio $L^1(\nu)$.

En este trabajo hacemos un estudio detallado de los espacios L^p en cada una de las integrales estudiadas. Recordemos que en el análisis funcional y sus aplicaciones, los espacios L^p juegan un papel fundamental. Enunciamos resultados nuevos sobre los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$ donde las funciones y las medidas son de valor vectorial.

Para el desarrollo de los temas que hemos expuesto, requeriremos del estudio de producto

tensorial de espacios de Banach, medidas vectoriales, integración vectorial. Hablaremos un poco sobre las aplicaciones de cada uno de ellos.

La noción de producto tensorial aparece por primera vez en [32]. Whitney descubrió una construcción del producto tensorial para grupos abelianos y módulos. Hasta ese momento esta operación había sido conocida de manera indirecta en casos especiales como el producto tensorial de espacios vectoriales. La definición de producto tensorial se fue extendiendo a lo largo de los años. En [48], Schatten escribe sobre las normas cruzadas y trata con dos de ellas, la más grande: la norma tensorial proyectiva y la más pequeña: la norma tensorial inyectiva. Luego, Grothendieck extendió la teoría de espacios vectoriales topológicos a productos tensoriales de espacios localmente convexos (los llamados espacios nucleares). El producto tensorial de espacios ha sido también aplicado en la teoría de juegos. En [13] utilizan la desigualdad de Grothendieck demostrada en 1953 por A. Grothendieck en [31] para resolver un problema de optimización asociado a un juego.

En [26], Edhan muestra que el valor de Merten es el único valor continuo sobre el espacio de los juegos de mercado de medidas vectoriales, y el único valor sobre el espacio de juegos de mercado de medidas vectoriales de Lipschitz. Para demostrar estos enunciados hace un fuerte uso de medidas vectoriales positivas (el espacio de llegada son retículos de Banach) y la integral de Bartle. (Cf, Teorema 3 página 415, [26]).

En [30], Grobler y Labuschagne desarrollan aspectos de la integración de funciones de tipo vectorial con respecto a medidas vectoriales, en particular la integral de Dobrakov que, en su caso, es una generalización de la integral de Bartle.

Para el desarrollo de estos temas anteriormente mencionados, hemos dividido el documento en cinco capítulos.

En el primero denominado *Producto Tensorial de Espacios de Banach*, repasamos las nociones básicas del producto tensorial de espacios de Banach y algunos ejemplos.

El segundo capítulo, *Medidas Vectoriales, Integración Vectorial y los espacios L^p* , está dedicado a definir las propiedades de las medidas vectoriales; como ejemplo de ellas están la integral de Bochner y la integral de Bartle. Retomamos la importancia de las medidas vectoriales radonianas, una especie de teorema de representación de Riesz y versión integral del teorema espectral. La segunda parte de este capítulo está dedicado a la integral de funciones fuertemente medibles, considerando la integral de Bochner, la integral de Bartle-Lewis, la integral de Stefánsson y la integral de Bartle. Aunque ya han sido establecidos para la integral de Bochner los espacios Lebesgue-Bochner $L^p(\mu, X)$ y para la integral de Bartle-Lewis los espacios $L^p(\nu)$ y $L_w^p(\nu)$, en el caso de la integral de Stenfánsson, la literatura reciente estableció los espacios $L^p(\nu, X, Y)$. Nosotros queremos definir los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$ donde hemos conseguido propiedades muy importantes como el teorema de Hölder, aproximación a estos espacios por funciones simples y un teorema de separabilidad de estos espacios.

El tercer capítulo denominado *Convergencia de Medidas y Análisis de Fourier*, está dedicado

a dos tipos de convergencia: la fuerte y la débil. Resaltamos contribuciones originales en lo que se refiere a la medida producto y el producto de convolución. La segunda parte de este capítulo está enfocado en el análisis de Fourier, definimos la transformada de Fourier de una medida vectorial, la transformada de Fourier de una función Bochner integrable y por último introducimos un concepto de transformada de Fourier de una función de valor escalar con respecto a una medida vectorial. En este último caso aparece una transformada de Fourier, la cual resulta no ser invariante bajo translaciones.

En el cuarto capítulo denominado *Medidas Solución y Ecuaciones Diferenciales* se presentan brevemente algunas aplicaciones de medidas de valor real a las ecuaciones diferenciales. La aparición del concepto de medida solución es una motivación, por la no existencia en general de soluciones de ecuaciones diferenciales en espacios de Banach de dimensión infinita. Para desarrollar este capítulo será necesario el estudio de diferentes espacios de Banach de medidas y conceptos de topología como espacios regulares, completamente regulares y compactificación de Stone Čech.

El último capítulo es *Convergencia Débil de Redes de Medidas Radonianas*. El objetivo de este capítulo es demostrar la convergencia débil del producto de convolución. Para ello nos basamos en [33]. Aquí se trabaja con el producto tensorial de Retículos de Banach, medidas vectoriales radonianas positivas, teorema de la Convergencia Diagonal y las relaciones existentes entre las medidas radonianas, τ -suaves y apretadas.

Finalmente nos gustaría resaltar los aportes que se han hecho a lo largo de este trabajo:

- (i) Los capítulos segundo y tercero muestran una amplia gama de resultados nuevos que pueden tener aplicaciones directas en operadores pseudodiferenciales y ecuaciones diferenciales parciales. Estos resultados nuevos tienen que ver con la generalización de los espacios L^p al caso de medidas vectoriales y funciones vector valuadas. Algunas propiedades de los espacios L^p clásicos se generalizan a estos nuevos espacios.
- (ii) La teoría de la integración desarrollada nos ha permitido generalizar la transformada de Fourier en nuevos contextos como el de medidas vectoriales y funciones vector valuadas.
- (iii) Gracias al concepto fundamental de las medidas vectoriales hemos podido generalizar las definiciones de convergencia fuerte y débil de medidas. Extendimos propiedades de la teoría de la medida en el sentido clásico.
- (iv) Se ha hecho un especial énfasis en los ejemplos. Aunque la literatura enuncia los ejemplos clásicos, queremos rescatar que nos hemos encargado de llenar los detalles, y de dar nuevos ejemplos. También hemos hecho una investigación que nos ha dado resultados parciales para determinar cuando el producto tensorial de dos retículos de Banach bajo la ϵ -norma es nuevamente un retículo de Banach.
- (v) En la demostración de la existencia de la medida producto (medida vectorial radoniana producto), se hizo una adaptación del trabajo de Kawabe en [33] quien demostró la existencia de la medida producto para medidas τ -suaves. Dicha adaptación se da en el Teorema 5 en [42] cuya demostración difiere de la original (ver Proposición 3.2 en [33]). Para demostrar la convergencia débil del producto de convolución, se ha hecho

nuevamente una adaptación del trabajo de Kawabe en [34], encontrando relaciones entre las medidas vectoriales radonianas, τ -suaves y apretadas.

- (vi) Una de las grandes dificultades de este trabajo fue establecer un dual para los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$ para $1 < p < \infty$. En el caso de los espacios Lebesgue-Bochner el dual está establecido, donde la propiedad de Radon-Nikodym está implícita. Después de un estudio exhaustivo encontramos un ejemplo que demuestra que esta propiedad del dual se pierde en espacios más generales, aún si $X = \mathbb{R}$.
- (vii) En este trabajo se ha hecho una amplia referencia bibliográfica que ha permitido reelaborar, concatenar las ideas y llenar los detalles para la elaboración del documento.
- (viii) Como último punto aclaramos que todas las demostraciones que tienen que ver con los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$ y las contenidas en el capítulo tres de este trabajo son originales de la autora.

Capítulo 1

Producto Tensorial de Espacios de Banach

En el caso general de la integración de una función vectorial con respecto a una medida vectorial, ambas con valores en espacios de Banach, surge la necesidad de una noción de producto tensorial.

En este capítulo haremos un breve estudio del producto tensorial de espacios de Banach. Primeramente, dados X e Y espacios vectoriales, se definirá el producto tensorial de X e Y ($X \otimes Y$) y propiedades de tipo algebraico. Después siendo X e Y espacios de Banach, definiremos dos normas para el producto tensorial: la ϵ -norma y la π -norma, el cual denotaremos como $X \otimes_{\epsilon} Y$, $X \otimes_{\pi} Y$ respectivamente. Estos espacios no son necesariamente completos y por tanto denotaremos a $\widehat{X \otimes_{\epsilon} Y}$, $\widehat{X \otimes_{\pi} Y}$ como sus completantes respectivos.

Hemos hecho una recopilación de las propiedades más importantes del producto tensorial haciendo énfasis en los ejemplos y aplicaciones que permitan ver la importancia del producto tensorial en las matemáticas aplicadas. Para desarrollar este capítulo nos basaremos en [13], [20], [21], [37] y [46].

El estudio riguroso del producto tensorial de espacios de Banach fue iniciado por Grothendieck en [31]. La motivación consistía en la generalización del teorema del kernel de Laurent Schwartz, en un problema de tesis formulado por el mismo Schwartz. El caso de productos tensoriales de espacios de Hilbert había sido considerado más temprano por R. Schatten motivado por el estudio de álgebras de Von-Neumann y la fundamentación matemática de la mecánica cuántica.

1.1. Producto Tensorial y Normas Tensoriales

Sean X e Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, X^* , Y^* sus duales algebraicos y $\mathcal{B}(X \times Y)$ el espacio vectorial de las funciones bilineales de $X \times Y$ en $\mathbb{K}$. Si $(x, y) \in X \times Y$, denotaremos por $x \otimes y$ a la forma lineal que evalúa cada $f \in \mathcal{B}(X \times Y)$ en (x, y) por medio

de:

$$f \rightarrow f(x, y) = (x \otimes y)(f).$$

Algunas veces diremos que $x \otimes y$ es el producto tensorial de x e y y que $x \otimes y$ es un *tensor elemental*. El producto tensorial de X e Y , denotado por $X \otimes Y$ es el subespacio de $(\mathcal{B}(X \times Y))^*$ (dual algebraico) generado por las formas lineales de este tipo. Un *tensor típico* de $X \otimes Y$ es una combinación lineal de tensores elementales:

$$z = \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k \otimes y_k) \quad \text{donde} \quad \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Si $f \in \mathcal{B}(X \times Y)$, entonces

$$z(f) = \langle f, z \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^n \lambda_k (x_k \otimes y_k) \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k, y_k).$$

Los elementos de $X \otimes Y$ se llaman *tensores*. Es importante notar que la representación de z no es única, de hecho, se puede probar que si $x_1 \otimes x_2 = y_1 \otimes y_2$, entonces existen escalares α_1 y α_2 tales que $x_i = \alpha_i y_i$, $i = 1, 2$ y además $\alpha_1 \alpha_2 = 1$.

Es fácil demostrar que la siguiente función es una función bilineal.

Teorema 1.1.1. *La función $(x, y) \rightarrow x \otimes y$ de $X \times Y$ en el espacio vectorial $X \otimes Y$ es bilineal. Es decir:*

- (i) $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$
- (ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$
- (iii) $\lambda(x \otimes y) = (\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y)$

Se deduce de este teorema que $0_X \otimes y = x \otimes 0_Y = 0$ (el cero de $X \otimes Y$). Igualmente, se deduce de la parte (iii) del teorema anterior que todo elemento típico de $X \otimes Y$ es de la forma

$$z = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k.$$

La función $\tau : X \times Y \rightarrow X \otimes Y$ definida por $\tau(x, y) = x \otimes y$ se llama *función tensorial*.

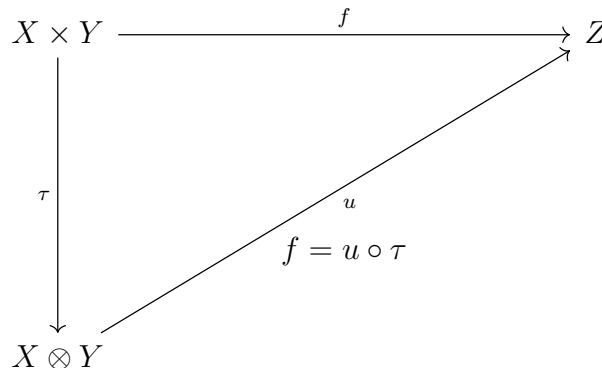
Sean X, Y y Z espacios vectoriales. Denotemos por $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ al espacio de las funciones bilineales de $X \times Y$ en Z y por $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$ a las funciones lineales de $X \otimes Y$ en Z .

Los productos tensoriales linealizan las funciones bilineales en el sentido indicado por el teorema fundamental siguiente:

Teorema 1.1.2. *(De linealización de las funciones bilineales). Sean X, Y y Z espacios vectoriales. Si $f : X \times Y \rightarrow Z$ es una función bilineal, entonces existe una y sólo una función lineal $u : X \otimes Y \rightarrow Z$ tal que $u(x \otimes y) = f(x, y)$. Además, la función $f \leftrightarrow u$ es un isomorfismo de $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ en $\mathcal{L}(X \otimes Y, Z)$.*

Demostración. Ver [46], Proposición 1.4, Página 5. □

El siguiente diagrama da una representación de este teorema.



Denotaremos por u a la función lineal llamada *linealización tensorial de la función bilineal* f . Si $Z = \mathbb{K}$, entonces $\mathcal{B}(X \times Y, \mathbb{K}) = \mathcal{B}(X \times Y)$ y $\mathcal{L}(X \otimes Y, \mathbb{K}) = (X \otimes Y)^*$ (dual algebraico de $X \otimes Y$). Con estas notaciones

$$(X \otimes Y)^* \cong \mathcal{B}(X \times Y)$$

(son isomorfos). A continuación mostraremos unos ejemplos que nos permiten ver ciertos productos tensoriales con otra cara a través de los isomorfismos o contenencias.

Ejemplos 1.1.3.

1. Sea $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ el espacio de las matrices con m filas y n columnas. Entonces

$$\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \cong \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}).$$

En efecto, definamos la función bilineal $f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \rightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ por

$$f(x, y) = (x_j y_k)_{(j,k) \in J_n \times J_m},$$

donde J_n y J_m son conjuntos de índices que representa que x_j está en la j -ésima columna ($1 \leq j \leq n$) y y_k está en la k -ésima fila ($1 \leq k \leq m$) respectivamente. Denotamos por M_{jk} a la matriz cuyas entradas son uno en el lugar (jk) y cero en los otros lugares, entonces $\{M_{jk}\}$ es una base de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ y por tanto toda matriz se puede escribir de manera única como $M = \sum_{jk} \alpha_{jk} M_{jk}$. La función $u : \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \rightarrow \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ es un isomorfismo ya que si $\{a_j : j \in J_n\}$ y $\{b_k : k \in J_m\}$ son bases de $\mathbb{K}^n$ y $\mathbb{K}^m$ respectivamente, se puede mostrar que $\{a_j \otimes b_k, (j, k) \in J_n \times J_m\}$ es una base de $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m$ y haciendo $f(a_j, b_k) = M_{jk}$ se tiene la identificación de $a_j \otimes b_k$ con la matriz M_{jk} .

2. Sean X un espacio vectorial, Ω un conjunto, $\mathcal{F}(\Omega, X)$ el conjunto de todas las funciones de Ω en X , con la estructura inducida por X . Entonces

$$\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K}) \otimes X \subset \mathcal{F}(\Omega, X),$$

donde $f \otimes x$ se identifica con la función $w \rightarrow f(w)x$.

3. Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ el espacio de polinomios sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{K}, X)$ el espacio de los polinomios con valores en X . Un *polinomio con valores en X* es una función $p : \mathbb{K} \rightarrow X$ de la forma $p(t) = \sum_{k=1}^n t^k a_k$ donde $a_k \in X$. Entonces

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) \otimes X = \mathcal{P}(\mathbb{K}, X).$$

4. A un par $(\Omega, \mathcal{A})$ donde Ω es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra lo llamaremos *espacio medible*. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y X un espacio vectorial. Denotaremos por $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \mathbb{K})$ el espacio de las medidas finitamente aditivas de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{K}$ y por $\mathcal{M}(\mathcal{A}, X)$ el espacio vectorial de las medidas vectoriales finitamente aditivas de $\mathcal{A}$ en X . Entonces $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \otimes X$ es un subespacio de $\mathcal{M}(\mathcal{A}, X)$ donde la función $\mu \otimes x$ se identifica con $M \rightarrow \mu(M)x$, para cada $M \in \mathcal{A}$.

De aquí en adelante X, Y son espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, X', Y' sus duales topológicos. El objetivo es decidir qué normas para el producto tensorial de X e Y son compatibles con las normas de estos espacios. Estas normas son conocidas como *normas tensoriales*. Adicionalmente téngase presente que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_X$ para cualquier espacio de Banach X que corresponda, siempre y cuando no se preste para ambigüedad.

Definición 1.1.4. Una norma α en $X \otimes Y$ es una *norma cruzada razonable* si satisface las siguientes condiciones:

- (i) La función $\tau : X \times Y \rightarrow X \otimes_\alpha Y$ es continua, es decir

$$\|\tau(x, y)\|_\alpha = \|x \otimes y\|_\alpha = \alpha(x \otimes y) \leq \|x\| \|y\|,$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$.

- (ii) Si $u \in X'$ y $v \in Y'$ entonces $u \otimes v \in (X \otimes Y)'$ y $\|u \otimes v\|_{\alpha'} = \alpha'(u \otimes v) \leq \|u\| \|v\|$, donde α' es la norma dual de α que se define en 1.2.7.

Definición 1.1.5. Sean X, Y, Z, W espacios de Banach, $u \in L(X, W)$ y $v \in L(Y, Z)$. Una norma α es *uniforme*, si la función definida por

$$u \otimes v \left(\sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k \right) = \sum_{k=1}^n u(x_k) \otimes v(y_k),$$

es continua y

$$\|u \otimes v\|_{\mathcal{L}(X \otimes_\alpha Y, W \otimes_\alpha Z)} \leq \|u\| \|v\|.$$

Notación 1.1.6. Si α es una norma cruzada razonable, uniforme y $u \in X \otimes Y$ entonces se denota la α -norma de u como $\alpha(u; X \otimes Y)$ o $\alpha_{X,Y}(u)$, o $\alpha(u)$ o simplemente $\|u\|_\alpha$ si no hay riesgo de ambigüedad. El producto tensorial $X \otimes Y$ con esta norma será denotado por $X \otimes_\alpha Y$ y su completación $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$.

Denotemos por $\mathfrak{S}_E$ los subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial E .

Definición 1.1.7. Una norma α en $X \otimes Y$ es *finitamente generada*, si se tiene que

$$\|z\|_{\alpha(X,Y)} = \inf \{ \|z\|_{\alpha(M,N)} : z \in M \otimes N, M \in \mathfrak{S}_X, N \in \mathfrak{S}_Y \}$$

Definición 1.1.8. Una *norma tensorial* en los espacios de Banach es una norma cruzada razonable α que es uniforme y finitamente generada.

La π y la ϵ -normas

De acuerdo a lo anterior denotaremos por $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ al completante de $X \otimes Y$ dotado de la ϵ -norma. A este espacio de Banach se le llama *producto tensorial inyectivo* de X e Y . A $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ se le denota como el completante de $X \otimes Y$ con la π -norma. Este espacio se conoce como el *producto tensorial proyectivo* de X e Y .

Notación 1.1.9. De acuerdo a la notación 1.1.6, dado $z \in X \otimes Y$ representamos la ϵ -norma de z como $\|z\|_\epsilon$ o $\epsilon(z)$ y la π -norma de z como $\|z\|_\pi$ o $\pi(z)$.

A continuación definiremos la π y la ϵ -norma. El producto tensorial $X \otimes Y$ puede verse como el subespacio del espacio vectorial de las formas bilineales de $X' \times Y'$ en $\mathbb{K}$ denotado por $\mathcal{B}(X' \times Y')$ de la manera siguiente. Si $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ entonces

$$(x', y') \rightarrow B_z(x', y') = \sum_{i=1}^n x'(x_i) y'(y_i)$$

es una función bilineal. La ϵ -norma de z es la norma de la función bilineal B_z que es el extremo superior del conjunto $\{|B_z(x', y')| : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1\}$, es decir,

$$\begin{aligned} \|z\|_\epsilon &= \sup\{|B_z(x', y')| : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n x'(x_i) y'(y_i)\right| : (x', y') \in X' \times Y', \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

En [46] se define la π -norma de un tensor $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ como

$$\|z\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de z .

El siguiente teorema permite determinar una nueva fórmula para la π -norma del tensor z .

Teorema 1.1.10. Sea $B : X \times Y \rightarrow Z$ una función bilineal acotada. Entonces existe un único operador lineal $\widehat{B} : X \widehat{\otimes}_\pi Y \rightarrow Z$ que satisface $\widehat{B}(x \otimes y) = B(x, y)$ para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$. La correspondencia $B \leftrightarrow \widehat{B}$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Banach $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ y $\mathcal{L}(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$.

Demostración. Ver [46], Teorema 2.9, Página 22. □

$$\begin{array}{ccc}
X \times Y & \xrightarrow{B} & Z \\
\downarrow \tau & \searrow \hat{B} & \\
X \hat{\otimes}_\pi Y & &
\end{array}
\quad \hat{B}(x \otimes y) = B(x, y)$$

Como consecuencia de lo anterior, cuando $Z = \mathbb{K}$ entonces se tiene que

$$\mathcal{B}(X \times Y) \cong (X \hat{\otimes}_\pi Y)'.$$

De esta dualidad se puede obtener una fórmula para la norma proyectiva:

$$\pi(z) = \sup\{|\langle z, B \rangle| : B \in \mathcal{B}(X \times Y), \|B\| \leq 1\}.$$

Las observaciones anteriores nos permiten presentar el siguiente teorema que se encuentra en [20].

Teorema 1.1.11. *Sean X, Y espacios de Banach y X', Y' sus duales topológicos.*

- (i) *Sobre $X \otimes Y$ existe la menor norma tensorial $\|\cdot\|_\epsilon$ y la más grande norma tensorial $\|\cdot\|_\pi$.*
- (ii) *La norma $\|\cdot\|_\epsilon$ es la norma inducida en $X \otimes Y$, viendo a $X \otimes Y$ como subespacio de $\mathcal{B}(X' \times Y')$, es decir para $z \in X \otimes Y$,*

$$\|z\|_\epsilon = \sup\{|z(x', y')| : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1\}.$$

- (iii) *La $\|\cdot\|_\pi$ es la norma inducida en $X \otimes Y$ por la dualidad $\mathcal{B}(X \times Y)$, es decir*

$$\|z\|_\pi = \sup\{|f(z)| : f \in \mathcal{B}(X \times Y), \|f\| \leq 1\}$$

Además si $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ entonces

$$\|z\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|, \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de z .

Demostración. Ver [20], Teorema 1.1.3, Página 7. □

Podemos ver a los elementos de $X \otimes Y$ como operadores lineales y continuos de X' en Y o como operadores lineales y continuos de Y' en X . Así si $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$ entonces

$$\epsilon(z) = \sup_{\|\phi\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \phi(x_i) y_i \right\|, \phi \in X' \right\} \quad \text{o} \quad \epsilon(z) = \sup_{\|\psi\| \leq 1} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \psi(y_i) x_i \right\|, \psi \in Y' \right\}.$$

Citaremos algunos ejemplos clásicos del producto tensorial de dos espacios de Banach con la ϵ -norma y la π -norma. Nótese que aunque tenemos los mismos espacios, el cambio de norma nos muestra que $X \otimes Y$ es isomorfo a distintos espacios.

Ejemplos 1.1.12. En los ejemplos siguientes X denota un espacio de Banach.

1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Denotamos por $L^1(\mu, X)$ al espacio de Banach formado las clases de equivalencia de las funciones Bochner integrables $f : \Omega \rightarrow X$ con la norma

$$\|f\|_{L^1(\mu, X)} = \int_{\Omega} \|f\| d\mu.$$

Este es un espacio completo y su prueba es similar a probar la completez de $L^1(\mu)$. Las funciones Bochner integrables y sus propiedades más importantes se estudiarán en el Capítulo 2. En [46], Ejemplo 2.19, Página 29, se demuestra que

$$L^1(\mu) \widehat{\otimes}_{\pi} X \cong L^1(\mu, X).$$

Si tenemos otro espacio de medida $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ y $X = L^1(\mu')$ entonces

$$L^1(\mu) \widehat{\otimes}_{\pi} L^1(\mu') \cong L^1(\mu, L^1(\mu')) \cong L^1(\Omega \times \Omega', \mu \otimes \mu').$$

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. En [21], Ejemplo 4, Página 223, se muestra que

$$L^1(\mu) \widehat{\otimes}_{\epsilon} X \cong \mathcal{M}_{\mu, rrc}(\mathcal{A}, X),$$

donde $\mathcal{M}_{\mu, rrc}(\mathcal{A}, X)$ es el espacio de todas las medidas vectoriales μ -continuas $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ cuyo rango es relativamente compacto, equipado con la norma de la semivariación.

3. Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Denotaremos por $\mathcal{C}(K)$ el conjunto de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$. En [21], Ejemplo 6, Página 224, se muestra que

$$\mathcal{C}(K) \widehat{\otimes}_{\epsilon} X \cong \mathcal{C}(K, X),$$

donde $\mathcal{C}(K, X)$ es el espacio de las funciones continuas $f : \Omega \rightarrow X$. Si L es otro espacio hausdorffiano compacto, entonces

$$\mathcal{C}(K) \widehat{\otimes}_{\epsilon} \mathcal{C}(L) \cong \mathcal{C}(K, \mathcal{C}(L)) \cong \mathcal{C}(K \times L).$$

4. Diremos que una sucesión $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ es *absolutamente sumable* si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Denotaremos por l^1 al espacio de las sucesiones absolutamente sumables con valores en $\mathbb{K}$. En [46], Ejemplo 2.6, Página 19, se muestra que

$$l^1 \widehat{\otimes}_{\pi} X \cong l^1(X),$$

donde $l^1(X)$ es el espacio de las sucesiones absolutamente sumables con valores en X .

5. Diremos que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es *incondicionalmente sumable* si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X , independientemente del orden de los términos. Denotaremos por $l^1[X]$ el espacio de las sucesiones incondicionalmente sumables con valores en X y se demuestra en [46], Ejemplo 3.4, Página 48 que

$$l^1 \widehat{\otimes}_{\epsilon} X \cong l^1[X].$$

6. Denotaremos por c_0 el espacio de las sucesiones que convergen a cero, $c_0(X)$ al conjunto de las sucesiones que convergen al cero de X con la norma

$$\|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\|.$$

Este es un espacio completo y en [46], Ejemplo 3.3, Página 47, se muestra que

$$c_0 \widehat{\otimes}_{\epsilon} X \cong c_0(X).$$

7. Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene la *propiedad de aproximación* si para cada compacto $K \subseteq X$ y $\epsilon > 0$, existe un operador de rango finito $T : X \rightarrow X$ tal que para todo $x \in K$, $\|Tx - x\| \leq \epsilon$. Sean X, Y espacios de Banach y X' su dual topológico. Se enuncia en [50] Página 238 que si X' o Y tiene la propiedad de aproximación entonces

$$X' \widehat{\otimes}_{\epsilon} Y \cong \mathcal{G}(X, Y),$$

donde $\mathcal{G}(X, Y)$ es el espacio de los operadores compactos de X en Y .

1.2. Normas Tensoriales

Grothendieck en [31], demostró que existen 14 normas tensoriales naturales. Por *norma tensorial natural* entendemos aquellas que se puedan definir en cualquier par de espacios de Banach. Haremos en esta sección un breve comentario sobre estas normas y finalizaremos con un gráfico que muestra la relación entre ellas. Para ello nos basaremos en [46].

Primero que todo se puede mostrar (cf. Proposición 6.1 en [46]) que si $u \in X \otimes Y$, donde X, Y son espacios de Banach y α es una norma tensorial, entonces

$$\epsilon(u) \leq \alpha(u) \leq \pi(u).$$

Para definir estas normas, hablaremos de los espacios l^p y l_w^p .

Sea $1 \leq p < \infty$. Recordemos que $l^p(X)$ denota el espacio de todas las sucesiones p -sumables en el espacio de Banach X , es decir las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p$ converge. Con la norma

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p},$$

$l^p(X)$ es un espacio de Banach.

Si $p = \infty$, $l^\infty(X)$ es el espacio de las sucesiones acotadas en X . Con la norma

$$\|(x_n)\| = \sup_n \|x_n\|,$$

$l^\infty(X)$ es un espacio de Banach.

Sea $1 < p < \infty$. Denotamos por $l_w^p(X)$ al espacio de las *sucesiones débilmente p -sumables* en X , es decir sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que $(x'(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in l^p$ para cada $x' \in X'$.

Si $\sup_{\|x'\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p \right) < \infty$, definimos en $l_w^p(X)$ la norma

$$\|(x_n)\|_{p,w} = \sup_{\|x'\| \leq 1} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p \right)^{1/p} \right\}.$$

Por la ϵ -norma, la desigualdad de Hölder y el hecho de que toda sucesión finita $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se puede ver como una sucesión infinita $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$, obtenemos la siguiente definición.

Definición 1.2.1. (Normas tensoriales Chevet- Saphar). Para $1 \leq p \leq \infty$, definimos

$$\begin{aligned} d_p(u) &= \inf \left\{ \|(x_j)\|_{p',w} \|(y_j)\|_p : u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\} \\ &= \inf \left\{ \sup_{\|x'\| \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x'(x_j)|^{p'} \right)^{1/p'} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^p \right)^{1/p} : u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\} \end{aligned}$$

y

$$g_p(u) = \inf \left\{ \|(x_j)\|_p \|(y_j)\|_{p',w} : u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\},$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de u .

En Raymond se demuestra que d_p y g_p son normas tensoriales y que $d_1 = g_1 = \pi$.

Sea α una norma tensorial, diremos que α^t es la *norma transpuesta* de α si para cada par de espacios de Banach X, Y y $u \in X \otimes Y$ tenemos que

$$\alpha^t(u, X \otimes Y) = \alpha(u^t, Y \otimes X),$$

donde si $u = \sum_{j=1}^k x_j \otimes y_j$, entonces $u^t = \sum_{j=1}^k y_j \otimes x_j$. De acuerdo a lo anterior, $d_p^t = g_p$ donde d_p^t denota la norma transpuesta de d_p para cada p .

En lo que sigue se darán una cierta cadena de definiciones que permiten construir nuevas normas tensoriales.

Definición 1.2.2. Diremos que una norma tensorial α es *proyectiva a derecha* si para cada espacio de Banach X y cada operador cociente $Q : Z \rightarrow Y$ el operador producto tensorial $I \otimes_\alpha Q : X \widehat{\otimes}_\alpha Z \rightarrow X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ es un operador cociente.

Una definición similar se tiene para normas tensoriales proyectivas a izquierda.

Definición 1.2.3. Diremos que una norma tensorial α es *inyectiva a derecha* si para cada espacio de Banach X y cada $Z \subseteq Y$, la inclusión natural de $X \widehat{\otimes}_\alpha Z$ a $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ es una isometría.

Hay una definición análoga para las normas tensoriales inyectivas a izquierda.

En Raymond se demuestra que la norma d_p es proyectiva a derecha y que g_p es proyectiva a izquierda, para cada p . Cuando $p = 1$, $d_1 = g_1 = \pi$ son ambas proyectivas a izquierda y derecha.

Notación 1.2.4. A estas normas con este tipo de propiedades las denotaremos como

- (i) $\alpha \backslash$ norma tensorial inyectiva a derecha
- (ii) $/\alpha$ norma tensorial inyectiva a izquierda.
- (iii) $\alpha /$ norma tensorial proyectiva a derecha.
- (iv) $\backslash \alpha$ norma tensorial proyectiva a izquierda.

Se pueden hacer construcciones combinadas como $/(\alpha \backslash)$ y $(/\alpha) \backslash$ o $\backslash(\alpha /)$ y $(\backslash \alpha) /$.

Ejemplos: $\backslash \epsilon /$, $(\backslash \pi) /$, $\backslash (/ \pi \backslash)$.

Además se puede probar que

Lema 1.2.5. Sea α una norma tensorial entonces:

- (i) $\backslash \alpha / = /(\alpha \backslash) = (/ \alpha) \backslash$.
- (ii) $\backslash \alpha / = (\backslash \alpha) / = \backslash(\alpha /)$.

Teniendo en cuenta que el conjunto de las normas tensoriales forman un retículo de completo, (Proposición 7.6 en [46]) se muestra que

Lema 1.2.6. Sea α una norma tensorial entonces:

- (i) $\alpha \setminus = \sup\{\beta : \beta \text{ es una norma tensorial } \leq \alpha, \beta \text{ inyectiva a derecha}\}.$
- (ii) $/\alpha = \sup\{\beta : \beta \text{ es una norma tensorial } \leq \alpha, \beta \text{ inyectiva a izquierda}\}.$
- (iii) $\alpha / = \inf\{\beta : \beta \text{ es una norma tensorial } \geq \alpha, \beta \text{ proyectiva a derecha}\}$
- (iv) $\setminus \alpha = \inf\{\beta : \beta \text{ es una norma tensorial } \geq \alpha, \beta \text{ proyectiva a izquierda}\}$

A continuación definiremos la norma tensorial dual.

Definición 1.2.7. Sea α una norma tensorial. Definimos la *norma dual* de α , α' como la única norma tensorial que concuerda con la norma dual que se da sobre productos tensoriales de espacios de dimensión finita, es decir dada $u \in X \otimes Y$, tenemos que

$$\alpha'(u) = \inf\{\alpha'_{E,F}(u) : u \in E \otimes F, \dim E, \dim F < \infty\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los pares de subespacios de dimensión finita de X, Y cuyo producto tensorial contienen a u .

Como consecuencia de esta definición tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2.8. Sea $1 < p \leq \infty$. El dual de la norma tensorial d_p es la norma tensorial inyectiva a derecha $g_{p'} \setminus$. Por otro lado el dual de la norma g_p es la norma inyectiva a izquierda $/d_{p'}$. En conclusión

$$(d_p)' = g_{p'} \setminus \quad \text{y} \quad (g_p)' = /d_{p'}.$$

Observación 1.2.9. Tenemos que cuando $p = 2$ se tiene $(d_2)' = g_2$ y $(g_2)' = d_2$.

Por último definiremos la norma tensorial Hilbertiana. De la desigualdad de Grothendieck se puede establecer que

$$\pi \leq K_G d_2 \quad \text{y} \quad \pi \leq K_G g_2,$$

en $l_n^\infty \otimes l_n^\infty$ y donde K_G es la constante de Grothendieck. Sin embargo d_2 es inyectiva a izquierda y g_2 es inyectiva a derecha. Esto origina la siguiente definición:

Definición 1.2.10. La norma w_2 sobre el producto tensorial $X \otimes Y$ de dos espacios de Banach está dado

$$w_2(u) = \inf \left\{ \|(x_j)\|_{2,w} \|(y_j)\|_{2,w} : u = \sum_{j=1}^n x_j \otimes y_j \right\}.$$

Se puede probar que w_2 es una norma tensorial inyectiva y además

$$w_2 \leq / \pi \setminus \leq K_G w_2 \quad \text{y} \quad K_G^{-1} w_2' \leq \setminus \epsilon / \leq w_2'.$$

El siguiente diagrama muestra la relación entre las diferentes normas. El simbolo $\alpha \sim \beta$ indica que α y β son normas equivalentes. Si el lector quiere investigar más, puede ver [20] y [46].

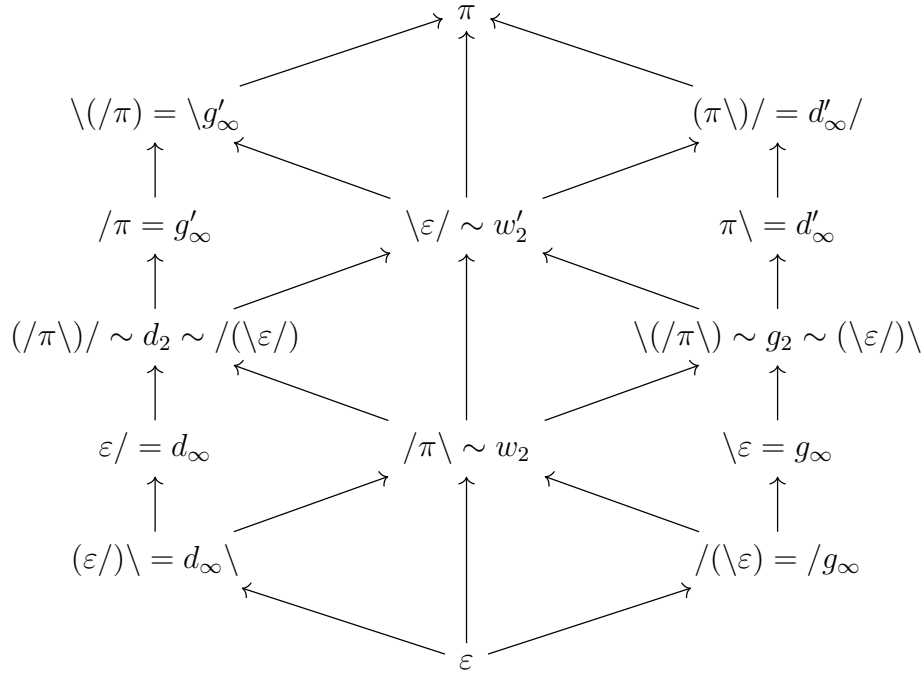


Figura 1.1. Normas Tensoriales.

1.3. Algunas Conexiones del Producto Tensorial con otras Áreas

En esta sección queremos mostrar una aplicación de la desigualdad de Grothendieck demostrada por él mismo en [31]. Esta desigualdad ha sido estudiada por varios matemáticos durante años y posteriormente ha tenido incursión en el desarrollo de problemas de teoría de juegos y de optimización.

En [13] Carvajal desarrolla la siguiente aplicación. Miremos la siguiente tabla

3	-4	3	4	-2
-7	-1	12	-9	0
2	-11	3	-3	6
1	0	5	5	-8
9	-1	8	-10	3

Tabla 1.1. Tabla del Juego.

Notemos que la suma de todos los números es 8 y supongamos que vale elegir una columna o una fila e invertir los signos de todos los números que están en ella, y que podemos seguir realizando esta operación tantas veces como queramos. Surgen preguntas como:

- Cuál es el máximo valor que podemos alcanzar sumando todos los números obtenidos?
- Y qué sucede si empezamos a considerar grillas mucho más grandes?
- Qué tan difícil es hallar el máximo?
- Qué tan difícil es aproximarlos?
- Qué tan difícil es hallar la secuencia de operaciones que nos llevan a él?
- Qué implicaciones tienen estas respuestas más allá de este juego inocente?
- Qué tienen que ver los productos tensoriales con este juego?

La primera impresión sobre estas preguntas es su similitud con problemas de optimización. En 1953, Alexander Grothendieck, poco después de escribir su tesis doctoral, publica *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. En este trabajo, Grothendieck desarrolla una teoría sistemática de normas en productos tensoriales de espacios de Banach. Más precisamente, el problema que le interesaba era considerar qué normas se podían usar sobre un producto tensorial de espacios de Banach de manera que se conservara algún tipo de compatibilidad con las normas originales de estos espacios. En un momento clave del artículo, Grothendieck necesita demostrar que dos de las normas naturales que definió sobre los productos tensoriales son equivalentes entre sí. El resultado, que el mismo autor llama *Teorema fundamental de la teoría métrica de productos tensoriales*, es básicamente una desigualdad entre dos normas

$$\|z\|_{w_2} \leq \|z\|_{/\pi\backslash} \leq K_G \|z\|_{w_2},$$

donde K_G es una constante, y $z \in X \otimes Y$, con X, Y espacios de Banach. El teorema demuestra la existencia de esta constante, y muestra además que el menor valor posible para la constante K_G es

$$1,57 \leq \frac{\pi}{2} \leq K_G \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 2,3.$$

El trabajo de Grothendieck pasa desapercibido muchos años, en los que el autor mismo se dedica a trabajar en otras áreas de la matemática, a las que contribuye enormemente.

Pero 15 años más tarde, Joram Lindenstrauss y Aleksander Pełczyński en [37] redescubren este trabajo, y encuentran en él muchos resultados valiosos, incluso dan una nueva versión del teorema fundamental que también se llama la desigualdad de Grothendieck y que enunciamos a continuación.

Teorema 1.3.1. Sea $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ una matriz finita de números reales tal que

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i s_j \right| \leq 1,$$

siempre que $|t_i| \leq 1$ y $|s_j| \leq 1$. Entonces para cada conjunto de vectores unitarios $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y $\{y_j\}_{1 \leq j \leq n}$ en un espacio de Hilbert se tiene que

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K,$$

donde K es una constante absoluta y $\langle, \rangle$ denota el producto interno en el espacio de Hilbert.

Esta constante K tiene que ver con la constante K_G de Grothendieck y será este teorema el que Carvajal usa como cota inferior para establecer los resultados del juego planteado anteriormente.

La motivación original para el estudio de los productos tensoriales surgió de un problema de extensión del Teorema Kernel de Laurent Schwartz. Dicho problema fue planteado por L. Schwartz como tema de tesis doctoral a Alexander Grothendieck. El Teorema del Kernel establece la existencia de un kernel para representar un operador continuo entre espacios de distribuciones. El Teorema del Kernel puede ser formulado de la siguiente manera:

Si Ω, Λ son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $K : \mathcal{D}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ es un operador lineal, entonces $K : \mathcal{D}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ es continuo si y solo si existe $k \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Lambda)$ tal que

$$Kf(x) = \int_{\Lambda} k(x, y)f(y)dy$$

en el sentido de las distribuciones.

Esta equivalencia puede ser formulada en términos de un isomorfismo entre un producto tensorial y un espacio de operadores continuos gracias a la relación : $\langle k, g \otimes f \rangle = \langle Kf, g \rangle$.

El estudio de la formulación tensorial del teorema del kernel llevó a Grothendieck a introducir las topologías tensoriales y posteriormente a desarrollar una teoría tensorial en el caso de espacios de Banach. Una consecuencia de estos estudios sería la noción de determinantes de Fredholm en espacios de Banach.

Capítulo 2

Medidas Vectoriales, Integración Vectorial y los Espacios L^p

Muchas de las primeras ideas en geometría y la teoría de los espacios de Banach tiene sus orígenes teóricos en las medidas vectoriales.

En los años 30's matemáticos como Clarkson, Dunford y Morse utilizaron el concepto de medida vectorial para resolver ciertos problemas relacionados al análisis, entre ellos la propiedad de Radon-Nikodym para la integral de Bochner. (cf. [21]).

En este capítulo definiremos el concepto fundamental de medida vectorial sobre σ -álgebras, así como sus propiedades más importantes. Algunas recientes aplicaciones de este concepto se aplican a las ecuaciones diferenciales y teoría de control, para ello ver [1], [2] y [3]. El capítulo contiene ejemplos de medidas vectoriales, entre ellas, la integral de Bochner y la integral de Bartle. En [42] y [43], se destaca los aportes de las medidas vectoriales radonianas al campo de la teoría de la medida en el caso vectorial: medida producto, Teorema de Fubini y convolución de medidas. Queremos resaltar en este capítulo el papel de éstas en el Teorema de Representación de Riesz. Para el desarrollo de este tema seguiremos a [21], [42] y [43].

Con el fin de desarrollar otros tópicos del análisis armónico en espacios de Banach (el análisis de Fourier y convergencia de medidas vectoriales), se ha hecho necesario conocer distintos tipos de integrales que nos permitan desarrollar esta teoría. En este capítulo nos hemos centrado en desarrollar integrales para funciones vector valuadas o de valor escalar que son fuertemente medibles. Resaltamos las relaciones que hay entre la integral de Bochner, la integral de Bartle-Lewis, la integral de Stenfánsson y la integral de Bartle. Enunciaremos algunas propiedades que se tienen y que se pierden en la medida en que la integral se generaliza.

Una contribución fundamental en el desarrollo de este capítulo son los espacios de funciones $L_w^p(\nu, X, Y)$ para el caso de funciones vector valuadas y medidas vectoriales σ -aditivas. Demostraremos que éstos son espacios de Banach para $1 \leq p < \infty$. Propiedades como la densidad de funciones simples, desigualdad de Hölder y separabilidad, serán demostradas en la Sección 2.8.

Al final de este capítulo incluimos unas gráficas que muestra las relaciones entre los distintos

tipos de integral, propiedades en común y la relación entre los espacios L^p .

Bienvenidos a este pequeño mundo de la teoría de la integración!

2.1. Medidas Vectoriales

Recordemos que el par $(\Omega, \mathcal{A})$ donde Ω es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra, es un *espacio medible*.

Definición 2.1.1. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y X un espacio de Banach. Una función $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ es una medida vectorial *finitamente aditiva* (ϕ -aditiva) o simplemente una *medida vectorial* si $\nu(A_1 \cup A_2) = \nu(A_1) + \nu(A_2)$ cuando A_1 y A_2 son elementos disjuntos de $\mathcal{A}$. Esta propiedad se extiende por inducción a las familias finitas y disjuntas: si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ es una familia finita y disjunta en $\mathcal{A}$, entonces

$$\nu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \nu(A_k).$$

Diremos que ν es una medida vectorial *contablemente aditiva* (σ -aditiva) si para toda sucesión disjunta $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$, la sucesión de sumas parciales, $\sum_{k=1}^n \nu(A_k)$ es convergente en X con respecto a la topología de la norma y

$$\nu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Observación 2.1.2.

- (i) Si $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ es medida vectorial, entonces $\nu(\emptyset) = 0$ ya que $\nu(A \cup \emptyset) = \nu(A) + \nu(\emptyset) = \nu(A)$.
- (ii) Toda medida vectorial σ -aditiva es ϕ -aditiva. En efecto si ν es σ -aditiva, entonces $\nu(\emptyset) = 0$ y si $A, B \in \mathcal{A}$ son disjuntos entonces $\nu(A \cup B) = \nu(A \cup B \cup \emptyset \dots) = \nu(A) + \nu(B)$.
- (iii) La medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$ no es una medida vectorial σ -aditiva en el sentido de la Definición 2.1.1. Sin embargo si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y Ω tiene medida de Lebesgue finita, entonces la medida de Lebesgue es una medida vectorial en el sentido de la Definición 2.1.1.
- (iv) Sea $x' \in X'$. Si ν es una medida vectorial σ -aditiva, entonces $x' \circ \nu$ es una medida vectorial σ -aditiva, con valores complejos o reales en el sentido de la Definición 2.1.1.

A continuación daremos algunos ejemplos de medidas vectoriales.

Ejemplos 2.1.3. 1. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y $X = l^1$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, se define $\nu : \mathcal{A} \rightarrow l^1$ por

$$\nu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \dots, \mu_n(A), \dots),$$

donde μ_k es una medida σ -aditiva de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{R}$ para $k \in \{1, 2, \dots\}$ y tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k(A)| < \infty.$$

Así definida, ν es una medida vectorial σ -aditiva.

2. Sean $([0, \infty], \text{bor}([0, \infty]), \lambda)$ un espacio de medida donde λ es la medida de Lebesgue. Consideremos $\nu : \text{bor}([0, \infty]) \rightarrow l^2$ dada por

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(A \cap [i-1, i])}{2^{i/2}} e_i,$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ define la base canónica de l^2 . Entonces ν es una medida vectorial σ -aditiva.

A continuación definiremos la variación y semivariación de una medida vectorial y su relación entre ellas.

Definición 2.1.4. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X un espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ una medida vectorial. La *variación* de ν es la función

$$E \mapsto |\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{A \in \pi} \|\nu(A)\| : \pi \in \pi(E) \right\}$$

de $\mathcal{A}$ en $[0, \infty]$, donde $\pi(E)$ es el conjunto de todas las particiones finitas de $E \in \mathcal{A}$.

Si $|\nu|(\Omega) < \infty$ diremos que ν es una medida de *variación acotada*. Obsérvese que $\|\nu(E)\| \leq |\nu|(E)$.

Definición 2.1.5. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X un espacio de Banach y ν una medida vectorial. La *semivariación* de ν es la función

$$E \mapsto \|\nu\|(E) = \sup \{ |x' \circ \nu|(E) : x' \in X', \|x'\| \leq 1 \}$$

donde $|x' \circ \nu|$ es la variación de la medida de valor complejo $x' \circ \nu$.

Si $\|\nu\|(\Omega) < \infty$ diremos que ν es una medida de *semivariación acotada* o que ν es una *medida vectorial acotada*.

Se puede mostrar que si $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ es una medida vectorial, entonces

$$\|\nu(E)\| \leq \|\nu\|(E) \leq |\nu|(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

Si $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ es una medida vectorial, entonces su semivariación $\|\nu\|$ es una función monótona subaditiva con valores en $[0, \infty]$. La variación de ν es una medida vectorial monótona con valores $[0, \infty]$. Para propiedades adicionales ver [21] y [41]. Adicionalmente $|x' \circ \nu|$ es una medida finita con valores reales para cada $x' \in X'$.

En [41] página 20 se muestra que toda medida vectorial σ -aditiva definida sobre una σ -álgebra es de semivariación acotada y por consiguiente acotada.

A continuación, describiremos algunos espacios de medidas.

Notación 2.1.6. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y X un espacio de Banach. Denotamos por $\mathcal{M}(\mathcal{A}, X)$ al espacio vectorial de las medidas vectoriales de $\mathcal{A}$ en X , por $\mathcal{M}_{va}(\mathcal{A}, X)$ al espacio vectorial de las medidas vectoriales de variación acotada, por $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ al espacio vectorial de las medidas vectoriales σ -aditivas, por $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$ al espacio vectorial de las medidas vectoriales σ -aditivas de variación acotada, por $\mathcal{M}_{\sigma,rad}(\mathcal{A}, X)$ al espacio vectorial de las medidas vectoriales radonianas que son σ -aditivas, por $\mathcal{M}_{\sigma,rad}^+(\mathcal{A}, X)$ al espacio vectorial de las medidas vectoriales radonianas que son σ -aditivas y positivas, $\mathcal{M}_{RN}(\mathcal{A}, X)$ al espacio vectorial de las medidas con la propiedad de Radon-Nikodym, por $\mathcal{M}_\mu(\mathcal{A}, X)$ al espacio de las medidas vectoriales que son μ -continuas con μ una medida finita positiva y por $\mathcal{M}_{\mu,rrc}(\mathcal{A}, X)$ al espacio de las medidas vectoriales que son μ -continuas con rango relativamente compacto.

Con esta notación enunciamos los siguientes teoremas.

Teorema 2.1.7. *El espacio $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ con la norma de la semivariación es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [46], Proposición 5.3, Página 95 . □

Teorema 2.1.8. *El espacio $\mathcal{M}_{va}(\mathcal{A}, X)$ con la norma de la variación es un espacio de Banach.*

Demostración. Similar a la Proposición 5.3, Página 95 en [46]. □

Teorema 2.1.9. *El espacio $\mathcal{M}_{RN}(\mathcal{A}, X)$ con la norma dada por la variación es completo.*

Demostración. Ver [46], Lema 5.21, Página 107. □

Teorema 2.1.10. *El espacio $\mathcal{M}_\mu(\mathcal{A}, X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$.*

Demostración. Ver [46], Lema 5.16, Página 103 . □

Teorema 2.1.11. *El espacio $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$ con la norma dada por la variación es un espacio de Banach.*

Demostración. Similar a la Proposición 5.3, Página 95 en [46]. □

Se puede mostrar que

Teorema 2.1.12. *El espacio $\mathcal{M}_{\mu,rrc}(\mathcal{A}, X)$ de las medidas μ -continuas que tienen rango relativamente compacto, con la norma dada por la semivariación es un espacio de Banach.*

Para el estudio de la integral de Bartle, definiremos la semivariación de una medida vectorial ν con respecto a una función bilineal b .

Definición 2.1.13. Sean X, Y, Z espacios de Banach y $b : X \times Y \rightarrow Z$ una función bilineal y continua. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ es una σ - medida, la b - semivariación de ν es el número

$$\|\nu\|_b(E) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n b(x_i, \nu(E_i)) \right\| \right\}$$

donde $E \in \mathcal{A}$ y el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ contenidos en E y todas las familias finitas $\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq X$ con $\|x_i\| \leq 1$.

Observación 2.1.14. (i) Se puede mostrar que si $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ es una medida vectorial σ -aditiva, entonces su semivariación con respecto a b , $\|\nu\|_b$ es una función monótona, subaditiva, con valores en $[0, \infty]$.

(ii) En [41] se demuestra que cuando $Z = X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ y $b(x, y) = x \otimes y$, $\|\nu\|_\otimes \leq \|\nu\|$. Esto permite el desarrollo de la integración en general.

(iii) Se puede demostrar que cuando $Z = \mathbb{K} \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ y $b(x, y) = x \otimes y$, $\|\nu\|_\otimes = \|\nu\|$. De hecho en [21], en la Proposición 11, Página 4, se demuestra que la semivariación de ν está dada por

$$\|\nu\|(E) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n x_i \nu(E_i) \right\| \right\},$$

donde $E \in \mathcal{A}$ y el supremo es tomado sobre todas las particiones finitas $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ contenidos en E y todas las familias finitas $\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{K}$ con $|x_i| \leq 1$. Por otro lado, $\mathbb{K} \widehat{\otimes}_\epsilon Y \cong Y$ (isométricamente isomorfos), así $x_i \otimes \nu(E_i)$ se puede identificar con $x_i \nu(E_i)$ y por tanto

$$\|\nu\|(E) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n x_i \nu(E_i) \right\|_Y \right\} = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes \nu(E_i) \right\|_{\mathbb{K} \widehat{\otimes}_\epsilon Y} \right\} = \|\nu\|_\otimes(E).$$

(iv) Sean X, Y, Z álgebras de Banach tal que $X = Y = Z$. Consideremos la función $m : X \times X \rightarrow X$ dada por $m(x, y) = xy$, es decir m representa la multiplicación del álgebra. Esta función es bilineal y continua. Por la observación (ii) se tiene que $\|\nu\|_m \leq \|\nu\|$.

Sea μ una medida positiva finita y ν una medida vectorial. Definir cuando ν es una medida μ -continua es importante, ya que este concepto está relacionado con la definición de función ν -medible y los distintos tipos de convergencia. Este concepto interviene en la demostración de los teoremas de Egoroff y Pettis para medidas vectoriales. Adicionalmente gracias a esta definición podemos desarrollar gran parte de la integración de tipo vectorial.

Definición 2.1.15. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ una medida finita y X un espacio de Banach. Decimos que una medida vectorial $\beta : \mathcal{A} \rightarrow X$ es μ -continua (o absolutamente continua respecto a μ) si $\mu(A) = 0$ implica que $\|\beta\|(A) = 0$.

2.2. Funciones Medibles

Para hablar de integración vectorial se hace necesario definir los conceptos funciones simples en espacios de Banach, de función medible, convergencia de funciones vector valuadas:

convergencia casi en todas partes, convergencia en medida o convergencia uniforme. Nos centraremos en la convergencia casi en todas partes.

Definición 2.2.1. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y X un espacio de Banach. Una función $f : \Omega \rightarrow X$ es *simple* si existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ y $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ disjuntos tal que $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi(E_i)$, donde

$$\chi(E_i)(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in E_i \\ 0 & \text{si } w \notin E_i. \end{cases}$$

El conjunto de las funciones simples forma un espacio vectorial.

Definición 2.2.2. Diremos que un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es *completo* si para cada $B \subset A$, con $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$, también $B \in \mathcal{A}$.

Definición 2.2.3. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo. Una función $f : \Omega \rightarrow X$ es μ -medible si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω en X tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(w) - f(w)\| = 0 \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Ahora generalizaremos el concepto de una función medible $f : \Omega \rightarrow X$ con respecto a una medida vectorial ν .

Definición 2.2.4. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X un espacio de Banach y $f : \Omega \rightarrow X$ una función. Diremos que f es ν -medible si existe una sucesión de funciones simples tal que $f_n(w)$ converge a $f(w)$ ν -c.t.p, es decir si dado $\epsilon > 0$, existen $\delta > 0$, un conjunto $E \in \mathcal{A}$ y un natural $n_0 = n_0(w, \epsilon)$ tal que $\|\nu\|(E) < \delta$ y $\|f_n(w) - f(w)\| < \epsilon$ para todo $w \in \Omega - E$ y todo $n \geq n_0$.

Para definir la integral de Bartle, se hace necesario la definición de función ν -medible con respecto a una función bilineal.

Definición 2.2.5. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y, Z espacios de Banach, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva y $b : X \times Y \rightarrow Z$ una función bilineal y continua. Diremos que una función $f : \Omega \rightarrow X$ es (b, ν) -medible, si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tal que f_n converge a f ν_b -c.t.p, es decir, si dado $\epsilon > 0$, existen $\delta > 0$, un conjunto $E \in \mathcal{A}$ y un natural $n_0 = n_0(w, \epsilon)$ tal que $\|\nu\|_b(E) < \delta$ y $\|f_n(w) - f(w)\| < \epsilon$ para todo $w \in \Omega - E$ y todo $n \geq n_0$.

Observación 2.2.6. (i) Si f es ν -medible entonces f es (b, ν) -medible para toda función bilineal y continua b .

(ii) Si b es la función bilineal tensorial entonces f es (b, ν) -medible si y sólo si f es ν -medible.

2.3. Integral de Bochner

En esta sección $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finita, X es un espacio de Banach y $f : \Omega \rightarrow X$ una función de valor vectorial μ -medible. Para hablar de esta integral nos

basaremos en [21].

Definición 2.3.1. Una función μ -medible, $f : \Omega \rightarrow X$ es *Bochner-integrable* si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En este caso $\int_E f d\mu$ está definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu,$$

donde $\int_E f_n d\mu$ ya es conocida previamente.

Observación 2.3.2. (i) La cantidad $\int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu$ tiene sentido porque $\|f_n(w) - f(w)\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es μ -medible.

(ii) Se puede probar que la sucesión $(\int_{\Omega} f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X .

(iii) Como X es un espacio de Banach, el $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$ existe y es único.

(iv) Se puede probar que este límite es independiente de la escogencia de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

A continuación enunciamos las propiedades más importantes asociadas a esta integral.

Propiedades

(i) Una función μ -medible f es Bochner integrable si y sólo si $\|f\|$ es μ -integrable.

(ii) Si f es Bochner integrable entonces

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| d\mu, \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

Para propiedades adicionales ver [21].

Al igual que la integral de Lebesgue, la integral de Bochner tiene un Teorema de la Convergencia Dominada.

Teorema 2.3.3. (*Teorema de la Convergencia Dominada*). Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Bochner integrables de Ω en X que convergen a una función f μ -c.t.p. Si existe una función $g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ μ -integrable tal que $\|f_n\| \leq g$ μ -c.t.p, entonces f es Bochner integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

De hecho $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0$.

Demostración. Ver [21], Teorema 3, Página 45. □

Cálculos directos permiten demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.3.4. *Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X_1, X_2 espacios de Banach y $T \in L(X_1, X_2)$ una transformación lineal y acotada. Sea f una función Bochner integrable de Ω en X_1 entonces $T \circ f$ es una función Bochner integrable de Ω en X_2 y además*

$$\int_{\Omega} T \circ f d\mu = T \left(\int_{\Omega} f d\mu \right).$$

Demostración. Se demuestra la propiedad para cuando f es una función simple y en el caso general se toma una suceción de funciones simples que convergen a f . $\square$

Para enunciar el teorema del cambio de variable, consideremos $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $(\Omega', \mathcal{A}')$ un espacio medible tal que $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ es una función $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ -medible; es decir, $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}'$ y $T(\mu)$ representa la medida imagen de T a través de μ .

Corolario 2.3.5. *(Teorema del cambio de variable). Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $(\Omega', \mathcal{A}', T(\mu))$ otro espacio de medida, donde T se ha descrito anteriormente y X un espacio de Banach. Si f es Bochner $T(\mu)$ -integrable y $f \circ T$ es Bochner μ -integrable, entonces*

$$\int_{\Omega} f \circ T d\mu = \int_{\Omega'} f dT(\mu).$$

Demostración. Sea $x' \in X'$. Por el teorema 2.3.4, tenemos:

$$x' \left(\int_{\Omega'} f dT(\mu) \right) = \int_{\Omega'} x' \circ f dT(\mu).$$

Por el teorema del cambio de variable, tenemos que $x' \circ f$ es $T(\mu)$ -integrable si y sólo si $x' \circ f \circ T$ es μ -integrable y además

$$\int_{\Omega'} x' \circ f dT(\mu) = \int_{\Omega} (x' \circ f) \circ T d\mu = \int_{\Omega} x' \circ (f \circ T) d\mu,$$

como $f \circ T$ es Bochner μ -integrable, entonces

$$\int_{\Omega} x' \circ (f \circ T) d\mu = x' \left(\int_{\Omega} f \circ T d\mu \right)$$

y como esto es cierto para todo $x' \in X'$ entonces se obtiene

$$\int_{\Omega} f \circ T d\mu = \int_{\Omega'} f dT(\mu),$$

cumpléndose así la prueba. $\square$

Sean $(S, \mathcal{A}, \mu)$ y $(T, \mathcal{A}', \nu)$ espacios de medida tal que μ, ν son medidas σ -finitas. Sabemos de la teoría de la medida clásica que existe una σ -medida λ definida en $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}'$. Con esto en mente y tomando a X como un espacio de Banach y a $\text{bor}(X)$ como los borelianos de X , enunciamos el teorema de Fubini.

Corolario 2.3.6. (*Teorema de Fubini*). Sean $(S, \mathcal{A}, \mu)$ y $(T, \mathcal{A}', \nu)$ espacios de medida, f una función Bochner-integrable con respecto a λ y X un espacio de Banach ($f : S \times T \rightarrow X$). Entonces

(i) Las funciones $f_s : T \rightarrow X$ dada por $f_s(t) = f(s, t)$ y $f_t : S \rightarrow X$ dada por $f_t(s) = f(s, t)$ son $(\mathcal{A}', \text{bor}(X))$ y $(\mathcal{A}, \text{bor}(X))$ medibles respectivamente.

(ii) Las funciones

$$g(s) = \int_T f_s(t) d\nu(t), \quad h(t) = \int_S f_t(s) d\mu(s)$$

son Bochner integrables (con respecto a μ y ν respectivamente) de S en X y T en X respectivamente y

(iii)

$$\int_{S \times T} f(s, t) d\lambda(s, t) = \int_S \int_T f_s(t) d\nu(t) d\mu(s) = \int_T \int_S f_t(s) d\mu(s) d\nu(t).$$

Demostración. Aplicación del Teorema 2.3.4 y aplicación de los teoremas de Tonelli y Fubini al caso real. $\square$

Recordemos que si μ, ν son medidas σ -finitas definidas en $\text{bor}(\mathbb{R}^n)$, $\theta(s, t) = s + t$ es la operación del grupo $\mathbb{R}^n$, entonces se define el producto de convolución de μ y ν , $\mu * \nu$ como la medida imagen del producto $\mu \otimes \nu$ a través de θ .

Gracias al teorema de Fubini y al teorema del cambio de variable enunciaremos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.7. Sean μ, ν medidas σ -finitas definidas en $\text{bor}(\mathbb{R}^n)$ y X un espacio de Banach. Si f es Bochner $\mu * \nu$ -integrable y $f \circ \theta$ es Bochner $\mu \otimes \nu$ -integrable, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d(\mu * \nu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(s + t) d\nu(t) d\mu(s) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(s + t) d\mu(s) d\nu(t).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f d(\mu * \nu) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f \circ \theta(s, t) d\mu \otimes \nu(s, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(s + t) d\nu(t) d\mu(s) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(s + t) d\mu(s) d\nu(t). \end{aligned} \quad \square$$

La Integral de Bochner como medida vectorial

En [21] se enuncia y demuestra la siguiente propiedad.

Proposición 2.3.8. Sea f una función Bochner μ -integrable, entonces la función $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ dada por $\nu(E) = \int_E f d\mu$ es una medida vectorial μ -continua, de variación acotada y además

$$|\nu|(E) = \int_E \|f\| d\mu, \quad \text{para cada } E \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Ver [21], Teorema 4, Página 46. □

Adicionalmente,

Proposición 2.3.9. Si $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ está dada por $\nu(E) = \int_E f d\mu$, entonces su semivariación es

$$\|\nu\|(E) = \sup_{\|x'\| \leq 1} \int_E |x' \circ f| d\mu,$$

donde $x' \in X'$ y $E \in \mathcal{A}$.

Demostración. Es una demostración similar a la Proposición 2.3.8 dada en [21] sólo que aplicada a $|x' \circ \nu|$. Adicionalmente al finalizar la demostración nos encontramos con la siguiente igualdad

$$|x' \circ \nu|(E) = \int_E |x' \circ f| d\mu.$$

Tomando el supremo sobre los $\|x'\| \leq 1$, obtenemos que

$$\|\nu\|(E) = \sup_{\|x'\| \leq 1} \int_E |x' \circ f| d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{A}. \quad \square$$

2.4. Integral de Bartle - Lewis.

En esta sección, sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, $\mathbb{K}$ el campo de los números reales o complejos, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible (es decir que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para $B \in \text{bor}(\mathbb{K})$) y ν una medida vectorial σ -aditiva.

En 1955 en [8], Bartle y sus colegas definieron la ν -integrabilidad de una función de valor escalar.

Definición 2.4.1. Sean f una función escalar medible, Y un espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Diremos que f es ν -integrable, si existe una sucesión de funciones simples tal que

- (i) $f_n(w) \rightarrow f(w)$ ν c.t.p y
- (ii) La sucesión $(\int_E f_n d\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en la norma de Y para cada $E \in \mathcal{A}$.

El límite de esta sucesión de integrales está definido como la integral de f con respecto a ν y sobre cada conjunto $E \in \mathcal{A}$, se escribe en simbolos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu = \int_E f d\nu.$$

En este artículo se desarrollan diferentes propiedades asociadas a esta integral y un año más tarde Robert Bartle en [7] extiende este concepto a una función vector valuada donde el producto de la función con la medida vectorial se hace a través de una función bilineal.

Después en 1970, Lewis en [36], definió el concepto de función ν -integrable sobre espacios hausdorffianos localmente convexos de la siguiente manera.

Definición 2.4.2. Sean f una función medible, Y un espacio hausdorffiano localmente convexo, Y' su dual con $y' \in Y'$ y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Diremos que f es ν -integrable si

- (i) f es $y' \circ \nu$ -integrable para cada $y' \in Y'$, es decir

$$\int_{\Omega} |f| d|y' \circ \nu| < \infty, \text{ para cada } y' \in Y'.$$

- (ii) Si para cada $E \in \mathcal{A}$ existe un elemento de Y denotado por $\int_E f d\nu$, tal que

$$y' \left(\int_E f d\nu \right) = \int_E f d(y' \circ \nu), \text{ para cada } y' \in Y'.$$

En [36], en el Teorema 2.4, se demuestra, que si Y es secuencialmente completo la ν -integrabilidad de f definida por Lewis coincide con la definición dada por Bartle y sus colegas en el artículo [8] en 1955. En particular ambas definiciones son equivalentes en los espacios de Banach.

Enunciaremos las propiedades siguientes.

Propiedades

- (i) Si f es una función medible y ν -acotada en E , entonces f es ν -integrable y además

$$\left\| \int_E f d\nu \right\| \leq \|f\|_{\infty} \|\nu\|(E).$$

- (ii) Si f es ν -integrable y T es un operador lineal y continuo de un espacio de Banach Y en un espacio de Banach X entonces f es $T \circ \nu$ ($T(\nu)$)-integrable y

$$\int_E f dT(\nu) = T \left(\int_E f d\nu \right).$$

- (iii) Si f es ν -integrable entonces

$$\lim_{\|\nu\|(E) \rightarrow 0} \int_E f d\nu = 0.$$

- (iv) Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones ν -integrables que converge a f ν -c.t.p. Entonces f es ν -integrable si

$$\lim_{\|\nu\|(E) \rightarrow 0} \int_E f_n d\nu = 0$$

uniformemente para $n = 1, 2, \dots$. En este caso tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu = \int_E f d\nu.$$

Para las demostraciones de estas propiedades, ver [8].

Esta integral también tiene un teorema de la convergencia dominada.

Teorema 2.4.3. (*Teorema de la convergencia dominada*). Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones ν -integrables que convergen a f ν -c.t.p. Si g es una función ν -integrable tal que $|f_n| \leq g$, ν -c.t.p., entonces f es ν -integrable y además

$$\int_E f d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu, \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Ver [24], Teorema 10, Página 328. □

La integral de Bartle-Lewis como medida vectorial.

Dada una función f medible y ν una medida vectorial, entonces la función $\mu_f : \mathcal{A} \rightarrow Y$ dada por

$$\mu_f(E) = \int_E f d\nu,$$

cumple con las siguientes propiedades:

- (i) μ_f es una medida vectorial para cada $E \in \mathcal{A}$ la cual es absolutamente continua con respecto a $\|\nu\|$.
- (ii) La semivariación de μ_f está dada por

$$\|\mu_f\|(E) = \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_E |f| d|y' \circ \nu| \right\}, \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

- (iii) f es integrable con respecto a $|\nu|$ si y sólo si μ_f es de variación acotada y en este caso

$$|\mu_f|(E) = \int_E |f| d|\nu|, \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

¿Qué se puede decir sobre medidas vectoriales producto, teorema de Fubini y convolución de medidas vectoriales?

En 1967, Duchon y Kluvánek en [23] introdujeron la noción de productos tensoriales para medidas vectoriales en espacios localmente convexos.

En la literatura ha habido una serie de documentos que trata con productos de medidas vectoriales y Teoremas tipo Fubini para estos productos. Si las medidas involucradas no son de variación acotada, surgen dificultades sobre la integrabilidad de las secciones y la medibilidad de la integral parcial. Parece que estas dificultades no surgen cuando los productos son formados con respecto al producto tensorial inyectivo. Esto sugiere que el producto de medidas vectoriales con el producto tensorial inyectivo puede ser la fuente más prometedora de buenos Teoremas tipo Fubini con respecto a productos de estas medidas.

Teorema 2.4.4. (*Teorema de la Medida Producto*). Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\Omega', \mathcal{B})$ espacios medibles, X, Y espacios de Banach, $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ el producto tensorial inyectivo de X e Y y $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$, $\nu : \mathcal{B} \rightarrow Y$ medidas vectoriales. Entonces existe una única medida vectorial $\lambda : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ y todo $B \in \mathcal{B}$.

Demostración. Ver [23], página 110. □

Nosotros nos quedaremos con la versión del Teorema de Fubini dada por Donald Story en [53] para medidas vectoriales borelianas regulares y para funciones continuas de valor real definidas en $S \times T$ donde S y T son conjuntos compactos. Denotamos a este espacio por $\mathcal{C}(S \times T)$.

Teorema 2.4.5. (*Teorema de Fubini*) Sean S, T espacios compactos hausdorffianos, X e Y espacios de Banach. Supongamos que $\mu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ y $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ medidas vectoriales. Si $h \in \mathcal{C}(S \times T)$, entonces

$$\int_{S \times T} h(s, t) d(\mu \otimes \nu)(s, t) = \int_S \left[\int_T h(s, t) d\mu(t) \right] \otimes d\nu(s).$$

Si en adición las medidas μ y ν son medidas regulares, entonces

$$\int_{S \times T} h(s, t) d\lambda(s, t) = \int_{S \times T} h(s, t) d(\mu \otimes \nu)(s, t),$$

donde λ es la única medida boreliana regular obtenida de extender a $\mu \otimes \nu$ de $\text{bor}(S) \times \text{bor}(T)$ a $\text{bor}(S \times T)$.

Notemos que la segunda parte de este teorema implica un resultado de una medida producto que se extiende a $\text{bor}(S \times T)$. En [53] Story enuncia la existencia de una medida producto cuando éstas son regulares. En la sección de medidas vectoriales radonianas se demuestran teoremas similares a los ya enunciados para todo $\text{bor}(S \times T)$. Kawabe en [33] tiene enunciados similares para medidas vectoriales τ -suaves. En ambos casos se define el producto de convolución de dos medidas vectoriales y sus propiedades.

En conclusión el estudio de la medida producto, Teorema de Fubini y producto de Convolución en el caso de medidas vectoriales ha generado resultados parciales debido a las dificultades que se presentan.

¿Qué se puede decir del teorema del cambio de variable para esta integral?

Con la motivación de desarrollar una transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$ para medidas vectoriales, notamos que un cambio de variable para la función f , específicamente una traslación, implicaría una medida vectorial invariante bajo traslaciones para que el valor de la integral se siga manteniendo. Esto origina la siguiente definición y el siguiente teorema.

Definición 2.4.6. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medible, X un espacio de Banach y $\nu : \text{bor}(\mathcal{A}) \rightarrow X$ una medida vectorial. Diremos que ν es *invariante bajo traslaciones* si $\nu(E + a) = \nu(E)$, para todo $E \in \mathcal{A}$.

En el caso en que el espacio medible es $(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n))$, las medidas vectoriales invariantes bajo traslaciones están determinadas por un vector que depende del espacio X , múltiplo la medida de Lebesgue. Más específicamente en el caso de los espacios de Hilbert separables.

Teorema 2.4.7. (*Medidas Vectoriales invariantes bajo traslaciones*). Sea $(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ un espacio de medida donde λ es la medida de Lebesgue. Sean H un espacio de Hilbert separable y $\mu : \text{bor}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H$. Si μ es invariante bajo traslaciones entonces $\mu = x_0 \lambda$, con $x_0 \in H$.

Demostración. Sea $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de H . Para cada j definimos escalarmente una función $\nu : \text{bor}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\nu(A) = \langle \mu(A), e_j \rangle$, que resulta ser una medida invariante bajo traslaciones en $\text{bor}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto existe un $c_j \in \mathbb{C}$ talque $\langle \mu(A), e_j \rangle = c_j \lambda(A)$ para todo $A \in \text{bor}(\mathbb{R}^n)$. Ahora

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mu(A), e_j \rangle e_j = \lambda(A) \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = \lambda(A) x_0,$$

donde $x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \in H$ y es independiente de A . Es claro que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$ converge puesto que

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j = \frac{\mu(A)}{\lambda(A)}, \quad \text{para } \lambda(A) \neq 0. \quad \square$$

2.5. Integral de Stefánsson.

Para desarrollar esta sección nos basaremos en [52]. Stefánsson define el concepto de función $\otimes$ -integrable. Su definición es parecida a la definición de la integral de Bochner.

En esta sección $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible, X, Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, X', Y' sus respectivos duales, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva y $f : \Omega \rightarrow X$ una función ν -medible.

Definición 2.5.1. Una función $f : \Omega \rightarrow X$ ν -medible es $\otimes$ -integrable (en el sentido de Stefánsson) si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω en X tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f(w) - f_n(w)\| d|y' \circ \nu| \right\} = 0.$$

Observación 2.5.2. (i) Se puede demostrar de esta definición que $(\int_{\Omega} f_n \otimes d\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $X \widehat{\otimes}_{\epsilon} Y$.

(ii) Esta integral queda definida para cada $E \in \mathcal{A}$ y por ser $X \widehat{\otimes}_{\epsilon} Y$ un espacio de Banach el $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \otimes d\nu$ existe y es único.

(iii) Si f es $\otimes$ -integrable entonces $\int_E f \otimes d\nu$ es el vector tal que

$$\int_E f \otimes d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \otimes d\nu.$$

(iv) Se puede demostrar que este límite es independiente de la escogencia de las $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Propiedades

- (i) Una función f ν -medible es $\otimes$ -integrable si y sólo si $\|f\|$ es ν -integrable.
- (ii) Si f es ν -medible y acotada, entonces f es $\otimes$ -integrable.
- (iii) Sean f, g dos funciones ν -medibles. Si g es $\otimes$ -integrable y $\|f\| \leq \|g\|$ ν -c.t.p, entonces f es $\otimes$ -integrable.
- (iv) Si f es una función $\otimes$ -integrable y definimos $\mu_f : \mathcal{A} \rightarrow X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ por $\mu_f(E) = \int_E f \otimes d\nu$, entonces

$$\lim_{\|\nu\|(E) \rightarrow 0} \mu_f(E) = 0, \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

Para las demostraciones de estas propiedades, Ver [52], Páginas 928 – 929.

Esta integral presenta también un Teorema de la Convergencia Dominada.

Teorema 2.5.3. (*Teorema de la Convergencia Dominada*). Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\otimes$ -integrables que convergen a f ν -c.t.p. Si existe una función g $\otimes$ -integrable tal que $\|f_n\| \leq \|g\|$ ν -c.t.p, entonces f es $\otimes$ -integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \otimes d\nu = \int_E f \otimes d\nu, \quad E \in \mathcal{A}.$$

De hecho este límite es uniforme con respecto a $E \in \mathcal{A}$.

Demostración. Ver [52], Teorema 3, Página 931. □

La $\otimes$ -integral como medida vectorial

En [52] se demuestran los siguientes enunciados.

Proposición 2.5.4. Sea f una función $\otimes$ -integrable y $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ definida por

$$\lambda(E) = \int_E f(w) \otimes d\nu(w),$$

entonces:

- (i) λ es una medida vectorial numerablemente aditiva.
- (ii) $\|\lambda\|(E) = \sup\{\int_E |x' \circ f| d|y' \circ \nu| : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1\}$.
- (iii) λ es de variación acotada si y sólo si $\|f\|$ es $|\nu|$ -integrable, y además

$$|\lambda|(E) = \int_E \|f\| d|\nu|.$$

Demostración. Ver [52], Teorema 2, Páginas 929 – 931. □

2.6. Integral de Bartle

Esta integral considera el caso de una función vector valuada y una medida vectorial cuyo producto se hace a través de una función bilineal. Esta generalización permite mantener algunas propiedades, pero otras se pierden. El Teorema de la Convergencia Dominada cambia por un teorema de mayor restricción y se conoce como el Teorema de la Convergencia Acotada. Resaltaremos algunas propiedades de la integral de Bartle. Para un mayor detalle en la demostración de estas propiedades ver [7] y [41].

En esta sección $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible, X, Y, Z , espacios de Banach, $b : X \times Y \rightarrow Z$ una función bilineal y continua, $f : \Omega \rightarrow X$ una función (b, ν) -medible y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva.

Definición 2.6.1. Sea $f : \Omega \rightarrow X$ una función (b, ν) -medible. Diremos que f es (b, ν) -integrable si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tal que

- (i) $f_n(w)$ converge a $f(w)$ ν_b -c.t.p.
- (ii) La sucesión $\left\{ \int_E b(f_n(w), d\nu(w)) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Z para cada $E \in \mathcal{A}$.

Si $f : \Omega \rightarrow X$ es una función (b, ν) -integrable, entonces *la integral de f respecto a la función bilineal b y la medida vectorial ν es el vector*

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \lim_n \int_E b(f_n(w), d\nu(w))$$

donde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples que satisface las condiciones de la definición anterior. El vector $\int_E b(f(w), d\nu(w))$ así definido se llama *la (b, ν) -integral de Bartle*. Denotaremos por $int_b(\Omega, X)$ al conjunto de todas las funciones (b, ν) -integrables. Este conjunto es un espacio vectorial.

Definición 2.6.2. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y, Z espacios de Banach, $b : X \times Y \rightarrow Z$ una función bilineal y continua y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Diremos que $E \in \mathcal{A}$ es un conjunto ν_b -nulo si $\|\nu\|_b(E) = 0$.

Definición 2.6.3. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y, Z espacios de Banach, $b : X \times Y \rightarrow Z$ una función bilineal y continua y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Una función $f : \Omega \rightarrow X$ es ν_b -acotada si existe una constante $M > 0$ tal que $\|f(w)\| \leq M$ para todo w en un conjunto ν_b -nulo. Si f es ν_b -acotada, se define

$$\|f\|_{\infty, b} = \inf \{ M : \|f(w)\| \leq M, w \in E^c \text{ y } \|\nu\|_b(E) = 0 \}.$$

Propiedades de la integral de Bartle

- (i) La función $H : int_b(\Omega, X) \rightarrow Z$ dada por $H(f) = \int_\Omega b(f(w), d\nu(w))$ es lineal.
- (ii) Si $f : \Omega \rightarrow X$ es una función ν_b -acotada y (b, ν) -medible entonces f es (b, ν) -integrable y

$$\left\| \int_E b(f(w), d\nu(w)) \right\| \leq \|f\|_{\infty, b} \|\nu\|_b(E), \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

(iii) Si f es (b, ν) -integrable entonces

$$\lim_{\|\nu\|_b(E) \rightarrow 0} \int_E b(f(w), d\nu(w)) = 0, \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

(iv) Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach, $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible ν -integrable. Entonces dado $x \in X$, la función vectorial $(fx)(w) = f(w)x$ de Ω en X es $(\otimes, \nu)$ -integrable y además

$$\int_E (f(w)x) \otimes d\nu(w) = x \otimes \int_E f(w) d\nu(w), \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Las demostraciones (i),(ii) y (iii) son similares a las hechas en (2.5.9) y (2.5.10) en [41]. Demostraremos (iv). La función fx es ν medible ya que $(xf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|xf_n(w) - xf(w)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x(f_n(w) - f(w))\| \leq \|x\| \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(w) - f(w)| = 0.$$

Se puede probar que si $f = \sum_{k=1}^n x_i \chi_{E_i}$ es una función simple entonces

$$\int_E fx(w) \otimes d\nu(w) = x \otimes \int_E f(w) d\nu(w).$$

Por tanto $(\int_E f_n x(w) \otimes d\nu(w))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy ya que $(\int_E f_n(w) d\nu(w))_{n \in \mathbb{N}}$ lo es. La integrabilidad de f y fx nos permite concluir el enunciado. $\square$

Teorema 2.6.4. (*Teorema de la Convergencia Acotada*). Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones (b, ν) -integrables de Ω en X las cuales convergen ν_b -c.t.p a una función $f : \Omega \rightarrow X$. Si existe una constante $M > 0$ tal que $\|f_n\|_{\infty, b} \leq M$ ν_b -c.t.p, $w \in E^c$, entonces f es (b, ν) -integrable y

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E b(f_n(w), d\nu(w)) \text{ para cada } E \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Su demostración es una generalización del Teorema 2.5.11 en [41]. $\square$

La integral de Bartle como medida vectorial

Proposición 2.6.5. Si f es una función (b, ν) -integrable y definimos $\mu_f : \mathcal{A} \rightarrow Z$ dada por $\mu_f(E) = \int_E b(f, d\nu)$, Entonces μ_f es una medida vectorial σ -aditiva.

Demostración. Ver [41], Teorema 2.6.11, Página 42. $\square$

Observación 2.6.6. (i) Cuando b es la función bilineal tensorial, la variación y la semi-variación coincide con la dada por Stefánsson en la proposición 2.5.4

(ii) En [42] se demuestra en el Teorema 8 (ii) que

$$\|\lambda\|(A \times B) = \|\mu\|(A)\|\nu\|(B),$$

para todo $A \in \text{bor}(S)$ y $B \in \text{bor}(T)$, donde λ es la medida vectorial radoniana σ -aditiva producto de las medidas vectoriales radonianas σ -aditivas μ y ν . Vamos a hacer la demostración de este teorema utilizando la proposición 2.5.4. En efecto en el Teorema 7 en [42] se definió a λ como

$$\lambda(E) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t),$$

donde $E \in \text{bor}(S \times T)$ y $E^t = \{s \in S : (s, t) \in E\}$ es la t -sección de E . Aplicando la fórmula de la proposición 2.5.4 a $A \times B$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|\lambda\|(A \times B) &= \sup \left\{ \int_T |x' \circ \mu|((A \times B)^t) d|y' \circ \nu|(t) : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_T |x' \circ \mu|(A) \chi_B d|y' \circ \nu|(t) : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_B |x' \circ \mu|(A) d|y' \circ \nu|(t) : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1 \right\} \\ &= \sup \{|x' \circ \mu|(A) |y' \circ \nu|(B) : \|x'\| \leq 1, \|y'\| \leq 1\} \\ &= \|\mu\|(A) \|\nu\|(B). \end{aligned}$$

Observación 2.6.7. Si $Z = X \hat{\otimes}_\epsilon Y$ y $b : X \times Y \rightarrow Z$ es la función bilineal tensorial $b(x, y) = x \otimes y$ entonces se acostumbra a escribir

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \int_E f(w) \otimes d\nu(w).$$

Mostraremos con un ejemplo el cálculo de la integral de Bartle para algunas funciones bilineales específicas, pero antes una definición.

Definición 2.6.8. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de tamaños arbitrarios. Definimos el producto tensorial $A \otimes B$ como la matriz dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \dots \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3a & 4a & 2b & 3b & 4b \\ 5a & 6a & 7a & 5b & 6b & 7b \\ 2c & 3c & 4c & 2d & 3d & 4d \\ 5c & 6c & 7c & 5d & 6d & 7d \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.6.9. Sean $(\mathbb{R}^2, \text{bor}(\mathbb{R}^2))$ el espacio medible, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$ y $\nu : \text{bor}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\nu(E) = (\lambda(E), \delta_a(E))$ donde λ es la medida de Lebesgue y δ_a es la medida de Dirac. Entonces

1. Sea la función bilineal $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por el producto escalar $b(x, y) = (x|y)$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_E b(f, d\nu) &= \int_E b(f(x, y), d(\lambda(x, y), \delta_a(x, y))) \\ &= \int_E [(x + y)d\lambda(x, y) + (x - y)d\delta_a(x, y)] \\ &= \int_E (x + y)d\lambda(x, y) + \int_E (x - y)d\delta_a(x, y). \end{aligned}$$

2. Si la función bilineal $b = \otimes$, entonces

$$\begin{aligned} \int_E f \otimes d\nu &= \int_E (x + y, x - y) \otimes (d\lambda(x, y), d\delta_a(x, y)) \\ &= \int_E \begin{pmatrix} (x + y)d\lambda(x, y) & (x + y)d\delta_a(x, y) \\ (x - y)d\lambda(x, y) & (x - y)d\delta_a(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \int_E (x + y)d\lambda(x, y) & \int_E (x + y)d\delta_a(x, y) \\ \int_E (x - y)d\lambda(x, y) & \int_E (x - y)d\delta_a(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que es lo que se espera ya que $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \cong \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

3. Sean la medida vectorial $\mu : \text{bor}([0, 1]) \rightarrow L^1(\lambda)$ dada por $\mu(E) = \chi_E$, λ la medida de Lebesgue y ν la medida vectorial definida anteriormente. Estas medidas son radonianas, la primera por ser λ -continua y la segunda porque cada componente es radoniana. Entonces la medida producto de μ y ν , β es una medida de $\text{bor}([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ en $L^1(\lambda) \widehat{\otimes}_\epsilon \mathbb{R}^2$, dada por

$$\beta(E) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(E^t) \otimes d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{E^t} \otimes d\nu(t) = \nu(E^t) = (\lambda(E^t), \delta_a(E^t)).$$

4. Sean $([0, \infty], \text{bor}([0, \infty]), \lambda)$ un espacio de medida donde λ es la medida de Lebesgue. Consideremos $\nu : \text{bor}([0, \infty]) \rightarrow l^2$ dada por

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(A \cap [i-1, i])}{2^{i/2}} e_i,$$

donde $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ define la base canónica de l^2 . Sea μ la medida definida anteriormente y calculemos β , para un $E \in \text{bor}([0, 1] \times [0, \infty))$.

$$\beta(E) = \int_{[0, \infty)} \mu(E^t) \otimes d\nu(t) = \int_{[0, \infty)} \chi_{E^t} \otimes d\nu(t) = \nu(E^t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(E^t \cap [i-1, i])}{2^{i/2}} e_i.$$

2.7. Medidas Vectoriales Radonianas y Aportes

En esta sección describiremos el papel de las medidas vectoriales radonianas en el desarrollo de la teoría de la medida y la integración vectorial. Medida producto, Teorema de Fubini, producto de convolución y Teorema de Representación de Riesz son algunos de los tópicos que desarrollaremos en esta sección. En el desarrollo de estos conceptos utilizamos la definición de la integral de Bartle en el caso en que la función bilineal es la función tensorial.

Definición 2.7.1. Sean T un espacio topológico hausdorffiano y X un espacio de Banach. Una σ -medida vectorial $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow X$ es radoniana, si $x' \circ \nu$ es una medida radoniana con valores complejos para toda forma lineal $x' \in X'$. Recordemos que si $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow X$ es una medida vectorial radoniana σ -aditiva, entonces $|x' \circ \nu|$ es una medida finita con valores reales.

De manera general, se demuestra en [42] una propiedad de regularidad para las medidas vectoriales radonianas.

Teorema 2.7.2. Sea T un espacio topológico hausdorffiano. Una σ -medida vectorial $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow X$ es radoniana si y sólo si para todo conjunto boreliano B y todo $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset B$ tal que $\|\nu\|(B - K) < \epsilon$.

Demostración. Ver [42], Teorema 3, Página 62. □

A continuación enunciamos la siguiente proposición que nos permite dar algunos ejemplos de medidas vectoriales radonianas.

Proposición 2.7.3. Sean $(T, \text{bor}(T))$ un espacio medible, X un espacio de Banach, μ una medida radoniana positiva y finita y $\beta : \text{bor}(T) \rightarrow X$ una medida vectorial μ -continua. Entonces β es una medida vectorial radoniana.

Demostración. Como β es μ -continua, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\mu(A) < \delta$ entonces $\|\beta\|(A) < \epsilon$, para todo $A \in \text{bor}(T)$. Como μ es una medida radoniana finita entonces se tiene que para todo boreliano B y todo $\delta > 0$, existe un compacto K tal que $\mu(B - K) < \delta$. Luego por la μ -continuidad de β se tiene $\|\beta\|(B - K) < \epsilon$, y por el Teorema 2.7.2, β es radoniana. □

Ejemplo 2.7.4. Sea $([0, 1], \text{bor}([0, 1]), \lambda)$ un espacio de medida donde λ es la medida de Lebesgue. Definimos $\nu : \text{bor}([0, 1]) \rightarrow L^1(\lambda)$ como $\nu(A) = \chi_A$. Entonces:

- (i) ν es una medida vectorial σ -aditiva.
- (ii) ν es de variación acotada.
- (iii) ν es λ -continua, es decir si $\lambda(A) = 0$ entonces $\nu(A) = 0$, λ -c.t.p.
- (iv) ν es radoniana.

Ejemplo 2.7.5.

1. La medida inducida por la integral de Bochner es una medida radoniana si la medida con respecto a la que se está integrando es una medida radoniana finita.

2. Nuevamente, sean $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \text{bor}([0, 1])$ y λ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Si $E \subset [0, 1]$ es un conjunto medible, definamos

$$\lambda_n(E) = \int_E \sin(2^n \pi t) dt,$$

y $F : \text{bor}([0, 1]) \rightarrow c_0$ por $F(E) = (\lambda_n(E))_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces F es una medida vectorial radoniana por ser la medida de Lebesgue finita en $[0, 1]$ y además F es λ -continua.

La Medida Producto y el Teorema de Fubini

En el caso vectorial, en [42] se enuncia y demuestra la existencia y unicidad de la medida producto para valores en espacios de Banach separables. Lo enunciamos a continuación.

Teorema 2.7.6. *(Teorema de la Medida Producto). Sean S y T espacios topológicos hausdorffianos y X e Y espacios de Banach separables. Sean $\mu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ y $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ medidas vectoriales radonianas σ -aditivas. Entonces existe sólo una medida vectorial radoniana σ -aditiva $\lambda : \text{bor}(S \times T) \rightarrow X \hat{\otimes}_\epsilon Y$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in \text{bor}(S)$ y $B \in \text{bor}(T)$.*

Demostración. Ver [42], Teorema 7, página 65. □

También se tiene un teorema de Fubini cuando μ y ν son medidas radonianas con valores en espacios de Banach separables X e Y respectivamente. En el enunciado que sigue λ es la medida radoniana producto dada en el Teorema 2.7.6. Teniendo en cuenta que si Ω es un espacio topológico, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es boreliana si la imagen inversa de todo conjunto boreliano es boreliano, entonces

Teorema 2.7.7. *(Teorema de Fubini) Sean S y T espacios topológicos hausdorffianos, X e Y espacios de Banach separables y $\mu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ y $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ medidas vectoriales radonianas. Si $f : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ es una función boreliana y acotada, entonces los siguientes enunciados son verdaderos:*

- (i) $f_t : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_t(s) = f(s, t)$ (t fijo) es μ -integrable.
- (ii) La función vectorial $t \rightarrow \int_S f_t(s) d\mu(s)$ de T en X es $(\otimes, \nu)$ -integrable y
- (iii)

$$\int_{S \times T} f(s, t) d\lambda(s, t) = \int_T \left(\int_S f_t(s) d\mu(s) \right) \otimes d\nu(t).$$

Un enunciado similar es válido para $f_s : T \rightarrow \mathbb{R}$, $f_s(t) = f(s, t)$.

Demostración. Ver [42], Teorema 9, Página 67. □

El Producto de Convolución de Medidas

Para generalizar lo hecho por Gómez y Restrepo en [29] con respecto al producto de convolución, se necesitan dos detalles adicionales para definirlo en el caso vectorial. El primero

la linealización de la operación multiplicación del álgebra y el segundo una condición de continuidad sobre la linealización.

Sean X una álgebra de Banach y S un grupo topológico con una topología completamente regular. Denotamos por m a la función multiplicación $(x, y) \mapsto m(x, y) = xy$ del álgebra X . Es claro que m es una función bilineal y continua, pues $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. La linealización de m se denotará por $\bar{m}$ y por tanto $\bar{m}(x \otimes y) = xy$. Si $z = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$, entonces

$$\bar{m}(z) = \sum_{k=1}^n \bar{m}(x_k \otimes y_k) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Un diagrama nos muestra lo que anteriormente hemos comentado.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{m} & X \\ \downarrow \tau & \searrow \bar{m} & \\ X \otimes X & & \end{array} \quad \bar{m}(x \otimes y) = xy$$

Haremos la misma hipótesis que Kawabe hace en [33], es una hipótesis ciertamente muy fuerte que explicaremos en la observación 2.7.11:

$$\|\bar{m}(z)\|_X \leq \|z\|_\epsilon. \quad (2.1)$$

Esta hipótesis asegura que la linealización $\bar{m} : X \otimes X \rightarrow X$ es continua respecto a la ϵ -norma en el producto tensorial y por tanto se puede considerar, como en efecto lo haremos, que $\bar{m}$ es una función lineal y continua de $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$ en X .

Definición 2.7.8. Sean S un grupo topológico y μ y ν dos medidas radonianas en S con valores en una álgebra de Banach X que satisface la condición (2.1). Sea λ la medida radoniana producto definida en $\text{bor}(S \times S)$ y con valores en $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$. El *producto de convolución* de estas medidas es la medida $\gamma = \mu * \nu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ definida por

$$\gamma(A) = \mu * \nu(A) = \bar{m} \circ \theta_\lambda(A) = \bar{m}(\lambda(\theta^{-1}(A))).$$

En [43] se demuestra que el producto de convolución de dos medidas radonianas con valores en una álgebra de Banach que satisface la condición (2.1) es una medida radoniana. (Ver Teorema 6, Página 56.)

Debido al Teorema 2.7.7, los siguientes teoremas nos permiten calcular la integral de una función boreliana y acotada con respecto al producto de convolución y mostrar su unicidad.

Teorema 2.7.9. Sean S un grupo topológico, μ y ν medidas vectoriales radonianas σ -aditivas, definidas en $\text{bor}(S)$ y con valores en una álgebra de Banach X separable que satisface la condición (2.1). Si $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función boreliana y acotada, entonces

$$\int_S f(x) d(\mu * \nu)(x) = \int_S \int_S f(st) d\mu(s) d\nu(t).$$

Demostración. Ver [43], Teorema 8, Página 59. □

Teorema 2.7.10. Sean S un grupo topológico, μ y ν medidas radonianas en $\text{bor}(S)$ con valores en una álgebra de Banach X separable que satisface la condición (2.1). Entonces existe una y sólo una medida radoniana $\gamma : \text{bor}(S) \rightarrow X$ tal que

$$\int_S f(x) d\gamma(x) = \int_S \int_S f(st) d\mu(s) d\nu(t)$$

para toda función boreliana y acotada $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración. Ver [43], Teorema 8, Página 59. □

Para más detalles y propiedades del producto de convolución ver [43].

Observación 2.7.11. (i) Es fácil ver que $\overline{m}$ es una función lineal y continua con respecto a la π -norma, es decir $\|\overline{m}(z)\| \leq \|\overline{m}(z)\|_\pi$. En efecto $\|\overline{m}(z)\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| \|y_k\|$.

(ii) En general $\|z\|_\epsilon \leq \|z\|_\pi$, pero la igualdad puede darse. Pisier en [40] demostró que existen espacios de Banach separables tal que $X \widehat{\otimes}_\epsilon X = X \widehat{\otimes}_\pi X$. Para estos espacios llamados espacios de Pisier vale que $\|z\|_\epsilon = \|z\|_\pi$ para todo $z \in X \otimes X$.

(iii) Existe una clase de álgebras de Banach para los cuales $\|\overline{m}(z)\| \leq \|z\|_\epsilon$. Si $X = \mathcal{C}(\Omega)$ que es el espacio de las funciones continuas definidas en el espacio topológico compacto Ω y con valores en $\mathbb{K}$, entonces $\mathcal{C}(\Omega) \widehat{\otimes}_\epsilon \mathcal{C}(\Omega)$ es isométricamente isomorfo al espacio de Banach $\mathcal{C}(\Omega \times \Omega)$ de las funciones continuas de $\Omega \times \Omega$ en $\mathbb{K}$ con la norma del supremo por medio de la isometría definida así: si $z = \sum_{k=1}^n f_k \otimes g_k$, se define $J(z)(s, t) = \sum_{k=1}^n f_k(s) g_k(t)$ (ver [21], Páginas 224 y 225). Entonces

$$\|\overline{m}(z)\|_{\mathcal{C}(\Omega)} = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n f_k(w) g_k(w) \right| : w \in \Omega \right\}.$$

Por otro lado

$$\|z\|_\epsilon = \|J(z)\|_{\mathcal{C}(\Omega \times \Omega)} = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^n f_k(s) g_k(t) \right| : (s, t) \in \Omega \times \Omega \right\} \geq \|\overline{m}(z)\|_{\mathcal{C}(\Omega)}.$$

Por consiguiente, $\|\overline{m}(z)\| \leq \|z\|_\epsilon$.

Teorema de representación de Riesz

Recordemos que si Ω es un espacio topológico compacto y J es una forma lineal continua en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K})$, entonces existe una y sólo una medida radoniana σ -aditiva compleja μ tal que

$$J(f) = \int_{\Omega} f d\mu,$$

para toda $f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{K})$. Lo que estamos diciendo es que toda forma lineal y continua J es representada por una medida radoniana compleja.

¿Qué pasa en el caso vectorial?

En primera instancia, sean T un espacio topológico compacto, $\mathcal{C}(T)$ el espacio de las funciones continuas de T en $\mathbb{C}$ con la norma del supremo, $bor(T)$, la σ -álgebra de los borelianos de T y X un espacio de Banach.

Entonces la primera pregunta que nos hacemos es, toda medida boreliana representa a toda forma lineal y continua $J : \mathcal{C}(T) \rightarrow X$?

La respuesta es si, toda medida boreliana $\mu : bor(T) \rightarrow X$ determina un operador continuo

$$f \rightarrow J(f) = \int_T f(t) d\mu(t)$$

de $\mathcal{C}(T)$ en X . La continuidad se tiene ya que f al ser continua sobre un compacto es acotada y medible por tanto f es integrable y además

$$\left\| \int_T f(t) d\mu(t) \right\| \leq \|f\| \|\mu\|(T).$$

Ahora la pregunta es será que toda forma lineal continua $J : \mathcal{C}(T) \rightarrow X$ es representada por una medida boreliana? En primera instancia, se puede demostrar que si J es una forma lineal y continua y es representada por una medida boreliana, lo es por una y sólo una medida boreliana, es decir, si μ, ν son dos medidas vectoriales radonianas de $bor(T)$ en el espacio de Banach X , J una forma lineal y continua de $\mathcal{C}(T)$ en X y J es representado por μ y ν , entonces $\mu(E) = \nu(E)$ para todo $E \in bor(T)$. Para contestar en que casos J es representado por una medida vectorial radoniana, sean H un espacio de Hilbert y $L(H)$ el espacio de los operadores lineales y continuos de H en H . Si $X = L(H)$ entonces J es representada por una y sólo una medida radoniana. En concreto, si $J : \mathcal{C}(T) \rightarrow L(H)$ es un operador lineal y continuo entonces existe una y sólo una medida radoniana $\mu : bor(T) \rightarrow L(H)$ que representa el operador J , es decir,

$$J(f) = \int_T f(t) d\mu(t), \text{ para toda } f \in \mathcal{C}(T).$$

Por último y no menos importante una aplicación del teorema de representación de Riesz en el caso vectorial permite mostrar que ciertos operadores son representados por una clase especial de medidas radonianas conocidas como las medidas espectrales y esto se conoce como la versión integral del teorema espectral.

La siguiente figura muestra las relaciones entre las diferentes integrales.

El sentido de las flechas indica una generalización de las integrales correspondientes.

RELACIONES ENTRE LAS INTEGRALES DE BOCHNER, BARTLE-LEWIS, STEFÁNSSON Y BARTLE

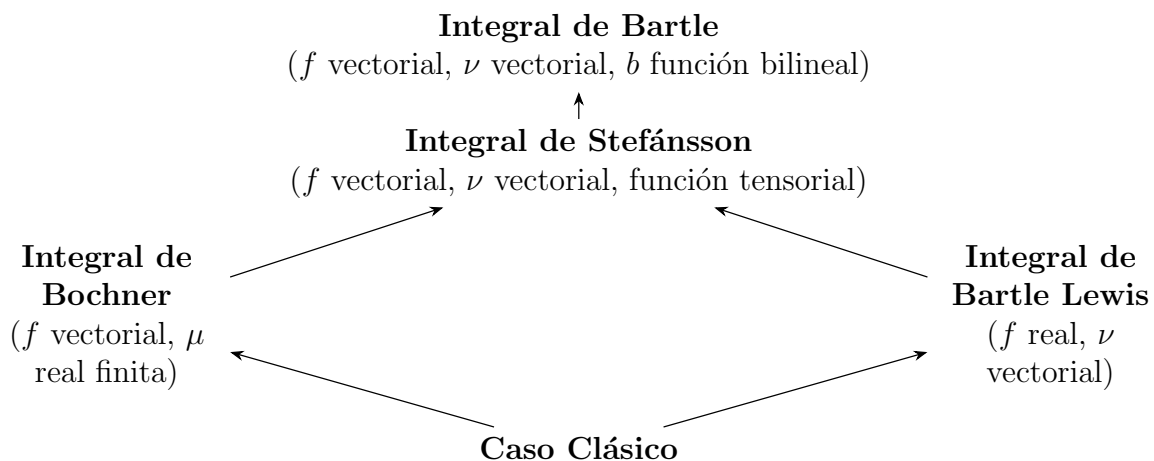


Figura 2.1. Relación entre las diferentes integrales.

Las siguientes tablas muestran las definiciones y algunas propiedades que poseen las diferentes integrales. Resaltamos entre ellas el Teorema de la Convergencia Dominada, la integral como medida vectorial, medida producto y Teorema de Fubini.

Definiciones de integrabilidad para funciones medibles	Función	Definición
	Bochner	Una función μ-medible, $f : \Omega \rightarrow X$ es <i>Bochner-integrable</i> si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \ f_n - f\ d\mu = 0.$ En este caso $\int_E f d\mu$ está definida para cada $E \in \mathcal{A}$ por $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu,$ donde $\int_E f_n d\mu$ ya es conocida previamente.
	Bartle-Lewis	Sean f función escalar medible, Y espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ-aditiva. Diremos que f es ν-integrable, si existe una sucesión de funciones simples tal que $f_n(w) \rightarrow f(w)$ ν c.t.p y la sucesión $(\int_E f_n d\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en la norma de Y para cada $E \in \mathcal{A}$. El límite de esta sucesión de integrales está definido como la integral de f con respecto a ν y sobre cada conjunto $E \in \mathcal{A}$, se escribe en símbolos $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\nu = \int_E f d\nu.$ Definición equivalente a: Diremos que f es ν-integrable si f es $y' \circ \nu$-integrable para cada $y' \in Y'$, es decir $\int_{\Omega} f d y' \circ \nu < \infty,$ y si para cada $E \in \mathcal{A}$ existe un elemento de Y denotado por $\int_E f d\nu$, tal que $y' \left(\int_E f d\nu \right) = \int_E f d(y' \circ \nu),$ para cada $y' \in Y'$.
	Stefánsson	Una función $f : \Omega \rightarrow X$ ν-medible es $\otimes$-integrable si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Ω en X tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\ y'\ \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \ f(w) - f_n(w)\ d y' \circ \nu \right\} = 0.$ Se puede demostrar de esta definición que $(\int_{\Omega} f_n \otimes d\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $X \widehat{\otimes}_{\epsilon} Y$, que esta integral queda definida para cada $E \in \mathcal{A}$ y que el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \otimes d\nu = \int_E f \otimes d\nu$ es llamada la $\otimes$-integral de f sobre E con respecto a ν.
	Bartle	Sea $f : \Omega \rightarrow X$ una función (b, ν)-medible. Diremos que f es (b, ν)-integrable si existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tal que (i) $f_n(w)$ converge a $f(w)$ ν_b-c.t.p. (ii) La sucesión $\left\{ \int_E b(f_n(w), d\nu(w)) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Z para cada $E \in \mathcal{A}$. Si $f : \Omega \rightarrow X$ es una función (b, ν)-integrable, entonces <i>La integral de f respecto a la función bilineal b y la medida vectorial ν es el vector</i> $\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \lim_n \int_E b(f_n(w), d\nu(w))$ El vector así definido se llama <i>la (b, ν)-integral de Bartle</i>

Tabla 2.1. Definiciones de Integrabilidad

	BOCHNER	BARTLE-LEWIS	STEFÁNSSON	BARTLE
Caso	f función vectorial μ -medible, medida μ real finita	f función escalar medible, ν vectorial	f función ν -medible, ν medida vectorial y función tensorial	f función vectorial ν -medible, ν medida vectorial y función bilineal.
Algunas Propiedades	f es Bochner- integrable si y sólo si $\ f\$ es integrable. - Si $T \in L(X, Y)$ y f Bochner integrable entonces $T \circ f$ es Bochner- integrable y $\int_{\Omega} T \circ f d\mu = T \left(\int_{\Omega} f d\mu \right).$	Si f es medible y ν -acotada entonces f es ν -integrable y $\left\ \int_E f d\nu \right\ \leq \ f\ _{\infty} \ \nu\ (E).$	f ν-medible es $\otimes$-integrable si y sólo si $\ f\$ es ν-integrable. - Si f es ν medible y ν-acotada entonces f es $\otimes$-integrable.	Si f es (b, ν) -medible y ν_b acotada entonces f es (b, ν) -integrable y $\left\ \int_E b(f, d\nu) \right\ \leq \ f\ _{\infty, b} \ \nu\ _b(E).$
La integral como medida vectorial	$\nu_f(E) = \int_E f d\mu$ medida vectorial σ-aditiva. $\nu_f (E) = \int_E \ f\ d\mu.$ $\ \nu_f\ (E) = \sup_{\ x'\ \leq 1} \{ \int_E x' \circ f d\mu \}.$	$\mu_f(E) = \int_E f d\mu$ medida vectorial σ-aditiva. $\mu_f (E) = \int_E f d\mu.$ $\ \mu_f\ (E) = \sup_{\ y'\ \leq 1} \{ \int_E f d y' \circ \mu \}.$	$\mu_f(E) = \int_E f \otimes d\nu$ medida vectorial σ-aditiva. $\mu_f (E) = \int_E \ f\ d \nu .$ $\ \mu_f\ (E) = \sup_{\ x'\ \leq 1} \sup_{\ y'\ \leq 1} \{ \int_E x' \circ f d y' \circ \nu \}.$	$\mu_f(E) = \int_E b(f, d\nu)$ medida vectorial σ -aditiva. Cuando $b = \otimes$ la variación y semivariación concuerda con la int. de Stefánsson.
T. Convergencia Dominada	Si	Si	Si	No. Aparece T. Convergencia Acotada.
T. Cambio de Variable	Si	Falla en translaciones.	No conocido	No conocido.
M. Producto, T. de Fubini y Convulsión	Si	Hay medida producto, teorema de Fubini, medidas regulares.	Los resultados coinciden con Bartle cuando $b = \otimes$	Si, cuando $b = \otimes$ y las medidas son radonianas.

Tabla 2.2. Características de las integrales tratadas en este capítulo.

2.8. Espacios L^p

Una de las propiedades más importantes en la teoría de las medidas vectoriales es la existencia de derivadas de Radon-Nikodym de una medida vectorial con respecto a otra.

Esta propiedad tiene importantes implicaciones en el estudio de la compacidad débil en espacios de funciones como el espacio Lebesgue-Bochner $L^1(\mu, X)$ donde $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida finito. Otra de las aplicaciones conocidas es el teorema de dualidad de los espacios Lebesgue-Bochner $L^p(\mu, X)$ donde su dual respectivo es $L^q(\mu, X')$ si y sólo si X' tiene la propiedad de Radon-Nikodym para $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Ahmed en [4] prueba la existencia de derivadas de Radon-Nikodym de medidas operador-valuadas con respecto a medidas reales no negativas.

Estos problemas surgen naturalmente en el estudio de sistemas de control gobernados por ecuaciones diferenciales en espacios de Banach y manejados por medidas vectoriales o medidas operador- valuadas. Para mayor detalle ver [3] y [4].

En esta sección definiremos los espacios L^p para la integral de Bochner, la integral de Bartle-Lewis y la integral de Stefánsson. Definiremos los $L_w^p(\nu, X, Y)$ para funciones vector valuadas y medidas vectoriales y demostraremos que ellos disfrutan de propiedades como la densidad y separabilidad, lo cual los hace unos buenos espacios. Estos resultados han sido enunciados en [44].

Los espacios Lebesgue Bochner $L^p(\mu, X)$. Integral de Bochner.

Para desarrollar esta primera parte nos basaremos en [21].

Observación 2.8.1. En lo que sigue tener presente la relación de equivalencia $f \sim g$ si $f(w) = g(w)$ μ -c.t.p.

Definición 2.8.2. Sea $1 \leq p < \infty$. El simbolo $L^p(\mu, X)$ ($= L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$) representa (las clases de equivalencia) *las funciones μ -medibles f que son Bochner integrables*, tales que

$$\int_{\Omega} \|f\|^p d\mu < \infty.$$

El simbolo $L^\infty(\mu, X)$ ($= L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu, X)$) representa (las clases de equivalencia) *las funciones μ -medibles f que son μ -acotadas*, es decir las funciones f para las cuales existe una constante $M > 0$ tal que

$$\mu(\{w \in \Omega : \|f(w)\| > M\}) = 0.$$

Se puede mostrar que para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mu, X)$ es un espacio vectorial y que la igualdad

$$\|f\|_{L^p(\mu, X)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} \|f\|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \inf \{M : \|f(w)\| \leq M, w \in E^c, \mu(E) = 0\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

determina una función de $L^p(\mu, X)$ en $\mathbb{R}$.

Definición 2.8.3. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Diremos que $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra numerablemente generada si existe un conjunto de cardinal numerable $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$ tal que la σ -álgebra generada por $\mathcal{F}$ es igual a $\mathcal{A}$, es decir, $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$.

El siguiente teorema muestra varias de las propiedades que poseen estos espacios.

Teorema 2.8.4. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. El espacio $L^p(\mu, X)$ tiene las siguientes propiedades:

- (i) Sea $1 \leq p \leq \infty$. $\|f\|_{L^p(\mu, X)}$ es una norma. Con esta norma $L^p(\mu, X)$ es un espacio de Banach.
- (ii) Sea $1 \leq p < \infty$. El conjunto de funciones simples integrables forman un subespacio denso de $L^p(\mu, X)$.
- (iii) Sea $1 \leq p < \infty$. Si $\mathcal{A}$ es numerablemente generada y X es un espacio separable, entonces $L^p(\mu, X)$ es un espacio separable.
- (iv) Sea X un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Entonces $L^2(\mu, X)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} \langle f(w), g(w) \rangle d\mu(w); \quad f, g \in L^2(\mu, X).$$

- (v) Para $1 \leq p < q < \infty$, tenemos que

$$L^\infty(\mu, X) \subset L^q(\mu, X) \subset L^p(\mu, X) \subset L^1(\mu, X).$$

Corolario 2.8.5. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\mu, X)$ y $f \in L^p(\mu, X)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(\mu, X)} = 0.$$

Entonces existe una subsucesión convergente $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(w) = f(w), \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Demostración. Este resultado es consecuencia del teorema de la convergencia dominada y de la propiedad (i) del teorema 2.8.4. $\square$

Observación 2.8.6. (i) Si $1 \leq p < \infty$, entonces las funciones simples pertenecen a $L^p(\mu, X)$. Además, si $f = \sum_{j=1}^k x_j \chi_{E_j}$, es una función simple entonces

$$\|f\|_{L^p(\mu, X)} = \left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p \mu(E_j) \right)^{1/p}.$$

- (ii) Si $p = \infty$ las funciones simples medibles pertenecen a $L^\infty(\mu, X)$. Si f tiene la forma anterior entonces

$$\|f\|_{L^\infty(\mu, X)} = \max\{\|x_j\| : j \in \{1, 2, \dots, k\}, \mu(E_j) > 0\}$$

- (iii) Si $1 \leq p < \infty$, $h \in L^p(\mu)$ y $x \in X$, entonces la función $f : \Omega \rightarrow X$ dada por $f(w) = xh(w) \in L^p(\mu, X)$ y tiene norma $\|f\|_{L^p(\mu, X)} = \|x\|_X \|h\|_{L^p(\mu)}$. Se denota por $f = xh$.

Proposición 2.8.7. (*Desigualdad de Hölder*) Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $1 \leq p \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\mu, X)$ y $g \in L^q(\mu, X)$ entonces

$$\int_{\Omega} \|f(w)\|_X \|g(w)\|_X d\mu(w) \leq \|f\|_{L^p(\mu, X)} \|g\|_{L^q(\mu, X)}.$$

Demostración. Basada en la desigualdad de Young. □

En algunos casos el teorema de Radon-Nikodym falla para la integral de Bochner.

A continuación definiremos cuando un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym (PRN) con respecto a un espacio de medida finita y cuando X tiene la PRN.

Definición 2.8.8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito. Se dice que un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Radon-Nikodym (PRN)* respecto a $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ si toda medida vectorial σ -aditiva de variación acotada y μ -continua $G : \mathcal{A} \rightarrow X$ admite una derivada de Radon-Nikodym f , es decir si existe una función Bochner integrable tal que

$$G(E) = \int_E f d\mu, \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

Definición 2.8.9. Sea X un espacio de Banach. Diremos que X tiene la *propiedad de Radon-Nikodym* si X tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a todo espacio de medida finita.

Ejemplo 2.8.10. (Ejemplos de espacios que tienen la propiedad de Radon-Nikodym.)

1. Todo espacio de Hilbert separable.
2. Los espacios de Banach con dual separable.
3. Los espacios de Banach reflexivos.

Ejemplo 2.8.11. (Ejemplo donde la PRN falla.) Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ el espacio de medida finito dado por $([0, 1], \text{bor}([0, 1]), \lambda)$, con λ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$ y X el espacio de Banach c_0 . Para $E \subset [0, 1]$ un conjunto Lebesgue-medible, definimos

$$\lambda_n(E) = \int_E \sin(2^n \pi t) dt.$$

Sea $F : \text{bor}([0, 1]) \rightarrow c_0$ dada por $F(E) = (\lambda_n(E))_{n \in \mathbb{N}}$. En [21], Ejemplo 10, Página 50 se muestra que no existe f Bochner integrable tal que

$$F(E) = \int_E f d\mu,$$

es decir, que la propiedad de Radon-Nikodym falla para c_0 .

Una aplicación del teorema de Radon-Nikodym se ve en el siguiente teorema. Ver [21], Página 98 .

Teorema 2.8.12. Sean $1 \leq p < \infty$, tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Sean X un espacio de Banach y X' su dual. Entonces

$$(L^p(\mu, X))' = L^q(\mu, X'),$$

si y sólo si, X' tiene la propiedad de Radon-Nikodym con respecto a μ .

Demostración. Ver [21], Páginas 97-100. □

Corolario 2.8.13. Sea $1 \leq p < \infty$. Si X es un espacio de Banach reflexivo entonces

$$(L^p(\mu, X))' = L^q(\mu, X')$$

donde $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Espacios $L^p(\nu)$ y $L_w^p(\nu)$. Integral Bartle-Lewis.

En esta sección definimos dos tipos de espacios L^p . Hablaremos primero de los espacios que cumplen las condiciones (i) y (ii) de integrabilidad de la Definición 2.4.2. Estos espacios serán denotados por $L^p(\nu)$. Los espacios que sólo cumplen la condición (i) de la Definición 2.4.2 serán denotados por $L_w^p(\nu)$.

En 1975 Kluvánek y Knowles utilizaron la definición de Lewis y definieron en [35] el espacio $L^1(\nu)$ como el espacio de las funciones ν -integrables que satisfacen las condiciones (i) y (ii) de la Definición 2.4.2.

Sánchez en [47] extiende la definición de $L^1(\nu)$ a espacios $L^p(\nu)$.

En lo que sigue, si $f \sim g$ si y sólo si $f(w) = g(w)$ ν -c.t.p, es decir $f \sim g$ si y sólo si

$$\|\nu\|(\{w \in \Omega : f(w) \neq g(w)\}) = 0.$$

Definición 2.8.14. Sean $p = 1$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, Y un espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. El simbolo $L^1(\nu)$ ($= L^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu, Y)$) representa (las clases de equivalencia) las funciones medibles f que son integrables con respecto a ν tal que

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} |f(w)| d|y' \circ \nu| \right\} < \infty. \quad (2.2)$$

Para extender el concepto de $1 < p < \infty$, Sánchez utiliza la siguiente definición.

Definición 2.8.15. Sean $1 < p < \infty$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, Y un espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Diremos que una función escalar medible es p -integrable con respecto a ν si $|f|^p$ es ν -integrable.

Definición 2.8.16. Sean $1 < p < \infty$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, Y un espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. El símbolo $L^p(\nu)$ ($= L^p(\Omega, \mathcal{A}, \nu, Y)$) representa (las clases de equivalencia) *las funciones medibles f que son integrables de orden p o p -integrables* tal que

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} |f|^p d|y' \circ \nu| \right\} < \infty. \quad (2.3)$$

Observación 2.8.17. Sea $p = \infty$. Definimos como $L^\infty(\nu)$ ($= L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \nu, Y)$) *las funciones medibles que son ν -acotadas*, es decir aquellas funciones medibles para las cuales existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|\nu\|(\{w \in \Omega : |f(w)| > M\}) = 0.$$

Por el teorema de Rybakov, para cada medida vectorial ν existe un $y' \in Y'$ tal que ν es $|y' \circ \nu|$ -continua. Debido a este teorema, los conjuntos en donde $\|\nu\|$ es igual a cero coincide con aquellos donde $|y' \circ \nu|$ es igual a cero, por tanto, $L^\infty(\nu)$ coincide con $L^\infty(|y' \circ \nu|)$ y por eso este espacio no será considerado.

Adicionalmente, Sánchez demuestra que para $1 \leq p < \infty$ la expresión

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \left(\int_{\Omega} |f|^p d|y' \circ \nu| \right)^{1/p} \right\}$$

es una norma y la denotaremos como $\|f\|_{L^p(\nu)}$.

La desigualdad de Hölder para esta integral se enuncia a continuación.

Teorema 2.8.18. (*Desigualdad de Hölder*). Sea $1 < p < \infty$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Si $f \in L^p(\nu)$ y $g \in L^q(\nu)$, entonces

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} |fg| d|y' \circ \nu| \leq \|f\|_{L^p(\nu)} \|g\|_{L^q(\nu)}.$$

Demostración. Es una aplicación de la desigualdad de Young. □

Teorema 2.8.19. *Los espacios $L^p(\nu)$ tienen las siguientes propiedades:*

- (i) Sea $1 \leq p < \infty$. Con la norma definida anteriormente, $L^p(\nu)$ es un espacio de Banach.
- (ii) Sea $1 \leq p < \infty$. El conjunto de las funciones simples es denso en $L^p(\nu)$.
- (iii) Sea $1 < p < \infty$. Entonces $L^p(\nu) \subset L^1(\nu)$.

Demostración. Ver [47], Proposición 4, Páginas 909-911. □

Observación 2.8.20. (Respecto a la dualidad de $L^p(\nu)$, para $1 < p < \infty$). Sean p y q tales que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Gracias a la desigualdad de Hölder, Sánchez en [47] muestra que $L^q(\nu)$ se puede identificar con un subespacio de $(L^p(\nu))'$. Sin embargo $L^q(\nu)$ y $(L^p(\nu))'$ no coinciden. Para mayor detalle ver [47], Página 915.

Espacios $L_w^p(\nu)$

En 1993 Stefánsson en [51], define función de valor escalar medible como *débilmente ν -integrable*, si para todo $y' \in Y'$, f es $y' \circ \nu$ -integrable.

Definición 2.8.21. Sea $p = 1$. El simbolo $L_w^1(\nu)$ ($= L_w^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu, Y)$) representa (las clases de equivalencia) *las funciones medibles que son débilmente ν -integrables* con la norma

$$\|f\|_{L_w^1(\nu)} = \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} |f| d|y' \circ \nu| \right\}.$$

En [19], para $1 < p < \infty$ se define el espacio $L_w^p(\nu)$.

Definición 2.8.22. Sea $1 < p < \infty$. El simbolo $L_w^p(\nu)$ ($= L_w^p(\Omega, \mathcal{A}, \nu, Y)$) representa (las clases de equivalencia) *las funciones medibles que son débilmente integrables de orden p* , es decir las funciones medibles tal que $|f|^p$ es débilmente integrable con la norma

$$\|f\|_{L_w^p(\nu)} = \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \left(\int_{\Omega} |f|^p d|y' \circ \nu| \right)^{1/p} \right\}.$$

Teorema 2.8.23. Sea $p \in [1, \infty)$. Los espacios $L_w^p(\nu)$ tienen las siguientes propiedades.

- (i) $L_w^p(\nu)$ es un espacio de Banach con la normas dadas en las definiciones 2.8.21 y 2.8.22.
- (ii) $L_w^p(\nu)$ es un espacio de Banach que contiene a $L^p(\nu)$ como subespacio cerrado.
- (iii) Las relaciones en estos espacios son

$$L^p(\nu) \subset L_w^p(\nu) \subset L_w^1(\nu), \quad L^p(\nu) \subset L^1(\nu) \subset L_w^1(\nu).$$

Demostración. Ver [51], Teorema 9, Páginas 227-228. □

Espacios $L^p(\nu, X, Y)$ y $L_w^p(\nu, X, Y)$. Integral de Stefánsson.

Para desarrollar los aspectos teóricos de estos espacios nos basaremos en [14], [15], [51] y [52]. En lo que sigue debemos tener en cuenta que $f \sim g$ si $f(w) = g(w)$ ν -c.t.p.

Habrán resultados que comparten la misma demostración pero nosotros aclararemos esto en cada propiedad.

Stefánsson en [52] define el espacio $L^1(\nu, X, Y)$.

Definición 2.8.24. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y X, Y espacios de Banach. Sean $f : \Omega \rightarrow X$ una función ν -medible y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. El simbolo $L^1(\nu, X, Y)$ ($= L^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu, X, Y)$) representa ($\|\nu\|$ -clases de equivalencia) *las funciones f ν -medibles, que son $\otimes$ -integrables* tal que

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f\| d|y' \circ \nu| \right\} < \infty. \quad (2.4)$$

Para la siguiente observación nos basamos en [14] y [52].

Observación 2.8.25. (i) La expresión dada en 2.4 es una norma y con esta norma $L^1(\nu, X, Y)$ es un espacio de Banach.

(ii) Notemos que si $Y = \mathbb{R}$ entonces $L^1(\nu, X, \mathbb{R}) = L^1(\nu, X)$ que es el espacio de las funciones Bochner integrables.

(iii) Si $X = \mathbb{R}$ entonces $L^1(\nu, \mathbb{R}, Y) = L^1(\nu)$ que es el espacio de las funciones ν -integrables.

Teorema 2.8.26. Sean X, Y espacios de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Entonces $L^1(\nu, X, Y)$ es separable si y sólo si $\mathcal{A}$ es numerablemente generada y X es separable.

Demostración. Ver [14], Teorema 4, Página 9. □

Corolario 2.8.27. Si $X = \mathbb{R}$, entonces $L^1(\nu, X, Y) = L^1(\nu)$ es separable si y sólo si $\mathcal{A}$ es numerablemente generada.

Si $Y = \mathbb{R}$ entonces $L^1(\nu, X)$ es separable si y sólo si X y $\mathcal{A}$ es numerablemente generada. Ver 2.8.4.

En [15] Chakraborty y Basu extienden la definición de Stefánsson para $1 < p < \infty$. Nosotros haremos una adaptación equivalente a lo hecho en [15].

Definición 2.8.28. Sean $1 < p < \infty$, ν una medida vectorial σ -aditiva y f una función ν -medible vector valuada. Diremos que f es $\otimes$ - p integrable o $\otimes$ - integrable de orden p si $\|f\|^p$ es ν -integrable.

Definición 2.8.29. Sean $1 < p < \infty$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach. Sean $f : \Omega \rightarrow X$ y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. El simbolo $L^p(\nu, X, Y)$ ($= L^p(\Omega, \mathcal{A}, \nu, X, Y)$) representa ($\|\nu\|$ -clases de equivalencia) las funciones f ν -medibles que son integrables de orden p y tal que

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f(w)\|^p d|y' \circ \nu|(w) \right\} < \infty.$$

Observación 2.8.30. La expresión

$$\left(\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f(w)\|^p d|y' \circ \nu|(w) \right\} \right)^{1/p} = \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \left(\int_{\Omega} \|f(w)\|^p d|y' \circ \nu|(w) \right)^{1/p} \right\},$$

es una norma y la denotaremos por $\|f\|_{L^p(\nu, X, Y)}$.

Para el teorema siguiente, presentamos en detalle una demostración siguiendo los lineamientos dados por Stefánsson en [52].

Teorema 2.8.31. Sean $1 \leq p < \infty$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ es una medida vectorial σ -aditiva. Entonces $L^p(\nu, X, Y)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\nu, X, Y)$, es decir dado $\epsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $m, n > n_0$ entonces

$$\|f_n - f_m\|_{L^p(\nu, X, Y)} = \left(\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f_n(w) - f_m(w)\|^p d|y' \circ \nu|(w) \right\} \right)^{1/p} < \epsilon.$$

Luego $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(|y' \circ \nu|, X)$ para cada $y' \in Y'$ con $\|y'\| \leq 1$. Esto es

$$\|f_n - f_m\|_{L^p(|y' \circ \nu|, X)} = \left(\int_{\Omega} \|f_n(w) - f_m(w)\|^p d|y' \circ \nu|(w) \right)^{1/p} < \epsilon.$$

Como $L^p(|y' \circ \nu|, X)$ es un espacio de Banach entonces esta sucesión de Cauchy es convergente. Denotaremos por $f_{y'}$ el límite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $L^p(|y' \circ \nu|, X)$.

Vamos a demostrar que ese límite es único para todo $\|y'\| \leq 1$. Por el teorema de Rybakov podemos encontrar un $\|z'\| \leq 1$ tal que ν es $|z' \circ \nu|$ -continua. Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f_{z'}$ $|z' \circ \nu|$ c.t.p entonces existe un conjunto $E_{z'} \in \mathcal{A}$ que tiene medida $|z' \circ \nu|(E_{z'}) = 0$ y una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(w) = f_{z'}(w),$$

para $w \in E_{z'}^c$. Si aplicamos el argumento anterior para (f_{n_k}) y para cualquier $\|y'\| \leq 1$, existe un conjunto $E_{y'} \in \mathcal{A}$ de medida $|y' \circ \nu|$ cero y una subsucesión $(f_{n_{k,j}})$ de (f_{n_k}) tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_{k,j}}(w) = f_{y'}(w),$$

para $w \in E_{y'}^c$. Entonces $f_{z'}(w) = f_{y'}(w)$ para $w \in (E_{y'} \cup E_{z'})^c$.

Puesto que

$$|y' \circ \nu|(E_{y'} \cup E_{z'}) = |y' \circ \nu|(E_{y'}) + |y' \circ \nu|(E_{z'}) \leq \|\nu\|(E_{z'}) = 0,$$

por ser ν , $|z' \circ \nu|$ -continua. Por tanto $f_{z'} \in L^p(|y' \circ \nu|, X)$ y $f_{z'} = f_{y'}$ $|y' \circ \nu|$ -c.t.p. Luego $f_{z'} \in L^p(|y' \circ \nu|, X)$ para todo $\|y'\| \leq 1$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{z'} - f_n\|_{L^p(\nu, X, Y)} = \left(\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f_{z'} - f_n(w)\|^p d|y' \circ \nu|(w) \right\} \right)^{1/p} = 0.$$

Sea $f = f_{z'}$. Sólo nos queda demostrar que $f \in L^p(\nu, X, Y)$. En efecto

$$\|f\|_{L^p(\nu, X, Y)} \leq \|f - f_n\|_{L^p(\nu, X, Y)} + \|f_n\|_{L^p(\nu, X, Y)} < \infty. \quad \square$$

Proposición 2.8.32. (*Desigualdad de Hölder*). Sean $1 < p < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Si $f \in L^p(\nu, X, Y)$ y $g \in L^q(\nu, X, Y)$ entonces

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f(w)\|_X \|g(w)\|_X d|y' \circ \nu|(w) \right\} \leq \|f\|_{L^p(\nu, X, Y)} \|g\|_{L^q(\nu, X, Y)}.$$

Demostración. Nos basaremos en la desigualdad de Young donde

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a, b \geq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En este caso sean

$$a = \frac{\|f(w)\|}{\|f\|_{L^p(\nu, X, Y)}}, \quad b = \frac{\|g(w)\|}{\|g\|_{L^q(\nu, X, Y)}}.$$

Entonces

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\|f(w)\| \|g(w)\|}{\|f\|_{L^p(\nu, X, Y)} \|g\|_{L^q(\nu, X, Y)}} d|y' \circ \nu|(w) \right\} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

Así

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f(w)\| \|g(w)\| d|y' \circ \nu|(w) \right\} \leq \|f\|_{L^p(\nu, X, Y)} \|g\|_{L^q(\nu, X, Y)}.$$

□

Teorema 2.8.33. Sean $1 \leq p < \infty$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ es una medida vectorial σ -aditiva. El conjunto de funciones simples es denso en $L^p(\nu, X, Y)$.

Demostración. Sea $f \in L^p(\nu, X, Y)$, como consecuencia del teorema de medibilidad de Pettis existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ν -medibles que toman solamente una cantidad a lo más numerable de valores tal que $\|f_n - f\| \leq 1/n$, ν -c.t.p. De ahí

$$\|f_n\|^p \leq 2^p \left(\|f\|^p + \frac{1}{n^p} \right).$$

Como $\|\nu\|(\Omega) < \infty$ entonces

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \|f_n\|^p d|y' \circ \nu| < \infty.$$

Además $\|f_n\|^p$ es ν -integrable por [51], Proposición 5. Con lo anterior y por [36], Teorema 2, tenemos que

$$\lim_{\|\nu\|(E) \rightarrow 0} \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f\|^p d|y' \circ \nu| \right\} = 0,$$

en particular

$$\lim_{\|\nu\|(E) \rightarrow 0} \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f_n \chi_E\|^p d|y' \circ \nu| \right\} = 0.$$

Escribiendo

$$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}},$$

donde $E_{nk} \cap E_{nj} = \emptyset$ si $k \neq j$ y $x_{nm} \in X$. Por la ecuación anterior para cada n , podemos escoger un p_n lo suficientemente grande tal que

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\|^p d|y' \circ \nu| \leq \frac{\|\nu\|(\Omega)}{n}.$$

Así, si $\phi_n = \sum_{m=1}^{p_n} x_{nm} \chi_{E_{nm}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|f - \phi_n\|^p d|y' \circ \nu| &\leq 2^p \left\{ \int_{\Omega} \|f - f_n\|^p d|y' \circ \nu| + \int_{\Omega} \|f_n - \phi_n\|^p d|y' \circ \nu| \right\} \\ &\leq 2^p \left[\frac{\|\nu\|(\Omega)}{n^p} + \int_{\Omega} \left\| \sum_{m=p_n+1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}} \right\|^p d|y' \circ \nu| \right] \end{aligned}$$

Para cada $y' \in Y'$. Tomando el supremo sobre todos los $\|y'\| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \|f - \phi_n\|^p d|y' \circ \nu| &\leq 2^p \left[\frac{\|\nu\|(\Omega)}{n^p} + \int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\|^p d|y' \circ \nu| \right] \\ &\leq 2^p \left[\frac{\|\nu\|(\Omega)}{n^p} + \frac{\|\nu\|(\Omega)}{n} \right] \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \phi_n\|_{L^p(\nu, X, Y)} = 0,$$

y se completa la prueba. $\square$

Teorema 2.8.34. Sean $1 \leq p < \infty$ y $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible donde la σ -álgebra es numerablemente generada. Si X es un espacio de Banach separable entonces los espacios $L^p(\nu, X, Y)$ son separables.

Demostración. Sea D un subconjunto denso y numerable de X . Como $\mathcal{A}$ es numerablemente generada entonces existe un conjunto denso numerable $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$. Consideramos entonces la colección de todas las sumas finitas $\sum_{j=1}^n q_j \chi_{D_j}$ en donde $q_j \in D$ y $D_j \in \mathcal{Q}$. Esta colección es numerable y está contenida en el espacio $L^p(\nu, X, Y)$. Vamos a demostrar que esta colección es un subconjunto denso. Sean $f \in L^p(\nu, X, Y)$ y $\epsilon > 0$. Como el conjunto de las funciones simples es denso en $L^p(\nu, X, Y)$, entonces existe una función simple $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ tal que

$$\|f - g\|_{L^p(\nu, X, Y)} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Suponemos que g se escribe como $\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$ donde cada $A_j \in \mathcal{A}$. Vamos a demostrar que para esta función g , existen $q_j \in D$ y $D_j \in \mathcal{F}$ tal que

$$\left\| g - \sum_{j=1}^n q_j \chi_{A_j} \right\|_{L^p(\nu, X, Y)} \leq \frac{2\epsilon}{3}.$$

En efecto, como X es separable para cada α_j podemos escoger un q_j tal que

$$\|\alpha_j - q_j\| \leq \frac{\epsilon}{3(2n\|\nu\|(\Omega))^{1/p}}$$

para $1 \leq j \leq n$, y por ser $\mathcal{A}$ numerablemente generada tenemos que

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} |\chi_{A_j} - \chi_{D_j}| d|y' \circ \nu| \leq \frac{\epsilon^p}{2n3^p\beta^p},$$

donde $\beta = \sup_{1 \leq j \leq n} \|\alpha_j\|$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^n q_j \chi_{D_j} \right\|_{L^p(\nu, X, Y)}^p &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^n q_j \chi_{D_j} \right\|^p d|y' \circ \nu| \\ &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \|\alpha_j \chi_{A_j} - q_j \chi_{D_j}\|^p d|y' \circ \nu| \\ &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \|\alpha_j \chi_{A_j} + \alpha_j \chi_{D_j} - \alpha_j \chi_{D_j} - q_j \chi_{D_j}\|^p d|y' \circ \nu| \\ &\leq \sup_{\|y'\| \leq 1} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \|\alpha_j\|^p |\chi_{A_j} - \chi_{D_j}| d|y' \circ \nu| \\ &\quad + \sup_{\|y'\| \leq 1} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \|\alpha_j - q_j\|^p |\chi_{D_j}| d|y' \circ \nu| \\ &\leq 2 \frac{\epsilon^p}{3^p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{j=1}^n q_j \chi_{D_j} \right\|_{L^p(\nu, X, Y)} &= \|f - g\|_{L^p(\nu, X, Y)} + \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^n q_j \chi_{D_j} \right\|_{L^p(\nu, X, Y)} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Esto demuestra que los espacios $L^p(\nu, X, Y)$ son separables. $\square$

Corolario 2.8.35. Si $X = \mathbb{R}$ entonces $L^p(\nu)$ es separable si $\mathcal{A}$ es numerablemente generada. Si $Y = \mathbb{R}$ entonces $L^p(\nu, X)$ es separable si y sólo si $\mathcal{A}$ es numerablemente generada y X es separable.

Teorema 2.8.36. Sea $1 < p < \infty$. Entonces $L^p(\nu, X, Y) \subset L^1(\nu, X, Y)$.

Demostración. Ver [15], Remark 2, Página 91. $\square$

Observación 2.8.37. (Respecto a la dualidad de $L^p(\nu, X, Y)$).

En este espacio la dualidad de los espacios $L^p(\nu, X, Y)$ falla debido a lo hecho por Sánchez en [47] cuando $X = \mathbb{R}$.

Observación 2.8.38. Sea $p = \infty$. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach $f : \Omega \rightarrow X$ una función vector valuada ν -medible y ν una medida vectorial de $\mathcal{A}$ en Y .

- (i) Diremos que f es una función ν -acotada, si existen una constante $M > 0$ y un conjunto $E \in \mathcal{A}$ con $\|\nu\|(E) = 0$, tal que $\|f(w)\| \leq M$ para todo $w \in E^c$.
- (ii) Definimos el espacio $L^\infty(\nu, X, Y)$ de las funciones f ($\|\nu\|$ -clases de equivalencia) que son ν -acotadas. En símbolos

$$\begin{aligned} L^\infty(\nu, X, Y) &= \{[f] : f \text{ es } \nu \text{ acotada}\} \\ &= \{[f] : \|f(w)\| \leq M, w \in E^c, \|\nu\|(E) = 0.\} \\ &= \{[f] : \|\nu\|(w \in \Omega : \|f(w)\| > M) = 0\} \end{aligned}$$

- (iii) La expresión

$$\inf\{M : \|f(w)\| \leq M, w \in E^c, \|\nu\|(E) = 0.\}$$

es una norma y la denotaremos como $\|f\|_{L^\infty(\nu, X, Y)}$ y con esta norma se puede probar que $L^\infty(\nu, X, Y)$ es un espacio de Banach.

- (iv) Debido al teorema de Rybakov ν tiene una medida de control que es la medida $|y' \circ \nu|$ para algún $y' \in Y'$. Se dice que ν es $|y' \circ \nu|$ -continua. Los conjuntos en donde $\|f(w)\| > M$ para $\|\nu\|$ y $|y' \circ \nu|$ coinciden. Por lo tanto el espacio $L^\infty(\nu, X, Y)$ coincide con $L^\infty(|y' \circ \nu|, X)$ que es el espacio Lebesgue Bochner de las funciones f que son $|y' \circ \nu|$ -acotadas para $y' \in Y'$. Por eso este espacio no lo tendremos en cuenta.

Espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$.

A continuación definimos los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$ tomando un camino análogo a lo hecho por Sánchez en [47]. Resaltamos propiedades de estos espacios como densidad, separabilidad y completez.

A pesar de la existencia de una desigualdad de Hölder, el estudio de duales para estos espacios exhibe algunas patologías. Haremos algunas observaciones sobre la dualidad de los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$.

Sea $1 < p < \infty$ y f una función ν -medible. Recordemos que f es $\otimes$ -integrable de orden p si $\|f\|^p$ es ν -integrable, es decir:

- (i) $\|f\|^p$ es $y' \circ \nu$ -integrable para cada $y' \in Y'$; es decir

$$\int_{\Omega} \|f\|^p d|y' \circ \nu| < \infty, \text{ para cada } y' \in Y'.$$

- (ii) Si para cada $E \in \mathcal{A}$ existe un elemento de Y , denotado por $\int_E \|f\|^p d\nu$, tal que

$$y' \left(\int_E \|f\|^p d\nu \right) = \int_E \|f\|^p d(y' \circ \nu), \text{ para cada } y' \in Y'.$$

La clave para definir los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$ es análogo a lo que hizo Sánchez en [47] y es que $f \in L_w^p(\nu, X, Y)$ si y sólo si f cumple la condición (i). A estas funciones las llamamos *funciones $\otimes$ débilmente ν -integrables de orden p* .

Definición 2.8.39. Sea $1 \leq p < \infty$. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach, $f : \Omega \rightarrow X$ una función ν -medible vector valuada y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Entonces una función f es $\otimes$ débilmente integrable de orden p si $\|f\|^p$ es débilmente ν -integrable.

Definición 2.8.40. Denotamos por $L_w^1(\nu, X, Y)$ ($= L_w^1(\Omega, \mathcal{A}, \nu, X, Y)$) al espacio de ($\|\nu\|$ -clases de equivalencia) las funciones ν -medibles que son $\otimes$ débilmente integrables y para $1 < p < \infty$, $L_w^p(\nu, X, Y)$ ($= L_w^p(\Omega, \mathcal{A}, \nu, X, Y)$) al espacio de ($\|\nu\|$ -clases de equivalencia) las funciones ν -medibles que son $\otimes$ débilmente integrables de orden p , es decir las funciones ν medibles tal que $\|f\|^p \in L_w^1(\nu)$. Con la norma

$$\|f\|_{L_w^p(\nu, X, Y)} = \left(\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f\|^p d|y' \circ \nu| \right\} \right)^{1/p},$$

$L_w^p(\nu, X, Y)$ es un espacio de Banach.

Mostraremos que $L^p(\nu, X, Y)$ es un subespacio cerrado de $L_w^p(\nu, X, Y)$.

Teorema 2.8.41. Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces $L^p(\nu, X, Y)$ es un subespacio cerrado de $L_w^p(\nu, X, Y)$.

Demostración. Sean $f \in L_w^p(\nu, X, Y)$ y $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones ν -medibles en $L^p(\nu, X, Y)$ que converge a f en $L_w^p(\nu, X, Y)$. Entonces $(\|f_m\|^p)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles en $L^1(\nu)$. Si definimos

$$\mu_m(E) = \int_E \|f_m\|^p d\nu, \text{ y } \mu(E) = \int_E \|f\|^p d\nu,$$

entonces μ_m y μ son medidas vectoriales σ -aditivas y por tanto

$$\|\mu_m(E) - \mu(E)\| \leq \|\mu_m - \mu\|(E) \rightarrow 0,$$

ya que

$$\begin{aligned} \|\mu_m - \mu\|(E) &= \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_E \left| \|f_m\|^p - \|f\|^p \right| d|y' \circ \nu| \right\} \\ &\leq \sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_E \|f_m - f\|^p d|y' \circ \nu| \right\} \\ &= \|f_m - f\|_{L_w^p(\nu, X, Y)}^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Así $\|f\|^p \in L^1(\nu)$ y por tanto $f \in L^p(\nu, X, Y)$. □

Con todo lo establecido podemos ver que

$$L^p(\nu, X, Y) \subset L_w^p(\nu, X, Y) \subset L_w^1(\nu, X, Y)$$

y

$$L^p(\nu, X, Y) \subset L^1(\nu, X, Y) \subset L_w^1(\nu, X, Y).$$

Observación 2.8.42. Las propiedades que tienen que ver con separabilidad y desigualdad de Hölder se cumplen y sus demostraciones son iguales a las dadas para los espacios $L^p(\nu, X, Y)$.

Demostraremos que el conjunto de funciones simples siempre es denso en $L_w^p(\nu, X, Y)$ pues éste tiene una ligera modificación con respecto a los espacios $L^p(\nu, X, Y)$.

Teorema 2.8.43. Sean $1 \leq p < \infty$, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X, Y espacios de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ es una medida vectorial σ -aditiva. El conjunto de funciones simples es denso en $L_w^p(\nu, X, Y)$.

Demostración. Sea $f \in L_w^p(\nu, X, Y)$, como consecuencia del teorema de medibilidad de Pettis para medidas vectoriales, existe una sucesión de funciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ν -medibles que toman solamente una cantidad a lo más numerable de valores tal que $\|f_n - f\| \leq 1/n$, ν -c.t.p. De ahí

$$\|f_n\|^p \leq 2^p \left(\|f\|^p + \frac{1}{n^p} \right),$$

como $\|\nu\|(\Omega) < \infty$ entonces

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \|f_n\|^p d|y' \circ \nu| < \infty,$$

es decir f_n es $\otimes$ - débilmente integrable de orden p . Podemos demostrar que

$$\lim_{\|\nu\|(E) \rightarrow 0} \sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \|f_n \chi_E\|^p d|y' \circ \nu| = 0$$

para cada $E \in \mathcal{A}$. En efecto, escribiendo

$$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}},$$

donde $E_{nk} \cap E_{nj} = \emptyset$ si $k \neq j$ y $x_{nm} \in X$, obtenemos para cada $y' \in Y'$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|f_n \chi_E\|^p d|y' \circ \nu| &= \int_{\Omega} \sum_{m=1}^{\infty} \|x_{nm}\|^p \chi_{E_{nm} \cap E} d|y' \circ \nu| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\Omega} \|x_{nm}\|^p \chi_{E_{nm} \cap E} d|y' \circ \nu| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \|x_{nm}\|^p |y' \circ \nu|(E_{nm} \cap E) \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x_{nm}\|^p |y' \circ \nu|(E) \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre $\|y'\| \leq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \|f_n\|^p d|y' \circ \nu| &\leq \sup_{\|y'\| \leq 1} \sum_{m=1}^{\infty} \|x_{nm}\|^p |y' \circ \nu|(E) \\ &= \sup_{\|y'\| \leq 1} |y' \circ \nu|(E) \sum_{m=1}^{\infty} \|x_{nm}\|^p \\ &= \|\nu\|(E) \sum_{m=1}^{\infty} \|x_{nm}\|^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $\|\nu\|(E) \rightarrow 0$.

Por lo anterior tenemos que para cada n , podemos escoger un p_n lo suficientemente grande tal que

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\|^p d|y' \circ \nu| \leq \frac{\|\nu\|(\Omega)}{n}.$$

Si $\phi_n = \sum_{m=1}^{p_n} x_{nm} \chi_{E_{nm}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|f - \phi_n\|^p d|y' \circ \nu| &\leq 2^p \left\{ \int_{\Omega} \|f - f_n\|^p d|y' \circ \nu| + \int_{\Omega} \|f_n - \phi_n\|^p d|y' \circ \nu| \right\} \\ &\leq 2^p \left[\frac{\|\nu\|(\Omega)}{n^p} + \int_{\Omega} \left\| \sum_{m=p_n+1}^{\infty} x_{nm} \chi_{E_{nm}} \right\|^p d|y' \circ \nu| \right], \end{aligned}$$

para cada $y' \in Y'$. Tomando el supremo sobre todos los $\|y'\| \leq 1$,

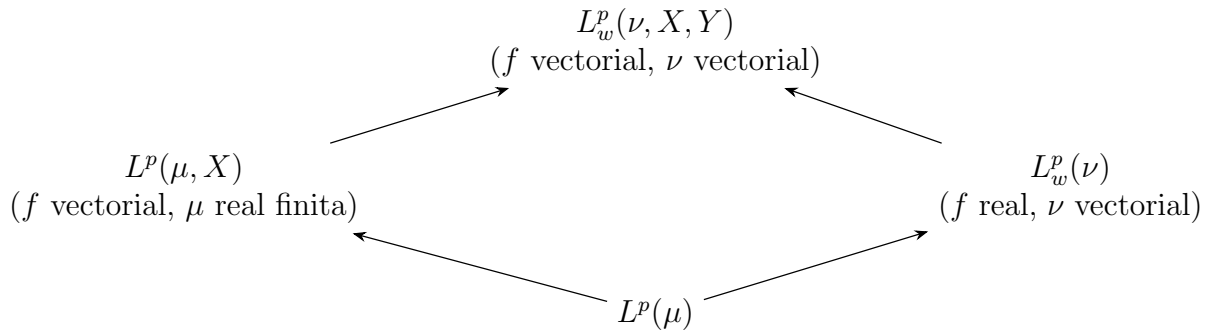
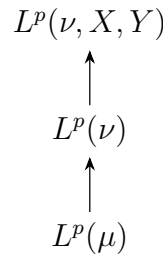
$$\begin{aligned} \sup_{\|y'\| \leq 1} \int_{\Omega} \|f - \phi_n\|^p d|y' \circ \nu| &\leq 2^p \left[\frac{\|\nu\|(\Omega)}{n^p} + \int_{\bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{nm}} \|f_n\|^p d|y' \circ \nu| \right] \\ &\leq 2^p \left[\frac{\|\nu\|(\Omega)}{n^p} + \frac{\|\nu\|(\Omega)}{n} \right] \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \phi_n\|_{L_w^p(\nu, X, Y)} = 0,$$

y se completa la prueba. □

Observación 2.8.44. (i) Si μ es una medida real finita, ν una medida vectorial σ -aditiva entonces podemos establecer diferentes relaciones entre los espacios L^p , para $1 \leq p < \infty$. Las siguientes figuras muestran las relaciones entre los espacios L^p .

Figura 2.2. Espacios L^p Figura 2.3. Espacios L^p

- (ii) Si X es una álgebra de Banach, la desigualdad de Hölder se modifica de la siguiente manera:

Proposición 2.8.45. (*Desigualdad de Hölder*) Sea $1 < p < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\nu, X, Y)$ y $g \in L^q(\nu, X, Y)$ entonces

$$\sup_{\|y'\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \|f(w)g(w)\|_X d|y' \circ \nu|(w) \right\} \leq \|f\|_{L^p(\nu, X, Y)} \|g\|_{L^q(\nu, X, Y)}.$$

- (iii) Respecto a la dualidad de los espacios $L^p_w(\nu, X, Y)$. Para mostrar la siguiente observación, empezaremos por dar las siguientes definiciones dadas en [35].

Definición 2.8.46. Sea Y un espacio de Banach. Diremos que Y posee la propiedad B-P si dada una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y', y_n \rangle| < \infty$ para cada $y' \in Y'$ hay un elemento $y \in Y$ con $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Si Y es un espacio de Banach entonces Y tiene la propiedad B-P si y sólo si Y no contiene una copia isomórfica de c_0 .

Como consecuencia de esto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.8.47. Sea Y un espacio de Banach con la propiedad B-P y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial σ -aditiva. Si f es una función escalar medible $y' \circ \nu$ -integrable para cada $y' \in Y'$ entonces f es ν -integrable.

Demostración. Ver [35], Teorema 1, Página 31. □

Con esto en mente si $X = \mathbb{R}$ entonces los espacios $L_w^p(\nu) = L^p(\nu)$ y debido al ejemplo hecho por Sánchez en [47], vemos que en estos espacios hay dificultades para caracterizar el dual.

Adicionalmente si Y tiene la propiedad B-P, podemos concluir que $L^p(\mu, X, Y) = L_w^p(\nu, X, Y)$ puesto que el teorema anterior es aplicado a la función medible de valor real $\|f\|^p$.

Capítulo 3

Convergencia de Medidas y Análisis de Fourier

En este capítulo estudiaremos la convergencia fuerte y la convergencia débil de medidas. Dichos conceptos están ligados a propiedades de aproximación y continuidad.

Podemos empezar por decir que este capítulo es uno de los más importantes de este documento. Tocaremos dos tópicos importantes que se desarrollan en el análisis armónico y teoría de la medida: Convergencia de medidas y análisis de Fourier en el caso vectorial. En este capítulo se mostrarán resultados nuevos que permitirán aplicaciones directas a operadores pseudodiferenciales en el caso vectorial y el desarrollo del análisis de Fourier para medidas vectoriales que no son invariantes bajo translaciones.

Estableceremos relaciones entre la convergencia fuerte y débil y la convergencia de medidas con respecto a la semivariación.

3.1. Convergencia Fuerte de Medidas

Denotaremos por $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ al espacio de las medidas vectoriales σ -aditivas y por $\mathcal{M}_{\sigma, rad}(\mathcal{A}, X)$ al espacio de las medidas vectoriales radonianas σ -aditivas.

Observación 3.1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Hemos visto del Teorema 2.1.7 que $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ es un espacio de Banach con la norma de la semivariación. Diremos que una sucesión $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ *converge a* $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ *con respecto a la semivariación*, si dado $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $\|\mu_n - \mu\|(\Omega) < \epsilon$.

Definición 3.1.2. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X un espacio de Banach, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ una sucesión y $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$. Diremos que la sucesión $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge fuertemente a* μ ($\mu_n \xrightarrow{s} \mu$) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

Se puede probar que si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a μ con la norma de la semivariación entonces $\mu_n \xrightarrow{s} \mu$.

Proposición 3.1.3. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X un espacio de Banach, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$ una sucesión y $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, X)$. Si $\mu_n \xrightarrow{s} \mu$ entonces para todo $A \in \mathcal{A}$ existe una constante $C_A > 0$ tal que

$$\|\mu_n(A)\| \leq C_A$$

para todo n .

Demostración. Sea A fijo. Como $\mu_n \xrightarrow{s} \mu$ y X es un espacio normado, entonces $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X y toda sucesión de Cauchy es acotada; es decir, existe una constante $C_A > 0$ tal que

$$\|\mu_n(A)\| \leq C_A,$$

para todo n , dándose así la prueba. $\square$

Definición 3.1.4. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}(\mathcal{A}, X)$ una sucesión de medidas. Diremos que la sucesión $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es *uniformemente acotada* si $\sup_m \|\mu_m\|(\Omega) < \infty$.

Teorema 3.1.5. Sean $(S, \text{bor}(S))$ y $(T, \text{bor}(T))$ espacios medibles y X, Y espacios de Banach separables. Sean $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}(\text{bor}(S), X)$ una sucesión y $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}(\text{bor}(S), X)$, $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}(\text{bor}(T), X)$ una sucesión y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}(\text{bor}(T), X)$.

(i) Si $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ son uniformemente acotadas y $\mu_m \xrightarrow{s} \mu$ entonces

$$\int_T \mu_m(E^t) \otimes d\nu(t) \xrightarrow{s} \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t).$$

(ii) Si $\nu_n \rightarrow \nu$ con respecto a la semivariación entonces

$$\int_T \mu(E^t) \otimes d\nu_n(t) \xrightarrow{s} \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t).$$

(iii) Si $(\mu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ son uniformemente acotadas, $\mu_m \xrightarrow{s} \mu$ y $\nu_n \rightarrow \nu$ con respecto a la semivariación entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \mu_m(E^t) \otimes d\nu_n(t) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_T \mu_m(E^t) \otimes d\nu_n(t).$$

Demostración. Demostremos (i). Sea $E \in \text{bor}(S \times T)$ y $E^t = \{s \in S : (s, t) \in E\}$ la t -sección de E . Entonces $E^t \in \text{bor}(S)$. Definimos las funciones $g_{E, m}, g_E : T \rightarrow X$ como $g_{E, m}(t) = \mu_m(E^t)$ y $g_E(t) = \mu(E^t)$. En [42] se demostró que estas funciones son débilmente borelianas. Debido al Teorema de Pettis y por ser X un espacio separable, estas funciones son fuertemente ν -medibles. Además $g_{E, m}$ es una sucesión de funciones $(\otimes, \nu)$ -integrables al ser ν -medibles y uniformemente acotadas. Por hipótesis $g_{E, m}(t) \rightarrow g_E(t)$. Por tanto el teorema de la convergencia acotada permite concluir que g_E es $(\otimes, \nu)$ -integrable y

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_T \mu_m(E^t) \otimes d\nu(t) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t),$$

para cada $E \in \text{bor}(S \times T)$.

Demostremos (ii). Sean $E \in \text{bor}(S \times T)$. De manera análoga a la propiedad anterior $g_E(t) = \mu(E^t)$ es una función ν -medible y además es acotada ya que $\|\mu(E^t)\| \leq \|\mu\|(S) < \infty$. Por tanto la función g_E es integrable con respecto a ν y con respecto a ν_n para cada n . Debido a la condición de integrabilidad, para cada n podemos definir la medida vectorial σ -aditiva producto

$$\beta_n(E) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu_n(t)$$

y la medida vectorial σ -aditiva producto

$$\beta(E) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t).$$

entonces

$$\begin{aligned} \|\beta_n(E) - \beta(E)\|_{X \hat{\otimes}_\epsilon Y} &= \left\| \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu_n(t) - \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t) \right\|_{X \hat{\otimes}_\epsilon Y} \\ &= \left\| \int_T \mu(E^t) \otimes d(\nu_n - \nu)(t) \right\|_{X \hat{\otimes}_\epsilon Y} \\ &\leq \|g_E\|_\infty \|\nu_n - \nu\|(T) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

por hipótesis y se sostiene para todo $E \in \text{bor}(S \times T)$. Por tanto $\beta_n(E) \xrightarrow{s} \beta(E)$.

Demostrar (iii) es consecuencia de los enunciados (i) y (ii). □

Recordemos que θ es la operación del grupo topológico S y $\overline{m}$ es la linealización de la función multiplicación del álgebra y λ la medida producto de μ y ν . Definimos el producto de convolución de μ y ν como

$$\mu * \nu(A) = \overline{m}(\lambda(\theta^{-1}(A))),$$

para $A \in \text{bor}(S)$.

Teorema 3.1.6. Sean $(S, \text{bor}(S))$ un espacio medible donde S es un grupo topológico y X una álgebra de Banach separable. Sean $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(S), X)$ una sucesión de medidas uniformemente acotadas y $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(S), X)$. Si $\mu_n \xrightarrow{s} \mu$ entonces

$$\mu_n * \nu \xrightarrow{s} \mu * \nu.$$

Demostración. Sea $E \in \text{bor}(S)$ y λ_n, λ las medidas producto dadas por

$$\lambda_n(E) = \int_T \mu_n(E^t) \otimes d\nu(t), \quad \lambda(E) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t).$$

Por definición del producto de convolución tenemos:

$$\begin{aligned} \|\mu_n * \nu(E) - \mu * \nu(E)\| &= \|\overline{m}(\theta_{\lambda_n})(E) - \overline{m}(\theta_\lambda)(E)\| \\ &\leq \|\theta_{\lambda_n}(E) - \theta_\lambda(E)\| \\ &\leq \|(\lambda_n - \lambda)(\theta^{-1}(E))\| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Debido al Teorema 3.1.5 parte (i). □

A continuación definiremos el operador convolución de medida.

Definición 3.1.7. Sean $(S, \text{bor}(S))$ un espacio medible donde S es un grupo topológico y X una álgebra de Banach separable. Sean $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(S), X)$. Definimos por $T_\nu : \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(S), X) \rightarrow \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(S), X)$ dada por $\mu \rightarrow T_\nu(\mu) = \mu * \nu$ el operador convolución de medidas.

De acuerdo al Teorema 3.1.6 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.1.8. Sean $(S, \text{bor}(S))$ un espacio medible donde S es un grupo topológico y X una álgebra de Banach real separable. Sean $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(S), X)$ una sucesión uniformemente acotada, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(S), X)$, con ν fija y T_ν el operador convolución de medida. Si $\mu_n \xrightarrow{s} \mu$ entonces

$$T_\nu(\mu_n) \xrightarrow{s} T_\nu(\mu)$$

3.2. Convergencia Débil de Medidas

El concepto de convergencia débil surgió con Alexandrov en [6]. Una motivación fue la geometría de cuerpos convexos y el concepto de cargas.

Definición 3.2.1. Sean T un espacio topológico, $\text{bor}(T)$ la σ -álgebra de los borelianos de T , X un espacio de Banach, $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\sigma(\text{bor}(T), X)$ una sucesión y $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\text{bor}(T), X)$. Diremos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente $(\mu_n \xrightarrow{w} \mu)$ a la medida μ , si

$$\lim_n \int_T f(t) d\mu_n(t) = \int_T f(t) d\mu(t), \text{ para toda } f \in \mathcal{C}_b(T),$$

donde $\mathcal{C}_b(T)$ es el espacio de las funciones continuas y acotadas de T en $\mathbb{R}$.

De la definición anterior pareciera que hubiera una dualidad entre el conjunto de las funciones continuas y acotadas y el conjunto de las medidas vectoriales. La siguiente observación va enmarcada hacia esa aclaración.

Observación 3.2.2. (i) Obsérvese que la función

$$\langle f, \mu \rangle = \int_T f(t) d\mu(t)$$

es una función bilineal de $\mathcal{C}_b(T) \times \mathcal{M}_\sigma(\text{bor}(T), X)$ en X .

(ii) Diremos impropriamente que la función bilineal así definida es una dualidad entre $\mathcal{C}_b(T)$ y $\mathcal{M}_\sigma(\text{bor}(T), X)$, por lo cual escribiremos $\langle \mathcal{C}_b(T), \mathcal{M}_\sigma(\text{bor}(T), X) \rangle$. Esta función permite identificar cada medida vectorial μ con el operador lineal $L_\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_b(T), X)$ definido por $L_\mu(f) = \langle f, \mu \rangle$.

(iii) En general $\mu \rightarrow L_\mu$ no es sobreyectiva.

(iv) Cuando $X = \mathbb{R}$ se puede probar una dualidad en sentido propio $\langle \mathcal{C}_b(T), \mathcal{M}_\sigma(\text{bor}(T)) \rangle$.

Los siguientes teoremas enuncian la convergencia débil de la medida radoniana producto y del producto de convolución de medidas vectoriales radonianas.

Teorema 3.2.3. *Sean S, T espacios topológicos y X, Y espacios de Banach separables. Sean $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}(bor(S), X)$ y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}(bor(T), Y)$ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}(bor(S), X)$ una sucesión de medidas uniformemente acotadas. Si $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ entonces $\mu_n \otimes \nu \xrightarrow{w} \mu \otimes \nu$.*

Demostración. Sea $h \in \mathcal{C}_b(S \times T)$. Las funciones $g_n(t) = \int_S h_t(s) d\mu_n(s)$ y $g(t) = \int_S h_t(s) d\mu(s)$ son ν -medibles y además $g_n(t) \rightarrow g(t)$, por hipótesis. La sucesión $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada por ser $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas uniformemente acotadas. Por el Teorema de la convergencia acotada

$$\int_T g_n(t) \otimes d\nu(t) = \int_T \left(\int_S h_t(s) d\mu_n(s) \right) \otimes d\nu(t) \rightarrow \int_T g \otimes d\nu = \int_T \left(\int_S h_t(s) d\mu(s) \right) \otimes d\nu,$$

y por el Teorema de Fubini, Teorema 2.7.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{S \times T} h(s, t) d(\mu_n \otimes \nu)(s, t) &= \int_T \left(\int_S h_t(s) d\mu_n(s) \right) \otimes d\nu(t) \rightarrow \int_T \left(\int_S h_t(s) d\mu(s) \right) \otimes d\nu \\ &= \int_{S \times T} h(s, t) d(\mu \otimes \nu)(s, t). \end{aligned}$$

Por tanto $\mu_n \otimes \nu \xrightarrow{w} \mu \otimes \nu$. □

Teorema 3.2.4. *Sean S un grupo topológico, X una álgebra de Banach separable, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}(bor(S), X)$ y $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}(bor(S), X)$ una sucesión de medidas uniformemente acotadas. Si $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ entonces $\mu_n * \nu \xrightarrow{w} \mu * \nu$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}_b(S)$ y definimos $h(s, t) = f(st)$ para todo $(s, t) \in S \times S$ entonces $h \in \mathcal{C}_b(S \times S)$. Por el Teorema 7 en [43] se tiene que

$$\overline{m} \left(\int_{S \times S} h(s, t) d\lambda_n(s, t) \right) = \int_S f(x) d(\mu_n * \nu)(x)$$

y

$$\overline{m} \left(\int_{S \times S} h(s, t) d\lambda(s, t) \right) = \int_S f(x) d(\mu * \nu)(x).$$

Por la continuidad de $\overline{m}$ tenemos que:

$$\lim_n \overline{m} \left(\int_{S \times S} h(s, t) d\lambda_n(s, t) \right) = \overline{m} \left(\int_{S \times S} h(s, t) d\lambda(s, t) \right);$$

es decir,

$$\int_S f(x) d(\mu_n * \nu)(x) \rightarrow \int_S f(x) d(\mu * \nu)(x)$$

y por tanto hemos mostrado que $\mu_n * \nu \xrightarrow{w} \mu * \nu$ □

Observación 3.2.5. Se puede demostrar que si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a μ con respecto a la norma de la semivariación entonces $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$.

Observación 3.2.6. (Sobre la noción de convergencia débil). En algunas situaciones emparentadas con la convergencia débil es conveniente recurrir a la noción de convergencia en el sentido de las distribuciones. Para ello miremos el siguiente ejemplo. Consideremos dos cargas ubicadas sobre el eje real una de ellas ubicada en el origen y separada de la otra por una distancia que llamaremos ϵ . Cada una de estas cargas tiene ordenada la del origen $-1/\epsilon$ y la otra $1/\epsilon$. La carga total que la vamos a denotar ν_ϵ tiene la siguiente fórmula

$$\nu_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \delta_\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \delta_0,$$

donde δ_x es la medida Delta de Dirac en x y cuando $\epsilon \rightarrow 0$, ν_ϵ no es una medida. Si utilizáramos la convergencia débil de medidas entonces para toda f boreliana y acotada tendríamos lo siguiente

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int f \delta_\epsilon - \int f \delta_0 \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (f(\epsilon) - f(0)) = f'(0),$$

lo cual no podría ser pues no tenemos ninguna garantía de que las funciones involucradas tengan derivada. Pero si usamos algo más general como las distribuciones donde $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \delta_\epsilon, \phi \rangle - \langle \delta_0, \phi \rangle}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(\epsilon) - \phi(0)}{\epsilon} = \phi'(0) = \delta_0(\phi') = -\delta'_0(\phi).$$

Por supuesto la información precisa sobre la convergencia puede ser capturada con la noción de convergencia de distribuciones como se muestra en la anterior observación.

3.3. Transformada de Fourier de una Medida Vectorial

Este es el segundo tópico a desarrollar. Haremos una extensión de la noción de transformada de Fourier para el caso vectorial. Para desarrollar varias de sus propiedades haremos uso de las integrales de Bochner, Bartle-Lewis y la integral de Bartle para funciones bilineales.

En esta sección el espacio de Banach es complejo y $(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n))$ es un espacio medible.

Todas las propiedades y definiciones que expondremos a continuación son válidas para el Toro Π^n .

Definición 3.3.1. Sean $(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n))$ un espacio medible, X un espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ una medida vectorial σ -aditiva. Definimos la transformada de Fourier de ν , como la función $\hat{\nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ dada por:

$$\hat{\nu}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d\nu(x).$$

Observación 3.3.2. Esta función está bien definida ya que $\|\widehat{\nu}\|_\infty \leq \|\nu\|(\mathbb{R}^n)$. Como $f(x) = e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle}$ es una función continua y acotada entonces es ν -integrable y además

$$\|\widehat{\nu}(\zeta)\| \leq \|\nu\|(\mathbb{R}^n),$$

si tomamos el supremo sobre todos los $\zeta \in \mathbb{R}^n$ entonces $\|\widehat{\nu}\|_\infty \leq \|\nu\|$.

Proposición 3.3.3. Sean $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\text{bor}(\mathbb{R}^n), X)$, donde X es un espacio de Banach. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

- (i) $\widehat{\mu + \nu} = \widehat{\mu} + \widehat{\nu}$.
- (ii) $\widehat{\alpha\mu} = \alpha\widehat{\mu}$, para $\alpha \in \mathbb{K}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \widehat{(\mu + \nu)}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d(\mu(x) + \nu(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d\nu(x) = \widehat{\mu}(\zeta) + \widehat{\nu}(\zeta). \\ \widehat{(\alpha\mu)}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d(\alpha\mu(x)) = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d\mu(x) = \alpha\widehat{\mu}(\zeta). \quad \square \end{aligned}$$

Los dos siguientes teoremas nos muestran la transformada de Fourier de la medida producto y el producto de convolución para medidas vectoriales radonianas σ -aditivas.

Teorema 3.3.4. Sean X, Y espacios de Banach separables, $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(\mathbb{R}^n), X)$, $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(\mathbb{R}^n), Y)$. Entonces la transformada de Fourier de la medida producto $\widehat{\mu \otimes \nu}$ es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $X \hat{\otimes}_\epsilon Y$ y cumple la siguiente igualdad

$$\widehat{\mu \otimes \nu}(\zeta, \zeta') = \widehat{\mu}(\zeta) \otimes \widehat{\nu}(\zeta')$$

Demostración. Sean $x, y, \zeta, \zeta' \in \mathbb{R}^n$. Gracias al teorema de Fubini y que la función tensorial es una función bilineal, tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{(\mu \otimes \nu)}(\zeta, \zeta') &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle (x, y), (\zeta, \zeta') \rangle} d(\mu \otimes \nu)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} e^{-2\pi i \langle y, \zeta' \rangle} d\mu(x) \right) \otimes d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \zeta' \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d\mu(x) \right) \otimes d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \zeta' \rangle} \widehat{\mu}(\zeta) \otimes d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}(\zeta) \otimes e^{-2\pi i \langle y, \zeta' \rangle} d\nu(y) \\ &= \widehat{\mu}(\zeta) \otimes \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \zeta' \rangle} d\nu(y) = \widehat{\mu}(\zeta) \otimes \widehat{\nu}(\zeta'). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 3.3.5. Sean X una álgebra de Banach separable y $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(\mathbb{R}^n), X)$. Entonces la transformada del producto de convolución de μ y ν , $\widehat{(\mu * \nu)}$ es una función de $\mathbb{R}^n$ en X y cumple la siguiente igualdad

$$\widehat{(\mu * \nu)}(\zeta) = \widehat{\mu}(\zeta) \widehat{\nu}(\zeta).$$

Demostración. Por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
 (\widehat{\mu * \nu})(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x+x', \zeta \rangle} d\mu(x) \right) d\nu(x') \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} e^{-i \langle x', \zeta \rangle} d\mu(x) \right) d\nu(x') \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x', \zeta \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} d\mu(x) \right) d\nu(x') \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x', \zeta \rangle} \widehat{\mu}(\zeta) d\nu(x') = \widehat{\mu}(\zeta) \widehat{\nu}(\zeta). \quad \square
 \end{aligned}$$

Definición 3.3.6. Sean $(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n))$ un espacio medible, X una álgebra de Banach con unidad e , $a \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \text{bor}(\mathbb{R}^n)$. Definimos la *medida vectorial Delta de Dirac* δ_a , como:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} e & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}.$$

El cero corresponde al elemento nulo de la álgebra de Banach X .

Observación 3.3.7. Se puede demostrar que la delta de Dirac así definida es una medida vectorial σ -aditiva y además radoniana.

Teorema 3.3.8. Sean X una álgebra de Banach y $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}(\text{bor}(\mathbb{R}^n), X)$. Entonces para todo $A \in \text{bor}(\mathbb{R}^n)$ se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $\mu * \delta_a(A) = \mu(A - a)$.
- (ii) $\delta_a * \delta_b(A) = \delta_{a+b}(A)$.
- (iii) $\mu * \delta_{e'} = \delta_{e'} * \mu = \mu$, donde e' es la identidad de $\mathbb{R}^n$.
- (iv) $\widehat{\delta_a}(x) = e e^{-i \langle x, a \rangle}$. Si $a = e'$ entonces $\widehat{\delta_{e'}}(x) = e$.

Demostración. (i) Por la Proposición 3 de [43] se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mu * \delta_a(A) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(A - t) d\delta_a(t) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n - \{t\}} \mu(A - t) d\delta_a(t) + \int_{\{t\}} \mu(A - t) d\delta_a(t) \\
 &= e\mu(A - a) = \mu(A - a).
 \end{aligned}$$

- (ii) Haciendo $\mu = \delta_a$ tenemos para un $A \in \text{bor}(\mathbb{R}^n)$ que

$$\delta_a * \delta_b(A) = \delta_a(A - b),$$

pero

$$\delta_a(A - b) = \begin{cases} e & \text{si } a \in A - b \\ 0 & \text{si } a \notin A - b \end{cases},$$

lo que implica que

$$\delta_a(A - b) = \begin{cases} e & \text{si } a + b \in A \\ 0 & \text{si } a + b \notin A \end{cases}.$$

Luego $\delta_a * \delta_b(A) = \delta_{a+b}(A)$.

(iii) La identidad e' en $\mathbb{R}^n$ es el cero 0, así que

$$\mu * \delta_{e'}(A) = \mu(A + e') = \mu(A + 0) = \mu(A).$$

(iv) Por propiedades de la delta de Dirac se tiene que

$$\widehat{\delta}_a(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \zeta \rangle} d\delta_a(\zeta) = ee^{-i\langle x, a \rangle}.$$

Ahora si $a = e' = 0$, entonces $\widehat{\delta}_0(x) = ee^{-i\langle x, 0 \rangle} = ee^0 = e$. □

Por último queremos demostrar una cota para la semivariación del producto de convolución.

Proposición 3.3.9. Sean S un grupo topológico, X una álgebra de Banach y $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}(bor(S), X)$. Entonces

$$\|\mu * \nu\|(S) \leq |\mu|(S)\|\nu\|(S).$$

Demostración. Sean $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ una partición de S y $x' \in X'$ tal que $\|x'\| \leq 1$. Se puede mostrar que $(\theta^{-1}(A_k))^t$ es también una partición de S para todo t . Recordemos que $\overline{m}$ es la linealización de la función multiplicación m de la álgebra de Banach X , $m : X \times X \rightarrow X$ dada por $m(x, y) = xy$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x' \circ \mu * \nu(A_k)| &= \sum_{k=1}^n |x' \circ \overline{m} \circ \theta_\lambda(A_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|\theta_\lambda(A_k)\| = \sum_{k=1}^n \|\lambda(\theta^{-1}(A_k))\| \\ &= \sum_{k=1}^n \left\| \int_S \mu((\theta^{-1}(A_k))^t) \otimes d\nu(t) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \sup_{t \in S} \|\mu((\theta^{-1}(A_k))^t)\| \|\nu\|(S) \\ &\leq |\mu|(S)\|\nu\|(S). \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todas las particiones de S y sobre los $\|x'\| \leq 1$ se tiene que

$$\|\mu * \nu\| \leq |\mu|\|\nu\|. \quad \square$$

3.4. Fourier: Integral de Bochner

Esta sección es un caso particular de la sección anterior. Aquí consideraremos las funciones vector valuadas Bochner integrables con respecto a la medida de Lebesgue.

Téngase en cuenta que la función $\tau_a f(x) = f(x - a)$ es una función Bochner integrable, si f es Bochner integrable.

Si ν tiene densidad f con respecto a la medida de Lebesgue λ , es decir si $d\nu = f d\lambda$ entonces podemos definir la transformada de Fourier de f de la siguiente forma.

Definición 3.4.1. Sean $(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ un espacio de medida donde λ es la medida de Lebesgue, X un espacio de Banach complejo y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$. Entonces la *transformada de Fourier* de f , $\hat{f}$, es una función de $\mathbb{R}^n$ en X definida por

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x) d\lambda(x).$$

Proposición 3.4.2. Para la transformada de Fourier $\hat{f}$ se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\lambda, X)}$.
- (ii) Si $f \in L^1(\lambda, X)$ entonces $\hat{f}$ es continua.
- (iii) $f, g \in L^1(\lambda, X)$, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} d\lambda$, si X es una álgebra de Banach conmutativa.
- (iv) Sea X un espacio de Hilbert complejo. Si $f \in L^2(\lambda, X)$. Entonces $\hat{f} \in L^2(\lambda, X)$ y $\|\hat{f}\|_{L^2(\lambda, X)} = \|f\|_{L^2(\lambda, X)}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \|\hat{f}(\zeta)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x) d\lambda(x) \right\| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x)\| d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\| d\lambda(x) \\ &= \|f\|_{L^1(\lambda, X)}. \end{aligned}$$

Tomando el supremo $\zeta \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\lambda, X)}.$$

Denotamos por $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$. Lo anterior muestra que la función transformada de Fourier $\mathcal{F}$ de $L^1(\lambda, X)$ a $L^\infty(\lambda, X)$ es acotada y de norma menor o igual a 1.

Para demostrar la segunda propiedad nos basaremos en el teorema de la convergencia dominada para la integral de Bochner y utilizaremos el hecho de que si $\zeta_n \rightarrow \zeta$ implica que

$\widehat{f}(\zeta_n) \rightarrow \widehat{f}(\zeta)$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\widehat{f}$ es continua. En efecto, sea $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\zeta_n \rightarrow \zeta$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para cada n , definimos $g_n(x)$ como $g_n(x) = e^{-2\pi i \langle x, \zeta_n \rangle} f(x)$. Entonces g_n es una sucesión de funciones Bochner integrables tal que $g_n \rightarrow g$ donde $g(x) = e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x)$. Por otro lado $\|g_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ que es Lebesgue integrable por ser f Bochner-integrable. Por el teorema de la convergencia dominada entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}(\zeta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta_n \rangle} f(x) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x) d\lambda(x) = \widehat{f}(\zeta) \end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad de $\widehat{f}$.

Para la tercera propiedad tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\zeta) g(\zeta) d\lambda(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x) d\lambda(x) \right] g(\zeta) d\lambda(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} g(\zeta) d\lambda(\zeta) \right] f(x) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x) f(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Demostremos la cuarta propiedad. Sea X un espacio de Hilbert. Entonces la transformada $\mathcal{F}$ se extiende a un isomorfismo sobre $L^2(\lambda, X)$ la cual es denotada nuevamente con $\mathcal{F}$. Además si $f, g \in L^2(\lambda, X)$, entonces se tiene la fórmula de Plancherel

$$(\widehat{f}|\widehat{g})_{L^2(\lambda, X)} = (f|g)_{L^2(\lambda, X)},$$

donde $(\cdot|\cdot)$ es el producto interno de X . Sean $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$ y $g = \sum_{k=1}^m y_k \chi_{F_k}$ funciones simples.

Usando el teorema de Plancherel para el caso escalar tenemos que

$$\begin{aligned} (\widehat{f}|\widehat{g})_{L^2(\lambda, X)} &= \sum_{i,k} (x_i \widehat{\chi_{E_i}} | y_k \widehat{\chi_{F_k}})_{L^2(\lambda, X)} = \sum_{i,k} (\widehat{\chi_{E_i}} | \widehat{\chi_{F_k}})_{L^2(\lambda, X)} (x_i | y_k) \\ &= \sum_{i,k} (\chi_{E_i} | \chi_{F_k})_{L^2(\lambda, X)} (x_i | y_k) = (f|g)_{L^2(\lambda, X)}. \end{aligned}$$

Entonces $\|\widehat{f}\|_{L^2(\lambda, X)} = \|f\|_{L^2(\lambda, X)}$ para funciones simples. Como el espacio de las funciones simples es denso en $L^2(\lambda, X)$, $\mathcal{F}$ se extiende continuamente a una isometría en $L^2(\lambda, X)$ y usando la fórmula de Plancherel se sostiene la extensión. $\square$

Proposición 3.4.3. Sea $h \in \mathbb{R}^n$ y definamos $(\tau_h f)(x) = f(x - h)$. Entonces

$$\widehat{\tau_h f}(\zeta) = e^{-2\pi i \langle h, \zeta \rangle} \widehat{f}(\zeta).$$

Demostración. Recordemos que f y $\tau_h f$ son funciones Bochner integrables. Entonces por el Teorema 2.3.5 tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} \tau_h f(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x - h) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y + h, \zeta \rangle} f(y) d\lambda(y) \\ &= e^{-2\pi i \langle h, \zeta \rangle} \widehat{f}(\zeta),\end{aligned}$$

por el cambio de variable $y = x - h$. □

A continuación definiremos el producto de convolución de dos funciones.

Definición 3.4.4. Sea $(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ un espacio de medida, donde λ la medida de Lebesgue. Sean X una álgebra de Banach compleja y $f, g \in L^1(\lambda, X)$. Definimos el *producto de convolución* de f y g , $f * g$ como una función de $\mathbb{R}^n$ en X definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) d\lambda(y).$$

Proposición 3.4.5. Sea X una álgebra de Banach. Sean $f, g, h \in L^1(\lambda, X)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $f * g = g * f$ (Si X es una álgebra de Banach conmutativa).
- (ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- (iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- (iv) $\|f * g\|_{L^1(\lambda, X)} \leq \|f\|_{L^1(\lambda, X)} \|g\|_{L^1(\lambda, X)}$
- (v) $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

Demostración. Cálculos directos permiten demostrar (i), (ii), (iii). Demostraremos (iv). Primero que todo se puede demostrar que $\|\tau_y f\|_{L^p(\lambda, X)} = \|f\|_{L^p(\lambda, X)}$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L^1(\lambda, X)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f * g(x)\| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) d\lambda(y) \right\| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x - y)\| \|g(y)\| d\lambda(y) \right] d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x - y)\| d\lambda(x) \right] \|g(y)\| d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \|f(u)\| d\lambda(u) \right] \|g(y)\| d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^1(\lambda, X)} \|g(y)\| d\lambda(y) = \|f\|_{L^1(\lambda, X)} \|g\|_{L^1(\lambda, X)}\end{aligned}$$

Para demostrar la quinta propiedad necesitamos el teorema de Fubini y el teorema del cambio de variable.

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f * g(x) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) d\lambda(y) \right] d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x - y, \zeta \rangle} e^{-2\pi i \langle y, \zeta \rangle} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) d\lambda(y) \right] d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x - y, \zeta \rangle} f(x - y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \zeta \rangle} g(y) d\lambda(y) \right] d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x - y, \zeta \rangle} f(x - y) \widehat{g}(\zeta) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle u, \zeta \rangle} f(u) \widehat{g}(\zeta) d\lambda(u) \\
&= \widehat{f}(\zeta) \widehat{g}(\zeta),
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $u = x - y$. □

Proposición 3.4.6. Sean $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L^1(\lambda, X)$ y $g \in L^p(\lambda, X)$ entonces $f * g \in L^p(\lambda, X)$ y

$$\|f * g\|_{L^p(\lambda, X)} \leq \|f\|_{L^1(\lambda, X)} \|g\|_{L^p(\lambda, X)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^p(\lambda, X)} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(\cdot - y) d\lambda(y) \right\|_{L^p(\lambda, X)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(y) g(\cdot - y)\|_{L^p(\lambda, X)} d\lambda(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(y)\| \|g(\cdot - y)\|_{L^p(\lambda, X)} d\lambda(y) \\
&= \|g\|_{L^p(\lambda, X)} \int_{\mathbb{R}^n} \|f(y)\| d\lambda(y) = \|f\|_{L^1(\lambda, X)} \|g\|_{L^p(\lambda, X)}.
\end{aligned}$$
□

La siguiente proposición muestra un cálculo del producto de convolución cuando ambas tienen función densidad.

Proposición 3.4.7. Si α y ν son medidas vectoriales con densidad f y g respecto a la medida de Lebesgue, entonces

$$\alpha_f * \nu_g(B) = \int_B f * \bar{g}(s) d\lambda(s),$$

para todo $B \in \text{bor}(\mathbb{R}^n)$ y $\bar{g}(t) = g(-t)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\alpha_f * \nu_g(B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_f(B-t) d\nu_g(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_f(B-t) g(t) d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{B-t} f(s) d\lambda(s) \right] g(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_B f(s+t) d\lambda(s) \right] g(t) d\lambda(t) \\
&= \int_B \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(s+t) g(t) d\lambda(t) \right] d\lambda(s) = \int_B \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(s-t) g(-t) d\lambda(t) \right] d\lambda(s) \\
&= \int_B \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(s-t) \bar{g}(t) d\lambda(t) \right] d\lambda(s) \\
&= \int_B f * \bar{g}(s) d\lambda(s).
\end{aligned}$$

□

Esta proposición nos permite concluir que $\alpha_f * \nu_g$ tiene como densidad a $f * \bar{g}$ con respecto a la medida de Lebesgue.

3.5. Fourier: Integral de Bartle-Lewis

Recordemos que las medidas vectoriales invariantes bajo translaciones son un múltiplo vectorial de la medida de Lebesgue en espacios de Hilbert separables. En [19], Delgado y Miana dan una definición diferente de medidas vectoriales invariantes bajo translaciones y con ello Blasco y Calabuig en [9] y [12] desarrolla una transformada de Fourier para funciones $f \in L^1(\nu)$ y $f \in L_w^1(\nu)$.

Nosotros desarrollaremos esta sección sin considerar la definición dada por Miana y Olvido lo que convierte a esta teoría en un análisis armónico no invariante. Desarrollaremos esta teoría para funciones $f \in L^1(\nu)$.

Definición 3.5.1. Sean Y un espacio de Banach complejo y $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\text{bor}(\mathbb{R}^n), Y)$. Definimos la *transformada de Fourier* de f como la función $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ dada por

$$\hat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \zeta \rangle} f(y) d\nu(y).$$

Teorema 3.5.2. La transformada de Fourier es una función que va de $L^1(\nu)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n, Y)$ tal que

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\nu)}.$$

Demostración. Sea $y' \in Y'$. Como y' es un operador lineal y continuo tenemos que

$$\begin{aligned}
|y' \circ \hat{f}(\zeta)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \zeta \rangle} f(y) d(y' \circ \nu)(y) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \langle y, \zeta \rangle} f(y)| d|y' \circ \nu|(y) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d|y' \circ \nu|(y)
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre los $\|y'\| \leq 1$, tenemos que

$$\|\widehat{f}(\zeta)\| \leq \|f\|_{L^1(\nu)},$$

y luego tomando el supremo sobre los ζ tenemos que

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\nu)}.$$

□

Teorema 3.5.3. Si $f \in L^1(\nu)$ entonces $\widehat{f}$ es continua.

Demostración. Sea $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión que converge a ζ y para cada n definamos $g_n(x) = e^{-2\pi i \langle x, \zeta_n \rangle} f(x)$. Entonces $|g_n(x)| \leq |f(x)|$ donde $|f(x)|$ es una función ν -integrable ya que f lo es. Por el teorema 2.4.3, $g(x) = e^{-2\pi i \langle x, \zeta \rangle} f(x)$ es ν -integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_n d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} g d\nu.$$

Así $\widehat{f}(\zeta_n) \rightarrow \widehat{f}(\zeta)$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por tanto $\widehat{f}$ es continua. □

Definición 3.5.4. Diremos que $\mathbf{M}$ es un *módulo* si para cada $f \in \mathbf{M}$ y $g \in L^1(\lambda)$, donde λ es la medida de Lebesgue, tenemos que $f * g \in \mathbf{M}$ con $\|f * g\|_{\mathbf{M}} \leq \|\tau_z f\|_{\mathbf{M}} \|g\|_{L^1(\lambda)}$ para $z \in \mathbb{R}^n$. Con esto, definimos el producto de convolución de f y g como

$$f * g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - z)g(z)d\lambda(z).$$

Teorema 3.5.5. Sea $f \in L^1_w(\nu)$ y $g \in L^1(\lambda)$, entonces

$$\widehat{f * g}(\zeta) = \widehat{\tau_z f}(\zeta)_{L^1_w(\nu)} \widehat{g}(\zeta)_{L^1(\lambda)}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y, \zeta \rangle} f * g(y) d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y - z, \zeta \rangle} e^{-2\pi i \langle z, \zeta \rangle} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y - z)g(z)d\lambda(z) \right] d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y - z, \zeta \rangle} f(y - z) \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle z, \zeta \rangle} g(z)d\lambda(z) \right] d\nu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y - z, \zeta \rangle} f(y - z) \widehat{g}(\zeta)_{L^1(\lambda)} d\nu(y) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle y - z, \zeta \rangle} f(y - z) d\nu(y) \right) \widehat{g}(\zeta)_{L^1(\lambda)} \\ &= \widehat{\tau_z f}(\zeta)_{L^1_w(\nu)} \widehat{g}(\zeta)_{L^1(\lambda)}. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema muestra que $L^p(\nu)$ y $L_w^p(\nu)$ son $\mathbf{M}$ -módulos.

Teorema 3.5.6. *Sea $1 \leq p < \infty$. Si $f \in L_w^p(\nu)$ y $g \in L^1(\lambda)$ entonces $f * g \in L_w^p(\nu)$ y*

$$\|f * g\|_{L_w^p(\nu)} \leq \|\tau_y f\|_{L_w^p(\nu)} \|g\|_{L^1(\lambda)}.$$

*Adicionalmente si $f \in L^p(\nu)$ entonces $f * g \in L^p(\nu)$.*

Demostración. Para cada $y' \in Y'$ y por la desigualdad de Minkowsky, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(y)|^p d|y' \circ \nu|(y) \right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)d\lambda(z) \right|^p d|y' \circ \nu|(y) \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y-z)||g(z)|d\lambda(z) \right)^p d|y' \circ \nu|(y) \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y-z)|^p d|y' \circ \nu|(y) \right)^{1/p} d\lambda(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(z)| \|\tau_z f\|_{L_w^p(\nu)} d\lambda(z) \\ &= \|\tau_z f\|_{L_w^p(\nu)} \|g\|_{L^1(\lambda)}. \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todos los $\|y'\| \leq 1$ tenemos que

$$\|f * g\|_{L_w^p(\nu)} \leq \|\tau_z f\|_{L_w^p(\nu)} \|g\|_{L^1(\lambda)}.$$

Para demostrar la segunda parte consideremos $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes a f y g respectivamente. Notemos que $\phi_n * \psi_n \in L^p(\nu)$ ya que $f * g$ es acotada. Además

$$\|\phi_n * \psi_n - f * g\|_{L^p(\nu)} \leq \|f * (g - \psi_n)\|_{L^p(\nu)} + \|(f - \phi_n) * \psi_n\| \rightarrow 0.$$

Entonces $f * g \in L^p(\nu)$ ya que $L^p(\nu)$ es un subespacio cerrado de $L_w^p(\nu)$. □

Transformada de Fourier			
Caso	De una medida vectorial	De una función Bocher Integrable	De una función Bartle-Lewis Integrable
Definición	$(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n))$ espacio medible, X espacio de Banach, $\nu : \text{bor}(\mathbb{R}^n) \rightarrow X$ y $\widehat{\nu} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ definida por $x \mapsto \widehat{\nu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\nu$	$(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n))$ espacio medible, λ medida de Lebesgue, X espacio de Banach complejo, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ Bochner integrable y $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ definida por $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) d\lambda(x).$	$(\mathbb{R}^n, \text{bor}(\mathbb{R}^n))$ espacio medible, f función de valor escalar medible, ν-integrable, $\nu : \text{bor}(\mathbb{R}^n) \rightarrow X$ medida vectorial, X espacio de Banach complejo y $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow X$ definida por $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} f(x) d\nu(x).$
Propiedades	$\ \widehat{\nu}(\xi)\ \leq \ \widehat{\nu}\ (\mathbb{R}^n) < \infty$. μ y ν medidas vectoriales radonianas, $\mu : \text{bor}(\mathbb{R}^n) \rightarrow X$ y $\nu : \text{bor}(\mathbb{R}^n) \rightarrow Y$, entonces $\widehat{\mu \otimes \nu}(\xi, \xi') = \widehat{\mu}(\xi) \otimes \widehat{\nu}(\xi')$. - Si X es algebra de Banach, $\widehat{\mu * \nu}(\xi) = \widehat{\mu}(\xi) \widehat{\nu}(\xi')$. Se define $\delta_a(A) = \begin{cases} e & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$ $\mu * \delta_a(A) = \mu(A - a)$. $\delta_a * \delta_b(A) = \delta_{a+b}(A)$. $\mu * \delta_0 = \delta_0 * \mu = \mu$. $\widehat{\delta_a}(x) = e e^{-i \langle x, a \rangle}$.	$\ \widehat{f}\ _\infty \leq \ f\ _{L^1(\lambda, X)}$. $f \in L^1(\lambda, X)$ implica $\widehat{f}$ es continua. - Si X es álgebra de Banach conmutativa y $f, g \in L^1(\lambda, X)$, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} d\lambda$. - Sea X un espacio de Hilbert complejo. Si $f \in L^2(\lambda, X)$, entonces $\widehat{f} \in L^2(\lambda, X)$ y además $\ \widehat{f}\ _{L^2(\lambda, X)} = \ f\ _{L^2(\lambda, X)}$. Sea X álgebra de Banach y $f, g \in L^1(\lambda, X)$, se define $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) d\lambda(y)$. $(f * g) * h = f * (g * h)$ $\ f * g\ _{L^1} \leq \ f\ _{L^1} \ g\ _{L^1}$. $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.	$\ \widehat{f}\ _\infty \leq \ f\ _{L^1(\nu)}$. $f \in L^1(\nu)$ implica que $\widehat{f}$ es continua. - Si $f \in M$ y $g \in L^1(\lambda)$, entonces $f * g \in M$ y $\ f * g\ \leq \ \tau_z f\ _M \ g\ _{L^1(\lambda)}$. En este caso $f * g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y - z) g(z) d\lambda(z)$ $L^p(\nu)$ y $L_w^p(\nu)$ son M-módulos. $f \in L_w^1(\lambda)$ y $g \in L^1(\lambda)$, entonces $\widehat{f * g}(\xi) = \tau_z \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$.

Tabla 3.1. Tabla sobre Transformada de Fourier

Capítulo 4

Medidas Solución y Ecuaciones Diferenciales

En este capítulo presentamos de manera expositiva algunas aplicaciones de la teoría de medida en el caso real. En particular, recordamos la noción de medida solución en el estudio de ecuaciones diferenciales. Para ello requeriremos del empleo de diferentes espacios de Banach de medidas y algunos conceptos en topología. Es importante resaltar que el marco teórico expuesto en los capítulos anteriores es válido en el caso en que Ω es un espacio de Banach.

4.1. Motivación

En esta sección empezaremos recordando un ejemplo básico en el estudio de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. El concepto de solución no es solo relativo al contexto, por ejemplo los espacios de funciones o distribuciones, sino más aún a las nociones mismas involucradas en las identidades que definen la ecuación.

Para introducir el concepto de medida solución, empezaremos ilustrando la motivación para dicha noción con un ejemplo. Consideremos la ecuación de evolución semilineal en espacios de Banach:

$$\begin{cases} \dot{x} + Ax = F(x), & t \in [0, T], \quad T < \infty \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

sobre un espacio de Banach E , con A generador de un C_0 -semigrupo (Ver [39]) $S(t)$, $t \geq 0$ y F una función continua de E en E con algunas condiciones a precisar.

Existen varias nociones de soluciones: soluciones clásicas, soluciones fuertes, soluciones débiles, medidas solución. Aquí nos ocuparemos solamente de la noción de medida solución. Para

más detalles y una exposición sobre los otros conceptos ver [1], [2] y [5].

Si F es continua y el espacio E es de dimensión finita, el Teorema de Peano garantiza la existencia de soluciones locales. Sin embargo, si E es un espacio de Banach de dimensión infinita y F es meramente continua sobre E , la ecuación (4.1) puede no tener solución, en ninguno de los sentidos: clásico, fuerte o débil.

Para ilustrar la patología sobre la no existencia de soluciones de ecuaciones ordinarias en espacios de Banach de dimensión infinita, consideremos el siguiente ejemplo encontrado en Dieudonné [22], para el caso más simple, $A = 0$ y sobre el espacio de Banach $E = c_0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x), & t \in [0, T], \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

Sea $F : E \rightarrow E$ definida de la siguiente forma: si $x = (x_n) \in c_0$ definimos

$$F(x) = \{F_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Es claro que F es continua en c_0 . Resolver la ecuación (4.2) implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que resolver

$$\dot{x}_n = F_n(x) = \sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}, \quad \text{con } x_n(0) = 0,$$

en $I = [0, T_1]$ con $T_1 \leq T$.

Sea $c = \frac{1}{n+1}$ y resolvamos la ecuación

$$\frac{dx_n}{dt} = \sqrt{|x_n|} + c,$$

entonces

$$\int_I \frac{dx_n}{\sqrt{|x_n|} + c} = \int_I dt$$

y por tanto

$$\frac{2}{\text{sign}(x_n)} \left[\sqrt{|x_n|} + c - c \ln(\sqrt{|x_n|} + c) \right] = T_1 + K_1,$$

donde K_1 es una constante. Por otro lado aplicando la condición inicial de que $x_n(0) = 0$, tenemos que

$$\frac{2}{\text{sign}(x_n)} (c - c \ln(c)) = K_1.$$

Por tanto la solución general es de la forma

$$\sqrt{|x_n|} - \frac{1}{n+1} \ln \left(\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{n+1} \ln \left(\frac{1}{n+1} \right) = \text{sign}(x_n) \frac{T_1}{2}.$$

Mostremos que

$$|x_n| \geq \frac{T_1^2}{4},$$

para todo $T_1 > 0$.

En efecto,

$$\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1} \ln \left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\sqrt{|x_n|} + \frac{1}{n+1}} \right) = \text{sign}(x_n) \frac{T_1}{2}.$$

De aquí

$$\sqrt{|x_n|} - \frac{1}{n+1} \ln((n+1)\sqrt{|x_n|} + 1) = \text{sign}(x_n) \frac{T_1}{2},$$

pero $(n+1)\sqrt{|x_n|} + 1 \geq 1$ lo que hace que $\ln((n+1)\sqrt{|x_n|} + 1) > 0$ y por tanto

$$|x_n| \geq \frac{T_1^2}{4},$$

para todo $T_1 > 0$ y todo n . Esto contradice el hecho de que $x_n \in c_0$, pues al fijar $T_1 > 0$, la sucesión (x_n) no tiende a cero. Se puede concluir que el problema 4.2 no tiene solución clásica.

Este tipo de situación ha motivado la introducción de la noción de medidas solución. Primero requeriremos de algunas notaciones preliminares. Adicionalmente, para exhibir un teorema de existencia de medidas solución para ciertas ecuaciones también recordaremos algunos conceptos topológicos en relación con el Teorema de Stone-Čech.

4.2. Medidas Solución

Definición 4.2.1. Sea Ω un espacio topológico. Una medida boreliana μ es *regular* si cumple las dos condiciones siguientes:

- (i) $\mu(W) = \inf\{\mu(V) : W \subseteq V \text{ y } V \text{ abierto},\}$ para todo $W \in \text{bor}(\Omega)$.
- (ii) $\mu(W) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq W \text{ y } C \text{ cerrado},\}$ para todo $W \in \text{bor}(\Omega)$.

Si μ es finita, las condiciones (i) y (ii) son equivalentes.

A continuación definiremos los espacios de Banach y espacios de Banach de medidas fundamentales en este contexto.

- Notación 4.2.2.** (i) Sea Ω un espacio topológico. Recordemos que $\mathcal{C}_b(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones acotadas y continuas de Ω en $\mathbb{R}$.
- (ii) Sea Ω un espacio topológico normal, $\mathcal{A}_c(\Omega) = \mathcal{A}_c$ denota la álgebra generada por los cerrados de Ω y $\sigma(\mathcal{A}_c)$ la σ -álgebra generada por $\mathcal{A}_c$.
- (iii) Denotamos por $\mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$ al espacio de las medidas regulares y acotadas dotado con la norma de la variación y a $\mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\sigma(\mathcal{A}_c))$ al espacio de las medidas regulares σ -aditivas y acotadas dotado con la norma de la variación.
- (iv) $\mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$ y $\mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\sigma(\mathcal{A}_c))$ son espacios de Banach.
- (v) Sea $\mathcal{M}_{r,pro}(\mathcal{A}_c)$ el espacio de las medidas probabilísticas regulares sobre $\mathcal{A}_c$. Entonces $\mathcal{M}_{r,prob}(\mathcal{A}_c) \subset \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$.
- (vi) Sea $I = [0, T]$ un intervalo con $T < \infty$ y denotamos por $L^1(\lambda, \mathcal{C}_b(\Omega))$ el espacio Lebesgue Bochner de las funciones vector valuadas de I en $\mathcal{C}_b(\Omega)$.
- (vii) Sea $L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c))$ el espacio de las funciones débilmente medibles de I en $\mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$.
- (viii) Denotamos por $\rho(A)$ al resolvente de A y $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ donde $\lambda \in \rho(A)$.

En [24] se establece que

$$(\mathcal{C}_b(\Omega))' = \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c).$$

Cuando Ω es un espacio topológico compacto se tiene más. Por otro lado, la acción de una medida $\nu \in \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$ sobre cualquier elemento $f \in \mathcal{C}_b(\Omega)$ será denotada por

$$\langle \nu, f \rangle \equiv \int_{\Omega} f(\zeta) d\nu(\zeta). \quad (4.3)$$

Teorema 4.2.3. *Sea Ω un espacio topológico compacto. Entonces*

$$(\mathcal{C}_b(\Omega))' \cong \mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\mathcal{A}_c).$$

Además para cada $\mu \in \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)$ tiene una extensión σ -aditiva de $\mathcal{A}_c$ a $\sigma(\mathcal{A}_c)$.

Demostración. Ver [24], Teorema 2 y 3, Páginas 262-265. □

Así que si Ω es compacto, entonces

$$(\mathcal{C}_b(\Omega))' \cong \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c) \cong \mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\sigma(\mathcal{A}_c)). \quad (4.4)$$

En este caso entonces la acción (4.3) puede verse sobre $\mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\mathcal{A}_c)$.

Estas identidades serán la herramienta clave en el estudio del concepto de medida solución. A continuación repasamos algunos conceptos clásicos de topología.

Definición 4.2.4. Un espacio topológico Ω es *regular* si dados un cerrado C y un punto x que no pertenece a C , existe una vecindad U de x y una vecindad V de C tales que $U \cap V = \emptyset$.

Definición 4.2.5. Sea Ω un espacio Hausdorff. Diremos que Ω es un espacio *completamente regular* si dado un punto $x \in \Omega$ y un cerrado $A \subset \Omega$ tal que $x \notin A$, existe una función continua $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$.

Se puede demostrar que todo subespacio de un espacio completamente regular también lo es y que el producto de espacios completamente regulares también lo es. Cada espacio completamente regular también es regular. En la perspectiva de nuestro contexto, recordamos que todo espacio de Banach es completamente regular.

Definición 4.2.6. Sea Ω un espacio completamente regular no compacto. Una *compactificación* de Ω es un par $(\hat{\Omega}, h)$ consistente de un espacio compacto Hausdorff $\hat{\Omega}$ y un homeomorfismo h de Ω en $\hat{\Omega}$ tal que $h(\Omega)$ es un subconjunto denso de $\hat{\Omega}$.

La compactificación de Stone-Čech de Ω es el par $(\beta(\Omega), \rho)$ donde $\beta(\Omega) = \overline{\rho(\Omega)}$ y tiene las siguientes propiedades

Teorema 4.2.7. Para cada espacio compacto Y y cada función continua $f : \Omega \rightarrow Y$ existe una única función $F : \beta(\Omega) \rightarrow Y$ tal que $f = F \circ \rho$.

Cualquier compactificación $(\hat{\Omega}, h)$ que tenga la propiedad anterior es homeomorfo a $\beta(\Omega)$, es decir existe un homeomorfismo $\hat{\Omega} \cong \beta(\Omega)$ que es la función identidad en Ω y

$\beta(\Omega)$ es la más grande compactificación de Ω : Si $\hat{\Omega}$ es cualquier compactificación de Ω , entonces $\hat{\Omega}$ es el espacio cociente de $\beta(\Omega)$.

Demostración. Ver [25], Teorema 8.2, Página 243. □

De aquí en adelante denotaremos como $\beta E = \beta(E)$.

Ahora una aplicación del Teorema de Stone-Čech y algunos argumentos adicionales conducen a [5]:

Teorema 4.2.8. Cada espacio de Banach E admite una compactificación de Stone-Čech βE la cual es un espacio compacto Hausdorff que contiene un subespacio denso el cual es homeomorfo a E . Sean E y F dos espacios de Banach tal que la inmersión $E \hookrightarrow F$ es continua. Entonces sus compactificaciones de Stone-Čech satisfacen las inclusiones $\beta F \subseteq \beta E$.

En adelante $\beta(E) \equiv \beta E$. Antes de entrar en materia definiremos lo que es la potencia fraccionaria de un operador cerrado.

Definición 4.2.9. Sea A un operador lineal cerrado denso para el cual

$$\rho(A) \subset \Sigma^+ = \{\lambda : 0 < w < |\arg \lambda| \leq \pi\} \cup V,$$

donde V es una vecindad de cero, y

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|},$$

para $\lambda \in \Sigma^+$. Teniendo esto en mente, para un operador A y un $\alpha > 0$, definimos

$$A^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-\alpha} (A - zI)^{-1} dz,$$

donde C recorre el conjunto resolvente de A desde $-\infty e^{-i\theta}$ a $\infty e^{i\theta}$ con $w < \theta < \pi$, evitando el eje real negativo y el origen y $z^{-\alpha}$ es tomado positivo para valores reales de z . Si $w < \pi/2$, entonces

$$A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$$

y para $\alpha = 0$, $A^\alpha = I$ donde I es el operador identidad.

En nuestro contexto E será un dominio de alguna potencia fraccionaria positiva del operador A en la ecuación (4.1), y la compactificación de Stone-Čech se aplicará a uno de dichos espacios. De esta manera pudiendo disponer de las identidades (4.4) la fórmula (4.3) será crucial para la definición de medida solución partiendo de un sentido generalizado usando este tipo de acción. A continuación describimos la familia de espacios provenientes de las potencias fraccionarias de A , y la clase de funciones test.

Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo analítico sobre E y $\alpha \in (0, 1)$ y A^α denota la potencia fraccionaria de A de orden α . Denotamos por $E_\alpha \equiv [D(A^\alpha)]$ el espacio normado inducido por la norma de la gráfica:

$$\|x\|_\alpha \equiv \|x\|_E + \|A^\alpha x\|_E, \text{ para } x \in D(A^\alpha) \quad (4.5)$$

Claramente $[D(A^\alpha)] \subseteq E_\gamma \subset E_\beta \subset E_0 = E$ para $0 < \beta \leq \gamma \leq 1$. Puesto que A y sus potencias fraccionarias son operadores cerrados, estos son espacios de Banach y además las inmersiones son continuas. Remitimos al lector a [39] para detalles completos sobre semigrupos analíticos y potencias fraccionarias de operadores.

Sea $\phi \in \mathcal{C}_b(E_\alpha)$ y $D\phi$ su derivada Fréchet en E_α con valores $D\phi(\zeta) \in E'_\alpha$ para $\zeta \in E_\alpha$, donde E'_α es el dual de E_α . Puesto que la inmersión $E_\alpha \hookrightarrow E$ es continua y densa, se tiene que $E' \subset E'_\alpha$. Para el estudio de las medidas solución introducimos la siguiente clase de funciones test denotada por $\mathcal{F}_\alpha$:

$$\mathcal{F}_\alpha \equiv \{\phi \in \mathcal{C}_b(E_\alpha) : D\phi \text{ existe, } D\phi(\zeta) \in D(A^*) \subset E', \zeta \in E_\alpha \text{ y } D\phi \in \mathcal{C}_b(E_\alpha, E')\}.$$

Para cada $\phi \in \mathcal{F}_\alpha$, denotamos por $\tilde{\phi}$ la extensión continua de ϕ de E_α a βE_α , así que $\tilde{\phi} \circ e_\alpha = \phi$ donde e_α denota la inmersión de E_α en βE_α . Definimos el operador B con dominio

$$D(\tilde{B}) \equiv \{\tilde{\phi} \in \mathcal{C}_b(\beta E_\alpha) : B(\tilde{\phi} \circ e_\alpha) \in \mathcal{C}_b(E_\alpha)\},$$

haciendo

$$\tilde{B}(\psi) \equiv B(\psi \circ e_\alpha) \text{ para } \psi \in D(\tilde{B}),$$

donde el operador B está dado por

$$(B\phi)(\zeta) = -\langle A^*D\phi(\zeta), \zeta \rangle_{E',E} + \langle D\phi(\zeta), F(\zeta) \rangle_{E',E}, \quad \zeta \in E_\alpha,$$

para $\phi \in D(B) \subset \mathcal{F}_\alpha$.

A continuación, hacemos una observación sobre el espacio que describirá la evolución de una medida solución. Sea $I = [0, T]$. Puesto que $\mathcal{C}_b(\Omega)$ no tiene la propiedad de Radon-Nykodim, entonces por el Teorema 2.8.12

$$(L^1(\lambda, \mathcal{C}_b(\Omega)))' \neq L^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)).$$

Sin embargo

$$(L^1(\lambda, \mathcal{C}_b(\Omega)))' = L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c)).$$

Sea un espacio topológico Ω . Para simplificar la notación escribiremos $\mathcal{M}_{r,prob}(\mathcal{A}_c(\Omega)) = \mathcal{M}_{r,prob}(\Omega)$ y $\mathcal{M}_{r,ac}(\mathcal{A}_c(\Omega)) = \mathcal{M}_{r,ac}(\Omega)$. Esto lo aplicaremos en particular a $\Omega = E_\alpha$. Ahora podemos definir el concepto de solución generalizada volviendo a la ecuación (4.2). En general F es una función no lineal de E_α a E , continua y acotada sobre acotados. El estado inicial x_0 puede ser un elemento fijo de E_α , en este caso es considerado como una medida de Dirac sobre E_α concentrada en el punto $\{x_0\}$, o más generalmente una medida arbitraria $\mu_0 \in \mathcal{M}_{r,prob}(E_\alpha) \subset \mathcal{M}_{r,ac}(E_\alpha)$ y se define $\lambda_0 = \mu_0 \cdot e_\alpha^{-1}$.

En la siguiente definición tomamos como espacio topológico $\Omega = E_\alpha$ para cada α . Recordemos que por la compacidad de βE_α , en particular tenemos $\mathcal{M}_{r,ac}(\beta E_\alpha) = \mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\beta E_\alpha)$ y

$$L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(\beta E_\alpha)) = L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\beta E_\alpha)) :$$

A continuación definiremos el concepto de *medida solución* como una solución generalizada de la ecuación 4.1.

Definición 4.2.10. Sea $I = [0, T]$ para algún $0 < T < \infty$. Diremos que $\mu \in L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(\beta E_\alpha)) = L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,\sigma,ac}(\beta E_\alpha))$ es una *solución generalizada* de (4.1) correspondiente al estado inicial μ_0 si, para cada $\tilde{\phi} \in D(\tilde{B})$ dada por $\tilde{\phi} = \phi \circ e_\alpha^{-1}$ para algún $\phi \in \mathcal{F}_\alpha$ con derivada Fréchet $D\phi$ teniendo soporte acotado en E_α , se cumple la siguiente igualdad

$$\mu_t(\tilde{\phi}) = \mu_0(\tilde{\phi}) + \int_0^t \mu_s(\tilde{B}\tilde{\phi})ds, \quad t \in I,$$

donde

$$\mu_t(\psi) \equiv \int_{\beta E_\alpha} \psi(\xi) d\mu_t(\xi), \quad t \in I, \quad \psi \in C_b(\beta E_\alpha).$$

Sobre la existencia de medidas solución en este sentido se tiene el siguiente teorema [5]:

Teorema 4.2.11. *Sea A el generador infinitesimal de un semigrupo analítico en el espacio de Banach E y $F : E_\alpha \rightarrow E$ una función continua y acotada sobre subconjuntos acotados de E_α , para algún $\alpha \in (0, 1)$. Entonces para cada $x_0 \in E_\alpha$, o más generalmente para cada $\mu_0 \in \mathcal{M}_{r,prob}(\beta E_\alpha)$, la ecuación de evolución (4.1) tiene al menos una medida solución $\mu \in L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(\beta E_\alpha))$ en el sentido de la Definición (4.2.10). Además $t \rightarrow \mu_t$ es w^* continua con valores en $\mathcal{M}_{r,prob}(\beta E_\alpha)$.*

Es posible reformular la Definición 4.2.10 al costo de perder la σ -aditividad utilizado en el proceso de compactificación de E_α . Por lo tanto ésta será también una reformulación del concepto de medida solución.

Definición 4.2.12. Sea $I = [0, T]$ para algún $0 < T < \infty$. Diremos que $\mu \in L_w^\infty(\lambda, \mathcal{M}_{r,ac}(E_\alpha))$ es una *solución generalizada* de (4.1) correspondiente al estado inicial μ_0 si, para cada $\phi \in D(B)$ con derivada Fréchet $D\phi$ teniendo soporte acotado en E_α , se cumple la siguiente igualdad

$$\mu_t(\phi) = \mu_0(\phi) + \int_0^t \mu_s(B\phi) ds, \quad t \in I. \quad (4.6)$$

La identidad integral (4.6) significa que

$$\begin{aligned} \langle \mu_t, \phi \rangle &= \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \mu_s, B\phi \rangle ds \\ &= \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle B^* \mu_s, \phi \rangle ds. \end{aligned}$$

Es claro entonces que desde la expresión integral (4.6) se puede considerar μ como una solución débil de la ecuación diferencial abstracta en medidas:

$$\begin{cases} \frac{d\mu_t}{dt} = B^* \mu_t, & t \in [0, T] \\ \mu(0) = \mu_0. \end{cases} \quad (4.7)$$

sobre el espacio de estados $\mathcal{M}_{r,ac}(E_\alpha)$, el cual como se ha dicho antes es un espacio de Banach con la norma de variación.

Hemos visto que lo anteriormente establecido es para medidas escalares. Creemos que es posible establecer una extensión de esta teoría al caso de medidas vectoriales, más específicamente, esperamos estudiar la dualidad

$$(\mathcal{C}_b(\Omega))' = \mathcal{M}_{rad,\sigma}(bor(\Omega), L(H)),$$

y así poder determinar hasta donde es posible dicha extensión. Para mayor detalle, ver sección 2.7 de este manuscrito.

Capítulo 5

Convergencia Débil de Redes de Medidas Radonianas

En el teorema 3.2.4, se demuestra la convergencia débil del producto de convolución de medidas vectoriales radonianas, para el caso en que la segunda medida se mantiene fija. Para establecer la convergencia débil del producto de convolución de manera más general, necesitamos una estructura adicional sobre los espacios de Banach; y es la de estructura reticular.

Definiremos la convergencia débil para redes de medidas vectoriales radonianas y mostraremos que si $(\mu_\alpha)_\alpha$ y $(\nu_\alpha)_\alpha$ son redes de medidas vectoriales radonianas positivas que convergen débilmente a las medidas positivas radonianas μ y ν respectivamente ($\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ y $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu$) entonces $\mu_\alpha * \nu_\alpha$ converge débilmente a $\mu * \nu$ ($\mu_\alpha * \nu_\alpha \xrightarrow{w} \mu * \nu$).

Kawabe en [34], desarrolla el enunciado anterior en el contexto de las medidas τ -suaves y apretadas. Nosotros seguiremos estos lineamientos para demostrar este enunciado cuando las medidas vectoriales son radonianas positivas.

Para demostrar este enunciado, nos centraremos en dar ejemplos de retículos de Banach. Estos ejemplos se encuentran en la literatura pero aquí nos encargaremos de llenar los detalles. Se hará una investigación exhaustiva para determinar la condiciones en las que la ϵ -norma es una norma tensorial reticular y adicionalmente encontraremos relaciones entre medidas τ -suaves, apretadas y radonianas. Con este desarrollo podremos demostrar el objetivo inicialmente trazado.

Ejemplos importantes de retículos de Banach en relación con las aplicaciones expuestos en el capítulo 4 son los espacios $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$ en el caso que $X = L^p(\mu)$.

Por último, presentaremos algunos resultados adicionales en el caso particular de los retículos de Banach.

5.1. Retículos de Banach

En esta sección definiremos que es retículo de Banach, propiedades importantes relacionadas con los retículos y mostraremos ejemplos clásicos llenando los detalles. Mostraremos que el conjunto de las medidas vectoriales radonianas positivas de variación acotada con la norma de la semivariación forman un retículo de Banach.

Definición 5.1.1. Sea X un espacio vectorial ordenado. Diremos que X es un *retículo vectorial ordenado o espacio de Riesz*, si X con la relación de orden $\preceq$, es al mismo tiempo un espacio vectorial ordenado y un retículo. Es decir,

- (i) Si $x, y \in X$ y $x \preceq y$, entonces $x + z \preceq y + z$ para todo $z \in X$.
- (ii) Si $x, y \in X$ y $x \preceq y$, entonces $tx \preceq ty$ para todo $t \geq 0$.
- (iii) $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen para todo subconjunto $\{x, y\}$ de X .

Es inmediato que $x \preceq y$ si y sólo si $y - x \succeq 0$. Si $t \leq 0$ y $x \preceq y$, entonces $tx \succeq ty$. Hacemos notar que si el $\sup\{x, y\}$ existe, entonces el $\inf\{x, y\}$ también existe y

$$\inf\{x, y\} = -\sup\{-x, -y\}.$$

Además

$$\sup\{x + z, y + z\} = \sup\{x, y\} + z \text{ e } \inf\{x + z, y + z\} = \inf\{x, y\} + z.$$

Definición 5.1.2. Si $(X, \preceq)$ es un retículo vectorial, definimos para cada $x \in X$, la *parte positiva* de x como $x^+ = \sup\{x, 0\}$, la *parte negativa* de x como $x^- = \sup\{-x, 0\}$ y *valor absoluto* de x como $|x| = \sup\{x, -x\}$.

En las siguientes proposiciones enunciaremos las propiedades más importantes relacionadas a retículos.

Proposición 5.1.3. Sea $(X, \preceq)$ un retículo vectorial. Entonces:

- (i) $x = x^+ - x^-$ y $|x| = x^+ + x^-$.
- (ii) $|-x| = |x|$.
- (iii) $x \preceq y$ si y sólo si $x^+ \preceq y^+$ y $x^- \succeq y^-$.
- (iv) $|x + y| \preceq |x| + |y|$.
- (v) $\sup\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \sup\{x, y\}$ e $\inf\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \inf\{x, y\}$ si $\lambda \geq 0$.
- (vi) $\sup\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \inf\{x, y\}$ e $\inf\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \sup\{x, y\}$ si $\lambda < 0$.
- (vii) $(\lambda x)^+ = \lambda x^+$, $(\lambda x)^- = \lambda x^-$ si $\lambda \geq 0$.
- (viii) $(\lambda x)^+ = \lambda x^-$, $(\lambda x)^- = \lambda x^+$ si $\lambda < 0$.
- (ix) $|\lambda x| = |\lambda||x|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (x) $\sup\{x, y\} = x + (y - x)^+, \inf\{x, y\} = y - (x - y)^-.$
- (xi) $\sup\{x, y\} + \inf\{x, y\} = x + y.$
- (xii) $|x - y| = \sup\{x, y\} - \inf\{x, y\}.$ Además $|x - y| = |\sup\{x, z\} - \sup\{y, z\}| + |\inf\{x, z\} - \inf\{y, z\}|.$
- (xiii) $|\sup\{a, b\} - \sup\{c, d\}| \leq |b - d| + |a - c|.$

Demostración. Ver [38], Teorema 1.1.1, Página 3. □

Proposición 5.1.4. *Un espacio vectorial ordenado $(X, \preceq)$ es un retículo vectorial si y sólo si $\sup\{x, 0\} = x^+$ existe para todo $x \in X$.*

Demostración. Supongamos que X es un retículo vectorial, entonces para todo par de elementos $x, y \in X$, el $\sup\{x, y\}$ existe, en particular el $\sup\{x, 0\} = x^+$ existe. Ahora sean $x, y \in X$ entonces $\sup\{x, y\} = x + (y - x)^+$, pero $(y - x)^+$ existe por hipótesis, luego X es un retículo vectorial. □

Definición 5.1.5. Sea X un retículo vectorial y $G \subset X$ un subespacio. Diremos que G es un *subretículo vectorial* si dados $x, y \in G$, el $\sup\{x, y\} \in G$.

Proposición 5.1.6. *Un subespacio G de un retículo vectorial X es un retículo vectorial si y sólo si*

- (i) $|x| \in G$ para todo $x \in G$.
- (ii) $x^+ \in G$ o $x^- \in G$ para todo $x \in G$.

Demostración. Análogo a la demostración de la Proposición 5.1.4. □

Los siguientes ejemplos muestran espacios vectoriales que tienen una estructura reticular y otros que no la tienen. Esta propiedad no necesariamente se hereda a subespacios vectoriales.

Ejemplos 5.1.7.

1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Denotemos por $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ el conjunto de las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, donde f es $\mathcal{A}$ -medible y acotada μ -c.t.p. Entonces
 - (i) $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial.
 - (ii) $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial con el orden: $f \preceq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ μ -c.t.p.
 - (iii) $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ es un retículo vectorial ya que $\sup\{f, g\}$ y el $\inf\{f, g\}$ son elementos de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. En efecto,

$$|\sup\{f, g\}|(x) = |\sup\{f, g\}(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq C, \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

De manera análoga

$$|\inf\{f, g\}|(x) = |\inf\{f, g\}(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq C, \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

2. Sean $1 \leq p < \infty$ y $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos como $\mathcal{L}^p(\mu)$ al conjunto de las funciones $\mathcal{A}$ -medibles, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, f tal que $\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty$. Entonces

(i) $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial.

(ii) $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial con el orden: $f \preceq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ μ -c.t.p.

(iii) $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un retículo vectorial. Un resultado de teoría de la medida asegura que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ si y sólo si f^+ y f^- son elementos de $\mathcal{L}^p(\mu)$. Por la proposición 5.1.4, $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un retículo vectorial.

3. Sea Ω un conjunto. Denotamos por $\mathcal{F}(\Omega)$ como el espacio de todas la funciones de Ω en $\mathbb{R}$. Entonces

(i) Este conjunto es un espacio vectorial.

(ii) Este conjunto es un espacio vectorial con la relación de orden dada por

$$f \preceq g \quad \text{si y sólo si,} \quad f(w) \leq g(w)$$

para toda $w \in \Omega$.

(iii) Este espacio vectorial ordenado no siempre es un retículo.

4. Sea $X \neq \emptyset$ y denotemos por

$$\mathbf{B}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}.$$

Entonces $\mathbf{B}(X)$ es un espacio vectorial el cual es ordenado por el conjunto

$$\mathbf{B}(X)_+ = \{f \in \mathbf{B}(X) : 0 \preceq f\} = \{f \in \mathbf{B}(X) : 0 \leq f(t), \forall t \in X\}.$$

Así $f \preceq g$ si y sólo si $g - f \in \mathbf{B}(X)_+$ y además el supremo y el ínfimo está dado por

$$\sup\{f, g\}(t) = \max\{f(t), g(t)\} \quad \text{y} \quad \inf\{f, g\}(t) = \min\{f(t), g(t)\}$$

para todo $f, g \in \mathbf{B}(X)$. Entonces $\mathbf{B}(X)$ es un retículo.

5. Supongamos que X es un conjunto infinito. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de los subconjuntos finitos de X , cuya cardinalidad es un número impar. $\mathcal{U}$ es un conjunto ordenado con la relación de inclusión, pero no es un retículo, pues si tomamos dos conjuntos A y B disjuntos, elementos de $\mathcal{U}$, tenemos que el $\sup\{A, B\} = A \cup B$ y por lo tanto su cardinalidad es par, es decir el $\sup\{A, B\} \notin \mathcal{U}$.

6. Si pensamos en $E = \text{gen}\{\chi_A : A \in \mathcal{U}\}$. Entonces:

(i) E es un subespacio vectorial de $\mathbf{B}(X)$.

(ii) E es un subespacio vectorial ordenado.

(iii) E no es un subretículo vectorial.

Definición 5.1.8. Sea $(X, \preceq)$ un espacio de Riesz. Una *norma* $\|\cdot\|$ en X es *reticular* si dados $x, y \in X$ $|x| \preceq |y|$ implica que $\|x\| \leq \|y\|$. Un *retículo vectorial normado* es una tripleta $(X, \preceq, \|\cdot\|)$, donde $(X, \preceq)$ es un retículo vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma reticular. Un *retículo de Banach* es un retículo vectorial normado y completo.

Los siguientes ejemplos nos muestran que muchos de los espacios conocidos para nosotros no son sólo espacios de Banach sino que éstos también poseen una estructura reticular. Algunos de estos espacios tienen propiedades adicionales que permitirán determinar las condiciones en las que la ϵ -norma es una norma reticular. Este tipo de cualidades tiene que ver con la definición *AM* y *AL*-espacios.

Ejemplos 5.1.9.

1. $(\mathbb{R}, \leq, |\cdot|)$ es un retículo de Banach, donde $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\}$ y el $\inf\{a, b\} = \min\{a, b\}$ y además cumple con las siguientes propiedades:

$$|a + b| = |a| + |b| \quad \text{y} \quad |\sup\{a, b\}| = \max\{|a|, |b|\},$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}_+$ donde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

2. $(\mathbb{R}^n, \preceq, \|\cdot\|_{\max})$ es un retículo de Banach. Dados $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ elementos de $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x \preceq y \quad \text{si y sólo si} \quad x_i \leq y_i,$$

para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por otro lado

$$\sup\{x, y\} = (\sup\{x_i, y_i\})_{1 \leq i \leq n} \quad \text{e} \quad \inf\{x, y\} = (\inf\{x_i, y_i\})_{1 \leq i \leq n}.$$

De lo anterior se tiene que

$$x^+ = (x_i^+)_{1 \leq i \leq n}, \quad x^- = (x_i^-)_{1 \leq i \leq n}, \quad |x| = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n}.$$

Dado $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ en $\mathbb{R}^n$ definimos la norma en este espacio como

$$\|x\| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Esta norma es reticular y hace de $\mathbb{R}^n$ un espacio completo.

3. Sea $X \neq \emptyset$ y

$$\mathbf{B}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es acotada}\}.$$

Entonces

- (i) Se mostró que $\mathbf{B}(X)$ es un retículo.
- (ii) $(\mathbf{B}(X), \|\cdot\|)$ es un retículo de Banach, donde

$$\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)|.$$

Habíamos dicho que $\mathbf{B}(X)$ es un retículo vectorial. Debemos mostrar que $\|\cdot\|$ es una norma reticular. En efecto, dados $f, g \in \mathbf{B}(X)$,

$|f| \preceq |g|$ si y sólo si $|f|(t) = |f(t)| \leq |g(t)| = |g|(t)$ para todo $t \in X$.

Así

$$\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)| \leq \sup_{t \in X} |g(t)| = \|g\|.$$

Además del análisis funcional, $\mathbf{B}(X)$ es completo con esta norma, por tanto $\mathbf{B}(X)$ es un retículo de Banach.

(iii) $\mathbf{B}(X)$ cumple con la siguiente propiedad:

$$\|\sup\{f, g\}\| = \max\{\|f\|, \|g\|\} \text{ para todo } f, g \in \mathbf{B}(X)_+. \quad (5.1)$$

En efecto, supongamos que $\max\{\|f\|, \|g\|\} = \|f\|$, esto significa que

$$g(t) \leq \sup_{t \in X} |g(t)| \leq \|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)|.$$

Por otro lado $f(t) \leq \sup_{t \in X} |f(t)|$, así $\max\{f(t), g(t)\} \leq \sup_{t \in X} |f(t)| = \|f\|$. Por tanto

$$\sup_{t \in X} |\max\{f(t), g(t)\}| \leq \sup_{t \in X} |f(t)| = \|f\|.$$

Luego

$$\|\sup\{f, g\}\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}.$$

Análogo para g .

Nuevamente supongamos que $\max\{\|f\|, \|g\|\} = \|f\|$ entonces $f(t) \leq \max\{f(t), g(t)\}$, así $|f(t)| \leq |\max\{f(t), g(t)\}|$ y por tanto

$$\|f\| = \sup_{t \in X} |f(t)| \leq \sup_{t \in X} |\max\{f(t), g(t)\}| = \|\sup\{f, g\}\|.$$

Análogo para g .

Los retículos de Banach que cumplen con la propiedad dada en la igualdad 5.1 del ejemplo 3, se les conoce como *AM-espacios*.

4. Ahora sea K un conjunto compacto y definamos $\mathcal{C}(K)$ el conjunto de las funciones continuas de K en $\mathbb{R}$. Entonces:

- (i) $\mathcal{C}(K)$ es un subespacio vectorial de $\mathbf{B}(K)$.
- (ii) $\mathcal{C}(K)$ es un subretículo vectorial de $\mathbf{B}(K)$ con el orden heredado de $\mathbf{B}(K)$. En efecto, sean $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Debemos mostrar que $v = \sup\{f, g\} \in \mathcal{C}(K)$; es decir, que v es una función continua. De la continuidad de f y g se tiene que

$$|v(t) - v(t')| = |\max\{f(t), g(t)\} - \max\{f(t'), g(t')\}| \leq |f(t) - f(t')| + |g(t) - g(t')|$$

por la propiedad xiii) de la Proposición 5.1.3. Por tanto $v \in \mathcal{C}(K)$.

(iii) $\mathcal{C}(K)$ es completo con la norma

$$\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|,$$

que es una norma reticular. Por tanto $\mathcal{C}(K)$ es un subretículo de Banach de $\mathbf{B}(K)$.

5. Denotamos por c al conjunto de las sucesiones convergentes y a c_0 el conjunto de las sucesiones que convergen a cero. Teniendo en cuenta que toda sucesión convergente es acotada, entonces

- (i) c y c_0 son subespacios vectoriales de $\mathbf{B}(\mathbb{N})$.
- (ii) c y c_0 son subretículos vectoriales de $\mathbf{B}(\mathbb{N})$ con el orden heredado de $\mathbf{B}(\mathbb{N})$.
- (iii) c y c_0 son completos con la norma

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

que es una norma reticular. Por tanto c y c_0 son subretículos de Banach de $\mathbf{B}(\mathbb{N})$.

6. Sea $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^\infty(\mu) : \|f\|_\infty = 0\}$ donde

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \in [0, \infty) : |f(x)| \leq c, \quad \mu - \text{c.t.p.}\}$$

Haciendo $L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)/\mathcal{N}$ se tiene

(i) $L^\infty(\mu)$ es un retículo vectorial con el orden

$$[\hat{f}] \preceq [\hat{g}] \quad \text{si y sólo si} \quad \forall f \in [\hat{f}], \forall g \in [\hat{g}], \quad f(x) \leq g(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por otro lado definimos

$$\sup\{[\hat{f}], [\hat{g}]\} = \sup\{f, g\}, \quad \forall f \in [\hat{f}], \forall g \in [\hat{g}].$$

De manera análoga

$$\inf\{[\hat{f}], [\hat{g}]\} = \inf\{f, g\}, \quad \forall f \in [\hat{f}], \forall g \in [\hat{g}].$$

(ii) $(L^\infty(\mu), \preceq, \|\cdot\|_\infty)$ es un retículo de Banach. De hecho $L^\infty(\mu)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio de Banach. Mostremos que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma reticular. Supongamos que $|f| \preceq |g|$, esto implica que $|f|(x) = |f(x)| \leq |g|(x) = |g(x)|$ μ -c.t.p, pero $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ μ -c.t.p. Luego $\|g\|_\infty$ es una constante que acota a f μ -c.t.p, pero $\|f\|_\infty$ es el ínfimo de todas las cotas para f , así

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty.$$

(iii) $L^\infty(\mu)$ cumple con la propiedad de

$$\|\sup\{f, g\}\|_\infty = \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\}.$$

En efecto,

$$f(x) = |f(x)| \leq |\sup\{f, g\}(x)| \leq \|\sup\{f, g\}\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.},$$

$$g(x) = |g(x)| \leq |\sup\{f, g\}(x)| \leq \|\sup\{f, g\}\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por tanto

$$\|f\|_\infty \leq \|\sup\{f, g\}\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.}, \quad \text{y} \quad \|g\|_\infty \leq \|\sup\{f, g\}\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.},$$

y así

$$\max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\} \leq \|\sup\{f, g\}\|_\infty.$$

Ahora supongamos que

$$\max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\} = \|f\|_\infty,$$

entonces

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.}, \quad |g(x)| \leq \|g\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.},$$

luego

$$\max\{f(x), g(x)\} \leq \|f\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.},$$

y así

$$|\sup\{f, g\}(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \mu - \text{c.t.p.},$$

de ahí que

$$\|\sup\{f, g\}\|_\infty \leq \|f\|_\infty = \max\{\|f\|_\infty, \|g\|_\infty\}.$$

Hemos mostrado que $L^\infty(\mu)$ es también un AM -espacio.

7. De manera análoga, sean $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \|f\|_p = 0\}$ y $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}$ para $1 \leq p < \infty$. Con la norma

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

es un retículo de Banach.

8. Cuando la medida μ es la medida de contar sobre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces $L^p(\mu) = l^p$ y $L^\infty(\mu) = l^\infty$ y por tanto los espacios l^p para $1 \leq p \leq \infty$ son retículos de Banach.
9. Sea X un retículo de Banach y denotemos por $L^1(\mu, X)$ el espacio de todas las funciones Bochner integrables $f : \Omega \rightarrow X$ con la norma

$$\|f\|_{L^1(\mu, X)} = \int_{\Omega} \|f\| d\mu.$$

Entonces:

- (i) $(L^1(\mu, X), \preceq)$ es un espacio vectorial, con el orden

$$f \preceq g \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) \leq_X g(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

- (ii) $(L^1(\mu, X), \preceq)$ es un retículo vectorial ordenado. En efecto, debemos mostrar que siendo f una función Bochner integrable, $|f|$ también lo es. $|f|$ es μ -medible ya que existe una sucesión de funciones simples $\{|f_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\| |f_n| - |f| \| \leq \| f_n - f \| < \epsilon.$$

Para mostrar que es Bochner integrable vamos a usar el hecho de que una función f es Bochner integrable si y sólo si $\int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty$. Entonces

$$\int_{\Omega} \| |f| \| d\mu \leq \int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty.$$

- (iii) $(L^1(\mu, X), \preceq, \|\cdot\|)$ es un retículo de Banach. De teoría de la medida se tiene que $(L^1(\mu, X), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Sólo queda mostrar que la norma es reticular. En efecto, si $|f| \preceq |g|$ entonces $|f(x)| \leq_X |g(x)|$ μ -c.t.p. Por tanto

$$\int_{\Omega} \|f(x)\| d\mu = \int_{\Omega} \| |f(x)| \| d\mu \leq \int_{\Omega} \| |g(x)| \| d\mu = \int_{\Omega} \|g(x)\| d\mu.$$

Así $\|f\| \leq \|g\|$. En 5.1.12 se muestra que $\| |x| \| = \|x\|$ para todo $x \in X$ siendo X un retículo de Banach.

10. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y X un retículo de Banach. Ya hemos denotado por $\mathcal{M}(\mathcal{A}, X)$ al conjunto de las medidas vectoriales y por $\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}, X)$ al conjunto de medidas vectoriales σ -aditivas. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:

- (i) $\mathcal{M}(\mathcal{A}, X)$ y $\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}, X)$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. La suma y el producto por escalar están definidos como

$$(\mu + \nu)(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad (\lambda\mu)(A) = \lambda\mu(A),$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (ii) $(\mathcal{M}(\mathcal{A}, X), \preceq)$ y $(\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}, X), \preceq)$ son espacios vectoriales con el orden

$$\mu \preceq \nu \quad \text{si y sólo si} \quad \mu(A) \preceq_X \nu(A),$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

- (iii) Dada una medida vectorial o una medida vectorial σ -aditiva ν , se puede mostrar que $|\nu|$ es una medida vectorial o medida vectorial σ -aditiva pero no hay forma de garantizar que $|\nu|$ siempre existe y esto hace que $\mathcal{M}(\mathcal{A}, X)$ y $\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}, X)$ no sean retículos vectoriales.

Sean $([0, 1], \text{bor}([0, 1]))$ un espacio medible y $\nu : \text{bor}[0, 1] \rightarrow L^{\infty}(\lambda)$ (λ la medida de Lebesgue) dada por $\nu(E) = \chi_E$. ν es una medida vectorial de variación no acotada a pesar de que $L^{\infty}(\lambda)$ es un retículo de Banach. Ver [21], Página 2.

- (iv) Afortunadamente cuando $X = \mathbb{R}$, $|\nu|$ existe y además $|\nu| = \sup\{-\nu, \nu\}$. Así $\mathcal{M}_{\sigma}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un retículo vectorial, pues esto garantiza que ν^+ siempre existe y por la proposición 5.1.4 se asegura el resultado.

- (v) Sea X un retículo de Banach. Denotemos por $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$ al conjunto de las medidas vectoriales σ -aditivas de variación acotada y a $\mathcal{M}_{va}(\mathcal{A}, X)$ el conjunto de las medidas vectoriales de variación acotada. Entonces $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$ y $\mathcal{M}_{va}(\mathcal{A}, X)$ son retículos vectoriales.
 - (vi) la variación es una norma reticular. Por tanto $\mathcal{M}_{va}(\mathcal{A}, X)$ y $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$ son retículos de Banach.
11. Sea $\mathcal{M}_\sigma(\Omega, \mathbb{R})$ el retículo vectorial de las medidas σ -aditivas. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones:
- (i) Dada $\mu \in \mathcal{M}_\sigma(\Omega, \mathbb{R})$, la variación de μ , $|\mu|$, es una norma reticular.
 - (ii) $(\mathcal{M}_\sigma(\Omega, \mathbb{R}), \preceq, |\cdot|)$ es un retículo de Banach.

Observación 5.1.10. Hemos visto en los ejemplos 5.1.9 partes 10 y 11 que $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, X)$ y $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ son retículos de Banach siendo X un retículo de Banach.

En este marco teórico, observemos que Ω puede ser un espacio de Banach. En consecuencia $\mathcal{M}_{\sigma,va}(\mathcal{A}, L^p(\mu))$ y $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ son retículos de Banach los cuales surgen en el contexto de medida solución expuesto en el capítulo 4 y otros trabajos de Ahmed.

Observación 5.1.11.

- (i) $\mathcal{C}(K)$, c y c_0 también son AM -espacios.
- (ii) Si $p = 1$ entonces $L^1(\mu)$ cumple con la propiedad de que

$$\|f + g\|_{L^1(\mu)} = \|f\|_{L^1(\mu)} + \|g\|_{L^1(\mu)}, \text{ para todo } f, g \in L^1_+(\mu). \quad (5.2)$$

Los retículos de Banach que cumplen con la propiedad dada por la igualdad 5.2 se conocen como *AL-espacios*.

Las siguientes proposiciones nos muestran propiedades asociadas a los retículos de Banach.

Proposición 5.1.12. Sea $(X, \preceq, \|\cdot\|)$ un retículo de Banach. Entonces:

- (i) $\|x^+\| \leq \|x\|$, $\|x^-\| \leq \|x\|$ y $\| |x| \| = \|x\|$ para todo $x \in X$.
- (ii) Las operaciones

$$(x, y) \rightarrow \sup\{x, y\}, (x, y) \rightarrow \inf\{x, y\}$$

$$x \rightarrow x^+, x \rightarrow x^-, x \rightarrow |x|$$

(operaciones reticulares) son continuas.

Demostración. Ver [38], Proposición 1.1.6, Página 6. □

Si $(X, \preceq)$ es un retículo vectorial, diremos que x es *positivo* si $x \succeq 0$ y *negativo* si $x \preceq 0$. El conjunto $X^+ = \{x \in X : x \succeq 0\}$ es un cono llamado *cono positivo* de X y el conjunto $X^- = \{x \in X : x \preceq 0\}$ es un cono llamado *cono negativo* de X .

Cálculos directos permiten demostrar la siguiente proposición.

Proposición 5.1.13. Sea $(X, \preceq)$ un retículo vectorial real y $X^+ = \{x \in X : x \succeq 0\}$ el conjunto de los elementos positivos. Entonces X^+ satisface las siguientes condiciones:

- (i) Si $x, y \in X^+$, entonces $x + y \in X^+$.
- (ii) Si $x \in X^+$ y $t \geq 0$ entonces $tx \in X^+$.
- (iii) $X^+ \cap X^- = \{0\}$.
- (iv) X^+ es un conjunto cerrado.

A continuación mostraremos ejemplos y enunciaremos algunas proposiciones que nos permiten determinar cuando el conjunto de las funciones lineales y continuas $L(X, Y)$ es un retículo de Banach siendo X, Y retículos de Banach.

Empecemos con un ejemplo.

Ejemplo 5.1.14. Sea $L(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$. Entonces:

- (i) $L(\mathbb{R}^2)$ es un espacio vectorial con el orden

$$T \preceq S \quad \text{si y sólo si} \quad T(x) \preceq_{\mathbb{R}^2} S(x).$$

- (ii) $L(\mathbb{R}^2)$ no es un retículo vectorial. En efecto, sea

$$T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, x - y).$$

En las bases usuales

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

T es una transformación lineal donde

$$\|T\| = \sup_{\|(x,y)\| \leq 1} \|T(x, y)\|.$$

Haciendo cálculos

$$\|T\| = \sup_{\|(x,y)\| \leq 1} \|(x, y)\| = 1.$$

Si $L(\mathbb{R}^2)$ fuera un retículo de Banach entonces

$$\|T\| = \||T|\|.$$

Miremos

$$|T|(x, y) = |T(x, y)| = |A(x, y)| = |A|(x, y),$$

donde el módulo de A está dado por la matriz $|a_{ij}|$ y $|(x, y)|$ son los (x, y) tal que $(0, 0) \preceq_{\mathbb{R}^2} (x, y)$.

$$\||T|\| = \sup_{\|(x,y)\| \leq 1} \|T(x, y)\| = \sup_{\|(x,y)\| \leq 1} x + y = \sqrt{2}.$$

Así $\|T\| \neq |||T|||$.

En la siguiente proposición encontraremos algunas condiciones para las cuales el conjunto de las transformaciones lineales de X en Y es un retículo de Banach.

La siguiente proposición nos da una respuesta.

Proposición 5.1.15. *Sean X, Y retículos de Banach.*

- (i) *$L(X, Y)$ es un retículo de Banach con el orden canónico y la norma usual si X es un AL -espacio e Y es un AM -espacio.*
- (ii) *Si $Y = \mathbb{R}$ entonces $L(X, \mathbb{R}) = X'$ su dual fuerte es un retículo de Banach respecto a la norma del dual y el orden canónico. Además $X' = X_+$.*

Demostración. Ver [50], Proposición 4.4, Página 252 y [49], Corolario 2, Página 238. □

El siguiente ejemplo nos ilustra la proposición 5.1.15.

Ejemplo 5.1.16. Si $X = L^1(\lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue sobre $[0, 1]$ y $Y = c_0$, entonces $L(X, Y)$ es un retículo de Banach.

Qué se puede decir de los retículos de Hilbert?

Proposición 5.1.17. *Para cada retículo de Hilbert, existe un espacio localmente compacto H y una medida radoniana μ estrictamente positiva tal que H es isomorfo a $L^2(\mu)$.*

Demostración. Ver [50], Teorema 6.7, Página 270. □

Proposición 5.1.18. *Sean H_1, H_2 retículos de Hilbert. Entonces $\mathcal{H}(H_1, H_2)$ el conjunto de operadores de Hilbert Schmidt forman un retículo de Hilbert.*

Demostración. Ver [50], Teorema 6.9, Página 272. □

5.2. La ϵ -norma como Norma Reticular.

Se ha hecho una revisión bibliográfica para determinar las condiciones en las que la ϵ -norma, es una norma reticular. Aquí se muestran algunos resultados parciales para un trabajo futuro que se espera desarrollar.

Sean X e Y retículos de Banach. *Cuándo el producto tensorial de X e Y bajo la ϵ -norma tiene una estructura reticular compatible con las estructuras reticulares de X e Y ?*

1. En [31], en su artículo fundamental, Grothendieck, formuló la siguiente conjetura: Si dos espacios de Banach X e Y son tales que $X \hat{\otimes}_\pi Y = X \hat{\otimes}_\epsilon Y$, entonces X o Y deben ser de dimensión finita. Es así como Gilles Pisier en [40] en 1983 contruye un contraejemplo

donde el espacio de Banach X es separable de dimensión infinita y tal que $X \widehat{\otimes}_\pi X = X \widehat{\otimes}_\epsilon X$.

De manera general, se puede mostrar que si α es una norma tensorial reticular y X e Y son retículos de Banach, entonces $\epsilon(z) \leq \alpha(z) \leq \pi(z)$. Para los espacios de Pisier la ϵ -norma y la π -norma en $X \otimes X$ son iguales, y eso hace de la ϵ -norma, una norma reticular. Por consiguiente $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$ es un retículo de Banach y en estos casos $x \otimes y \succeq 0$ si $x \succeq 0$ e $y \succeq 0$.

2. Hay otra forma de saber cuando la ϵ -norma es una norma reticular. En [10], Página 135 se da la noción espacios nucleares. Cuando el espacio X localmente convexo es nuclear, se tiene la ϵ -norma y la π -norma coinciden, para cualquier espacio de Banach Y . Por tanto la ϵ -norma es una norma reticular. Ver [10], Teorema 2.9.9, Página 137.
3. Otra forma en que sabemos que la ϵ -norma es una norma reticular es en [50] donde se define la l -norma y la m -norma, siendo X, Y retículos de Banach. Ver Teorema 4.6, Página 253. Estas normas son reticulares y cuando X es un AM -espacio $X \widehat{\otimes}_l Y = X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$. En [50], si $X = \mathcal{C}(K)$ es el espacio de las funciones continuas sobre un compacto K , entonces $\mathcal{C}(K) \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es un retículo de Banach. Ver ejemplos, Página 274.
4. Otra forma de saber si la ϵ -norma es una norma tensorial es a través de la norma de Fremlin.

Recordemos que si X e Y son espacios de Banach, entonces existe una dualidad natural

$$\langle X \otimes Y, \mathcal{B}(X \times Y) \rangle$$

definida por la forma bilineal $\langle u, f \rangle = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)$ donde $u = \sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k$. Dada $f \in \mathcal{B}(X \times Y)$, la función $u \rightarrow \langle u, f \rangle = \hat{f}(u)$ es una forma lineal en $X \otimes Y$. Esta dualidad permite definir la *norma proyectiva* o π -norma por la fórmula

$$\pi(u) = \{ | \langle u, f \rangle | : f \in \mathcal{B}(X \times Y), \|f\| \leq 1 \}.$$

Siguiendo estas ideas, en [28] Fremlin define la *norma proyectiva positiva* por la fórmula

$$\phi(u) = \sup \{ | \langle u, f \rangle | : f \in \mathcal{B}^+(X \times Y), \|f\| \leq 1 \}.$$

A menudo a esta norma tensorial se le llama la *norma de Fremlin*. La completación de $X \otimes Y$ respecto a esta norma tensorial es el *producto tensorial proyectivo positivo* de los espacios indicados, el cual se denota $X \widehat{\otimes}_\phi Y$ *Producto tensorial de Fremlin*

En [28] demuestra Fremlin que $X \widehat{\otimes}_\phi Y$ es un retículo de Banach y

$$\phi(x \otimes y) = \|x\| \|y\|, \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } y \in Y.$$

En [28], el sentido tensorial del producto tensorial de Fremlin se revela el teorema siguiente conocido como teorema de Fremlin.

Teorema 5.2.1. Sean X e Y retículos de Banach. Entonces para todo retículo de Banach Z y para toda $f \in \mathcal{B}(X \times Y, Z)$, existe una y sólo una función $u \in \mathcal{L}(X \widehat{\otimes}_\phi Y, Z)$ tal que

$$(i) \quad \|f\| = \|u\|.$$

$$(ii) \quad u(x \otimes y) = f(x, y).$$

(iii) u es positiva si y sólo si f es positiva.

En suma, la norma de Fremlin es una norma tensorial reticular y por tanto

$$\epsilon(z) \leq \phi(z) \leq \pi(z) \text{ para todo } z \in X \widehat{\otimes}_\phi Y.$$

5.3. Medidas Positivas

En esta sección supondremos que $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es un retículo de Banach con la ϵ -norma.

A continuación mostraremos que el conjunto de las medidas vectoriales radonianas positivas de variación acotada forman un retículo de Banach con la norma de la semivariación. Para ello demostraremos que si la medida vectorial es positiva entonces la norma de la medida coincide con la semivariación de la medida.

Definición 5.3.1. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y X un retículo de Banach. Una medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ es *positiva* si $\mu(A) \succeq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 5.3.2. Sea $([0, 1], \text{bor}([0, 1]))$ y λ la medida de Lebesgue. definimos $\nu : \text{bor}([0, 1]) \rightarrow L^1(\mu)$ como $\nu(A) = \chi_A$. Entonces ν es medida vectorial σ -aditiva radoniana y positiva.

Proposición 5.3.3. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medida y X un retículo de Banach. Si $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ es una medida positiva, entonces $\|\mu\|(A) = \|\mu(A)\|$.

Demostración. Ya tenemos por propiedades anteriores que $\|\mu(A)\| \leq \|\mu\|(A)$. Demostraremos la desigualdad inversa $\|\mu(A)\| \geq \|\mu\|(A)$. Si $x' \in X'$, en la definición de la variación de la medida real $x' \circ \mu$ aparecen las sumas de la forma $\sum_{k=1}^n |x' \circ \mu(A_k)|$, donde $\{A_k\}$ es una partición de A . Como X' es un retículo de Banach entonces $x' = (x')^+ - (x')^-$ y por consiguiente, dado que μ es una medida positiva,

$$\begin{aligned} |x' \circ \mu(A_k)| &= |((x')^+ - (x')^-) \circ \mu(A_k)| = |(x')^+ \circ \mu(A_k) - (x')^- \circ \mu(A_k)| \\ &\leq |(x')^+ \circ \mu(A_k)| + |(x')^- \circ \mu(A_k)| = (x')^+ \circ \mu(A_k) + (x')^- \circ \mu(A_k) = |x'| \circ \mu(A_k). \end{aligned}$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta que $\| |x'| \| = \|x'\|$ por ser X' un retículo de Banach, tenemos

$$|x' \circ \mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |x' \circ \mu(A_k)| \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |x'| \circ \mu(A_k) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup \left\{ |x'| \circ \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \right\} = \sup \{ |x'| \circ \mu(A) \} = |x'| \circ \mu(A) \\
&\leq \| |x'| \| \| \mu(A) \| = \| x' \| \| \mu(A) \| = \| \mu(A) \|
\end{aligned}$$

para todos los x' tal que $\|x'\| \leq 1$. Luego $\| \mu \| (A) \leq \| \mu(A) \|$. $\square$

Proposición 5.3.4. Sean $(\Omega, \text{bor}(\Omega))$ un espacio medible y X un retículo de Banach. El conjunto de las medidas vectoriales radonianas positivas de variación acotada $\mathcal{M}_{\sigma, \text{va}, \text{rad}}^+(\text{bor}(\Omega), X)$ forman un retículo de Banach, con la norma de la semivariación.

Demostración. Esto se da por el hecho de que la semivariación es una norma. Adicionalmente esta norma es reticular. En efecto:

$$|x' \circ \mu|(E) \leq |x'| \circ \mu(E) \leq |x'| \circ |\mu|(E) \leq |x'| \circ |\nu|(E) \leq \| |\nu| \| (E) = \| \nu \| (E),$$

ya que $|\mu|(E) \leq |\nu|(E)$ por hipótesis. Tomando el supremo sobre todos los $\|x'\| \leq 1$ se tiene que $\| \mu \| (E) \leq \| \nu \| (E)$. Para probar esto se usó la Proposición 5.1.15 y el hecho de que X es un retículo de Banach. Con esta norma $\mathcal{M}_{\sigma, \text{va}, \text{rad}}(\Omega, X)$ es completo y para ello se sigue los lineamientos de la Proposición 6.6.2, Página 308 en [45]. Lo único que falta por demostrar es que α es una medida vectorial radoniana positiva, para lo cual nos basamos en la desigualdad

$$\| \alpha \| (B - K) \leq \| \alpha - \alpha_n \| (B - K) + \| \alpha_n \| (B - K) < 2\epsilon,$$

donde (α_n) es una sucesión de medidas vectoriales radonianas positivas de variación acotada, $B \in \text{bor}(\Omega)$ y K es un compacto tal que $K \subset B$. α es positiva por ser el límite de una sucesión de medidas positivas. $\square$

El siguiente lema nos permitirá determinar las condiciones que aseguran la positividad de la medida producto y por ende la positividad de la medida del producto de convolución.

Lema 5.3.5. Sean T un espacio topológico, X un retículo de Banach y $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ una medida positiva. Si $\phi : T \rightarrow X$ es acotada y $(\otimes, \nu)$ -medible entonces ϕ es $(\otimes, \nu)$ -integrable. Además si $\phi \succeq 0$ entonces

$$\int_T \phi(t) \otimes d\nu \succeq 0.$$

Demostración. Ver [34], Lema 4.2. $\square$

Proposición 5.3.6. Sean S, T espacios topológicos hausdorffianos, X, Y espacios de Banach separables y reticulares tal que $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es un retículo de Banach, $\mu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ y $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ medidas vectoriales radonianas. Si μ y ν son medidas positivas y λ es la medida vectorial producto de μ y ν entonces λ es positiva.

Demostración. Ver [34], Proposición 4.3. $\square$

Observación 5.3.7. Sean $(S, \mathcal{A})$ y $(T, \mathcal{B})$ espacios medibles, X un retículo de Banach y $\mu : \mathcal{A} \rightarrow X$ una medida vectorial σ -aditiva positiva. Si $\phi : S \rightarrow T$ es $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -medible, entonces $\nu : \mathcal{B} \rightarrow X$ definida por $\nu(B) = \mu(\phi^{-1}(B))$ es una medida vectorial σ -aditiva positiva.

Sean $\mu, \nu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ medidas radonianas. Si $\lambda = \mu \otimes \nu$ es el producto tensorial de ellas, recordemos que el producto de convolución de μ y ν es la medida $\mu * \nu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ definida por

$$\mu * \nu(A) = \overline{m}(\lambda(\theta^{-1}(A))),$$

donde $A \in \text{bor}(S)$, θ es la operación del grupo y $\overline{m}$ es la linelización de la función multiplicación de la álgebra X .

Definición 5.3.8. Una álgebra de Banach reticular es un álgebra de Banach que con su estructura vectorial es un retículo de Banach y el producto de elementos positivos es un elemento positivo.

Lema 5.3.9. Sean S un grupo topológico, X un álgebra de Banach separable y reticular tal que $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$ es un retículo de Banach y $\mu, \nu : S \rightarrow X$, medidas vectoriales radonianas. Si μ y ν son medidas positivas entonces $\mu * \nu$ también es una medida radoniana positiva.

Demostración. Por ser μ y ν medidas vectoriales radonianas, existe una única medida producto $\lambda = \mu \otimes \nu$ definida en $\text{bor}(S \times S)$ y con valores en $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$. Ahora, λ es positiva por la Proposición 5.3.6 y por la Observación 5.3.7 tenemos que $\lambda(\theta^{-1}(A))$ es una medida positiva. Luego por ser $\overline{m}$ lineal se tiene que

$$\mu * \nu(A) = \overline{m}(\lambda(\theta^{-1}(A))) \geq 0$$

para todo $A \in \text{bor}(S)$. Por tanto $\mu * \nu$ es positiva. $\square$

5.4. Medidas Radonianas, Apretadas y Suaves

Esta es, una de las secciones más importantes de este capítulo, ya que los resultados que aquí se demostrarán permitirán adaptar la teoría desarrollada por Kawabe en [34]. Con esta adaptación se puede demostrar el teorema de la Convergencia Diagonal para medidas radonianas y los resultados enunciados al principio de este trabajo. Empezaremos por establecer las relaciones entre estas medidas en el caso real, luego nos trasladaremos al caso vectorial.

Caso real

Definición 5.4.1. Sea μ una medida boreliana definida sobre un espacio topológico S . Diremos que μ es una *medida τ -suave* si para cada red creciente de subconjuntos abiertos de S , $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ se tiene

$$\lim_{\lambda} \mu(U_\lambda) = \mu \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right).$$

En [29], Gómez y Restrepo demostraron que si μ es una medida radoniana finita entonces se tiene que para todo $\epsilon > 0$ y todo $B \in \text{bor}(S)$, existe un compacto K , $K \subset B$ tal que

$$\mu(B) - \mu(K) = \mu(B - K) < \epsilon.$$

Definición 5.4.2. Diremos que una *medida boreliana es apretada* si

$$\mu(T) = \sup\{\mu(K) : K \subset T, K \text{ compacto}\}.$$

Basados en esto podemos ver que toda medida radoniana finita es apretada.

La siguiente proposición permite establecer la relación entre medidas radonianas y medidas τ -suaves.

Proposición 5.4.3. *Cada medida radoniana finita definida sobre un espacio topológico hausdorffiano es τ -suave.*

Demostración. Ver [54], Proposición 3.1, Página 28. □

Caso vectorial

En el caso vectorial se mostró que si μ es una medida vectorial radoniana, entonces para cada $\epsilon > 0$ y cada $B \in \text{bor}(S)$ existe un compacto K , $K \subset B$ tal que

$$\|\mu\|(B - K) < \epsilon.$$

Definición 5.4.4. Sea S un espacio topológico. Diremos que μ es una *medida vectorial apretada* si dado $\epsilon > 0$ existe un compacto K tal que

$$\|\mu\|(S - K) < \epsilon.$$

Definición 5.4.5. Sea μ una medida boreliana definida sobre un espacio topológico S . Diremos que μ es una *medida vectorial τ -suave* si para cada red creciente de subconjuntos abiertos de S , $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ con $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ se tiene que

$$\lim_{\lambda} \|\mu\|(U - U_\lambda) = 0.$$

La siguiente proposición cuya demostración es una adaptación del caso escalar, muestra la relación entre las medidas radonianas y las medidas τ -suaves.

Proposición 5.4.6. *Sea S un espacio topológico hausdorffiano. Si ν es una medida vectorial radoniana entonces ν es una medida vectorial τ -suave.*

Demostración. Sea $\{G_\alpha\}$ una red creciente de abiertos con $G = \bigcup_{\alpha} G_\alpha$. Por ser ν una medida radoniana, dado $\epsilon > 0$, existe un compacto K , $K \subset G$ tal que $\|\nu\|(G - K) < \epsilon$. Para este $\epsilon > 0$ existe un α_ϵ tal que si $\alpha \succeq \alpha_\epsilon$ entonces $\|\nu\|(G_\alpha - K) < \epsilon$ con $K \subset G_\alpha$, luego $G - G_\alpha = (G - K) - (G_\alpha - K) \subseteq G - K$, así

$$\|\nu\|(G - G_\alpha) = \|\nu\|((G - K) - (G_\alpha - K)) \leq \|\nu\|(G - K) < \epsilon,$$

si $\alpha \succeq \alpha_\epsilon$. Esto se tiene por la subaditividad de la semivariación. □

En [29], Lema 3.2, Gómez y Restrepo demostraron una propiedad de las medidas radonianas de tipo escalar en relación con la integral de una red no decreciente de funciones semicontinuas inferiormente. Ahora hablaremos de dicha propiedad para medidas vectoriales radonianas con respecto a la integral de una red de funciones no negativas semicontinuas superiormente.

Adicionalmente, este lema es enunciado en [34], Proposición 2.1 y es uno de los resultados necesarios para demostrar el teorema de la convergencia diagonal. Haremos la demostración de este lema, que es una adecuación del caso escalar dado en [54], Proposición 3.2, Página 29 para medidas τ -suaves.

Lema 5.4.7. *Sean T un espacio uniforme, Y un espacio de Banach y $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ una medida vectorial radoniana. Si $\{f_\alpha\}_\alpha$ es una red decreciente de funciones no negativas, uniformemente acotadas y semicontinuas superiormente definidas en T que converge puntualmente a f , entonces f_α y f son ν -integrables y*

$$\lim_{\alpha} \int_T f_\alpha(t) d\nu(t) = \int_T f(t) d\nu(t).$$

Demostración. Como las $\{f_\alpha\}_\alpha$ son uniformemente acotadas y son medibles entonces son integrables. Por otro lado la convergencia de la red y el hecho de que para cada α , $\{f_\alpha\}_\alpha$ es uniformemente acotada, hacen de f una función acotada y nuevamente por el razonamiento anterior f es ν -integrable. Definamos los conjuntos G_λ y G como sigue:

$$G_\lambda = \left\{ t \in T : f_\lambda(t) > \frac{k-1}{n} \right\} \quad \text{y} \quad G = \left\{ t \in T : f(t) > \frac{k-1}{n} \right\}.$$

Notemos que $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red creciente de abiertos debido a que la red de $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red ascendente de funciones semicontinuas superiormente y que converge a G es decir

$$G_\lambda \uparrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda = G,$$

ya que $\lim_{\lambda} f_\lambda = f$. Por ser ν una medida vectorial radoniana entonces se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe un $F_0 \subseteq \Lambda$ tal que si $F_0 \subseteq F$ ($F \subseteq \Lambda$) entonces

$$\|\nu\|(G - G_\lambda) < \epsilon,$$

para $\lambda \in F$. Ahora definamos las siguientes funciones:

$$f_{\lambda,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{G_\lambda} \quad \text{y} \quad f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_G.$$

Si $t \in G_\lambda$ para algún λ entonces $f_\lambda(t) > \frac{k-1}{n}$ y $f_{\lambda,n}(t) \leq \frac{k}{n}$. Así

$$|f_{\lambda,n}(t) - f_\lambda(t)| < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

De manera análoga se prueba que si $t \in G$ entonces

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{1}{n}.$$

Si $t \notin G_\lambda$ para todo λ , las desigualdades anteriores se mantienen. En resumen

$$|f_{\lambda,n}(t) - f_\lambda(t)| < \frac{1}{n} \text{ y } |f_n(t) - f(t)| < \frac{1}{n},$$

para todo $t \in X$. Por otro lado $f_n - f_{\lambda,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_{G-G_\lambda}$. Así

$$\left\| \int_T f_n d\nu - \int_T f_{\lambda,n} d\nu \right\| \leq \left\| \int_T (f_n - f_{\lambda,n}) d\nu \right\| \leq \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n \nu(G - G_\lambda) \right\| \leq \frac{1}{n} n \|\nu\|(G - G_\lambda) < \epsilon.$$

Así

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda} \left\| \int_T f_\lambda d\nu - \int_T f d\nu \right\| &\leq \sup_{\lambda} \left\| \int_T (f_\lambda - f_{\lambda,n}) d\nu \right\| + \lim_{\lambda} \left\| \int_T (f_{\lambda,n} - f_n) d\nu \right\| \\ &\quad + \lim_{\lambda} \left\| \int_T (f_n - f) d\nu \right\| \leq \frac{2}{n} \|\nu\|(T) + \epsilon. \end{aligned}$$

□

5.5. Teorema de la Convergencia Diagonal

Para cumplir el objetivo de este capítulo debemos hablar sobre el Teorema de la Convergencia Diagonal.

En esta sección T es un espacio uniforme, X es un espacio de Banach y Y un retículo de Banach. Denotemos por $\mathcal{U}_b(T, X)$ al espacio de Banach de todas las funciones acotadas y uniformemente continuas con la norma del supremo, es decir si $\phi \in \mathcal{U}_b(T, X)$ entonces $\|\phi\|_\infty = \sup_{t \in T} \|\phi(t)\|$. Denotemos por $\mathcal{U}_b(T) = \mathcal{U}_b(T, \mathbb{R})$ y por $\mathcal{C}_b(T)$ al espacio de Banach de todas las funciones de valor real continuas y acotadas en T con la norma del supremo, $\mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(T), Y)$ al conjunto de medidas vectoriales radonianas σ -aditivas positivas.

Las siguientes proposiciones son enunciados que se utilizan en la demostración del teorema de la convergencia diagonal. En esta parte demostraremos propiedades adicionales de la integral de Bartle en conexión con los retículos de Banach que son más especializadas y para ello nos basaremos en [34].

Proposición 5.5.1. *Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medible, X un retículo de Banach y $\nu : \mathcal{A} \rightarrow X$ una medida vectorial positiva. Si f, g son funciones de valor real ν -integrables tal que $|f| \leq g$ ν -c.t.p, entonces*

$$\left| \int_E f(w) d\nu(w) \right| \leq \int_E |f(w)| d\nu(w) \leq \int_E g(w) d\nu(w),$$

$$\left\| \int_E f(w) d\nu(w) \right\| \leq \left\| \int_E |f(w)| d\nu(w) \right\| \leq \left\| \int_E g(w) d\nu(w) \right\|,$$

para todo $E \in \mathcal{A}$.

Demostración. Si $f = \chi_A$ para $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$\left| \int_E \chi_A(w) d\nu(w) \right| = |\nu(A)| = \nu(A).$$

Si f es una función simple se tiene que

$$\left| \int_E f(w) d\nu(w) \right| = \left| \sum_{i=1}^n x_i \nu(E \cap E_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \nu(E \cap E_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| \nu(E \cap E_i) = \int_E |f(w)| d\nu(w).$$

Ahora por ser f ν -integrable, existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $f_n(w) \rightarrow f(w)$ y

$$\int_E f_n(w) d\nu(w) \rightarrow \int_E f(w) d\nu(w).$$

Para cada n tenemos que

$$\left| \int_E f_n(w) d\nu(w) \right| \leq \int_E |f_n(w)| d\nu(w)$$

entonces

$$\left| \int_E f(w) d\nu(w) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E f_n(w) d\nu(w) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n(w)| d\nu(w) = \int_E |f(w)| d\nu(w).$$

De manera análoga se demuestra que

$$\int_E |f(w)| d\nu(w) \leq \int_E g(w) d\nu(w).$$

Aplicando la norma a lo anterior se tiene que

$$\left\| \int_E f(w) d\nu(w) \right\| \leq \left\| \int_E |f(w)| d\nu(w) \right\| \leq \left\| \int_E g(w) d\nu(w) \right\|.$$

Por la Proposición 5.1.12,

$$\left\| \int_E f(w) d\nu(w) \right\| = \left\| \int_E f(w) d\nu(w) \right\|.$$

Hemos así terminado la demostración. $\square$

Lema 5.5.2. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sean $\nu : \mathcal{A} \rightarrow Y$ una medida vectorial positiva, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función ν -integrable y ϕ de Ω en X una función acotada y ν -medible. Entonces la función vectorial definida por $(f\phi)(w) = f(w)\phi(w)$ de Ω en X es ν -integrable, y

$$\left\| \int_A (f(w)\phi(w)) \otimes d\nu(w) \right\| \leq \sup_{w \in \Omega} \|\phi(w)\| \left\| \int_A |f(w)| d\nu(w) \right\|$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. Ver [34], Proposición 3.2. □

Lema 5.5.3. Sean T un espacio topológico, X e Y espacios de Banach, $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ una medida radoniana y $\phi \in \mathcal{C}_b(T, X)$ una función acotada y continua. Entonces ϕ es $(\otimes, \nu)$ -integrable, y

$$\left\| \int_A \phi(t) \otimes d\nu(t) \right\| \leq \sup_{t \in A} \|\phi(t)\| \|\nu\|(A)$$

para todo $A \in \text{bor}(T)$.

Demostración. Ver [34], Proposición 3.3. □

Proposición 5.5.4. Sean Y un espacio de Banach y $\nu : \text{bor}(T) \rightarrow Y$ una medida vectorial radoniana. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto finito $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ de T y una función $h \in \mathcal{U}_b(T)$, con $0 \leq h \leq 1$, que satisface las siguientes condiciones:

- (i) $h(t_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y $h(t) = 1$ para todo $t \notin \bigcup_{i=1}^n B_\delta(t_i)$.
- (ii) $\left\| \int_T h(t) d\nu(t) \right\| \leq \epsilon$.

Demostración. Ver [34], Lema 4.2. □

La siguiente proposición permite mostrar que la convergencia débil para medidas vectoriales positivas es equivalente a un cierto concepto de convergencia débil cuando las funciones que se toman son uniformemente continuas.

Proposición 5.5.5. Si $\{\nu_\alpha\}$ es una red en $\mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(T), Y)$ y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(T), Y)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) Para cada $f \in \mathcal{U}_b(T)$, se tiene que

$$\int_T f(t) d\nu_\alpha(t) \rightarrow \int_T f(t) d\nu(t).$$

- (ii) Para cada $f \in \mathcal{C}_b(T)$, se tiene que

$$\int_T f(t) d\nu_\alpha(t) \rightarrow \int_T f(t) d\nu(t).$$

Demostración. Ver [34], Proposición 5.1. □

Proposición 5.5.6. Si $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(T), Y)$ es una red y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(T), Y)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) Para cada $g \in \mathcal{U}_b(T)$, se tiene que

$$\int_T g(t) d\nu_\alpha(t) \rightarrow \int_T g(t) d\nu(t).$$

(ii) Para cada $\phi \in \mathcal{U}_b(T, X)$, se tiene que

$$\sup_{\|x'\| \leq 1} \left\| \int_T (x' \circ \phi)(t) d\nu_\alpha(t) - \int_T (x' \circ \phi)(t) d\nu(t) \right\| \rightarrow 0.$$

Demostración. Ver [34], Proposición 4.3. □

Proposición 5.5.7. Si $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(T), Y)$ es una red y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(T), Y)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Para cada $g \in \mathcal{U}_b(T)$, se tiene que

$$\int_T g(t) d\nu_\alpha(t) \rightarrow \int_T g(t) d\nu(t).$$

(ii) Para cada $\phi \in \mathcal{U}_b(T, X)$, se tiene que

$$\int_T \phi(t) \otimes d\nu_\alpha(t) \rightarrow \int_T \phi(t) \otimes d\nu(t).$$

Demostración. Ver [34], Proposición 4.4. □

Teorema 5.5.8. (Teorema de la Convergencia Diagonal). Sean T un espacio uniforme, X un espacio de Banach, Y un retículo de Banach, $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(T), Y)$ una red y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(T), Y)$. Sean $\{\phi_\alpha\}_\alpha \subset \mathcal{U}_b(T, X)$ una red y $\phi \in \mathcal{U}_b(T, X)$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $\phi_\alpha(t) \rightarrow \phi(t)$ para cada $t \in T$.

(ii) $\{\phi_\alpha\}$ es uniformemente acotada.

(iii) $\{\phi_\alpha\}$ es uniformemente equicontinua en T .

Si $\lim_\alpha \int_T g(t) d\nu_\alpha(t) = \int_T g(t) d\nu(t)$ para cada $g \in \mathcal{U}_b(T)$ entonces

$$\lim_\alpha \int_T \phi_\alpha(t) \otimes d\nu_\alpha(t) = \int_T \phi(t) \otimes d\nu(t).$$

Demostración. Ver [34], Teorema 4.1. □

5.6. Convergencia Débil del Producto de Convolución

Hemos llegado al objetivo, demostrar la convergencia débil del producto de convolución.

La siguiente proposición es una consecuencia directa del teorema de la convergencia diagonal.

Proposición 5.6.1. Sean S y T espacios uniformes, X un espacio de Banach, $\{\mu_\alpha\}_\alpha$ una red de medidas uniformemente acotadas, es decir $\sup_\alpha \|\mu_\alpha\|(S) < M$. Si $h \in \mathcal{U}_b(S \times T)$ y $\phi_\alpha(t) = \int_S h_t(s) d\mu_\alpha(s)$, para todo α y $t \in T$ entonces $\{\phi_\alpha\}$ es uniformemente acotada y uniformemente equicontinua en T .

Demostración. Ver [34], Lema 5.2. □

Duchon y Kluvanek en [23], demuestran que si $\mu \in \mathcal{M}(\text{bor}(S), X)$ y $\nu \in \mathcal{M}(\text{bor}(T), Y)$ entonces existe una única medida $\mu \otimes \nu : \text{bor}(S) \otimes \text{bor}(T) \rightarrow X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ tal que $\mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in \text{bor}(S)$ y $B \in \text{bor}(T)$. Kawabe en [34] hace la suposición de que $\text{bor}(S \times T) = \text{bor}(S) \otimes \text{bor}(T)$. Luego en [33], Kawabe muestra la existencia de la medida producto a todo $\text{bor}(S \times T)$ para medidas τ -suaves y enuncia la siguiente proposición que se adaptó al concepto de medidas radonianas positivas.

Aunque las demostraciones de los siguientes teoremas están hechas en [33] queremos reproducirlas dada la importancia del objetivo planteado al comienzo de este capítulo.

Teorema 5.6.2. Sean S y T espacios uniformes, X y Y retículos de Banach separables tales que $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es un retículo de Banach, $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(S), X)$ y $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(T), Y)$ redes de medidas y $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(S), X)$ y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, \text{rad}}^+(\text{bor}(T), Y)$. Sean $\lambda_\alpha = \mu_\alpha \otimes \nu_\alpha$ la medida producto de μ_α y ν_α y $\lambda = \mu \otimes \nu$ la medida producto μ y ν respectivamente. Si $\int_S f d\mu_\alpha \rightarrow \int_S f d\mu$ para todo $f \in \mathcal{U}_b(S)$ y $\int_T g d\nu_\alpha \rightarrow \int_T g d\nu$ para toda $g \in \mathcal{U}_b(T)$, entonces

$$\int_{S \times T} h(s, t) d\lambda_\alpha(s, t) \rightarrow \int_{S \times T} h(s, t) d\lambda(s, t),$$

para toda $h \in \mathcal{U}_b(S \times T)$.

Demostración. Sea $h \in \mathcal{U}_b(S \times T)$, entonces para t fijo, $h_t \in \mathcal{U}_b(S)$ y por tanto

$$\int_S h_t(s) d\mu_\alpha(s) \rightarrow \int_S h_t(s) d\mu(s)$$

para toda $h_t \in \mathcal{U}_b(S)$. Ahora definamos $\phi_\alpha(t) = \int_S h_t(s) d\mu_\alpha(s)$ y $\phi(t) = \int_S h_t(s) d\mu(s)$ por lo anterior se comprueba que $\phi_\alpha(t) \rightarrow \phi(t)$ para cada $t \in T$. Por otro lado h es continua y acotada y por tanto integrable. Entonces por el Teorema de Fubini se tiene que las funciones

$$t \rightarrow \phi_\alpha(t) = \int_S h_t(s) d\mu_\alpha(s) \quad \text{y} \quad t \rightarrow \phi(t) = \int_S h_t(s) d\mu(s)$$

son $(\otimes, \nu)$ - integrables y nuevamente por Fubini podemos concluir que

$$\int_{S \times T} h(s, t) d\lambda_\alpha(s, t) = \int_T \left(\int_S h_t(s) d\mu_\alpha(s) \right) \otimes d\nu_\alpha(t) = \int_T \phi_\alpha(t) \otimes d\nu_\alpha(t)$$

y

$$\int_{S \times T} h(s, t) d\lambda(s, t) = \int_T \left(\int_S h_t(s) d\mu(s) \right) \otimes d\nu(t) = \int_T \phi(t) \otimes d\nu(t).$$

Como

$$\int_T g(t) d\nu_\alpha(t) \rightarrow \int_T g(t) d\nu(t)$$

para toda $g \in \mathcal{U}_b(T)$ y λ_α, λ son medidas vectoriales radonianas positivas, el Teorema de la Convergencia Diagonal garantiza que

$$\int_{S \times T} h(s, t) d\lambda_\alpha(s, t) = \int_T \phi_\alpha(t) \otimes d\nu_\alpha(t) \rightarrow \int_T \phi(t) \otimes d\nu(t) = \int_{S \times T} h(s, t) d\lambda(s, t).$$

Así

$$\int_{S \times T} h(s, t) d\lambda_\alpha(s, t) \rightarrow \int_{S \times T} h(s, t) d\lambda(s, t),$$

para toda $h \in \mathcal{U}_b(S \times T)$.

□

Los dos teoremas siguientes son una aplicación directa de la Proposición 5.6.2.

Teorema 5.6.3. (*Convergencia débil de la medida producto*). Sean S y T espacios uniformes, X y Y retículos de Banach separables tales que $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es un retículo de Banach. Sean $\{\mu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(S), X)$ y $\{\nu_\alpha\} \subset \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(T), Y)$ redes de medidas y $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(S), X)$ y $\nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(T), Y)$. Sean $\lambda_\alpha = \mu_\alpha \otimes \nu_\alpha$ la medida producto de μ_α y ν_α y $\lambda = \mu \otimes \nu$ la medida producto μ y ν respectivamente. Si $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$ y $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu$ entonces $\lambda_\alpha \xrightarrow{w} \lambda$.

Demostración. Como consecuencia del Teorema 5.6.2,

$$\int_{S \times T} h(s, t) d\lambda_\alpha(s, t) \rightarrow \int_{S \times T} h(s, t) d\lambda(s, t),$$

para toda $h \in \mathcal{U}_b(S \times T)$ y por la Proposición 5.5.5 se tiene para toda $h \in \mathcal{C}_b(S \times T)$. Luego $\lambda_\alpha \xrightarrow{w} \lambda$ cumpliéndose la prueba. □

Teorema 5.6.4. (*Convergencia débil del producto de Convolución*). Sea X una álgebra de Banach reticular separable, tal que $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$ es un retículo de Banach. Sean $\{\mu_\alpha\}$ y $\{\nu_\alpha\}$ redes de medidas radonianas en $\mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(S), X)$. Si $\mu_\alpha \xrightarrow{w} \mu$, y $\nu_\alpha \xrightarrow{w} \nu$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{\sigma, rad}^+(bor(S), X)$ entonces $\mu_\alpha * \nu_\alpha \xrightarrow{w} \mu * \nu$.

Demostración. Es una consecuencia del teorema anterior y su demostración es análoga a la demostración del Teorema 3.2.4. □

Queremos subrayar que estas extensiones se han dado para espacios separables, pero toda esta teoría puede extenderse al caso no separable, para ello definiremos cuando una medida vectorial tiene condición de separabilidad con respecto a otra.

Definición 5.6.5. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, X un espacio de Banach, $f : \Omega \rightarrow X$ una función vector valuada y ν una medida vectorial de $\mathcal{A}$ en X . Diremos que f es ν -separable, si existe un conjunto E tal que $\|\nu\|(E) = 0$ y $f(\Omega - E)$ es un subconjunto separable respecto a la norma en X .

Observación 5.6.6. Sean $E \in \text{bor}(S \times T)$ y $\mu : \text{bor}(S) \rightarrow X$ una medida vectorial σ -aditiva. Para $t \in T$, definimos la t -sección de E como $E^t : \{s \in S : (s, t) \in E\}$. Entonces $E^t \in \text{bor}(S)$. Definimos $g_E : T \rightarrow X$ por $g_E(t) = \mu(E^t)$. En la demostración del Teorema 2.7.6, puede reemplazarse la palabra separable por la hipótesis de que la función g_E es ν -separable y por tanto se garantiza la medibilidad de la función g_E , gracias al teorema de Pettis para medidas vectoriales. Esta condición permite extender el Teorema 2.7.6 a espacios de Banach no separables. En consecuencia todas las propiedades, proposiciones o teoremas que requieran de la medida producto pueden generalizarse a espacios de Banach no separables con esta nueva hipótesis. En este contexto, esta hipótesis es conocida como *condición de separabilidad de una medida vectorial con respecto a otra medida vectorial*.

Conclusiones y Perspectivas de Investigación

El desarrollo de estas propiedades fundamentales sobre las medidas vectoriales ha iluminado varias perspectivas de investigación:

- (i) Los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$ satisfacen la propiedad de aproximación, la cual es fundamental en el estudio de trazas y determinantes. La demostración de dicha propiedad la presentaremos en [16]. Otros trabajos en esta misma dirección son [17], [18].
- (ii) Desarrollar en más detalle propiedades básicas de los operadores en medidas y sus aplicaciones a diversos tipos de ecuaciones diferenciales. Para ello se requerirá de una versión para medidas vectoriales del análisis de Fourier y sus consecuencias.
- (iii) Desarrollar la teoría de los operadores pseudodiferenciales asociada a los espacios de medidas vectoriales. La gran importancia de los operadores pseudodiferenciales para espacios de funciones en las aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales sugiere que dicha extensión puede ser bastante prometedora. Es claro que como en el caso clásico, este nivel de extensión requerirá de un buen entendimiento del punto anterior.
- (iv) El hecho de que las únicas medidas invariantes bajo translaciones son un múltiplo vectorial de la medida de Lebesgue ha originado una motivación para desarrollar una teoría de análisis armónico no invariante.
- (v) En este documento se ha desarrollado una medida producto, un Teorema de Fubini y un producto de Convolución para medidas vectoriales y funciones vector valuadas, cuando la función bilineal multiplicación es el producto tensorial inyectivo. Esperamos desarrollar una teoría en el caso de las álgebras de Banach donde la función bilineal es la multiplicación del álgebra y en espacios de Hilbert donde la función bilineal es el producto escalar. Esta teoría permitiría establecer conexiones y aplicaciones con las ecuaciones diferenciales parciales.

Índice alfabético

A

AL-espacios, 94
AM-espacios, 90

C

Compactificación de un espacio
completamente regular no
compacto, 81

Cono

negativo de un retículo vectorial, 94
positivo de un retículo vectorial, 94

Convergencia

débil de medidas, 62
de medidas vectoriales σ -aditivas
respecto a la semivariación, 59
fuerte de medidas, 59

D

Definición

de **M**-módulo, 73
de espacios $L^p(\mu, X)$, $1 \leq p < \infty$, 42
de los espacios $L^p(\nu)$, $1 < p < \infty$, 46
de los espacios $L^p(\nu, X, Y)$, $1 < p < \infty$,
48
de los espacios $L_w^p(\nu)$, $1 < p < \infty$, 47
de los espacios $L_w^p(\nu, X, Y)$,
 $1 < p < \infty$, 54
del espacio $L^1(\nu)$, 45
del espacio $L^1(\nu, X, Y)$, 47
del espacio $L_w^1(\nu)$, 47
del espacio $L_w^1(\nu, X, Y)$, 54
del espacio $L^\infty(\mu, X)$, 42
del espacio $L^\infty(\nu)$, 46
del espacio $L^\infty(\nu, X, Y)$, 53

E

Espacio

completamente regular, 81
topológico regular, 80

F

Función

(b, ν) -integrable, 30
 ν -acotada, 53
 ν -separable, 108
 ν_b -acotada, 30
 $\otimes$ débilmente integrable de orden p , 54
 $\otimes$ -integrable, 28
Bochner integrable, 21
débilmente ν -integrable, 47
débilmente integrable de orden p ,
 $1 < p < \infty$, 47
medible con respecto a una medida
real, 20
medible con respecto a una medida
vectorial, 20
tensorial, 2

I

Integrabilidad

de una función escalar con respecto a
una medida vectorial.Bartle, 24
de una función escalar con respecto a
una medida vectorial.Lewis, 25

L

Linealización tensorial de una función
bilineal, 3

M

Medida

solución, 83
 vectorial, 16
 vectorial μ -continua, 19
 vectorial τ -suave, 101
 vectorial apretada, 101
 vectorial contablemente aditiva o
 σ -aditiva, 16
 vectorial de semivariación acotada, 17
 vectorial de variación acotada, 17
 vectorial Delta de Dirac, 66
 vectorial finitamente aditiva o
 ϕ -aditiva, 16
 vectorial invariante bajo traslaciones,
 27
 vectorial radoniana, 34

N

Norma

ϵ , 5
 π , 5
 w_2 , 11
 cruzada razonable, 4
 de Fremlin, 97
 finitamente generada, 4
 inyectiva a derecha, 10
 proyectiva a derecha, 10
 reticular, 89
 tensorial, 5
 uniforme, 4

Normas Chevet Saphar, 9

O

Operador convolución de medidas, 62

P

Parte

negativa de un elemento x , 86
 positiva de un elemento x , 86

Producto

de convolución de funciones, 70
 de convolución de medidas radonianas,
 36

Producto tensorial

algebraico, 2
 de Fremlin, 97
 inyectivo, 5

proyectivo, 5
 proyectivo positivo, 97

Propiedad

de Radon-Nikodym, 44
 de Radon-Nikodym con respecto a un
 espacio de medida finita, 44

R

Retículo

de Banach, 89
 vectorial normado, 89
 vectorial o espacio de Riesz, 86

S

Semivariación

de una medida vectorial, 17
 de una medida vectorial con respecto a
 una función bilineal, 18

Solución generalizada, 83

Subretículo vectorial, 87

Sucesión

absolutamente sumable, 8
 incondicionalmente sumable, 8

T

Tensor elemental, 2

Tensor típico, 2

Tensores, 2

Teorema

de Fubini para medidas vectoriales
 regulares, 27
 de Fubini-Bochner, 23
 de la Convergencia Acotada. Bartle, 31
 de la convergencia débil de la medida
 producto, 108
 de la convergencia débil del producto
 de convolución, 108
 de la Convergencia Diagonal, 106
 de la Convergencia Dominada.
 Bartle-Lewis, 26
 de la Convergencia Dominada.
 Bochner, 21
 de la Convergencia Dominada.
 Stefánsson, 29
 de la invarianza bajo traslaciones, 28

de la medida producto. Medidas
Radonianas, 35

de la medida producto. Medidas
Vectoriales, 27

de linealización de las funciones
bilineales, 2

del Cambio de Variable.Bochner, 22

de Fubini para medidas radonianas, 35

Transformada de Fourier

de una función Bochner-integrable, 68

de una función de valor real, 72

de una medida vectorial, 64

V

Valor absoluto de un elemento x , 86

Variación de una medida vectorial, 17

Bibliografía

- [1] N.U. AHMED *Some Recent Developments in Systems and Control Theory on Infinite Dimensional Banach Spaces: Part 1*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 86. Springer Verlag Heidelberg 2014, páginas 3-23.
- [2] N.U. AHMED *Some Recent Developments in Systems and Control Theory on Infinite Dimensional Banach Spaces: Part 2*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 86. Springer Verlag Heidelberg 2014, páginas 25-44.
- [3] N.U. AHMED *Vector and Operator Valued Measures as Controls for Infinite Dimensional Systems: Optimal Control*. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization 28 (2008) 95-131.
- [4] N.U. AHMED *A note on Radon-Nikodym theorem for operator valued measures and its applications*. Commun. Korean Math. Soc. 28 (2013) N. 2 285-295.
- [5] N.U. AHMED *Stone- Čech compactification with applications to evolution equations on Banach spaces*. Publ. Math. Debrecen 59/3-4 (2001), 289-301.
- [6] A.D. ALEXANDROV. *Additive set functions in abstract spaces*. Mat Sbornik 8,9,13, 1940-1943.
- [7] R.G. BARTLE. *A general bilinear vector integral*. Studia Math 15 (1956), 337-352.
- [8] R.G. BARTLE, N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ. *Weak compactness and vector measures*. Canad. J. Math. 7 (1955), 289-305.
- [9] O. BLASCO. *Fourier analysis for vector-measures on compact abelian groups*. RACSAM (2016), 110 519-539 .
- [10] V.I. BOGACHEV, O.G. SMOLYANOV. *Topological Vector Spaces and Their Applications*. Springer Monographs in Mathematics.2017.
- [11] H. BREZIS. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer (2010).
- [12] J.M. CALABUIG, F. GALAZ-FONTES, E.M. NAVARRETE, E. A. SÁNCHEZ. *Fourier Transform and convolutions on L^p of a Vector Measure on a Compact Hausdorff Abelian Group*. J. Fourier Anal Appl (2013) 19 312-332.

- [13] G. CARVAJAL. *La desigualdad de Grothendieck*. Tesis de Pregrado. Universidad de Buenos Aires (2015).
- [14] N.D. CHAKRABORTY Y S. BASU. *On some properties of the space of tensor integrable functions*. Analysis Mathematica. 33 (2007) 1-16.
- [15] N.D. CHAKRABORTY Y S. BASU. *Spaces of p - tensor integrable functions and related Banach space properties*. Real Analysis Exchange. Vol 34 (2008/2009) 87-104.
- [16] J. DELGADO Y L. POSADA. *The approximation property for $L_w^p(\nu, X, Y)$ spaces with respect to vector measures*. Preprint.
- [17] J. DELGADO Y M. RUZHANSKY. *The bounded approximation property of variable Lebesgue spaces and nuclearity*. Math. Scan. 122 (2018) 299-319.
- [18] J. DELGADO Y M. RUZHANSKY. *Approximation property and nuclearity on mixed-norm L^p , modulation and Wiener amalgam spaces*. J. London Math. Soc. (2) 94 (2016) 391-408.
- [19] O. DELGADO Y P. J. MIANA. *Algebra structure for L^p of a vector measure*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 358 (2009) 355-363.
- [20] J. DIESTEL, J. H. FOURIE Y J. SWART. *The Metric Theory of Tensor Products. Grothendieck's Résumé Revisited*. American Mathematical Society (2008).
- [21] J. DIESTEL Y J. J. UHL. *Vector Measures*. American Mathematical Society Mathematical Surveys No 15 (1977).
- [22] J. DIEUDONNE. *Deaux exemples d'équations différentielles*. Acta Sci. Math. Szeged 12B, 38-40 (1950).
- [23] M. DUCHON AND I. KLUVÁNEK *Inductive tensor product of vector valued measures*. Mat. Casopis Sloven. Akad. Vied. 17 (1967), 108-112.
- [24] N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ. *Linear Operators. Part 1. General Theory*. Wiley Classics Library Edition Published (1988).
- [25] J. DUNGUNDJI. *Topology*. Allyn and Bacon (1978).
- [26] O. EDHAN *Values of vector measure market games and their representations*. Internat. J. Game Theory 45 (2016) 411-433
- [27] D.H. FREMLIN. *Tensor products of Archimedian vector lattices*. Amer. J. Math 99 (1972).
- [28] D.H. FREMLIN. *Tensor products of Banach lattices*. Math. Ann. 24 (1974).
- [29] M. GÓMEZ Y G. RESTREPO. *Producto Tensorial de Medidas Radonianas y el Teorema de Fubini*. Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XVII, No 1, Junio (2009), 23-34.
- [30] J. J. GROBLER, C.C.A. LABUSCHAGNE. *The Ito integral for martingales in vector lattices*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 450 (2017) 1245-1274.

- [31] A. GROTHENDIECK. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*. Sao Paulo (1953) 1-63.
- [32] H. WHITNEY. *Tensor products of Abelian groups*. Duke math. J. 4 (1938) 495-528
- [33] J. KAWABE. *Borel Injective Tensor Product and Convolution of Vector Measure and Their Weak Convergence*. Contemporary Mathematics Volume 321, (2003).
- [34] J. KAWABE. *Joint continuity of injective tensor products of vector measures in Banach lattices*. J.Aust. Soc. 74(2003), 185-199.
- [35] I. KLUVÁNEK AND G. KNOWLES. *Vector measures and control systems*. North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [36] D.R. LEWIS. *Integration with respect to vector measures*. Pacific J. Math. 33 (1970), 157-165.
- [37] J. LINDENSTRAUSS AND A. PELCZYŃSKI *Absolutely summing operator in L^p -spaces and their applications*. Studia Mathematica, 3(29):275-326, 1968.
- [38] P. MEYER- NIEBERG. *Banach lattices*. Springer Verlag. Berlín (1991).
- [39] A. PAZY. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer (1983).
- [40] G. PISIER. *Counterexample to a conjecture of Grothendieck*. Acta Math. 151 (1983).
- [41] L. POSADA. *Producto tensorial de medidas radonianas con valores en espacios de Banach*. Tesis de maestría. Universidad del Valle (2009).
- [42] L. POSADA Y G. RESTREPO. *Producto de medidas radonianas con valores en espacios de Banach separables*. Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XVIII, No 1, Junio (2010), 57-69.
- [43] L. POSADA Y G. RESTREPO. *Convolución de medidas radonianas con valores en álgebras de Banach separables*. Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XX, No 1, Junio (2012), 49-62
- [44] L. POSADA. *A note on $L_w^p(\nu, X, Y)$ spaces of vector-valued functions with respect to vector measures*. Arxiv 1808.02806v1 (2018).
- [45] G. RESTREPO *Teoría de la Integración* Programa Editorial Universidad del Valle. 2004.
- [46] R. RAYMOND. *Introduction to tensor products of Banach spaces*. Springer, (2002).
- [47] E.A. SÁNCHEZ. *Compactness arguments for spaces of p -integrable functions with respect to a vector measure and factorization of operators through Lebesgue-Bochner spaces*. Illinois Journal of Mathematics, Volume 45, Number 3, Fall 2001, Pages 907-923 S0019-2082.
- [48] R. SCHATTEN. *On reflexive norms for the direct product of Banach spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 54, (1943). 498-506.

- [49] H.H. SHAEFER. *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, (1971).
- [50] H.H. SHAEFER. *Banach lattices and positive Operators*. Springer-Verlag, (1974).
- [51] G.F. STEFÁNSSON. *L_1 of a vector measure*. Le Matematiche, 48 (1993), 219-334.
- [52] G.F. STEFÁNSSON. *Integration in Vector Spaces*. Illinois Journal of Mathematics, Volume 45, number 3, Fall 2001, Pages 925-938. S0019-2082.
- [53] D. P. STORY *A Fubini Theorem for Inductive Tensor Product Measure* Rev.Roum.Math 24 (1979) 161-165.
- [54] N.N. VAKHANIA, V.I. TARIELADZE AND S.A. CHOBANYAN. *Probability distributions on Banach Spaces*. D. Reidel Publishing Company (1987).
- [55] A.J.WHITE *Convolution of Vector Measures*. Royal Society of Edinburgh, Volume 73 (1975), pages 117-135.

Dirección de los autores

LILIANA POSADA VERA

liliana.posada@correounivalle.edu.co