



EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO COVARIACIÓN EN LA ESCUELA

RONALD ANDRÉS GRUESO

GERARDO GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Santiago de Cali, octubre de 2016



EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO COVARIACIÓN EN LA ESCUELA

RONALD ANDRÉS GRUESO

Código 1303710

GERARDO GONZÁLEZ

Código 1303701

Informe final de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en
Educación, énfasis en Educación Matemática

DIRECTORA

LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO, MG.

Profesora del Instituto de Educación y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Santiago de Cali, octubre de 2016



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÁREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ACTA DE SUSTENTACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 5 de Octubre de 2016							
ESTUDIANTE: GERARDO GONZÁLEZ -	CÓDIGO: 1303701						
RONALD ANDRÉS GRUESO -	CÓDIGO: 1303710						
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: "EL CONCEPTO DE FUNCIÓN COMO COVARIACIÓN EN LA ESCUELA"							
DIRECTOR DE TESIS: Profesor LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO							
EVALUADORES: Profesor JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA Profesor EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ							
COMENTARIOS DE LOS JURADOS El jurado reconoce que de acuerdo con los requisitos de un Trabajo de Grado de Maestría - Modalidad Profundización se han obtenido muy buenos resultados al realizar una buena sistematización de una práctica o experimento didáctico y se ha hecho de manera articulada y bien fundamentada desde los modelos teóricos utilizados. <table><tr><td>APROBADO</td><td>☒</td></tr><tr><td>APLAZADO</td><td>☐</td></tr><tr><td>RECHAZADO</td><td>☐</td></tr></table> Los miembros del jurado se comprometieron a ampliar sus conceptos sustentados su decisión unanime de recomendar al CAME un reconocimiento o distinción del Trabajo como MERITORIO.		APROBADO	☒	APLAZADO	☐	RECHAZADO	☐
APROBADO	☒						
APLAZADO	☐						
RECHAZADO	☐						

Prof. EVELIO BEDOYA MORENO
en reemplazo del
Prof. SANTIAGO A. ARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

Prof. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO
Director de Tesis

Prof. JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA
Jurado Evaluador

Prof. EDGAR ALBERTO GUACANEME S.
Jurado Evaluador

A Mercedes
La mejor madre
(Gerardo)

A mi Madre, Abuela y hermana; por la motivación y apoyo incondicional.
A Juana, por su acompañamiento constante en mi crecimiento personal y profesional
(Ronald)

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes de grado noveno (2015) de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta.

A nuestros profesores y compañeros del Área de Educación Matemática de la Universidad del Valle.

Nuestro más sinceros agradecimientos a la profesora Ligia Amparo Torres Rengifo, quien a pesar de sus múltiples ocupaciones decidió compartir su tiempo y conocimiento para acompañarnos y orientarnos en la consolidación de este trabajo.

A los profesores Jhony Alexander Villa Ochoa y Edgar Alberto Guacaneme Suarez, quienes aceptaron evaluar el trabajo de grado. Además, con sus conocimientos nos hicieron comentarios y sugerencias claves que nos servirán en futuros estudios.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS.....	VIII
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	X
RESUMEN.....	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO.....	4
1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	4
1.2 OBJETIVOS.....	11
1.2.1 Objetivo general.....	11
1.2.2 Objetivos específicos.....	11
1.3 JUSTIFICACIÓN.....	11
1.4 ANTECEDENTES	18
1.5 MARCO CONTEXTUAL	31
CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO DE REFERENCIA.....	34
2.1 SOBRE LOS MODELOS TEÓRICOS LOCALES.....	35
2.1.1. Componentes del MTL.....	37
2.1.2 Sobre el diseño y desarrollo de la experimentación	42
2.2 EL MODELO TEÓRICO LOCAL DE LA FUNCIÓN A TRAVÉS DE LA COVARIACIÓN	46
2.2.1 Modelo cognitivo y comunicación.....	48
2.2.1.1 Sistemas matemáticos de signos SMS.....	49
2.2.1.2 La comprensión de conceptos matemáticos.....	52
2.2.1.3 La visualización y sistemas de representación en el concepto de función.....	54
2.2.1.4 Dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de función	59
2.2.1.5 Razonamiento covariacional.....	61
2.2.2 Modelo de competencia formal.....	70
2.2.2.1 Fenomenología histórico-epistemológica	70
2.2.2.2 Fenomenología pura	78
2.2.3 Modelo de enseñanza	87
2.2.3.1 La enseñanza de la función desde el marco legal curricular	87
2.2.3.2La enseñanza del concepto de función en los textos escolares	95
2.2.3.3La enseñanza de la función en la Institución Educativa PolicarpaSalavarrieta	118
CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	125
3.1 ETAPAS DEL DISEÑO Y DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN	125
3.1.1 Diseño de la propuesta de aula o secuencia de enseñanza.....	126
3.1.2 Desarrollo de la experimentación.....	131

3.2 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	136
3.2.1 Sobre las variables de análisis.....	136
3.2.2 Resultados y análisis de la situación 1	138
3.2.3 Resultados y análisis de la situación 2	168
3.2.4 Resultados y análisis de la situación 3	202
CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES	
DIDÁCTICAS	241
4.1 CONCLUSIONES GENERALES	241
4.2 ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS PARA EL APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN.....	250
4.3 LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y RECOMENDACIONES PARA UNA POSTERIOR INVESTIGACIÓN	254
REFERENCIAS.....	258
ANEXOS	265
ANEXOS 1: SELECCIÓN, PRESENTACIÓN Y DESCRIPCIÓN GENERAL DE LOS TEXTOS	265
ANEXO 2: CATEGORÍAS DE ANÁLISIS Y DESCRIPCIÓN DE LOS CRITERIOS	270
ANEXO 3: ENTRADA AL CONCEPTO DE FUNCIÓN T1 p.144	272
ANEXO 4: RELACIÓN DE PAREJAS ORDENADAS EN LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN T1 p.145	273
ANEXO 5: INTRODUCCIÓN AL TEMA DE FUNCIÓN T1 p.158	274
ANEXO 6: EJEMPLO DE FUNCIÓN COMO CORRESPONDENCIA T1 p.159	275
ANEXO 7: PRESENTACIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN T2 p.82.....	276
ANEXO 8: PROPUESTA DE ACTIVIDADES DE FUNCIÓN COMO CORRESPONDENCIA T2 p.83	277
ANEXO 9: EJEMPLO CON EL USO DE HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS T1 p.181	278
ANEXO 10: MARCO DE EJERCITACIÓN T1 p.183	279
ANEXO 11: CÓMO ABORDAR UN PROBLEMA, SUGERIDO POR GEORGE POLYA T1 p. 77	280
ANEXO 12: MARCO DE EJERCITACIÓN POR GRUPO DE EJERCICIOS T1 p. 157, 173.....	281
ANEXO 13: SISTEMA DE REPRESENTACIÓN T1 p. 162.....	282
ANEXO 14: REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA, TABULAR Y GRAFICA T1 p. 174.....	283
ANEXO 15: COMPILACIÓN DE REPRESENTACIONES CON SUS DOMINIOS Y RANGOS T1 p. 163.....	283
ANEXO 16: REPRESENTACIONES DE FUNCIONES T2 p. 84.....	284
ANEXO 17: CRITERIO DE LA VERTICAL T2 p. 87	285
ANEXO 18: MAPAS CONCEPTUALES PARA EL DOCENTE T2 p. 19D	286
ANEXO 19: CONTENIDO DE LA PROPUESTA DE AULA	287
ANEXO 20: RESULTADOS DE LAS PRUEBAS SABER 3, 5, 9 Y 11 DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA	298

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Trabajos que se tomaron como referencia para los antecedentes	29
Tabla 2. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación.....	63
Tabla 3. Niveles de razonamiento covariacional.....	65
Tabla 4. Unidades que contienen el concepto de función del texto 1.....	98
Tabla 5. Unidades que contienen el concepto de función del texto 2.....	99
Tabla 6. Macro de categorías de análisis y rejilla de análisis	101
Tabla 7. Criterios aplicados a los textos escolares	102
Tabla 8. Texto 1, Total 220 ejercicios, comprenden las secciones 3-1 hasta la 3-3.....	109
Tabla 9. Texto 2, Total 27 ejercicios, comprenden las secciones 4-1 hasta la 4-3.....	113
Tabla 10. Estructura general de la propuesta de enseñanza controlada	130
Tabla 11. Categorías y criterios de análisis.....	137
Tabla 12. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 1 (S1T1P1).....	138
Tabla 13. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 2 (S1T1P2).....	138
Tabla 14. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 3 (S1T1P3).....	140
Tabla 15. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 4 (S1T1P4).....	141
Tabla 16. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 1 (S1T2P1).....	143
Tabla 17. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 2 (S1T2P2).....	143
Tabla 18. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 3 (S1T2P3).....	145
Tabla 19. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4a (S1T2P4a).....	146
Tabla 20. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4b (S1T2P4b).....	147
Tabla 21. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4c (S1T2P4c).....	147
Tabla 22. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4d (S1T2P4d).....	148
Tabla 23. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4e (S1T2P4e).....	148
Tabla 24. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 5 (S1T2P5).....	148
Tabla 25. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 1 (S1T3P1).....	151
Tabla 26. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 2 (S1T3P2).....	151
Tabla 27. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 2a (S1T3P2a).....	152
Tabla 28. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 2b (S1T3P2b).....	153
Tabla 29. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 3a (S1T3P3a).....	155
Tabla 30. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 3b (S1T3P3b).....	155
Tabla 31. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 4a (S1T3P4a).....	156
Tabla 32. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 4b (S1T3P4b).....	156
Tabla 33. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 4c (S1T3P4c).....	156
Tabla 34. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 5 (S1T3P5).....	159
Tabla 35. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 6a (S1T3P6a).....	160
Tabla 36. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 6b (S1T3P6b).....	160
Tabla 37. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 1 (S2T1P1).....	168
Tabla 38. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 2 (S2T1P2).....	168
Tabla 39. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 3 (S2T1P3a).....	171
Tabla 40. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 3b (S1T1P3b).....	172
Tabla 41. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 4a (S1T1P4a).....	172
Tabla 42. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 4b (S2T1P4b).....	173

Tabla 43. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 1 (S2T2P1)	175
Tabla 44. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 2a (S2T2P2a).....	175
Tabla 45. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 2b (S2T2P2b)	176
Tabla 46. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 3a (S2T2P3a).....	176
Tabla 47. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 3b (S2T2P3b)	177
Tabla 48. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 4 (S2T2P4)	180
Tabla 49. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 1 (S2T3P1)	183
Tabla 50. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 2a (S2T3P2a).....	185
Tabla 51. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 2b (S2T3P2b)	186
Tabla 52. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 3 (S2T3P3).....	186
Tabla 53. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 4 (S2T3P4)	187
Tabla 54. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 5 (S2T3P5).....	191
Tabla 55. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 6 (S2T3P6).....	193
Tabla 56. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 1a (S3T1P1a).....	202
Tabla 57. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 1b (S3T1P1b)	203
Tabla 58. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 2 (S3T1P2).....	203
Tabla 59. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 3a (S3T1P3a).....	204
Tabla 60. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 3b (S3T1P3b)	208
Tabla 61. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 4 (S3T1P4).....	209
Tabla 62. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 1 (S3T2P1).....	212
Tabla 63. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 2a (S3T2P2a).....	213
Tabla 64. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 2b (S3T2P2b)	213
Tabla 65. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 3a (S3T2P3a).....	214
Tabla 66. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 3b (S3T2P3b)	215
Tabla 67. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 4 (S3T2P4).....	215
Tabla 68. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 5 (S3T2P5).....	220
Tabla 69. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T2P6).....	220
Tabla 70. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P1)	222
Tabla 71. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P2)	223
Tabla 72. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P3)	224
Tabla 73. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P4).....	224

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Resultados de la prueba PISA (2012) por ciudades, en Colombia.....	15
Ilustración 2. Resultados de la prueba Saber 11 (2013) por ciudades, en Colombia.....	16
Ilustración 3. Resultados de la prueba Saber 9 I.E. PolicarpaSalavarrieta	17
Ilustración 4. Resultados de la prueba Saber 9 I.E. PolicarpaSalavarrieta	17
Ilustración 5. Interrelación entre las componentes de los MTL	41
Ilustración 6. Representaciones utilizadas por Óresme	74
Ilustración 7. Representación esquemática del concepto de función, Apostol p.63.....	82
Ilustración 8. Definición de continuidad, Apostol p.158.....	84
Ilustración 9. Mapa conceptual para abordar el concepto de función T1	116
Ilustración 10. Mapa conceptual para abordar el concepto de función T2	118
Ilustración 11. Implicaciones generales de cada componente y su aporte a la construcción del MTL inicial.	124
Ilustración 12. S1T1P4R1.....	142
Ilustración 13. S1T2P3	146
Ilustración 14. S1T2P4d	149
Ilustración 15. S1T3P4	158
Ilustración 16. S1T3P4C.....	158
Ilustración 17. S2T1P2	171
Ilustración 18. S2T2P1R1.....	179
Ilustración 19. S2T2P1R2.....	179
Ilustración 20. S2T2P3b	180
Ilustración 21. S2T2P4R1.....	182
Ilustración 22. S2T2P4R3.....	182
Ilustración 23. S2T2P4R2.....	182
Ilustración 24. S2T3P1R1.....	185
Ilustración 25. S2T3P2aR2	188
Ilustración 26. S2T3P2bR1.....	188
Ilustración 27. S2T3P2bR2.....	188
Ilustración 28. S2T3P3R1.....	189
Ilustración 29. S2T3P3R2.....	189
Ilustración 30. S2T3P3R3.....	190
Ilustración 31. S2T3P4R1.....	190
Ilustración 32. S2T3P5R1.....	191
Ilustración 33. S2T3P5R2.....	192
Ilustración 34. S2T3P5R3.....	192
Ilustración 35. S3T1P1aR1	205
Ilustración 36. S3T1P1aR2	205
Ilustración 37. S3T1P1bR3.....	206
Ilustración 38. S3T1P3aR2	206

Ilustración 39. S3T1P2R1.....	207
Ilustración 40. S3T1P1bR1.....	208
Ilustración 41. S3T1P3bR1.....	210
Ilustración 42. S3T1P3bR3.....	211
Ilustración 43. S3T1P4R1.....	211
Ilustración 44. S3T2P1R2.....	212
Ilustración 45. S3T2P2aR1.....	217
Ilustración 46. S3T2P2bR2.....	218
Ilustración 47. S3T2P3aR1 y S3T2P3bR1.....	218
Ilustración 48. S3T2P3bR2.....	219
Ilustración 49. S3T2P4.....	219
Ilustración 50. S3T2P5R1.....	221
Ilustración 51. S3T2P5R1'.....	222
Ilustración 52. S3T3P6R2.....	222
Ilustración 53. S3T3P1R2.....	226
Ilustración 54. S3T3P2R3.....	227
Ilustración 55. S3T3P2R2.....	227
Ilustración 56. S3T3P2R1.....	228
Ilustración 57. S3T3P3R1.....	228
Ilustración 58. S3T3P4R1a.....	229
Ilustración 59. S3T3P4R1b.....	230
Ilustración 60. S3T3P4R1c.....	231
Ilustración 61. S3T3P4R1d.....	232

RESUMEN

En el presente trabajo de grado se presenta y desarrolla una propuesta para el estudio de la función a través de situaciones de covariación dentro de eventos dinámicos que tiene como marco teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales (MTL) propuestos por Filloy (1999). Para ello se diseñó una propuesta de aula, la cual se aplicó en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta. La propuesta intentó potencializar, a través de tareas de covariación, el desarrollo del pensamiento variacional propuesto por el MEN (2006) ya que dicho pensamiento se caracteriza por el estudio de la variación y el cambio en diferentes contextos. Asimismo, dentro de dichas tareas de covariación se intentó estudiar el concepto de función, a través del uso y articulación de diversos registros de representación.

Luego de la implementación, se caracterizaron y analizaron las actuaciones de los estudiantes según los niveles de covariación de Carlson (2003), los sistemas matemáticos de signos y los aspectos matemáticos involucrados.

Finalmente, desde cada una de las componentes del MTL (formal, enseñanza, cognición y comunicación) se hicieron unas conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas; también se redactaron algunas limitaciones del estudio y unas recomendaciones para que sean tenidas en cuenta en posteriores investigaciones. Dentro de los resultados se pudo corroborar la posibilidad del estudio de la función a través de situaciones problema de covariación; igualmente la posibilidad de enseñar la función desde una perspectiva de dependencia y cambio sin la necesidad de acudir directamente al uso de fórmulas o definiciones.

Palabras claves: función, covariación, razonamiento covariacional, pensamiento variacional, Modelos Teóricos Locales, Sistema Matemático de Signos.

INTRODUCCIÓN

El poder asegurar en los estudiantes el aprendizaje de diferentes conocimientos matemáticos, ha sido uno de los propósitos de diferentes investigaciones en Educación Matemática. En particular, la enseñanza y aprendizaje del concepto de función ha sido una tarea compleja en tanto que, a pesar de que numerosas investigaciones han tratado de proponer alternativas al respecto, los resultados en las evaluaciones de los estudiantes en diferentes escenarios, muestran que las prácticas en el aula no se han modificado o no van a la vanguardia de los estudios que se han realizado. “La aprehensión del concepto de función no parece una tarea fácil, la gran cantidad de investigaciones realizadas con estudiantes para detectar obstáculos en el aprendizaje del concepto confirman la dificultad de aprensión del concepto” (Hitt, 1996, p. 246).

La revisión de la literatura, muestra que las dificultades mayores en el aprendizaje del concepto de función, son consecuencia de que en la enseñanza no se consideren aspectos como: un adecuado trabajo con los sistemas de representación, una reflexión continua de lo que se propone en las políticas de educación nacional y en algunas ocasiones, el poco conocimiento disciplinar que puedan tener los profesores.

La anterior situación pone de manifiesto la importancia de proponer un acercamiento a la enseñanza del concepto de función, y que a su vez, pueda impactar de forma directa en el aula. De este modo, el presente estudio, que se inscribe en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle hace énfasis en considerar, de forma sistémica, lo que la revisión de la literatura aporta y el diseño de una propuesta de aula que impacte las prácticas de enseñanza en la escuela, en particular, en la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo (Valle del Cauca).

En virtud de las dificultades y problemáticas de la enseñanza y aprendizaje en torno al concepto de función, este estudio presenta una propuesta de aula para estudiar el concepto de función desde una perspectiva covariacional. De esta manera, la pregunta que orienta este trabajo es: *¿Qué elementos o rasgos del concepto de función se identifican, en un grupo de estudiantes de grado 9º, a través del desarrollo de situaciones problema de covariación?*

El marco teórico y metodológico que permite la consolidación del diseño y aplicación de la propuesta de aula, es el de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, 1999); mientras que el razonamiento covariacional (Carlson, et al 2003), es el instrumento que permite clasificar las actuaciones de los estudiantes, lo cual, en primera instancia es insumo importante para el análisis de los resultados.

La documentación, el desarrollo y los resultados de esta propuesta se organizaron en cuatro capítulos, de la siguiente manera: En el primer capítulo se describen los elementos relevantes que permiten explicar la problemática y la forma en que esta se manifiesta. Posteriormente se encuentran los objetivos y la justificación, en la cual se explica el porqué es importante dar solución a la problemática. Seguidamente, se encuentran los antecedentes que consisten en el rastreo de investigaciones que se centran en tres aspectos (estudios sobre la función, investigaciones referentes a covariación y estudios del razonamiento covariacional). Al final de este capítulo se encuentra el *marco contextual*, el cual trata de describir las características académicas, sociales y geográficas de la Institución Educativa donde se hizo la intervención de aula.

En el segundo capítulo, se describen los aspectos teóricos que fundamentan a los Modelos Teóricos Locales; aquí se explica en qué consisten y cuál es su intención (observación y experimentación). Posteriormente, se detalla la determinación del MTL para el estudio de la función a partir de la covariación, especificando el aporte desde cada una de las componentes del MTL.

En el tercer capítulo se describen las etapas del diseño y desarrollo de la experimentación, es decir, se encuentra la descripción de la población, presentación y aplicación de las tareas, y los análisis de los resultados de los estudiantes, que surgieron de la implementación de las tres situaciones, cada una con tres tareas.

En el capítulo 4, se mencionan las conclusiones, reflexiones y recomendaciones didácticas para la escuela que van en concordancia con: los objetivos propuestos, los propósitos de las tareas, las componentes de los MTL, y las interpretaciones de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO

En este capítulo se describen los elementos relevantes que permiten explicar la problemática y la forma en que esta se manifiesta. Al final de la presentación del problema se plantea la pregunta la cual orientará el presente trabajo. Posteriormente se encuentra el objetivo general y los objetivos específicos. Seguidamente está la justificación, en la cual se explica el porqué es importante dar solución a la problemática. Luego, se encuentran los antecedentes que consisten en el rastreo de investigaciones que se centran en tres aspectos (estudios sobre la función, investigaciones referentes a covariación y estudios del razonamiento covariacional). Por último, se encuentra el marco contextual, el cual trata de describir las características académicas, sociales y geográficas de la Institución Educativa donde se hizo la intervención de aula.

1.1 Presentación del problema

En la literatura hay un acervo considerable de investigaciones sobre el concepto de función, específicamente, estudios asociados a su enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se puede citar estudios como los de Kaput, (1992) Dubinsky & Harel, (1992) Sierpinska, (1992) Carlson, (1998) Hitt, (1998) Retamal, (1998) y Higuera, (1994). En dichas investigaciones, además de caracterizar las distintas dificultades que tienen los estudiantes al abordar dicho concepto, también se propone que la enseñanza de la función debe hacerse desde una perspectiva variacional que privilegie la relación de dependencia entre magnitudes.

A pesar de estos y otros estudios sobre la enseñanza del concepto de función, en la actualidad, todavía se sigue abordando desde una perspectiva de correspondencia o de asignación. Además, su enseñanza todavía obedece a ideas netamente algorítmicas o estáticas. Es decir, el estudio de la función se hace desde una perspectiva algebraica, dando la fórmula, remplazando valores de entrada y obteniendo valores de salida que pueden ser resumidos en el llenado de tablas, que posteriormente pueden ser representados en el plano cartesiano; como si llenar el tablero de cálculos, fórmulas y números reflejara un verdadero acercamiento al concepto de función. Estas

situaciones, además de ser estáticas, están desligadas de verdaderos contextos de interpretación y análisis.

De acuerdo con lo anterior, aprender cualquier concepto matemático como el de función va más allá de las letras o de los símbolos que lo representan. Es por ello que seguimos observando que las matemáticas se siguen haciendo de forma estática, donde predomina la importancia por generar habilidades en la sintaxis y en los procesos algorítmicos.

No se puede desconocer que los estudiantes, además de cometer muchos errores en el manejo y tratamiento de funciones, no tienen claro dicho concepto; por consiguiente, enseñar y aprender este concepto es una tarea compleja, dispendiosa y de mucho cuidado, tal como lo expresan López & Sosa (2008)

La enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, la internación de este registro con otros, como el grafico, suele ser limitado a una simple ejemplificación. Por ello, se sugieren tratamientos alternativos del concepto, como el numérico, geométrico, etc., con especial énfasis en el aspecto discursivo para la resolución de problemas y la modelación de fenómenos (p. 317)

Ahora, los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas (1998) proponen que: “Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio”(p.51). Sin embargo, dicha propuesta no se concretiza en las propuestas de enseñanza para trabajar el concepto de función en el aula. En este sentido, el problema consiste en que actualmente el concepto de función, sólo se está enseñando desde una perspectiva de correspondencia o de asignación, y se está dejando por fuera la perspectiva variacional y de dependencia, es decir, se está dejando por fuera la relación que hay entre los patrones de variación y del comportamiento de los cambios.

Conociendo de forma general la problemática, en lo que sigue, se hace énfasis de forma explícita en cómo se manifiesta dicha problemática. Para esto, se consideran dos perspectivas, desde la enseñanza y desde el aprendizaje, las cuales representan procesos asociados a la forma como se está trabajando el concepto de función en el aula de clases.

Desde la enseñanza, tal como ya se mencionó, el trabajo en el aula está delimitado por procesos estáticos que disfrazados de algoritmos, esconden lo que realmente se debe considerar, como las relaciones de dependencia y el estudio serio y detallado de los cambios de magnitudes involucradas.

De otro lado, desde los procesos de enseñanza es importante tener en cuenta que un estudiante ha entendido o comprendido un concepto cuando es capaz de interpretarlo en diferentes registros de representación y además cuando sea capaz de explicitar las transformaciones que son consecuencia del cambio de un registro a otro.

El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación.
(Duval, 2004, p.62)

Pese a lo anterior, es frecuente que en la escuela, la función se aborde desde dos o tres registros de representación (algebraico, tabular y gráfico) de forma aislada, es decir, sin considerar las implicaciones que tienen los elementos variacionales de un registro en los de otro registro; dejando por fuera la variación de magnitudes y el estudio del cambio.

En este orden de ideas, a pesar de que el trabajo con distintos registros de representación se debe potenciar, no se trata sólo de realizar una conversión mecanizada entre un registro y otro. Es decir, así como de forma inmediata se puede pasar a la construcción de gráficas a partir de la representación algebraica de la función, se pueden establecer mecanismos a manera de pasos que guíen el proceso de extraer datos específicos de la representación cartesiana y ubicarlos en un lugar estratégico en un modelo de ecuación estándar o canónico para pasar del registro gráfico al algebraico. Por ejemplo, obtener la ecuación de una recta es consecuencia de hallar la pendiente y punto de corte. Este es sólo un caso donde el manejo de dos registros no es tal, que se puedan

develar las concepciones que permitan un acercamiento progresivo y potente al concepto de función, que privilegie el estudio del cambio.

En este sentido, Guzmán (1998) llevó a cabo un estudio con estudiantes de primer año de ingeniería respecto a las nociones relacionadas con funciones reales y el sentido que estas nociones tienen para dichos estudiantes. En este estudio se privilegiaron los registros: gráfico, algebraico y lengua natural, y como consecuencia de los resultados ella afirma lo siguiente:

En general, las respuestas analizadas muestran deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre los registros: algebraico, gráfico y lenguaje natural. Esto es una posible consecuencia de la enseñanza recibida por esos estudiantes. También se detectó la dificultad para relacionar; los estudiantes están poco familiarizados en las funciones de coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en lenguaje natural y, a la inversa, expresar un enunciado dado en lenguaje natural en términos de otro registro, y por supuesto los traslados del registro gráfico al algebraico. La preparación es insuficiente en este tipo de tareas; estas traducciones y traslados requieren aprendizaje, como ya se ha mencionado; no surgen como acciones espontáneas del sujeto. (p. 16)

Así pues, ni siquiera el estudio de una gráfica cartesiana puede asegurar el acercamiento dinámico a la función, si dicha gráfica sólo se considera como el conjunto de unas parejas ordenadas en un plano cartesiano. Si no se estudia el comportamiento de los cambios, la gráfica puede esconder la *covariación*. Cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes, la *covariación*, debe entenderse como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra. (Carlson, 2002).

Por otra parte, el quehacer de la enseñanza para un docente, está permeado por distintos recursos didácticos que acompañan o complementan su intervención directa con los estudiantes. Un ejemplo particular de un recurso usado con frecuencia es el libro de texto, que en muchas ocasiones se convierte en una fuente para preparar sus clases y actividades a proponer, por consiguiente, muchas de las definiciones y ejercicios son tomados de forma explícita de dicho texto escolar. Es por esta razón que los libros de texto pueden ser un indicador de lo que pasa en una clase promedio, y de ahí la importancia de estudiar y analizar la forma en que estos textos

presentan un concepto tan relevante para el desarrollo del pensamiento variacional, como lo es la función.

En la mayoría de los libros de texto se privilegia el concepto de función desde una perspectiva estática, donde la correspondencia y asignación son aspectos centrales bajo un enfoque conjuntista. Como consecuencia, se presenta una definición formal que propone una abstracción de los fenómenos de cambio, a través de la generalización de cuantificaciones y notaciones matemáticas. Aunque se suelen presentar aplicaciones, estas aparecen desligadas de la necesidad de introducir el concepto, es decir, después de trabajar lo algorítmico se establecen ejemplos que sirven de guía para resolver problemas de aplicaciones, lo cual implica la contemplación, desde la instrucción, de la discriminación de unas estrategias estandarizadas. De esta manera, la covariación difícilmente se logra trabajar desde la propuesta de enseñanza de los textos.

En general, el estudio de la función cuadrática en el salón de clases atiende a una definición formal, para luego estudiar algunas propiedades de la ecuación y la gráfica (vértice, crecimientos y decrecimientos...), y, por último, realizar algunas aplicaciones. Pocas veces el estudio inicial de la función cuadrática en el aula y los libros de texto incluye una interpretación de variación de su crecimiento y concavidades [con situaciones de variación] (Villa, 2011, p. 11. Citado en Ávila 2011)

Igualmente, después de un estudio de las definiciones y tratamientos que aparecen en los textos escolares usados en la formación universitaria de matemáticos, Porras (2013) afirma que “En textos actuales se encuentran variaciones de estas mismas definiciones, pero lo común en todas es la función como relación, como terna o como conjunto de pares ordenados” (p. 86).

El texto escolar puede ser potente en la medida en que el docente pueda orientar adecuadamente el uso por parte de los estudiantes, y en la medida en que sus concepciones de lo que es enseñar y lo que es la Matemática, pueda primar ante el valor epistémico que quiera ofrecer el texto. De esta manera, es importante que el docente en su formación e intervención en el aula, tenga en cuenta la historia y epistemología del concepto de función, para que pueda prever ciertas dificultades que se puedan presentar en los estudiantes, cuando los obstáculos epistemológicos se vean reflejados en el aula como obstáculos didácticos; de tal manera que más que evitar la

aparición de esos obstáculos, los pueda orientar adecuadamente para lograr procesos de abstracción mediados por la metacognición.

En cuanto a lo histórico epistemológico del concepto de función (como se mencionará en el capítulo 2), este nace de la necesidad de caracterizar, describir y matematizar los fenómenos de cambio que desde lo empírico requieren ser cuantificados para predecir resultados y regularidades; sin embargo, a medida que se ha dotado de más abstracción y complejidad, dicho concepto ha ido perdiendo su carácter dinámico y se ha entendido erróneamente como si fuera algo estático que sólo obedeciera a registros algebraicos. Porras (2013) realiza un recorrido histórico epistemológico del concepto de función y concluye que

Es importante, después de este extenso recorrido por la evolución del concepto de función, no dejar de tener en cuenta que en las definiciones actuales ya nada queda de cantidades que fluyen produciendo magnitudes variables, ni de puntos que se mueven sobre curvas, ni la idea de variabilidad. La abstracción definitivamente se tomó a la definición y, esto, muy seguramente la ha alejado de la comprensión de nuestros estudiantes. (p. 86)

Todo lo mencionado hasta el momento (desde el proceso de enseñanza), tiene implicaciones directas sobre el proceso de aprendizaje, es decir, en la forma en que el estudiante asume un conocimiento y el sentido que le da. En este orden de ideas, es importante mencionar que el problema objeto de este estudio, también se relaciona de forma directa con los obstáculos, dificultades y errores (Socas, 1997) que puedan presentar los estudiantes en torno al concepto de función y lo que de este se debe entender para asegurar un aprendizaje significativo del mismo.

Las dificultades que tienen los estudiantes al aprender el concepto de función, se pueden sustentar desde el resultado de varias investigaciones, en particular la investigación realizada por López & Sosa (2008), que trata de identificar algunas dificultades que influyen en el aprendizaje del concepto de función, en esta investigación se aplicó un instrumento de intervención en aula con estudiantes de secundaria y después se reportaron algunos factores que influyen en dichas dificultades, a saber:

- Distinguir entre variable e incógnita.

- Enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables.
- El manejo operacional arbitrario con funciones, como si fueran ecuaciones, en el desarrollo del tema por parte del profesor.
- Discernir entre funciones y ecuaciones.
- Que el estudiante enuncie la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se define una función.
- Que el estudiante obtenga la inversa de una función y su gráfica.
- Utilizar diferentes representaciones de funciones.
- Obtener una expresión analítica o gráfica de una función que modele un fenómeno.
- No se hace explícito el carácter unívoco de las funciones.
- Analizar el comportamiento e interpretar la gráfica de una función (pp. 313-314)

El concepto de función ha perdido su verdadera potencialidad en procesos de modelación y en fenómenos dinámicos, pues tampoco debemos dejar a un lado otros elementos inmersos asociados al de función, como el dominio, el rango, lo que cambia ya sea creciendo o decreciendo, la relación o coordinación del valor de una variable con los cambios en otra y la coordinación de la razón de cambio (Carlson, et al 2002). El concepto de función ha oscurecido su esencial significado desde su carácter variacional hacia una acción de correspondencia entre variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático (Freudenthal, 1983 p.497; citado en Farfán & García 2005).

Con lo mencionado hasta el momento, se evidencia que la revisión de la literatura, además de reportar ciertas dificultades en el concepto de función, recoge reflexiones y propuestas de enseñanza que intentan asumir la función desde una perspectiva variacional; en particular, se proponen algunos estudios donde el análisis de los cambios puede ser relevante en el estudio de la función. De esta manera, es viable preguntarse sobre la influencia que puede llegar a tener la covariación en la comprensión del concepto de función y algunos elementos o rasgos asociados como dominio, rango y sistemas de representación etc.

Teniendo en cuenta la problemática descrita, la poca consideración del comportamiento de los cambios en el estudio del concepto de función, y la consideración de un acercamiento distinto a dicho concepto; en este trabajo se trata de dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Qué elementos o rasgos del concepto de función se identifican, en un grupo de estudiantes de grado 9º, a través del desarrollo de situaciones problema de covariación?*

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Identificar y caracterizar en un grupo de estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo, algunos rasgos y elementos del concepto de función a través del desarrollo de situaciones problema de covariación.

1.2.2 Objetivos específicos

- Determinar como marco de referencia un Modelo Teórico Local – MTL - sobre la función a través de las componentes de enseñanza, de competencia formal, de cognición y comunicación, para el diseño y experimentación de situaciones de covariación.
- Desarrollar el proceso de experimentación a través del diseño e implementación de una propuesta de aula que involucra situaciones problema de covariación con un grupo de estudiantes de grado 9°.
- Caracterizar, según el análisis de las actuaciones de los estudiantes, algunos rasgos y elementos de la función según en el trabajo con actividades de covariación
- Aportar reflexiones teóricas y metodológicas a la enseñanza de la función, desde la covariación a la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta.

1.3 Justificación

De acuerdo con la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), el desarrollo del pensamiento variacional no es exclusivo de los grados octavo y noveno, por el contrario, debe movilizarse a lo largo de todo el ciclo escolar, desde el grado primero hasta el grado undécimo.

Según los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, el estudio del cambio se puede hacer a través del análisis de fenómenos de variación, que posteriormente puede ser representado en gráficas y tablas. De esta manera, se podría tener acercamientos al desarrollo pensamiento variacional y al concepto de función, entendido no como una relación de correspondencia sino como una relación de dependencia, inmerso en fenómenos dinámicos. “Este pensamiento

[variacional] cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas”. (MEN 2006, p.66)

Igualmente, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), además de proponer tipos de pensamientos matemáticos (entre ellos el variacional), menciona la importancia de estudiar los procesos de variación desde distintos contextos (el de otras ciencias, el de la vida cotidiana y el de la propia matemática). La variación estudiada desde diferentes fenómenos y contextos permite poder trabajar y analizar los cambios asociados a las diferentes magnitudes implicadas, es decir, se puede dinamizar lo que la prematura abstracción muchas veces no permite.

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2003, p. 6).

Ahora bien, dentro de los conceptos propios del pensamiento variacional están: constante, variable, función, razón, dependencia e independencia de una variable con respecto a la otra; es decir, la función está necesariamente permeada por cantidades que pueden estar cambiando o covariando. En este sentido Doorman y Gravemeijer (2009) afirman que la mayoría de las dificultades de los estudiantes en los cursos de Cálculo son consecuencia del poco trabajo significativo en términos del adecuado desarrollo del pensamiento variacional desde la educación secundaria.

Así mismo, otros autores como Carlson et al (2003), afirman que los estudiantes ingresan a la educación universitaria con dificultades de comprensión del concepto de función y que incluso, aquellos estudiantes que han reportado buen desempeño escolar en la secundaria, también muestran dificultades cuando de enfrentarse a situaciones dinámicas de fenómenos de cambio, se trata. Igualmente, las investigaciones de Kaput (1994), Rasmussen (2000), Zandieh (2000), llaman la atención sobre la importancia de modelación de relaciones funcionales para la interpretación de modelos de eventos dinámicos y para la comprensión de los conceptos principales del Cálculo.

De acuerdo con lo mencionado hasta el momento, tanto desde el MEN como desde las investigaciones ya citadas, se considera el concepto de función como uno de los contenidos principales en el desarrollo del pensamiento variacional. Además, dicho concepto se considera como soporte fundamental y básico para la adecuada comprensión de otros conceptos asociados al cálculo diferencial e integral. Retomando a Carlson, et al en su investigación con estudiantes universitarios, propone un marco conceptual para estudiar el *razonamiento covariacional*¹, el cual incorpora cinco acciones mentales y cinco niveles, los cuales se describen en el capítulo 2. De esta manera, Carlson, et al propone en dicha investigación algunos puntos de discusión como:

- Existen estudiantes con un destacado desempeño (inclusive en cursos de Cálculo) pero con una comprensión superficial de ideas y conceptos fundamentales que son prerrequisitos para futuros cursos en matemáticas y ciencias.
- El fracaso para monitorear esas comprensiones y habilidades de razonamiento presagian consecuencias negativas para los estudiantes.
- Los resultados subrayan la necesidad de que los estudiantes tengan oportunidades de pensar sobre la naturaleza covariacional de las funciones en eventos dinámicos de la vida real.
- Los currículos en los niveles secundarios y universitarios deberían tener en cuenta la complejidad de adquirir el conocimiento (razón instantánea) y deberían proveer experiencias curriculares que sustenten y promuevan esta habilidad de razonamiento.
- La investigación ha revelado que la idea básica de covariación es accesible a los niños desde los niveles elementales y medio (Confrey & Smith, 1994 citado en Carlson, et al 2003)

Adicional a la investigación de Carlson, et al se pueden citar otras investigaciones en torno a la enseñanza de los cursos de Cálculo, que ponen en evidencia que estos cursos se desarrollan en torno al estudio de propiedades o aspectos asociados al concepto función, tales como: tipos de funciones, dominio, rango, derivada de una función, operaciones con funciones, etc.; siendo

¹Actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra. Carlson, et al (2003)

dicho concepto uno de los pilares más importantes para el Cálculo y la modelación de situaciones y fenómenos en varios ámbitos profesionales y de la ciencia; así, los resultados y procesos en distintas ciencias pueden verse afectados cuando hay una inadecuada conceptualización y aplicación del concepto.

...si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos (...) y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en el campo del Cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento...(Artigue, 1995, p. 97).

De acuerdo con lo mencionado, se hace necesario conocer y entender las causas que propician la falta de comprensión del concepto de función, para tener así un panorama general de cuáles son los aspectos que se deben tener en cuenta en el diseño y aplicación de experiencias significativas que propendan por el adecuado desarrollo del pensamiento variacional.

Diferentes trabajos de investigación en Educación Matemática, en particular el de Vrancken y Engler (2009) muestran cómo cada vez se le da más importancia al análisis de la variación y la covariación como eje básico de soporte de los conceptos básicos del Cálculo; planteando a los estudiantes actividades de análisis variacional y covariacional, tanto de la variable independiente como de la función misma, con el propósito de poder considerar y determinar razones de cambio que puedan ser representadas como funciones que modelen las variaciones entre la variable independiente, la función y las variaciones de la función. Es decir, se hace énfasis en el considerar cambios de cambios o cómo varían los cambios.

De forma paralela a las investigaciones citadas, hay otros aspectos que justifican la importancia de trabajar la función desde la covariación, un ejemplo de tales aspectos es la revisión de los resultados de las pruebas externas en Colombia. De esta forma, se citan dos pruebas específicas, la prueba PISA y la prueba Saber. La prueba PISA (diseñada por la OECD), tiene como propósito evaluar conocimientos y habilidades en estudiantes de 15 años que se encuentren terminando su ciclo de secundaria. Esta prueba se aplica cada 3 años y evalúa las áreas de lectura, matemáticas y ciencias. Para el caso específico de la prueba de matemáticas, PISA evalúa las competencias de: i) comunicación, ii) matematización, iii) representación, iv)

razonamiento y argumentación, v) planteamiento de estrategias para la solución de problemas, vi) uso de lenguaje simbólico, formal, técnico y operaciones, y vii) uso de herramientas matemáticas (físicas o digitales) (OECD, 2014).

Se toma como referencia la prueba PISA aplicada en el 2012 para Colombia, donde se evidencia que el 74% de los estudiantes no alcanzó el nivel mínimo que garantiza el dominio de las competencias básicas para la vida en la prueba de matemáticas (OECD, 2014). Además, sólo el 0,3% se ubicó en el nivel avanzado de la misma prueba. Esto refleja que los estudiantes con bajo desempeño no poseen las competencias mínimas para desenvolverse en diferentes aspectos de la vida (personal, laboral, familiar, ciudadana, entre otros), pues la prueba evalúa, más que contenidos, competencias: la matemática aplicada en situaciones cotidianas (Ayala & García, 2015).

A continuación se detalla el resultado de la prueba PISA en Colombia, en particular, en las cuatro principales ciudades, notándose que Cali, es la que más bajos resultados presenta.

Ilustración 1. Resultados de la prueba PISA (2012) por ciudades, en Colombia.

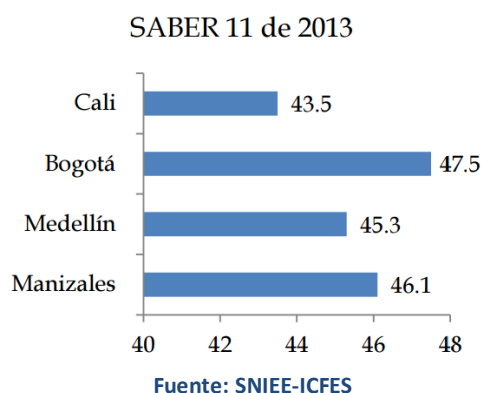


De forma paralela, está la prueba Saber, la cual es diseñada y calificada por el ICFES² (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior) y es determinante para el ingreso de los estudiantes a la mayoría de las universidades. Esta prueba se propone en correspondencia con los requerimientos expresados en el marco curricular nacional y está alineada con los parámetros

² El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación Superior- ICFES, es una entidad adscrita al Ministerio de Educación Nacional la cual está encargada de promover y evaluar la educación colombiana en todos sus niveles. (tomado de Wikipedia)

internacionales vigentes al considerar dentro de sus competencias, la comunicación matemática, la representación, la resolución de problemas cotidianos y matemáticos y el razonamiento y argumentación para la resolución de problemas. Específicamente, en la prueba Saber 11° para el año 2013, para el ICFES, el porcentaje de estudiantes con bajo desempeño es del 44% (en promedio para las tres competencias de matemáticas). De forma análoga que con la prueba PISA, a continuación se presentan los resultados en las cuatro ciudades principales, teniendo de nuevo a Cali entre las de menor puntaje promedio.

Ilustración 2. Resultados de la prueba Saber 11 (2013) por ciudades, en Colombia.

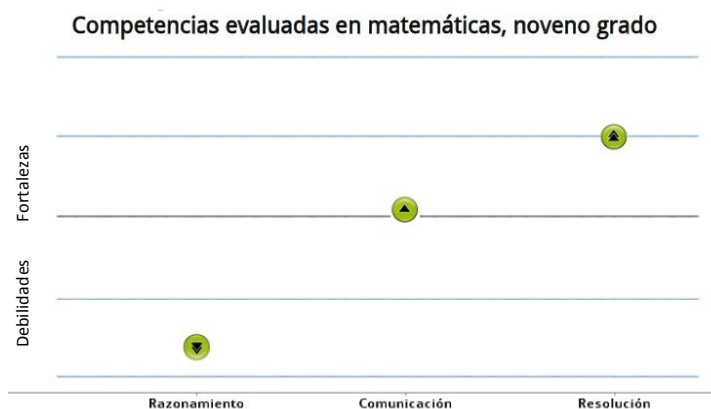


Para particularizar, se muestran los resultados de la prueba saber 9° para la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta³ del municipio de Yumbo, Valle. En general, los resultados en los últimos 3 años han estado por debajo del promedio nacional. Se cita el caso de la prueba Saber 9 aplicada en el 2012. Los resultados arrojan que el 86% de los estudiantes se encuentran en insuficiente o mínimo. Las mayores dificultades se encuentran en:

- Razonamiento – Comunicación
- Numérico –Variacional

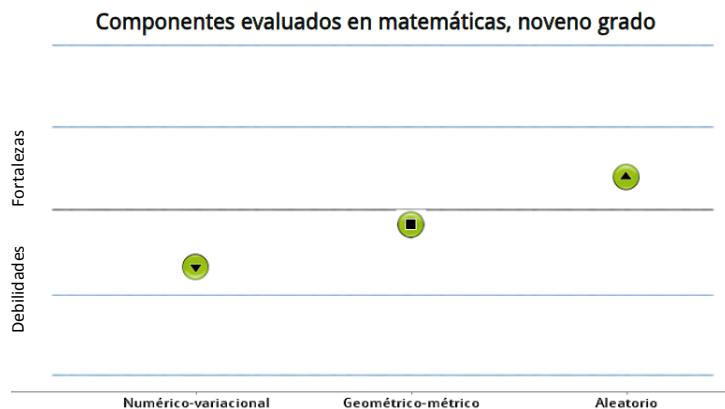
³Institución donde se aplicó la intervención de aula, y se tomó la muestra de estudiantes que fueron objeto de estudio.

Ilustración 3. Resultados de la prueba Saber 9 I.E. Policarpa Salavarrieta



Fuente: SNIEE-ICFES

Ilustración 4. Resultados de la prueba Saber 9 I.E. Policarpa Salavarrieta



Fuente: SNIEE-ICFES

Con lo anterior, se puede evidenciar que es importante trabajar el componente numérico y variacional ligado a las competencias de razonamiento y comunicación; todo esto enmarcado en fenómenos de la vida real, en el estudio de tablas, gráficas, y poder conjeturar y comunicar a través de expansiones discursivas.

Ahora, con el presente estudio, también se intenta disminuir la brecha o los malos resultados de los estudiantes en pruebas externas, ya que generalmente las preguntas están formuladas de tal manera que su contenido o enunciado está expresado en forma verbal, donde no aparecen

palabras o elementos tácitos que desencadenen en que el estudiante realice una operación o algoritmo predeterminado.

Finalmente, esta propuesta intenta plantear actividades de covariación para trabajar el concepto de función en los estudiantes, alejados un poco de lo tradicional⁴, pasando a situaciones dinámicas donde el estudiante pueda poner en contexto sus conocimientos matemáticos. Se espera entonces que este tipo de actividades y las observaciones de sus aplicaciones, que de ellas se deriven, puedan servir de gran utilidad en la obtención de un mayor aprendizaje, en la medida que sirvan de referente para los profesores en ejercicio e investigadores que puedan tomar este estudio como un modelo teórico inicial, como punto de partida para otro trabajo de investigación relacionado.

1.4 Antecedentes

En los antecedentes se hace énfasis en tres aspectos: lo referente a estudios sobre la función, las investigaciones referentes a covariación, y los estudios en razonamiento covariacional.

En Colombia, el concepto de función se enseña en octavo y noveno grado de la educación secundaria, especialmente este concepto se aborda con más profundidad en noveno grado con: la función lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica, esto debido a que en octavo grado la enseñanza se enfoca más en la parte algebraica (operatoria).

Las investigaciones sobre el aprendizaje del concepto de función no sólo se han hecho en estudiantes de secundaria, también se han hecho en estudiantes de primeros semestres de la universidad como por ejemplo Villa (2008) quien ha tomado como referente el marco teórico propuesto por Carlson, et al (2002).

En cuanto a la educación universitaria, Villa (2008) realizó una investigación con estudiantes de educación formal para adultos del Instituto Tecnológico Metropolitano ITM y estudiantes de la Universidad de Antioquia, donde plantea una propuesta didáctica que pretende potencializar

⁴ Cuando se habla de tradicional, se alude a la enseñanza de la función privilegiando sólo la relación de correspondencia.

algunos aspectos de la función lineal y cuadrática. Para ello, se apoya en lo que plantean Posada & Villa, (2006) quienes proponen abordar el concepto de función desde la variación, la modelación y los sistemas de representación. Además, para el diseño de su propuesta didáctica, tiene en cuenta las definiciones de función lineal y cuadrática de Posada & Villa (2006) “Se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante” (p.248) “Se llama función cuadrática a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio varía linealmente” (p.248).

Con todo lo anterior, Villa diseña una actividad contextualizada en la caída libre de un objeto desde un edificio y propone de tres momentos. El primer momento está diseñado para que los estudiantes se hagan una idea mental de la situación. En el segundo momento se plantea la experimentación con un cronómetro y una regla graduada; con ello se espera construir un gráfico cartesiano del comportamiento de las cantidades, permitiendo identificar algunas características de la razón de cambio. En el tercer momento se utiliza la simulación del fenómeno con un software, con ello se espera la construcción de un modelo algebraico. Finalmente, dentro de algunas conclusiones de la investigación Villa plantea que es posible alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función desde una perspectiva variacional.

Como ya se ha mencionado anteriormente, Posada y Villa (2006) también proponen una aproximación variacional a la función lineal; en sus investigaciones estos autores llaman la atención sobre la necesidad de que converjan elementos asociados a los sistemas de representación y a la modelación matemática. Así mismo, cuestionan el excesivo énfasis que se hace en la definición algebraica de la función lineal en la introducción al concepto de función; introducir este concepto de esta manera no siempre permite interpretar factores asociados a la variación.

De otro lado, López & Sosa (2008) Trataron de identificar algunas dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. Además, identificaron los errores cometidos por los alumnos en el momento de trabajar con este concepto; así mismo reportaron algunos factores de carácter cognitivo, epistemológico y didáctico que influyen en los estudiantes en cuanto al aprendizaje del concepto de función.

La investigación se hizo en tres etapas, en la primera etapa se hizo una revisión documental de las prácticas de enseñanza y evolución del concepto de función; en la segunda etapa se diseñaron unos cuestionarios basados en los errores reportados por otras investigaciones y en la tercera etapa, se analizaron e interpretaron los resultados obtenidos de la implementación que se le hizo a los estudiantes de bachillerato. Estas son algunas de las dificultades que encontraron en el estudio de la función:

- Distinguir entre variable e incógnita.
- Discernir entre funciones y ecuaciones.
- El manejo operacional arbitrario con funciones, como si fueran ecuaciones, en el desarrollo del tema por parte del profesor.
- Que el estudiante enuncie la regla de correspondencia que relaciona los elementos de dos conjuntos sobre los que se define una función.
- Utilizar diferentes representaciones de funciones.
- Analizar el comportamiento e interpretar la gráfica de una función.

En la investigación también se reportan algunos factores de naturaleza cognitiva, epistemológica y didáctica que influyen en ciertas dificultades identificadas. Además, a partir de las respuestas de los estudiantes, estos son algunos de los errores asociados a la dificultad para discernir entre función y ecuación:

- Concebir una función como ecuación.
- Considerar que el dominio de una función siempre es el conjunto de números reales.
- Identificar variables dependientes como independientes, y viceversa, en un fenómeno, problema o expresión analítica de una función.

Dentro de sus conclusiones más significativas se menciona que los literales empleados tanto en las ecuaciones como en las funciones suelen ser las mismas, por lo tanto, sería interesante utilizar literales distintos cuando se trate de variables y cuando se trate de incógnitas. La utilización de diferentes sistemas de representación para la función de forma aislada o sin conexión, no favorece la construcción del concepto de función. Cuando se da la definición mediante conjuntos se limita y esconde el carácter variacional que posee la función. Por último, se menciona que los

estudiantes suelen reconocer las variables que intervienen en un fenómeno, pero se les dificulta plantear fenómenos de carácter variacional.

De la Universidad del Valle se toman en consideración dos trabajos, el primero se titula *El concepto de función en la transición bachillerato a la universidad*, por Fabián Porras Torres (2012) dentro de este trabajo se encuentra la hipótesis de que el concepto de función es importante en los procesos o problemas matemáticos y en la constitución de otros conceptos. También se encuentran los actos de comprensión y los obstáculos asociados, sobre lo que es comprender un concepto matemático. Dentro de algunos de sus resultados, Porras indica que los estudiantes llegan con un concepto de función insuficiente, el cual no les permite responder a las demandas matemáticas que les plantearán los cursos de Cálculo diferencial e integral. Además, dice que los estudiantes llegan a la universidad con limitaciones en la comprensión de los conceptos soporte como el de conjunto y de las reglas de correspondencia. Finalmente, menciona que en la secundaria se pueden trabajar numerosas situaciones de otras ciencias que se modelan a través de funciones, como por ejemplo, escalas de temperatura, fenómenos térmicos, cinemáticos, dinámicos, hidrostáticos, etc. Si se toman como referencias estas situaciones, se puede contribuir enormemente al fortalecimiento interpretativo del significado del concepto de función, a la vez que posibilita la integración del trabajo con otras ciencias; con ello, el concepto de función se despoja de una concepción abstracta y estática.

El segundo trabajo se titula *Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional*, de Noreña (2012) este trabajo propone la enseñanza del concepto de funciones racionales a través de la caracterización de los conceptos de dominio, comportamiento asintótico y equivalencia de funciones, con el fin de desarrollar el pensamiento variacional en estudiantes de noveno grado. Para lograr esto, se presenta una serie de situaciones, de las cuales se tratará de inferir una propuesta de cómo pueden ser abordados algunos conceptos entorno a la función. Respecto sus resultados, se encontró que el empleo de más de un tipo de representación alrededor de los objetos de estudio, permitió generar situaciones donde lo algorítmico no es lo primordial, sino que se le dio cabida a procesos de reflexión y de argumentación. Asimismo, se rescata el registro gráfico como herramienta para que los estudiantes exploren, relacionen y

reconozcan ciertas características y patrones de las funciones racionales, y porque no, que los estudiantes puedan plantear sus propias conjeturas o investigaciones.

Por otra parte, la revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), publicó un artículo sobre los *Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes*, de Ismenia Guzmán R. (1998) este estudio se hizo con 75 estudiantes de primer semestre de ingeniería de un curso de Cálculo diferencial. Tal estudio trató de inferir el cómo inciden los diferentes registros de representación en el aprendizaje de algunas propiedades de las funciones. Para ello, se hizo un análisis de las repuestas de los estudiantes, pues es a través de estas, que se puede inferir el sentido que le están dando a las nociones asociadas al concepto de función. Guzmán indica varias reflexiones y conclusiones, pero entre las más notables menciona que los estudiantes muestran deficiencias conceptuales (tal vez por la enseñanza recibida), de ahí que se les dificulte la coordinación de diferentes registros de representación. Además, propone enfrentar a los estudiantes a situaciones o problemas donde sea necesario la conversión de registros de representación semiótica (tarea creativa para los profesores) con el fin de favorecer los aprendizajes y el desarrollo del pensamiento conceptual, asociado a la correcta comprensión y establecimiento de relaciones entre conceptos afines.

Después de realizar un breve recorrido por los antecedentes, en cuanto al trabajo con el concepto de función desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje, es importante hacer énfasis en uno de los enfoques que más ha tomado auge para contemplar su enseñanza y es el de abandonar por completo la introducción estática. En este orden de ideas, a continuación se citan algunos trabajos de investigación que proponen el estudio de la función desde una perspectiva variacional o de covariación.

La covariación, entendida como la comparación de dos valores de una magnitud respecto a dos valores de otra, ha sido propuesta como prelude al concepto de función por Hitt & Morasse (2008), quienes reportan los resultados de un trabajo de investigación en el marco de un acercamiento a la enseñanza de las matemáticas a través del uso de situaciones problema y a través de una metodología de aprendizaje en colaboración, debate científico y auto reflexión (ACODESA, ver Hitt, 2007). Más allá de la metodología y enfoque de este estudio, lo

importante es manifestar que se muestra con detenimiento una experimentación para promover la construcción del concepto de covariación (Carlson et al., 2002) en estudiantes de 3° de secundaria en Québec y cómo la misma actividad (situación problema) puede ser utilizada en la formación de profesores a nivel universitario. Se propusieron cinco actividades (situaciones problema) a dos grupos de secundaria durante 13 sesiones. Los alumnos utilizaron material manipulable (cordón, alambre para soldar, palillos,...) en algunas de las actividades, esto les ayudó en sus procesos de modelación matemática, en particular en las representaciones funcionales que los condujeron, de manera natural, hacia las representaciones institucionales⁵ (ver Hitt, 2004; Hitt, González-Martin & Morasse, 2008 et González-Martin, Hitt & Morasse, 2008; Post, 1981). La población, fue de varios grupos de segundo de secundaria; como producto se obtuvo una tesis de maestría, (ver Passaro, 2006 y Hitt & Passaro, 2007). Las situaciones propuestas fueron: El fotógrafo, El explorador, El jacuzzi, Los cuadrados en movimiento y Las sombras. Las dos primeras tenían como objetivo principal promover la producción de representaciones funcionales (espontáneas) de los alumnos y, a partir de la segunda situación, las representaciones estándares comenzaban a ser utilizadas por los alumnos. Como una de las conclusiones importantes está el hecho de que los estudiantes pudieron tener un acercamiento importante al desarrollo del concepto de covariación, el cual consideran (los autores) fundamental para la construcción del concepto de función.

De otro lado, Carrasco, E. (2013) en un trabajo de investigación doctoral, *Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo*, delimita un estudio centrado en minimizar las dificultades que tienen los estudiantes al realizar representaciones funcionales (fundamentalmente gráficas), que contemplan al tiempo como una de las variables. El trabajo reconoce que los sistemas conceptuales, incluso los más abstractos, se organizan sobre la base de metáforas conceptuales, que ayudan u obstaculizan el trabajo con los objetos matemáticos. El propósito del estudio es identificar esas metáforas conceptuales necesarias para interpretar las gráficas distancia-tiempo y aquellas metáforas cotidianas presentes en los estudiantes, con el fin de establecer obstáculos en el trabajo con este tipo de gráficas. Uno de los resultados importantes es el reporte de significados y representaciones diversas para el tiempo y

⁵ Proceso de discusión y validación de los conceptos con ayuda del profesor.

se constata que tanto la construcción como interpretación de gráficas en función del tiempo, no son posibles sin unas convenciones que impliquen significados e interpretaciones para los especialistas y la comunidad educativa. Esta es una apuesta por tratar la función como variación, más allá de los paradigmas que pueda haber con la noción del tiempo como una de las variables involucradas.

Ahora, en procura de alejarse de visiones y trabajos donde la función se considera estática, se propone una perspectiva dinámica que implica el poder observar los cambios, variaciones y relaciones de dependencia que se esconden en algunas de las representaciones usuales, especialmente las simbólicas y gráficas. Es así, como han habido estudios que involucran el uso explícito de tecnología distinta al lápiz y papel, es decir, el uso de software dinámicos. En esta perspectiva, se pueden identificar trabajos importantes tanto con estudiantes como con profesores en formación, donde lo que impera es poder trabajar la covariación de cantidades involucradas en una función.

Por un lado, se puede citar a Villa (2013) quien estudia (bajo la modalidad de estudio de casos con cuatro estudiantes) la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada; empleando los software dinámicos GeoGebra y Modellus. Los resultados de esta investigación resaltan la importancia del estudio de la derivada a través de contextos en los cuales se observe la necesidad de correlacionar variables y la manera como ellas covarían. Igualmente, se exhiben algunas reflexiones en torno a algunos aspectos que intervienen en la comprensión de la derivada desde una aproximación variacional. En esta investigación se destaca la importancia de las consideraciones de tasas de variaciones medias como preámbulos a las instantáneas y posterior acercamiento a la noción de derivada. Asimismo, se destaca la importancia de los contextos y el uso de software, no sólo para recrear el ambiente de un movimiento, sino también porque mediante su manipulación, los estudiantes pueden observar diferentes registros de representación de manera simultánea y así, podrán aproximarse a una comprensión de la tasa de variación instantánea.

De otro lado, Valero, et al (2010) realiza un estudio de la covariación con 13 profesores universitarios usando tecnología. Se analizaron sus producciones relacionadas con cuatro

enunciados verbales referidos a la rapidez de variación antes y después de que desarrollaran actividades de laboratorio usando tecnología de calculadoras graficadoras y diversos sensores de parámetros físicos para obtener y analizar gráficas cartesianas generadas en tiempo real. El propósito fue movilizar en dichos docentes elementos que les permitieran resignificar los contenidos asociados al análisis gráfico de funciones, en términos del cambio y la variación. De las conclusiones más relevantes del estudio está la importancia de implementar más cursos-talleres aprovechando las ventajas que ofrecen las tecnologías digitales para que los docentes puedan establecer vínculos fuertes entre las nociones fundamentales del Cálculo y algunos fenómenos físicos asociados que posibiliten el desarrollo de ideas variacionales. Esto, con consecuencias directas sobre los estudiantes, quienes tendrán profesores con otras alternativas de enseñar el Cálculo y en particular, el concepto de función.

Además de las anteriores investigaciones, se encuentra la de Villa & Vahos (2010), quienes muestran cómo a través de la interacción de un colectivo de investigadores con el software GeoGebra surgieron algunas ideas para el diseño de estrategias que potencian el desarrollo del pensamiento variacional. El estudio consideró dos episodios en el diseño de las situaciones que se utilizaron con los estudiantes que intervinieron en la investigación. Dichos episodios son, La comprensión de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada & La variación del “segmento central” de una elipse. Los resultados dieron lugar a conclusiones relacionadas con las bondades del uso de software dinámicos, sin embargo, de estas, a continuación se cita una de las que alude al concepto de variación.

En el proceso de diseño de las situaciones atravesamos por diferentes momentos que parecen involucrarse en el desarrollo del pensamiento variacional a través del uso de un software como el GeoGebra, a saber: captación y descripción de una relación, creación de una estrategia, construcción de herramientas, surgimiento de conjeturas, construcción de representaciones gráficas y algebraicas de tales relaciones, refutación o demostración formal de las conjeturas. (p. 525)

Hasta el momento, se han caracterizado algunas investigaciones en donde el estudio de la variación y covariación se consideran claves para la comprensión del concepto de función. Pues bien, asimismo, hay tendencias teóricas que contemplan el estudio de esa covariación a través del razonamiento covariacional (Carlson, et al 2003), quien lo define como “el [conjunto] de

actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 124). Este estudio se fundamenta en resultados de Cottrill et al. (1996) Kaput, (1992) Thompson, (1994) y Zandieh, (2000) quienes han declarado que la visión de función como covariación es esencial para la comprensión de conceptos del Cálculo. Las dificultades de los estudiantes para aprender el concepto de límite se han vinculado a habilidades de razonamiento covariacional empobrecidas. Al describir su marco conceptual para analizar la comprensión que los estudiantes tienen de la derivada, Zandieh (2000) también sugirió que es esencial una visión de la función como covariación de los valores de entrada con los valores de salida. En su marco, la investigadora estableció que la noción de la función derivada resulta de covariar los valores de entrada de la función derivada con los valores de la razón de cambio de la función original. Thompson (1994) sugirió que el razonamiento covariacional es fundamental para la comprensión del teorema fundamental del Cálculo por parte de los estudiantes.

En general, estos estudios sugieren que el razonamiento covariacional es fundamental para comprender conceptos principales del Cálculo y que los currículos convencionales no han sido efectivos para promover esta habilidad de razonamiento en los estudiantes. Teniendo en cuenta estos estudios como base, Carlson investigó la complejidad de construir procesos mentales que involucren la razón de cambio a medida que ella cambia continuamente en una relación funcional. En otras palabras, Carlson detalla un marco conceptual para investigar el razonamiento covariacional, dando como resultados unas categorías llamadas Acciones Mentales y Niveles de Razonamiento Covariacional, que corresponden a unos comportamientos asociados de los estudiantes durante sus actuaciones, y por consiguiente, permite clasificar a los estudiantes de acuerdo a unos niveles de comprensión y habilidades.

Teniendo en cuenta el marco conceptual desarrollado por Carlson, en Colombia hay algunas investigaciones que trabajan la covariación bajo el marco del razonamiento covariacional, entre estas está Guacaneme et al (2012), Hernández, Galindo, & Santana (2003), Villa et al (2013) quienes han desarrollado experiencias relacionadas con el razonamiento covariacional bajo el marco conceptual que propone Carlson. Dichas experiencias se han caracterizado por el acompañamiento a profesores en ejercicio con el propósito de que reflexionen y pongan en

escena actividades de covariación o variación conjunta para estudiantes de básica primaria y básica secundaria. De estas experiencias se destaca: el aporte en la formación continua de los profesores, la importancia de trabajar en el desarrollo del pensamiento variacional a partir de fenómenos de cambio y la evidencia de que el desarrollo del pensamiento variacional es transversal al currículo, de tal manera que el razonamiento covariacional en edades tempranas (básica primaria) puede converger en que los estudiantes reconozcan (con su respectivo grado de complejidad) algunos significados de razón de cambio y su comprensión como una comparación y como una tercera cantidad que aporta al entendimiento de la manera como covarían las cantidades.

Ahora, en cuanto a las investigaciones realizadas en el marco del razonamiento covariacional y apuntando directamente al trabajo con el concepto de función, están, Del Castillo & Montiel (2007) quienes proponen que es importante trabajar el concepto de función desde una perspectiva dinámica, y un acercamiento al concepto desde su naturaleza covariacional permite pensar en los diferentes tipos de funciones como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas.

En Mejía (2011), se trabajaron actividades para movilizar fundamentos asociados a las funciones lineales y cuadráticas, usando los niveles de razonamiento covariacional y el marco conceptual asociado (Acciones Mentales y Niveles de Razonamiento Covariacional) para poder clasificar a los estudiantes de 10º grado y poder catalogar conclusiones objetivas que permitieran saber el grado de avance de los estudiantes. Las actividades propuestas están diferenciadas en 3 situaciones: una cuya modelación corresponde a una función lineal, otra a una función cuadrática y la tercera hace énfasis en el análisis gráfico. Se usa como instrumento mediador el software de GeoGebra para poder atribuirle un carácter más dinámico mediante las herramientas de arrastre y animación.

Por su parte, afirman que “se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante” (p. 96). Es decir, representan el cambio de una variable como Δx y la variación lineal como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$, con k constante. En este orden de ideas, definen una función cuadrática como la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio

varía linealmente. En este sentido, consideran el concepto de función lineal como base para el entendimiento de la función cuadrática desde una perspectiva variacional.

Finalmente, Villa (2012) publica resultados de su trabajo de investigación donde realiza estudios de caso con estudiantes entre 15 y 17 años. Este estudio consistió en la consideración de una situación problema cuya modelación es una función cuadrática y cuyas preguntas apuntan a que los estudiantes razonen covariacionalmente al enfrentarse a situaciones de variación asociadas a la función cuadrática. Esta investigación usa como instrumento de intervención de aula, la consideración de la variación del área de una figura rectangular inscrita en una forma cuadrada. Consta de tres momentos, el análisis cualitativo, el cuantitativo y la interpretación de gráficas; momentos que de forma paralela con los niveles de razonamiento covariacional permitieron evidenciar aspectos claves en el trabajo con la razón de cambio promedio y algunos intentos de pasar al trabajo con la razón instantánea.

En la siguiente tabla se muestran de manera resumida los aportes y los aspectos relevantes que se han tomado de los antecedentes citados para fundamentar el presente estudio.

Tabla 1. Trabajos que se tomaron como referencia para los antecedentes

Eje	Título	Autores	Aspectos relevantes que aportan o influyen en el análisis previo y determinación del MTL inicial
Función	El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares	Villa (2008)	Se explicitan algunos aspectos que se deben tener en cuenta para alcanzar un buen desarrollo del concepto de función desde una perspectiva variacional.
	Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato	López & Sosa, (2008)	La identificación de algunas dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. Se destaca que los sistemas de representación no se deben trabajar de forma aislada.
	El concepto de función en la transición bachillerato universidad.	Porras (2013)	Caracterización de la brecha existente entre la educación secundaria y la educación universitaria. La función es un concepto importante para la comprensión del cálculo diferencial e integral. Los estudiantes no conciben la función desde una perspectiva variacional.
	Registros de representación, el aprendizaje De nociones relativas a funciones: voces de estudiantes	Guzmán (1998)	Es necesario enfatizar en la adecuada coordinación y tratamiento de distintos sistemas de representación para el concepto de función. No se trata de usarlos per se.
	Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional	Noreña (2012)	En las situaciones de aula es importante retomar el trabajo con elementos o nociones asociadas al concepto de función como: dominio, rango, comportamiento asintótico, entre otras; todo esto desde una perspectiva variacional.
Razonamiento Covariacional	Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio	Carlson et al (2002)	La explicitación de características que deben tener algunas tareas que pretenden trabajar la covariación. La consideración de un marco conceptual para clasificar las actuaciones de los estudiantes (de acuerdo a sus habilidades de razonamiento covariacional) cuando enfrentan tareas de covariación.
	Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta	Hernández et al (2003)	El razonamiento covariacional se puede trabajar en los estudiantes desde la básica primaria, no es exclusivo para estudiantes que sepan algo de cálculo matemático. Además existen fenómenos cotidianos que se pueden modelar desde la covariación.
	El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional.	Del Castillo & Montiel (2007).	La importancia de trabajar el concepto de función desde una perspectiva dinámica, y pensar en los diferentes tipos de funciones como la covariación de progresiones aritméticas y geométricas.
	Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional	Posada & Villa (2006).	Se consideran el concepto de función lineal como base para el entendimiento de la función cuadrática desde una perspectiva variacional.
	Razonamiento covariacional en estudiantes de quinto grado	Villa et al (2013)	El razonamiento covariacional se puede trabajar en los estudiantes desde la básica primaria, no es exclusivo para estudiantes que sepan algo de cálculo matemático.
	Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática	Ávila (2011)	Se expone un modelo para analizar las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas relacionadas con algunas funciones polinómicas. El marco conceptual de Carlson en contraste con la clasificación de los estudiantes de acuerdo a sus habilidades de razonamiento covariacional.
	El pensamiento variacional: un asunto de juego Y actividad matemática en la escuela	Guacaneme et al (2012)	El razonamiento covariacional se puede trabajar en los estudiantes desde la básica primaria, no es exclusivo para estudiantes que sepan algo de cálculo matemático.
	El estudio de la tasa de variación como una	Villa (2013)	La importancia del estudio de los cambios en el acercamiento al concepto de derivada.

Covariación	aproximación al concepto de derivada		Cómo pasar de la variación media a la instantánea. La consideración de software dinámicos es importante en el estudio de la covariación.
	Pensamiento numérico algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función	Hitt & Morasse(2009)	Aportan elementos teóricos y metodológicos para tener en cuenta en el diseño de actividades de covariación. Se dilucidan características especiales que dan señas de que la covariación es un elemento importante en el abordaje del concepto de función.
	Visualizando lo que varía. Interpretación y construcción de gráficas de variación en el tiempo	Carrasco (2013)	Se propone el estudio de la función a través de consideraciones de variaciones. Discute la importancia de modelar fenómenos, del contexto y por consiguiente, las analogías y convenciones que se deben tener en cuenta para reflexionar sobre lo que varía.
	Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas	Villa (2011)	La actividad propuesta es tomada como referencia para el diseño de las tareas y desarrollo de la experimentación en el MTL. Influencia del estudio de la covariación y razonamiento covariacional en el estudio de la función cuadrática.
	Un estudio de la covariación con profesores universitarios usando tecnología	Valero et al (2010)	La consideración de software dinámicos es importante la recuperación de la idea de variación en el estudio de las funciones.
	Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales	Villa & Vahos (2010)	La consideración de software dinámicos es importante la recuperación de la idea de variación en el estudio de las funciones
	Elementos para la graficación covariacional	Dolores & Salgado (2009).	Se presenta el método de graficación covariacional de funciones, la cual se centra en los cambios que experimentan las variables a través del cálculo de las diferencias; en la relación de covariación entre las variables analizando cómo cambia una respecto de la otra; y asumir las curvas poligonales como un ensamblaje de segmentos de recta infinitamente pequeños,
Enseñanza	Aportes didácticos para abordar el concepto de función.	Rey, Boubée; Sastre; Cañibano. (2009)	Proponen modelar el concepto de función, basados en nociones de dependencia y variabilidad, la modelación del cambio en contextos reales, reconocimiento de variables dependientes e independientes, promover el lenguaje y pensamiento variacional.
	Una propuesta metodológica para enseñar el concepto de función desde la experimentación.	Betancur Aristizábal (2013)	
	Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería.	García, Vázquez & Hinojosa (2004)	Para la enseñanza de la función, estas propuestas tienen en común, incentivar el uso de diversos registros de representación. Para ello algunos de estos autores sugieren integrar recursos tecnológicos.
	Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función.	López Cahun (2007)	
	Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas.	González Astudillo (2004)	
	Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación.	Guevara Sánchez (2011)	

De acuerdo con todo lo mencionado en los antecedentes, es menester resaltar que la importancia de este trabajo radica en poder trabajar actividades de covariación con estudiantes de grado 9° con el propósito de ver la función como covariación, es decir, poder caracterizar elementos fundamentales del concepto de función (sin importar el tipo: polinómica, racional, logarítmica, exponencial entre otras) que se develan del trabajo directo con la covariación. En este orden de ideas, en ninguno de los trabajos que conforman los antecedentes se hace alusión al estudio de nociones asociadas al concepto de función; por ejemplo, dominio, rango, monotonía, máximo, mínimo, entre otros.

De los trabajos de los antecedentes, el más parecido es el presentado en Villa (2012), donde se trabaja con una situación de rectángulo inscrito en un cuadrado y se verifican los niveles de razonamiento covariacional propuestos por Carlson. El presente trabajo no realiza estudio de casos, sino que contempla una muestra de 22 estudiantes para poder generalizar los resultados dentro del marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales. A diferencia del trabajo de Villa (aunque se tomó la situación del rectángulo inscrito en un cuadrado), a la situación se le atribuye un contexto del cual se desprende el trabajo asociado con funciones lineales y funciones cuadráticas. Asimismo, hubo la posibilidad de esbozar relaciones cuyas expresiones algebraicas no necesariamente están sujetas a formas polinómicas. Además, con las plenarias y con el trabajo colaborativo en parejas, se genera la interacción entre pares permitiendo la discusión y validación de conjeturas.

1.5 Marco contextual

La Institución Educativa Policarpa Salavarrieta está localizada en la vereda Miravalle – Dapa – Yumbo, se encuentra a una altitud de 1700 metros sobre el nivel del mar. En tiempo, está 35 Minutos del caso urbano de Yumbo.

En 1998, la Secretaría de Educación Departamental le dio el reconocimiento oficial a la Institución con especialidad en Agropecuaria. Su actual nombre se le dio en el 2002 según Resolución 1893 del 5 de septiembre de la Secretaría de Educación Departamental. Ya en 2008 la Secretaría de Educación Departamental le reconoce a esta institución el carácter de

Bachillerato Técnico con Especialidad Agroindustrial, que actualmente se encuentra vigente y en articulación con el SENA⁶.

Miravalle es un territorio montañoso, su vía principal está pavimentada desde el antiguo retén de la vía Cali-Yumbo, hasta la vereda Rincón Dapa. Además tiene tres carreteras secundarias que comunican los corregimientos de La Olga, Yumbillo, La Buitrera y la vereda Alto Dapa; en estos tres últimos, la institución tiene cuatro sedes: Cristo Rey, Salazar, José Antonio Páez y Alto Dapa.

La sede principal está ubicada en Miravalle y cuenta con una metodología de escuela graduada, con formación en preescolar, básica primaria, básica secundaria, media técnica y educación adultos (nocturna). La sede de Salazar está ubicada en el corregimiento que lleva su mismo nombre, la sede de Cristo Rey está ubicada en la vereda de Yumbillo, la sede de Alto Dapa está ubicada en la vereda de Alto Dapa, la sede de José Antonio Páez está ubicada en la vereda la Buitrera. Las cuatro sedes trabajan bajo la metodología de Escuela Nueva⁷ y ofrecen preescolar y básica primaria; exceptuando las dos primeras, que además ofrecen educación para adultos.

Para la formación de sus estudiantes la Institución se apoya en tres principios institucionales: amor, libertad y diálogo. Asimismo, fomenta en sus estudiantes valores institucionales de autoestima, amistad, solidaridad, respeto, justicia, responsabilidad, comunicación, concertación y democracia. En cuanto a su visión, la institución busca la formación integral de sus estudiantes, mediante el desarrollo de competencias básicas, laborales y ciudadanas; principios éticos y morales; características de emprendimiento, liderazgo, participación comunitaria y respeto con su entorno.

⁶ El Servicio Nacional de Aprendizaje (SENA) es una Institución pública colombiana encargada de dar programas de formación complementaria y titulada (Tomado de Wikipedia)

⁷ Escuela Nueva es un modelo educativo dirigido, principalmente, a la escuela multigrado de las zonas rurales, caracterizadas por la alta dispersión de su población; por tal razón, en estas sedes educativas los niños y niñas de tres o más grados cuentan con un solo docente que orienta su proceso de aprendizaje (Escuela Nueva, MEN, 2010, p.5)

En cuanto a los profesores de matemáticas, la Institución cuenta con tres docentes: para primaria se encuentra una profesora con título de Maestría en Desarrollo Humano de la Universidad de San Buenaventura; en secundaria se encuentra una profesora con un Magister en Educación Matemática de la Universidad del Valle y un profesor que actualmente es estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle, dicho profesor se encuentra en proceso de terminación de trabajo de grado.

Desde el año lectivo 2011, se está realizando a nivel institucional, una actualización de todos los planes de área con miras a unificar los contenidos curriculares de cada una de las asignaturas que la conforman, teniendo como referencia los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). Recientemente, y en miras de seguir mejorando los planes de área, se conformó un equipo de trabajo con los tres profesores de matemáticas que tiene la Institución, su objetivo primordial fue mejorar la estructura curricular del área de matemáticas, desde grado 1º hasta grado 11º, como resultado, y bajo los requerimientos de las directivas de la Institución Educativa, se reconstruyó el nuevo plan de área de matemáticas tomando como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias de matemáticas y los DBA⁸ (Derechos Básicos de Aprendizaje); estos últimos propuestos por el Ministerio de Educación en procura de estrechar la brecha (en pruebas externas) entre lo que se enseña y lo que se pregunta. En cuanto a las reuniones de área matemáticas, el equipo de trabajo se reúne dos o tres veces por año (en las semanas institucionales), aunque es muy poco, se ha visto significativos avances en la organización curricular, en el nivel académico de los estudiantes y en los resultados de las pruebas Saber 11 (2015), como referente inmediato se tiene el segundo puesto entre los trece colegios oficiales del municipio de Yumbo.

⁸Son un conjunto de saberes fundamentales dirigidos a la comunidad educativa que al incorporarse en los procesos de enseñanza promueven condiciones de igualdad educativa a todos los niños, niñas y jóvenes del país (MEN, 2015)

CAPITULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO DE REFERENCIA

Como se ha mencionado en el planteamiento del problema y la justificación de este trabajo, en la mayor parte de los trabajos realizados en Didáctica de las Matemáticas, existen diversos estudios en torno a las dificultades, obstáculos y en consecuencia, errores que se presentan en tareas matemáticas, específicamente en aquellas que demandan el uso de conocimientos algebraicos.

En la actualidad, hay muchas teorías que intentan caracterizar y explicar de manera general la fenomenología que se genera en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, particularmente, del Álgebra. Sin embargo, son teorías que podrían describir y caracterizar un amplio rango de fenómenos, pero de manera general, tanto así, que la problemática existente se reduce hasta el punto de que los resultados obtenidos en cierta investigación, sean insuficientes o poco concluyentes respecto a las intenciones iniciales de dicho estudio. Por ejemplo, el hecho de abordar el problema típico de las dificultades en el aprendizaje del álgebra, desde una perspectiva global, implicaría tomar varios aspectos relacionados con el pensamiento variacional, pero el hecho de centrarse desde una teoría general (como marco teórico o metodológico) permitiría delimitar algunos de esos aspectos de forma superficial, que no describiría algún elemento del pensamiento variacional desde todas los ángulos posibles; por lo tanto, al no caracterizarlo completamente, los resultados no serían contundentes dentro de la investigación en Educación Matemáticas.

En este orden de ideas, si se aborda un problema de investigación en Educación Matemática desde una perspectiva solamente Lingüística, Matemática o Psicológica, se dejarían por fuera otros aspectos que también son vitales en el diseño y puesta en escena de una actividad en el aula. Igualmente, se debe garantizar que, aunque el estudio recoja distintas visiones de una forma sistémica, el problema de investigación (desde el contenido o competencia matemática) debe ser tan específico, que se pueda realizar un análisis

profundo del desarrollo de la experimentación retomando los distintos aspectos involucrados.

Es en este sentido que Eugenio Filloy (1999), propone los Modelos Teóricos Locales (MTL) para llevar a cabo el desarrollo de investigaciones en la Matemática Educativa, entendiendo que los MTL se fundamentan en la observación experimental, la replicabilidad de diseños experimentales.

Particularmente, en las intenciones de este trabajo, está el hecho de caracterizar y estudiar a profundidad, el trabajo con la función a través de la covariación. Esta situación necesita estudiar y analizar un caso muy particular del Álgebra y pensamiento variacional, donde lo que se busca es propiciar que los estudiantes realicen un esbozo lógico-semiótico (Filloy & Cols, 1999) de una situación problemática, es decir, puedan poner en juego mecanismos cognitivos que les permita anticipar las relaciones centrales del problema y los pueda clasificar de acuerdo con un Sistema Matemático de Signos (SMS) con el que puedan acceder a él.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, el marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales, se ajusta más al problema que se quiere tratar en este trabajo, puesto que se va a analizar el comportamiento de los estudiantes al enfrentarse a tareas o situaciones de covariación y de esta manera poder caracterizar las acciones mentales e imágenes implicadas en el hecho de comprender aspectos generales que ayudan a la construcción del concepto de función.

2.1 SOBRE LOS MODELOS TEÓRICOS LOCALES

Inicialmente, se hará énfasis en las palabras *modelo* y *local*. Cuando se habla de *modelo* se hace referencia a una categoría que contempla elementos teóricos relacionados entre sí; esta idea se fundamenta en lo que afirma Achinstein (1967) quien menciona que “Un modelo teórico consiste en un conjunto de supuestos acerca de algún objeto o sistema” (p. 6). Además que “...Un modelo teórico analiza el objeto que exhibe ciertas regularidades conocidas reduciéndolo a componentes más básicas” (p. 7)

Ahora, en cuanto a lo *local*; al considerar un MTL, se pretende considerar los procesos que se desarrollan cuando se enseña en el sistema educativo unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos, y son locales en la medida en que sólo se pretende que esos modelos sean adecuados para los fenómenos objetos de estudio (Puig, 2003).

En el MTL hay dos conceptos claves, el de Signo y el de Sistema Matemático de Signos, que se sustentan en la definición triádica de signo, integrada por un símbolo (S), el objeto(O) representado por el signo y el interpretante (I) para quien el signo representa precisamente ese objeto (Puig, 2003).

Cuando se habla de sistemas matemáticos de signos se alude al hecho de que cuando se expresa algo de forma simbólica en matemáticas, al lenguaje propiamente matemático, no se le puede excluir de otros tipos de lenguaje, sin los que algunos conceptos no se harían inteligibles. De aquí el hecho de que se refuerce el que los conceptos matemáticos que se crean se sitúen en el mundo de nuestra experiencia, pues es a través de sistemas de signos que estos se expresan, se representan o se escriben en la práctica matemática, lo cual implica el papel fundamental que representan los sistemas de signos. El lenguaje cotidiano, con sus expresiones usuales, junto con expresiones propiamente del lenguaje formal (matemático), conforma ese conjunto o sistema de signos.

La abstracción progresiva generada en el proceso de objetivación de los medios de organización (Puig, 1997) es un proceso iterativo que tiene su expresión en la creación de sistemas matemáticos de signos también más abstractos, con los que se crean conceptos de esa misma naturaleza. En un sistema matemático de signos, lo propiamente matemático es el sistema y no los signos, lo cual implica poderle dar significado a esos signos, de acuerdo con alguna teoría inscrita en dicho sistema. Lo que entonces aparece como crucial es el sistema de signos tomado en su conjunto. Se debe diferenciar un Sistema Matemático de Signos y un Sistemas de Signos Matemáticos, pues para expresar ideas en Matemáticas, es insuficiente los signos o símbolos inherentes a su actividad.

En un MTL la producción de signos no proviene de sujetos en abstracto, por el contrario el interés está centrado en los signos que produce un sujeto concreto ante una situación concreta, “La perspectiva semiótica adoptada en la teoría de los modelos locales engloba en el análisis de relaciones entre sistemas de signos a las producciones propias de los sujetos y esa es una característica esencial de dicho acercamiento teórico”. (Filloy, 2008)

Cada individuo tiene, en su acervo cultural y académico, un SMS, con el que resuelve determinadas situaciones matemáticas que se le plantean, sin embargo, existirán ocasiones en las cuales, justamente ese SMS es dificultad para poder acceder o comprender otros SMS que no manipula habitualmente. Se supone que en el proceso de aprendizaje de un estudiante, el SMS va mutando o complementándose, de tal manera que desde una concepción individual se apunte a un SMS institucionalmente aceptado.

Es menester aclarar que un MTL es recursivo, porque considera que el significado asociado a un objeto no es fijo, este puede cambiar dependiendo del uso que se le da en la resolución de un problema, y sólo se limita a analizar los fenómenos que se engloban en el análisis del uso de sistemas de signos que el sujeto ha desarrollado como producciones propias y que constituyen sus propios sistemas de signos (Tarazón, 2012). Además, la recursividad hace alusión a cómo a partir de un modelo teórico local en el marco de unas hipótesis a contrastar o verificar, se desarrolla una experimentación que conduce a ciertos resultados, y que a su vez dichos resultados serán los antecedentes fundamentales para el desarrollo de una nueva investigación, es decir, la posibilidad de consolidar un nuevo Modelo Teórico Local que conduzca a otra experimentación, y así sucesivamente.

Asimismo, en la determinación de un MTL, se debe hacer énfasis en la caracterización de cuatro componentes interrelacionados entre sí, y la consideración de unas etapas durante la observación experimental. A continuación se detallan estos dos aspectos.

2.1.1. Componentes del MTL

Como se ha mencionado anteriormente, aunque el ámbito de validez de los Modelos Teóricos Locales no pretenda ir más allá de los fenómenos observados, sí se pretende que la

descripción de los fenómenos que el modelo sustenta sea profunda, compleja y minuciosa. Es por eso que el MTL integra cuatro componentes teóricas, que se conciben como modelos interrelacionados: Componente de enseñanza del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, Modelo de enseñanza. Componente de cognición del Modelo Teórico Local o Modelo para los procesos cognitivos. Componente de competencia formal del Modelo Teórico Local o Modelo de competencia formal. Y Componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación.

Estos componentes o modelos están relacionados con el análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1991), considerándose varios tipos de fenomenología. En el modelo de competencia formal se contempla la fenomenología histórica y la fenomenología pura; en la primera, se investigan los fenómenos para cuya organización fue creado el concepto; mientras que en la segunda, se tratan los fenómenos relacionados con las matemáticas en este momento y con su uso actual. En el modelo de enseñanza se considera la fenomenología didáctica, en la cual se exponen los fenómenos asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje presentes en los sistemas educativos con relación al concepto matemático. En el modelo cognitivo, se considera la fenomenología genética, en la cual se describen los fenómenos relacionados con el desarrollo cognitivo en el que interviene el concepto y la relación entre estos (fenómeno- concepto).

- *Modelo de enseñanza.*

Un modelo de enseñanza es un repertorio o secuencia de textos. Es necesario tener en cuenta que Filloy, Rojano y Puig (2008) no hacen referencia a “textos” como alguna serie de escritos, libros o cualquier otra forma tangible que brinde un panorama acerca de la posible formación de los alumnos en su instrucción escolar. Los autores conciben un texto como una manifestación de lenguaje matemático y no como un texto escrito. Además, consideran pertinente adoptar la noción de texto como “el resultado de un trabajo de lectura/transformación hecho sobre un espacio textual” (Talens y Company, 1984, p. 32; citado en Tarazón, 2012). Igualmente, para analizar cualquier proceso mediante el cual se da sentido a un concepto en específico, también se usa esta acepción de *textos*.

Un texto es el resultado de un trabajo de lectura/transformación realizado sobre un espacio textual, cuya intención no es extraer o desentrañar un significado inherente al espacio textual sino producir sentido. El espacio textual tiene existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a quien lo lee; el texto es la nueva articulación de ese espacio, individual e irrepetible, realizada por una persona como consecuencia de un acto de lectura. (Puig, 2003)⁹

Adicional a lo anterior, el modelo de enseñanza debe considerar y analizar las políticas curriculares que orientan al sistema escolar, para observar la correspondencia con la propuesta de enseñanza que impere en la escuela. Esto incluye la revisión de textos escolares en relación con los SMS y el objeto matemático que se quiera estudiar.

- *Modelo de competencia formal*

En el Modelo de competencia es importante mencionar que puede ser formal, en la medida en que la revisión de la literatura así lo exija, es decir, si es necesaria la revisión de conceptos matemáticos para dar suficiente soporte al trabajo y poder garantizar la correlación de los demás modelos a la luz de la visión de un sujeto competente que pueda interpretar los diferentes SMS que están en juego, la forma en que comprenden los estudiantes y el análisis de las propuestas de enseñanza controlada.

El modelo de competencia implica que haya un sujeto competente (que puede ser el investigador o profesor), que conozca con tal suficiencia los conceptos matemáticos, que también pueda concebir los objetos mentales y los SMS que permiten la asociación de los elementos que caracterizan al objeto o concepto matemático que subyace a los procesos de enseñanza, cognición y comunicación. Por lo general, suele hacerse un análisis fenomenológico puro para garantizar las condiciones anteriores.

⁹Es en este sentido que un Modelo de enseñanza es una colección de T (Textos) que se toman como ET (Espacio Textual) para su lectura y transformación en otros T para dar sentido a sus lecturas. Visto de esta manera, puede describirse el trabajo de los alumnos (y de los maestros) durante los procesos de enseñanza aprendizaje, como un proceso reiterado de lectura/transformación de espacios textuales en textos (Tarazón, 2012).

- *Modelo cognitivo*

Este modelo también es llamado Modelo de actuación, en la medida en que se parte de la hipótesis de que las actuaciones las podemos describir en términos de proceso cognitivos. Este modelo hace referencia a aquellos procesos cognoscitivos que se ponen en acción para llevar a cabo distintas formas de pensamiento y la comunicación de ellas. En esta parte se ven involucrados y se van afinando elementos complejos como los que se usan en: la percepción, la atención y la comprensión, el uso de la memoria, los procesos de análisis y síntesis relacionados con el uso de la lógica, las concepciones heurísticas utilizadas, el aprendizaje (asociado a los procesos de generalización y abstracción, y que requiere del usos de nuevos SMS), etc. (Filloy, 1999).

De esta manera, en el modelo cognitivo es relevante observar cómo los estudiantes competentes hacen uso de esquemas mentales y de la memoria de trabajo (desligados de tendencias cognitivas erróneas), y cómo identifican estrategias adecuadas para resolver diversos problemas. En casos particulares habrá familias de problemas que se resuelven con estrategias similares.

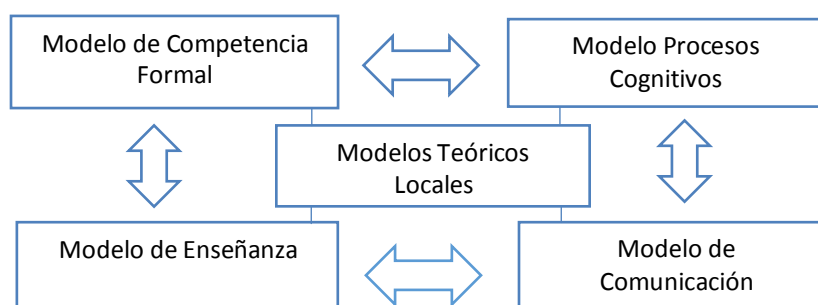
- *Modelo de comunicación*

Este componente trata del intercambio de mensajes entre sujetos (estudiante-estudiante(s) o estudiante-maestro) con diferentes grados de dominio dentro de un SMS. En general, este modelo de comunicación marca la pauta en cuanto los términos o terminología que se debe utilizar para la comunicación, formación o decodificación de algún texto. De esta manera, el lenguaje juega un papel importante, dado que es el medio de comunicar y gestionar significados matemáticos referentes a las actividades propuestas. En la experimentación de la metodología propuesta en el presente trabajo, este componente también se estudia a través de la interacción social entre estudiantes con esbozos de aprendizaje colaborativo; facilitando de cierta manera, la detección de las dificultades enfrentadas en la decodificación de textos.

A continuación se muestra un esquema del Modelo Teórico Local en relación con cada una de las cuatro componentes. Aunque se ha descrito cada componente por separado, ha sido

con el propósito de caracterizar los elementos teóricos de cada una, y esto no significa que estén aisladas, de hecho, el doble sentido de las flechas representa que las cuatro componentes están correlacionadas entre sí, asociadas a determinados tipos de fenomenología y a las cuales subyace la comprensión y el uso de SMS

Ilustración 5. Interrelación entre las componentes de los MTL



En particular, para el MTL que se considera en este trabajo, las cuatro componentes están correlacionadas entre sí, de la siguiente manera:

El modelo cognitivo está correlacionado con el modelo de comunicación en la medida en que dentro de los procesos cognitivos de un estudiante, están las acciones mentales e imágenes mentales, las cuales pueden ser exteriorizadas a través de comportamientos mediados o presentes en la forma en que muestra dominio de cierto SMS e interactúa con sus compañeros o profesor dentro de dicho sistema. A su vez, estos dos modelos mencionados se correlacionan con el modelo de enseñanza en la medida en que, en este modelo se agrupan aquellos elementos que permiten identificar cuál es la intencionalidad pedagógica referida respecto a los marcos legales y que se ven reflejados en la práctica o ejercicio de la enseñanza del concepto de función. Además, entra en juego el porqué, el cómo y el paraqué, de unas actividades dentro de una enseñanza guiada o controlada (en este caso, actividades de covariación).

Así mismo, el modelo de competencia formal, que en este caso estará direccionado por un análisis fenomenológico de la covariación y la función, influye en el modelo de enseñanza, en la medida en que permite hacer hipótesis sobre determinados objetos mentales

precursores en la constitución de los objetos mentales de función y covariación, lo cual conduce a priorizar esos elementos a la hora de diseñar la secuencia de enseñanza.

Finalmente, la relación entre el modelo de competencia formal y el modelo de cognición y comunicación, radica en que ese análisis fenomenológico aporta elementos para que los investigadores-profesores sean competentes en la concepción de objetos mentales y los SMS que permitan su asociación. Es decir, que para poder analizar los procesos cognitivos, interacciones y comportamientos de los estudiantes es necesario dominar los conocimientos matemáticos formales y los SMS implicados.

2.1.2 Sobre el diseño y desarrollo de la experimentación

Para el diseño de la experimentación, lo primero que se debe tener en cuenta es la problemática, porque a dicha problemática se le debe hacer un análisis previo desde los cuatro componentes del MTL tratados anteriormente. Seguidamente, se plantean hipótesis que se quieren trabajar, buscarle algún tipo de validez o contrastar con las observaciones empíricas. Esto determina el diseño del modelo teórico local inicial.

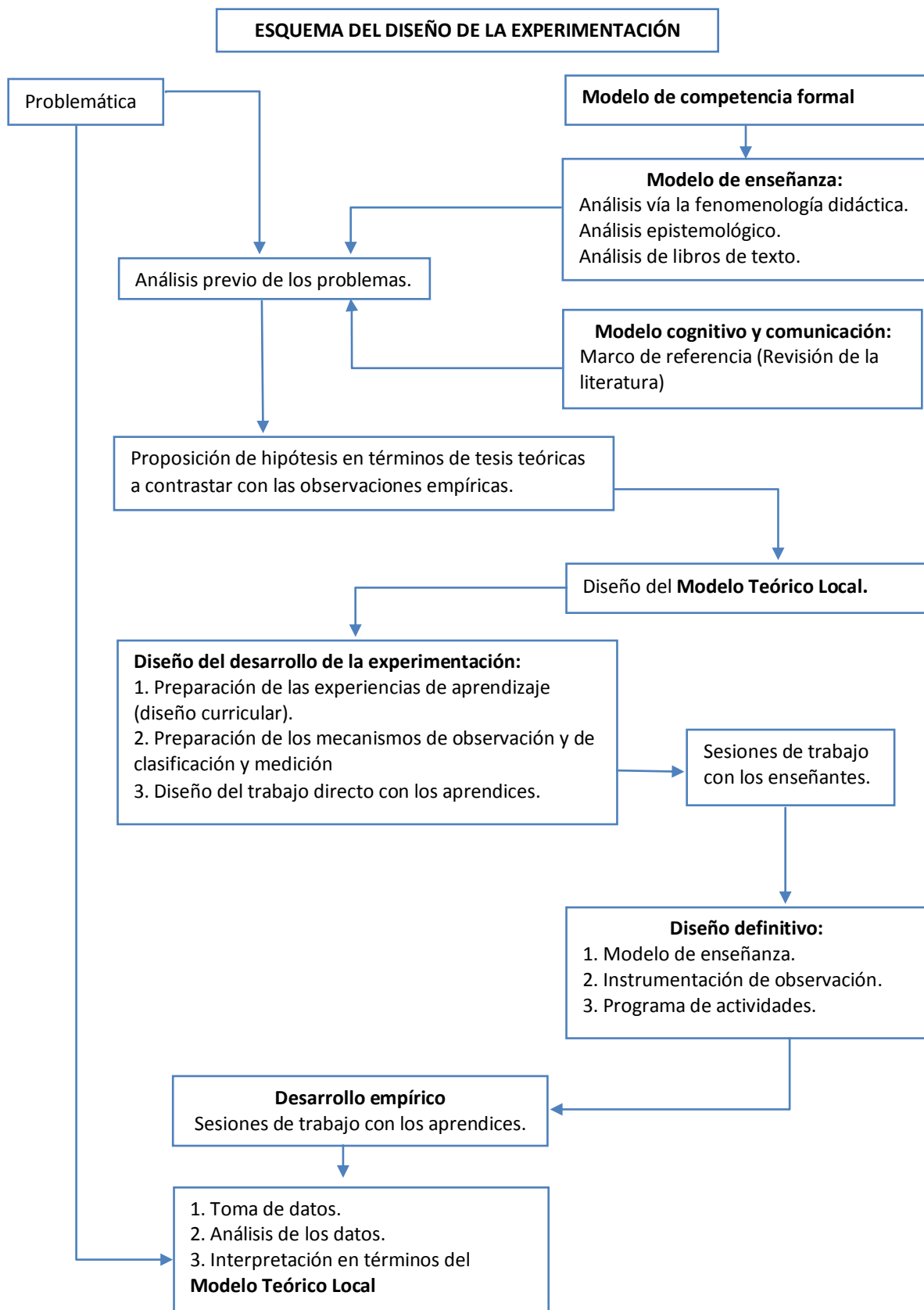
Para el desarrollo de la experimentación, inicialmente se planea cómo será la experiencia, por ejemplo, cómo se hará la observación, cómo se clasificarán los estudiantes, etc.; para posteriormente hacer el diseño definitivo con sus respectivos instrumentos de observación y cronograma de actividades. Seguidamente, deben tomarse datos, analizarlos e interpretarlos en términos del modelo teórico local, es decir, en términos de los cuatro componentes con los que se hizo el análisis previo. Las conclusiones y reflexiones arrojadas por la implementación de la experimentación ponen el problema en la perspectiva de un nuevo Modelo Teórico Local y diseño de este, es decir, que la problemática queda sujeta al planteamiento de nuevas hipótesis, para volver a realizar un nuevo diseño y desarrollo de experimentación. Esta característica de los MTL muestra la recursividad de los mismos, lo cual implica que la problemática inicial puede ser replanteada en otros términos o servir de soporte para otras investigaciones con mayores alcances.

Dentro de las etapas de la observación y desarrollo de la experimentación, Filloy (1999) hace énfasis en cuatro aspectos importantes:

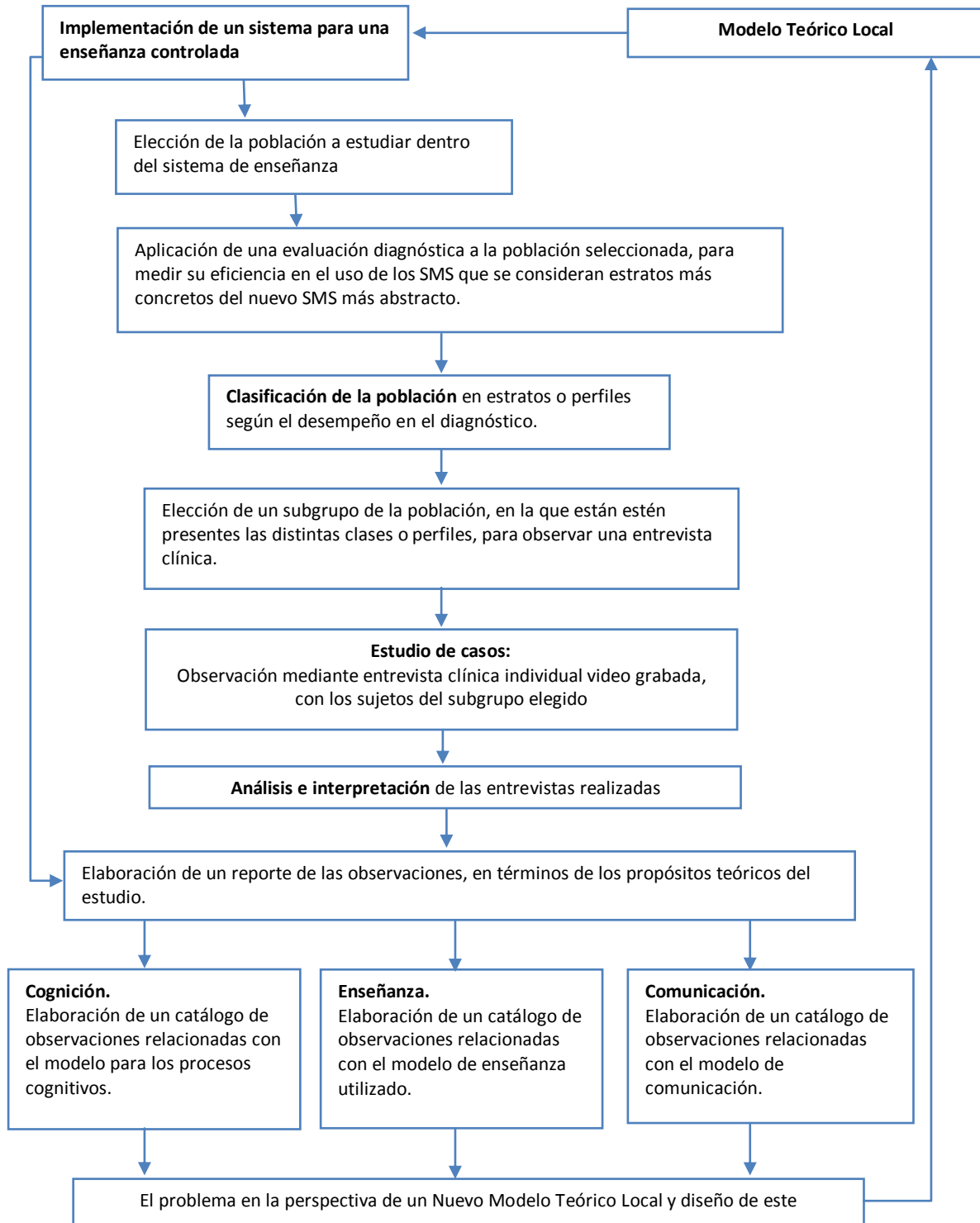
- *La enseñanza controlada*, que hace referencia al control que se debe llevar de los avances individuales y grupales de los estudiantes con el fin de ir preparando y afinando los mecanismos de medición y clasificación de los estudiantes.
- *El corte didáctico*, que alude a las consideraciones que se deben prever cuando, de acuerdo a los conocimientos previos de los estudiantes, el SMS concreto que actualmente dominan resulta insuficiente para poder resolver otras situaciones que requieren un SMS más abstracto. No siempre estos cortes didácticos se pueden prever, pues resultan de forma fortuita durante el desarrollo de la experimentación.
- *La prueba diagnóstica*, consiste en que una vez llevada a cabo la enseñanza controlada, se clasifican los estudiantes, mediante un grupo de actividades, de acuerdo a los resultados en cuanto a la eficiencia de la transición de SMS concreto a un SMS más abstracto.
- *La entrevista clínica*, que hace referencia al control de los factores diferenciadores (respecto a lo esperado) que han causado en los estudiantes su clasificación en distintos niveles de desempeño, por lo tanto, esos casos especiales son objeto de una entrevista, con el propósito de realizar un análisis exhaustivo, no solamente a su papel de aprendiz, sino también a los elementos que la enseñanza pone en juego. En dicha entrevista, se busca ratificar el perfil en el que fue clasificado el estudiante.

Cabe resaltar que de los cuatro aspectos mencionados, los dos primeros están fuertemente relacionados al trabajo directo entre los observadores y los enseñantes, considerando que estos últimos, tienen mayor conocimiento de los aprendices y por lo tanto son fundamentales en la co-autoría de la prueba diagnóstica.

A continuación, se presentan los dos esquemas propuestos por Filloy para sintetizar los MTL como marco teórico y metodológico para la observación experimental.



ESQUEMA DEL DESARROLLO EXPERIMENTACIÓN

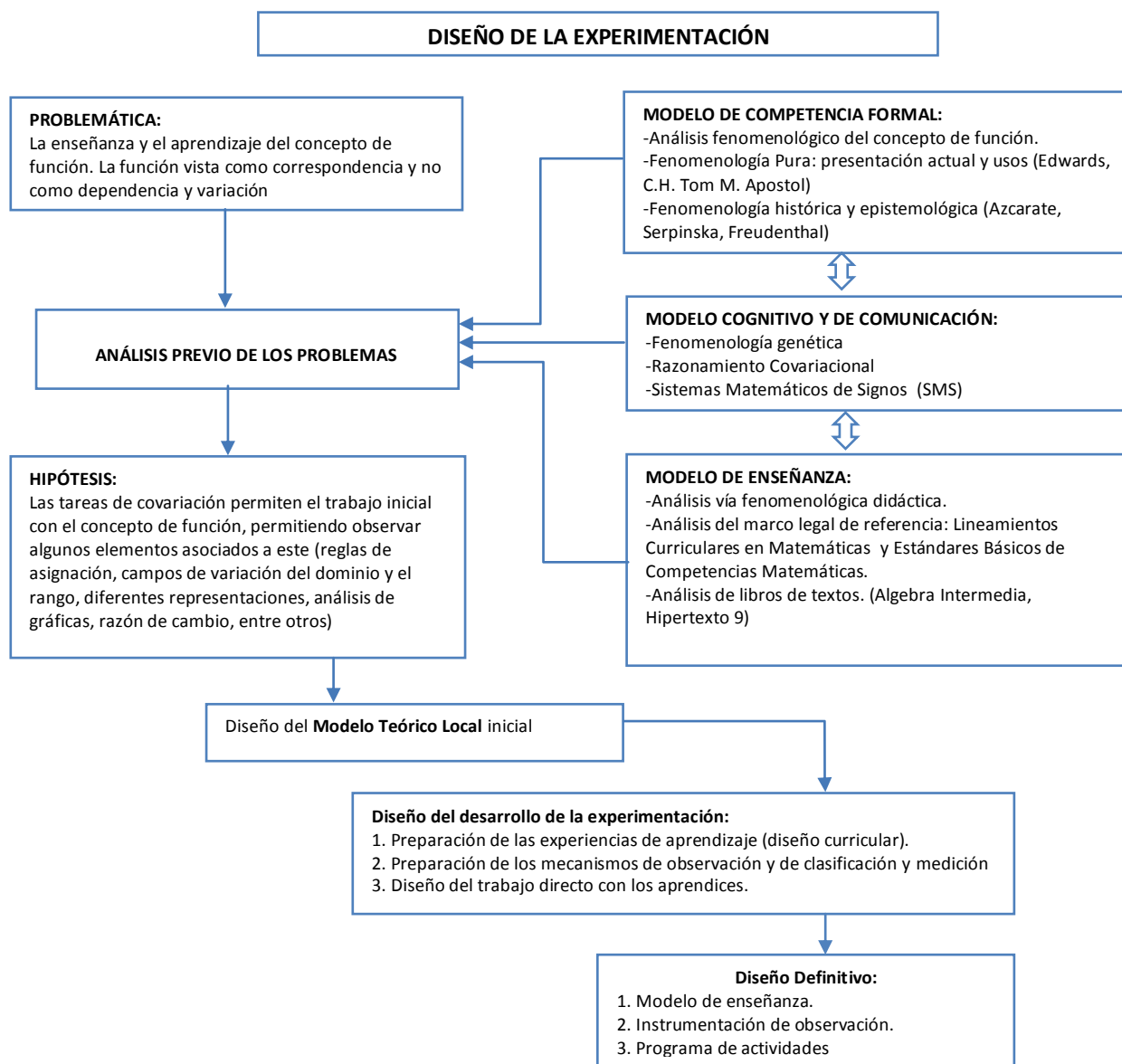


2.2 EL MODELO TEÓRICO LOCAL DE LA FUNCIÓN A TRAVÉS DE LA COVARIACIÓN

En este MTL, lo local del estudio se concibe en la medida en que es preferible un acercamiento local y no uno general. Un acercamiento global desde una teoría de la enseñanza o del aprendizaje del tema de estudio de este trabajo, la covariación en el estudio de la función, impediría un claro entendimiento del fenómeno específico que se está tratando de observar, el comportamiento de los estudiantes (entre 14 y 15 años) al enfrentarse a tareas o situaciones de covariación, ya que se abordaría la covariación desde muchas perspectivas y en cada una de ellas, de forma general. Por esta razón, se centra la atención en los MTL apropiados sólo para el fenómeno especificado anteriormente, que sean capaces de tener en cuenta los cuatro componentes ya descritos y al mismo tiempo, proponer un diseño experimental que ilustre las interrelaciones y contraposiciones que hay durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada uno de los cuatro componentes.

De esta manera, Filloy (1999) propone que una vez hecho el análisis previo de los problemas y por ende se diseñe el modelo teórico local inicial, los observadores preparan el diseño del desarrollo de la experimentación, teniendo en cuenta el análisis previo mencionado, la preparación de las experiencias de aprendizajes, los mecanismos de observación, clasificación y medición que tendrán en cuenta en el trabajo directo con los aprendices. Posteriormente, con el insumo anterior, los observadores realizan sesiones de trabajo con los enseñantes, quienes conocen las dinámicas de enseñanza y aprendizaje alrededor de sus estudiantes, con el propósito de acordar un diseño definitivo con su respectivo programa de actividades. En contraste, en esta propuesta, el enseñante coincide con ser uno de los observadores, razón por la cual, las sesiones de trabajo observadores-enseñantes no tuvieron un espacio diferenciado sino que estuvieron presentes desde el inicio del diseño de la experimentación, que en teoría debería estar a cargo solamente de los observadores.

A continuación, se muestra el esquema del diseño de experimentación para el caso del covariación.



Del esquema anterior, la *problemática* ya se mencionó en el capítulo 1; la *hipótesis* a contrastar y el *análisis previo*, se desarrollan en este capítulo. Mientras que el resto de los elementos del esquema, junto con el esquema del *Desarrollo de Experimentación* (que no se menciona en este capítulo) se abordan en el capítulo 3.

En correspondencia con lo anterior, en la *Problemática* se especifica cuál es el problema objeto de estudio, explicitando por qué es un problema y cómo se manifiesta. En el caso

particular de este trabajo, se tuvieron en cuenta las investigaciones y los artículos que hacen parte del acervo de un estado del arte o antecedentes.

Ahora, en cuanto a la *hipótesis*, el análisis previo del problema permite proponer una hipótesis teórica que se debe contrastar con las observaciones empíricas que se realicen en la experimentación. A continuación se presenta la hipótesis de este estudio: Las tareas de covariación permiten el trabajo inicial con el concepto de función, permitiendo observar algunos elementos asociados a este (reglas de asignación, campos de variación del dominio y el rango, diferentes representaciones, análisis de gráficas, entre otros). Para contrastar empíricamente esta *hipótesis*, es necesario:

- Identificar las relaciones existentes entre la covariación y el concepto de función.
- Identificar actividades de covariación que involucre el trabajo implícito con algunos elementos o rasgos asociados al concepto de función.
- Identificar cómo actúan los estudiantes al enfrentarse a tareas de covariación.
- Verificar si en las actuaciones de los estudiantes se presentan resultados concluyentes para determinar la implicación o incidencia que tienen las actividades de covariación en el aprendizaje del concepto de función.

A su vez, el *Análisis previo de los problemas* consiste en hacer el análisis de la problemática a partir de los cuatro componentes de los MTL y se delimita un modelo teórico local inicial. Así pues, en este apartado se pretende mostrar y relacionar los elementos teóricos referenciados en cada una de las cuatro componentes que convergen en la fundamentación de un instrumento de enseñanza controlada en el aula. Posteriormente, se presentará el conjunto de tareas en torno a la covariación, explicitando los propósitos de cada una de ellas. En concordancia con lo anterior, a continuación se delimita el análisis previo desde: El Modelo de cognición y comunicación, Modelo de competencia formal, y el Modelo de enseñanza.

2.2.1 Modelo cognitivo y comunicación

El modelo cognitivo está correlacionado con el modelo de comunicación como ya se mencionó en el apartado 2.1. En este sentido por ejemplo, los sistemas de representación y

SMS fundamentan a los dos modelos mencionados, puesto que, contienen elementos sintácticos, semánticos y pragmáticos, los cuales son indispensables en el proceso de significación y comunicación de saberes. A su vez, el uso de los sistemas de representación y de los SMS también permite establecer los procesos cognitivos que subyacen a los diferentes grados de abstracción alcanzados por los estudiantes. En lo que sigue, se caracterizan los siguientes aspectos, los cuales de forma simultánea consolidan el modelo de cognición y de comunicación: Sistemas matemáticos de signos SMS, la comprensión de conceptos matemáticos, la visualización y sistemas de representación en el concepto de función, dificultades asociadas al concepto de función y el razonamiento covariacional.

2.2.1.1 Sistemas matemáticos de signos SMS

En la Educación matemática es de interés estudiar los fenómenos que se presentan en torno a la enseñanza y aprendizaje de unos conceptos o conocimientos matemáticos. Pero es importante señalar que dichos fenómenos se pueden caracterizar por estar intrínsecamente relacionados con la Semiótica, en la medida en que, como lo afirma Puig (2003) estos fenómenos pueden ser concebidos como procesos de significación y de comunicación.

Peirce (1987), propone el signo como una relación triádica donde dicha triada está compuesta por el *signo* (S) el *objeto* que representa (O) y un *interpretante* (I). Peirce define así al interpretante:

Un signo [...] se dirige a alguien; es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizás un signo más desarrollado. A ese signo que crea yo lo llamo el Interpretante del primer signo. Ese signo ocupa el lugar de algo: de su Objeto (Peirce, 1997 p. 33, citado en Puig, 2003).

En muchas ocasiones pueden armarse varias triadas (S, O, I), (S', O, I')...en torno a un objeto (O). Esta afirmación se hace en la medida en que ante la existencia de un objeto (O) hay un signo (S) y lo que alguien entiende o interpreta (I); pero de nuevo, I se convierte en signo (S') para que haya un nuevo interpretante (I') que a su vez hace las veces de signo (S'') para otro interpretante (I''), y así sucesivamente. Como se observa, se van modificando o transformando S e I, pero el objeto es el mismo. “Signo: Cualquier cosa que determina alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual él mismo se

refiere (su objeto); de la misma manera el interpretante se convierte en un signo, y así adinfinitum”. (Peirce, 1987, p. 274 citado en Puig, 2003)

En lo descrito hasta el momento, es importante recalcar la intención de este estudio y cómo se relaciona con la teoría del signo. En el proceso descrito, se ve cómo la triada que propone Peirce involucra la importancia de un sujeto que interpreta lo que entiende por el signo en relación con el objeto que le corresponde. Particularmente, en el sistema de enseñanza donde se intenta movilizar algún conocimiento, lo importante no es que los estudiantes aprendan a etiquetar algo para reconocer ese signo cada vez que se quiera aludir al objeto correspondiente; lo más importante es que el estudiante logre una cognición, es decir, que interprete un signo. Por ejemplo en la enseñanza de las Matemáticas, hay una serie de signos involucrados que precisan que un estudiante logre interpretarlos, pero como ya se mencionó más arriba, esa cognición o interpretación (I) puede ser replanteada o sustituida por otra en la medida en que se logre mayor abstracción del objeto matemático que se esté considerando. Para explicitarlo, se podría mencionar lo que ocurre con las operaciones matemáticas denotadas con los signos “ $+$, $-$, $\times$, $\div$ ” un estudiante de primaria sólo las concibe posibles para números naturales y racionales positivos, sin embargo más adelante debe re-interpretar lo que entiende por esos signos al abordar también los números enteros y los irracionales (expresados en términos de radicales).

En este trabajo, es necesario que el estudiante use literales y no sólo cantidades numéricas (expresadas aritméticamente), es decir, que utilice expresiones algebraicas, y estas como tal están impregnadas de signos en todas sus modalidades: íconos, índices y símbolos (Puig, 2003).

Ahora, es importante tratar lo concerniente a los Sistemas Matemáticos de Signos. Como se mencionó en el apartado 2.1, los signos matemáticos por sí mismos no comunican algo cuando se consideran en conjunto o en un sistema, con lo que se resalta esa máxima de que la lengua natural es el sistema semiótico por excelencia. En particular, en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con conocimientos matemáticos, se debe hacer uso de la lengua natural para poder entender esos signos matemáticos, estos por sí mismos no se

explican, es necesario expresarlos en términos de otros que ya se conocen en el lenguaje habitual.

Filloy (1999), también establece la necesidad de usar los SMS de una forma más amplia para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares y estos textos se conciben como el resultado de procesos de producción de sentido.

Por otro lado, también hay que considerar los sistemas de signos o los estratos de sistemas de signos que los aprendices producen con el fin de dotar de sentido a lo que se les presenta en el modelo de enseñanza, aunque se rijan por un sistema de correspondencias que no ha sido socialmente establecido, sino que es idiosincrásico (Puig, 2003).

Tanto en la historia de la actividad matemática como en la actividad de enseñanza en el aula, los SMS son el resultado de un proceso de abstracción progresiva que implica hablar de estratos de SMS, por ejemplo, en la Aritmética se maneja un SMS más concreto que en el Álgebra. Esto implica también que pueda hablarse de SMS más abstractos que otros y de distinta naturaleza, es el caso de los SMS asociados a la Geometría.

Con lo mencionado hasta el momento, de forma implícita están los sistemas de representación semiótica, pues necesariamente para producir nuevos SMS hay que haber concebido conceptos desde, por lo menos, dos sistemas distintos. Tal como lo afirma Duval (2004), se produce aprendizaje cuando al menos el contenido o conceptos asociados se han trabajado en, al menos, dos registros distintos de representación semiótica. En esta parte es necesario aclarar que se ha citado a Duval, pero la intención no es realizar un análisis cognitivo de lo que implica el proceso de conversión entre distintos registros. La intención es mirar qué es lo que los estudiantes, al aplicar las actividades de covariación, evidencian en relación con el objeto matemático de estudio (la función).

Finalmente, el SMS asociado a la covariación se caracteriza por presentar enunciados verbales en lengua natural, lenguaje simbólico, tratamiento y ejercitación de

procedimientos, dominio de SMS Aritméticos, dominio de SMS Geométricos y dominio de SMS Algebraicos básicos. Lo anterior, supone que para poder trabajar la covariación se requiere de esos SMS concretos y que conforme se quiera avanzar en el nivel de dificultad de las tareas o situaciones, es necesario la emergencia de unos SMS intermedios que apunten al trabajo con otros SMS más complejos o abstractos, o por lo menos estratos de estos. Dentro de las características de los SMS más abstractos se pueden citar la forma en que el estudiante pueda abordar el tratamiento dentro de cada registro de representación, la conversión entre cada uno de esos registros, la noción de cambio con sus distintas representaciones o accesiones y las distintas formas de verbalizar o representar las variaciones de los cambios.

2.2.1.2 La comprensión de conceptos matemáticos

En el modelo cognitivo es importante centrar la atención en los procesos cognitivos involucrados en los estudiantes cuando estos se enfrentan o responden a un proceso de enseñanza. En este orden de ideas, la comprensión de conceptos matemáticos es un aspecto clave a destacar en este modelo.

Para alcanzar la comprensión de algún concepto matemático, Tall y Vinner (1981) proponen primero las nociones de *definición de concepto* e *imagen del concepto*, ya que estos dos permiten la construcción y apropiación de objetos matemáticos. En la primera noción no se hace tanto énfasis, ya que casi todos los conceptos matemáticos tienen una definición formal expuesta en los libros de texto, que consiste en especificar de forma verbal (en el lenguaje vernáculo) sus características y funciones dentro de una estructura matemática. La segunda noción, alude a los procesos de visualización implicados en el acercamiento a algún concepto matemático, alude más a ejemplos basándose en imágenes (del concepto), que en última instancia corresponden a todas las imágenes mentales asociadas a la mente del estudiante; puede ser una representación visual o también puede ser un conglomerado de experiencias. Es decir, estas *imágenes del concepto* están en la mente o se asocian con el pensamiento y son de un carácter *no verbal*. Al mismo tiempo, se puede presentar que el comportamiento o reacción del estudiante puede diferir de lo que

espera el profesor, esto debido a que una imagen del concepto puede diferir de la definición formal del concepto, ya que la imagen del concepto hecha por el estudiante sólo ejemplifica y puede dejar por fuera algunas estructuras del concepto. Cabe decir que, para Vinner, las definiciones crean un serio problema en el aprendizaje de las matemáticas, no porque estas tengan que excluirse, sino porque estas suelen ser el punto de llegada de algún concepto matemático, es decir, se confunde el objeto con su definición, y las imágenes no son bien direccionadas en la significancia de un concepto.

En términos generales, Vinner y Tall (1981) proponen que para la formación de nuevos conceptos matemáticos se debe tener en cuenta la dualidad *concepto-imagen*, que puede entenderse como: “la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos asociados... [Mientras que...] concepto-definición es la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto” (p. 152). Además, Vinner explica que la *imagen del concepto* y la *definición del concepto* se van complementando gradualmente. Es decir, propone una complementariedad entre *imagen* y *definición* con el fin de producir una respuesta en el aprendizaje (comprensión). Así pues, para Vinner la comprensión está sujeta a la reproducción de *imágenes del concepto*, es decir, a todas las imágenes mentales o representaciones, asociadas a la mente del estudiante.

No muy distante a estos autores, está Dreyfus (1991), quien en gran medida es coherente con el modelo cognitivo que se está trabajando, afirmando que “comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales” (citado en Azcárate & Camacho, 2003, p. 2). Además, junto a estos procesos cognitivos están: abstraer, representar, conceptualizar, inducir y visualizar.

Asiala (1996) es otro autor que va en la misma vía de la comprensión propuesta por Vinner, puesto que en su definición están inmersos objetos físicos (pueden ser materiales) y mentales (obedecen al pensamiento):

Comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente contruidos para formar acciones; las acciones son luego interiorizadas para formar procesos que son después encapsulados para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos, a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos pueden ser organizados en esquemas (Asiala et al, 1996).

Con lo mencionado hasta el momento, la comprensión de la covariación y la función no pasa necesariamente por su definición, pues en el caso particular de este estudio, lo que importa es que el estudiante en su exploración vaya construyendo diversas imágenes del cambio y que a través de la adquisición de nuevos SMS se puedan caracterizar elementos teóricos asociados al concepto de función y que subyacen a su comprensión.

2.2.1.3 La visualización y sistemas de representación en el concepto de función

La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro (Hitt, 1998). Varios estudios han propuesto la importancia de los sistemas de representación en el aprendizaje de algunos conceptos matemáticos. Tal como se ha descrito en el capítulo 1, un elemento común de esas investigaciones, es que estudiantes de la enseñanza media y algunos de perfil universitario, en torno a un concepto específico, no son capaces de coordinar varios sistemas de representación. En este sentido, Hitt (1998) menciona que la visualización está fuertemente vinculada con los sistemas semióticos de representación, enfatizando en que la mayoría de profesores privilegian el trabajo sobre los procesos algebraicos sin adjudicarle importancia a los procesos visuales. Así pues, el reflexionar sobre el papel de los sistemas semióticos de representación será vital para poder entender la construcción de conceptos matemáticos que los estudiantes realizan.

En particular, el concepto de *función* es uno de los conceptos matemáticos que por excelencia admite la consideración de diferentes sistemas de representación, por lo que la visualización es un proceso de uso constante por parte de los estudiantes, y es común ver que, ante la necesidad de responder a cierta consigna, se acuda a otras representaciones para poder explicar o responder. En este sentido, Hitt (1998) menciona un ejemplo donde ciertos profesores responden una pregunta relacionada con las funciones (y derivadas) y para poder validar esa respuesta es necesario poner en consideración tales afirmaciones en otro

sistema de representación, obteniendo contraejemplos. Es decir, las afirmaciones que se hacen en un registro de representación pueden ser analizadas ampliamente en otro registro distinto, al punto de evitar generalizar de forma errónea.

A pesar de lo anterior, hay resistencia al uso de consideraciones visuales, es decir, resistencia al uso simultáneo de diferentes sistemas de representación. En este sentido, los trabajos de Vinner (1989), Dreyfus y Eisenberg (1990), evidencian que existe, de parte de los estudiantes, una resistencia al uso de consideraciones visuales. Ellos señalan que, como consecuencia de que los profesores privilegian el pensamiento algorítmico sobre el visual, los estudiantes adoptan un comportamiento similar, de tal manera que dicha resistencia se reafirma, ya que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente.

Vinner (1989) reporta que sus estudiantes universitarios, aún después de haber pasado por un curso de Cálculo con énfasis en representaciones gráficas y demostraciones visuales, tuvieron una tendencia a la evasión de consideraciones visuales. En el test aplicado imperó el tener que interpretar ciertos conceptos más allá de su representación algebraica o simbólica; lo cual pone de manifiesto que, de parte de los estudiantes, hubo predominio de un pensamiento más analítico que visual.

Estos estudios, ponen en evidencia algunas dificultades asociadas tanto al proceso de enseñanza como al proceso de aprendizaje. En particular, cuando los estudiantes mencionan que una función es la expresión algebraica $f(x) = \dots$, se denota una de las dificultades más recurrentes en la comprensión de un objeto matemático: el confundir el objeto con su representación. En este sentido, cuando los estudiantes mencionan que la expresión algebraica o el diagrama sagital es la función, están restringidos por la definición conjuntista dada. Esto implica que las características del concepto de función sólo están asociadas a un determinado tipo de representación, desconociendo otras características que dicha representación no permite dilucidar o visualizar con mayor facilidad.

Así pues, comprender el concepto de función se trata de poder significarlo y atribuirle sus condiciones de variabilidad¹⁰ desde diferentes sistemas de representación, teniendo en cuenta que cada uno de los sistemas ofrece distintas perspectivas visuales, pero que en últimas, son indispensables para la construcción del concepto. Se trata pues, de una complementariedad entre cada sistema de representación y no de privilegiar unos sobre otros. En este orden de ideas, una función no es la gráfica cartesiana, no es su expresión algebraica, no es el diagrama sagital, no es la tabla de valores a doble columna y tampoco es la sintaxis que hace parte de la definición. Simplemente, la función es una abstracción matemática que indica el comportamiento variacional de un fenómeno, y en consecuencia, que cumple ciertas condiciones y se caracteriza a través de ciertos elementos o rasgos. No hay que confundir con el hecho de que la variabilidad que alberga el concepto de función se pueda representar de alguna manera específica.

Otros estudios sobre visualización matemática y el papel de las imágenes mentales han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones matemáticas para la formación adecuada de conceptos. En este sentido, se destacan Janvier (1987) Kaput, (1987 & 1991) Taghard, (1991) Duval, (1993 & 1995), entre otros. Considerando el caso particular de Janvier (1987), este menciona un ejemplo acerca de la adquisición del concepto de función, usando para ello, una figura en forma de estrella, en la cual en cada una de las esquinas exhibe una representación asociada al concepto de función: *la tabla, los gráficos, la fórmula, la descripción verbal y el concepto como tal*. Proporciona algunos elementos que muestran la importancia de cada uno de los tipos de representación para el concepto de función y también la necesidad de efectuar *un proceso de traducción* (Hitt, 1998) entre representaciones como un paso importante en la construcción de un concepto. En este esquema, no sólo es importante centrarse en la representación como un elemento aislado (una esquina de una estrella), sino que también, es necesario entender que estas representaciones son elementos de un sistema semiótico, visto de forma sistémica como un todo.

¹⁰ Por Variabilidad se entiende el rango de variación de los posibles valores que se le pueden atribuir a las magnitudes físicas

De otro lado, Duval (1993) propone cuáles son las características que se deben dar para que un sistema semiótico sea considerado como un sistema de representación de la manera siguiente:

Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis: 1) La presencia de una representación identificable.... 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada... 3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...(p. 40)

Esta concepción puede ser aplicada para el caso particular del concepto de función, pues estas tres condiciones se cumplen para el ámbito de las distintas representaciones de dicho concepto.

De otro lado, la visualización en términos de sistemas de representaciones impacta al currículo y por consiguiente, deben entrar en juego otros sistemas como por ejemplo el campo de acción tecnológico o virtual. Es en esta perspectiva, que la visualización amplía su rango de acción y contempla otras formas de representación que se convierten, como se ha dicho antes, en complementarias y deben ser tenidas en cuenta en simultaneidad con otras representaciones. En este sentido, se puede citar a Ben-Chaim, Lappan, & Houang (1989), quienes señalan que:

La naturaleza visual de las representaciones, permite a la mayoría de los estudiantes de este nivel entender una presentación informal de una prueba deductiva [por ejemplo, con ayuda de un software dinámico], mientras que un tratamiento algebraico podría estar muy lejos de su comprensión (citado por Hitt, 1998).

En esta misma dirección se realizan estudios para analizar el papel de las calculadoras gráficas en la resolución de problemas, por ejemplo el de Dick (1992). En los últimos años ha habido un desarrollo de nuevas tecnologías en el aula (de carácter dinámicas,

computarizadas), que de forma paralela y en correspondencia a ellas, ha posibilitado la generación de teoría ligada a la aprehensión de los objetos matemáticos a través del tratamiento y conversión de las representaciones en dichas herramientas o recursos. La influencia de estas ideas promovió cambios curriculares en algunos países; por ejemplo, en Israel y USA, se impulsó un currículo basado en la *triple representación* de conceptos matemáticos: el algebraico, el numérico y el gráfico. En este sentido, Schwartz, Dreyfus & Bruckheimer (1990) señalan:

El curriculum basado en el *Modelo de la Representación Triple* (TRM) integra actividades abiertas con una visión “convencional” al concepto de función y sesiones con “computadora” con actividades normales en el aula...” “... el curriculum TRM (unidad introductoria) trata con una gran variedad de funciones, promueve la recolección de datos en contextos reales, y está basado en la resolución de problemas incluyendo transferencia entre representaciones. El curriculum tiene la siguiente estructura 1. Entendimiento intuitivo del concepto de función 2. Representación gráfica de una función 3. Representación algebraica de una función 4. Transferencia entre las tres representaciones 5. Resolución de problemas promoviendo la transferencia entre las representaciones algebraica, tabular y gráfica. (Citado en Hitt, 1998, p. 17)

En estudios realizados por Selden et al. (1989, 1994) se muestra cómo estudiantes de primer año de ingeniería después de realizar un curso de Cálculo no pudieron resolver un problema específico. Sin embargo, el uso de nuevas tecnologías para el aula como calculadoras graficadoras y microcomputadoras permitió un mayor acceso a la representación múltiple de conceptos matemáticos, promoviendo la articulación entre diferentes representaciones de los conceptos, y facilitando el acceso a un nivel más importante en el aprendizaje de las matemáticas (Hitt, 1998). Esta tendencia ha dado lugar a la producción de libros como el de Finney et al. (1994), Hitt y Torres (1994), Hitt y Filloy (1995), Filloy et al. (1997); software como el de Abreu y Oliveró (1994, 1995), Monsoy (1995), Mejía y Cortés (1997), etc.

2.2.1.4 Dificultades asociadas al aprendizaje del concepto de función

Hitt (2003) establece que en lo que al concepto de función se refiere, hay dificultades tanto en profesores como en estudiantes y la causa principal es la consideración y tratamiento de este concepto desde solamente un registro imperante sobre los demás, el algebraico, lo cual produce una limitación en su comprensión. El problema, como se ha mencionado antes, no es el poco trabajo con otras representaciones, sino la inadecuada articulación entre las distintas representaciones. Justamente, esta articulación no es considerada usualmente por los profesores en la construcción del concepto de función. Así pues, el autor propone que las tareas de conversión promoverían un mejor entendimiento de las funciones y permitirían también el desarrollo de procesos de visualización. Desde ese punto de vista, los trabajos de Ben-Chaim et al. (1989), Eisenberg y Dreyfus (1990), Hitt (1998, 2002), Vinner (1989), Zimmermann y Cunningham (1990), entre otros, proporcionan elementos de reflexión sobre el papel que juega la visualización en la comprensión del Cálculo. Estas investigaciones también tienen en cuenta las representaciones que puedan surgir al considerar algunas herramientas computacionales como medio o recurso para trabajar el concepto de función en el aula.

De otro lado Hitt (1996) en una investigación que lleva a cabo con profesores, les propone que diseñen una clase del tema que ellos consideren, sin utilizar notas o libros. Uno de los nueve profesores que participaron en esa experimentación seleccionó el tema de función lineal. El profesor en cuestión, propone el siguiente enunciado: *Que el alumno determine la representación algebraica del siguiente problema*: “La edad del padre de Juan es el doble de la edad de este dentro de cinco años”. y = edad del padre de Juan: (Variable dependiente). x = edad de Juan: (Variable Independiente). A continuación se detallan aspectos que son relevantes en los hallazgos de las respuestas aportadas por el profesor en consideración. Dichos hallazgos se expresan en términos de errores que se presentan:

- El profesor parece no tener claro cuál es la diferencia entre una ecuación y una función.
- El contexto propuesto carece de verosimilitud, pues Si Juan tiene un año, el padre tendrá 6 años.

- El profesor pasa del caso discreto al continuo sin explicación alguna. Esto ocurre cuando al tabular y al graficar y vs. x , une los puntos sin explicación alguna.
- Como consecuencia del paso anterior, prolonga la recta a ambos lados, de tal manera que la recta ocupa los cuadrantes II y III del plano cartesiano. Esto sugiere una pregunta, ¿Qué significado le podemos dar a las edades negativas?
- De la representación gráfica en el plano cartesiano se pasa al registro de un diagrama sagital lo cual implica que el profesor regresa a una representación discreta sin mayor explicación.
- El profesor se contradice en la concepción que tiene acerca de *codominio* y *dominio* de una función.
- Hubo dificultades con la concepción de lo que significa que una función sea creciente.

En términos generales, se puede decir que si un docente tiene este tipo de dificultades y errores, los estudiantes (y en particular los que estén a su cargo) también pueden encontrarse con eventos como estos, al enfrentarse a actividades donde se pretenda conocer o verificar del grado de comprensión que se tiene acerca del concepto de función.

Asimismo, Hitt (2003) propone que existen otros problemas que se generan de “manera natural” por la manera como se enseña, pero estos son de naturaleza diferente. Por ejemplo, como consecuencia de la enseñanza convencional que para poder considerar el registro gráfico, paso a paso debe considerar: la existencia en una expresión algebraica, la determinación de una variable independiente, la tabulación para obtener parejas coordenadas, la ubicación de dicho puntos y su unión a través de una curva; se generan dos tipos de dificultades. Un ejemplo de lo señalado, se presenta cuando estamos enseñando a graficar. La graficación de funciones, a menudo se inicia con alguna expresión algebraica, se sustituyen algunos valores para formar una tabla, y enseguida se le solicita al estudiante unir esos puntos por medio de una curva. Ello producirá en el estudiante (al igual que en algunos profesores) dos tipos de conflictos:

- Falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones. Este conflicto se puede detectar de inmediato al solicitar la tarea de dada una gráfica de una función, construir su correspondiente expresión algebraica.
- Una concepción de función como función continua. Este conflicto se puede detectar solicitando la construcción de funciones diferentes que cumplan con ciertas características. Por ejemplo, con el ejercicio (ver Hitt, 1998, p. 251): Construir tres funciones diferentes f_1, f_2, f_3 de los reales en los reales, tal que $|f_1(x)| = |f_2(x)| = |f_3(x)| = 2$, para toda x real.

En particular, sobre la continuidad adjudicada a las funciones, Hitt(1997, 1998) menciona que su idea espontánea dificulta la consideración de expresiones analíticas que modelen una curva. Es en este sentido, que pasar del registro gráfico al algebraico, se convierte en fuente de dificultades y errores para los estudiantes, pues esa idea o tendencia intuitiva hace que sea más fácil pasar de lo discreto a lo continuo que de lo continuo a lo discreto. Debido a algunas formas de enseñanza, estos conflictos suelen presentarse de forma común al ir profundizando sobre el concepto de función. Lo más importante radica en que el profesor sea consciente de ello, para que esos conflictos cognitivos no desencadenen en obstáculos para el aprendizaje de las funciones y por consiguiente, del Cálculo.

2.2.1.5 Razonamiento covariacional.

De acuerdo con lo mencionado sobre el modelo cognitivo, es importante recordar que en esta parte, es vital reflexionar y analizar sobre la forma en que los estudiantes aprenden y logran adquirir o acumular conocimientos matemáticos nuevos. Para ello, se requiere contar con un instrumento bien estructurado, soportado en un marco conceptual, que permita clasificar las actuaciones de los estudiantes en torno a las actividades de covariación.

Así pues, como la propuesta de trabajo tiene como intención diseñar y aplicar tareas enmarcadas en situaciones de covariación, con el fin de verificar el nivel de apropiación de algunos conceptos en torno a la función, este trabajo se apoya fundamentalmente en el Razonamiento Covariacional propuesto por Carlson, et al (2003).

El Razonamiento Covariacional es abordado por varios autores como Marilyn Carlson, Sally Jacobs, Edward Coe, Sean Larsen y Eric Hsu (2003). Desde su perspectiva este razonamiento es definido de la siguiente manera: “Actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p. 130).

El estudio y desarrollo del razonamiento covariacional debe ir ligado a fenómenos o situaciones dinámicas que no necesariamente deben ser modeladas en un software como Cabri o GeoGebra. Estas situaciones dinámicas sólo necesitan que el estudiante construya imágenes de dos variables dependientes de una función que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de una variable independiente, por ejemplo el área de la sombra de un edificio con respecto a la hora del día.

El razonamiento covariacional es la forma didáctica de estudiar lo que matemáticamente se conoce como covariación. Carlson et al, en el 2002, realizó un estudio con estudiantes universitarios en torno a la covariación y para ello usó la categoría de razonamiento covariacional. Al momento de analizar y presentar conclusiones, tuvo en cuenta una rejilla de análisis donde podía clasificar a los estudiantes, según su nivel de comprensión y abstracción. Para ello, propone un marco conceptual asociado a acciones mentales y los comportamientos asociados de los estudiantes. Igualmente cita unos niveles de razonamiento covariacional donde se puede evidenciar el grado de pensamiento covariacional desarrollado por los estudiantes.

Como no se puede percibir directamente lo que piensan los estudiantes, los comportamientos se convierten en el mayor insumo para saber qué acción mental se encuentra asociada. Por ejemplo, para Carlson, los estudiantes deben ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos y esto debe ir ligado a cómo los estudiantes interpretan y construyen enunciados.

A continuación, en la siguiente tabla, se citan las acciones mentales propuestas por Carlson.

Tabla 2. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación

Acción Mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos de la razón de cambio instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función.

Tomado de Carlson et al. (2003)

En cuanto a la *tabla 2*, es importante mencionar que cuando se habla de las acciones mentales, se hace en torno a la teoría de Galperin (1995) que concibe el desarrollo humano en constante cambio y perfeccionamiento a través de la propia actividad del estudiante, los momentos fundamentales del aprendizaje, validándolo como proceso de construcción y reconstrucción del conocimiento, que propicia el enriquecimiento de las capacidades del individuo y de hecho, sus posibilidades de accionar sobre el medio. Hay que aclarar que esta es una perspectiva Vigostkiana en que se concibe la interacción de los sujetos como promotora de los procesos cognitivos. Galperin instrumenta pedagógicamente la teoría de L.S. Vigotski a partir del desarrollo de la teoría de formación por etapas de las acciones mentales y los conceptos y resume:

La actividad objetiva concreta del sujeto... significa el requisito de interpretarlos como un proceso de solución de determinados problemas. El proceso de solución de problemas consiste en la transformación orientada del material inicial y tal transformación se consigue con la ayuda de determinadas acciones realizadas en la mente. De aquí que el problema

psicológico consista en esclarecer de qué forma estos objetivos se transforman en nuestras propias acciones mentales y principalmente, de qué forma aparece un proceso psicológico nuevo, concreto (Galperin, 1982).

Carlson describe cada acción mental, y el comportamiento descrito corresponde a cada comportamiento que previamente había identificado en los estudiantes de Pregrado dentro de su estudio-investigación. De esta manera, las acciones mentales allí propuestas (las del marco conceptual de la covariación) proporcionan elementos básicos para clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando enfrentan tareas de covariación. Se manifiesta cómo sólo con examinar los comportamientos y acciones mentales, es suficiente para poder determinar la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, cuando este se enfrenta a una tarea específica de covariación.

Las acciones mentales van desde la primera (AM1) hasta la quinta (AM5), donde la primera es la más sencilla y corresponde a la identificación de lo que está cambiando utilizando el lenguaje verbal. La segunda corresponde a la dirección de cambio, es decir, si lo que cambia aumenta o disminuye (puede existir la posibilidad que se mantenga igual). La tercera corresponde a la concientización de las medidas, esta concientización está muy asociada a la necesidad de medir y coordinar la cuantificación de los cambios identificados. La cuarta corresponde a la construcción de esbozos de lo que se presume será la respuesta y como consecuencia, se habla de la coordinación de la razón de cambio promedio de una función, en correspondencia con los incrementos de la variable independiente. En la última acción mental, se espera que el estudiante tenga construida una imagen madura, además del refinamiento y apropiación de todas las características y propiedades del tema trabajado, todo esto, cristalizado en la consolidación de la coordinación de la razón de cambio instantánea, en la que debe predominar el reconocimiento de cambios instantáneos en la razón de cambio con todo lo que implica, concavidades y puntos de inflexión.

Además de estas cinco acciones mentales, Carlson propone cinco niveles de Razonamiento covariacional donde se puede evidenciar el grado de pensamiento covariacional desarrollado por el estudiante. Para la covariación, propone que cada nivel se va alcanzando de acuerdo a su desarrollo en la sustentación de las anteriores acciones mentales, por

ejemplo, si un estudiante está en el nivel 3, es porque manifiesta los tres comportamientos que sustentan cada uno de estos tres niveles, es decir que de manera acumulada muestra las características de las acciones mentales uno, dos y tres (AM1, AM2 y AM3).

Un estudiante que en relación con una tarea específica se clasifica en el nivel 5 del razonamiento covariacional (N5, nivel de la razón instantánea), es capaz de razonar utilizando AM5 y también es capaz de descomponer esa acción mental para razonar a través de niveles que van de AM1 a AM4. La imagen de covariación N5, sustenta comportamientos que demuestran que el estudiante comprende que la razón de cambio instantánea es resultado de refinamientos más y más pequeños de la razón de cambio promedio y que un punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o lo contrario (Carlson et al. 2003).

A continuación se explicitan los niveles de razonamiento covariacional.

Tabla 3. Niveles de razonamiento covariacional

NIVELES	CARACTERÍSTICAS
Nivel 1 Coordinación	Las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 Dirección	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2).
Nivel 3 Coordinación Cuantitativa	Las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. (AM1, AM2 y AM3).
Nivel 4 Razón Promedio	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada (AM1 hasta AM4).
Nivel 5 Razón Instantánea	Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de los puntos de inflexión (AM1 hasta AM5).

Tomado de Carlson et al. (2003)

Un estudiante se clasifica en un determinado nivel de razonamiento covariacional de acuerdo con la imagen global que parece manifestar a la(s) acción(es) mental(es) que esa persona exhibe en el marco de una tarea, problema o situación que propende por el uso de

la covariación para llegar a una solución. Tal como se observa en la *tabla 3*, el marco conceptual para la covariación tiene 5 niveles distintos que describen las categorías distintas de desarrollo cognitivo en torno a una tarea, cuando un estudiante logra avances en la abstracción del conocimiento aplicado o adquirido durante la resolución. En este caso, los avances en la abstracción reflejarían cómo el individuo avanza en el razonamiento covariacional, a través del avance en etapas referidas a cada una de las acciones mentales descritas en la *tabla 2*.

De acuerdo con este enfoque conceptual, se puede decir que la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo ha alcanzado un determinado nivel cuando sustenta a las acciones mentales asociadas con ese nivel y además a las acciones mentales asociadas con todos los niveles que están por debajo, siendo el nivel 1, el menor y el nivel 5, el mayor. Es importante resaltar que según lo observado en la *tabla 3*, se habla de unas imágenes de covariación para describir los niveles del marco conceptual. La noción de imagen que Carlson concibe, corresponde a la caracterización hecha por Thompson (1994), según la cual, una imagen es aquello que *se enfoca en la dinámica de las operaciones mentales*. A medida que la imagen de covariación que tiene un individuo se desarrolla, ella sustenta un razonamiento covariacional más sofisticado (Carlson, 1998).

Para la clasificación de los estudiantes, Carlson también manifiesta que hay que tener cuidado con los pensamientos pseudo-analíticos ya que estos derivan comportamientos pseudo-analíticos. Para comprender esta afirmación, primero entendamos que la palabra pseudo se refiere a algo ficticio o falso; partiendo de esto, un comportamiento pseudo-analítico se entiende como un comportamiento que no está ligado a las características o propiedades de un concepto, más bien está ligado a la memoria del estudiante porque seguramente lo vio, pero no lo comprende, es decir, está ligado a procesos más mecánicos o algorítmicos, por ello, al mostrar estos comportamientos, se pueden clasificar a los estudiantes de manera errónea. En otras palabras, es posible que un estudiante se muestre como del nivel AM5 sin aplicar un razonamiento covariacional del nivel N5, porque no manifiesta comportamientos asociados a la acción mental AM4.

Puede llegar a pasar en algunos casos que en los estudiantes se observen comportamientos que dan la impresión de que están entendiendo, por ende, esto los ubica en una acción mental específica; sin embargo, si se ponen a prueba dichos comportamientos (puede ser a través del lenguaje formal o de una entrevista) estos estudiantes no proporcionan evidencia de que tengan un nivel de comprensión asociada a la acción mental en la que inicialmente se le había clasificado.

...Nos referimos a ese comportamiento como un comportamiento pseudo-analítico (i.e., la comprensión subyacente necesaria para desempeñar el comportamiento específico de manera significativa no está presente), y describimos la acción mental que produjo el comportamiento como una acción mental pseudo-analítica (refiriéndose que, el comportamiento pseudo-analítico es producido por procesos de pensamiento pseudo-analítico) (Vinner, 1997).

Como se ha mencionado en lo concerniente al razonamiento covariacional, este contempla varios niveles con sus respectivos comportamientos y acciones mentales asociados. Y son justamente los comportamientos los que, en primera instancia, son insumos para la clasificación de los estudiantes en algún nivel determinado. En este orden de ideas, es importante resaltar que la manera en que estos comportamientos pueden ser evidentes o puestos de manifiesto, es a través de la producción de los estudiantes. Dichas producciones pueden estar en dos formatos, por escrito (lenguaje natural, formal o gráfico) o discurso oral (donde prevalece mayoritariamente el lenguaje vernáculo).

Independientemente de cómo se consolide la respuesta de un estudiante, los enunciados serán los que en su contenido llevan información de qué y cómo está entendiendo una situación determinada. De esta manera, las explicaciones que proporcione evidenciarán de qué está pensando, cómo interpreta y cómo organiza su discurso para poder convencer sobre su postura. Igualmente, a través de esos enunciados es que podrá hacer evidente la forma en que captura o coordina varios tipos de representación en torno a la covariación.

En las actividades que se proponen, se hace énfasis en que el desarrollo de las consignas y procesos heurísticos que se requieran, pasen necesariamente por el hecho que los

estudiantes deban realizar expansiones discursivas. Esto, con el propósito de mirar el contenido de dichas expansiones y verificar el grado de comprensión de ellos, al igual que el nivel en el que se les puede clasificar, de acuerdo con la *tabla 3*. Desde esta perspectiva, los enunciados son usados en calidad de herramienta o recurso y no como una categoría u objeto central de estudio. Desde luego, que es una extensión también de lo que se consideró anteriormente sobre los SMS, puesto que semióticamente hablando, esos enunciados están enmarcados en el lenguaje natural tratando de explicar y encadenar ideas y signos matemáticos.

Además, los SMS están inmersos en todo el proceso de observación en las tareas de covariación, pues aparte de lo propiamente sintáctico y semántico, se develan todas aquellas cargas semánticas y estratos de SMS que son pre-requisito y a la vez obstáculo en la concepción de otros SMS más abstractos. Esto se hace evidente cuando los estudiantes deban demostrar sus habilidades de razonamiento covariacional en procura de resolver situaciones asociadas a acciones mentales y niveles de razonamiento covariacional determinados.

El modelo cognitivo y de comunicación, como ya se mencionó, están fuertemente relacionados, pues no se puede pensar en la consideración de procesos cognitivos sin que se pase necesariamente, por el dominio y uso de habilidades de comunicación que pasan por la apropiación de SMS. Así mismo, en vía contraria, no se puede pensar en el dominio de habilidades y competencias comunicativas, sin que estas sean producto de procesos cognitivos que soportan el desarrollo intelectual de un estudiante. En este orden de ideas, y de acuerdo con lo que se ha expuesto en el modelo de cognición y comunicación, a continuación se explicitan reflexiones y conclusiones que aportan a las implicaciones de este modelo en la consolidación del MTL.

El MTL inicial debe caracterizarse desde el componente de cognición y comunicación, de tal manera que en el estudio se tengan en cuenta los siguientes aspectos:

- La consideración de distintos estratos de SMS adquiere relevancia, en la medida en que en la covariación es necesario hacer seguimiento a la forma en que los

estudiantes, en sus actuaciones, evidencian habilidades en el manejo conceptual y procedimental asociado a cada SMS, para determinar los SMS intermedios que permiten acercarse a otros SMS más abstractos. Como los SMS están compuestos de símbolos cuya sintaxis y semántica deben estar en constante reformulación, es importante fijar la atención en las cargas semánticas de ciertos símbolos y nociones en un SMS concreto, pues estos inducen a obstáculos para acceder a SMS más complejos o abstractos.

- La comprensión de un objeto matemático, en particular el del concepto de función, se fundamenta en lo que Tall y Vinner (1981) proponen, pues asociado a un objeto está el concepto y su imagen. En este orden de ideas, para este trabajo es importante que las actividades que se propongan en las tareas de covariación, propicien elementos para fortalecer la visualización, que como consecuencia, fortalezcan también la imagen del concepto. Para Vinner la comprensión del concepto de función está sujeta a la reproducción de *imágenes del concepto*, es decir, a todas las imágenes mentales o representaciones, asociadas a la mente del estudiante. En concordancia con lo anterior, la visualización matemática se relaciona con la habilidad de usar y coordinar diferentes sistemas de representación asociados al concepto de función, y por consiguiente, con el uso competente que permitan la transición paulatina de estratos de SMS aritméticos a estratos de SMS algebraicos.
- Desde el punto de vista cognitivo, la comprensión del concepto de función se le dificulta a los estudiantes en general debido a que oponen resistencia a usar diferentes representaciones de forma simultánea, por lo tanto las tareas de covariación deben contemplar consignas que garanticen el uso y conversión de diferentes registros de representación, incluyendo la visualización que permiten los recursos tecnológicos (TIC). Asimismo, en esta propuesta, es importante garantizar que de parte de los estudiantes se logre diferenciar entre el concepto de función y sus respectivas representaciones. No confundir el concepto con su representación.
- En cuanto a los aspectos matemáticos asociados al concepto de función es relevante centrar la atención en el dominio y rango, pues el conjunto numérico que los representa, suele convertirse en dificultades para los estudiantes, cuando se confunde lo discreto con lo continuo, y este último sea considerado como extensión

intuitiva y espontánea de lo discreto. El continuo numérico debe ser un aspecto relevante a tratar.

- El razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al. (2002), es un marco conceptual que en su propuesta, proporciona elementos importantes para la consolidación del modelo cognitivo y de comunicación puesto que propone el trabajo con la covariación para poder caracterizar, en las actuaciones de los estudiantes, los procesos cognitivos y comunicativos implicados para dar cuenta de su grado de comprensión asociada al uso de diferentes registros de representación, el estudio del cambio y trabajo explícito con conceptos y procedimientos asociados al Cálculo. Este instrumento permitirá, de forma objetiva, poder contrastar la hipótesis planteada en este estudio.

2.2.2 Modelo de competencia formal

En el apartado 2.1.1 se mencionó cómo este modelo de competencia formal y la fenomenología propuesta para él se relaciona e influye en las otras componentes del MTL. El modelo de competencia formal, está direccionado por un análisis fenomenológico de la función. En este orden de ideas, en el modelo de competencia formal, el análisis fenomenológico del concepto de función se hace a partir de la fenomenología histórico-epistemológica y la fenomenología pura.

2.2.2.1 Fenomenología histórico-epistemológica

El siguiente apartado tiene la intención de mencionar de forma breve el transitar del concepto de función a través de la historia, para contemplar de forma paralela su visión epistemológica y por consiguiente, las distintas concepciones que ha tomado, lo cual dará indicios de sus usos, formas de difusión y posibles obstáculos epistemológicos.

Hay todavía muchas divergencias en cuanto a alguna fecha estimada para la génesis del concepto de función en la actividad matemática. Quizás tal grado de distanciamiento entre varias posturas o fuentes, se debe a que el concepto de función ha sido clave en el desarrollo de las matemáticas y siempre se ha estado contemplando en distintas fechas y con diferentes acercamientos.

Siguiendo la propuesta de Youschkevitch (1976), se distinguirán y detallarán tres grandes momentos: la Edad Antigua, la Edad Media y el periodo moderno.

Edad Antigua:

Tal como lo afirma Azcárate (1990), rastrear el concepto de función en la Edad Antigua puede suponer el riesgo de tener que remitirse a fechas muy lejanas donde, aunque el concepto no estaba bien documentado o definido, sí había nociones de fenómenos de cambios asociados. Por lo tanto, se hará especial énfasis a dos culturas que en la Edad Antigua son referentes documentados cuando de contemplar las primeras aproximaciones a la contribución del concepto de función, se refiere. De esta manera, se analizará el caso de dos civilizaciones antiguas que contribuyeron al concepto de función en su parte inicial, el caso de Babilonia y el caso de Grecia.

En la Edad Antigua, aunque no hubo nociones generales sobre cantidades variables y sobre función, sí existieron estudios sobre casos específicos de la contemplación de dependencia entre dos cantidades. En este orden de ideas, se revisará a los griegos por la importancia que tiene en cuanto a su influencia en la matemática moderna, y a los babilonios, por cuanto al conocimiento que se tiene sobre estudios de fenómenos de cambio y leyes cuantitativas obtenidas por medio de tablas (Azcárate, 1990, p. 38)

En lo que a los babilonios se refiere, aunque el conocimiento que se tiene sobre sus estudios está documentado sobre todo en una aritmética y geometría muy empíricas basadas en la resolución de problemas, tablas de cómputo y problemas resueltos, se desconocen los fundamentos teóricos que soportaban la solución de dichos problemas (Ibid, p. 39).

Aunque los estudios que se conocen sobre teoría matemática de los babilonios están basados en la aritmética, de forma paralela, también se le atribuye a esta cultura, grandes incursiones en la astronomía, apoyándose fundamentalmente en métodos geométricos, a partir de la observación de fenómenos cotidianos caracterizados por su periodicidad y el cambio. De esta forma, se asume que en la intención de querer aritmetizar dichos fenómenos, llegaron a contemplar dependencia entre cantidades.

Ahora, a diferencia de los babilonios, de la cultura griega se tiene más conocimiento o documentación sobre su desarrollo en las matemáticas. Hoy en día se sabe que el concepto de función está estrechamente relacionado con el de proporción, por esta razón es importante poder describir el desarrollo de dicha noción en la cultura griega. Para los griegos, una de las nociones fuertes fue el de proporcionalidad entendida como la relación entre dos razones, donde cada razón alude a una magnitud de la misma naturaleza y se representaba de forma discreta con el uso de números naturales. Por esto, cuando se hablaba de una razón se podía asumir la existencia de un número o medida como unidad que midiera a cada una de las dos cantidades implicadas en la razón. Este hecho, no permitía caracterizar y describir relaciones de dependencia entre magnitudes de distinta naturaleza, que es justamente una de las situaciones que subyacen al concepto de función. Esta forma de considerar una proporción, relacionando magnitudes homogéneas, encajaba con la forma en que se representaba desde lo numérico y prevaleció por muchos siglos, inclusive, posterior a la Edad Antigua.

En los griegos, hubo grandes avances en cuanto a la consideración de cantidades variables, la idea de cambio e incluso, el estudio del movimiento. Sin embargo, también se pueden caracterizar algunos obstáculos (el estudio limitado de las proporciones, debido a la no contemplación de la inconmensurabilidad y la disociación de número y magnitud) que impidieron que los avances no desencadenaran en una consolidación del concepto de función, pues no fueron estudiados desde un punto de vista cuantitativo.

Edad Media:

En este periodo de la historia, hay acercamiento de las Matemáticas a las Ciencias Naturales, una de ellas, la Física. Sin embargo, las Matemáticas se caracterizan por ser más aplicadas que teóricas, de este modo, están asociadas a la descripción de los fenómenos naturales. En el mismo sentido, el concepto de función está asociado a los fenómenos que implican cambio, en particular la descripción del movimiento mediante gráficas sencillas.

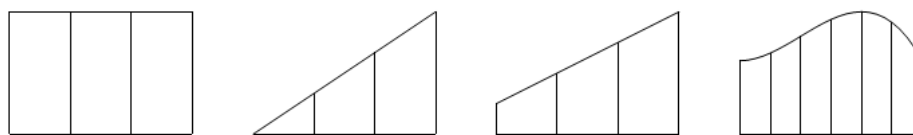
En principio es pertinente y necesario mencionar que los Árabes aportaron las bases del Álgebra, la Aritmética y la Geometría; tres ramas de las Matemáticas que se desarrollan en todo su esplendor más adelante y que sin duda van a ser importantes en las aproximaciones al concepto de función a lo largo de la historia. Sin embargo, de acuerdo con Azcárate & Deulofeu (1990), aunque el aporte de los árabes es significativo, en especial por su aporte al tratamiento de las funciones trigonométricas, no se encuentra un concepto general de función, más allá de las relaciones de dependencia de cantidades y la tabulación.

Hacia el siglo XIV, en las escuelas de Oxford y París, fenómenos como velocidad instantánea y aceleración están asociados al concepto de función en términos de cantidades variables. Sin embargo, el carácter experimental, aún no está en su furor, la descripción de fenómenos naturales complejos, siguen siendo descritos de manera cualitativa. Es decir, pese a que las descripciones de las relaciones entre estas cantidades variables son de tipo funcional, están desprovistas del carácter cuantitativo.

Nicolás Oresme (1361), propone una aproximación geométrica a los fenómenos que implican cambio, en particular los cinemáticos. La importancia de su aporte es que se prefigura el concepto de función como modelo de la variación, pero lo que limita su construcción es que no utiliza o no cuenta con el álgebra y menos con la derivada para explicar la variación y en consecuencia, sólo se supedita a la mera representación gráfica. En su aproximación geométrica, utiliza segmentos para representar cantidades variables, porque todo fenómeno medible toma como unidad el segmento, que representa a su vez las cantidades continuas y así hasta clasificar los fenómenos cinemáticos y representarlos, es decir, estos pueden ser constantes o variables.

Para el caso de la velocidad y la aceleración se tienen varios tipos de móviles: con velocidad constante; con aceleraciones constantes, y con aceleración variable. Las siguientes gráficas, tomadas del artículo de Ugalde (2014), ilustran estas clasificaciones en ellas los segmentos horizontales representan el tiempo y los verticales representan diferentes velocidades.

Ilustración 6. Representaciones utilizadas por Óresme



Tomado de Ugalde (2014) p.10

Estas construcciones, además de ilustrar un modelo de variación, muestran las representaciones de una función sobre unas coordenadas cartesianas y la integral o el área bajo la curva; cimientan las bases intuitivas y geométricas de las definiciones más generales y abstractas que desarrollan posteriormente otros matemáticos apoyados en el Álgebra, el Cálculo infinitesimal, la Teoría de conjuntos y los siguientes desarrollos matemáticos que generalizan y amplían los conceptos. En la Edad Media, no fue posible este nivel de abstracción y generalización del concepto de función y otros conceptos matemáticos, porque no se contaba con suficientes desarrollos en el área.

En el *Renacimiento*, se identifican algunos avances significativos en el Álgebra, al usar símbolos para representar los objetos matemáticos; que son el resultado de los aportes de Al-Jwarizmi, Cardano, Vieta y, más adelante, en la Edad Moderna, Descartes. De esta manera, en el siglo XVI se abordan problemas relacionados con lo experimental y los fenómenos físicos, lo que implica el estudio de variables, las relaciones entre estas y su representación, lo que impulsó el progreso de las Matemáticas. En este orden de ideas, el uso de símbolos y las relaciones y representaciones de variables en fenómenos físicos de carácter experimental se constituyen en un aporte para la construcción del concepto de función, que sólo aparece en la Edad Moderna.

Edad Moderna:

De acuerdo con Azcárate & Deulofeu (1990) y Ugalde (2014), sólo en este periodo de la historia, es posible identificar el concepto de función y la evolución del mismo desde diferentes perspectivas. Con el estudio de las cantidades infinitesimales y las operaciones entre estas aparece la necesidad de las relaciones de dependencia funcional y la necesidad de definir matemáticamente el concepto de función. Este concepto empieza a tomar forma y

a definirse en tres momentos de este periodo: el primero, entre los siglos XVII y XVIII; el segundo, en el siglo XIX y el tercero en el siglo XX.

En los siglos XVII y XVIII, se destacan los trabajos de Descartes, Fermat, Newton y Leibniz. Sin embargo, de acuerdo con Azcárate & Deulofeu (1990), es importante mencionar que el auge de las Matemáticas en la Edad Moderna inicia con los aportes de Galileo, por su trabajo científico, que se caracterizó por cuantificar el movimiento y el interés por la experimentación para describir las leyes físicas, desencadenado así, relaciones de dependencia funcional que son fundamentales para el desarrollo del concepto función.

En 1637, Descartes hace un gran aporte a las matemáticas con la Geometría analítica, porque las curvas y superficies se pueden interpretar por medio de ecuaciones, situación que da paso, más adelante, a la algebrización de la Geometría. A partir de este hecho, una ecuación puede expresar la dependencia de cantidades variables y el cálculo de una variable con respecto a la otra; a la vez que prefigura un concepto de función más general, definido como la relación entre conjuntos numéricos y no de cantidades, haciendo posible la expresión algebraica para las funciones.

Un aporte significativo de Descartes para el concepto de función es el sistema de coordenadas cartesiano, lo cual abrió el camino al desarrollo del Cálculo diferencial e integral. De ahí, que se evidencian, de manera implícita en su obra, conceptos como dependencia entre cantidades, variables dependientes, variables independientes, constantes entre otros (Ugalde, 2014).

Por su parte, Fermat, perfecciona el sistema de coordenadas cartesiano y define los principios fundamentales de este. Gracias a ello, representa ciertas curvas tales como la recta, la circunferencia con centro en el origen, la elipse, la parábola y la hipérbola utilizando ecuaciones. Azcárate & Deulofeu (1990).

A diferencia de la obra de Descartes, Newton, reconcilia las Matemáticas y la Física pues expresa sus ideas fundamentales a través de la mecánica. Sin embargo, el aporte de Newton

al concepto de función, se refleja en su teoría *fluxiones*, entendiendo *fluxión* como la velocidad con la que varía la variable x en el tiempo, así pues, la función para Newton está relacionada con este concepto:

En su teoría las magnitudes están descritas como movimientos continuos, de manera tal que la variable “dependiente” se va generando en forma continua a partir de la variable “independiente”. Newton utilizó la palabra “genita”, que en latín significa generada o nacida, para referirse a expresiones de la forma AX^n . Para varios autores, “genitum” surge como la primera expresión usada para referirse al concepto de función. (Ugalde, 2014 p.12)

De ahí, que la función esté relacionada con la variación y el cambio en una relación de dependencia de variables continuas, relacionado con dos problemas del Cálculo infinitesimal, la derivación y la integración.

Por su parte, *Leibnitz* descubre que la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abscisas, es decir, está refiriéndose al término *fluxión* usado por Newton. En ese orden de ideas, estas dos posturas son similares, en tanto que llegan al mismo punto, pero si bien la obra de Newton es más completa en términos teóricos, la obra de Leibnitz es más asequible en términos de notación, pues aún se utilizan la simbología e incluso los términos, diferencial, integral, función y el nombre a la teoría, *Cálculo diferencial*, que él utilizó. (Azcárate & Deulofeu, 1990)

Los aportes de Leibnitz fueron cruciales para la definición de función, pero esta se ve limitada por su tendencia intuitiva en términos geométricos. Sin embargo, adquiere un carácter más abstracto, con *Jean Bernoulli* porque este le atribuye un sentido analítico. Este carácter analítico, se evidencia en su definición, tal como lo cita Azcárate (1990), para Bernoulli: “una función arbitraria de x es una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x y constantes, esta *manera cualquiera* se entiende como una expresión algebraica o trascendente” (p.50).

Es así que entre los siglos XVII y XVIII, aparece el auge del análisis como disciplina, que se desprende de las intuiciones geométricas y mecánicas, generalizando sus conceptos a

través de un solo lenguaje, el Álgebra, que a la vez que resuelve cualquier otro tipo de problemas ya sean geométricos, mecánicos o de otro tipo.

Ahora, desde la Física, *Euler* presenta una solución al problema las cuerdas vibrantes asignando funciones arbitrarias, a partir de una serie infinita de funciones trigonométricas, pero luego, Fourier demostró que esta afirmación no era cierta.

En este sentido, el aporte de Fourier, permite comprender que la expresión *de cualquier manera* expresada en la definición de Euler no es determinante para esta, lo realmente importante en esta definición es “cómo se expresan los valores que toma la función” (Ugalde, 2014 p.14). Sin embargo, se sigue utilizando la definición analítica de función por su relación a la continuidad, es decir, la atención se centra especialmente en el estudio de funciones continuas.

En el segundo momento de la Edad Moderna, el siglo XIX, el concepto de función se ve restringido nuevamente al considerar el tratamiento de funciones arbitrarias. Fourier, hace un nuevo aporte que logra saldar este obstáculo con el estudio de las series trigonométricas, que en honor a su nombre son conocidas como *series de Fourier*, pues se le da tratamiento analítico a las funciones arbitrarias. Este aporte generaliza el concepto de función porque ya no se limita solamente a las funciones continuas.

Luego *Dirichlet*, discípulo de Fourier, es el primer matemático en dar una definición muy general que se aproxima al aporte hecho por su maestro, incorporando a este concepto las funciones completamente arbitrarias. Así, la definición para Dirichlet es:

Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x . (Azcárate & Deulofeu 1990, p.52).

Los diferentes periodos descritos en este apartado, se ha evidenciado como se parte de una caracterización de dependiente de cantidades, que si bien no se constituye como un

concepto de función, es un cimiento fundamental que lo empieza a caracterizar, y que más adelante (con la mecánica, el Álgebra, el Cálculo y el análisis) este concepto va evolucionando y por su puesto pasa lo mismo con la aparición de la Teoría de conjuntos.

En el tercer momento, el Siglo XX, el concepto conjuntista de función es tan abstracto que se desprende del uso de variables numéricas, es decir, las variables no son de naturaleza real o compleja y se generaliza del tratamiento numérico al tratamiento conjuntista. Así, la función se define de conjuntos arbitrarios a conjuntos arbitrarios. Finalmente, el concepto actual de función es:

Sean A y B conjuntos. Una función $f: A \rightarrow B$ es un subconjunto f de $A \times B$ tal que:

- a) Para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a, b) en f ; y*
- b) si (a, b) y (a, b') son elementos de f , entonces $b = b'$*

En términos del desarrollo de las Matemáticas, la riqueza de esta definición consiste en que la generalidad de los conjuntos permite la solución de problemas de distinta naturaleza, que no se ven limitados por situaciones particulares y de este modo permiten el tratamiento de funciones de varias variables, dando solución a problemas de diferentes fenómenos físicos. Sin embargo, en términos didácticos, este concepto está desprovisto de todo significado, porque está alejado de todas las concepciones clásicas mencionadas en cada periodo de la historia y oculta los obstáculos que hicieron posible su construcción, las ideas de variación, continuidad, variación como parámetro temporal, dependencia, entre otros. Estos se pierden y ello se convierte en un obstáculo en su enseñanza y aprendizaje, porque estas ideas construyen un concepto, si se quiere, más asequible y significativo haciendo posible su comprensión en términos de su aplicación.

2.2.2.2 Fenomenología pura

En este apartado se hace énfasis en la concepción actual y usos del concepto de función. Para ello, se detalla cómo se concibe el concepto de función desde el saber sabio, antes de ser transpuesto a un contexto escolar.

Para referirse al concepto de función desde el saber sabio, es indispensable tener en cuenta que ese saber sabio, también llamado saber científico o conocimiento erudito, juega un papel fundamental en los contextos escolares, ya que mediante la transposición didáctica (Chevallard, 1985) se convertirá en saber a ser enseñado. La transposición didáctica es el proceso mediante el cual un conocimiento científico es modificado por agentes de cierta sociedad con el propósito de que sea susceptible de ser enseñado, es decir, que ese conocimiento sea contextualizado y re-contextualizado.

De acuerdo con todo lo mencionado hasta el momento, es menester aclarar que lo que se va a decir acerca del concepto de función en lo que respecta a cómo se concibe desde lo teórico, ya ha sufrido cierta transformación, pues se va a rastrear dicho concepto desde algunos libros que se usan para formar matemáticos, y esto implica de forma implícita una intención pedagógica en dichos textos. Sin embargo, se puede considerar que, dentro de la literatura existente, y teniendo en cuenta que el concepto que se va a analizar es concepto en tanto que está contextualizado. Así, los textos universitarios que se usan para instruir a los futuros matemáticos sirven de referencia para rastrear desde el punto de vista teórico, la *función*, que es del interés explicitar y relacionar en un marco teórico cercano al puro. El saber sabio también puede reconocerse desde la perspectiva epistemológica a través de la historia.

Para ello, es menester acercarse a lo que se concibe por el concepto de función desde el saber teórico, se revisa cómo los textos universitarios: *Cálculo con Geometría Analítica*, (Edwards & Penney, 1996) y *Calculus I*, (Apostol, 1984) presentan dicho concepto.

Edwards & Penney (1996) empiezan dándole relevancia a los números reales y las funciones, puesto que las cantidades variables y constantes se denotan con los números reales cumpliendo propiedades específicas, así como el uso de las funciones se hace para describir las relaciones entre las diversas variables. Así pues, los autores consideran que los números reales y las funciones son aspectos claves en el desarrollo y enseñanza del Cálculo, esta aseveración es explícita en el primer capítulo titulado *funciones y gráficas*. De esta manera, haciendo un breve recuento (en tres páginas) sobre las propiedades de los

números reales, abordan el concepto de función y la definen como sigue: *Una función real f definida en un conjunto D de números reales es una regla que asigna a cada número x en D exactamente un número real, denotado con $f(x)$.*

Seguidamente, mencionan que

el conjunto D de todos los números reales para los que $f(x)$ está definida es el *dominio* o *dominio de definición* de la función f . El número $f(x)$ es el valor de f en el número (o punto) x . El conjunto de los valores $y = f(x)$ es el rango de f . Es decir, el rango de f es el conjunto $\{y: y = f(x) \text{ para algún } x \text{ en } D\}$

Manifiestan que cuando se describe la función f con la fórmula $y = f(x)$, a x se le llama la variable independiente y a y la variable dependiente pues el valor y depende (mediante f) de la elección de x .

En su propuesta los autores continúan con ecuaciones de las líneas rectas, para finalmente, referirse a las gráficas de la siguiente manera:

- Gráfica de una ecuación: La gráfica de una ecuación en dos variables x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano que satisfacen la ecuación.
- Gráfica de una función: La gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

El proceso de tabulación se asume como una asignación arbitraria de valores a la variable independiente y la obtención de respectivos valores para la variable dependiente. En cuanto a la noción de *Ecuación*, los autores no definen algo de forma explícita, no obstante, aluden a ella constantemente, asumiendo que el lector reconoce sus características. A pesar de esto, se puede inferir que la ecuación se considera como la igualdad entre dos funciones, lo que se evidencia a continuación:

[...]. Recordemos que una raíz (o cero) de la función f es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ ” (p. 34). Aquí se presenta una igualdad entre la función en consideración y la función constante $f(x) = 0$.

[...]. Una vía es escribir la ecuación dada en la forma $f(x) = g(x)$, donde las funciones f y g se puedan graficar con facilidad. Entonces, las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$, corresponden a las intersecciones de las dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$.

De otro lado, Apostol (1984) empieza realizando una introducción, donde considera las siguientes partes:

- Introducción histórica.
- Conceptos básicos de la teoría de conjuntos.
- Un conjunto de axiomas para los números reales.
- Inducción matemática, símbolos sumatorios y cuestiones relacionadas.

Después, en el capítulo I, titulado *Los conceptos del Cálculo Integral*, menciona la importancia de conocer la noción de relación, debido a las diversas aplicaciones en varios campos de la actividad humana. Para esto, da varios ejemplos al respecto, mencionando que los matemáticos consideran como funciones algunos tipos de esas relaciones.

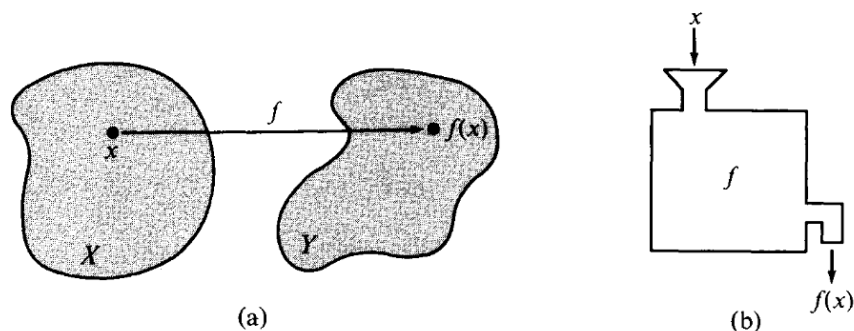
En su obra, Apostol realiza una breve historia de la definición de función y termina aseverando que:

Actualmente, la definición de función es esencialmente la siguiente: Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y , una *función* es una ley que asocia a cada objeto de X uno y solo un objeto en Y . El conjunto X se denomina el *dominio* de la función. Los objetos de Y , asociados con los objetos en X forman otro conjunto denominado el *recorrido* de la función (este puede ser todo el conjunto Y , pero no es necesario) (p. 62)

Se explicitan las diferentes representaciones que se pueden hacer para representar las funciones, por ejemplo $f(x)$. Muestra dos posibles esquemas que pueden ilustrar la idea de función. Por ejemplo, la ilustración 11 muestra dos esquemas, en el **(a)**, los conjuntos X e Y , siendo conjuntos de puntos, y una flecha indica cómo se aparea un punto arbitrario x de X con su punto imagen $f(x)$ de Y . en el **(b)**, la función f se imagina como una máquina en la

cual los objetos del conjunto X se transforman para producir objetos del conjunto Y . Cuando un objeto x es transformado por la máquina, el resultado final es el objeto $f(x)$. (p. 62 y 63)

Ilustración 7. Representación esquemática del concepto de función, Apostol p.63



Se establece la importancia de estudiar principalmente las *funciones de variable real* o *funciones reales*, caracterizadas por el hecho de que el dominio y el recorrido sean conjuntos de números reales, habría que agregar que se pueden representar geométricamente mediante una gráfica en el plano xy . Se propone la representación del dominio X en el eje x , y a partir de cada punto x de X se representa el punto (x, y) donde $y = f(x)$. La totalidad de puntos (x, y) se denomina *gráfica de la función*.

En lo ya mencionado, Apostol describe la función como una correspondencia que asocia a cada elemento de un conjunto X uno y sólo un objeto de un conjunto Y . Sin embargo, plantea la viabilidad de reformular el concepto en términos de pares ordenados. Define la función como sigue: “Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento”. La denomina, definición formal, como conjunto de pares ordenados. Se caracteriza un par ordenado como la pareja (a, b) donde se hace necesario distinguir el primer elemento del segundo elemento, es decir, el orden importa.

Si f es una función, el conjunto de todos los elementos x que aparecen como primeros elementos de pares (x, y) de f se llama el *dominio de f* . El conjunto de los segundos elementos y , se denomina *recorrido de f* , o conjunto de *valores de f* (p. 65).

Se habla de la unicidad para la ordenada, en caso de tener dos parejas ordenadas (x, y) y (x, z) que pertenezcan a la misma función, se debe concluir que $y = z$, para que sea función.

[...]. Por lo tanto, para todo x en el dominio de f existe exactamente un y tal que $(x, y) \in f$. Ya que este y está determinado con unicidad una vez que se conoce x , podemos introducir para él un símbolo especial. Es costumbre escribir $y = f(x)$ en lugar de $(x, y) \in f$ para indicar que el par (x, y) pertenece al conjunto f (p. 66)

Apostol menciona que el dominio es un elemento importante en la descripción de una función, tanto así, que plantea lo siguiente: “*teorema 1.1*. Dos funciones f y g son iguales si y sólo si f y g tienen el mismo dominio, y $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio de f .” (p.66)

Asimismo, el autor hace alusión a que en la mayoría de ocasiones, el dominio y el recorrido son subconjuntos de la recta real, aún así menciona que los pares ordenados $(x, f(x))$ de una función no tienen porqué ser números sino que pueden ser objetos de cualquier clase. De acuerdo con lo anterior, se mencionan varios ejemplos de funciones reales: la función identidad, la función valor absoluto, la función factorial, la función constante, la función lineal, la función potencial, la función polinómica, y la circunferencia. En esta última, la circunferencia, de nuevo alude al hecho de la unicidad de $f(x)$ para cada x . En la relación $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, considera la necesidad de redefinirla de la siguiente manera: $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, donde f y g sí son funciones, a diferencia de la relación considerada al principio.

En cuanto a la continuidad de una función, el texto menciona una idea intuitiva: “supongamos una función f que tiene el valor $f(x)$ en un cierto punto p . Se dice que f es continua en p si en todo punto próximo a x el valor de la función $f(x)$ es próximo a $f(p)$ ” (p. 155)

La definición de continuidad de una función en un punto, se da de la siguiente manera: "Se dice que una función f es continua en un punto p si: f está definida en p , y $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ "

Esta definición también se da en términos de entornos. Una función f es continua en p si para todo entorno $N_1[f(p)]$ existe un entorno $N_2[p]$ tal que $f(x) \in N_1[f(p)]$ siempre que $x \in N_2[p]$

Ilustración 8. Definición de continuidad, Apostol p.158

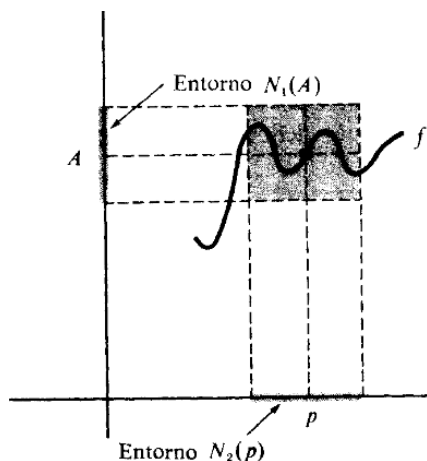


FIGURA 2.3 Existe $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = A$, pero no se dice nada de f en p .

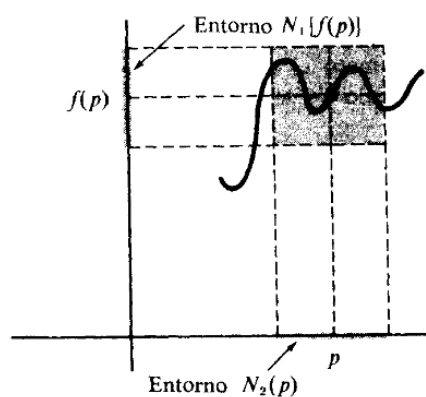


FIGURA 3.3 f está definida en p y $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$, de manera que f es continua en p .

Es importante mencionar que Apostol no hace alusión explícita a la *sobreyectividad* de una función, ni siquiera cuando define la inversa de una función. Además, en lo que se ha mencionado hasta el momento, no habla de la palabra *inyectividad*, aunque se ha expresado su equivalente en términos de la condición que debe cumplir una función, pero sin usar esa palabra.

También es importante resaltar que Apostol no define los términos o conceptos: variable, variable independiente, variable dependiente, gráfica de una función, parámetro, representación paramétrica, ecuación, biyectividad, codominio, tablas, proporcionalidad y covariación.

Contrastando la postura de los autores mencionados, las definiciones presentadas se pueden clasificar como:

- Correspondencia entre valores de variables.
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos.
- Dependencia entre dos variables.
- Conjuntos de pares ordenados

Esto, en concordancia con lo que también menciona Azcárate (1990), quien expresa que no hay un criterio estándar que permita definir función en una introducción al concepto.

Muchas de las definiciones se apoyan en otros términos como relación, variable, regla de correspondencia, entre otros. Los usos que proponen para el concepto de función, se dan en contextos de fenómenos de cambio, sin embargo en las definiciones se excluye ese contexto dinámico y se restringe a un enfoque conjuntista, donde la correspondencia entre dos conjuntos prima y estos se representan en parejas ordenadas.

Así como lo que proponen Apostol, (1984) Edwards & Penney (1996), el concepto de función es concebido desde una perspectiva conjuntista, donde se privilegia una relación de correspondencia. El tratamiento de los sistemas de representación se hace de forma aislada, donde uno es consecuencia de otro, por ejemplo, el gráfico lo es del tabular. En los ejercicios que se proponen, impera el registro algebraico. En los ejercicios donde hay presencia de registros gráficos, se pide responder lo convencional, hallar dominios, rangos, la prueba de la vertical, vértices, etc., pero no hay alusión directa de cómo poder trabajar con los distintos registros de forma simultánea y complementaria.

De acuerdo con lo que se ha mencionado sobre la fenomenología histórica y pura para el concepto de función, es importante destacar las implicaciones que estas tienen como aporte de la componente de competencia formal a la consolidación de la MTL inicial.

- La revisión de la literatura permite constatar que la noción de variable antecede a la noción de función. Ruiz (1998), asocia al concepto de función, siete concepciones claves que resumen los logros más relevantes o que caracterizan cada periodo en

que la función fue modificando su significado. En orden ascendente de fechas en el tiempo, las siete concepciones son: La identificación de regularidades, la razón o proporción, las gráficas (visión sintética), la curva (visión analítico-geométrica), el uso de expresión analítica, la función como correspondencia arbitraria: aplicación y la función como terna (versión conjuntista).

- De forma paralela a lo anterior, de acuerdo con Jaimes (2012), se pueden caracterizar cinco obstáculos epistemológicos en el desarrollo del concepto de función: Las razones sólo fueron usadas para relacionar magnitudes de la misma naturaleza, la disociación entre el número y la magnitud, la concepción geométrica de las variables, la concepción algebraica y la concepción mecánica de una curva.
- En coherencia con lo que menciona Azcárate (1990), en la literatura como saber puro¹¹ no hay un criterio estándar que permita definir función en una introducción al concepto. Muchas de las definiciones se apoyan en otros términos como relación, variable, regla de correspondencia, entre otros. Los usos que se proponen para el concepto de función, se dan en contextos de fenómenos de cambio, no obstante, en las definiciones se excluye ese contexto dinámico y se restringe a un enfoque conjuntista, donde la correspondencia prima entre dos conjuntos y se representan en parejas ordenadas.
- El concepto de función, en la revisión de la literatura, es un concepto que ha sido importante y con los aportes que le dio Newton, se terminó de consolidar más, pues este usó el Álgebra simbólica y la Geometría analítica para la construcción del Cálculo diferencial. Igualmente, en la revisión de la historia de dicho concepto, se puede observar que siempre estuvo relacionado con los fenómenos de variación y cambio. Quizá esta sea la razón por la cual, la mayoría de las políticas curriculares escolares en el mundo proponen que el concepto de función sea abordado desde esa perspectiva. Con lo mencionado, es importante resaltar que la generalidad de los conjuntos permite la solución de problemas de distinta naturaleza, que no se ven limitados por situaciones particulares y este modo permiten el tratamiento de funciones de varias variables, dando solución a problemas de diferentes fenómenos

¹¹Tomando como referencia la presentación del concepto de función en los textos de Cálculo para formación de matemáticos

físicos. Pese a todo, en términos didácticos, esta concepción está desprovista de todo significado, porque está alejado de todas las concepciones clásicas mencionadas en cada periodo de la historia y oculta los obstáculos que hicieron posible su construcción; las ideas de variación, continuidad, variación como parámetro temporal, dependencia, entre otros, se pierden y ello se convierte en un obstáculo en su enseñanza y aprendizaje, porque estas ideas construyen un concepto, si se quiere, más asequible y significativo haciendo posible su comprensión en términos de su aplicación. Por esta razón, para el modelo de competencia formal, se tendrá en cuenta una concepción de función desde un punto de vista variacional, donde impere el estudio de la relación de dependencia sobre sólo la de correspondencia.

2.2.3 Modelo de enseñanza

En este apartado se estudia y analiza el marco legal curricular que propone el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), en particular, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006). Este acercamiento al marco legal curricular se hace con el fin de identificar su papel en el estudio y enseñanza del concepto de función. Igualmente, se hace revisión del concepto de función en algunos libros de texto y revisión de la propuesta curricular de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta de Dapa (Yumbo).

Este apartado contribuye con elementos significativos para el alcance de los objetivos propuestos en esta investigación, puesto que caracteriza el modelo de enseñanza predominante en el sistema educativo y que en últimas ha permeado la enseñanza que han recibido los estudiantes que son objeto de observación en este estudio.

2.2.3.1 La enseñanza de la función desde el marco legal curricular

En primera instancia, se tienen en cuenta los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), documentos que se ponen en consideración para que los docentes orienten y reformulen constantemente los procesos curriculares de Matemáticas en las diferentes instituciones educativas (tanto de carácter oficial como de carácter privado). Cuando se

habla de reformulación, se alude a que lo propuesto en dicho documento debe ser objeto de revisión y reflexión por parte de las entidades educativas en procura de mejorar la calidad de la educación; esto, en virtud de que se propone un currículo flexible y no rígido (en cuanto a temas y contenidos específicos a incluir), tal como se orientaba antes de la Ley 115 de 1994.

Desde los Lineamientos Curriculares en Matemáticas se fundamenta teórica y epistemológicamente cada elemento cognitivo, didáctico y matemático que se debe tener en cuenta para la consolidación de un currículo y en este sentido, las Matemáticas se asumen como una disciplina que debe contribuir al desarrollo integral de los estudiantes, de tal manera que puedan asumir los nuevos retos sociales, culturales, políticos, entre otros que supone el siglo XXI. Lo que debe subyacer a la asunción de estos retos, es que los estudiantes puedan reflexionar, explorar, explicar y predecir fenómenos propios de la realidad, es decir, que le puedan dar sentido al mundo que los rodea.

Para lograr lo anterior, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas proponen tres ejes conceptuales fundamentales:

- El primer eje contempla los conocimientos básicos y aquí se proponen cinco tipos de pensamiento: numérico y sistemas numéricos; espacial y sistemas geométricos; métrico y sistemas de medidas; aleatorio y los sistemas de datos; variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
- El segundo eje contempla cinco procesos generales: la formulación y resolución de problemas; la modelación y fenómenos de la realidad; la comunicación; el razonamiento; y la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos.
- El tercer eje contempla los contextos de: las mismas matemáticas; la vida cotidiana; y de otras ciencias.

Adicional a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, están los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (formulados en su última versión en el 2006) que constituyen un documento que trata de aterrizar y estandarizar lo propuesto de forma general en los lineamientos curriculares. Es decir, proponen unas metas específicas que deben estar en concordancia con lo mencionado en los lineamientos; de hecho, se vuelve a hacer énfasis en cada proceso general. Así mismo, los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, proponen privilegiar el desarrollo de competencias sobre el desarrollo de contenidos fragmentados sin sentido con el entorno. Así pues, se define competencia matemática como:

Todas estas dimensiones se articulan claramente con una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio-afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase (MEN, 2006).

De esta manera, se habla de ser matemáticamente competente como un fin de la educación en Colombia. Y que las competencias matemáticas no se alcanzan espontáneamente, sino que requieren de ambientes de aprendizaje específicos que propendan por el uso por situaciones problemas que le permitan al estudiante identificarse con la necesidad de solucionar un problema determinado y que le posibilite avanzar a niveles de competencia más complejos.

El MEN, para cada tipo de pensamiento matemático, propone unos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas asociados a un conjunto de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo).

En cuanto a los procesos generales, las tareas de covariación que se aplicaron en este estudio, privilegiaron la *comunicación* y el *razonamiento*. En lo que a la comunicación se

refiere, las actividades de covariación, constatan que las Matemáticas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes y uso de SMS para representar, leer y escribir, hablar y escuchar los distintos saberes de Matemáticas. Para poder comunicar las ideas en matemáticas, es necesario tener en cuenta el dominio de diferentes tipos de lenguajes para darle sentido a palabras, frases, gráficos, gráficas símbolos, entre otros. Esto permite que haya mayor eficiencia en el uso de los lenguajes matemáticos para poder incentivar la discusión entre pares a partir de la necesidad de llegar a acuerdos colectivos en torno a algún saber matemático.

Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas (MEN, 2006, p. 54).

El otro proceso general involucrado en las tareas de covariación es el razonamiento, puesto que al resolver alguna situación no se debe privilegiar sólo la memoria, por lo que es necesario que también se privilegie el uso de expansiones discursivas cuya estructura contemple cadenas argumentativas, e intentos de validar o invalidar proposiciones.

El desarrollo del razonamiento lógico empieza en los primeros grados apoyado en los contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones (MEN, 2006, p. 54).

En relación con los conocimientos básicos (tipos de pensamiento), este trabajo se inscribe o enfatiza en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, así, estos tipos de pensamientos deben empezar a trabajarse desde tempranas edades, es decir, el pensamiento variacional no es exclusivo para los estudiantes que dominan una sintaxis algebraica determinada. Proponer y desarrollar este tipo de pensamiento implica alejarse de la enseñanza de simples contenidos fragmentados, para procurar hacer énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos interestructurados que permitan modelar y

analizar matemáticamente fenómenos y problemas asociados al entorno del estudiante. El pensamiento variacional se centra justamente en el estudio de la variación, en la cuantificación de esta, por medio del uso de cantidades y magnitudes. Esta concepción del estudio de la variación tiene en cuenta la epistemología clásica que se consideró en el modelo de competencia formal, de tal manera que, en correspondencia con ella, se deben explicitar los conceptos, métodos y procedimientos que involucra el estudio del cambio. De esta manera, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas proponen los siguientes núcleos conceptuales relacionados con la variación:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad.
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes.
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo.
- La proporcionalidad cobra especial significado. (pp. 49-50).

El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. Este tipo de pensamiento estudia la variación de cantidades, una respecto a las otras, y, aunque no se explicita algo sobre la covariación, sí puede llegar a contemplarse cómo varían las variaciones. En este sentido, se consideran magnitudes que covarían, en la medida en que se considera los cambios de una cantidad atendiendo a los cambios de la otra variable.

Normalmente, la variación, desde la perspectiva mencionada, se relaciona estrechamente con el razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al. (2002), pues de manera general “el pensamiento variacional es el estudio sistemático de la noción de variación en diferentes escenarios de otras ciencias, de la vida cotidiana y de la misma matemática. En particular, la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente” (Villa, 2012, p.12).

La variación implica también, de forma explícita, el trabajo sistemático con los SMS, pues se deben contemplar las distintas posibilidades de representación y manejo de ellas en la conceptualización de la función y covariación. Además, para pasar de una habilidad de pensamiento a otro, es necesario contemplar todos esos estratos de SMS que con trabajo progresivo van mutando en otros SMS más abstractos.

Así pues, lo propuesto en el razonamiento covariacional va en la dirección de lo propuesto por el MEN, en la medida en que se propone el trabajo o estudio de la *función* desde una perspectiva dinámica que implica el estudio de cambio de patrones en varios contextos. Que los estudiantes comprendan e interpreten enunciados relacionados con razones de cambio, tasas de variación, puntos de inflexión, etc.

Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006, p. 66)

Cuando Carlson et al. habla de coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de otra (AM3), coincide con lo planteado en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas quienes establecen la necesidad de estudiar la variación no sólo de forma cuantitativa. “El estudio de la variación se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes” (MEN, 1998, pp.). De la misma forma, hay que recordar que el trabajo de Carlson se realizó con estudiantes universitarios de primeros semestres, pero con todo, la clasificación que él propone puede ser usada en diferentes grados de escolaridad con alcances distintos. Se puede considerar el reconocimiento de magnitudes que cambian, hasta el acercamiento y trabajo con el concepto de la derivada, a partir de las consideraciones de razones de cambio promedio e instantánea (N4 y N5). De forma paralela, en los Lineamientos curriculares, el pensamiento variacional es primordial, para diferentes grados de escolaridad, en la construcción de nuevos conceptos cuyo eje central es la variación. En el caso de los primeros años de escolaridad, el desarrollo del pensamiento variacional se propone desde el estudio de regularidades y patrones en

diversos contextos; mientras que, en básica secundaria y educación media, se propone estudiar la variación a partir de la inclusión de nuevos registros de representación (algebraico y cartesiano) para acercarse al concepto de función, el cual es indispensable para el cálculo diferencial o integral, que no sólo considera los cambios, sino cómo varían estos cambios.

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (MEN, 2006, p. 66).

Haciendo énfasis en el concepto de función, que subyace a la comprensión y estudio de la variación, el MEN propone el estudio del Cálculo (el de la secundaria) de tal manera que la función sea considerada como proceso u objeto, y en cualquiera de esos dos casos, el concepto de función se considera como eje fundamental para el aprendizaje del cálculo diferencial e integral. De esta manera, en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, (MEN, 1998) de forma explícita se alude al concepto de función, considerándolo como una relación que implica el análisis de los cambios, de fenómenos de variación, para poder explicar (en términos de variables dependientes e independientes) de qué forma un cambio en una variable produce cambios en otra.

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio (MEN, 1998, p. 51).

No obstante, también se hace especial alusión a que se deben propiciar fenómenos que al modelarse, no necesariamente admitan una representación algebraica. Es decir, la existencia de una función no debe estar supeditada a la existencia de una representación

algebraica para ella. Además, la función se debe concebir como una relación de dependencia y no sólo de correspondencia, todo esto, a partir del uso recursivo de las gráficas cartesianas y las relaciones entre los valores del dominio y rango de una función, de cómo los valores del rango varían conforme varían otros en el dominio.

Asimismo, desde el marco legal, también se proponen diferentes acercamientos para el trabajo con la función, tratando de ponderar los diferentes sistemas de representación que se usan para construir el concepto, teniendo en cuenta que cada sistema no es una opción independiente y aislada de los otros, son complementarios para la adecuada formación de pensamiento variacional.

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas) y las gráficas (diagramas), que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo (MEN, 2006, p. 67).

Justamente, desde cada uno de estos tipos de representación, se propone concebir diferentes entradas para estudiar el concepto de función y se enfatiza en la necesidad de que haya coexistencia entre dichas representaciones, desde el punto de vista funcional y sistémico, que no excluyan la complementariedad entre ellas. Una vez se trabaje en la conceptualización de la función y sus elementos asociados, se propone el estudio de los modelos elementales. (Lineal, afín, cuadrático, exponencial)

Finalmente, de los Estándares de Competencias Matemáticas propuestos por el MEN, (2006) los que se encuentran en estrecha relación con las actividades de covariación son:

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.
- Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.

- Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.
- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

2.2.3.2 La enseñanza del concepto de función en los textos escolares

En vista de la propuesta de currículo flexible que propone el Ministerio de Educación Nacional (MEN) para las instituciones educativas, también se sugiere el uso de diversos recursos didácticos y pedagógicos, entre ellos el texto escolar, el cual se considera como un insumo importante para el profesor en la consolidación de su propuesta de enseñanza. Esta importancia de los textos escolares también se destaca en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y así mismo propone que el profesor debe tener suficientes conocimientos (matemáticos, epistemológicos y didácticos) para poder determinar el uso del texto escolar.

De igual modo, es necesario ampliar la visión sobre los textos escolares y las directivas ministeriales como los únicos medios para hacer explícitas las exigencias del cambio. Se trata de generar la necesidad de mirar críticamente la amplia oferta de textos escolares que se encuentra en el mercado, de tal forma que se tenga una vigilancia crítica por parte de los docentes sobre la pertinencia, concordancia y coherencia de éstos con los fines de la educación y las políticas del sistema educativo (p.74).

Para hacer un estudio de cómo abordan los textos escolares el concepto de función, se seleccionaron dos textos, con la intención de hacer un análisis de estos textos en relación con la enseñanza de la función, para caracterizar su propuesta de enseñanza y el SMS implementado para comprender el concepto de función desde la escuela. De este modo, en este apartado, en primera instancia, se explicitan algunos indicadores que se deben tener en cuenta para analizar el contenido de un texto, de acuerdo con lo que propone Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1999). En segunda instancia, se mencionan y describen algunos criterios, adicionales a los anteriores y relacionados con la revisión de la literatura

desde los otros tres componentes del MTL, para analizar el concepto de función en los textos escolares. Finalmente se hará la revisión del concepto de función en los textos y su implicación al modelo teórico local.

De acuerdo con lo anterior, y en relación con lo que proponen Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1999); se tomaron los siguientes aspectos como referentes iniciales para el análisis:

- *El lenguaje escrito*: debe ser el más apropiado para el grado de escolaridad del estudiante, es decir, el vocabulario debe ser el más adecuado para la edad del estudiante; el texto debe utilizar un lenguaje claro, sencillo y preciso con el fin de hacer amena la lectura y que contribuya en el crecimiento intelectual del lector.
- *El lenguaje gráfico*: es la parte del texto que propone una lectura diferente a la lingüística, o sea que las ilustraciones deben de servir como complemento o apoyo de lo que allí se encuentra escrito, estas ilustraciones deben ir acordes al grado de escolaridad y a la naturaleza de la asignatura, por ejemplo, en Matemáticas pueden servir como agentes aclaratorios en alguna definición o como una representación diferente de algún concepto.
- *El contenido de la obra*: debe estar lo más actualizado posible y con la mayor validez científica a la fecha, más aún hoy en día donde el conocimiento y la concepción el mundo son tan cambiantes; además debe tener una coherencia y relación entre los contenidos abordados, estos contenidos a su vez deben estar dentro de la propuesta que plantea nuestro currículo y que también se relacionen con otras ciencias o ramas del conocimiento.
- *El tratamiento pedagógico*: debe asumir una conducción en el proceso de aprendizaje del estudiante, por ejemplo, el texto debe propiciar la participación activa del estudiante y no un repetidor de una información suministrada, además debe motivar al estudiante a aprender y ojalá en el marco de situaciones reales; también debe estimular procesos de análisis, creatividad, escritura, búsqueda de información en otras fuentes y proposición de soluciones.
- *La relación con el currículo*. Los textos escolares están enmarcados en unas leyes gubernamentales, o sea que es un producto que está sujeto a unas necesidades políticas, sociales económicas de cada país, es decir, que el texto escolar cuenta con

características y necesidades de la comunidad a la cual se dirige contribuyendo además en la formación social, cultural e histórica del estudiante.

- *Los discursos en el texto escolar de Matemáticas.* A diferencia de otros textos escolares, el texto escolar de matemáticas está cargado de ejemplos y de ejercicios que van dirigidos al estudiante, este texto posee un conjunto de reglas que por lo general son de carácter deductivo donde se ponen en juego definiciones, axiomas o teoremas, todas estas reglas o maneras de presentar los contenidos son expuestos por el autor quien propone su propio discurso. Los discursos pueden ser expositivos, heurísticos o la combinación de ellos. El discurso *expositivo* se caracteriza porque el autor empieza o introduce un contenido a través de un axioma, un postulado, una definición, un teorema o un corolario. El discurso *heurístico* se caracteriza porque el autor inicia o introduce un contenido con un caso particular que debe ser enfrentado por el lector; este caso se selecciona previamente con el propósito de ser controlado desde la teoría matemática.

De acuerdo con los anteriores de criterios de análisis se van a analizar los textos escolares citados a continuación: *Algebra Intermedia*, Pearson 2008, Séptima Edición, *Hipertexto*, Santillana 2010. En el *Anexo 1*, se encuentra la información sobre la selección, presentación y descripción general de los textos. A continuación se muestra, para ambos textos, una ficha con la información bibliográfica general y con las unidades donde el concepto de función es objeto de estudio.

Tabla 4. Unidades que contienen el concepto de función del texto 1

Código Texto	Título	Autores	Editorial Año Edición	Origen	Unidades y contenidos relacionados con la función
T1	Algebra Intermedia	Allen R. Ángel	Pearson 2008 Séptima Edición	Estados Unidos Traducción Víctor Hugo Ibarra Mercado. México 2008	3. GRÁFICAS Y FUNCIONES 3.1 Gráficas 3.2 Funciones 3.3 Funciones lineales: gráficas y aplicaciones 3.4 La forma pendiente intercepción de una ecuación lineal 3.5 La Forma Punto Pendiente de una ecuación lineal 3.6 Álgebra de funciones 3.7 Graficación de desigualdades lineales 8. FUNCIONES CUADRÁTICAS 8.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando cuadrados 8.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática 8.3 Ecuaciones cuadráticas: aplicaciones y resolución de problemas 8.4 Planteamiento de ecuaciones en forma cuadrática 8.5 Graficación de funciones cuadráticas 8.6 Desigualdades cuadráticas y de otros tipos con una variable 9. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS 9.1 Funciones compuestas e inversas 9.2 Funciones exponenciales 9.3 Funciones logarítmicas 9.4 Propiedades de los logaritmos 9.5 Logaritmos comunes 9.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas 9.7 Función exponencial natural y función logaritmo natural

Tabla 5. Unidades que contienen el concepto de función del texto 2

Código Texto	Título	Autores	Editorial Año Edición	Origen	Unidades y contenidos relacionados con la función
T2	Hipertexto	Hugo Hernán Chávez López. Neyla Yamile Castañeda Murcia. Moreia Gómez Bello. Anneris del Rocío Joya Vega. Johann Alexander Chizner Ramos. Mercedes Gómez Bello.	Santillana 2010	Bogotá, Colombia	UNIDAD 4 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES -Funciones -Función lineal y función afín -Ecuación de la recta -Sistemas de ecuaciones lineales UNIDAD 5. FUNCIÓN CUADRÁTICA -Funciones cuadráticas -Ecuación cuadrática -Ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas -Problemas de aplicación a ecuaciones cuadráticas UNIDAD 6. FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA -Función exponencial -Función logarítmica

Según lo anterior, para poder identificar alguna propuesta de enseñanza se quiere hacer énfasis en:

- a) Cómo el concepto de función está relacionado con los otros contenidos matemáticos.
- b) Cómo el concepto de función está relacionado con los otros contenidos matemáticos.
- c) Qué y cuales definiciones se presentan para relacionarlas con las explicaciones que se dan y cómo estructuran los elementos teóricos asociados al concepto objeto de análisis.
- d) La caracterización de los ejemplos y actividades propuestas.

Adicionalmente, se requiere identificar el tipo de evaluación que se aplica y aquello que se espera de los estudiantes desde el punto de vista cognitivo. De tal manera que, dadas las condiciones anteriores, se optó por seleccionar tres categorías de análisis, a saber:

- *Orden relativo del concepto de función en relación con los otros contenidos matemáticos que se contemplan en el texto escolar.* Con el uso de esta categoría se pretende verificar qué temas o contenidos anteceden al concepto de Función. Esto, con el propósito de exponer la estructura cronológica en la que el texto presenta los contenidos y el lugar que le corresponde a la función. Esta categoría es importante en la medida en que permite asociar el grado de coherencia con el marco legal curricular de referencia y poder explicitar la relación entre lo variacional que supone el concepto de función y lo algorítmico que supone el aprendizaje de la sintaxis algebraica.
- *El discurso del texto escolar.* Como ya se ha citado, el discurso que presenta el texto es importante en la medida en que permite identificar la forma explícita de su modelo pedagógico o accionar didáctico. Es decir, es fundamental analizar el tipo de introducción que se realiza al abordar la función, el tipo de discurso, el marco definicional, el marco de ejercitación y el papel o lugar de las expansiones discursivas en las actividades propuestas.
- *El papel de la tecnología informática.* Este criterio es importante analizarlo, pues es sensato preguntarse cómo el libro de texto propone el trabajo con otros recursos diferentes a los tangibles. El concepto de función puede proporcionar ambientes dinámicos de aplicación o al contrario, podría mostrar exploraciones en otros escenarios

que permitan acercamientos intuitivos o significativos al concepto de función. En esta categoría se contemplará el uso de tecnología en la resolución de actividades propuestas y otros recursos digitales que hagan parte del sistema para-textual, pero que sean solo parte de objetos virtuales de aprendizajes, sin funcionalidad significativa para que el estudiante resuelva situaciones propuestas por el texto.

Dentro de cada una de las tres categorías que se mencionaron anteriormente, se establecen unos criterios, que se mencionan a continuación y en el *Anexo 2*, se describen las categorías y criterios de esta tabla.

Tabla 6. Macro de categorías de análisis y rejilla de análisis

Categoría	Criterios	T1	T2
Orden relativo del concepto de función respecto a los demás contenidos	-Temas o contenidos tratados en unidades anteriores -Requisitos conceptuales o de contenido que el autor considera antes del tema		
Discursos en los textos escolares	-Introducción al tema -Tipo de discurso usado en el texto -Marco definicional -Marco de ejemplificación -Marco de ejercitación -Elementos de la función que se explicitan -Representaciones -El papel de las expansiones discursivas en la resolución de las actividades propuestas		
Usos de recursos externos al texto impreso	-Uso de la tecnología -Sistema para-textual		

Para un acercamiento relativamente exhaustivo al análisis de los textos T1 y T2, se tendrán en cuenta los criterios de la tabla anterior donde se explicitan las categorías y criterios susceptibles a ser evaluados. Otra vez se destaca el hecho de que el análisis que se presenta a continuación corresponde a un objetivo particular y por ello, está centrado en los aspectos de contenido y estructuración de la propuesta de enseñanza.

En la siguiente tabla, se explicita o describe cómo cada texto aborda el concepto de función desde las diferentes variables de análisis:

Tabla 7. Criterios aplicados a los textos escolares

	Textos Escolares	
CRITERIO	T1	T2
Temas o contenidos tratados en unidades anteriores	Unidad 1. Conceptos básicos: Conjuntos. Propiedades y operaciones con los números reales. Exponentes, notación científica. Unidad 2. Ecuaciones y desigualdades: Resolución de ecuaciones y desigualdades lineales con una incógnita. Resolución de problemas y uso de fórmulas. Valor absoluto.	Unidad 1. Números reales y expresiones algebraicas: Números enteros, racionales, irracionales, reales. Operaciones con expresiones algebraicas. Productos y cocientes notables. Unidad 2. Potenciación y radicación: Propiedades de la potenciación. Operaciones con números en notación científica. Propiedades de la radicación. Simplificación y operaciones de radicales. Unidad 3. Números complejos: Potencias de i. Representación gráfica de los números complejos. Conjugado de un número complejo. Adición y sustracción de números complejos.
Requisitos conceptuales o de contenido que el autor considera antes del tema.	La entrada al tema de función se hace a través del reconocimiento del plano cartesiano y el énfasis que el autor le da a la graficación. Esto se evidencia en la forma en que el autor caracteriza una pareja ordenada y explica cómo ubicarlas en el plano cartesiano (ver anexo 3). Seguidamente, relaciona parejas ordenadas como posibles soluciones de una ecuación de dos variables (ver anexo 4). El contenido 3.1 se concluye graficando la solución de ecuaciones lineales y no lineales a partir de la determinación de soluciones de una ecuación, dando valores a x y obteniendo valores para y, de esta forma resalta la ubicación de las parejas ordenadas en un plano cartesiano. Por último, dedica un apartado a la interpretación de gráficas, a través de la identificación de pares ordenados.	El T2 no hace referencia a otros aspectos como requisitos al tema.
Introducción al tema	Una vez titulado el subtema 3.2 (funciones), se hace una introducción a través de las relaciones matemáticas. De nuevo, a partir de la consideración de las soluciones de una ecuación de dos variables, vistas como parejas ordenadas, explicita que el	Inmediatamente después del título “Funciones”, la introducción se hace definiendo dicho concepto, la introducción que se hace es con la definición de función. Se hace énfasis en los símbolos para la representación algebraica. Se menciona el conjunto de

	valor de y depende del que tome x. De esta forma diferencia variable dependiente e independiente. Se define una relación como un conjunto de parejas ordenadas. En particular, una ecuación de dos variables es una relación al poderse representar como un conjunto de parejas ordenadas (ver anexo 5). Además, a partir de un ejemplo en contexto sobre cantidad de naranjas y costos correspondientes, menciona que una función es un tipo especial de relación, es decir, que cumple ciertas condiciones. Para esto, caracteriza Dominio y Rango, en términos de los elementos de cada conjunto (naranjas y precio) asimismo aparece otro ejemplo (ver anexo 6).	partida y el conjunto de llegada. Se habla de dos conjuntos A y B, caracterizando la imagen. Además se habla de los elementos una función aludiendo al Dominio, el Codominio, el Rango y el Grafo (ver anexo 7). A continuación, se muestra un ejemplo donde aparecen diagramas sagitales y se pide determinar si esas correspondencias son o no, funciones. En la resolución del ejemplo, se apela a la definición que presenta el libro, es decir, a la de correspondencia entre elementos de dos conjuntos. Se proponen actividades que son similares a las que plantea el ejemplo, usando diagramas sagitales y conjuntos de pares ordenados. Igualmente, se pide encontrar el dominio y rango de una función, dado su grafo. Como podemos observar, tanto el ejemplo planteado, como las actividades propuestas apelan a la noción de correspondencia entre elementos de dos conjuntos, y a la determinación de conjuntos que denotan la supuesta comprensión de algunos elementos de la función, como lo son el Dominio y el Rango. (ver anexo 8).
Tipo de discurso usado en el texto	El texto maneja un discurso heurístico y expositivo, pues algunas veces introduce casos particulares que el lector debe enfrentar y como conclusión de dichos ejemplos, el autor exhibe la definición formal del concepto en estudio. En otras ocasiones, aunque no inicia con la definiciones, con antelación a estas presenta algunos contenidos de manera instruccional; un claro ejemplo de esto es cuando le explica paso a paso al estudiante la interpretación y ubicación de puntos en un sistema de coordenadas cartesiano.	El texto maneja un discurso expositivo porque parte de definiciones y luego aparecen ejemplos relacionados con el contexto conceptual expuesto en las definiciones.
Marco definicional:	Definición 1: Es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango, de modo que cada elemento del dominio corresponde	Definición: Una función es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A, uno y solo un elemento del conjunto B.

	a exactamente un elemento en el rango. A partir de un ejemplo, se propone una definición alterna. Definición 2: Una función es un conjunto de parejas ordenadas en las que ninguna primera coordenada se repite. Después de estas dos definiciones, en la sección 3.3 se define la función lineal de la siguiente manera Una función lineal es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de cualquier función lineal es una línea recta.	Función Lineal: Toda función de la forma $y = mx + b$ donde m es una constante diferente de cero, es una función lineal Función afín: Toda función de la forma $y = mx + b$ donde m es una constante y b es cero, es una función afín. En las unidades 5 y 6 se habla de la función cuadrática y función exponencial y logarítmica, respectivamente. Y también como en la unidad 4, la introducción que se hace al tema es de manera formal, empezando por definiciones y características de cada tipo de función, por ejemplo en la cuadrática se menciona que: Una función es cuadrática si es de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b que pertenecen a los reales y con $a \neq 0$.
Marco de ejemplificación	Este texto presenta variedad de situaciones, los primeros ejemplos se centran en identificar cuáles son y no son funciones. Luego sigue con ejemplos que parten de una gráfica en el plano cartesiano y terminan por identificar características de funciones. Después, muestra ejemplos donde se parte de una representación algebraica, se le da valores a x (variable independiente) obteniendo valores para y (variable dependiente) con el fin de tabular y luego graficar. También hay ejemplos donde el uso de calculadoras graficadoras hace parte de las herramientas tecnológicas (ver anexo 9). Finalmente incluye ejemplos de la vida real donde es muy fuerte o influyente el contexto de la matemática financiera. En cuanto al contexto de los ejemplos, se pueden catalogar o clasificar en contexto de las mismas matemáticas, contexto de la vida cotidiana y contexto de otras ciencias; en estos dos últimos	En el texto hay ejemplos donde aparecen diagramas sagítales y se pide determinar si esas correspondencias son o no, funciones. En la resolución del ejemplo, se apela a la definición que presenta el libro, es decir, a la de correspondencia entre elementos de dos conjuntos, igualmente encontrar el dominio y rango de una función, dado su grafo. Exceptuando un ejemplo (que se plantea en el contexto de la vida real), los restantes se plantean y resuelven en el contexto de las mismas matemáticas.

	contextos, se privilegian las representaciones algebraica y gráfica.	
Marco de ejercitación	Si observamos los tipos de ejercicios, estos no están alejados de los tres tipos de contextos que se proponen en los estándares: el contexto matemático, utilizando diferentes formas para que el estudiante haga el mayor uso de las matemáticas en sus diferentes formas; el contexto de la vida real, partiendo o planteando situaciones problemas donde su entorno es parte de la situación; y el contexto de otras ciencias, que se presenta, en especial, en situaciones o campos financieros, estadísticos y algunas veces geométricos (ver anexo 10). El texto explicita que su énfasis es la Resolución de Problemas, por lo tanto, en algún apartado de todas las unidades, se muestra al estudiante un esquema de cómo abordar un problema, dando sugerencias de acuerdo con los procedimientos de George Polya. Específicamente en la sección 2.2 explicita los 5 pasos de Polya (ver anexo 11). Así pues, tanto en algunos ejemplos como en algunos ejercicios, el libro busca que el estudiante en su procedimiento aplique dichos pasos. En el marco de la ejercitación se explicitan algunas actividades para resolver en grupo (ver anexo 12) Para cada sección de la unidad hay un conjunto de actividades. Sin embargo, al final de toda la unidad hay otro conjunto de ejercicios acumulativos de todas las secciones de dicha unidad. Además, Examen de práctica y un examen de repaso acumulativo. Los grupos de ejercicios por cada sección de la unidad están titulados y organizados así: Ejercicios de concepto/redacción. Práctica de habilidades. Resolución de problemas.	Se proponen actividades que son similares a las que plantean en los ejemplos, usando diagramas sagitales y conjuntos de pares ordenados. Igualmente, se pide encontrar el dominio y rango de una función, dado su grafo. Las actividades propuestas apelan a la noción de correspondencia entre elementos de dos conjuntos, y a la determinación de conjuntos que denotan la supuesta comprensión de algunos elementos de la función, como lo son el Dominio y el Rango. . Se puede notar que a partir de un ejemplo donde las parejas ordenadas son dadas, estas se usan para acomodarlas en un diagrama sagital, en un plano cartesiano, en una tabla de valores y a través de una fórmula. Las actividades planteadas corresponden al énfasis que se hace en los ejemplos; están caracterizadas por procedimientos algorítmicos y afianzamientos de lo mencionado en las definiciones. El contexto de los ejercicios planteados corresponde al de las mismas matemáticas. No aparecen actividades propuestas en otro contexto distinto. No aparecen o no se sugieren actividades en grupo. Para cada sección de la unidad hay un conjunto de actividades. Sin embargo, al final de toda la unidad hay otro conjunto de ejercicios acumulativos de todas las secciones de dicha unidad, titulado taller 4.

	Ejercicios de repaso acumulativo. En el marco de ejercitación no se evidencia seriación alguna en su orden de complejidad.	En el marco de ejercitación no se evidencia seriación alguna en su orden de complejidad.
Elementos de la función que se explicitan	Dominio. Rango. Variable independiente. Variable dependiente. Estos cuatro elementos se caracterizan a partir de ejemplos, pero no se definen formalmente.	Dominio. Codominio. Rango. Grafo. Para estas cuatro hay una definición y símbolos asignados. Se habla de que en la expresión $y = f(x)$, x es la variable independiente y representa los elementos del dominio de f, y es la variable dependiente y representa los elementos del rango de f.
Representaciones.	El texto utiliza cuatro sistemas de representación: gráfico, tabular, algebraico, y lenguaje natural. Las distintas representaciones, se trabajan a partir de ejemplos y no se listan o explican desde la teoría. En cuanto al gráfico, presenta ejemplos donde parten de este sistema de representación mostrando la gráfica, luego induce a que los estudiantes escriban o expliquen sus respuestas; esto no necesariamente implica que el estudiante deba llegar a una presentación algebraica (ver anexo 13). De igual manera también el texto presenta situaciones donde se inicia desde un sistema de representación algebraico para que el estudiante posteriormente haga una tabla y construya una gráfica (ver anexo 14). Como complemento, el texto trata de compilar representaciones en forma algebraica y gráfica y las articula con sus dominios y rangos (ver anexo 15). La mayoría de actividades implican, para su resolución manejar el registro gráfico, verbal y algebraico. Este último, a partir de la matematización de situaciones contextualizadas.	Una vez que terminan las actividades anteriores, el libro menciona y explicita a manera de título “Representaciones de funciones”. Para este apartado de la unidad, se dice que para representar una función se puede usar: La forma gráfica, forma verbal, la fórmula y la tabla de valores. Para el caso de la forma gráfica, se menciona que puede ser a través de un diagrama sagital o un diagrama cartesiano (ver anexo 16) Se puede notar que a partir de un ejemplo donde las parejas ordenadas son dadas, estas se usan acomodarlas en un diagrama sagital, en un plano cartesiano, en una tabla de valores y a través de una fórmula. No se hace énfasis en la obtención, por ejemplo de la tabla, desde el entendimiento de una variación entre cantidades. Asimismo, en la representación que proponen a través de la fórmula, se habla de y como sinónimo de $f(x)$ sin ser explícito para el estudiante el porqué de esas notaciones. Más adelante, el texto menciona qué es una función de variable real y explica cómo realizar bosquejos de la gráfica de una función, dada su fórmula. Además, explica el método gráfico (criterio de la vertical) para poder verificar si una gráfica describe o no, una función (ver anexo 17)
El papel de las expansiones	El texto, antes de las actividades que implican algoritmos y aplicaciones, realiza preguntas llamadas “ejercicios de	Aproximadamente un 5% de las actividades propuestas en la unidad corresponde a preguntas donde el estudiante debe

discursivas en la resolución de las actividades propuestas.	concepto/redacción” donde las respuestas deben ser por escrito explicando de forma verbal, y aluden a aspectos teóricos-conceptuales, por ejemplo: ¿qué es una función? Explique cómo usar la prueba de la recta vertical para determinar si la relación es una función, explique cómo determinar las intercepciones x y y de la gráfica de una ecuación. En algunos problemas propuestos, se pide explicar y para poder responder no es necesario explicitar algoritmo alguno.	redactar y explicar por escrito su respuesta. Ejemplos de preguntas: ¿Cómo se localizan los puntos de cortes de la función afín con los ejes?
Uso de la tecnología	El texto suministra instrucciones para que el estudiante, a partir de ejemplos, resuelva situaciones de las mismas matemáticas usando calculadora graficadora. En las actividades o ejercicios, propone en algunos casos (pocos) el uso de dicha calculadora.	No se mencionan o proponen ejemplos o ejercicios donde se usen recursos tecnológicos. Todas las actividades están caracterizadas por el uso de lápiz y papel.
Sistema Para-textual.	El texto está acompañado de otros recursos que le son complementarios para brindar apoyo tanto al docente como al estudiante. En primera instancia, comprar el libro implica también la adquisición de un CD, el cual tiene videos, exámenes de preparación, solución completa y detallada de algunos ejercicios propuestos, dichos ejercicios aparecen en el texto acompañados en su numeración con un ícono que representa el CD, indicando que este le puede servir de apoyo al estudiante. En segunda instancia, si el colegio define como texto guía dicho texto, la editorial le asigna a cada estudiante y al profesor, un usuario y una contraseña para acceder a la plataforma de Pearson. En dicha plataforma se ingresa al software <i>MyMathLab</i> o <i>MathXL</i> , donde el profesor puede usar la plataforma, similar a un campus virtual o Moodle.	La compra del texto directamente con la editorial, le garantiza al docente adquirir una edición diferente para él, que viene acompañada de un CD. En esta edición, el texto es el mismo que para el estudiante, exceptuando 48 páginas adicionales que se encuentran al inicio, donde el libro propone para cada estándar, las unidades asociadas. Igualmente, propone unos objetivos y competencias generales para grado 9º. Posteriormente, para cada unidad, sugiere una matriz de planeación, un mapa conceptual y sugerencias metodológicas. Finalmente, propone unas actividades de preparación para la prueba saber 9º.

De acuerdo con la tabla anterior, se puede afirmar que el *texto 1* se usa en las instituciones educativas para el ciclo 8°-9°, lo cual implica que según los contenidos abordados en este ciclo, los que presenta el texto corresponden a lo que se enseña convencionalmente en dichos grados.

T1 propone abordar el concepto de función (por primera vez en la unidad 3, ya que también se aborda en las unidades 6, 8 y 9) antes de trabajar lo relacionado con la sintaxis algebraica convencional, es decir, los polinomios y operaciones entre ellos, incluyendo productos notables y factorización, situaciones que se abordan en la unidad 5. Además, antes de la unidad 3 presenta, en la 2, el tratamiento de las ecuaciones y desigualdades lineales.

De acuerdo con esto, se puede inferir que el autor considera necesario el trabajo con las ecuaciones y desigualdades como preámbulo al concepto de función. Igualmente, la ecuación es fundamental en el proceso de graficación, pues se habla de graficar ecuaciones de dos variables, y a partir de ello trata de abordar los registros tabular, algebraico y gráfico. Así mismo, el autor después de hacer el tratamiento con ecuaciones de dos variables, introduce el concepto de función apelando a que su representación algebraica es la de una ecuación de dos variables. En este orden de ideas, se citan los dos apartados del texto

“... cuando una ecuación en las variables x y y es una función, con frecuencia escribimos al ecuación utilizando la notación de funciones $f(x)$, se lee *fdex*”

“las funciones escritas en notación de funciones también son ecuaciones ya que contienen un signo de igual. Podemos referirnos a $y = 3x + 2$ ya sea como una ecuación o bien como una función. De manera análoga, podemos referirnos a $f(x) = 3x + 2$ como una función o una ecuación” (Angel, 2008, p. 163)

El texto induce a que el estudiante trabaje con símbolos, en este caso con letras que representan las incógnitas en las ecuaciones lineales. Igualmente, se maneja la simbología propia correspondiente al concepto de función haciendo uso de expresiones generalizadas. Lo que llama la atención es que la parte tradicional del álgebra, que corresponde a la sintaxis, es abordada después de haber trabajado con simbología propia para las ecuaciones y funciones. Esto implica una forma alterna en el orden en que se trabajan los SMS, pues las letras se conciben, primero como variables e incógnitas y luego, se trabajan como números generalizados y parámetros.

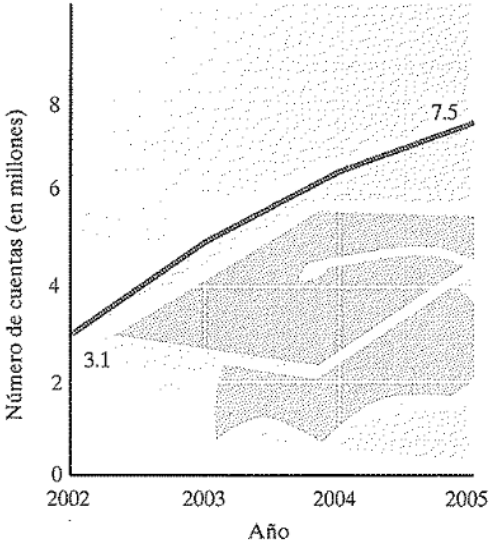
Ahora, el texto 1 aborda tres definiciones entorno al concepto de función, las tres se enmarcan en las definiciones de la forma T es un U tal que $C_1, C_2, \dots, C_n$. Esto en cuanto a la estructura de la definición.

En cuanto al contenido de la definición, y relacionándolo con la introducción al tema, se nota incongruencia respecto a la caracterización al concepto de función. Lo anterior se afirma en virtud de que en la introducción al tema se parte de ejemplos de cantidades que se relacionan manifestando una idea de variación de dichas cantidades (el ejemplo de las naranjas). Sin embargo, cuando se define formalmente (se propone su significado) el concepto de función, esta se concibe como relación de correspondencia y no de variación, como se intentaba contemplar antes de la definición.

En la siguiente tabla se detalla el porcentaje de ejercicios propuestos en cada uno de los tres contextos y cuándo el uso de tecnología es utilizada como herramienta, además cuándo los ejercicios evocan a la utilización de las expansiones discursivas, luego se muestra un ejercicio representativo de cada situación.

Tabla 8. Texto 1, Total 220 ejercicios, comprenden las secciones 3-1 hasta la 3-3

Contexto	Ejemplo	Porcentaje de ejercicios
Desde la misma matemática	<i>Evalúe cada función en los valores indicados.</i> 41. $f(x) = -2x + 7$; determine a) $f(2)$. b) $f(-3)$. 42. $f(a) = \frac{1}{3}a + 4$; determine a) $f(0)$. b) $f(-12)$.	55%

Desde la vida real	72. Planes de ahorro escolares El número de los planes 529 de ahorro escolares se ha incrementado en Estados Unidos de 2002 a 2005, como se ilustra en la gráfica siguiente. Los planes 529 son populares  Fuente: College Savings Plans Network, USA Today (8/9/05) a) ¿Esta gráfica representa una función? Explique. b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable dependiente? c) Si n representa el número de planes 529, determine $n(2005)$. d) Determine el aumento porcentual en el número de planes 529 de 2002 a 2005.	12%
Desde la otras ciencias	57. Temperatura La fórmula para cambiar temperaturas en Fahrenheit a temperaturas en Celsius es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. La temperatura Celsius es una función de la temperatura Fahrenheit. a) Escriba esta función utilizando la notación de funciones. b) Determine la temperatura Celsius que corresponde a -31°F.	8%
Uso de tecnología	 <i>Utilice una calculadora graficadora para graficar cada función. Asegúrese de seleccionar valores para la ventana que muestre la curva de la gráfica. Luego, si su calculadora puede mostrar tablas, despliegue una tabla de valores de x, en unidades, de 0 a 6.</i> 93. $y = 2x - 3$ 94. $y = \frac{1}{3}x + 2$ 95. $y = x^2 - 2x - 8$ 96. $y = -x^2 + 16$	8%

Expansiones discursivas	Ejercicios de concepto/redacción 1. ¿Qué es una función? 2. ¿Qué es una relación? 3. ¿Todas las funciones también son relaciones? Explique. 4. ¿Todas las relaciones también son funciones? Explique. 5. Explique cómo usar la prueba de la recta vertical para determinar si la relación es una función.	17%
----------------------------	--	-----

De forma análoga a como se hizo en el texto 1, del texto 2 se puede decir lo siguiente: Este texto está catalogado explícitamente para grado 9º, es decir, no es un texto que este pensado para todo el ciclo de 8º - 9º. Por ende, parte de la sintaxis del álgebra se encuentra en el texto de grado 8º y aun así en T2 encontramos que antes de abordar por primera vez el concepto de función en la unidad 4, empieza abordando los números reales, las operaciones con expresiones algebraicas y la factorización en la unidad 1, potenciación y radicación en la unidad 2, contenidos que son muy importantes en el momento de ahondar en el concepto de función. La unidad 3, aunque está justo antes de ver funciones, se puede pensar que no es tan indispensable en el momento de ver el concepto de función ya que esta unidad alude a números complejos. De acuerdo con lo mencionado, el autor considera relevante que el estudiante tenga cierto conocimiento y experiencia con las sintaxis y algoritmia algebraica antes de abordar el concepto de función.

T2 hace énfasis en la parte sintáctica del Álgebra antes de abordar el concepto de función. Específicamente, lo asociado a productos notables y factorización se aborda con mayor profundidad en la versión para grado 8º. Esto denota que los estudiantes primero trabajan los SMS asociados a la aritmética y se proponen SMS intermedios para poder ir avanzando en la complejidad de unos SMS de carácter algebraico (los más abstractos).

En cuanto a secuencialidad temática en las unidades relacionadas con el concepto de funciones, se puede observar un orden jerárquico de la siguiente forma, función lineal, función afín, función cuadrática, función exponencial y función logarítmica.

Finalmente, si se retoma la unidad 4, se nota en ella las siguientes características, que estando titulada “Sistemas de ecuaciones lineales” se hace más énfasis en la ecuación de la recta (pendiente, puntos de cortes con los ejes, determinación de la ecuación a partir de ciertas condiciones dadas, asociación con la representación gráfica, posiciones relativas de dos rectas en

el plano, entre otras) para luego cerrar la unidad abordando el tema que hace alusión al título de la unidad, es decir, los métodos y aplicaciones de resolución de sistemas 2×2 y 3×3 .

En dicha unidad se aborda el concepto de función, función lineal y función afín, como preámbulo a los contenidos mencionados en el párrafo anterior, es decir, se esperaría que la entrada al concepto de ecuación y de sistemas de ecuaciones fuera desde el punto de vista de las funciones, pero el texto no lo hace así, por el contrario da la percepción de que hubiera una ruptura o separación de estos conceptos (función - ecuación). Dicha ruptura la podemos sustentar desde dos puntos de vista, el primero, desde el mapa conceptual de la unidad 4 que propone el autor en la edición para el docente (ver anexo 18), dicho mapa se presenta como dos redes conceptuales disjuntas, una para la función y otra para la de sistemas de ecuaciones lineales, específicamente el concepto de ecuación no tiene lugar en la red conceptual de función.

Para el otro punto de vista, la unidad 4 está compuesta por cuatro temas: Funciones, Funciones lineales y función afín, Ecuación de la recta y Sistemas de ecuaciones lineales. En los dos primeros temas no se hace alusión al concepto de ecuación, sin embargo, se utiliza representaciones para la función de la forma $y = mx + b$, es decir, como si fuera una ecuación de dos variables, así mismo, para los dos últimos temas de la unidad, se alude al concepto de ecuación pero no al de función, de forma implícita se asume que la ecuación de la recta también es de la forma $y = mx + b$, lo cual deja entre dicho la intención del autor al ubicar los dos primeros temas antes de los de ecuación.

Para el *texto 2* se citaron 4 definiciones (ver *tabla 7*) entorno al concepto de función. La primera que define el concepto de función, se enmarca en las definiciones de la forma T es un U tal que $C_1, C_2, \dots, C_n$. Las siguientes tres definiciones, corresponden a una definición de tipo nominal.

Retomando la primera definición, se puede afirmar que, en cuanto a su contenido, pone de manifiesto la función como una relación de correspondencia; situación que toma más fuerza a la hora de presentar los ejemplos siguientes a dicha definición.

En la siguiente tabla se detalla el porcentaje de ejercicios propuestos en cada uno de los tres contextos y cuándo el uso de tecnología es utilizada como herramienta, además cuándo los ejercicios evocan a la utilización de las expansiones discursivas, luego se mostrará un ejercicio representativo de cada situación.

Tabla 9. Texto 2, Total 27 ejercicios, comprenden las secciones 4-1 hasta la 4-3

Contexto	Ejemplo	Porcentaje de ejercicios
Desde la misma matemática	4 Realiza la gráfica de las siguientes funciones. a. $f(x) = \frac{2}{3}x$ b. $f(x) = -5x + 1$ c. $f(x) = 4x$ d. $y = \frac{1}{2}x - 3$ e. $y = -x + 1$	85%
Desde la vida real	 Soluciona problemas 6 Indica cuáles de las siguientes situaciones representan funciones lineales o afines. a. Andrés alquila un auto y paga \$80.000 por 5 días más \$7.000 hora adicional. Relación: tiempo de alquiler y costo. b. En la bodega hay el triple de empleadas que de empleados. Relación: número de empleadas y número de empleados. c. Juan gana \$1.200 por cada producto que vende. Relación: cantidad de productos vendidos y ganancia.	7.5%
Desde la otras ciencias		0%
Uso de tecnología		0%

Expansiones discursivas	① Explica, mediante un ejemplo, el significado de cada expresión, con base en el texto explicativo. a. Diagrama cartesiano. b. Fórmula. c. Tabla de valores. ② Determina cuáles de las siguientes relaciones representan una función. Justifica tu respuesta. a. Un número positivo y su raíz cuadrada. b. Un número negativo y su valor absoluto. c. El número de lados de la base de una pirámide y su número total de aristas.	7.5%
-------------------------	---	------

Con todo lo mencionado de T1 y T2, a continuación se muestra la propuesta de enseñanza que se privilegia en cada uno de ellos.

El *texto 1* exhibe una propuesta de enseñanza caracterizada por presentar el concepto de función antes de abordar lo concerniente a los polinomios y lo que a la sintaxis algebraica se refiere. Igualmente, la introducción a la función se hace desde las ecuaciones de dos variables y la gráfica de dichas ecuaciones. De esta manera, se aborda el concepto de función, a partir de la graficación de las soluciones de dichas ecuaciones.

Los sistemas de representación usados por excelencia son: el tabular, el algebraico, el gráfico y algunas expresiones en lenguaje natural. Es importante mencionar que el lenguaje gráfico es el que permea la mayor parte de las situaciones, sin embargo, no se propone una observación general desde ellas. Es decir, las gráficas son simplemente resultado de tabulaciones y el paso contrario, corresponde a la identificación de parámetros específicos. Los SMS se trabajan tratando de que los estudiantes usen sus saberes previos e intuitivos acerca del manejo del plano cartesiano y características relacionadas con el lenguaje variacional y conjuntista.

Las definiciones presentadas en el texto, permiten la entrada a los ejemplos tratando de que se verifiquen las condiciones manifiestas en esas definiciones. Asimismo, los ejercicios planteados corresponden a los esquemas que se presentan en los ejemplos. En muchas de las actividades se propende por esquemas de resolución por parte del estudiante, que apunten a lo que plantea Polyadesde el enfoque de la resolución de problemas. Las actividades propuestas se exponen en el marco de los contextos que plantean los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, (MEN,

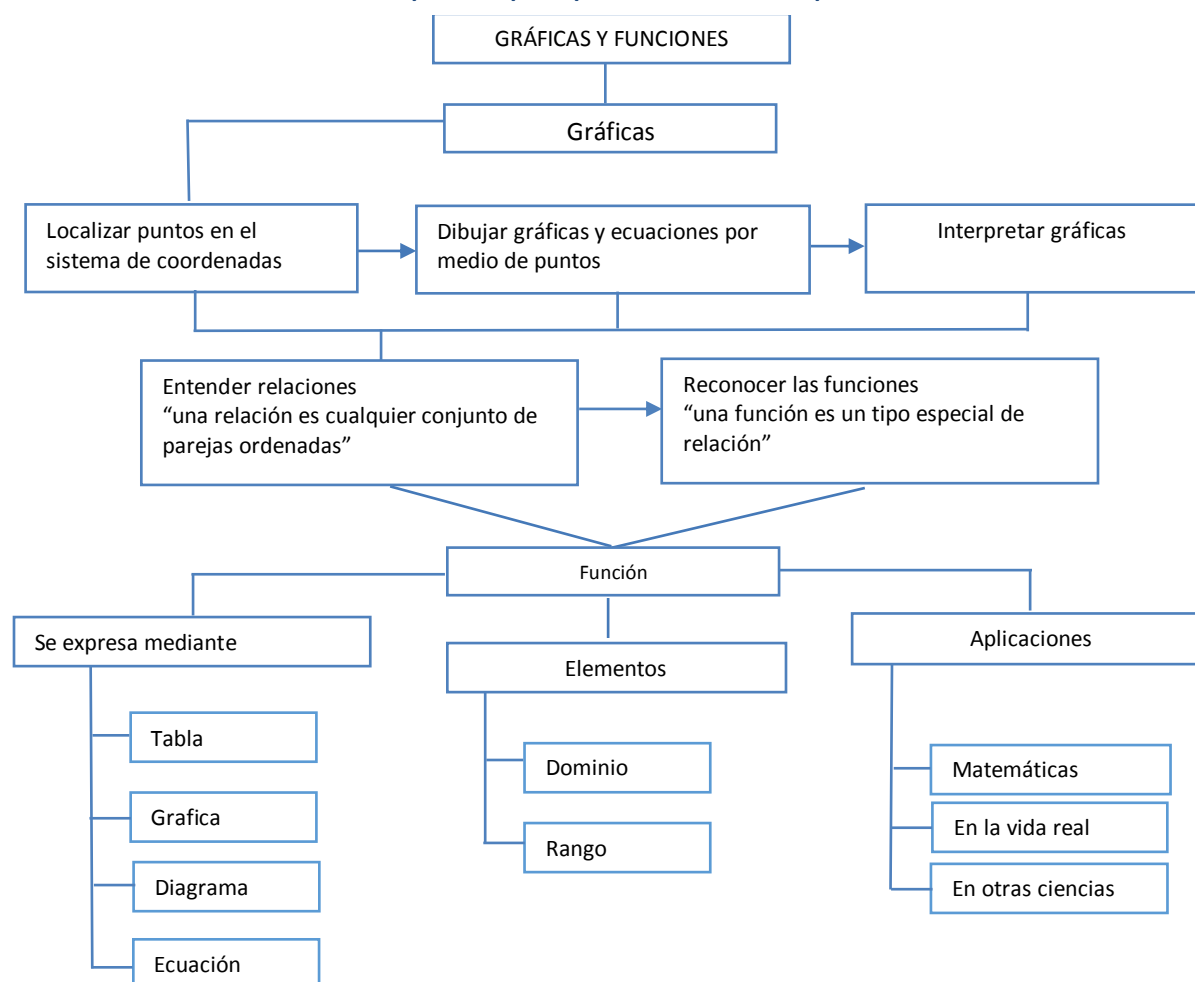
1998) implicando asimismo, la coherencia con el pensamiento variacional y procesos generales. Las definiciones alusivas al concepto de función, la caracterizan como una relación de correspondencia con enfoque conjuntista. Al principio de la unidad se explicitan los objetivos y temas al estudiante. Igualmente, los ejemplos y ejercicios permiten la fácil transición a situaciones más complejas a través de SMS intermedios.

El uso de las expansiones discursivas toma relevancia en los ejemplos y actividades que se proponen. Se les pide a los estudiantes que justifiquen sus procesos y que traten de realizar un análisis que deben explicitar por escrito de tal manera que puedan manifestar sus conjeturas y propuestas de solución a las cuales debe llegarse no necesariamente a través de procedimientos algorítmicos. Para conducir a esto, en la mayor parte de los ejemplos se ilustra cómo interpretar el enunciado, plantear una posible ruta de solución y proceso para llegar a ella; todo esto con ayuda de esquemas, dibujos y explicaciones en lenguaje natural. Se le da importancia al trabajo en grupo, proponiendo actividades por equipos de estudiantes.

En cuanto a la evaluación, trata de proponer varias actividades adicionales: Examen de mitad de capítulo, examen de práctica del capítulo y examen de repaso acumulativo. Se trata de que el estudiante realice una autoevaluación comparando sus respuestas con las del texto (al final, en el apéndice), donde se explicita después de cada respuesta, la sección y objetivo que le corresponde. Igualmente, en ocasiones, después de un ejemplo resuelto, le propone al estudiante que ya está listo para resolver algún ejercicio, sugiriéndole que lo haga.

El *texto 1* fomenta el trabajo dentro y fuera de clase, con el uso de la plataforma virtual, donde los estudiantes pueden practicar y verificar sus errores observando algunas sugerencias dadas. A continuación se presenta un mapa conceptual de la propuesta de enseñanza que propone el autor, para abordar el concepto de función.

Ilustración 9. Mapa conceptual para abordar el concepto de función T1



En el *Texto 2*, la propuesta de enseñanza que plantea el texto se caracteriza por abordar el concepto de función después de haber abordado los polinomios y aspectos sintácticos asociados al álgebra convencional trabajada en grado 8°.

Su propuesta es presentar el concepto de función iniciando con la definición y la de algunos de sus elementos. La definición presenta a la función como una relación de correspondencia con enfoque conjuntista.

Se tratan los temas: función, función lineal y función afín. Para cada tema, la estructura que se presenta al estudiante consiste en presentar definiciones, explicación expositiva, plantear ejemplos y posteriormente, ejercicios relacionados. Se presentan ejemplos y ejercicios en el

contexto de las Matemáticas tratando de que el estudiante pueda verificar propiedades y aspectos teóricos manifestados en las definiciones.

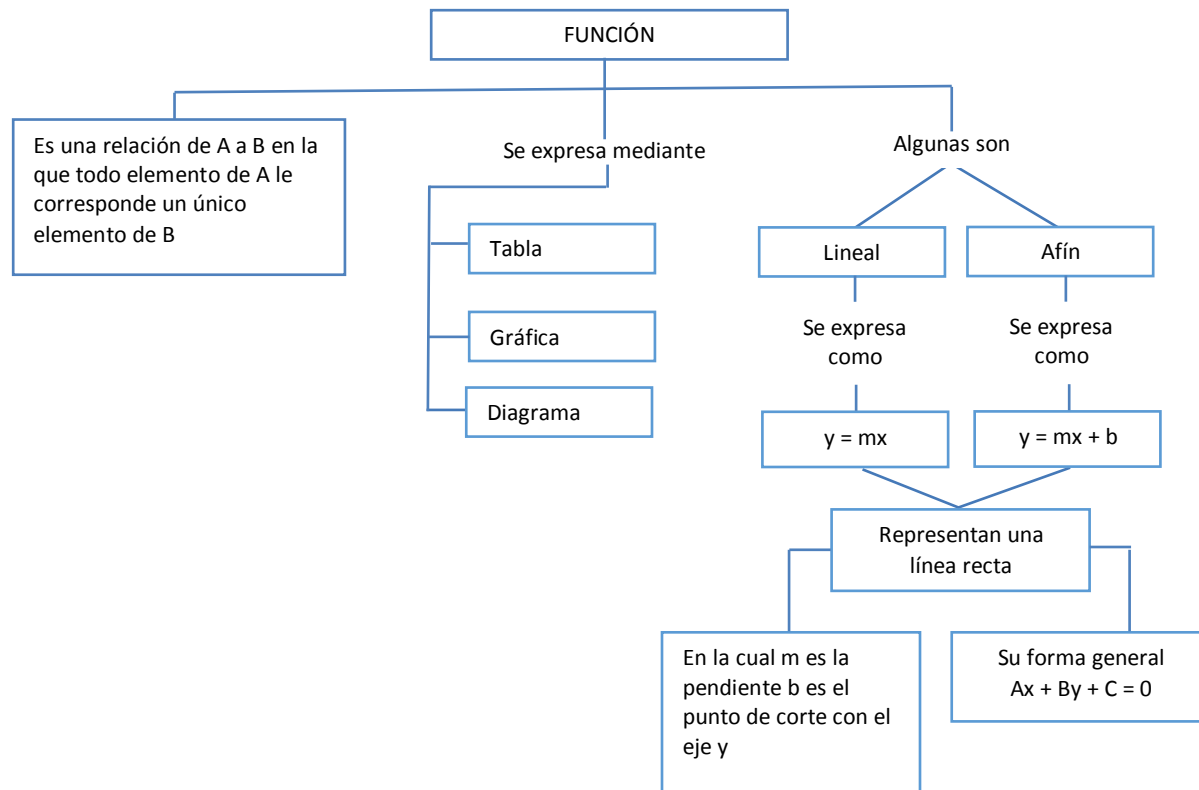
Los sistemas de representación usados por excelencia son: el tabular, el algebraico, el gráfico, el sagital y algunas expresiones en lenguaje natural. Es importante mencionar que el lenguaje algebraico es el que permea la mayor parte de las situaciones, sin embargo, no se propone una correlación directa con otras formas de representar, más allá de las relaciones que, por definición, están asociadas. Es decir, las gráficas son simplemente resultado de tabulaciones y el paso contrario, corresponde a la identificación de parámetros específicos. Lo tabular es tomado como consecuencia natural de reemplazar valores arbitrarios para una letra en la expresión algebraica. Lo tabular y lo sagital está relacionado por igualdad de condiciones en los valores de entrada y los valores de salida. Los SMS se trabajan tratando de que los estudiantes usen sus saberes previos e intuitivos acerca del manejo del plano cartesiano y características relacionadas con el lenguaje variacional y conjuntista.

En cuanto al uso de las expansiones discursivas se propone muy poco en especial en los ejercicios, pues la mayoría de ejercicios están centrados en un contexto matemático y sin inducir al estudiante a que explique, a que haga uso del lenguaje natural o que haga sus propias predicciones o conjeturas.

Finamente, la cantidad de ejercicios no es muy extensa pues en cada tema de la unidad se presentan actividades de 5 a 7 preguntas incluso hay algunas actividades con 3 preguntas. Al final de la unidad se presenta un taller, que tiene incluido preguntas con todos los temas desarrollados en la unidad, de igual manera no es muy extenso y trae muy pocas situaciones diferentes a la del contexto matemático.

A continuación se presenta un mapa conceptual de la propuesta de enseñanza que propone el autor, para abordar el concepto de función.

Ilustración 10. Mapa conceptual para abordar el concepto de función T2



2.2.3.3 La enseñanza de la función en la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta

Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas de la educación colombiana (MEN, 2006) están organizados en cinco grandes grupos: el primer grupo corresponde a los grados primero, segundo y tercero; el segundo grupo corresponde a los grados cuarto y quinto; el tercer grupo corresponde a los grados sexto y séptimo; el cuarto grupo corresponde a los grados octavo y noveno; el último grupo corresponde a los grados décimo y undécimo.

Para este caso, el presente trabajo se enfocó en el grado noveno de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta, pues desde el marco legal y desde el plan de área de la Institución Educativa, es donde la enseñanza de la función toma mayor relevancia.

Ahora, el plan de área de matemáticas de la institución educativa, tiene como intención desarrollar los cinco tipos de pensamiento matemático: aleatorio, métrico, numérico, espacial y variacional, pero como la propuesta en este estudio está enmarcada en la función y la

covariación, se hace especial énfasis a observar cómo se propone el desarrollo el pensamiento variacional, y cómo se propone la enseñanza del concepto de función. Esta enseñanza obedece a la consideración de patrones de variación y cambio. Por ejemplo, estos son algunos de los estándares trabajados en grado noveno, y que hacen parte del pensamiento variacional en concordancia con lo propuestos por el MEN.

- Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

Ahora, el plan de área de matemáticas de grado octavo y noveno de la Institución educativa aborda los conceptos asociados al pensamiento variacional, de la siguiente manera: en grado octavo, se trabajan las expresiones algebraicas (simbología usada, sus propiedades y operaciones asociadas) y las ecuaciones lineales (expresión algebraica, tablas, graficas, propiedades y problemas). Mientras tanto, en grado noveno, se propone el abordaje del concepto de función (definiciones y propiedades), función lineal, funciones cuadráticas, exponenciales y logarítmicas. Para cada tipo de función se propone el estudio de las gráficas, familias de funciones, propiedades y problemas.

De acuerdo con lo anterior, para la observación experimental de este estudio, se tomó como grupo de referencia el grado noveno, ya que estos estudiantes contaban con herramientas algebraicas y geométricas más elaboradas, relacionadas con la parte sintáctica del Álgebra. Asimismo, los estudiantes tenían cierto manejo del software GeoGebra, ya que en grados anteriores, lo habían manipulado en la sala de cómputo con el propósito de visualizar y explorar algunas propiedades geométricas. Además, de acuerdo con los propósitos de este estudio, es conveniente aplicar las actividades de covariación con estudiantes que no hayan abordado el concepto de función, ya que se trata de verificar el grado de acercamiento inicial desde las actividades de covariación, sin que la memoria de trabajo respecto al concepto en consideración influya en el análisis y conclusiones.

De acuerdo con lo mencionado hasta el momento y como se ha caracterizado el modelo de enseñanza, a continuación se explicitan algunas implicaciones de la componente de enseñanza en la consolidación del MTL para la covariación.

- El MEN (1998, 2006) propone el estudio de la función desde una perspectiva de variación y dependencia, privilegiando diferentes sistemas de representación. Sin embargo, desde los otros modelos (cognitivo y comunicación) se evidencia que todavía los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje, las cuales son consecuencia del abordaje sólo conjuntista y de correspondencia del concepto de función. Esto denota que se debe privilegiar, tal como se dijo en el modelo de competencia formal, la enseñanza del concepto de función desde una perspectiva en que el estudio del cambio sea protagonista y que a su vez, se fomenten los procesos de visualización a partir del uso y conversión entre distintos sistemas de representación.
- El MEN propone el estudio de la función desde la consideración de fenómenos de cambio y variación, es decir, el acercamiento al concepto de función desde un punto de vista dinámico, donde la dependencia entre variables debe primar sobre las reglas de asignación o correspondencia. Sin embargo, los textos escolares que se supone, deben reflejar la propuesta del MEN, siguen presentando el concepto de función desde una perspectiva estática y conjuntista. Este resultado, trae como implicación directa para la consolidación del MTL, el hecho de considerar situaciones de covariación que disten de la visión estática expuesta en los textos escolares, pues tanto las definiciones como las actividades propuestas en ellos, no pueden ser tomados como puntos de partida o insumo para el diseño de la intervención de aula de este estudio.
- La enseñanza del concepto de función es clave para el estudio del Cálculo diferencial e integral, razón por la cual es indispensable que se haga énfasis en la concepción de fenómenos de cambio y variación. Esto, además denota la importancia que tiene trabajar el concepto de función en la escuela.

- Desde la enseñanza, se debe hacer énfasis en el manejo simultáneo y complementario de los distintos sistemas de representación para abordar el concepto de función, en vista de que este concepto es uno de los que más admite representaciones en su estudio. En particular, se recomienda el uso de la tecnología para poder asegurar, en el estudio del concepto de función y demás aspectos del Cálculo. De esta manera, para la consolidación del MTL, se debe privilegiar la consideración de la variabilidad que puede ofrecer el ambiente dinámico de un software cualquiera.
- La propuesta curricular (plan de aula) de la Institución educativa donde se realiza la intervención de aula coincide con la necesidad de querer caracterizar y estudiar el concepto de función. Por lo tanto, en el diseño de las tareas se atiende a las necesidades del estudio, pero también se incide en las dinámicas mismas del colegio, aplicando las tareas dentro de las horas correspondientes a Matemáticas; sin necesidad de solicitar espacios adicionales con los estudiantes o espacios extraescolares.

Esta propuesta del estudio de la función, se enmarcó en la noción del razonamiento covariacional propuesta por Carlson, et al. (2003) donde las actividades diseñadas buscan que los estudiantes razonen sobre cantidades covariantes en situaciones dinámicas y promuevan el uso del lenguaje. Así mismo, para el diseño de las actividades se tuvo en cuenta la integración del contexto real con el contexto matemático; por ejemplo, el dominio y el rango obedecían a contextos métricos y geométricos en una situación que podría ser posible en la vida real. También se tuvo en cuenta que los estudiantes usaran distintos sistemas de representación; adicional a ello, el uso de un software permitió modelar la situación y observar el carácter dinámico como eje fundamental de la función. Con todo esto se buscó que el estudiante no sólo diera soluciones, sino que también tuviera la oportunidad de proponer, innovar o inventar, generando así una visión diferente de la matemática, al pensar que no es un constructo terminado, sino más bien, como una disciplina por construir.

Implicaciones generales de cada componente y su aporte a la construcción del MTL inicial

En relación el primer y segundo objetivo específico, se pudo determinar un Modelo Teórico Local -MTL- para el estudio de la función a través de la covariación. Dicho MTL se soporta en

la documentación de sus cuatro componentes, el de competencia formal, el de enseñanza, el de cognición y el de comunicación; de la siguiente manera:

La fenomenología histórico-epistemológica dejó ver que los fundamentos para la construcción del concepto de función obedecen a la asociación y estudio de fenómenos de cambio, por lo tanto, este concepto debe estar soportado en nociones de variable, de dependencia, de transformación y de variación. Sin embargo, en el aula de clases se presenta el concepto solo de forma conjuntista, desconociendo el largo camino que ha sido necesario recorrer para llegar a las definiciones clásicas que respondían a la necesidad de estudiar el movimiento. De forma paralela, la fenomenología pura, permitió dilucidar cuál es la concepción de función desde el saber sabio, de donde se destacan las definiciones presentadas con elementos en común como *Correspondencia entre valores de variables*, *Correspondencia entre elementos de dos conjuntos*, *Dependencia entre dos variables* y *Conjuntos de pares ordenados*. Se observó también que los usos que se proponen para el concepto de función, se dan en contextos de fenómenos de cambio, sin embargo, en las definiciones se excluye ese contexto dinámico y se restringe a un enfoque conjuntista, donde la correspondencia prima entre dos conjuntos y representan parejas ordenadas.

En cuanto al modelo de enseñanza, se puede concluir que el MEN propone el estudio de la función desde la consideración de fenómenos de cambio y variación, es decir, el acercamiento al concepto de función desde un punto de vista dinámico, donde la dependencia entre variables¹² debe primar sobre las reglas de asignación o correspondencia. Sin embargo, los textos escolares que se supone, deben reflejar la propuesta del MEN, siguen presentando el concepto de función desde una perspectiva estática y conjuntista y presentan el concepto de función, de manera conjuntista.

Como en el modelo cognitivo y de comunicación es importante estudiar la forma en que los estudiantes comprenden ciertos contenidos y cómo comunican sus saberes; entonces es menester considerar una enseñanza controlada atendiendo al acercamiento a la función desde las consideraciones que se hicieron en estos modelos. En concordancia con lo anterior, el marco

¹² La dependencia entre variables es aquella dependencia de una variable en relación con el valor de la otra en relación del valor de la otra para cada correspondencia.

conceptual propuesto por Carlson, et al. (2003) para el estudio del razonamiento covariacional, se consideró como eje principal para el diseño de las tareas y la clasificación de los estudiantes de acuerdo a sus respuestas. Igualmente, este marco conceptual atiende al análisis que se puede hacer de los distintos SMS involucrados cuando un estudiante logra razonamientos más complejos a partir de sus conocimientos previos.

Todo lo mencionado hasta el momento, consolida el análisis previo de la problemática, lo cual implica un MTL inicial para el trabajo de la función desde las actividades de covariación. Este aspecto demarca, en el MTL inicial, la necesidad de trabajar el concepto de función, atendiendo al análisis variacional, considerando la función como una relación de dependencia y considerando elementos u obstáculos epistemológicos que deben ser tenidos en cuenta para proponer la enseñanza y analizar las formas de aprendizaje. De forma paralela, dicho modelo inicial justifica la viabilidad de poner en observación el contraste de la hipótesis planteada, que propende por el acercamiento al estudio de ciertos elementos o rasgos de una función, a través de la puesta en escena de actividades de covariación. La determinación de este MTL inicial se consolida como insumo principal para el diseño y desarrollo de la experimentación.

A continuación, se muestra un esquema que representa las implicaciones de cada componente (enseñanza, competencia formal y cognición-comunicación) descrita en este capítulo en la construcción del MTL, así como también las implicaciones de este MTL en el diseño las actividades y desarrollo de la experimentación.

Ilustración 11. Implicaciones generales de cada componente y su aporte a la construcción del MTL inicial.



CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se hace alusión a la parte metodológica del MTL explicando sus distintas etapas y resultados finales. En este orden de ideas, se presenta la articulación que tiene este capítulo con lo que ya se ha realizado en los capítulos 1 y 2, de acuerdo con el marco teórico y metodológico de los MTL. Igualmente, se presenta el diseño de la experimentación, mostrando la articulación del análisis previo (el MTL de la covariación ya consolidado) con el desarrollo de la experimentación. En este orden de ideas, se explicita el contenido de la propuesta de aula con las respectivas conexiones que tiene con el MTL inicial. Seguidamente, se exponen los detalles relacionados con la implementación, para posteriormente, mostrar los resultados de la implementación como producto de las actuaciones de los estudiantes.

Finalmente, se presenta el análisis de estos resultados, de acuerdo con unas variables y criterios de análisis en concordancia con el MTL establecido para la función como covariación, en el cual adquiere relevancia el razonamiento covariacional propuesto por Carlson.

3.1 ETAPAS DEL DISEÑO Y DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

A continuación, se explicita cada etapa que hace parte del diseño y desarrollo de la experimentación para el caso de la función como covariación. En el anterior capítulo se habló sobre la primera parte del diseño de la experimentación, especificando en qué consistía la problemática, el análisis previo de los problemas y la hipótesis teórica que hay que contrastar.

De esta forma, a continuación se muestran las etapas de la parte final del diseño de la experimentación, es decir, el diseño de las tareas y su fundamentación de acuerdo al MTL inicial consolidado como consecuencia del análisis previo del capítulo 2. Posteriormente, se explicita cada etapa del desarrollo de la experimentación, es decir cada aspecto relacionado con la implementación de la secuencia de enseñanza.

3.1.1 Diseño de la propuesta de aula o secuencia de enseñanza

A continuación se explicita de qué manera influye el MTL inicial en la determinación de los contenidos y desempeños que caractericen la covariación, el diseño de las tareas y distribución de estas de acuerdo a propósitos específicos.

Desde el modelo de competencia formal, la fenomenología histórico-epistemológica deja ver que los fundamentos para la construcción del concepto de función obedecen a la asociación y estudio de fenómenos de cambio, por lo tanto, este concepto debe estar soportado en nociones de variable, de dependencia, de transformación y de variación. De forma paralela, la fenomenología pura, permitió dilucidar cuál es la concepción de función desde el saber sabio, de donde se destacan los siguientes elementos en común que tiene las definiciones presentadas: correspondencia entre valores de variables, correspondencia entre elementos de dos conjuntos, dependencia entre dos variables, y conjuntos de pares ordenados. Los usos que se proponen para el concepto de función, se dan en contextos de fenómenos de cambio, sin embargo, en las definiciones se excluye ese contexto dinámico y se restringe a un enfoque conjuntista, donde la correspondencia prima entre dos conjuntos y representan en parejas ordenadas.

De acuerdo con lo anterior, aunque se privilegia la teoría de conjuntos, no se debe desconocer el largo camino que ha sido necesario recorrer para llegar a las definiciones clásicas que respondían a la necesidad de estudiar el movimiento. Por lo tanto, en el diseño debe imperar el estudio del cambio y dependencia entre variables.

En cuanto al modelo de enseñanza, como ya se mencionó en el capítulo 2, el MEN propone el estudio de la función desde la consideración de fenómenos de cambio y variación, es

decir, el acercamiento al concepto de función desde un punto de vista dinámico, donde la dependencia entre variables debe primar sobre las reglas de asignación o correspondencia. Sin embargo, los textos escolares que se supone, deben reflejar la propuesta del MEN, siguen presentando el concepto de función desde una perspectiva estática y conjuntista. Esto pone de manifiesto la necesidad de romper con los esquemas que presentan algunos libros de texto, que en últimas influyen en la enseñanza; de tal manera que se deben proponer actividades que correspondan a lo que se sugiere desde los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias y se aleje de lo que proponen los textos.

El modelo de enseñanza agrupa aquellos elementos que permiten identificar cuál es la intencionalidad pedagógica referida respecto a los marcos legales y que se ven reflejados en la práctica o ejercicio de la enseñanza. Además, entra en juego el porqué, cómo y para qué de unas actividades dentro de una enseñanza guiada o controlada.

Como en el modelo cognitivo y de comunicación es importante estudiar la forma en que los estudiantes comprenden ciertos contenidos y cómo comunican sus saberes; entonces es menester considerar una enseñanza controlada atendiendo al acercamiento a la función desde las consideraciones que se hicieron en los dos modelos anteriores. En concordancia con lo anterior y como ya se mencionó en el capítulo 2, el marco conceptual propuesto por Carlson para el estudio del razonamiento covariacional, se consideró como eje principal para el diseño de las tareas y la clasificación de los estudiantes de acuerdo a sus repuestas. Igualmente, este marco conceptual atiende al análisis que se puede hacer de los distintos SMS involucrados cuando un estudiante logra razonamientos más complejos a partir de sus conocimientos previos. Además, Carlson propone la identificación de variables, la descripción cualitativa y cuantitativa de los cambios, la razón promedio y la razón instantánea; propone ciertos comportamientos observables en las actuaciones de los estudiantes que dan cuenta de unas acciones mentales asociadas, que a su vez corresponden a unos niveles de covariación.

En síntesis, como el diseño de las tareas de covariación debe estar fundamentado desde los elementos teóricos de cada componente del MTL inicial, a continuación se mencionan dos

características principales para que el diseño y desarrollo de la experimentación permitan obtener resultados fiables para la consolidación de un nuevo modelo teórico local. Dichos aspectos son: elementos matemáticos asociados al concepto de función, y el marco conceptual de Carlson.

Desde los elementos matemáticos asociados al concepto de función se tuvo en cuenta nociones como: Variable dependiente e independiente, Magnitudes invariantes (constantes), Dominio y rango de una función, Relación de dependencia, Razón de cambio, Inyectividad (relación uno a uno), Diferentes tipos de representaciones para la función (Tabular, representación gráfica, algebraica, lenguaje natural y sagital), Patrones de variación, Monotonía (creciente - decreciente), Máximos y mínimos de una gráfica.

Cada uno de los elementos mencionados anteriormente, se trabajan de acuerdo a los grados de complejidad propuestos por Carlson en cada nivel de razonamiento covariacional. En este orden de ideas, para lograr comportamientos cercanos a los asociados a cada acción mental (AM1 hasta AM5), en el diseño de las preguntas se tuvo en cuenta lo que afirman Dolores y Salgado (2009), donde se busca que los estudiantes realicen acciones que los conlleven a involucrarse con preguntas como: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿a qué razón cambia? y ¿cómo se comporta globalmente la gráfica? Estas preguntas, orientadas dentro de un contexto específico, permiten obtener de los estudiantes expansiones discursivas en las cuales las descripciones o razonamientos realizados que ponen en evidencia las distintas relaciones entre los diferentes estratos de SMS usados al enfrentarse a situaciones de cambio.

Para el diseño de las tareas, se tuvo en cuenta que las distintas nociones matemáticas, los tipos de representaciones y diferentes estratos de los SMS se encontraran correlacionadas y fueran aumentando gradualmente la complejidad de acuerdo con los comportamientos y las acciones mentales dilucidados por Carlson.

De forma paralela a los dos aspectos mencionados anteriormente, para el diseño de las tareas también se tuvo en cuenta, los estándares básicos de competencia en matemáticas

para los grados octavo y noveno. En particular, del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se le apuntó al trabajo de los siguientes estándares:

- Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
- Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

A continuación (*ver tabla 10*) se presenta muestra la estructura que subyace a las tareas de covariación dentro de una propuesta de enseñanza controlada. En esta estructura, para cada tarea se detalla la cantidad de preguntas, los propósitos y los elementos matemáticos que se trabajan (asociados al concepto de función). Adicional a lo anterior, en la última columna se asocia a cada tarea una acción mental (Carlson et al., 2003) de acuerdo a los comportamientos esperados de las actuaciones de los estudiantes

En el *anexo 19*, se detalla el contenido de cada una de las tareas que componen la secuencia de enseñanza.

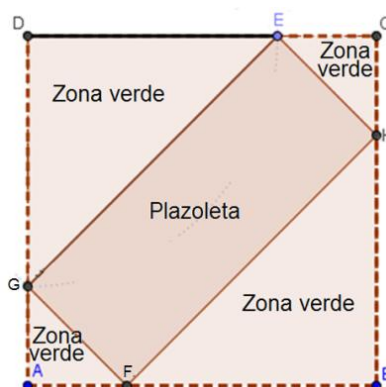
Tabla 10. Estructura general de la propuesta de enseñanza controlada

Situación	Tarea	Propósito	# de preguntas	Elementos matemáticos asociados al concepto de función	Acciones mentales
Situación 1: Introducción de la covariación mediante las dimensiones de la plazoleta	Tarea 1	Comprender la situación	4	Dominio de variación	No aplica
	Tarea 2	Reconocer dependencia entre magnitudes con el uso de GeoGebra (desde lo cualitativo).	5	Relación de dependencia (cualitativa) Reconocimiento de variables, Puntos y magnitudes invariantes	AM1
	Tarea 3	Cuantificar los cambios	6	Dominio de variación, Relación de dependencia (cuantitativa). Patrones de variación, Rango de variación, Regla de asignación. Formas de representación y relaciones entre ellas. Monotonía (creciente o decreciente)	AM1
Situación 2: la covariación en la caracterización de elementos que subyacen al concepto de función	Tarea 1	Encontrar el área máxima de la plazoleta con la ayuda de GeoGebra. Observar el comportamiento de las magnitudes.	4	Dominio de variación y Rango de variación, Relación de dependencia (cuantitativa), Formas de representación y relaciones entre ellas, magnitudes, variables. Variable dependiente y variable independiente. Relación uno a uno	AM1 Acercamiento a AM2
	Tarea 2	Encontrar el área máxima de la plazoleta con la ayuda de cálculos y tablas. Indagar cómo cambian las magnitudes.	4	Dominio de variación, relación de dependencia (cuantitativa). Rango de variación, formas de representación y relaciones entre ellas. variable dependiente y variable independiente, regla de asignación, relación uno a uno	AM2 – AM3
	Tarea 3	Encontrar el área máxima de la plazoleta con la ayuda de representaciones gráficas en el plano cartesiano. Acercarse a algunas características de las funciones.	6	Dominio de variación, relación de dependencia (cuantitativa). Rango de variación, formas de representación y relaciones entre ellas. Variable dependiente y variable independiente, razón promedio de cambio, máximos y mínimos de una gráfica	AM2 – AM3
Situación 3: Observando otras variaciones.	Tarea 1	Razón de cambio: Analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación lineal.	4	Razón de cambio, variación de magnitudes. Cuantificación de los cambios de una variable, en relación con los cambios de otra(s). Sistema de representación de una función. Dominio de variación. Relación de dependencia. Monotonía (creciente o decreciente)	AM3 - AM4
	Tarea 2	Razón de cambio: Analizar y comparar el comportamiento de los cambios en una relación cuadrática.	6	Razón de cambio, variación de magnitudes. Cuantificación de los cambios de una variable, en relación con los cambios de otra(s). Sistema de representación de una función. Dominio de variación, relación de dependencia. Monotonía (creciente o decreciente)	AM4
	Tarea 3	Verificar si para resolver la tarea el estudiante acude al uso de los elementos básicos de una función y de la covariación. Constatar el nivel de covariación en que puede clasificarse la mayoría de los estudiantes	4	Razón de cambio, variación de magnitudes. Cuantificación de los cambios de una variable, en relación con los cambios de otra(s). Sistema de representación de una función. Relación entre una y más variables. Dominio y rango monotonía de una función (creciente o decreciente), puntos de corte con los ejes, máximo y mínimos.	AM4

Atendiendo a todos los requerimientos descritos desde cada una de las componentes, se procedió a diseñar una situación cuyo contexto sirviera de soporte para el diseño de todas las posibles tareas. De esta manera, se tomó como principal referente la situación donde se estudia el comportamiento del área de un rectángulo inscrita en un cuadrado. Esta misma situación fue usada por Villa Ochoa (2012) en un trabajo de investigación donde estudia la función cuadrática a través del razonamiento covariacional. Investigación que fue realizada bajo el marco de estudios de caso.

Para el presente trabajo, y como elementos diferenciadores respecto al estudio de Villa, se definió un contexto a través de un enunciado cuya intención es que el estudiante, luego de desarrollar tareas que paulatinamente van aumentando su grado de complejidad, logre responder la siguiente pregunta

¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima?



Además, una vez el estudiante responda la pregunta, se propone el estudio del comportamiento de los cambios de una magnitud en comparación con los cambios de otra, es decir, se pretende un acercamiento al estudio de la razón de cambio.

3.1.2 Desarrollo de la experimentación

El desarrollo de la experimentación se llevó a cabo a través de estas cinco etapas: elección de la población, aplicación de las tareas de covariación, selección de un subgrupo de estudiantes (muestra), análisis de las actuaciones de los estudiantes e interpretación de los resultados.

Elección y descripción de la población.

La I. E. Policarpa Salavarrieta es de carácter oficial y rural, el calendario con el cual se trabaja es el A, cuenta con jornada extendida y nocturna para adultos, la mayoría de los estudiantes son de estrato 2, en contraste con esto, en el corregimiento de Dapa cuenta con varios restaurantes y con una gran variedad de casas campestres. Es decir, las familias de los estudiantes conviven o trabajan para personas de gran poder económico como empresarios o comerciantes de la región.

Los estudiantes de la Institución Educativa se forman en cuatro principios institucionales de: amor, libertad, diálogo y liderazgo, los cuales, se trabajan durante todo el año escolar pero se profundiza en cada uno de ellos en uno de los cuatro periodos. Gran parte de los estudiantes viven en el corregimiento de Dapa, Pero esto no implica necesariamente que vivan cerca de la institución educativa, ya que algunos viven a más de cuarenta minutos de institución (en buseta), incluso cuando les toca hacer el recorrido a pie, se aumenta considerablemente el tiempo (más de una hora) debido a las características geográficas de la zona (montañosa). A lo anterior se le suma que debido a estas características geográficas y a las condiciones sociales y económicas con las que conviven los estudiantes, se presenta mucha inasistencia en el aula, sin contar que en varias ocasiones los estudiantes deben faltar porque deben apoyar las labores agropecuarias en sus familias, ya sea en el mismo sector o incluso por fuera del corregimiento de Dapa como en el departamento del Cauca, Nariño o Putumayo, generando así una fluctuación en la población de estudiantes que están matriculados en la institución.

Los resultados de la Institución en Pruebas Saber en matemáticas en grados: tercero, quinto y noveno no han sido óptimos y por el contrario han sido muy deficientes, aunque en grado undécimo los resultados mejoran considerablemente (Ver anexo 20).

Ahora, los estudiantes con los cuales se hizo la intervención y observación son de grado noveno, con un promedio de edad de 14 años; donde el 44% de ellos son hombres y 56% son mujeres; la intervención se le hizo a los dos novenos, cada uno con un promedio de 24 estudiantes, pero de esa población se sacó una muestra de 22 estudiantes, con el propósito

de analizar sus respuestas. Para la selección de esta muestra se tuvo en cuenta varios criterios, como el género (que hubiera relativa igualdad en cantidad), el nivel académico (que fuera heterogéneo), la equidad de cada grado (9-1 y 9-2) y que presentaran regularidad en la asistencia, este último criterio, debido a que en la institución se presenta fluctuación en la población estudiantil. Cabe decir, que a la socialización asistieron todos los estudiantes de 9-1 y 9-2.

Para esta intervención, se escogió grado noveno, ya que para este nivel los estudiantes ya tiene mayor apropiación y manejo del álgebra. Además, se eligió este grupo debido a que en los grados octavo y noveno es donde se deben hacer los procesos de generalización de la aritmética, estudio de la variación y del cambio en situaciones reales o en contextos matemáticos, tal cual como lo propone los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas propuestos por el MEN.

Sobre la implementación.

Las tareas de covariación se aplicaron a los grados 9-1 y 9-2 de la Institución Educativa. Es importante aclarar que la totalidad de las tareas se aplicó a todos los estudiantes de los grados mencionados, sin embargo, para la observación y el análisis de las actuaciones, se seleccionó un subgrupo (muestra) de 22 estudiantes. El desarrollo de las tareas se hizo mayoritariamente de manera individual, pero algunas veces se trabajó en parejas ya que era necesario utilizar el computador. Adicional a lo anterior, al finalizar cada una de las tres situaciones, se realizó una plenaria con el propósito de los estudiantes discutieran sus puntos de vista y validaran sus respuestas. En estas plenarias los observadores guiaban la discusión a través de preguntas que pretendían profundizar en la forma en que los estudiantes explicitaban sus razonamientos. En ocasiones, los observadores validaron algunos conocimientos a partir de las discusiones que se dieron en el aula.

Finalmente, en la aplicación de las tareas, dentro de los recursos didácticos empleados, se destacó el uso del Software Dinámico libre GeoGebra, este Programa combina dinámicamente, geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. En dicho software se le presentaron unas *macros*

predeterminadas con el fin de que el estudiante hiciera pruebas de arrastre sin que se afectaran las condiciones iniciales del terreno.

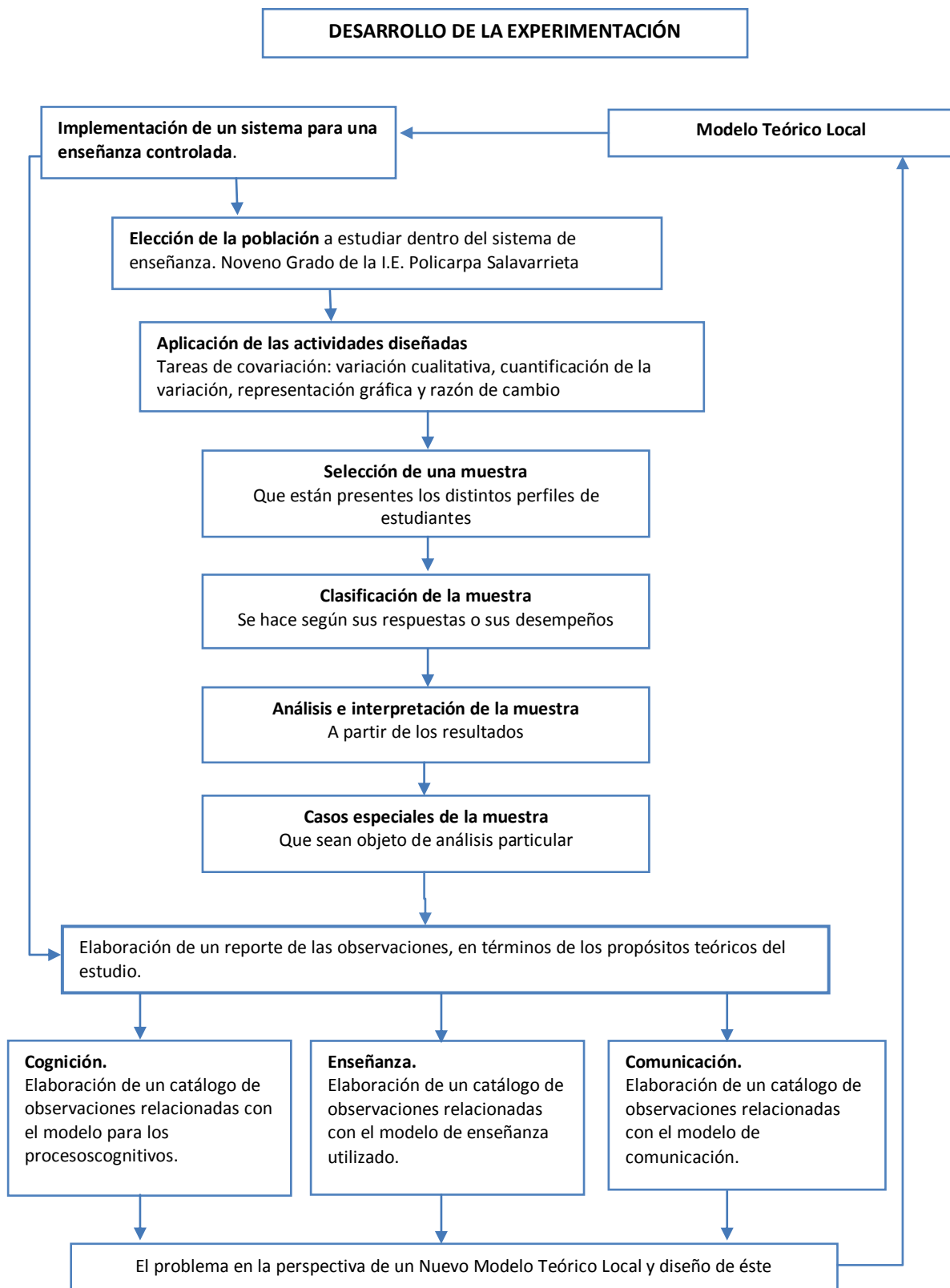
De otro lado, se realizó revisión de plan de área y debido a la coincidencia de sus propósitos con los de las situaciones¹³, se decidió que las tareas fueran parte del plan de clase durante el periodo académico escolar. Es decir, las tareas apuntan al trabajo con el concepto de función, concepto que también estuvo previsto trabajar para el periodo escolar. Esta decisión hizo que las tareas fueran aplicadas durante el desarrollo habitual de las clases. De esta manera, las mismas actividades de las situaciones, sirvieron como instrumento para evaluar parcialmente a los estudiantes, desde el marco institucional.

En cuanto a las herramientas o técnicas para la recolección de datos, se tuvo en cuenta:

- Material escrito en físico: en este caso se refiere a las fotocopias de cada tarea de la propuesta de intervención en el aula, y las respuestas que por escrito aportaron los estudiantes. Este fue el principal instrumento para la recolección de datos, pues es donde estaban las consignas y directrices para los estudiantes.
- Video grabaciones: este tipo de técnica para la recolección de datos se tuvo en cuenta para la socialización de respuestas en el grupo y algunas discusiones cuando hubo trabajo en parejas, con el propósito de registrar interacciones relevantes que dieran cuenta de la forma de razonar y proceder de parte de los estudiantes frente a alguna tarea. Es importante aclarar que el video no se utilizó de forma continua, es decir, no se utilizó en todo el proceso de observación, sólo se utilizó en las plenarios cuando las intervenciones de algún estudiante era relevante o llamaba la atención.

Teniendo en cuenta lo que se ha descrito hasta el momento, a continuación se resume lo mencionado en dos esquemas, que representan el aspecto metodológico del MTL: el diseño de la experimentación y el desarrollo de la experimentación.

¹³ Teniendo en cuenta que desde el plan de área el propósito es enseñar, y que desde la aplicación de las tareas, el propósito es observar las actuaciones de los estudiantes.



3.2 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado, se explicitan los resultados obtenidos como consecuencia de las actuaciones de los estudiantes al tratar de resolver las tareas de covariación propuestas. Como ya se dijo anteriormente, estos resultados se obtienen a partir de técnicas de recolección de datos que en su mayoría fue de la producción escrita de los estudiantes en las fotocopias donde aparecía el cuestionario y consignas a seguir. En algunos casos, los resultados obtenidos en el paso anterior se complementaron con videograbaciones que permitieran mayor claridad sobre la forma en que los estudiantes estaban entendiendo alguna situación particular.

Una vez obtenidos los resultados (respuestas de los estudiantes), estos se tipificaron o clasificaron de acuerdo con los grados de acierto o desacierto a alguna respuesta esperada, y en concordancia con los elementos teóricos que sustentaron el MTL inicial que se consolidó en el capítulo 2. En este orden de ideas, para cada pregunta de cada tarea y situación, se tipificaron las respuestas como R1, R2, R3, ...; de tal manera que en cada una de ellas se clasificaron cierta cantidad de estudiantes de acuerdo con los elementos comunes en las respuestas encontradas. Esta codificación de los resultados se organizó en tablas de tres columnas donde se explicitó, para cada pregunta, el tipo de respuesta, la descripción de cada tipo de respuesta y la frecuencia respectiva.

Posteriormente, se analizan los resultados de acuerdo a criterios de análisis establecidos en coherencia con elementos teóricos del MTL. A continuación se explicitan las variables de análisis, para posteriormente, presenta la tipificación y análisis de los resultados a la luz de las variables de análisis.

3.2.1 Sobre las variables de análisis

En este apartado se mencionan y describen los criterios con los cuales se analizan e interpretan los resultados de las actuaciones de los estudiantes. Dichos criterios fueron seleccionados de tal manera que correspondieran a elementos asociados con los aspectos mencionados en el capítulo 2, específicamente, la revisión de la literatura que se hace en

cada componente del MTL. De esta manera, dichos criterios se enmarcaron dentro de las siguientes categorías: los aspectos matemáticos involucrados, los niveles de razonamiento covariacional (según la propuesta de Carlson), los SMS y lo curricular.

A continuación se detalla de manera sintetizada las categorías y criterios de análisis para la clasificación de los resultados de los estudiantes.

Tabla 11. Categorías y criterios de análisis

#	Categoría	Criterios
I	Aspectos matemáticos involucrados	1. Tipos de representación usados 2. Elementos de la función 3. Formas de acceder a la función (asignación, correspondencia o dependencia)
II	Razonamiento covariacional (Carlson)	1. Comportamientos asociados a una acción meta. 2. Acciones Mentales 3. Niveles de razonamiento Covariacional. 4. Existencia comportamientos Pseudo – analíticos
III	Sistema matemático de signos SMS	1. Lo sintáctico vs lo semántico 2. Caracterización de SMS concretos, intermedios y más abstractos 3. tendencias cognitivas hacia un uso competente SMS más abstractos
IV	Lo curricular	1. Comparación de los resultados de la aplicación de las tareas en contraste con lo estipulado según los estándares y lineamientos curriculares.
V	Propósitos de las tareas	1. De acuerdo con las respuestas de los estudiantes analizar el acercamiento a los propósitos pre-establecidos de cada tarea.

Es importante resaltar que los MTL en calidad de ser también un marco metodológico, propone unos criterios para el análisis de las actuaciones de los estudiantes, a saber: lo sintáctico, lo semántico y la resolución de problemas. Sin embargo, dichos criterios asociados a los MTL son considerados de forma explícita en el marco conceptual del razonamiento covariacional. Por ejemplo, lo sintáctico y lo semántico se puede ver reflejado en el comportamiento (respuesta) de un estudiante y por ende poderlo clasificar en un determinado nivel de razonamiento covariacional. Así mismo, la resolución de problemas se evidencia cuando el estudiante debe responder a situaciones que impliquen la consideración de distintas estrategias.

A continuación, se explicitan los resultados e interpretación de resultados de acuerdo con los anteriores criterios de análisis. Por grupos de preguntas, para cada una de ellas, se exhiben los tipos de repuestas y su interpretación. La conformación de dichos grupos de preguntas, se hace de acuerdo con propósitos comunes dentro del objetivo de cada tarea.

3.2.2 Resultados y análisis de la situación 1

(S1)**Situación 1:** Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta.

(T1)**Tarea 1:** Comprendiendo la situación.

(P1)**Pregunta 1:** Dibuja por lo menos tres posibilidades de plazoletas dentro del terreno cuadrado, teniendo en cuenta las condiciones de la situación. Explica tus propuestas.

Tabla 12. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 1 (S1T1P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que realizan las tres posibilidades de plazoleta según las condiciones de la situación, etiquetando los puntos de intersección entre la plazoleta y el terreno cuadrado o asignando algunas letras a los puntos de intersección, mayoritariamente a los vértices del terreno cuadrado.	18	81.8%
R2	Estudiantes que realizan las tres posibilidades de plazoleta según las condiciones de la situación, sin asignar letras a los puntos de intersección o la suma sólo marcan el punto E.	3	13.6%
R3	Estudiantes que realizan las tres posibilidades de plazoleta según las condiciones de la situación, asignando letras a los puntos de intersección. Marcan las zonas verdes como "ZV" y dos de las tres posibilidades de plazoleta la realizan en una misma figura, es decir, en un solo terreno cuadrado dos posibles plazoletas.	1	4.5%

(P2)**Pregunta 2:** Un estudiante propone dos plazoletas, como que se muestra a continuación. ¿Son posibles tales formas para la plazoleta? Explica tu respuesta

Tabla 13. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 2 (S1T1P2)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que afirman que las gráficas no cumplen las condiciones dadas para las plazoletas, argumentando: - La primera no es un rectángulo. - La segunda no es posible porque no cumple las condiciones requeridas porque los vértices no están sobre cada uno de los lados del cuadrado, además las zonas verdes deben ser de	2	9.1%

	forma triangular.		
R2	Estudiantes que afirman que las gráficas no cumplen las condiciones dadas para las plazoleas, argumentando: - La primera no es un rectángulo, aludiendo a algunas de sus propiedades, como ángulos y congruencia de los lados. - Es un rectángulo, pero sus vértices no están sobre los lados del cuadrado.	17	77.2%
R3	Estudiantes no separan cada caso y dicen que no son posibles las dos plazoleas propuestas porque: - No es un rectángulo, no se interceptan los vértices con los lados del terreno cuadrado y las zonas verdes no son triángulos.	2	9.1%
R4	Estudiantes cuya respuesta no es clara por falta de coherencia tanto en el discurso como en la relación con aspectos teóricos	1	4.5%

Teniendo en cuenta las respuestas a S1T1P1 expuestas en la tabla 12, se puede observar que el 100% de los estudiantes realizó las tres posibilidades de plazoleas en forma correcta. El 81.8% etiqueta los puntos de intersección entre la plazolea y el terreno de forma cuadrada pero un 4.5% añaden información etiquetando las zonas verdes; sólo el 13.6% etiqueta uno o dos puntos y no hace alusión a las zonas verdes.

En relación con las respuestas a S1T1P2, se observa en la tabla 13 que el 95.5% de los estudiantes responden de forma correcta, reconociendo que las representaciones dadas no corresponden a las condiciones planteadas por la situación; sólo sobresale un estudiante (4.5%) que da una respuesta confusa. La diferencia entre las respuestas correctas está matizada por la forma de argumentar la validez de los gráficos, pues aluden a que la primera representación no es un rectángulo, manifestando propiedades como ángulos rectos o congruencia de lados. Mientras que para la segunda representación, algunos manifiestan que esa propuesta de plazolea, no intercepta a cada uno de los lados del terreno cuadrado, mientras que otros agregan que las zonas verdes deben ser de forma triangular.

Los resultados anteriores, permiten afirmar que la mayoría de los estudiantes comprenden el enunciado general de la situación, puesto que responden de acuerdo a lo esperado en lo que a la interpretación del esquema se refiere de acuerdo a las condiciones que debe

cumplir la plazoleta, planteando argumentos válidos para explicar esquemas que cumplen las condiciones de la situación. Además, reconocen aquellos esquemas que no cumplen con las condiciones de la situación.

En el momento de la plenaria, donde los estudiantes validan información y llegan a conclusiones de acuerdo con un marco referencial de conocimiento matemático, el estudiante que tuvo dificultades al responder la pregunta 2, logró presentar un discurso que permite inferir que él ha comprendido la situación.

(P3)Pregunta 3: Luisa afirma que dentro de los valores numéricos que puede tomar el segmento $\overline{DE}$ están: 0m, 47m, 80m y 92m. Analiza la afirmación de Luisa para cada uno de estos valores y escribe si es posible.

Tabla 14. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 3 (S1T1P3)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que determinan correctamente los valores que puede tomar el segmento $\overline{DE}$ y argumentan que: -0 y 80 metros: no pueden ser porque al tocar los vértices del cuadrado no hay plazoleta. -92metros: no puede ser porque se sale de las medidas del terreno cuadrado. -47 metros: sí es posible porque está dentro del terreno de 80 metros y cumple con las condiciones requeridas.	15	68.1%
R2	Estudiantes que determinan correctamente los valores que puede tomar el segmento $\overline{DE}$ para los valores 0, 80m, y 92m, pero de forma incorrecta para 47m. Argumentan que: -0 y 80 metros: no pueden ser porque al tocar los vértices del cuadrado no hay plazoleta. -92metros: no puede ser porque se sale de las medidas del terreno cuadrado. -47 metros: No es posible porque no cumple con las condiciones requeridas. Y asumen 40m, como medida ideal para el segmento.	6	27.2%
R3	Estudiantes que no respondieron – no la hicieron	1	4.5%

De acuerdo con las respuestas de S1T1P3 expuestas en la tabla 14, se puede observar que el 95.5% de los estudiantes contestan correctamente sobre la validez de la viabilidad de que el segmento $\overline{DE}$ pueda tomar los valores 0m, 80m y 92m. El 27.2% de los estudiantes no

respondió acertadamente sobre la validez de que el segmento $\overline{DE}$ pudiera tomar una medida de 47m. Tan sólo el 4.5% no respondió a la pregunta.

La mayoría de los estudiantes (68.1%) comprende la situación desde el punto de vista cuantitativo, es decir, reconocen que para que se cumplan las condiciones de construcción de la plazoleta, hay restricciones para los valores que puede tomar el segmento DE. De esta forma, intuitivamente, identifican un dominio de variación para los valores del segmento DE entre 0 y 80m, sin incluir los extremos. Esto implica, que los estudiantes conciben un intervalo abierto (0,80)(sin ser mencionado explícitamente), porque para los extremos no hay plazoleta. Hay una asociación directa entre el intervalo (0,80) y la medida del lado del terreno cuadrado, de esta manera, cuando mencionan que 47m puede ser porque está dentro del terreno y 92m no se puede porque se sale del terreno, hay una alusión a que 47m pertenece al dominio y 92m no pertenece al dominio, respectivamente.

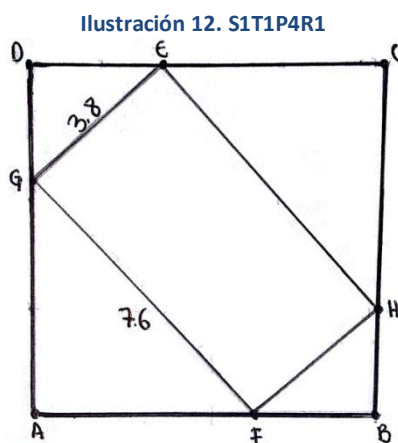
(P4)**Pregunta 4:** Diseña una plazoleta de tal manera que el largo sea aproximadamente el doble ancho, luego determina la magnitud que debe tener segmento $\overline{DE}$.

Tabla 15. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 1 pregunta 4 (S1T1P4)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden de forma correcta. La representación gráfica se ajusta a las condiciones de la situación, en un dibujo a escala de 8x8 cm. Los estudiantes respondieron que el segmento $\overline{DE}$ debería medir aproximadamente 53m (dan su respuesta en términos de la escala real), o en su defecto respondieron que el segmento $\overline{DE}$ debería medir aproximadamente 2.6 o 5.3 cm.	14	63.6%
R2	Estudiantes que dan respuestas aproximadas a 53m o a 5.3cm pero las representaciones graficas no se ajustan a las condiciones de la situación. A pesar de manejar una representación a escala de 8x8cm, las demás medidas no corresponden a dicha escala.	5	22.7%
R3	Estudiantes que realizan una representación gráfica que no se ajusta a las condiciones y tampoco va acompañada de registros numéricos ni de explicaciones o respuesta alguna.	3	13.6%

En términos generales el 63.6% de los estudiantes respondieron acertadamente a la pregunta. Para ello, utilizaron la estrategia de ensayo y error para diferentes posiciones del

punto E entre el segmento $\overline{DC}$ además, usaron instrumentos de medición (reglas graduadas) para validar cada propuesta que dibujaban. Algunos determinaron que el segmento $\overline{DE}$ debería ser 2.6cm y otros 5.3cm pero no hubo ningún estudiante que planteara que existían dos soluciones para construir la plazoleta donde el largo era el doble del ancho. Pocos estudiantes no lograron dar su respuesta en escala real. En la siguiente ilustración, se evidencia cómo algunos estudiantes representaron el terreno cuadrado con lapicero, para que el ensayo y error para la plazoleta no afectara lo que estaba con lapicero cuando correspondiera borrar. Esta estrategia permite inferir que los estudiantes reconocen que el terreno se mantiene invariante, a pesar de que la plazoleta sí cambia.



De otro lado, hubo un 36.4% de los estudiantes que dieron la respuesta, pero su esquema no se ajustó plenamente a las condiciones iniciales de la situación y en otros casos el esquema era correcto pero las medidas no correspondían a la representación hecha.

La pregunta cuatro (S1T1P4) supone mayor complejidad respecto a las tres anteriores puesto que el estudiante debe variar la longitud del largo y el ancho de la plazoleta hasta llegar a una situación que se aproxime a la consigna de la pregunta; pero aun así, debe estar pendiente de que su construcción siga cumpliendo con las condiciones que se viene manejando desde el inicio de la situación.

La mayoría de los estudiantes logró conservar las condiciones dadas desde el inicio aunque la atención estaba centrada en controlar las magnitudes del largo y el ancho de la plazoleta. Posiblemente la restricción de sólo estar usando lápiz y papel no permitió explorar de una forma dinámica el movimiento del punto E, razón por la cual sólo dan un posible valor del

segmento $\overline{DE}$ para que el largo sea el doble del ancho. Como consecuencia, los estudiantes, lograron comprender el enunciado de la pregunta, pues siempre tienen en cuenta las condiciones iniciales, independientemente de que estén considerando cambios en la forma de la plazoleta.

(S1)**Situación 1:** Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta.

(T2)**Tarea 2:** Reconozco dependencia entre magnitudes

(P1) **Pregunta 1:** Abre el archivo *Tarea 2* ubicado en el escritorio del computador. Explore posibles construcciones distintas de plazoletas moviendo o cambiando la ubicación del punto E. indica los puntos que se mueven y los que permanecen fijos explica la razón de este comportamiento

Tabla 16. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 1 (S1T2P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden de forma correcta, afirmando que los puntos que se mueven son E, F, G y H porque determinan varias plazoletas distintas. Y que los puntos fijos son A, B, C, y D porque, corresponden a los vértices del terreno cuadrado, el cual no cambia de forma. En algunos casos hay una referencia explícita a la dependencia de la posición de los puntos F, G, y H respecto al movimiento del punto E; así como la independencia de los puntos A B C y D respecto a E.	18	81.8%
R2	Los estudiantes responden de forma correcta, afirmando que los puntos que se mueven son E, F, G y H porque determinan varias plazoletas distintas. Los puntos fijos son A, B, C, y D. pero no justifican porque no se mueven.	3	13.6%
R3	No responden de la forma esperada. Hablan de cambios en las medidas de los puntos D E F y G. hablan de desplazamientos de puntos a través de segmentos: E respecto a $\overline{DC}$ y G respecto a $\overline{DA}$.	1	4.5%

(P2) **Pregunta 2:** Escribe lo que sucede cuando se mueve el punto E sobre el segmento $\overline{DC}$.

Tabla 17. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 2 (S1T2P2)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que responden de forma correcta, mencionando que ocurren cambios en la forma de la plazoleta, ya sea en sus dimensiones, tamaño o área. Además algunos, mencionan un cambio en la medida del segmento $\overline{DE}$ o en el tamaño de las zonas verdes. <i>(Uno de ellos menciona que cambia y el otro cómo cambia).</i>	15	68.1%

R2	Estudiante que responde de forma parcial, sólo mencionan que hay un cambio en la longitud del segmento $\overline{DE}$ o x .	5	22.7%
R3	Estudiante que no responden de acuerdo a lo esperado, sólo hacen alusión al movimiento de los puntos F, G y H o la posición de la plazoleta. algunos explicitan la invarianza de la forma de las zonas verdes	2	9.1%

De acuerdo con la tabla 16, en relación con las respuestas a la pregunta S1T2P1, el 95.5% de los estudiantes logró reconocer la variancia e invariancia de los puntos, al mover el punto E con la ayuda del programa GeoGebra. Sólo hubo un estudiante cuya explicación, no responde a la pregunta formulada pues manifiesta que el punto D se mueve y no se hace alusión al movimiento del punto H.

La respuesta esperada de S1T2P2 implica la consideración de cambios en el largo de la plazoleta, ancho de la plazoleta y la longitud del segmento $\overline{DE}$. Esta consideración abre la posibilidad para que aquellos estudiantes que involucren más cambios, además de los tres ya mencionados, también se puedan clasificar dentro de los que respondieron correctamente.

De acuerdo con lo anterior, según los tipos de respuestas a la pregunta S1T2P2, en la tabla 17, se puede afirmar que el 90.9% de los estudiantes contempla elementos básicos de la respuesta esperada, mientras que un 9.1% se refiere al movimiento de puntos y cómo la forma de las zonas verdes no cambia.

De acuerdo con las repuestas de S1T2P1 y S1T2P2, podemos afirmar que la mayoría de los estudiantes considera cambios en la forma de la plazoleta y la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Los estudiantes lograron identificar el cambio o no cambio de magnitudes, posiciones de puntos y formas de algunas zonas dentro del terreno cuadrado; todo esto mientras atendían al movimiento del punto E. La exploración con GeoGebra permitió que con la facilidad de controlar el arrastre del punto E, se pudiera hacer mayor seguimiento a las magnitudes que variaban, esto fue más evidente en la socialización de la tarea. Aunque los estudiantes

todavía no reconocían dependencia entre magnitudes, sí tuvieron acercamientos intuitivos a las cosas que cambiaban o permanecían invariantes, a partir del movimiento de un punto. Asimismo, como se les entregó una macro en GeoGebra, en la socialización fue explícita la referencia que los estudiantes hacían sobre el fenómeno de que al mover o arrastrar el punto E, las condiciones iniciales sobre el diseño de la plazoleta no variaban, es decir, la plazoleta seguía siendo rectangular con sus vértices sobre el terreno cuadrado.

(P3) **Pregunta 3:** Teniendo en cuenta la exploración realizada en GeoGebra, Identifica y enuncia las magnitudes implicadas en la situación

Tabla 18. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 3 (S1T2P3)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que responden de forma correcta, afirmando que las magnitudes implicadas son el largo y ancho de la plazoleta. Algunos mencionan al terreno y las zonas verdes como magnitudes porque se pueden medir, es decir, consideran de forma implícita la cantidad de superficie. <i>(Uno de los estudiantes menciona el área de la plazoleta como una magnitud implicada)</i>	10	45.5%
R2	Estudiantes que responden de forma correcta, afirmando que las magnitudes implicadas son el largo, ancho de la plazoleta y longitud del segmento $\overline{DE}$. Uno de ellos menciona a la zona verde como una magnitud porque se puede medir, es decir, hacía alusión a la cantidad de superficie.	3	13.6%
R3	Estudiantes que afirman que las magnitudes implicadas son el largo y ancho tanto de la plazoleta como del terreno cuadrado. Uno de ellos menciona el largo y el ancho del terreno inicial.	5	22.7%
R4	Estudiantes que no se refieren a magnitudes, sino que de forma general, manifiestan cambio en las medidas, las formas y tamaños de las distintas figuras implicadas.	4	18.1%

Las magnitudes implicadas son: largo de la plazoleta, ancho de la plazoleta, lado del terreno cuadrado, longitud del segmento $\overline{DE}$, perímetro, área del terreno, área de la plazoleta, longitudes de los segmentos: $\overline{DG}$, $\overline{GA}$, $\overline{AF}$, $\overline{FB}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ y $\overline{EC}$. Sin embargo, partiendo de que el objetivo de la situación 1 involucra sólo las dimensiones de la plazoleta y el segmento

$\overline{DE}$; La respuesta esperada implica la consideración de, por lo menos, la mención de las primeras cuatro magnitudes citadas.

De acuerdo con esta aclaración y los resultados expuestos en la tabla 18, se puede afirmar que el 81.8% de los estudiantes contempla elementos básicos de la respuesta esperada, mientras que un 18.2%, aunque no hace alusión explícita a las magnitudes, sí hacen referencia a cómo cambian. Un ejemplo de este último grupo se puede observar en la siguiente ilustración

Ilustración 13. S1T2P3

3) Bueno en $\overline{FH}$ se convierte en el ancho si se mueve el punto E hacia la izquierda. $\overline{FE}$ se convierte en el largo de la plazoleta cuando se hace este mismo movimiento es decir se intercambian. El segmento $\overline{DE}$ disminuye y aumenta de tamaño a medida que se mueva el punto E.

La mayoría de los estudiantes identificaron las magnitudes básicas involucradas. Lo relevante de la experiencia con GeoGebra es que no sólo centraron su atención en las magnitudes que cambiaban sino que también explicitaron otras que eran constantes, esto se dio aun sin la necesidad de clasificarlas en variantes o invariantes, lo cual apunta de forma parcial al objetivo de la tarea, pues para poder reconocer la dependencia entre magnitudes, es necesario identificarlas. La mayor parte de las magnitudes enunciadas por los estudiantes eran de naturaleza variable, situación que pone de manifiesto el reconocimiento de cantidades variables.

(P4a) **Pregunta 4a:** A medida que cambia x , describe el cambio del largo de la plazoleta

Tabla 19. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4a (S1T2P4a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que mencionan que si E se mueve hacia la derecha, el largo aumenta y si E se mueve hacia la izquierda, el largo disminuye. Algunos estudiantes mencionan que el largo pasa a ser el ancho.	8	36.4%
R2	Mencionan que a medida que se mueve el punto E o aumenta la longitud del segmento $\overline{DE}$, el largo de la plazoleta cambia dependiendo cómo se mueva E. Pero no describen	9	40.9%

cómo es el cambio.

R3	Mencionan que a medida que se mueve el punto E o aumenta la longitud del segmento $\overline{DE}$, el largo de la plazoleta aumenta. También usan expresiones como “la plazoleta se hace más delgada y con poco espacio”. No hay consideración de movimientos del punto E hacia la izquierda.	5	22.7%
----	---	---	-------

(P4b) **Pregunta 4b:** A medida que cambia x , describe el cambio del ancho de la plazoleta

Tabla 20. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4b (S1T2P4b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	A medida que x cambia hacia la derecha, el ancho de la plazoleta disminuye y si se hace hacia la izquierda, el ancho de la plazoleta aumenta. La mayoría de estudiantes menciona que el ancho pasa a ser el largo de la plazoleta.	6	27.3%
R2	A medida que x cambia hacia la izquierda, el ancho de la plazoleta aumenta. Esto lo acompañan con argumentos como “la plazoleta cambia su orientación hacia la izquierda, después de volverse un cuadrado” No hay consideración de casos donde x aumente o E vaya hacia la derecha.	6	27.3%
R3	Mencionan que a medida que se mueve el punto E o aumenta la longitud del segmento $\overline{DE}$, el ancho de la plazoleta cambia dependiendo cómo se mueva E. Pero no describen cómo es el cambio	10	45.5%

P4c) **Pregunta 4c:** A medida que cambia x , describe el cambio del segmento $\overline{EC}$

Tabla 21. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4c (S1T2P4c)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Si x aumenta $\overline{EC}$ disminuye. Si x disminuye $\overline{EC}$ aumenta. <i>*(cuatro de ellos explicitan la dependencia en un solo sentido)</i>	7	31.8%
R2	Hablan de una dependencia de $\overline{EC}$ respecto x manifestando que el segmento $\overline{EC}$ puede aumentar o disminuir. Pero no explicitan cuándo aumenta o cuándo disminuye.	12	54.5%
R3	Estudiantes que respondieron de manera incorrecta o dejaron ideas inconclusas	3	13.6%

(P4d) **Pregunta 4d:** A medida que cambia x , describe el cambio del segmento $\overline{DC}$

Tabla 22. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4d (S1T2P4d)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que manifiestan correctamente que el segmento $\overline{DC}$ no cambia a pesar de que se mueva el punto E. Algunos estudiantes dicen que al mover E cambia x y hace que cambien las medidas de las zonas verdes. <i>(Un estudiante dice que $\overline{DC}$ es independiente del cambio de x).</i>	8	36.4%
R2	Estudiantes que no contestaron correctamente. Afirmando que dependiendo del cambio de x , el segmento $\overline{DC}$ puede aumentar o disminuir	14	63.6%

(P4e) **Pregunta 4e:** ¿De qué dependen el ancho y el largo de la plazoleta?

Tabla 23. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 4e (S1T2P4e)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	El largo y el ancho de la plazoleta dependen de la ubicación y movimiento del punto E.	19	83.4%
R2	Dependen de a donde se muevan el largo y el ancho de la plazoleta.	3	13.6%

(P5) **Pregunta 5:** Describe lo que sucede cuando comparas los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{DG}$ con los segmentos $\overline{BH}$ y $\overline{BF}$

Tabla 24. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 2 pregunta 5 (S1T2P5)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que al comparar los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{DG}$ con los segmentos BH y BF, son iguales entre sí cada uno de los segmentos mencionados, independientemente del movimiento del punto E.	21	95.5%
R2	Estudiantes que no relacionan ni comparan los cuatro segmentos. Solo aluden al tamaño de las zonas verdes al mover el punto E.	1	4.5%

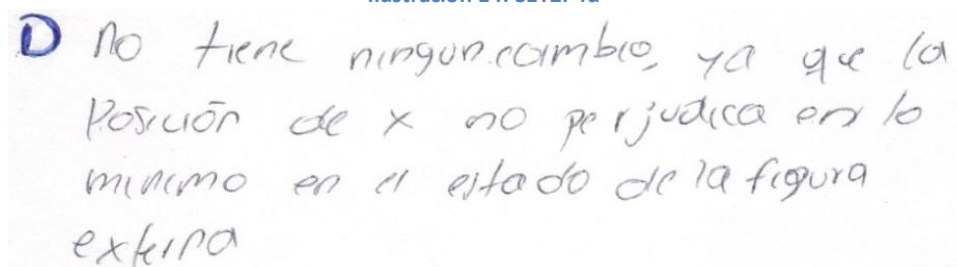
De acuerdo a la tabla 19, el 59.1% de los estudiantes, describen correctamente cómo es el cambio del largo de la plazoleta mientras que x cambia. Entre tanto, el 40.9% reconocen un cambio en el largo de la plazoleta pero no describen cómo es ese cambio.

De acuerdo a la tabla 20, aproximadamente un poco más de la mitad (54,6%) de los estudiantes describieron de forma correcta cómo es el cambio del largo de la plazoleta mientras que x cambia. Entre tanto, el 45.5% reconocen un cambio en el ancho de la plazoleta pero no describen cómo es ese cambio.

Teniendo en cuenta la tabla 21, podemos observar que sólo el 31.8% de los estudiantes describe de forma correcta el cambio de segmento $\overline{EC}$ respecto al cambio de la medida de x . De otro lado, el 54.5% de los estudiantes reconocen un cambio de $\overline{EC}$ respecto a x , pero no dan una razón o argumento de su aumento o disminución. Mientras que el 13.5% no respondió de manera correcta, pues sus explicaciones fueron erróneas o incompletas.

Observando la tabla 22, sólo el 36.4% describieron de forma correcta, es decir, reconoce la naturaleza constante del segmento $\overline{DC}$ independientemente del cambio en x . Mientras la mayoría de los estudiantes (63.6%) no reconocieron que el segmento $\overline{DC}$ es invariante sin importar el cambio de x . En la siguiente ilustración se muestra un ejemplo de los que respondieron correcta

Ilustración 14. S1T2P4d



D No tiene ningun cambio, ya que la Posición de x no perjudica en lo minimo en el estado de la figura externa

De la tabla 23, se puede evidenciar que la mayoría de los estudiantes (83.4%) comprende que la magnitud del largo y del ancho de la plazoleta dependen de la magnitud de x . De otro lado, sólo el 13.6% de los estudiantes responde de manera confusa a la pregunta.

De acuerdo con los tipos de respuestas para la pregunta S1T2P5, se puede evidenciar cómo la mayoría de los estudiantes (95.5%), responden de forma correcta, reconociendo que los dos pares de segmentos mencionados son congruentes entre sí. Mientras que sólo el 4.5% presenta un razonamiento, que aunque es viable, no da cuenta de lo que se pregunta.

Conforme a las últimas seis tablas, que dan cuenta de las preguntas 4 y 5 de la Tarea 2, se puede afirmar que aproximadamente el 50% de los estudiantes, aunque reconoce que hay un cambio de ciertas magnitudes respecto al cambio de x , mostró dificultad para expresar de manera escrita la coordinación cualitativa entre el cambio de algunas magnitudes respecto al cambio de x , especificando cómo ocurrían dichos cambios. En la plenaria, la mayoría de estos estudiantes logró un acercamiento a lo esperado, es decir, reconoció que con los cambios de una variable no necesariamente hay cambios en las otras, y en caso de haberlos, pudieron describir como se dan dichos cambios.

En la pregunta 4d, hubo mayoría de desaciertos respecto a la respuesta esperada. Se considera que la causa de esto fue el mensaje semántico en el enunciado de la pregunta, pues el estudiante asume de entrada que tiene que haber cambio en la magnitud del segmento $\overline{DC}$.

En el caso particular de la pregunta 5, en las respuestas el 95.5% de los estudiantes logró identificar que si dos magnitudes inicialmente son congruentes y que si dichas magnitudes varían de igual forma, entonces serán congruentes en todo instante. Es decir, aunque cambie la magnitud del segmento $\overline{DE}$, siempre será congruente con el segmento $\overline{DG}$; lo mismo ocurre con el par de segmentos $\overline{BH}$ y $\overline{BF}$.

(S1)**Situación 1:** Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta.

(T3)**Tarea 3:** Cuantificando los cambios

(P1)**Pregunta 1:** Determine el valor, en metros, del largo y el ancho de la plazoleta cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es:
a. 10m b. 25 m d. 55m

Tabla 25. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 1 (S1T3P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que respondieron de forma correcta y para ello, aplicaron el teorema de Pitágoras para encontrar el largo y el ancho de la plazoleta. Tomando como catetos la medida dada para x , hallan el largo y, tomando la medida del segmento $\overline{EC}$ como cateto, hallan el ancho. La respuestas fueron: a. $10\sqrt{2}$ y $70\sqrt{2}$ b. $25\sqrt{2}$ y $55\sqrt{2}$ c. $55\sqrt{2}$ y $25\sqrt{2}$ Utilizan representaciones graficas independientes para cada ítem como guía para hacer sus cálculos. Algunos solo usaron una representación de plazoleta para responder las tres situaciones.	19	86.4%
R2	Estudiantes que respondieron de forma correcta y para ello aplicaron el teorema de Pitágoras para encontrar el largo y el ancho de la plazoleta. Tomando como catetos la medida dada para x , hallan el largo y tomando la medida del segmento $\overline{EC}$ como cateto, hallan el ancho. La respuestas fueron: a. $10\sqrt{2}$ y $70\sqrt{2}$ b. $25\sqrt{2}$ y $55\sqrt{2}$ c. $55\sqrt{2}$ y $25\sqrt{2}$ En una sola representación de terreno cuadrado realizan las tres posibles plazoletas (a, b y c) con modelos a escala. No realizan el cálculo del literal c, solo los cálculos de los literales a y b.	3	13.6%

(P2 Tabla) **Pregunta 2:** Complete la siguiente tabla
Longitud $\overline{DE}$ (m) Largo de la plazoleta ($\overline{FH}$) (m) Ancho de la plazoleta ($\overline{FG}$) (m)

Tabla 26. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 2 (S1T3P2)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que llenan de manera correcta la tabla cuando $\overline{DE}$ toma valores desde 10m hasta 75m sin hacer cálculos aritméticos. Sin embargo, cuando $\overline{DE}$ es igual a 80m, el largo les da $80\sqrt{2}$ y el ancho $0\sqrt{2}$.	15	68.2%
R2	Estudiantes que llenan de manera correcta la tabla, cuando $\overline{DE}$ toma valores desde 10m hasta 75m sin hacer cálculos aritméticos. Sin embargo, cuando $\overline{DE}$ es igual a 80m, tanto el largo como	5	22.7%

el ancho les da $80\sqrt{2}$ o $0\sqrt{2}$.

R3	Estudiantes que llenan la tabla de forma correcta cuando $\overline{DE}$ toma valores desde 10m hasta 75m sin hacer cálculos aritméticos. Cuando $\overline{DE}$ es igual a 80m, no completan el correspondiente largo y ancho de la plazoleta, o sea lo dejan vacío en la tabla.	1	4.5%
R4	Estudiantes que llenan la tabla de forma correcta cuando $\overline{DE}$ toma valores desde 10m hasta 75m sin hacer cálculos aritméticos. Cuando $\overline{DE}$ es igual a 80m, menciona que no es posible construir la plazoleta. “no hay plazoleta”	1	4.5%

(P2a)**Pregunta 2a:** De acuerdo con el comportamiento de los datos de la tabla (sin hacer los cálculos) determina el largo y el ancho de la plazoleta si el segmento $\overline{DE}$ midiera:
a. 36m b. 58m c. 94m Explica cómo lo hiciste

Tabla 27. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 2a (S1T3P2a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Para 36m: el largo es $36\sqrt{2}$ y el ancho $44\sqrt{2}$. Para 58m: el largo es $58\sqrt{2}$ y el ancho $22\sqrt{2}$. Para 94m: manifiestan que no es posible una plazoleta porque se pasa de 80 metros. Explican que llegaron a las respuestas sumándole a $\overline{DE}$ lo que le falta para llegar a 80m, o resaltando $\overline{DE}$ de 80m. Solo dos estudiantes no explicaron cómo llegaron a las respuestas para 36m y 58m.	15	68.2%
R2	Para 36m: el largo es $36\sqrt{2}$ y el ancho $44\sqrt{2}$. Para 58m: el largo es $58\sqrt{2}$ y el ancho $22\sqrt{2}$. Para 94m: mencionan que el largo de la plazoleta es $94\sqrt{2}$. No explican cómo hacen los cálculos.	1	4.5%
R3	Para 36m: el largo es $36\sqrt{2}$ y el ancho $44\sqrt{2}$. Para 58m: el largo es $58\sqrt{2}$ y el ancho $22\sqrt{2}$. Cuando $\overline{DE}$ es igual 94m, no dicen algo sobre el largo y el ancho. Al explicar como hicieron los cálculos o cómo llegaron a la repuesta mencionan: “calculando el largo, raíz cuadrada, y el ancho raíz cuadrada.”	2	9.1%
R4	Para 36m: el largo es $36\sqrt{2}$ y el ancho $44\sqrt{2}$. Para 58m: el largo es $58\sqrt{2}$ y el ancho $22\sqrt{2}$. Cuando $\overline{DE}$ es igual 94m, el largo de la plazoleta es $94\sqrt{2}$ y el ancho $6\sqrt{2}$. Para explicar cómo lo hicieron mencionan que para poder hallar el largo y el ancho, se debe trabajar con un terreno de 100m y no de 80m. (Hubo un caso donde se calculó para 36, 58 y 94 con base en un terreno de 100m)	4	18.2%

(P2b) **Pregunta 2b:** Si la longitud del segmento $\overline{DE}$ se puede representar con la letra x , escribe una expresión para el largo y el ancho.

Tabla 28. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 2b (S1T3P2b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que no responden correctamente afirmando que: Si $\overline{DE} = x$, entonces el largo es $x\sqrt{2}$ y el ancho $x\sqrt{2}$.	6	27.3%
R2	Estudiantes que no responden correctamente afirmando que: Si $\overline{DE} = x$, entonces el largo es P y el ancho es Q . Asignaron letras arbitrariamente para el largo y ancho de la plazoleta, pero no en términos de x .	5	22.7%
R3	Estudiantes que no respondieron a la pregunta o No la hicieron.	11	50%

De acuerdo con los tipos de respuesta a la pregunta S1T3P1 expuestos en la tabla 25, se puede evidenciar cómo el 100% de los estudiantes lograron dar la respuesta correcta, para ello usaron el teorema de Pitágoras y emplearon un razonamiento válido en los cálculos numéricos, la única diferencia radica en la forma en que representaron gráficamente la situación y el que algunos estudiantes, el 13.6% generalizara resultados y por lo tanto, expresara respuestas tácitas para los literales b y c, tomando como referencia lo que habían hecho en el literal a.

La tabla 26 expone los tipos de respuesta para la pregunta S1T3P2, y de acuerdo con lo allí expuesto, se puede observar cómo sólo el 4.5% de los estudiantes da una respuesta correcta. Esto implica que el 95.5% de ellos, no contesta de forma correcta, siendo un aspecto común en este porcentaje, que responden bien cuando $\overline{DE}$ toma valores desde 10m hasta 75m, pero presentan dificultades para determinar el largo y ancho de la plazoleta cuando el segmento $\overline{DE}$ toma un valor de 80m.

Al observar la tabla 27, que hace alusión a los tipos de respuesta para la pregunta S1T3P2a, se puede observar, cómo el 68.2% de los estudiantes responde de forma correcta completamente a cada una de los tres valores propuestos para el segmento $\overline{DE}$. El porcentaje restante de estudiantes, determina de forma correcta el largo y ancho de la plazoleta cuando el segmento $\overline{DE}$ toma los valores 36m y 58m, sin embargo, presentan

dificultades para hacer lo propio cuando el segmento $\overline{DE}$ toma el valor de 94m. Para este último caso, algunos argumentan que el largo es $94\sqrt{2}$ y otros no responden.

De acuerdo con lo expuesto en la tabla 28, ninguno de los estudiantes acertó completamente a la respuesta esperada. Tan sólo el 27.3% de los estudiantes respondieron que el largo es $x\sqrt{2}$, pero se equivocaron al mencionar que el ancho correspondía al mismo valor. Mientras el 72.7% no lograron escribir una expresión algebraica para el largo y el ancho.

Teniendo en cuenta las preguntas 1 y 2 de la tarea 3, podemos aseverar que los estudiantes logran, de forma general, cuantificar las magnitudes de acuerdo a los cambios que presentan unas en relación con otras. Para esto, aunque contaban con el uso de GeoGebra, la información numérica la obtuvieron como consecuencia del uso del Teorema de Pitágoras, donde cada triángulo en consideración tenía sus catetos iguales. Los estudiantes lograron identificar dos pares congruentes de triángulos rectángulos isósceles, $\triangle GDE$ con $\triangle FBH$ y $\triangle GAF$ con $\triangle ECH$. Esto implicó que sólo resultaron dos formas triangulares distintas cuyos catetos son $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$ y como la suma de estos dos segmentos es 80m, la regla general implícita que tenían en cuenta era: para el largo $x\sqrt{2}$ mientras que para el ancho $(80 - x)\sqrt{2}$. Esta regla la aplicaron para los distintos valores de x , sin embargo, para el caso de $x = 80m$ aplicaban la misma regla y aunque matemáticamente tenía sentido, no asociaban el contexto relacionado con las condiciones de la plazoleta, razón por la cual no lograron concluir que no era posible que hubiera plazoleta cuando $\overline{DE}$ tomaba los valores de 80m y 94m. Por ejemplo, cuando para $\overline{DE}$ se consideraban los valores 80m y 94m obtenían para el largo $80\sqrt{2}$ y $94\sqrt{2}$ respectivamente, lo cual también incidía en los valores del ancho, $0\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}$.

Igualmente, los estudiantes no lograron generalizar la regla de formación para los valores del largo y ancho cuando a $\overline{DE}$ no se le asignaba un número conocido específico, sino un valor dx . Es menester considerar que como consecuencia de la respuesta a la pregunta 5 de la tarea 2, y el uso exploratorio con GeoGebra, los estudiantes identificaron que había dos

formas de triángulos rectángulos isósceles distintos, una cuyo cateto era $\overline{DE}$ y otra cuyo cateto era $\overline{EC}$, asu vez de cada tipo de triángulo habían dos congruentes. En esta parte, al mover el punto E , notaban que los triángulos cambiaban de forma (área) pero la congruencia se conservaba entre cada par de triángulos opuestos por la plazoleta. Esta situación hizo que los cálculos para hallar las hipotenusas (largo y ancho de la plazoleta) fueran más simples. Esto se ve reflejado en que el 100% de los estudiantes respondió correctamente a la pregunta 1 de la tarea 3.

(P3a) **Pregunta 3a:** En el plano cartesiano ubica los puntos del:
a. Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$

Tabla 29. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 3a (S1T3P3a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes construyeron la gráfica rotulando los ejes y usando los valores sugeridos en la tabla. Ubicaron los puntos y no los unieron.	8	36.4%
R2	Los estudiantes construyeron la gráfica rotulando los ejes y usando los valores sugeridos en la tabla. Ubicaron los puntos y los unieron con una línea recta.	7	31.2%
R3	Ubicaron los puntos y los unieron con una línea recta, pero los valores usados en el eje vertical no fueron los de la tabla (les faltó multiplicar cada valor por $\sqrt{2}$)	3	13.6%
R4	No la hicieron. No respondieron la pregunta	4	18.2%

(P3b) **Pregunta 3b:** En el plano cartesiano ubica los puntos del:
b. Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$

Tabla 30. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 3b (S1T3P3b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes construyeron la gráfica rotulando los ejes y usando los valores sugeridos en la tabla. Ubicaron los puntos y no los unieron.	7	31.8%
R2	Los estudiantes construyeron la gráfica rotulando los ejes y usando los valores sugeridos en la tabla. Ubicaron los puntos y los unieron con una línea recta.	9	40.9%
R3	Presentaron una gráfica correspondiente a $\overline{FH}$ vs x . Es decir, ubicaron los puntos que relacionan los valores de $\overline{FH}$ con los valores de x según la tabla y no los de $\overline{FG}$ con los valores de x . Hubo un estudiante que en lugar de graficar ancho vs x , grafico x vs ancho	5	22.7%
R4	No la hizo. No respondió.	1	4.5%

(P4a) **Pregunta 4a:** A partir de las gráficas determine y explique:
a. Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar la longitud del segmento $\overline{DE}$

Tabla 31. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 4a (S1T3P4a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: El valor máximo del segmento $\overline{DE}$ es 80m El valor mínimo del segmento $\overline{DE}$ es 0m.	18	81.8%
R2	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: El valor máximo del segmento $\overline{DE}$ es 80m El valor mínimo del segmento $\overline{DE}$ es 10m.	4	18.2%

(P4b) **Pregunta 4b:** A partir de las gráficas determine y explique:
b. Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar el largo de la plazoleta.

Tabla 32. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 4b (S1T3P4b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: El valor máximo del segmento $\overline{FH}$ es $80\sqrt{2}$ m o 80m El valor mínimo del segmento $\overline{FH}$ es $10\sqrt{2}$ m o 10m.	13	59.1%
R2	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: Valor máximo del segmento $\overline{FH}$ es 80m Valor mínimo del segmento $\overline{FH}$ es 0m.	2	9.1%
R3	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: Valor máximo del segmento $\overline{FH}$ es 75m Valor mínimo del segmento $\overline{FH}$ es 10m.	4	18.2%
R4	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: Valor máximo del segmento $\overline{FH}$ es 75m pero también manifestaron que: “se podría hacer una excepción hasta 79 aunque podría dar muy estrecha con las zonas verdes”	3	13.6%

(P4c) **Pregunta 4c:** A partir de las gráficas determine y explique:
c. Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar el ancho de la plazoleta.

Tabla 33. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 4c (S1T3P4c)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: El valor máximo del segmento $\overline{FG}$ es $70\sqrt{2}$ m o 70m El valor mínimo del segmento $\overline{FG}$ es $0\sqrt{2}$ m o 0m.	10	45.5%
R2	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: El valor máximo del segmento $\overline{FG}$ es 80m El valor mínimo del segmento $\overline{FG}$ es 0m.	3	13.6%

R3	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: El valor máximo del segmento $\overline{FG}$ es 80m El valor mínimo del segmento $\overline{FG}$ es 10m.	1	4.5%
R4	Estudiantes que afirman de forma incorrecta que: El valor máximo del segmento $\overline{FG}$ es 55 o 70m El valor mínimo del segmento $\overline{FG}$ es 5 o 10m	8	36.4%

Conforme a lo expuesto en la tabla 29, el 67.6% de los estudiantes ubicaron correctamente los puntos, tal cual como lo decía la consigna, la diferencia radica en que algunos estudiantes unieron los puntos con una línea recta y otros no. De la misma tabla también observamos que grupo de 13.6% ubicaron relativamente bien los puntos, pero su error o tal vez su descuido se dio en el eje y al no utilizar el $\sqrt{2}$. Por último, sólo un 18.2% no pudieron responder la pregunta.

Teniendo en cuenta la tabla 30, el 72.7% de los estudiantes ubicaron correctamente los puntos en el plano cartesiano, al igual que la pregunta anterior, la diferencia se observa en que un grupo de estudiantes unen los puntos con líneas rectas y otro grupo de estudiantes no lo hace. Cabe decir, que en la consigna de la pregunta sólo se habla de la ubicación de puntos. De esta misma tabla observamos que un 27.2% no ubica correctamente en el plano cartesiano los puntos del ancho vs $\overline{DE}$.

Como se puede evidenciar en la tabla 31, el 100% de los estudiantes respondieron de forma incorrecta, como particularidad observamos que un grupo muy pequeño dijo que el mínimo valor del segmento $\overline{DE}$ era 0m y otro más pequeño dijo 10m.

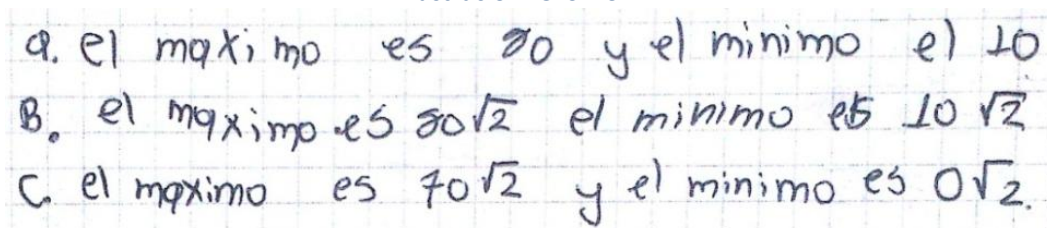
Observando la tabla 32, podemos notar que el 100% de los estudiantes respondieron incorrectamente, pero de ese mismo grupo un 13.6% manifiestan que se podría hacer una excepción con 79, lo curioso es que probablemente los estudiantes estaban pensando en uno de los lados del terreno o en su defecto en uno de los lados de la plazoleta ($79\sqrt{2}$)

De acuerdo con los resultados expuestos en las últimas 5 tablas, se puede decir que aunque la mayoría de los estudiantes pudo construir de forma correcta las gráficas solicitadas (Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$ & Ancho de la plazoleta vs longitud

del segmento $\overline{DE}$), no dieron cuenta del porqué podían trazar una recta, de tal manera que los puntos ubicados quedarán colineales en dicha recta. Se evidencia pues, la tendencia cognitiva de unir los puntos una vez ubicados en el plano cartesiano.

Cuando los estudiantes deben mencionar cuáles son los valores mínimos y máximos de: el segmento $\overline{DE}$, el largo y el ancho de la plazoleta, se esperaba que mencionaran acercamientos a $(0, 80)$, $(0, 80\sqrt{2})$ y $(0, 80\sqrt{2})$, respectivamente. Sin embargo, se evidencian dificultades en sus respuestas, pues que no dominan la notación de intervalos y no hay noción del continuo numérico, situación que pone de manifiesto respuestas como las que siguen donde el dominio para DE , el largo y el ancho son expresados en términos de los valores que han trabajado en las tablas.

Ilustración 15. S1T3P4

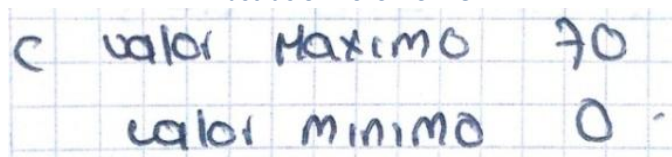


a. el máximo es 80 y el mínimo es 10
 b. el máximo es $80\sqrt{2}$ el mínimo es $10\sqrt{2}$
 c. el máximo es $70\sqrt{2}$ y el mínimo es $0\sqrt{2}$.

En esta ilustración se observa cómo los estudiantes no tienen en cuenta el contexto, de tal forma que expresan que el valor mínimo que puede tomar el largo es 10m y que el valor máximo es $80\sqrt{2}$ m. Situaciones que no son posibles, pues que $10\sqrt{2}$ m no es el valor mínimo y si el largo es $80\sqrt{2}$ m no existiría plazoleta, de acuerdo a las condiciones.

En la siguiente ilustración, se evidencia cómo hay dificultades con la notación en radicales (pues aun sabiendo que el ancho debe estar en términos de $\sqrt{2}$, se les olvida ponerlo y además, aunque para los valores mínimos y máximo del ancho de la plazoleta no incluyen a 0m y $80\sqrt{2}$ m, expresan valores cercanos múltiplos de 10 que previamente ya han trabajado en la tabla de la pregunta 1.

Ilustración 16. S1T3P4C



c valor Maximo 70
 valor minimo 0

Esta última ilustración, pone de manifiesto dificultades con los SMS que se supone, ya deben manejar (los del manejo de expresiones radicales) y dificultades con otros SMS más abstractos que no han manejado, los de la notación de intervalos; razón por la cual, en la plenaria decían que el valor mínimo podía ser 0.1m y que el valor máximo podría ser $79.9\sqrt{2}m$. Es claro que lo que subyace a la comprensión del nuevo SMS es el continuo numérico, pues no saben cómo expresar una cantidad que se acerque lo más posible a 0 y $80\sqrt{2}$ sin que sean ellas mismas. Es de aclarar que aunque en las preguntas 3 y 4 no hubo aciertos en el trabajo individual, en la plenaria sí hubo acercamientos a través de la orientación de los observadores.

(P5) **Pregunta 5:** Ubique ambas gráficas en un mismo plano cartesiano, diferenciando el conjunto de puntos de cada una con colores distintos. A partir de esta representación, cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es 35m ¿qué longitud le corresponde al largo y al ancho de la plazoleta?

Tabla 34. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 5 (S1T3P5)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Usando los valores de referencia sugeridos en la tabla, ubican los puntos para $\overline{FH}$ vs x y $\overline{FG}$ vs x en un mismo plano cartesiano. No unen los puntos en cada gráfica. Responden que cuando x es 35 metros el largo de la plazoleta es $35\sqrt{2}$ y el ancho $45\sqrt{2}$.	8	36.4%
R2	Usando los valores de referencia sugeridos en la tabla, ubican los puntos para $\overline{FH}$ vs x y $\overline{FG}$ vs x en un mismo plano cartesiano. Unen los puntos en cada gráfica con rectas. No determinan el largo y ancho de la plazoleta cuando $\overline{DE}$ es 35m.	8	36.4%
R3	Usando los valores de referencia sugeridos en la tabla, ubican los puntos para $\overline{FH}$ vs x . En ese mismo plano cartesiano para la gráfica $\overline{FG}$ vs x , ubicaron los siguientes puntos $(10, 80\sqrt{2})$, $(20, 70\sqrt{2})$, $(30, 60\sqrt{2})$, $(40, 50\sqrt{2})$, $(50, 40\sqrt{2})$, $(60, 30\sqrt{2})$, $(70, 20\sqrt{2})$, $(80, 10\sqrt{2})$. Puntos que no corresponden a los sugeridos en la tabla.	3	13.6%
R4	Para $x = 35m$ determinan que el largo de la plazoleta es $35\sqrt{2}$ y el ancho $45\sqrt{2}$. En cuanto a la gráfica, realizan una sola que corresponde a la ubicación de los puntos asociados a $\overline{FG}$ vs x . Los ejes vertical y horizontal los nombran como largo y ancho respectivamente.	1	4.5%
R5	En cuanto a la gráfica, realizan una sola que corresponde a la ubicación de los puntos asociados a $\overline{FG}$ vs x . Los ejes vertical	2	9.1%

y horizontal los nombran como largo y ancho respectivamente. No determinan el largo y ancho de la plazoleta cuando $\overline{DE}$ es igual a 35m.

(P6a) **Pregunta 6a:** Teniendo en cuenta la anterior gráfica realizada, a. escriba la coordenada del punto donde se interceptan las dos gráficas

Tabla 35. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 6a (S1T3P6a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Respondieron de forma correcta que la coordenada del punto de intersección es $(40, 40\sqrt{2})$.	7	31.8%
R2	Manifiestan de manera independiente que la coordenada del punto de intersección es 40 o $40\sqrt{2}$.	4	27.3%
R3	“La coordenada es lineal aunque $\overline{DE}$ es 35 se sale de la línea, ya que su ancho es diferente a las demás, tiene un numero diferente con el cálculo de 10”	2	9.1%
R4	No respondieron. No la hicieron.	7	31.8%

(P6b) **Pregunta 6b:** Teniendo en cuenta la anterior gráfica realizada, b. ¿Qué interpretación podrías darle a dicho punto? Elabora un escrito de tal manera que tus compañeros puedan entender tu punto de vista.

Tabla 36. Tipos de respuestas a la situación 1 tarea 3 pregunta 6b (S1T3P6b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	“el punto donde se encuentran las dos líneas, se llama punto de corte”	9	40.1%
R2	“creo que se interceptan por que 40 es la mitad de las cantidad de metros que se trabaja en el lote”	4	18.2%
R3	“el punto sobresale de la línea coordenada en el plano cartesiano, entonces en la longitud de 45 no acuerda con los 10 y lo que se lleva a cabo en el plano, se quiere decir que el valor de una longitud no importa (importa si se pasa del máximo o reduce al mínimo) con el plano cartesiano se observan las diferentes magnitudes dichas”	1	4.5%
R4	“es 40 porque es el eje que parte los dos puntos de corte”	1	4.5%
R5	“el punto de corte en el plano cartesiano es 40 sobre el eje x y $40\sqrt{2}$ sobre el eje y”	1	4.5%
R6	No contestaron. No la hicieron	6	27.3%

Apoyados en la tabla 34. Observamos que el 36.4% de los estudiantes ubicaron correctamente en el mismo plano cartesiano los puntos para $\overline{FH}$ vs x y $\overline{FG}$ vs x , además responden que cuando x es 35 metros el largo de la plazoleta es $35\sqrt{2}$ y el ancho $45\sqrt{2}$. En

el otro 63.3% de los estudiantes, dieron respuestas parciales o erróneas, como por ejemplo, ubicaron bien los puntos pero no determinaron el largo y ancho de la plazoleta o determinaron bien el largo y el ancho de la plazoleta pero no hicieron bien la gráfica.

La tabla 35, que corresponde a la pregunta 6a, se observa que el 31.8% de los estudiantes respondieron correctamente a la pregunta, es decir que el 68.2% de los estudiantes respondieron de manera errónea o simplemente no respondieron.

De la tabla 36, que corresponde a la pregunta 6b, se observa que el 100% de los estudiantes no lograron dar una buena interpretación del punto de corte de acuerdo con la situación. Como referencia, Para poder aproximarse a una respuesta correcta era necesario que la pregunta anterior estuviera correcta.

Cuando los estudiantes grafican en un mismo plano cartesiano las gráficas *Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* & *Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* , lo hacen relativamente de forma correcta, sin embargo, no logran dar la interpretación al punto de corte de las dos gráficas, de acuerdo al contexto de la plazoleta o al menos, de acuerdo a la relación de dependencia entre las variables implicadas.

Lo anterior pone de manifiesto las dificultades que tienen los estudiantes para poder poner en juego el manejo simultáneo entre diferentes registros de representación como lo son, el tabular, el algebraico y el gráfico (cartesiano); todos en concordancia con un contexto específico que le dé sentido a los datos inmersos en cada tipo de representación. La prueba de ello, radica en cómo aunque los estudiantes llenan de forma correcta una tabla desde el registro numérico, no son capaces de interpretar estos datos en la gráfica que realizan. Además, a pesar de que la mayoría realizó e interpretó correctamente las gráficas *Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* & *Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* , por aparte; no supo interpretar adecuadamente el significado del punto de corte, cuando se les propuso construir ambas gráficas en un mismo plano cartesiano. De nuevo, es notoria la dificultad de los estudiantes con SMS que se supone ya deben manejar, por ejemplo en la notación para escribir una coordenada cartesiana.

Análisis general de la situación 1.

A manera de conclusión, se puede afirmar que a *tarea 1*, tiene como propósito que el estudiante comprenda la situación, esto implicaba el poder proponer, identificar y argumentar distintos casos asociados donde la invariancia de las condiciones iniciales primaba. De acuerdo con esto, se puede afirmar que el propósito de la tarea 1 se cumplió puesto que los estudiantes, de forma general, lograron dar cuenta de la comprensión de las condiciones iniciales de la situación, tanto desde el registro gráfico, como desde el registro numérico asociado al anterior. Además, los estudiantes que en primera instancia, en el trabajo individual o en parejas, no lograron acercamientos a respuestas correctas, sí lograron acercamientos importantes a ellas en la etapa de la plenaria. En esta tarea, de acuerdo a los resultados esperados y los propósitos preestablecidos, no se espera que los estudiantes reporten comportamientos asociados a los de la Acción Mental 1 (AM1), sin embargo, los estudiantes tuvieron acercamientos importantes de cómo una variable cambia en términos de otra, esto se vio reflejado en las respuestas de la pregunta 4, donde por ensayo y error notaban cómo para poder fijar una de las dimensiones (largo o ancho) de la plazoleta era necesario atender al comportamiento del cambio en la otra dimensión. En forma general y en relación con los elementos matemáticos involucrados, hubo buen manejo de la información cuantitativa en relación con el rango de variación de un *dominio*, en este caso, la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Ahora, en cuanto a la *tarea 2*, como el propósito de esta es *reconocer dependencia entre magnitudes*, se puede aseverar que la mayoría de estudiantes reconoce la relación de dependencia entre magnitudes, al punto que en la socialización manifestaron casos en que se presentaban cambios de una magnitud independiente de otra y casos en los cuales, a pesar del cambio de una variable, había invariancia en otras. Los estudiantes lograron reconocer las magnitudes involucradas en la situación, pudieron identificar con mayor facilidad aquellas que eran susceptibles de cambiar, como consecuencia de mover el punto E. por lo tanto, se evidencia el reconocimiento de variables, es decir, de las magnitudes que cambian.

Además, de acuerdo con lo mencionado en cada una de las preguntas de la tarea 2, se puede manifestar que la mayoría de los estudiantes evidencia comportamientos que dan cuenta de acciones mentales que sustentan el nivel 1 de razonamiento covariacional. Entendiendo que en dicho nivel *“las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios de la otra variable”* (Carlson et al., 2003). Esto es debido a que los estudiantes reconocen la dependencia entre variables, es decir, advierten cambios en variable cuando hay cambios en otra.

A pesar de lo anterior, se destacan casos de algunos estudiantes donde las cargas semánticas de algunas palabras los indujeron a cometer errores, como por ejemplo, decir que el largo se vuelve ancho. Los estudiantes están habituados a que el largo mide más que el ancho, en este orden de ideas, cuando el segmento $\overline{FH}$ pasa a tener menor medida que el $\overline{GH}$ (como consecuencia de mover el punto E) consideran que este último es el largo. Todo esto, pese a que al inicio de la pregunta se mencionó que $\overline{FH}$ es el largo y $\overline{GH}$ es el ancho de la plazoleta.

Por último, algunos de los estudiantes describieron el cambio del largo, el ancho y el segmento $\overline{EC}$, teniendo en cuenta solamente el movimiento de izquierda a derecha del punto E. esto implicó la subutilización de software por parte de ellos, en la medida en que no advirtieron los cambios que se presentaban en las magnitudes mencionadas cuando el punto E se movía de derecha a izquierda.

De otro lado, en la *tarea 3*, los estudiantes llenan correctamente la tabla que se les pide llenar en la pregunta 2 y para los valores que se proponen para el segmento $\overline{DE}$: 36, 58 y 98; reconocieron una regla general o patrón para poder expresar el largo y ancho de la plazoleta en términos de una longitud determinada del segmento $\overline{DE}$. Esta regla o patrón no lo expresan matemáticamente, sin embargo, mencionaban que existía una complementariedad entre las medidas del largo con su respectivo ancho asociado, de tal manera que ambas medidas son factores de $\sqrt{2}$ y los coeficientes de ese factor deben sumar 80m. Por ejemplo, cuando el largo es $20\sqrt{2}m$, el ancho debe ser $60\sqrt{2}m$. A pesar de esto, algunos se desligan del contexto y consideran la posibilidad de una plazoleta cuyo largo es

$94\sqrt{2}$. Y además, no logran generalizar el patrón o regularidad hallada, cuando $\overline{DE} = x$. Así pues, se puede inferir que los estudiantes, aunque no están considerando una expresión algebraica para el ancho y largo en función de la longitud del segmento $\overline{DE}$; a partir del reconocimiento de un patrón de variación sí son capaces de anticipar o predecir la longitud de las dimensiones de la plazoleta, conforme se mueve el punto E. Esta parte de la tarea permite evidenciar que los estudiantes, pese a la ausencia de definiciones asociadas al concepto de función, muestran habilidades en la obtención de valores de salida en correspondencia con unos valores de entrada, lo cual plantea la posibilidad de la consideración de una función como relación de correspondencia. Además, cuando los estudiantes reconocen que para un largo determinado de la plazoleta hay un correspondiente valor asociado para el ancho y que al mismo tiempo dichas medidas son complementarias respecto a un valor fijo (80m); se puede afirmar que, desde el punto de vista matemático, los estudiantes están considerando cambios en una variable en correspondencia con los cambios de la otra variable y aun así, la contemplación de cómo la suma de los valores de las dimensiones de la plazoleta (que cambian de forma simultánea) representa una función constante. A ello se suma el hecho de que cuando los estudiantes (la mayoría) mencionan que para $\overline{DE} = 94m$, no es posible que haya plazoleta; están reconociendo la existencia de ciertas restricciones para el dominio de una función, en este caso, para la longitud del segmento $\overline{DE}$. Sin embargo, en algunos casos, hubo dificultades cuando consideraron o incluyeron los valores extremos de los intervalos $(0, 80)$ y $(0, 80\sqrt{2})$ para los valores extremos de la longitud del segmento $\overline{DE}$ y el largo de la plazoleta, respectivamente. Este acercamiento a máximos y mínimos, dio preámbulos intuitivos de la monotonía en el comportamiento lineal de una gráfica, pues pudieron dar cuenta del porqué del comportamiento contrario entre las gráficas *Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* & *Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* .

Igualmente, tal como se dijo anteriormente, cuando los estudiantes grafican en un mismo plano cartesiano las gráficas *Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* & *Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* , lo hacen relativamente de forma correcta, sin embargo, no logran dar interpretación al punto de corte de las dos gráficas, de acuerdo al

contexto de la plazoleta o al menos, de acuerdo a la relación de dependencia entre las variables implicadas.

Lo anterior pone de manifiesto las dificultades que tienen los estudiantes para poder poner en juego el manejo simultáneo entre diferentes registros de representación como lo son, el tabular, el algebraico y el gráfico (cartesiano); todos en concordancia con un contexto específico que le dé sentido a los datos inmersos en cada tipo de representación. Prueba de ello, radica en cómo aunque los estudiantes llenan de forma correcta una tabla desde el registro numérico, no son capaces de interpretar estos datos en la gráfica que realizan. Además, a pesar de que la mayoría realizó e interpretó correctamente las gráficas *Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* & *Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* , por aparte; no supo interpretar adecuadamente el significado del punto de corte, cuando se les propuso construir ambas gráficas en un mismo plano cartesiano.

En cuanto a los SMS, se puede afirmar que los estudiantes, de acuerdo a sus conocimientos previos, ya deben dominar conceptos básicos relacionados con la ubicación de coordenadas en el plano cartesiano y la adecuada notación para esas coordenadas. De acuerdo con esto, se evidenciaron dificultades con la ubicación en el orden que corresponde a las variables independientes y dependientes en la ubicación asociada con los ejes coordenados. Esto fue notorio cuando se les pide graficar *Ancho de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* y realmente lo que grafican es *longitud del segmento $\overline{DE}$ vs Ancho de la plazoleta*. También, tuvieron dificultades en la correcta escritura de una coordenada, esto se notaba cuando la escribían sin el paréntesis, o sólo usaban el paréntesis para una de las componentes (abscisa u ordenada) de la coordenada. Asimismo, fueron evidentes los conflictos sintácticos y semánticos en el manejo y tratamiento de cantidades cuya expresión requiere el uso explícito de radicales; prueba de ello, está en cómo los estudiantes fácilmente “olvidaban” usar los radicales, y terminaban mencionando o queriendo dar a entender, por ejemplo, que $80\sqrt{2}$ es lo mismo que 80.

Lo mencionado hasta al momento da cuenta de cómo los estudiantes tuvieron inconvenientes con el manejo de SMS que ya debían manejar, lo cual implica la poca

apropiación de conocimientos y convenciones matemáticas que eran necesarios como prerrequisito para las actividades que se les ha propuesto en estas tareas.

De otro lado, están los SMS que los estudiantes deben trabajar y apropiarse de ellos, en la medida en que no los han trabajado. Es decir, hacen el papel de SMS más abstractos a los cuales se deben llegar o hacer transición a partir de los SMS concretos que ya se dominan. Un ejemplo particular de SMS más abstracto o complejo fue el manejo del continuo numérico y notación correcta para intervalos de números reales que denoten ciertas restricciones o condiciones. Esto se puede asegurar en la medida en que los estudiantes, de acuerdo al currículo escolar que han manejado, no han tenido la posibilidad de trabajar actividades relacionadas con ese conocimiento. En este orden de ideas, los resultados presentados fueron acordes con lo esperado, pues fueron evidentes las dificultades que presentaron los estudiantes al querer expresar que el valor del segmento $\overline{DE}$ era muy cercano a cero y cercano a ochenta, sin poder ser 0 ni 80; para esto mencionaban cantidades muy cercanas a cada valor, y en seguida otros estudiantes encontraban otros valores más cercanos, y así sucesivamente.

En cuanto a los niveles de razonamiento covariacional, se puede afirmar que la mayoría de estudiantes presentó comportamientos relacionados con la identificación de cantidades o magnitudes variables y reconocimiento de cambios en una variable como consecuencia de cambios en otra. Esto se vio reflejado cuando los estudiantes identificaban o advertían cambios en las dimensiones de la plazoleta conforme cambiaba la ubicación del punto E, es decir, cuando se presentaban cambios en la longitud del segmento $\overline{DE}$. Estos comportamientos están asociados a la acción mental 1, AM1; lo cual ubica a la mayoría de estudiantes en el nivel de razonamiento covariacional 1, N1.

Continuando con el desarrollo de la tarea, se puede ver cómo la mayoría de estudiantes identifica regularidades aritméticas que, en últimas, se podrían traducir en expresiones algebraicas (a las cuales no llegaron, pues no se les propuso algo en relación con ello). Dichas regularidades y algunos cálculos aritméticos asociados fueron insumo básico para el manejo de un registro tabular, de tal manera que pudieron obtener valores de salida en

correspondencia con unos valores de entrada. De forma paralela, identificaron la dirección del cambio de una variable dependiente (alguna de las dimensiones de la plazoleta) respecto al cambio de la independiente (la longitud del segmento $\overline{DE}$). Así como también lograron coordinar la dirección de cambio de una variable con los cambios de la otra. Estos comportamientos están asociados a la acción mental 2, AM2. Estos comportamientos que vinculan a los estudiantes con AM2, fueron dilucidados desde algunos resultados presentados en la anterior tarea (la 2 de la situación 1).

Con lo mencionado hasta el momento, se puede afirmar que los estudiantes (en su mayoría) se pueden clasificar o ubicar en un nivel de razonamiento covariacional N2, ya que sustentan a la acción mental 2 (AM2) y la acción mental AM1 asociada con el nivel de razonamiento covariacional 1 (N1).

En cuanto a la relación con los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas, se puede afirmar que los resultados arrojados por los estudiantes revelan el desarrollo del siguiente estándar: *Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas*. Haciendo la salvedad en que en las tareas trabajadas centran su trabajo en las funciones de tipo polinómicas, específicamente, las lineales. Esto es consecuencia directa del trabajo realizado con las gráficas del largo y ancho de la plazoleta, cada una en función de la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Finalmente, en cuanto al propósito de la tarea, se puede afirmar que se logró de forma parcial, pues como propósito fundamental, se pretendía que los estudiantes cuantificaran cambios, que mostraran comportamientos asociados a la acción mental 3 (AM3), circunstancia que no se llevó a cabo, pues a pesar de manejaron el registro tabular y gráfico, no pudieron centrar su atención en la cuantificación del cambio de las variables involucradas. Sólo se quedaron en la dirección de cambio y la coordinación cuantitativa no se logró ver de forma completa para cada registro de representación manejado, sólo hubo algunas pocas manifestaciones de ello. Seguramente, si los estudiantes hubieran tenido mejores resultados en las respuestas de las últimas preguntas de la tarea 3, los

comportamientos hubieran sido asociados en gran medida con AM3. Razón por la cual, los estudiantes no se pudieron clasificar en el nivel de razonamiento covariacional 3, (N3).

3.2.3 Resultados y análisis de la situación 2

(S2)**Situación 2:** Hallando el área de la plazoleta

(T1)**Tarea 1:** Área máxima de la plazoleta (GeoGebra)

(P1) **Pregunta 1:** Abra el archivo *Tarea 2* ubicado en el escritorio del computador. En vista algebraica despliegue la pestaña de cuadrilátero, donde aparece el área de la plazoleta para determinadas ubicaciones del punto E. ahora mueva el punto E y describa cómo cambia el área.

Tabla 37. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 1 (S2T1P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes, sin hacer mención de lo cuantitativo, describen correctamente la dirección del cambio: “desde D hasta la mitad aumenta el área y desde la mitad hasta C disminuye el área”	7	31.8%
R2	Los estudiantes, sin hacer mención de lo cuantitativo, describen correctamente la dirección del cambio, pero no describen cómo es el cambio del área cuando el punto E se mueve desde el centro del segmento $\overline{DC}$ hacia la izquierda, sólo lo describen desde el centro hacia la derecha.	3	13.6%
R3	Los estudiantes mencionan que hay cambios en la figura, en el área, en el tamaño, en el largo y en el ancho; pero no describen cómo es el cambio.	9	40.9%
R4	Los estudiantes responden de forma errónea: mencionan que siempre que el punto E se mueva hacia la derecha el área va aumentar y que si se mueve hacia la izquierda el área va a disminuir.	3	13.6%

(P2) **Pregunta 2:** Apoyados visualmente en GeoGebra, Luisa afirma que el área es máxima cuando el segmento $\overline{DE}$ mide 39.8m, mientras que Jairo afirma que el área es máxima cuando el segmento $\overline{DE}$ mide 40.5m. Cómo podrías mostrar mediante un proceso distinto si tienen o no tienen la razón.

Tabla 38. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 2 (S2T1P2)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes afirman que Luisa tiene la razón porque con $\overline{DE} = 39.8$ unidades el área es 3200 unidades cuadradas, la cual es máxima; mientras que a Jairo le da 3199 unidades cuadradas	11	50%
R2	Los estudiantes afirman que ambos tiene la razón, pues para		

	$\overline{DE} = 39.8$ y 40.5 unidades el área es máxima, 3200 unidades cuadradas.	7	31.8%
R3	Los estudiantes responden de manera equivocada; para $\overline{DE} = 39.8$ y 40.5 unidades afirman que el área es 8 y 8.1 , respectivamente.	3	13.6%
R4	Estudiantes que no respondieron – no la hicieron	1	4.5%

Teniendo en cuenta las respuestas a S2T1P1 expuestas en la tabla 38, se puede observar que el 86.3% de los estudiantes reconocen que hay cambios en el área de la plazoleta como consecuencia de mover el punto E sobre el segmento $\overline{DC}$. Pero de ese grupo de estudiantes sólo el 45.4% describe cómo cambia el área de la plazoleta de forma cualitativa. De otro lado, el 13.6% a pesar de reconocer que hay cambios en el área, no los describen de forma correcta.

En relación con las respuestas a S2T1P2, se observa en la tabla 38 que el 81.8% de los estudiantes responden de forma correcta, utilizando argumentos que son consecuencia de la exploración con GeoGebra. Mientras que el 18.2% responde de forma errónea o no responden a la pregunta.

Los resultados anteriores, nos permiten afirmar que la mayoría de los estudiantes identifica que conforme se mueve el punto E, hay cambios tanto en la magnitud del segmento $\overline{DE}$ como en la cantidad de área de la plazoleta. Además, logra reconocer la dependencia del área respecto a la longitud de segmento $\overline{DE}$. Los estudiantes, de forma general, lograron explicar la dirección del cambio pero describían los cambios sin hacer mención a lo cuantitativo.

Es relevante mencionar que en la pregunta 2, la respuesta esperada era que Luisa tenía la razón, pues desde el punto de vista algebraico y teórico, 39.8 es más próximo a 40 que 40.5 . Sin embargo, teniendo en cuenta que la herramienta con la que disponen los estudiantes es el programa GeoGebra, este representa un modelo a escala (1:10) de la plazoleta, para los valores 3.98 y 4.05 arrojaba como resultado de área, 32m^2 , y en el mejor de los casos, para 4.05 daba 31.99m^2 . Por esta razón se aceptó como respuesta que ambos (Luisa y Jairo) tenían la razón y que sólo Luisa tenía la razón. Como consecuencia, los estudiantes se

limitaron a usar argumentos de acuerdo con lo que la exploración del programa permite. Esto implicó que no usaran otro tipo de argumentos distintos, por ejemplo, los asociados a cálculos numéricos con lo que ya sabían de las anteriores tareas de la situación 1.

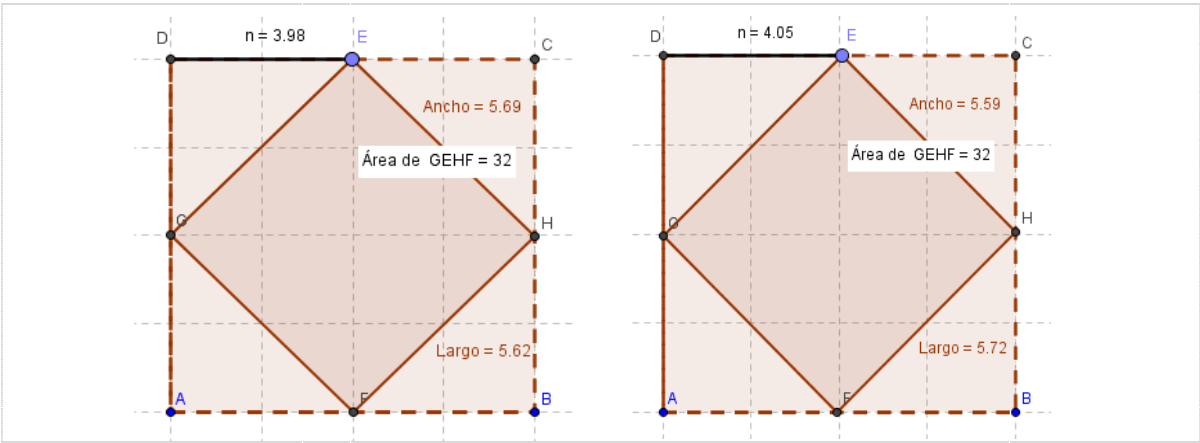
Los estudiantes, hasta este momento ya tenían tres aproximaciones distintas a la situación de la plazoleta, la primera, con la utilización del lápiz y el papel; en la segunda con la utilización de GeoGebra para reconocer como cambian las magnitudes desde un punto de vista más cualitativo y en la tercera cuantificar los cambios. Para el siguiente grupo de tareas se intentó que los estudiantes abordaran preguntas más directas y de mayor dificultad, por ello, con la ayuda de GeoGebra, en estas dos preguntas se buscaba que el estudiante reconociera de manera cuantitativa como se comportan los cambios de las magnitudes implicadas, en especial la del área de la plazoleta, con base en esto, se observó que la mayoría de los estudiantes reconocieron los cambios que sufre dicha área, pero de este grupo, sólo la mitad reconocen la dirección del cambio. Es decir, la mitad de los estudiantes de este grupo están en la acción mental 2, “conciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se considera los cambios en el valor de entrada” (Carlson 2003). Como es necesario que los estudiantes manifiesten este comportamiento, en la plenaria se utilizó el Video Beam con el fin de proyectar la plazoleta hecha en GeoGebra, con ello y con las discusiones que se dio con los estudiantes, hubo un acercamiento importante en el reconocimiento de la dirección del cambio, es decir, que mientras el punto E se mueve hacia la derecha, el área de la plazoleta no siempre aumenta, ya que en un determinado punto, el área de la plazoleta comenzó a disminuir.

La intención inicial de la pregunta 2, era que los estudiantes a través de la exploración dedujeran que ni Luisa ni Jairo tenían la razón, además, como segunda intención, se esperaba que los estudiantes reconocieran la existencia de un punto máximo (del comportamiento del área de la plazoleta), por ende, en la segunda pregunta (sin necesidad de saber que se llama vértice) se preguntó por dos valores para cuando el punto E está muy cerca del punto donde el área de la plazoleta era máxima, el objetivo era que el estudiante intentara deducir la existencia de un punto donde el área de la plazoleta es de mayor

magnitud, además, que identificara las magnitudes dependientes e independientes involucradas en la situación.

Durante este proceso, los estudiantes fueron explorando y encontrando diferentes soluciones, para ello, se utilizó la sala de sistemas de la Institución, donde por cada computador habían dos estudiantes, lo que produjo la interacción y discusión entre parejas, que posteriormente originó una diversidad de respuestas. Cabe decir, que la exploración y utilización de GeoGebra generó cierta dificultad, que durante el diseño no se tuvo en cuenta, la dificultad radicó en que el software redondeaba los valores de las áreas cuando el punto E se intentaba poner en las distancias sugeridas por Luisa y Jairo, pero algunos estudiantes, aprovecharon la herramienta, y utilizaron el zoom que ofrecía el programa, con esto pudieron ser más precisos en los valores de las áreas de la plazoleta. Lo malo, es que este tipo de acciones terminó alejando a los estudiantes de la exploración de la tendencia dinámica creciente o decreciente del área de la plazoleta.

Ilustración 17. S2T1P2



(P3a) **Pregunta 3a:** Mueve el punto E desde punto D hasta el C y observa detalladamente los valores del segmento *n* y de los lados de la plazoleta
a. Describe cómo es el comportamiento de estas tres magnitudes.

Tabla 39. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 3 (S2T1P3a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes de forma correcta, mencionan o describen como es el cambio de las tres magnitudes, ya sea de forma independiente o relacionándolas al momento de describir esos cambios.	6	27.2%

R2	Los estudiantes sólo describen el comportamiento o cambio de n , pero no hacen énfasis en los cambios de los lados de la plazoleta.	9	40.1%
R3	Los estudiantes mencionan que ocurren cambios en el largo, en el ancho, en el área y en la forma de la plazoleta; pero no describen cómo se dan esos cambios.	4	18.2%
R4	Los estudiantes dieron respuestas confusas o sin coherencia con la pregunta.	3	13.6%

(P3b)**Pregunta 3b:** Mueve el punto E desde punto D hasta el C y observa detalladamente los valores del segmento n y de los lados de la plazoleta
b. Describe cómo se relacionan entre ellas.

Tabla 40. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 3b (S1T1P3b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes de forma correcta, mencionan que cuando n aumenta, el largo aumenta y el ancho disminuye, y viceversa	3	13.6%
R2	Los estudiantes describen las características en común que tiene estas tres magnitudes, por ejemplo, “se relacionan entre ella porque el punto E se encuentra entre los puntos D y C”	9	40.1%
R3	Los estudiantes dieron respuestas confusas o sin coherencia con la pregunta.	3	13.6%
R4	Estudiantes que no respondieron – no la hicieron	7	31.8%

(P4a) **Pregunta 4a:** ¿Qué magnitudes deben variar para que cambie el valor del área de la plazoleta?

Tabla 41. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 4a (S1T1P4a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden correctamente, mencionando que las magnitudes que deben variar son n , el largo y el ancho de la plazoleta (algunos mencionan las zonas verdes).	4	18.2%
R2	Los estudiantes afirman que las magnitudes que deben variar son o n , o los lados de la plazoleta.	10	45.5%
R3	Los estudiantes no se refieren a las magnitudes sino a la forma en que ocurren ciertos cambios o invarianza a medida que se mueve el punto E, por ejemplo, se refieren al rango de valores que pueden tomar el largo y el ancho.	4	18.2%
R4	Estudiantes que no respondieron – no la hicieron	4	18.2%

(P4b) **Pregunta 4b:** Explica la relación existente entre el área y dichas magnitudes.

Tabla 42. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 1 pregunta 4b (S2T1P4b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes, mencionan la relación existente entre las magnitudes en consideración (n , largo y ancho de la plazoleta) y el área, es que todas ellas dependen del cambio de la magnitud de $\overline{DE}$.	3	13.6%
R2	Los estudiantes afirman que la relación existente es que el área de la plazoleta, depende de las magnitudes que han mencionado en el literal anterior.	9	40.1%
R3	Los estudiantes mencionan que la relación existente es que, si se mueve el punto E, cambian.	3	13.6%
R4	Estudiantes que no respondieron – no la hicieron	7	31.8%

De acuerdo con la tabla 39, en relación con las respuestas a la pregunta S2T1P3a, el 86.4% de los estudiantes logró identificar que hay cambios en las tres magnitudes mencionadas en al pregunta. Sin embargo, de ese grupo el 27.2% describieron de forma correcta como ocurren los cambios y el 40.1% lo hace de manera parcial, es decir, solo describen los cambios que ocurren con DE pero no describen los cambios con los lados de la plazoleta.

De otro lado, el 13.6% de los estudiantes respondieron de manera confusa o no apuntaron a las intenciones de la pregunta.

Ahora de la tabla 40, sobre las respuestas S2T1P3b, sólo el 13.6% de los estudiantes respondió de forma correcta y aunque no hace referencia a lo cuantitativo, sí menciona la relación en términos de la dirección del cambio. Las respuestas del 86.4% restante de los estudiantes, no iban dirigidas o no tenían elementos de la respuesta esperada.

En lo que respecta a la tabla 41, que se refiere a S2T14a, el 63.7% de los estudiantes mencionó que las magnitudes que deben variar para que hayan cambios en el área de la plazoleta, son: la de $\overline{DE}$ y/o la de los lados de la plazoleta. Entre tanto, el restante 36.3% de los estudiantes no orientaron sus argumentos hacia la respuesta esperada o en su defecto, no respondieron.

Finalmente en la tabla 42, sobre las respuestas de S2T14b, el 53.7% de los estudiantes, en sus respuestas manifiestan algunos o varios elementos de la respuesta esperada, por ejemplo, reconocen que las magnitudes involucradas dependen de la longitud del segmento $\overline{DE}$, o es su defecto, que el área de la plazoleta depende de dichas magnitudes. En contraste con el anterior, el 45.4% de los estudiantes no respondió a la pregunta o mencionó relaciones que no incluían el área de la plazoleta.

Casi que en concordancia con las preguntas anteriores, la mayoría de los estudiantes identifican los cambios, pero de ese grupo aproximadamente la tercera parte infieren y describen como se dan los cambios de las magnitudes, es decir, describen la manera de cómo se dan los cambios de los lados de la plazoleta, cómo estos se relacionan entre sí mismo y cómo se relacionan con el movimiento del punto E. El resto de los estudiantes (un pequeño grupo) intentan hacer una relación de dependencia entre magnitudes, pero no alcanzan a describir cómo se dan los cambios.

Es importante mencionar que cuando se habla de cambios, se habla de cómo cambian las magnitudes implicadas en la situación, es decir, esto no dista de la propuesta del ministerio al referirse sobre el pensamiento variacional, aunque como se mencionó anteriormente algunos estudiantes reconocen que hay cambios sin describir cómo se dan, los resultados de los estudiantes si apuntaron a que estos percibieron y reconocieron la variación y el cambio en una situación en un contexto, tal como lo propone el MEN, además para el estudio de este pensamiento, el MEN propone diferentes sistemas de representación, no necesariamente algebraico, también propone los registros simbólicos, iconos, gráficos y verbales, que para este caso, se parte de un registro grafico dinámico y trata de que los estudiantes a través de sus expansiones discursivas escriban y expliquen sus respuestas de cómo están percibiendo la variación o el cambio.

Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción,

modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (MEN, 2006)

(S2)**Situación 2:** Hallando el área de la plazoleta

(T2)**Tarea 2:** Área de la plazoleta (registro tabular)

(P1) **Pregunta 1:** Si el punto E cambia de posición sobre el segmento $\overline{DC}$, complete la siguiente tabla. **Especifica** tus procedimientos.

Longitud $\overline{DE}$ (m)	Largo de la plazoleta $(\overline{FH})$ (m)	Ancho de la Plazoleta $(\overline{FG})$ (m)	Área de la Plazoleta (m ²)
10m			
	$30\sqrt{2}$		

Tabla 43. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 1 (S2T2P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes completan de forma correcta la tabla. Sin embargo cuando $\overline{DE} = n$, aciertan con afirmar con que el largo y el ancho de la plazoleta son $(n\sqrt{2})$ y $(80 - n)\sqrt{2}$, respectivamente: pero no aciertan en el valor correspondiente a la casilla para el <i>Área de la plazoleta</i> (la dejan vacía o ponen 3200).	15	68.2%
R2	Los estudiantes completan de forma correcta la tabla. Sin embargo cuando $\overline{DE} = n$, de forma equivocada mencionan que tanto el largo como el ancho miden $(n\sqrt{2})$. Además, para la respectiva área ponen $(80n\sqrt{2})$, n , $(80 - n)$, o no responden.	6	27.2%
R3	Los estudiantes completan de forma correcta la tabla. Sin embargo para cuando $\overline{DE} = n$, los estudiantes dejan en blanco las casillas correspondientes para largo, el ancho y el área de la plazoleta.	1	4.5%

(P2a) **Pregunta 2a:** Describa el cambio del área de la plazoleta cuando:
a. cambia la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Tabla 44. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 2a (S2T2P2a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes mencionan que para ciertos valores (por parejas) de $\overline{DE}$ hay áreas que se repiten o son las mismas. Por ejemplo, para los valores de 10 y 70 unidades el área de la plazoleta es igual. Algunos estudiantes manifiestan que los valores de las áreas vuelven a ser las mismas.	4	18.2%
R2	Los estudiantes identifican que hay cambio en el área de la plazoleta cuando cambia la magnitud del segmento $\overline{DE}$, pero no describen como es el cambio.	14	63.6%

R3	Los estudiantes hablan de cambios en la forma de la plazoleta, por ejemplo, se refieren a que la plazoleta cambia de ser cuadrada a rectangular. Pero no hablan de dirección o cuantificación alguna del cambio.	4	18.2%
----	--	---	-------

(P2b) **Pregunta 2b:** Describa el cambio del área de la plazoleta cuando:
b. cambia el largo de la plazoleta.

Tabla 45. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 2b (S2T2P2b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes menciona que el área cambia (aumenta y disminuye) a medida que cambia el largo. Pero no mencionan cómo es el cambio ni relacionan la dirección del cambio entre el largo y el área.	12	54.5%
R2	Los estudiantes mencionan que para ciertos valores (por parejas) del largo de la plazoleta hay áreas que se repiten o son las mismas. Por ejemplo, para los valores de $10\sqrt{2}$ y $70\sqrt{2}$ unidades el área de la plazoleta es igual. Algunos estudiantes manifiestan que los valores de las áreas vuelven a ser las mismas.	3	13.6%
R3	Los estudiantes no responden a la pregunta, hablan de cambios en el largo y ancho, pero no mencionan los cambios en el área.	6	27.2%
R4	Estudiantes que no respondieron – no la hicieron	1	4.5%

(P3a) **Pregunta 3a:** Luisa afirma que cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es n , el área de la plazoleta sería $(n\sqrt{2}) \cdot (80 - n)\sqrt{2}$.

a. Usando la fórmula que propone Luisa completa la siguiente tabla para $n = 20, 35, 50$, y 65

Longitud $\overline{DE}$	Área de la Plazoleta $(n\sqrt{2}) \cdot (80 - n)\sqrt{2}$

Tabla 46. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 3a (S2T2P3a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes completaron de forma correcta la tabla para los distintos valores de n .	17	77.3%
R2	Los estudiantes completaron de forma correcta la tabla para los distintos valores de n . Pero en la columna de $\overline{DE}$, ponen erróneamente $20\sqrt{2}$, $35\sqrt{2}$, $50\sqrt{2}$, $65\sqrt{2}$.	2	9%
R3	Los estudiantes completaron de forma correcta la tabla para los distintos valores de n . Sin embargo, tiene error de cálculo numérico en el valor de alguna de las áreas.	3	13.6%

(P3b) **Pregunta 3b:** De acuerdo con los resultados de la tabla 3 (P1) y comparándolos con los de la tabla 2 (P3a) analiza la validez de afirmación de Luisa.

Tabla 47. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 3b (S2T2P3b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	De forma correcta, los estudiantes afirman que Luisa tiene la razón porque al comparar los valores de las tablas 2 y 3 para los mismos valores del segmento $\overline{DE}$, los respectivos valores de las áreas son iguales.	17	77.3%
R2	Los estudiantes afirman, que Luisa tiene la razón, pero el argumento usado no es válido. Por ejemplo afirman que “tiene la razón porque está dando 80, que es el área de la plazoleta”	1	4.5%
R3	De forma incorrecta, los estudiantes mencionan que Luisa no tiene la razón, porque el valor de 1950 de la tabla 3, que corresponde al área cuando $n = 65$, no aparece en la tabla 2	4	18.2%

De acuerdo con la tabla 43, se puede afirmar que el 100% de los estudiantes pudo completar la tabla de forma correcta cuando a la magnitud del segmento $\overline{DE}$ se le adjudicaba valores numéricos. Sin embargo, tuvo dificultades cuando al segmento $\overline{DE}$ se le adjudicaba la letra n como número generalizado. De hecho, ningún estudiante logró acertar de forma completa con las expresiones para la última fila de la tabla.

Conforme con la tabla 44, se puede decir que el 81.8% de los estudiantes reconoce que hay un cambio en el área de la plazoleta cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ varía, sin embargo, no describen como ocurre dicho cambio. De este grupo, algunos intentan cuantificar los cambios mencionando que para ciertos valores de $\overline{DE}$ (por parejas) hay áreas que son las mismas. Mientras que el 18.2% de los estudiantes alude a cambios en la forma de la plazoleta, pero no a la cantidad de superficie de la misma.

De la tabla 45, se puede se puede decir que el 68.1% de los estudiantes reconoce que hay un cambio en el área de la plazoleta cuando su largo varía, sin embargo, no describen como ocurre dicho cambio. De este grupo, algunos intentan cuantificar los cambios mencionando que para ciertos valores del largo de la plazoleta (por parejas) hay áreas que son las

mismas. Mientras que el 31.7% restante de los estudiantes no responden o sólo aluden a que hay cambios en los lados de la plazoleta y no en la cantidad de su superficie.

De acuerdo con la tabla 46, se puede inferir que todos los estudiantes completaron de forma correcta la tabla propuesta, excepto el 22.6% de ellos, quienes presentaron algún error en el valor correspondiente en algunas de las celdas.

Observando la tabla 47, el 77.3% de los estudiantes usando argumentos válidos (tras la comparación de las tablas 2 y 3 de la tarea) expresan que la afirmación de Luisa es correcta. El resto de los estudiantes, sin importar si le dan o no la razón a Luisa, justifican usando argumentos que no son válidos.

De acuerdo con los resultados de las preguntas 1 a 3 de la tarea 2 de la situación 2, se puede afirmar que los estudiantes no tuvieron dificultades con la determinación de los valores del largo, ancho y área de la plazoleta a partir de determinados valores cuantitativos de la longitud del segmento $\overline{DE}$. Esto lo hicieron explicitando un procedimiento algorítmico consecuencia de la aplicación de la fórmula que da cuenta de la relación pitagórica entre las ternas de valores de los lados de un triángulo rectángulo isósceles donde los catetos iguales tiene magnitud $m(\overline{DE})$ y la hipotenusa corresponde al largo de la plazoleta.

$$(\overline{FH})^2 = (\overline{DE})^2 + (\overline{DE})^2.$$

De forma análoga, calcularon el valor del ancho de la plazoleta y teniendo los valores de sus dimensiones, calculan el área. Todo lo descrito hasta el momento, da cuenta de cómo los estudiantes hacen uso de herramientas sintácticas aritméticas que dan cuenta del manejo de un SMS aritmético concreto que da cuenta de habilidades para usar una fórmula y obtener distintos valores para alguno de los parámetros a partir de asignar determinados valores a los demás parámetros.

En contraste con lo anterior, cuando a los estudiantes se les pedía hallar las dimensiones y área de la plazoleta cuando $m(\overline{DE}) = n$, tuvieron dificultades marcadas para poder generalizar una expresión para dichas dimensiones, en términos de n , lo cual advierte que

no hay un manejo de un SMS más abstracto que el anterior donde se requiere habilidades algebraicas que den cuenta de la generalización de operaciones aritméticas y por ende la manifestación de que entienden la estructura general que da cuenta del comportamiento o dependencia cuantitativa entre los valores de la longitud del segmento $\overline{DE}$ y otras magnitudes asociadas a la plazoleta.

A continuación se muestran dos evidencias donde hubo tales dificultades. En la primera, se les dificulta poder generalizar el producto en términos de n . En la segunda, los estudiantes tienen dificultades para generalizar tanto las dimensiones como el área de la plazoleta.

Ilustración 18. S2T2P1R1

Longitud $\overline{DE}$ (m)	Largo de la plazoleta $(\overline{FH})$ (m)	Ancho de la Plazoleta $(\overline{FG})$ (m)	Área de la Plazoleta (m ²)
10m	$10\sqrt{2}$	$70\sqrt{2}$	1400 /
30m	$30\sqrt{2}$	$50\sqrt{2}$	3000 /
40m	$40\sqrt{2}$	$60\sqrt{2}$	4600 /
60m	$60\sqrt{2}$	$20\sqrt{2}$	2400 /
50m	$50\sqrt{2}$	$30\sqrt{2}$	3000 /
35m	$35\sqrt{2}$	$45\sqrt{2}$	3150
48m	$48\sqrt{2}$	$32\sqrt{2}$	3072
70m	$70\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	1400 /
n	$N\sqrt{2}$	$(80-n)\sqrt{2}$	390

Tabla 2

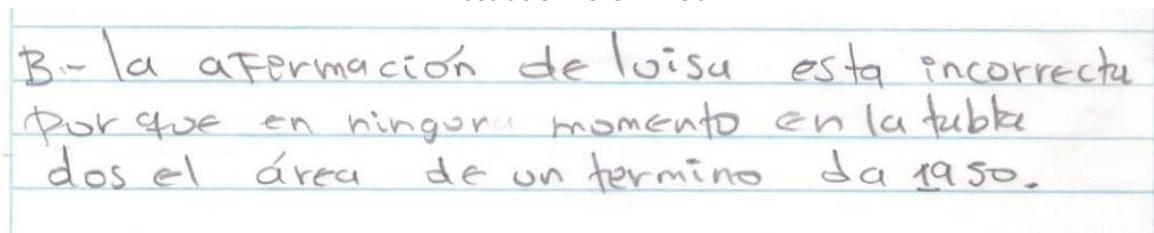
Ilustración 19. S2T2P1R2

Longitud $\overline{DE}$ (m)	Largo de la plazoleta $(\overline{FH})$ (m)	Ancho de la Plazoleta $(\overline{FG})$ (m)	Área de la Plazoleta (m ²)
10m	$10\sqrt{2}$	$70\sqrt{2}$	1400 /
30m	$30\sqrt{2}$	$50\sqrt{2}$	3000 /
40m	$40\sqrt{2}$	$60\sqrt{2}$	4600 /
60m	$60\sqrt{2}$	$20\sqrt{2}$	2400
50m	$50\sqrt{2}$	$30\sqrt{2}$	3000 /
35m	$35\sqrt{2}$	$45\sqrt{2}$	3150
48m	$48\sqrt{2}$	$32\sqrt{2}$	3072
70m	$70\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	1400 /
n	$n\sqrt{2}$	$(n\sqrt{2})$	$(80-n)$

Tabla 2

Asimismo, en la pregunta sobre la afirmación de Luisa, de forma correcta, la mayoría de los estudiantes menciona que dicha afirmación es válida, como consecuencia de comparar la tabla que ellos han llenado en la pregunta 1, con la tabla que llenen de acuerdo a la expresión algebraica que Luisa propone. En contraste, hubo el caso de pocos estudiantes que contestan de forma incorrecta, mencionando que Luisa no tiene la razón, porque el valor de 1950 de la tabla 3, que corresponde al área cuando $n = 65$, no aparece en la tabla 2.

Ilustración 20. S2T2P3b



Aquí se evidencia que estos estudiantes no comprenden el enunciado de la pregunta, lo que entienden es que los valores registrados en las dos tablas deben tener los mismos valores que se evalúan para el segmento $\overline{DE}$.

En las preguntas 1 a 3 de la tarea 2, se pretende que los estudiantes coordinen cambios cuantitativos entre magnitudes involucradas, sin embargo, la mayoría de los estudiantes, aunque realiza tratamientos operatorios entre cantidades numéricas asociadas a las magnitudes, no logra explicar o describir cómo se da el cambio, es decir, no logra describir ni cualitativa ni cuantitativamente, el comportamientos de los cambios o la variación de las magnitudes.

(P4) **Pregunta 4:** Teniendo en cuenta la tabla 2 y las condiciones de la plazoleta, explica por qué existen pares de magnitudes del segmento $\overline{DE}$, para los cuales el área de la plazoleta es la misma.

Tabla 48. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 2 pregunta 4 (S2T2P4)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Afirman que existen pares de magnitudes del segmento $\overline{DE}$ para los cuales el área es la misma, en la medida en que dichos pares sumen 80. Pero al tratar de ejemplificar le agregan, el factor $\sqrt{2}$ a la medida de $\overline{DE}$, por ejemplo: “para $10\sqrt{2}$, lo que le falta para llegar a 80 es $70\sqrt{2}$ ”	1	4.5%
R2	Mencionan que eso sucede debido a que la plazoleta gira, y al girar, quedan las mismas magnitudes. Por ejemplo, si inicialmente 60 es el largo y 20 es el ancho, cuando gira	4	18.2%

queda 20 el largo y 60 el ancho.

R3	Los estudiantes mencionan que al mover el punto E, se modifica el valor del área de la plazoleta. Pero cuando el punto E se ubica en cierta parte antes de la mitad del segmento $\overline{DC}$ y en cierta parte después de dicha mitad, se obtienen plazoletas con la misma cantidad de área.	4	18.2%
R4	Los estudiantes mencionan que ocurre porque las magnitudes de $\overline{DE}$ son inversas.	8	36.4%
R5	Los estudiantes mencionan que cuando se mueve el punto E hay cambios en el largo y ancho de la plazoleta. Referencian ejemplos de pares de medidas del segmento $\overline{DE}$ donde el área de la plazoleta es igual, pero NO explican por qué se da esa igualdad en el valor de las áreas.	3	13.6%
R6	Los estudiantes expresan una respuesta confusa. “porque las medidas del área siguen siendo las mismas”	2	9%

Por último, respecto a la tarea 2, de la tabla 48 se puede decir que el 91% de los estudiantes, reconocen la existencia de parejas de valores del segmento $\overline{DE}$ para las cuales el área de la plazoleta es la misma, mientras que el 9% no reconoce dicha existencia. Sin embargo, del primer grupo, un 22.7% de estudiantes, explican con algunos argumentos aproximados a la forma correcta, porque existen valores determinados del área a los cuales les corresponden dos valores para el segmento $\overline{DE}$.

Con el preámbulo y tratamiento numérico abordado en las preguntas 1 a 3, se esperaba que en la pregunta 4, los estudiantes pudieran analizar cuantitativamente el comportamiento de los cambios de una variable en relación con los cambios en otra, y de esta forma, poder describir la simetría en los valores de las dimensiones y área de la plazoleta en torno al punto $\overline{DE} = 40m$. Sin embargo, las respuestas más cercanas consistieron en mencionar que esto pasaba por la complementariedad que existe entre el largo y el ancho de la plazoleta, de tal manera que debían sumar 80m. Situación que se ve reflejada en la siguiente ilustración.

Ilustración 21. S2T2P4R1

4R11 existen porque siempre n le falta para llegar a 80, $n\sqrt{2}$ así como $10\sqrt{2}$ le falta para llegar a 80 $70\sqrt{2}$ y a $70\sqrt{2}$ le falta $10\sqrt{2}$ para llegar a 80 y para que de el resultado del área el largo x ancho nos de $(80-n)\sqrt{2}$ que en este caso sería igual a 400.

También hubo alusión a la simetría sin poca profundidad o explicitación de lo cuantitativo, como se muestra a continuación

Ilustración 22. S2T2P4R3

11= porque el punto (E) al modificar su posición también modifica el área de la plazoleta, pero cuando se ubica en cierta medida antes de la mitad y en cierta después de esta misma se obtiene el mismo en la medida de la cantidad del área.

Particularmente, en la siguiente ilustración, en el tipo de respuesta R2, los estudiantes involucrados no manifiestan correctamente lo que sucede cuando el largo y el ancho de la plazoleta permutan sus medidas.

Ilustración 23. S2T2P4R2

4). por que la plazoleta gira y a lo que gira quedan las mismas magnitudes, si 60 es largo y 20 el ancho cuando gira queda 20 el largo y 60 el ancho.

Cuando dicen que esto se debe a que la plazoleta gira, se están dejando llevar por la ilusión óptica que hace ver que la plazoleta se está moviendo de derecha a izquierda y viceversa, como consecuencia del arrastre del punto E sobre el segmento $\overline{DC}$. Al mencionar el giro, se esconde lo que realmente hay detrás de ello, la variabilidad de las dimensiones y área de la

plazoleta. Esto evidencia que para estos estudiantes, todavía no es clara la ayuda dinámica que propone el software en cuanto a la variabilidad del movimiento del punto E.

(S2)**Situación 2:** Hallando el área de la plazoleta

(T3) **Tarea 3:** Área de la plazoleta (registro gráfico)

(P1) **Pregunta 1:** En el plano cartesiano grafica el *Área de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* . Explica la estrategia que utilizaste para obtener los puntos de la gráfica.

Tabla 49. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 1 (S2T3P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes realizan una tabla a doble columna con valores para $\overline{DE}$ y el área. Para $\overline{DE}$ toman valores de diez en diez entre cero y ochenta, para esta tabulación se guían por los valores que arroja GeoGebra. Ubican de forma correcta los puntos en el plano cartesiano, pero no rotulan los ejes coordenados con los nombres correspondientes de las magnitudes involucradas (excepto dos estudiantes). Unen los puntos con trazos curvilíneos. Los puntos (0,0) y (80,0) los marcan como abiertos.	17	77.3%
R2	Los estudiantes realizan una tabla a doble columna con valores para $\overline{DE}$ y el área. Para $\overline{DE}$ toman valores de diez en diez entre cero y ochenta, para esta tabulación se guían por los valores que arroja GeoGebra. Ubican de forma correcta los puntos en el plano cartesiano, pero no rotulan los ejes coordenados con los nombres correspondientes de las magnitudes involucradas (excepto dos estudiantes). Unen los puntos con trazos curvilíneos. Sin embargo los puntos (0,0) y (80,0) no los marcan como abiertos en la gráfica.	2	9%
R3	Los estudiantes realizan una tabla a doble columna con valores para $\overline{DE}$ y el área. Para $\overline{DE}$ toman valores de diez en diez entre cero y ochenta, para esta tabulación se guían por los valores que arroja GeoGebra. Ubican de forma correcta los puntos en el plano cartesiano, pero no rotulan los ejes coordenados con los nombres correspondientes de las magnitudes involucradas (excepto dos estudiantes). Unen los puntos con trazos curvilíneos, pero sólo unen los puntos comprendidos entre (10,1400) y (70,1400), no extienden la curva hasta los puntos (0,0) y (80,0).	3	13.6%

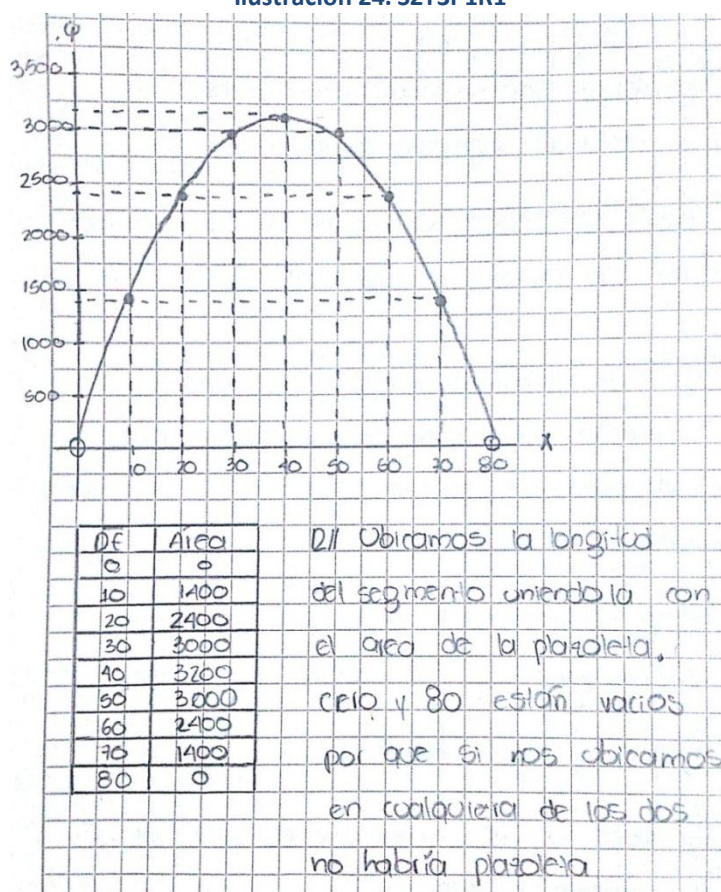
De acuerdo a la tabla 49, el 100% de los estudiantes construye de forma correcta la gráfica, obteniendo una parábola cóncava hacia abajo y con vértice (40,3200). De este grupo el 13.6% en su tabla de datos no consideran los valores 0m y 80m para el segmento $\overline{DE}$; razón

por la cual no los tiene en cuenta en la construcción de la gráfica y tampoco prolongan dicha gráfica.

Es importante resaltar que 91% de los estudiantes no rotulan los ejes coordenados.

De acuerdo con los resultados de la pregunta 1, se puede afirmar que los estudiantes marcan una tendencia cognitiva que manifiesta el hábito de poder identificar la variable independiente y la dependiente, para posteriormente, realizar un proceso de tabulación que como consecuencia determina la consideración de parejas ordenadas que se ubican en el plano cartesiano. También la tendencia es a unir los puntos ubicados en el plano cartesiano, y en este caso responden a la intuición o memoria de trabajo para hacer trazos curvos entre puntos sucesivos. Inclusive reconocen que bajo el contexto de la plazoleta, los puntos $(0,0)$ y $(80,0)$ no deben ser tenidos en cuenta como parte de la gráfica. Esto también reafirma en los estudiantes la idea de un dominio o restricción para los valores del segmento $\overline{DE}$ que es el que está representado en el eje horizontal de la gráfica. En la ilustración que sigue se muestra la respuesta de un estudiante en cuyo discurso da cuenta de lo anteriormente descrito.

Ilustración 24. S2T3P1R1



Inicialmente, después del trabajo individual, se cree que los estudiantes son conscientes del porqué unen los puntos de esa forma, sin embargo, en el momento de la plenaria, a través de preguntas intencionadas por parte de los observadores, la mayoría no da cuenta de ese porqué.

(P2a) **Pregunta 2a:** Teniendo en cuenta que el vértice de una parábola es el punto de corte entre esta y el eje de simetría, responde
a. ¿cuál es la coordenada el vértice?

Tabla 50. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 2a (S2T3P2a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes de forma correcta mencionan que el vértice es (40, 3200).	5	22.7%
R2	Los estudiantes aciertan con el orden de la abscisa y la ordenada, pero no aciertan en la notación correcta para escribirlo. Por ejemplo, "40,3200" "(40), 3200" y "40 y 3200"	15	68.2%
R3	Los estudiantes mencionan que el vértice es 3200 y 40 (invertido al orden usual)	2	9%

(P2b) **Pregunta 2b:** ¿Según las condiciones con las que debe cumplir la plazoleta, qué significado tiene las coordenadas del vértice?

Tabla 51. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 2b (S2T3P2b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes mencionan que para $\overline{DE} = 40$, se presenta el área máxima de la plazoleta, la cual es 3200m^2 .	2	9%
R2	Estudiantes que mencionan que el vértice significa que el área máxima de la plazoleta es 3200; pero no hacen alusión al valor de $\overline{DE}$.	7	31.8%
R3	Los estudiantes mencionan cuando $\overline{DE}$ es 40m el área el 3200 m^2 .	5	22.7%
R4	De forma incorrecta, los estudiantes mencionan que el significado del vértice, es que este punto NO cumple con las condiciones de la plazoleta, porque no se pasa de 80.	7	31.8%
R5	Los estudiantes dieron respuestas confusas o sin coherencia con la pregunta.	1	4.5%

(P3) **Pregunta 3:** De acuerdo con la forma de la gráfica, describa cómo cambia el área a medida que cambia el segmento n .

Tabla 52. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 3 (S2T3P3)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes mencionan que a medida que n aumenta hasta 40 el área aumenta hasta 3200, a partir de $n = 40$ el área empieza a disminuir.	2	9%
R2	Los estudiantes mencionan que a medida que n aumenta el área aumenta y que a partir de la mitad del valor máximo del segmento n , el área empieza a disminuir.	11	50%
R3	Los estudiantes manifiestan que para pares de valores de n el área será la misma, siempre y cuando dichos valores de n sean complementarios respecto a 80, es decir, sumen 80. Por ejemplo, para $n = 10\text{m}$ y $n = 70\text{m}$ el área es 1400m^2 .	2	9%
R4	Se indica que a medida que cambia n cambia el área, pero NO describen cómo es el cambio.	1	4.5%
R5	De forma errónea los estudiantes mencionan que a medida que aumenta n , el área aumenta y si n disminuye, el área también lo hace.	3	13.6%
R6	No responden a la pregunta. Menciona que el área depende de los puntos o de la forma de la plazoleta	3	13.6%

(P4) **Pregunta 4:** De acuerdo con la gráfica ¿Para qué valores de n , el área de la plazoleta es 2622m^2 ?

Tabla 53. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 4 (S2T3P4)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes a través del uso de GeoGebra, mueven el punto E y hallan el valor para el cual el área es 2622m^2 . Menciona que n debe ser 23 y además lo justifican empleando la formula $(n\sqrt{2}).(80 - n)\sqrt{2}$ y remplazando a $n = 23$. Sin embargo no mencionan que también es posible que n sea 57.	5º	22.7%
R2	Los estudiantes a través del uso de GeoGebra, mueven el punto E y hallan el valor para el cual el área es 2622m^2 . Menciona que n debe ser 23. Sin embargo no mencionan que también es posible que n sea 57.	7	31.8%
R3	Los estudiantes a través del uso de GeoGebra, mueven el punto E y hallan el valor para el cual el área es 2622m^2 . Menciona que n debe ser un valor entre 22 y 25. Sin embargo no mencionaron un intervalo de valores cercanos a 57	10	45.5%

De acuerdo a los resultados de la tabla 50, el 91% de los estudiantes identifica la coordenada del vértice, y el resto de los estudiantes no lo identifica de forma correcta. Del primer grupo de estudiantes 75% tiene dificultades para describir de forma correcta la notación matemática de una coordenada.

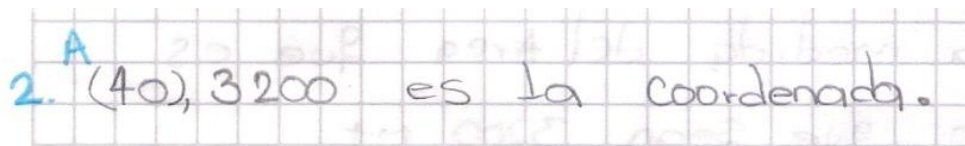
Ahora, de acuerdo con los resultados de tabla 51, el 63.4% de los estudiantes interpretan de forma adecuada la relación existente entre la ordenada y la abscisa de la coordenada del vértice; mientras que el resto de estudiantes interpreta de forma errada el significado del vértice. Del primer grupo el 64% además de reconocer la relación mencionada, acude al contexto de la plazoleta y asocian el vértice con el área máxima.

En cuanto a los resultados de la tabla 52, el 59% de los estudiantes describe de forma correcta el cambio del área mientras n varía (de ellos, tan sólo el 15.4% lo hace de forma cuantitativa, el resto lo hace de forma cualitativa). Entre tanto, el 9% del total de estudiantes, no describe un cambio sino que describe que existen pares de valores de n , para los cuales el área es la misma. El resto de los estudiantes no responde a la pregunta; ya sea porque mencionan que hay cambios pero no los describen, respondieron mal o usaron argumentos confusos.

De acuerdo a los tipos de respuestas para la pregunta 4 (tabla 53), el total de estudiantes se apoya en GeoGebra para determinar los posibles valores de n , pero sólo identifican correctamente un posible valor n , no hablan de la posible existencia de un segundo valor distinto. El 54.5% de los estudiantes mencionan que el valor de n debe ser 23, de este grupo el 41.6% además de GeoGebra, usan la fórmula $(n\sqrt{2}) \cdot (80 - n)\sqrt{2}$ para validar su propuesta. Entre tanto, el 45.5% del total de estudiantes dice que n debe estar entre 22 y 25.

En la pregunta 2a, se observa cómo hay dificultades con la notación de escritura para la coordenada del vértice de la parábola.

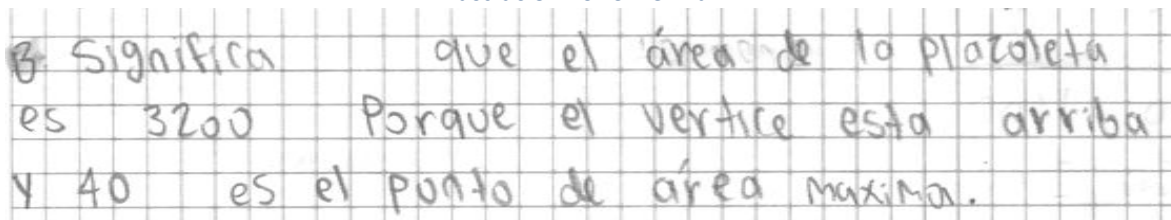
Ilustración 25. S2T3P2aR2



2. A (40), 3200 es la coordenada.

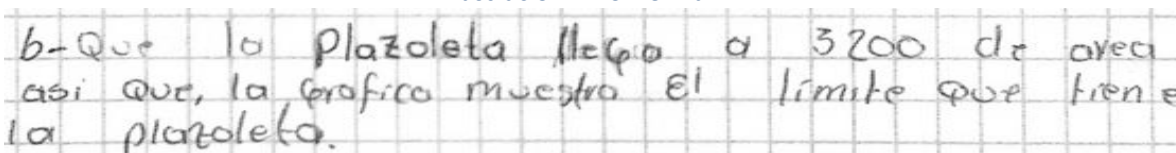
La ilustración anterior denota problemas con los SMS que se suponen se deben dominar, pues los estudiantes en su trayectoria académica han trabajado con estas notaciones. Esto implica que hay dificultades con la sintaxis, sin embargo, el dominio de lo semántico es evidente, pues los estudiantes interpretan y ubican de forma correcta las coordenadas en el plano cartesiano. Esto se evidencia cuando la mayoría de los estudiantes interpreta la relación existente entre la abscisa y ordenada que conforman la coordenada del vértice.

Ilustración 26. S2T3P2bR1



B Significa que el área de la plazoleta es 3200 Porque el vertice esta arriba y 40 es el punto de área maxima.

Ilustración 27. S2T3P2bR2



b-Que la plazoleta llega a 3200 de area asi que, la grafica muestra el limite que tiene la plazoleta.

En las dos últimas ilustraciones se puede observar cómo algunos estudiantes hablan de que la ordenada correspondiente a la abscisa 40m, hace referencia al área máxima de la

plazoleta. Esta afirmación la hacen conforme a la exploración que ya han realizado con GeoGebra y algunos cálculos ya realizados en las tareas anteriores. A pesar de que la palabra máxima para referirse al área es usada a partir de esos cálculos, en la plenaria, los estudiantes cuando aludían al área máxima señalaban el vértice de la parábola, haciendo con la mano los gestos de una trayectoria creciente en el aire desde el origen del plano cartesiano hasta el vértice. Esto evidencia que la intuición de los estudiantes de acuerdo a la forma de la gráfica los lleva a identificar máximos de una función.

Lo anterior se puede notar con más detalle en la siguiente ilustración que caracteriza a la respuesta de la mayoría de estudiantes en torno a la forma en que describen cómo varía el área conforme cambia la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Ilustración 28. S2T3P3R1

3. Cambia a medida que movemos el punto E. hacia la derecha y llegamos a 4 según geogebra (40), hasta ese punto aumenta el área y de 40, 50... de allí en adelante empieza a disminuir el área, ya que si llegamos a 60 el área es 32 y de ahí en adelante empieza a disminuir el área.

Tanto en la anterior ilustración como en la que sigue, se muestra cómo la mayoría de los estudiantes menciona crecimiento de la función área cuando $\overline{DE}$ está entre 0 y 40m y de crecimiento cuando está entre 40 y 80m.

Ilustración 29. S2T3P3R2

3 Cuando el punto (E), se dirige hacia la mitad del terreno aumenta, pero desde la mitad hacia cualquiera de las orillas disminuye el área.

Esto reafirma la idea de un máximo de la función, pues todo este razonamiento, lo hacen a partir de la interpretación de la representación gráfica que han construido, que corresponde a una forma parabólica cóncava hacia abajo.

Algunos estudiantes (sólo 2) manifiestan que para pares de valores de n , el área será la misma, tal como se muestra en la siguiente ilustración

Ilustración 30. S2T3P3R3

3) los valores no cambian cuando se complementa el 80 de la plazuela es decir $70 = 1400$ $10 = 1400$ etc

Esto parece indicar que estos estudiantes están observando que hay valores simétricos de y , respecto a la recta $x = 40m$, sin embargo, cuando se le pide a los estudiantes que encuentren la longitud que debe tener el segmento $\overline{DE}$ para que el área sea $2622 m^2$, todos los estudiantes mencionan solamente un posible valor para $\overline{DE}$, el 23 y ninguno se acerca al menos a mencionar el otro posible valor que es el 57.

Ilustración 31. S2T3P4R1

4 El valor de N debe ser 23 para que el área de la plazuela sea 2622.
 $23\sqrt{2} \cdot 57\sqrt{2} = 2622.$

A la anterior respuesta llegan haciendo uso de GeoGebra, sin embargo, no continúan el arrastre del punto E para determinar el otro valor posible para $\overline{DE}$ y obtener la misma área. Es más, reafirman su respuesta comprobando que cuando $n = 23m$ se cumple que $(n\sqrt{2}) \cdot (80 - n)\sqrt{2}$ es igual a $2622 m^2$.

Esto implica que desde el punto de vista matemático, los estudiantes advierten la simetría de ordenadas, pero la dificultad radica en que sólo lo consideran para los valores del segmento DE propuestos en las tabulaciones que han hecho, los cuales están de 10 en 10m, y a pesar de que unieron los puntos de la gráfica de forma correcta, la idea de continuidad de la gráfica entre puntos consecutivos no es para ellos generalizable, es decir, que para valores de $\overline{DE}$ que están por ejemplo, entre 10 y 20m o entre 50 y 60m, no asumen la existencia de dos imágenes simétricas para $f(\overline{DE})$ siendo $f(x) = (x\sqrt{2}) \cdot (80 - x)\sqrt{2}$ la

función que expresa el área de la plazoleta en términos de $\overline{DE}$ y de los lados. Esto, a pesar de que en las tablas han llenado correctamente valores de los lados y del área para $\overline{DE}$ con valores 35m y 48m. Así pues, no hubo una visión sistémica para el tratamiento de valores del segmento $\overline{DE}$, desde diferentes registros de representación, como el algebraico, tabular y gráfico.

(P5) **Pregunta 5:** De acuerdo con las condiciones que debe cumplir la plazoleta, explique por qué la gráfica Área vs Segmento $\overline{DE}$, no interseca a los ejes coordenados.

Tabla 54. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 5 (S2T3P5)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes afirman que la gráfica no interseca a los ejes coordenados porque para $\overline{DE} = 0$ y $\overline{DE} = 80$, no existiría plazoleta o su área sería cero.	13	59.1%
R2	Los estudiantes contestan de forma errónea, mencionando que los ejes coordenados son los puntos ubicados en los extremos del terreno y el segmento $\overline{DE}$ no tiene influencia en ellos.	6	27.2%
R3	El argumento que usaron los estudiantes no responde a la pregunta. Por ejemplo, “porque son puntos simétricos”	1	4.5%
R4	No la hicieron. No respondieron.	2	9%

De acuerdo con los resultados de la tabla 54, el 59.1% de los estudiantes menciona de forma correcta que según el contexto de la plazoleta, la gráfica no intercepta a los ejes coordenados, porque en los puntos (0,0) y (0,80) no existiría plazoleta o su área sería cero. El resto de los estudiantes no responde a la pregunta, ya sea porque lo hacen de errada, confusa o no la hacen.

Lo anterior implica que la mayoría de los estudiantes reconoce en la gráfica la existencia de un dominio o de ciertas restricciones asociadas a las condiciones de la plazoleta, que hacen que no se consideren los puntos $\overline{DE} = 0$ y $\overline{DE} = 80$, con sus respectivas ordenadas 0 y 0; como parte constitutiva del grafo de la función. Esto se evidencia a continuación.

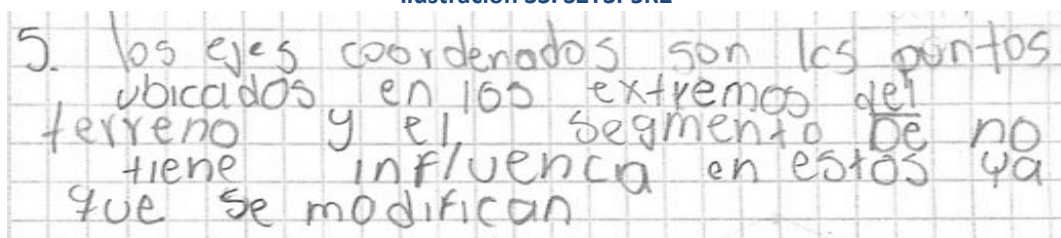
Ilustración 32. S2T3P5R1

S. por que el el punto 0 y 80 ya no hay plazoleta.

Los estudiantes afirman que la gráfica no intercepta a los ejes coordenados porque para $\overline{DE} = 0$ y $\overline{DE} = 80$ no existiría plazoleta o su área sería cero.

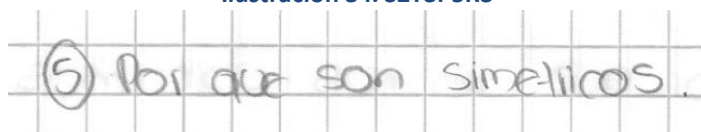
En las dos siguientes ilustraciones, se evidencia cómo a pesar de que la mayoría de estudiantes en las tareas 1 y 3 de la situación 1, había afirmado que el valor mínimo y máximo de la plazoleta era 0 y 80 respectivamente, y que no podía ser 92m o 94m; algunos todavía consideran la representación gráfica cartesiana como algo aislado del contexto de la plazoleta.

Ilustración 33. S2T3P5R2



5. los ejes coordenados son los puntos ubicados en los extremos del terreno y el segmento de no tiene influencia en estos ya que se modifican

Ilustración 34. S2T3P5R3



⑤ Por que son simetricos.

Esto denota que la sintaxis y la curva trazada por algunos estudiantes son consecuencia de una relación de correspondencia donde lo semántico no juega un papel importante. A pesar de que en preguntas anteriores han reconocido relaciones de dependencia y han analizado o reflexionado sobre el dominio de valores para el segmento DE, cuando trazan la gráfica cartesiana, no logran ver con facilidad la variación de dependencia entre magnitudes que se esconde en una curva estática trazada en el papel.

Es de aclarar que en la plenaria hubo mayor reflexión en torno a estas dificultades, de tal manera que estos pocos estudiantes lograron identificar relaciones de dependencia e inferencias sobre el dominio y rango a partir de la representación gráfica de la función *Área de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* .

(P6) **Pregunta 6:** Con lo trabajado hasta el momento ¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima? Explica tu respuesta.

Tabla 55. Tipos de respuestas a la situación 2 tarea 3 pregunta 6 (S2T3P6)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes manifiestan que para que el área sea máxima, el segmento $\overline{DE}$ debe ser 40m. Lo hacen soportándose en GeoGebra y con los cálculos realizados en las preguntas anteriores; algunos inclusive, mencionan que dicha área máxima es 3200m^2 .	21	95.5%
R2	El estudiante responde de manera confusa y sin coherencia con lo que se pregunta.	1	4.5%

De acuerdo con la información de la tabla 55, el 95.5% de los estudiantes responde de forma correcta a la pregunta, afirmando que para el área máxima, $\overline{DE}$ debe ser 40m. El resto, responde de forma confusa.

Esta respuesta no solo responde la pregunta 6, sino que es el punto de convergencia de todas las tareas de las situaciones 1 y 2.m. Esta respuesta, los estudiantes ya la sabían o intuían desde la situación 1, mediante el uso de GeoGebra y posteriormente con los cálculos realizados. Sin embargo, ésta se ha ido dilatando con la intención de que no respondieran la pregunta per se, sino que además hicieran conciencia de todos los cambios presentes en las variables implicadas y poder tener acercamientos importantes a los comportamientos asociados a las acciones mentales 1, 2 y 3.

Así pues, lo esperado en esta pregunta es que todos los estudiantes respondan acertadamente, pues en actividades y plenarias anteriores ya la mayoría de estudiantes hablaba de área máximas cuando $\overline{DE}=40\text{m}$. En contraste con lo anterior, hubo un estudiante que no dio respuesta a la pregunta de forma correcta.

Análisis general de la situación 2.

Varias investigaciones hablan de la importancia de que haya complementariedad entre los sistemas de representación algebraico, gráfico, tabular, sagital y verbal. De la *tarea 1*, es importante destacar el uso de otro tipo de representación, de carácter dinámico

(GeoGebra). Con este recurso, se hizo un acercamiento al estudio del comportamiento del cambio de las magnitudes involucradas, sin necesidad de recurrir a los sistemas de representación convencionales. Esta alternativa de estudiar las funciones ofrece una perspectiva distinta a la de las reglas de asignación o correspondencia; privilegiando una perspectiva desde la consideración de relaciones de dependencia. Esta situación se pone de manifiesto cuando los estudiantes perciben el cambio en las dimensiones de los lados y del área de la plazoleta como consecuencia de la variación o cambio de segmento $\overline{DE}$ a través del arrastre del punto E.

Si se observan los resultados de los estudiantes en la tarea 1 de la situación 2, se encuentra que un grupo significativo reconoce que hay cambios en las magnitudes implicadas para cuando se mueve el punto E sobre el segmento $\overline{DC}$, o sea que los estudiantes reconocen que las variaciones de la magnitud del área dependen de la variación del largo y el ancho, y que el comportamiento de estas dos magnitudes están relacionadas entre sí, es decir, que mientras aumenta la magnitud de una, la magnitud de la otra disminuye (o viceversa). Además, que la variación del largo y el ancho dependen de la variación o el cambio de posición del punto E.

Además de lo anterior, con los resultados de los estudiantes, se puede observar que estos logran acercarse al concepto de función desde el estudio de la variación y el cambio de magnitudes, teniendo en cuenta que por ser la tarea 1, una tarea donde se propone la exploración, todo acercamiento al concepto de función se da desde el punto de vista cualitativo, no entra en juego todavía el análisis cuantitativo del cambio de magnitudes que permita el estudio de la coordinación cuantitativa, razón por la cual, la mayoría de estudiantes, se puede situar en el nivel de razonamiento covariacional N2.

De otro lado, a pesar de contar con un recurso como GeoGebra, que además de modelar la situación, les brindaba valores cuantitativos, los estudiantes se inclinaron por identificar más características cualitativas del dominio de variación y del rango de variación de las magnitudes implicadas, por ejemplo, cuando se les preguntó cómo cambia el área, ningún estudiante mencionó que el rango de variación del área de la plazoleta estaba entre cero y

tres mil doscientos $(0,3200]$, así mismo, cuando se les indagó por el comportamiento de los lados de la plazoleta, ningún estudiante se atrevió a decir que el dominio de variación de estas magnitudes estaba entre $(0,80\sqrt{2})$, es decir, a pesar de contar con el registro tabular (Tarea 3, situación 1) los estudiantes tuvieron dificultad de escribir numéricamente los valores del dominio y del rango de variación, aunque de forma verbal y escrita, los estudiantes ya habían manifestado que no era posible tener valores para el segmento $\overline{DE}$ de 90m, 0m y 80m, ya sea porque estaban por fuera del dominio de variación o porque para estas dos últimos valores no existiría plazoleta.

Con lo mencionado parcialmente de las preguntas 1 a 3 y la pregunta 4 de la *tarea 2* de la situación 2, se puede afirmar que a pesar de que los estudiantes contaban con una tabla donde tenían el registro de valores numéricos para cada magnitud asociada a la plazoleta en relación con longitud del segmento $\overline{DE}$, no hicieron uso de esos valores para expresar o describir el cambio de esas magnitudes en correspondencia con los cambios en la medida del segmento. Esto implica que los estudiantes no lograron describir la variación entre magnitudes desde el punto de vista cuantitativo, es decir, no mostraron comportamientos asociados a la descripción de la acción mental 3, cuya descripción consiste en la coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable. Como resultado de lo mencionado, no es posible clasificar a los estudiantes en un Nivel 3 de razonamiento covariacional, puesto que no hay una coordinación cuantitativa. Los estudiantes, en su mayoría, de acuerdo a los resultados mostrados, manifestaron comportamientos asociados a la acción mental 2, por lo tanto, deben situarse de nuevo en el nivel de razonamiento covariacional N2 que sustenta sólo las acciones mentales 1 y 2.

En cuanto a los elementos matemáticos abordados, se puede afirmar que se trabajaron dos tipos de representaciones, el tabular y el algebraico. Del primero, se puede decir que fue el que más se privilegió en la tarea, sin embargo, el correcto manejo (desde la sintaxis) de este por parte de la mayoría de estudiantes, no evidenció que ellos pudieran ir más allá de los cálculos y poder caracterizar los cambios en términos de lo cuantitativo. Del segundo registro de representación, hay que aclarar que los estudiantes no tuvieron que modelar matemáticamente mediante alguna ecuación, la expresión general para calcular el área de la

plazoleta de acuerdo a un valor generalizado para la longitud del segmento $\overline{DE}$, dicha expresión se les sugirió validar o refutar cuando se les pedía mencionar la viabilidad de la afirmación de Luisa, arrojando respuestas correctas en cuanto al uso e interpretación de esa expresión algebraica, inclusive, durante la etapa de trabajo individual. Aun así, se les dificultó poder explicar el porqué de la simetría de los valores de la cantidad de superficie en torno al punto $\overline{DE} = 40\text{m}$.

En principio, en la etapa de trabajo individual y posteriormente, en la etapa de la plenaria, aunque la representación tabular asociada a la expresión algebraica que representaba el área de la plazoleta en función de la longitud del segmento $\overline{DE}$, permitía un acercamiento al concepto de función como una relación de correspondencia, terminó enfocándose como una relación de dependencia, en la medida en que se primó (en la plenaria) el poder desprenderse de la representación y poder caracterizar la dependencia y variación existente entre las variables o magnitudes involucradas. Esto, a su vez, permitió que los estudiantes caracterizaran la existencia de una variable independiente y otras dependientes, en la medida que dependen de la longitud del segmento $\overline{DE}$. Es menester aclarar, que estos acercamientos se lograron en la plenaria, cuando se orientó la discusión para que los estudiantes aun sin saber o recordar el concepto de función, de forma intuitiva se aproximaran a la comprensión de elementos asociados que subyacen a la comprensión del dicho concepto.

Los sistemas matemáticos de signos que denotaron los estudiantes, en primera instancia (en el trabajo individual), correspondieron a SMS de carácter aritméticos donde el cálculo del área y dimensiones de la plazoleta obedecieron a reemplazos de valores en una expresión algebraica y que no permitieron entender desde el principio, la complejidad de relaciones de dependencia existentes entre variables. Igualmente, los estudiantes (la mayoría) manifestaron dificultades en el manejo algorítmico de expresiones algebraicas, esto se vio reflejado cuando les cuesta hallar la expresión general para el área en función de la longitud del segmento $\overline{DE}$, cuando $m(\overline{DE}) = n$.

En la plenaria, hubo acercamientos importantes a la accesoión del concepto de función desde el reconocimiento de la dependencia. De esta manera, lo semántico adquirió relevancia, pues hubo mayor significación de lo que se representaba de forma simbólica. Asimismo, la mayoría de estudiantes en la parte del trabajo individual, y pocos después de la plenaria, mostraron tendencias cognitivas asociadas al poco trabajo que habían hecho con software dinámicos, en particular, con el uso de la prueba de arrastre, pues el movimiento del punto E, no era concebido como la causa de la representación de distintas plazoleas posibles, sino que el movimiento causaba la ilusión óptica de que la plazolea se movía y giraba tal como aparece en la última ilustración S2T2P4R2.

Con todo lo mencionado hasta el momento, se puede afirmar que, de acuerdo a los resultados de los estudiantes, el propósito de esta tarea 3 de la situación 2, se cumplió de forma parcial, ya que aunque en el trabajo individual mostraron dificultades, durante la plenaria hubo mayor acercamiento al propósito de la tarea, es decir, a la caracterización de los cambios de una variable en relación con otra, desde el punto de vista cuantitativo.

Retomando lo que se ha mencionado para cada grupo de preguntas de la tarea 3, se puede afirmar que en cuanto a los aspectos matemáticos asociados al concepto de función que los estudiantes pudieron trabajar están: Dominio, Rango, máximos y mínimos relativos, relación inyectiva, regla de asignación y dependencia entre variables.

La caracterización que se hace a continuación es consecuencia de lo que los estudiantes han trabajado de forma individual y durante la plenaria. Igualmente, la información y análisis corresponde a los resultados que la mayoría de los estudiantes presentó.

Los estudiantes, de forma correcta, lograron caracterizar el dominio y rango de una función, esto se vio reflejado cuando mencionaban que los valores para el eje horizontal tenían sentido si estaban entre 0 y 80m, exceptuando estos extremos, tal como se mencionó anteriormente. Asimismo, hubo alusión explícita al hecho de que el área estaba entre 0m y 3200m y que no podía ser cero porque no habría plazolea. Esto, sobretodo en la plenaria, cuando se les indagaba de forma adicional.

Igualmente, al expresar que la gráfica *Área de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* , no puede interceptar los ejes coordenados, se hace evidente la contemplación por parte de ellos sobre ciertas restricciones asociadas según el contexto.

En las tareas de la situación 1, los estudiantes lograron identificar valores mínimos y máximos en los dominios y rangos para relaciones lineales como por ejemplo en el *Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* , donde la relación uno a uno permitía asociar un elemento del intervalo $(0,80)$ con uno del intervalo $(0,80\sqrt{2})$ y donde los valores extremos de un intervalo estaban asociados con los del otro. Ahora, en la tarea 3 de la situación 2, donde la relación es cuadrática, en los intervalos $(0,80)$ y $(0,3200]$, los valores extremos 80m y 3200m^2 no están directamente relacionados según las condiciones, pues cuando DE es 80m no es posible plazoleta alguna, el área sería cero.

Así pues, los estudiantes tuvieron acercamientos importantes a lo que caracteriza una función uno a uno (inyectiva), pues en la situación 1 ya ellos habían asociado para cada valor de $\overline{DE}$, uno y sólo un valor para el largo o ancho de la plazoleta. Ahora, en la gráfica de la expresión general del área, reconocen que para cada valor de área posible que está en el intervalo $(0,3200]$, existen dos valores distintos de $\overline{DE}$ entre 0 y 80m . Situación que pone de manifiesto la entrada a poder caracterizar elementos (imágenes de una función) que tienen dos pre-imágenes y no lo contrario.

El hecho de que reconozcan que cuando $\overline{DE}$ es 40m , se presenta la mayor área posible para la plazoleta, genera la partición de la gráfica en dos momentos: cuando es creciente y cuando es decreciente, teniendo como punto crítico, el vértice que previamente ya han identificado. Como consecuencia, la asociación visual de acuerdo a la forma de la gráfica, en cuanto a lo que representa un máximo (el vértice) y un mínimo (los puntos $(0,0)$ y $(80,0)$) relativos, coincide con la analogía que hay con el contexto, pues para los estudiantes, el máximo y los mínimos de la gráfica representan, según el contexto y para determinados valores de $\overline{DE}$, el área máxima de la plazoleta y cuando el área de la plazoleta es cero, respectivamente.

Justamente, hablando del vértice, hubo un reconocimiento de la relación de dependencia entre magnitudes, pasando por la caracterización de una variable independiente y otra dependiente. Esto es evidente cuando mencionan que hay cambios de y como consecuencia de cambios en x , es decir, cambios en el área de la plazoleta en función de cambios en la longitud del segmento $\overline{DE}$.

La regla de asignación estuvo pautaada por el uso de la expresión algebraica para el área en términos de x , siendo x la medida del segmento $\overline{DE}$. Esta expresión fue validada a través de la tabulación y resultados sin el uso de dicha expresión, así como también a través de la exploración y verificación que permitía el uso de GeoGebra.

De otro lado, el propósito de la tarea 3 es el tratamiento de varios sistemas de representación: dinámico (GeoGebra), tabular (tablas), algebraico, lenguaje natural y registro gráfico. Por esta razón es fundamental poder caracterizar el comportamiento de los estudiantes en torno al manejo y uso de estos sistemas. Tal como ya se mencionó antes, el registro tabular es el que mayoritariamente domina, gracias a los esquemas de uso que ya poseen de él, siendo este, consecuencia de la manipulación de una expresión algebraica. En el caso particular de esta representación algebraica, es menester aclarar que los estudiantes no tuvieron que matematizar o modelar la expresión algebraica que representaba al área en función del segmento $\overline{DE}$. Dicha expresión se les propuso para que la validaran y una vez lo hicieran pudieran seguir usándola. Así pues, hay relativa coordinación entre los dos registros de representación mencionados. Sin embargo, esto no parece tan claro cuando los estudiantes deben pasar al registro gráfico, pues como ya se mencionó antes, en la gráfica hubo dificultades para poder garantizar y explicar la continuidad del trazo entre dos puntos consecutivos distinguidos por tener valores enteros múltiplos de 10 en la componente de la abscisa. Es decir, pese a que ya identificaban, como característica de la gráfica, que habían puntos simétricos respecto a la recta $x = 40m$ (aunque no citan de forma explícita esta ecuación), en la parte individual no pudieron dar cuenta de ello, sólo en la plenaria lo logró ver la mayoría. Esto, pone de manifiesto que no hubo una visión sistémica para el

tratamiento de valores del segmento $\overline{DE}$, desde diferentes registros de representación, como el algebraico, tabular y gráfico.

Lo anterior se reafirma al evidenciarse poco aprovechamiento de GeoGebra en la interpretación y dinamización de la representación gráfica que se construyó a lápiz y papel. Esto se ve reflejado en las respuestas proporcionadas a las siguientes preguntas

- De acuerdo con la forma de la gráfica, describa como cambia el área a medida que cambia el segmento n .
- De acuerdo con la gráfica ¿Para qué valores de n , el área de la plazoleta es 2622m^2 ?
- De acuerdo con las condiciones que debe cumplir la plazoleta, explique por qué la gráfica Área vs Segmento $\overline{DE}$, no intersecta a los ejes coordenados.

Si hubiera habido mayor coordinación de la información abstraída y proporcionada por el software; con la información que se lograba concretar en otras representaciones (la tabular, algebraica y gráfica); los resultados de los estudiantes se hubieran acercado en mayor cuantía a las respuestas esperadas.

En cuanto a los sistemas matemáticos de signos, los estudiantes, pese a manejar las generalidades de la estructura procedimental de realizar una tabulación y ubicar coordenadas en el plano cartesiano, mostraron dificultades en la sintaxis asociada a la convención usada para la escritura de una coordenada, pues confundían el lugar de la abscisa y la ordenada, además de la notación y uso del paréntesis. Lo cual denota una tendencia cognitiva que independientemente de la sintaxis, los lleva a una memoria de trabajo en relación con ciertos cálculos, algoritmos de reemplazo aritmético y ubicación espacial en un sistema de referencia. Igualmente, hubo una tendencia cognitiva de poder completar el grafo de la función área de la plazoleta de tal manera que tuviera un máximo (vértice), tendencia que pudieron sustentar a partir de la relación de dependencia cuantitativa entre variables, en especial cuando $\overline{DE}$ es 40m, implicando la consideración del punto (40, 3200) como parte de la gráfica, aunque no estuviera predeterminado en la tabla de datos que se llenó en la tarea 2 de la situación 2.

Las respuestas dadas por los estudiantes, reflejan comportamientos caracterizados por la manifestación de la consciencia de la cantidad de cambio de un valor de salida mientras se consideran cambios en un valor de entrada, esto se hizo manifiesto cuando fueron capaces de analizar de forma cuantitativa la información proporcionada por la gráfica en relación con las condiciones de cambio y variación del contexto de la plazoleta. De esta manera, muestran comportamientos asociados a la acción mental 3. Y como consecuencia se puede clasificar a la mayoría de estudiantes en un nivel de razonamiento covariacional N3, que sustenta las acciones mentales AM1, AM2 y AM3. En este orden de ideas, se puede concluir en la mayoría de estudiantes una imagen de covariación de coordinación cuantitativa entre dos variables o magnitudes relacionadas, como consecuencia de poder caracterizar el cambio (AM1) y poder describir o coordinar la dirección de cambio de una variable con los cambios en la otra variable (AM2).

De forma paralela, los resultados arrojados por las respuestas de los estudiantes, permite afirmar que, han mostrado avances en el desarrollo del pensamiento variacional, en particular, con el mismo estándar básico (dentro de dicho tipo de pensamiento) que se contempló para la situación 1:

El trabajo con el siguiente estándar *Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas*, se hizo de forma parcial, pues no se hizo énfasis en cómo los parámetros de una ecuación algebraica puede influir en la forma y comportamiento de una representación gráfica cartesiana. El trabajo realizado por los estudiantes estuvo enfocado en la identificación de ciertas propiedades de las gráficas asociados a ciertos patrones de cambio.

Finalmente, se puede aseverar que el objetivo de la tarea 3 de la situación 2 se cumplió, puesto que lo que se tenía presupuestado que pasara con los estudiantes en cuanto a sus razonamientos y respuestas, se llevó a cabo en gran porcentaje. Esto se ve reflejado en el hecho de haberlos podido clasificar (a la mayoría) en el nivel 3 de razonamiento covariacional, y que la respuesta a la pregunta: “*Con lo trabajado hasta el momento ¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima? Explica*

tu respuesta”, haya sido contestada de forma correcta por el 95.5% de ellos. Aunque la respuesta a esta pregunta, ya había sido considerada implícitamente en tareas anteriores, en este momento fue donde hubo mayor conciencia de ella.

3.2.4 Resultados y análisis de la situación 3

(S3)**Situación 3:** Observando otras variaciones.

(T1)**Tarea 1:** Razón de cambio - El cambio de los cambios (relación lineal)

(P1) **Pregunta 1:** Teniendo en cuenta la Gráfica 1 que corresponde al *Largo de la plazoleta ($\overline{FH}$) vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* . Toma dos puntos de los referenciados en la gráfica, y a partir de los valores de sus coordenadas:
a. Determina cuál es la diferencia entre las dos abscisas, es decir, tomando como referencia el eje x , qué tanto están separados los puntos que tomaste. Explica cómo determinaste esta diferencia.

Tabla 56. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 1a (S3T1P1a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden de forma correcta, escogiendo dos puntos arbitrarios y mencionando que la diferencia de abscisas la encontraron de acuerdo a la escala que proporciona la gráfica 1, determinando cuanto le falta a la menor para llegar a la mayor, o la mayor en cuanto excede a la menor. <i>*(R1' puntos no consecutivos y R1 puntos consecutivos)</i>	21	95.5%
R2	Los estudiantes escogen dos puntos arbitrarios, pero al hablar sobre la diferencia de abscisas, no lo hacen comparándolas en términos de los puntos escogidos, sino que hallan la diferencia de cada abscisa respecto al origen	1	4.5%

b. Determina cuál es la diferencia entre las dos ordenadas, es decir, tomando como referencia el eje y , qué tanto están separados los puntos que tomaste. Explica cómo determinaste esta diferencia.

Tabla 57. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 1b (S3T1P1b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden de forma correcta, escogiendo dos puntos arbitrarios y mencionando que la diferencia de las ordenadas la encontraron de acuerdo a la escala que proporciona la gráfica 1, determinando cuánto le falta a la menor para llegar a la mayor, o la mayor en cuánto excede a la menor. Además, se refiere a la diferencia de abscisas y ordenadas como Δx y Δy , respectivamente. Las cuales, posteriormente las comparan como un cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, y finalmente, hallan una expresión general para ese cociente $\frac{x\sqrt{2}}{x}$	1	4.5%
R2	Los estudiantes responden de forma correcta, escogiendo dos puntos arbitrarios y mencionando que la diferencia de las ordenadas la encontraron de acuerdo a la escala que proporciona la gráfica 1, determinando cuanto le falta a la menor para llegar a la mayor, o la mayor en cuanto excede a la menor.	13	59.1%
R3	Los estudiantes escogen dos puntos arbitrarios y mencionan que la diferencia de las ordenadas la encontraron de acuerdo a la escala que proporciona la gráfica 1, determinando cuanto le falta a la menor para llegar a la mayor, o la mayor en cuanto excede a la menor. Pero la diferencia no está en términos de raíz cuadrada de dos. Por ejemplo para las ordenadas $20\sqrt{2}$ y $30\sqrt{2}$ mencionan que la diferencia es 10.	8	36.4%

(P2) **Pregunta 2:** Repite este procedimiento cuatro veces más para parejas distintas de puntos de los referenciados en la gráfica. Explica tus procedimientos.

Tabla 58. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 2 (S3T1P2)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden de forma correcta, escogiendo cuatro pares de puntos arbitrarios y mencionando que la diferencia de abscisas y diferencia entre ordenadas la encontraron de acuerdo a la escala que proporciona la gráfica 1, determinando cuanto le falta a la menor para llegar a la mayor, o la mayor en cuanto excede a la menor. <i>*(la diferencia siempre la tomaron como positiva)</i>	21	95.5%
R2	Los estudiantes sólo repiten el procedimiento para una pareja de puntos adicionales	1	4.5%

(P3a) **Pregunta 3a:** Teniendo cuenta cada pareja de puntos escogidos y las diferencias entre sus abscisas y sus ordenadas completa la siguiente tabla

Coordenadas de la pareja de puntos	Diferencia de abscisas Δx	Diferencia de ordenadas Δy	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Tabla 59. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 3a (S3T1P3a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes completan de forma correcta la tabla, retomando las cinco parejas de puntos que ya han trabajado en las preguntas una y dos.	17	77.3%
R2	Los estudiantes completan de forma correcta la tabla, retomando las cinco parejas de puntos que ya han trabajado en las preguntas una y dos. Pero en la última columna (la del cociente), tienen errores al expresar el cociente, por ejemplo ponen $\frac{30\sqrt{2}}{1}, \frac{70\sqrt{2}}{1}$ etc. Hay un caso especial donde se pone, por ejemplo, $\frac{70}{70\sqrt{2}}$ y al simplificar le da $\frac{2\sqrt{}}{1}$.	4	18.2%
R3	Estudiantes que no completan la tabla totalmente, sólo lo hacen para la primera fila y en el cociente ponen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ como resultado de haber simplificado $\frac{20}{20\sqrt{2}}$	1	4.5%

De acuerdo con los resultados de la tabla 56, el 95.5% de los estudiantes responde de forma correcta al hallar la diferencia de abscisas entre en dos puntos escogidos. El resto halla la diferencia de forma errónea.

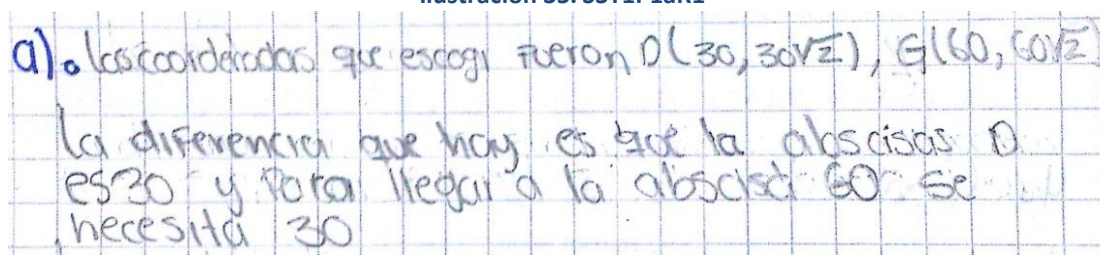
De acuerdo con la tabla 57, el 100% de los estudiantes calcula la diferencia de ordenadas reconociendo que hay que hacer una resta del mayor respecto al menor, sin embargo, el 36.4% de ellos tiene dificultades al hacer dicha diferencia, pues restan las cantidades sin tener en cuenta el $\sqrt{2}$.

Ahora, según la tabla 58, el total de los estudiantes repite de forma correcta el procedimiento para cuatro pares de puntos adicionales, excepto un 4.5% que sólo lo hace para una pareja adicional de puntos.

Teniendo en cuenta la tabla 59, el 4.5% de los estudiantes responde de forma errónea e incompleta, mientras que el 95.5% de los estudiantes responde de forma correcta llenando completamente la tabla. Sin embargo, de este último grupo, el 19% tuvo dificultades al expresar el cociente en la última columna de la tabla.

De acuerdo con los resultados de las preguntas 1 a la 3a, se puede observar cómo los estudiantes, en su mayoría, realizan de forma correcta la diferencia entre abscisas y ordenadas para dos puntos determinados. Para esto, toman en consideración las dos cantidades a diferenciar y calculan siempre la diferencia positiva. Aquí llama la atención cómo la mayoría tomó puntos consecutivos, mientras que los otros tomaron puntos no necesariamente consecutivos.

Ilustración 35. S3T1P1aR1

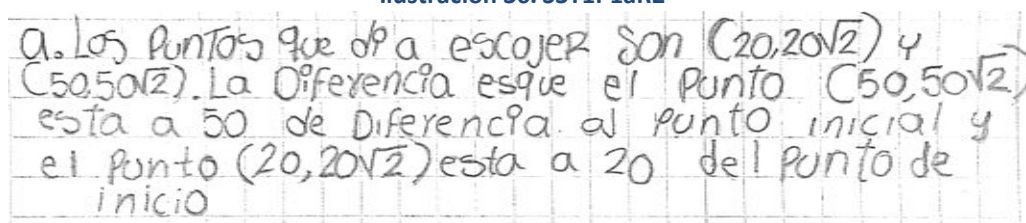


a). las coordenadas que escogi fueron D(30, $30\sqrt{2}$), G(60, $60\sqrt{2}$)
La diferencia que hay es que la abscisa D es 30 y para llegar a la abscisa 60 se necesita 30

En esta ilustración anterior se nota cómo algunos estudiantes rompen con las tendencias cognitivas de considerar dos puntos consecutivos referenciados, mostrando, inclusive, el dominio de conceptos o conocimientos adquiridos en la academia acerca de cómo calcular la pendiente de una recta.

Asimismo, llama la atención el caso de una estudiante que cuando fue a diferenciar las abscisas, de forma errónea, tomó la diferencia entre cada abscisa y el origen del plano cartesiano; tal como se observa en la ilustración que sigue

Ilustración 36. S3T1P1aR2



a. Los puntos que se escogen son (20, $20\sqrt{2}$) y (50, $50\sqrt{2}$). La diferencia es que el punto (50, $50\sqrt{2}$) esta a 50 de diferencia al punto inicial y el punto (20, $20\sqrt{2}$) esta a 20 del punto de inicio

Situación que pone de manifiesto que hubo dificultades con la comprensión del enunciado de la pregunta. Vale la pena resaltar que este error no lo comete cuando debe hallar la

diferencia de ordenadas, lo cual, sumado a lo que se hizo en la plenaria, hace suponer que este error no es sistemático. Al igual que en esta estudiante, hubo evidencia de dificultades que tuvieron algunos estudiantes cuando se les pedía hallar la diferencia de ordenadas, tal como se muestra a continuación, donde algunos estudiantes tuvieron dificultades con los SMS, que se supone, ya deberían manejar bien. A continuación se muestra cómo para la pregunta 1b, los estudiantes clasificados en el tipo de respuesta R3, tienen dificultades con los SMS

Ilustración 37. S3T1P1bR3

b) la diferencia entre estas dos ordenadas es de 10, de $20\sqrt{2}$ a $30\sqrt{2}$ Faltan 10.

Aquí es evidente la falta de manejo algorítmico de expresiones con radicales. Esto también se ve reflejado en pocos estudiantes que no reconocen en el símbolo de radicación la posibilidad de poder expresar una cantidad numérica en términos de dicho símbolo, tal como se ilustra en lo que viene

Ilustración 38. S3T1P3aR2

Pese a estas dificultades mencionadas (las cuales fueron reflejadas en la minoría de estudiantes), se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes responde bien a esta primera parte de la tarea, que tenía como propósito, que los estudiantes logaran expresar el cambio cada una de las variables involucradas (largo de la plazoleta y longitud del segmento $\overline{DE}$), de forma independiente, cada una por aparte; es decir, sin observar cómo son los cambios de una respecto a los cambios en la otra. Dicho cambio fue orientado a que se expresara en términos de la diferencia de un par de valores en cada variable, lo cual resultó en que los estudiantes consideraran la resta como insumo principal para describir el cambio que ocurría de un valor a otro.

Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	
$\frac{20m}{20\sqrt{2}m}$	$\frac{2\sqrt{}}{1}$
$\frac{10m}{10\sqrt{2}m}$	$\frac{2\sqrt{}}{1}$
$\frac{20m}{10\sqrt{2}m}$	$\frac{2\sqrt{}}{1}$
$\frac{50m}{50\sqrt{2}m}$	$\frac{2\sqrt{}}{1}$
$\frac{20m}{30\sqrt{2}m}$	$\frac{2\sqrt{}}{1}$

De esta manera, lograron reconocer el cambio en cada variable, pero lo hacen de forma aislada para cada una, lo cual implicó que, aunque calcularon la diferencia de ordenadas y

abscisas para un mismo par de puntos, la dirección del cambio no estaba inmersa en la consideración de ese cambio. Dicho en otras palabras, la diferencia la calculaban, indiscriminadamente para ordenadas y abscisas, de tal manera que siempre diera positiva. Evidencia de ello se muestra a continuación.

Ilustración 39. S3T1P2R1

2. $B = (10, 10\sqrt{2})$ $D = (30, 30\sqrt{2})$
 Abscisas = 20 ordenada $20\sqrt{2}$

Para hallar la abscisa y la ordenada sumamos la diferencia que había entre B y D

$D = (30, 30\sqrt{2})$ $E = (40, 40\sqrt{2})$
 Abscisas = 10 ordenada = $10\sqrt{2}$

Para hallar la abscisa y la ordenada sumamos la diferencia que había entre D y E

$B = (10, 10\sqrt{2})$ $E = (40, 40\sqrt{2})$
 Abscisas = 30 ordenada = $30\sqrt{2}$

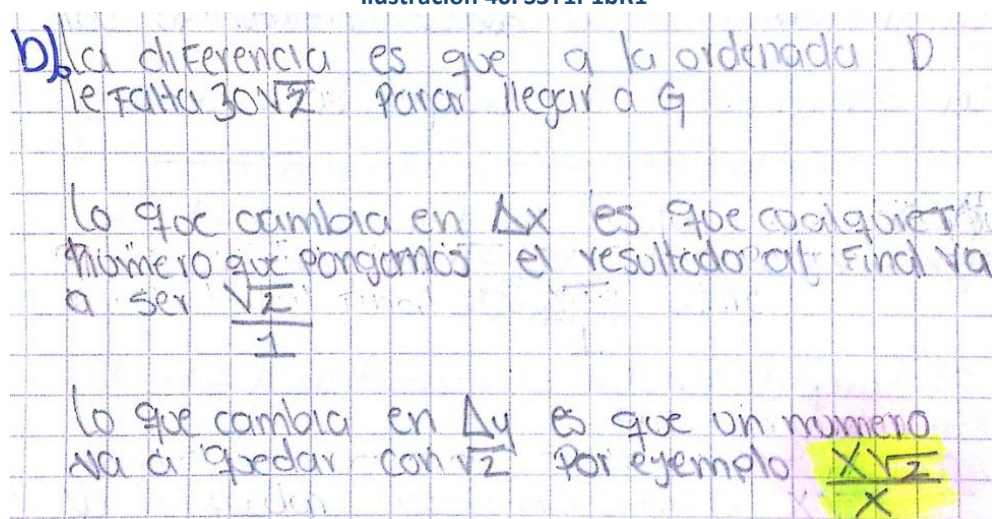
Para hallar la abscisa y la ordenada sumamos la diferencia que había entre B y E

Este comportamiento se vio reflejado en la mayoría de estudiantes, cuando para hallar la diferencia entre abscisas de un par de puntos A y B, lo hacen en el sentido $\overrightarrow{AB}$, es decir, a la abscisa del punto B le restan la abscisa del punto A; sin embargo, para la diferencia de ordenadas lo hacen en sentido contrario, el sentido $\overleftarrow{AB}$.

Cuando se les pide calcular el cociente de las diferencias de cada variable, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, los estudiantes lo que hacen es reemplazar el numerador y denominador por cada uno de los valores que ya habían calculado con anticipación, las diferencias o cambios en cada variable, de forma aislada. Sin embargo, hasta el momento, según el desarrollo de la tarea, para los estudiantes, este cociente solo representa una cantidad numérica que todavía no significa algo respecto a la relación de cambio entre las dos variables. Aun así, hubo un

caso que llamó la atención en cuanto al nivel de generalización para expresar dicho cociente:

Ilustración 40. S3T1P1bR1



En esta ilustración se muestra cómo para valores del segmento DE, generaliza la expresión del cociente como $\frac{x\sqrt{2}}{x}$. Este tipo de comportamiento da cuenta de cómo la estudiante presenta acercamientos importantes a la forma en que varían los cambios de una variable en términos de los cambios de la otra, pues se está caracterizando la correspondencia, al hallar la expresión del término n-ésimo. Este caso, es rescatable en la medida en que fue algo que no se le propuso a la estudiante que hiciera, según las consignas de la tarea. Es claro que aquí todavía no se puede hablar de haber capturado la covariación.

(P3b) **Pregunta 3b:** De acuerdo a los resultados en la última columna describe el comportamiento de los cambios en Δy respecto a los correspondientes cambios en Δx .

Tabla 60. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 3b (S3T1P3b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes manifiestan que para cambios iguales en x hay cambios iguales en y	1	4.5%
R2	Los estudiantes manifiestan que el cociente es constante, siempre es el mismo	2	9%
R3	Los estudiantes relacionan Δx y Δy manifestando que por cada unidad que cambia en Δx hay un cambio de $\sqrt{2}$ unidades en Δy	5	22.7%
R4	Con lo que mencionan los estudiantes, no responden a la		

	pregunta. Lo que hacen es describir el procedimiento seguido para calcular el cociente.	3	13.6%
R5	Estudiantes que no respondieron a la pregunta o No la hicieron.	11	50%

(P4) **Pregunta 4:** Teniendo en cuenta el contexto de la plazoleta, si el segmento $\overline{DE}$ cambia en una unidad, entonces describe cómo es el cambio en el largo de la plazoleta ($\overline{FH}$)

Tabla 61. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 1 pregunta 4 (S3T1P4)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes mencionan que por cada unidad en $\overline{DE}$, el largo de la plazoleta ($\overline{FH}$) cambia $\sqrt{2}$ unidades. De otro lado, tres estudiantes no hablan de cambios por unidad, sino por decena.	10	45.5%
R2	Los estudiantes mencionan que por cada unidad en el eje x se avanza $\sqrt{2}$ unidades en el eje y . No responden en términos del contexto de la plazoleta.	2	9%
R3	Los estudiantes menciona argumentos confusos que no apuntan al sentido de la pregunta	4	18.2%
R4	Estudiantes que no respondieron a la pregunta o No la hicieron.	6	27.3%

De acuerdo con los resultados de la tabla 60, el 27.2% de los estudiantes menciona de forma correcta el comportamiento de los cambios en Δy respecto a los correspondientes cambios en Δx . Mientras que el 9% hace referencia a que el cociente es constante pero no hablan sobre los cambios en Δy respecto a los correspondientes cambios en Δx . El resto, el 63.6%, no responde a la pregunta ya sea porque sólo describen cómo obtuvieron el cociente o porque no la hacen.

Observando la tabla 61, el 54.5% de los estudiantes contesta de forma correcta a la pregunta 4; el resto no responde o lo hace de forma confusa. Del primer grupo hay un 16.7% que responde de acuerdo a lo contemplado en la tabla o gráfica *Largo de la plazoleta vs $\overline{DE}$* , pero no de acuerdo al contexto de las condiciones de la plazoleta.

Es importante aclarar que la pregunta 3b, quedó un tanto escondida en el texto (como si fuera un pie de tabla de la pregunta anterior), de tal manera que no se notó como tal y

parecía más un comentario. Esto influyó en el alto índice de estudiantes que no contestaron. En la socialización se notó que los estudiantes sí dieron cuenta en gran porcentaje de la respuesta correcta.

Aproximadamente el 50% de los estudiantes responde a la pregunta, manifestando de forma correcta los cambios en y respecto a los cambios en x y posteriormente, relacionando el cociente de dichos cambios con las condiciones del contexto de la plazoleta.

Los estudiantes, en su mayoría (después de la plenaria), fueron capaces de reconocer en Δx y Δy , mediciones de cambios en cada variable; y a su vez, pudieron relacionar la forma en que cambia una variable con la forma en que cambia la otra

Ilustración 41. S3T1P3bR1

3 Podemos observar que por cada espacio que se corre en Δx , se corre a igual posición en el Δy . es decir: $\Delta x = 20m$ a $30m$ hay $10m$ y en Δy $20\sqrt{2}$ a $30\sqrt{2}$ hay $10\sqrt{2}$. Por tanto, por cada medida que se aumenta en el Δx , se aumenta otra en el Δy

Se nota cómo en esta respuesta (ilustración anterior), sin necesidad de aludir a lo cuantitativo explícito, se expresa la dirección del cambio entre ambas variables y se cuantifica en términos de una medida generalizada tomada como unidad de cambio “para cambios iguales en x hay cambios iguales en y ”. Sin embargo, no responden a la pregunta, pues se pide describir el comportamiento de los cambios en Δy respecto a los correspondientes cambios en Δx . La respuesta más cercana fue afirmar que el cociente siempre es el mismo, pero no se hace énfasis en que tanto Δx como Δy son constantes.

Antes de la plenaria, se notó cómo algunos estudiantes tenían dificultades con la diferenciación entre la magnitud y el cambio de dicha magnitud. En otras palabras, la pregunta tiene como intención que el estudiante compare los cambios, es decir, los cambios en Δx y Δy , pero estos estudiantes lo que hacen es comparar los cambios en x y en y , y responder en términos de Δx y Δy . Tal es el caso que se muestra a continuación.

Ilustración 42. S3T1P3bR3

③ que por cada cambio de 10 unidades en el eje x hay un cambio de 20 unidades en el eje y

De otro lado, cuando les correspondió relacionar la comparación de dichos cambios (los de una variable en términos de la otra) con el contexto de la plazoleta, tuvieron un grado aceptable de acierto.

Ilustración 43. S3T1P4R1

4R11 $\Delta y = \frac{40\sqrt{2} - 60\sqrt{2}}{40 - 60} = \frac{20\sqrt{2}}{20}$
 Δx
 R11 Por cada 20 cambios en el eje x (DE) hay $20\sqrt{2}$ cambios en el eje y (FH)
 O sea que por cada cambio en el eje x hay $\sqrt{2}$ cambios en el eje y

Sólo en algunos casos se insistía en seguir hablando de x y y , sin interpretar o aterrizar el significado de esas variables en términos de la plazoleta.

(S3)**Situación 3:** Observando otras variaciones.

(T2)**Tarea 2:** Razón de cambio - El cambio de los cambios (relación cuadrática)

La Gráfica 2 que corresponde al Área de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$, se obtuvo de la Situación 2 sobre el área máxima de la plazoleta. A partir de dicha grafica responde las siguientes preguntas:

(P1)**Pregunta 1:** Teniendo en cuenta todas las posibles parejas de puntos consecutivos referenciados en la Gráfica 2, calcula las diferencias entre sus abscisas y sus ordenadas.

Con la información anterior completa la siguiente tabla

Coordenadas de la pareja de puntos	Diferencia de abscisas Δx	Diferencia de ordenadas Δy	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Tabla 62. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 1 (S3T2P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes completan de forma correcta la tabla. Para hallar la diferencia entre abscisas y ordenadas para cada par de puntos, restaron las del punto final menos las del punto inicial, de acuerdo al orden alfabético y posicional referenciado en la gráfica. De esta manera obtuvieron diferencias negativas cuando y_2 y x_2 eran menores que y_1 y x_1 , respectivamente.	13	59.1%
R2	Los estudiantes completan de forma correcta la tabla, y para ello, encuentran la diferencia entre abscisas y ordenadas y esta diferencia la expresan como el valor absoluto, es decir, para los puntos E hasta I, la diferencia de abscisas la hacen de derecha a izquierda, según la ubicación de los puntos (y orden alfabético), y la diferencia de ordenadas la hacen de izquierda a derecha.	9	40.9%

De acuerdo a los resultados de la tabla 62, el total de los estudiantes completaron de forma correcta la tabla y de ellos el 40.9% tuvo en cuenta el valor absoluto de las diferencias.

En estos resultados, es fundamental centrar la atención en la forma en que los estudiantes hallaron las diferencias entre abscisas y ordenadas, pues aunque la mayoría de ellos determinaron dicha diferencia de forma correcta teniendo en cuenta la dirección, algunos de ellos no lo hicieron así. Estos últimos, consideraron el valor absoluto de esas diferencias, de tal manera que no discriminaban ni tenían en cuenta que la dirección en que hacían la resta fuera la misma tanto para abscisas como para ordenadas. A continuación se ilustra una de esas respuestas.

Ilustración 44. S3T2P1R2

a. Con la información anterior completa la siguiente tabla

Coordenadas de la pareja de puntos	Diferencia de abscisas Δx	Diferencia de ordenadas Δy	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
A(0,0) B(10,1400)	10	1400	$\frac{1400}{10} = \frac{140}{1}$
B(10,1400) C(20,2400)	10	1000	$\frac{1000}{10} = \frac{100}{1}$
C(20,2400) D(30,3000)	10	600	$\frac{600}{10} = \frac{60}{1}$
D(30,3000) E(40,3200)	10	200	$\frac{200}{10} = \frac{20}{1}$
E(40,3200) F(50,3000)	10	200	$\frac{200}{10} = \frac{20}{1}$
F(50,3000) G(60,2400)	10	600	$\frac{600}{10} = \frac{60}{1}$
G(60,2400) H(70,1400)	10	1000	$\frac{1000}{10} = \frac{100}{1}$
H(70,1400) I(0,0)	10	1400	$\frac{1400}{10} = \frac{140}{1}$

En estos pocos estudiantes, que representan el tipo de respuesta R2, según la última tabla, no están teniendo en cuenta la dirección del cambio, ya que conservando el mismo sentido para hacer la diferencia en las abscisas y las ordenadas, se puede llegar a obtener diferencias negativas y diferencias positivas.

En esta pregunta, la contemplación de una variación negativa es clave, pues la gráfica tiene un comportamiento creciente y decreciente en su representación, aspecto que es útil para poder entender e interpretar el comportamiento general de los cambios.

(P2a)Pregunta 2a: Teniendo en cuenta el siguiente ejemplo (Grafica 3), ubica los distintos Δx y Δy en la Gráfica 2

Tabla 63. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 2a (S3T2P2a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes representan de forma correcta (de acuerdo al ejemplo dado), para cada par de puntos consecutivos, los respectivos Δx y Δy , incluyendo en dicha representación sus direcciones; Para Δx siempre hacia la derecha, para Δy hacia arriba cuando $0 \leq \overline{DE} \leq 40m$, y hacia abajo, cuando $40 \leq \overline{DE} \leq 80m$.	15	68.2%
R2	Los estudiantes representan de forma correcta (de acuerdo al ejemplo dado), para cada par de puntos consecutivos, los respectivos Δx y Δy , pero en dicha representación no incluyen sus direcciones.	5	22.7%
R3	Los estudiantes representan de forma correcta (de acuerdo al ejemplo dado), para cada par de puntos consecutivos, la mayoría de los respectivos Δx y Δy , incluyendo en dicha representación sus direcciones; Para Δx siempre hacia la derecha, para Δy hacia arriba cuando $0 \leq \overline{DE} \leq 40m$, y hacia abajo, cuando $40 \leq \overline{DE} \leq 80m$. Tuvieron error en algún Δx o Δy .	2	9.1%

(P2b).Pregunta 2b: Si en la Gráfica 2, $\overline{DE}$ aumenta entre 0 y 80m, explica por qué Δx siempre es 10m.

Tabla 64. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 2b (S3T2P2b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden de forma correcta mencionando que Δx siempre es 10 porque en los puntos consecutivos tomados las abscisas varían de 10 en 10m.	10	45.5%

R2	Los estudiantes no responden a la pregunta, lo que hacen es afirmar que Δx siempre es 10, pero no explican por qué sucede.	4	18.2%
R3	Los estudiantes mencionan argumentos confusos que no apuntan al sentido de la pregunta	4	18.2%
R4	Los estudiantes responden de forma errónea, confundiendo ordenadas con abscisas, hasta el punto de considerar la suma de ellas.	2	9.1%
R5	No la hicieron. No respondieron.	2	9.1%

(P3a)Pregunta 3a: Para los puntos A, B, C, D y E de la Gráfica 2 describe cómo son los cambios en la ordenadas, y los cambios en Δy .

Tabla 65. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 3a (S3T2P3a)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden correctamente afirmando que el valor de las ordenadas aumenta, mientras los valores de Δy disminuyen. Para ello, la mayoría extrae las dos columnas de la tabla de la pregunta 1, y observan el comportamiento de y y Δy . Además de lo anterior mencionan que el cambio en las ordenadas es que aumentan pero cada vez aumentan menos.	1	4.5%
R2	Los estudiantes responden correctamente afirmando que el valor de las ordenadas aumenta, mientras los valores de Δy disminuyen. Para ello, la mayoría extrae las dos columnas de la tabla de la pregunta 1, y observan el comportamiento de y y Δy . Además, tratan de establecer relaciones entre los valores de las ordenadas y los valores de Δy , por ejemplo: “si y aumenta de 1400 a 2400 Δy es 1000 que es justamente la diferencia entre las ordenadas”	3	13.6%
R3	Los estudiantes responden correctamente afirmando que el valor de las ordenadas aumenta, mientras los valores de Δy disminuyen. Para ello, la mayoría extrae las dos columnas de la tabla de la pregunta 1, y observan el comportamiento de y y Δy .	17	77.3%
R4	Los estudiantes responden de forma incorrecta. Uno de ellos incluso, habla de los cambios en Δx en relación con los cambios en Δy , de forma errónea.	1	4.5%

(P3b)Pregunta 3b: Para los puntos E, F, G, H e I de la Gráfica 2 describe cómo son los cambios en la ordenadas, y los cambios en Δy .

Tabla 66. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 3b (S3T2P3b)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden correctamente afirmando que el valor de las ordenadas disminuye, mientras los valores de Δy aumentan. Para ello, la mayoría extrae las dos columnas de la tabla de la pregunta 1, y observan el comportamiento de y y Δy . Además de lo anterior mencionan que el cambio en las ordenadas es que disminuyen pero cada vez disminuye en mayor cantidad. Para esto, explican que el signo negativo de los valores en la tabla para Δy indican que la dirección es hacia abajo, y por eso tiene en cuenta el valor absoluto.	2	9.1%
R2	Los estudiantes responden correctamente afirmando que el valor de las ordenadas disminuye, mientras los valores de Δy aumentan. Para ello, la mayoría extrae las dos columnas de la tabla de la pregunta 1, y observan el comportamiento de y y Δy . Algunos mencionan que en Δy los valores son negativos pero cada vez mayores.	15	68.2%
R3	Los estudiantes responden parcialmente de forma correcta, es decir, algunas afirmaciones apuntan a responder lo esperado de la pregunta, pero faltaron argumentos para que la respuesta quedara correcta totalmente. Por ejemplo, responden para Δy pero no responden para y .	1	4.5%
R4	Los estudiantes responden de forma errónea o incorrecta, dicen que Δy disminuye o relacionan a Δy con Δx de forma inapropiada en cuanto a sus variaciones.	4	18.2%

(P4) **Pregunta 4:** De acuerdo a los resultados de la última columna y comparando todos los cocientes, describe los **cambios** en Δy con respecto a los **cambios** en Δx .

Tabla 67. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 4 (S3T2P4)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes mencionan que hay cambios en Δy , y que Δx , es constante (no tiene cambios), luego mencionan que de acuerdo a esto, el cociente de los cambios va disminuyendo y luego va aumentando.	1	4.5%
R2	Los estudiantes mencionan que Δy cambia cada vez en 40 unidades, primero disminuyendo y luego aumentando; mientras que Δx , permanece constante. Para hacer referencia del 40 en Δy , comparan los cocientes consecutivos.	2	9.1%
R3	Los estudiantes mencionan que hay cambios en Δy , y que Δx , es constante. La mayoría de ellos mencionan la dirección de cambio de Δy .	11	50%
R4	Los estudiantes responden de forma incorrecta, por ejemplo, mencionan que " Δy llega a hacer cero mientras Δy no puedo	8	36.4%

De acuerdo a los resultados de la tabla 63, el 68.2% de los estudiantes contestó de forma correcta, representando los Δx y Δy en la gráfica con sus respectivas direcciones. El resto de estudiantes, ubicaron bien los Δx y Δy pero no ponen la dirección o algunas las hacen de forma errónea.

Observando los resultados en la tabla 64, se puede afirmar que el 45.5% de los estudiantes responde de forma correcta explicando porqué Δx siempre es 10m. El resto de los estudiantes no responden a la pregunta o lo hacen de forma confusa.

Ahora, en la tabla 65 los resultados indican que el 95.5% de los estudiantes describe de forma correcta cómo es el cambio en las ordenadas y el cambio en los Δy . El resto lo hace de forma incorrecta.

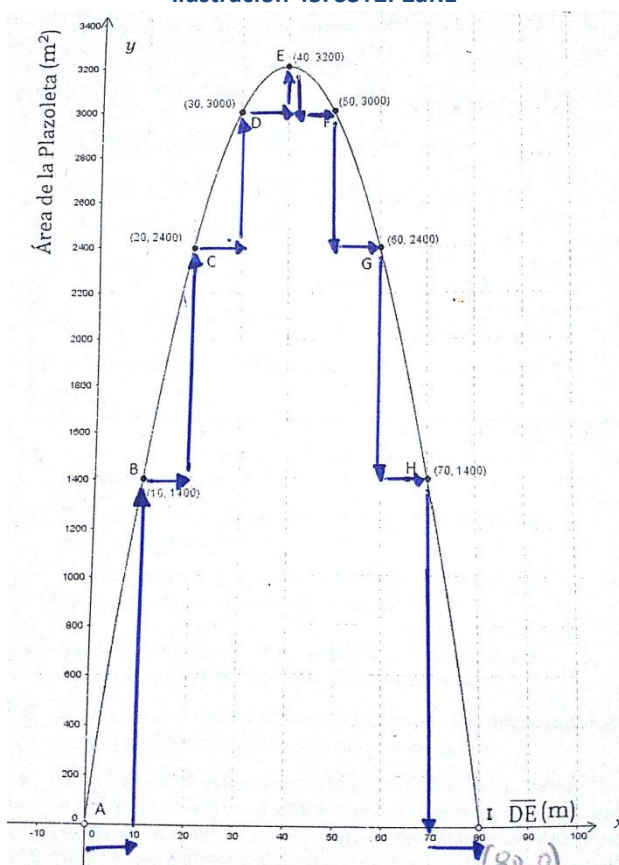
Según resultados de la tabla 66, el 77.3% de los estudiantes describe de forma correcta cómo es el cambio en las ordenadas y el cambio en los Δy . El resto lo hace de forma incorrecta o incompleta.

Los resultados de la tabla 67 muestran que sólo el 63.6% de los estudiantes describe de forma correcta cómo son los cambios en Δy con respecto a los cambios en Δx . De ellos, el 21.4% lo hace de forma cualitativa y cuantitativa, mientras que el resto lo hace de forma netamente cualitativa.

Como continuación de la pregunta anterior sobre el completar la tabla, se propone esta vez, que los estudiantes representen gráficamente (mediante vectores o segmentos dirigidos) las diferencias o cambios en x y y , representándolos como Δx & Δy , respectivamente. En la medición de estos cambios es importante poder explicitar el sentido de estos segmentos dirigidos, ya que son necesarios para poder dar cuenta del crecimiento o decrecimiento de la gráfica. En este sentido, la mayoría pudo tener acercamientos importantes a la

orientación de esas representaciones gráficas para la medición de los cambios, como se muestra a continuación.

Ilustración 45. S3T2P2aR1



Sin embargo, interesa resaltar que unos pocos seguían contemplando geométricamente (en lo que a la dirección se refiere), el valor absoluto de los cambios; tal como se observa en la siguiente ilustración.

El no ponerle flechas a los segmentos dirigidos o ponerlas de forma errónea, supone la no contemplación de elementos asociados a la gráfica que le quitan su carácter variacional.

De otro lado, cuando la mayoría de los estudiantes argumenta porqué Δx siempre es 10 a pesar de que $\overline{DE}$ varía de 0 y 80m, menciona que esto ocurre porque la longitud del segmento $\overline{DE}$ varía de 10 en 10. Sin embargo, hay un caso que llamó la atención, mostrado en la siguiente ilustración:

Ilustración 46. S3T2P2bR2

! Porque SOLO hay una razón de cambio en la Δx

Se puede observar cómo el estudiante usa las palabras “razón de cambio” para referirse a que la variación en x es la misma. En este caso, está mal usada la expresión, aun así, es llamativo el hecho de usarla, pues es algo que no corresponde o hace parte de un SMS que el estudiante domine. Cuando se le pregunta al estudiante (en la plenaria) sobre esta expresión, se evidencia un caso de comportamiento *Pseudo-Analítico*, pues aparentemente el estudiante entiende el significado de la expresión pero realmente la usa, atendiendo a que la palabra “razón” denota sinonimia con la palabra argumento o justificación y la palabra cambio, por el hecho de estar hablando de formas en que cambia la variable. De esta forma, para el estudiante, razón de cambio significa: la razón por la que cambia.

Igualmente, de los resultados, llama la atención cómo dentro de los estudiantes que hacen parte de la mayoría del grupo, hay dos casos que sobresalen cuando, además de relacionar el cambio en y y el cambio en Δy ; presentan acercamientos importantes a la idea de cambio de los cambios, pues interpretan las implicaciones que tiene los cambios de Δy en los cambios de y . A continuación se muestra evidencia de ello, donde algunos estudiantes mencionan que y aumenta pero cada vez lo hace en menor cantidad o que y disminuye pero cada vez disminuye en mayor cantidad.

Ilustración 47. S3T2P3aR1 y S3T2P3bR1

1) el cambio en las ordenadas es que aumentan pero cada vez aumentan menos. y Δy disminuye cada vez más.
 Δx = es mayor de A hasta B, Aumenta un poco de B hasta C, Aumenta menos de C hasta D, y finalmente Aumenta muy poco de D hasta E.

2) el cambio en las ordenadas es que disminuye cada vez más. y los Δy Aumentan cada vez más
 Δx = disminuye poco de los puntos E hasta F, disminuye un poco más de F hasta G, disminuye mucho más de G hasta H, finalmente disminuye mucho más de H hasta I.

Igualmente hay casos en los cuales, los estudiantes reconocen que hay cambios y asumen estos desde lo cuantitativo y tiene en cuenta que el signo negativo indica la dirección del cambio. Mencionan que en Δy los valores son negativos pero cada vez mayores.

Ilustración 48. S3T2P3bR2

e) El e es el punto mas alto y desde el empieza a disminuir. en Δy del e hasta el punto I van aumentando los mismos numeros del los anteriores puntos pero negativamente porque baja.

Esta ilustración muestra cómo los estudiantes han reconocido un nuevo SMS donde el signo (-) indica dirección del cambio, y la cantidad de cambio se compara desde el valor absoluto de los valores en consideración. Esta perspectiva supone un cambio de paradigma o antiguo SMS, donde por ejemplo, al comparar -6 y -5, la concepción no es que -6 sea menor que -5, sino que -6 representa un cambio mayor que -5, ambos en la misma dirección o sentido (decreciente).

Finalmente, en la pregunta 4, hubo conciencia de lo que significa que Δy cambie (hay cambio en los cambios) y que Δx sea constante (los cambios no cambian). Aquí llama la atención el avance que ha habido en torno a la diferenciación entre x y Δx , hay claridad en torno la concepción de comparar los cambios.

En la siguiente ilustración se resalta el caso de un estudiante que aunque en la plenaria mostro conciencia del conocimiento del comportamiento de la gráfica y del comportamiento de los cambios en Δx y en Δy ; en su respuesta individual

Ilustración 49. S3T2P4

11/ el cambio que se da en Δy es que va aumentando, en Δx siempre va a ser los mismos de acuerdo a eso los cocientes primero aumenta más y despues va disminuyendo menos

En la anterior ilustración se puede observar cómo la estudiante en su respuesta individual erra, afirmando que el cociente primero aumenta más y luego va disminuyendo menos. En

la plenaria esta estudiante evidencia tener conciencia sobre los cambios en Δx y en Δy , sin embargo, cuando considera el cociente de los cambios en su notación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, asocia su tendencia creciente o decreciente con la tendencia de crecimiento o decrecimiento de la gráfica, respectivamente. Esta postura, pone de manifiesto cómo la estudiante no logra la correcta coordinación entre el registro simbólico y el registro gráfico, pues para ambos, asocia comportamientos similares, sin tener presente que inicialmente la gráfica es creciente y el valor del cociente decrece y cuando la gráfica decrece, el cociente crece.

(P5). **Pregunta 5:** Con lo trabajado hasta el momento y apoyándose en la Gráfica 2, Luisa afirma que: “Para valores de $\overline{DE}$ entre 0 y 40m, y está aumentando, pero cada vez aumenta más; mientras que para valores de $\overline{DE}$ entre 40 y 80m, y está disminuyendo, pero cada vez disminuye menos”. Analiza y explica si esta afirmación es cierta.

Tabla 68. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 5 (S3T2P5)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes de forma correcta, afirman que Luisa NO tiene la razón. Para esto, se apoyan en los cambios de Δy y su relación con y expresando que cuando $0 \leq \overline{DE} \leq 40m$ y aumenta, pero cada vez aumenta en menor cantidad, mientras que cuando $40 \leq \overline{DE} \leq 80m$ y disminuye pero cada vez disminuye en mayor cantidad.	10	45.5%
R2	Los estudiantes, de forma parcial, responden correctamente a la pregunta. Por ejemplo, si afirman que Luisa no tiene razón, los argumentos usados son incompletos, sólo justifican el aumento o disminución en y . En algunos casos, mencionan que los cambios en y al subir son los mimos al bajar, pero no se explicita la dirección de dichos cambios.	8	36.4%
R3	Los estudiantes responden de forma errónea. Expresan relaciones (erradas) entre Δx y Δy y no responden a la pregunta. Por ejemplo, mencionan que mientras Δy aumenta Δx disminuye.	4	18.2%

(P6). **Pregunta 6:** Teniendo en cuenta el contexto de la plazoleta en la situación 2, a medida que cambia $\overline{DE}$, explica qué relación se puede establecer entre los valores del área y los cambios en los Δy .

Tabla 69. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T2P6)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes de forma correcta afirman que cuando $0 \leq \overline{DE} \leq 40m$, el área aumenta al igual que y , pero cada		

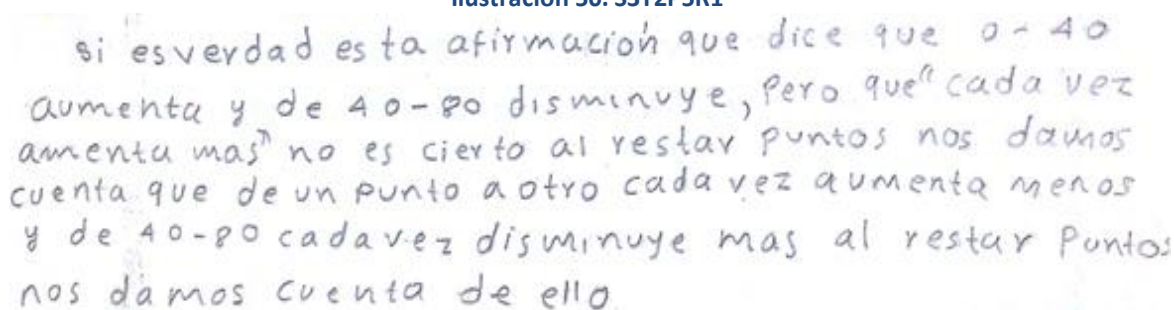
	vez aumenta en menor cantidad. Mientras que cuando $40 \leq \overline{DE} \leq 80m$, el área disminuye al igual que y , pero cada vez disminuye en mayor cantidad.	6	27.3%
R2	Los estudiantes de forma correcta afirman que el área aumenta cada vez en menos cantidad y que después de cierto punto disminuye cada vez en mayor cantidad; pero hacen referencia explícita a los puntos A hasta I de la gráfica. No se desligan del contexto de la representación gráfica Área vs $\overline{DE}$.	10	45.5%
R3	Los estudiantes expresan respuestas erróneas o confusas. Se refieren a relaciones equivocadas entre y , área y Δy	6	27.3%

De acuerdo con los resultados de la tabla 68, sólo el 45.5% de los estudiantes responde correctamente a la pregunta, mencionando que la afirmación de Luisa es falsa. El resto de estudiantes, responde de forma parcial, o responde de forma errónea.

Los resultados de la tabla 69 muestran cómo el 27.3% responde de forma correcta aludiendo al contexto de la plazoleta. Mientras que el 45.5% responde de forma correcta desde lo matemático pero se desligan del contexto de la plazoleta. Finalmente, el resto responden incorrectamente.

Como la pregunta 5, es la generalización de lo que antes habían respondido en la 4, la mayoría de estudiantes responde correctamente a la pregunta. Sin embargo, para Verificar la validez de la afirmación de Luisa implicó un ejercicio complejo para algunos estudiantes, porque hay varias sub-afirmaciones dentro de ella, unas verdaderas y otras falsas. Ejemplo de ello se ilustra a continuación.

Ilustración 50. S3T2P5R1



si es verdad es la afirmación que dice que 0-40 aumenta y de 40-80 disminuye, pero que "cada vez aumenta mas" no es cierto al restar puntos nos damos cuenta que de un punto a otro cada vez aumenta menos y de 40-80 cada vez disminuye mas al restar puntos nos damos cuenta de ello

También es relevante destacar una respuesta que estuvo dentro de las correctas y que usa las expresiones: *aumenta con menos rapidez* y *disminuye con más rapidez*. Esto da cuenta

del uso de palabras por parte de la estudiante, de acuerdo a cargas semánticas preestablecidas. Con la palabra rapidez, quiere indicar qué tan rápido cambia, haciendo alusión implícita a la *rapidez de cambio*. A continuación se cita dicha respuesta.

Ilustración 51. S3T2P5R1'

No es cierto por que DE entre (0 y 40m) si aumenta pero con menos rapidez y de (40 a 80m) disminuye con más rapidez

En la última pregunta de la tarea, es notorio que la mayoría de estudiantes comprende la relación entre y y Δy , sin embargo, presentaron dificultades en poder poner esa información en términos del contexto de la plazoleta. Evidentemente, este tipo de dificultades no repercuten en lo que a la comprensión o trabajo con la razón de cambio se refiere, pero advierte sobre cómo les cuesta realizar el cambio de registro (de lo tabular y gráfica cartesiana al dibujo y condiciones de la plazoleta). En la siguiente ilustración se muestra cómo algunos estudiantes se quedan en las condiciones del registro gráfico cartesiano.

Ilustración 52. S3T3P6R2

El area va cambiando que de A a G va aumentando pero mas lento y de E a I va disminuyendo mas rapido igual que Δy

Esto fue más evidente al notarse cómo hablan de puntos etiquetados en la gráfica cartesiana, que no estaban rotulados en el esquema o dibujo de la plazoleta. Es relevante centrarla discusión en este punto en la medida en que los estudiantes deben ser capaces de poder relacionar los elementos abstractos de un SMS con elementos más concretos de un SMS relacionado con las condiciones empíricas de la situación propuesta.

(S3)**Situación 3:** Observando otras variaciones.

(T3) **Tarea 3:** Esbozando gráficas de funciones

(P1) **Pregunta 1:** Para 3 distintas ubicaciones del punto E, determine la suma del área total de las zonas verdes y del área de la plazoleta, Explique la estrategia que usaste.

Tabla 70. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P1)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes de forma correcta para tres valores distintos del segmento $\overline{DE}$, hallan las correspondientes áreas de las zonas verdes y de la plazoleta. Para esto, determinan el área de cada par de triángulos isósceles opuestos por la plazoleta; para el primer par de triángulos sus lados congruentes miden $\overline{DE}$ y el área la expresan como $\overline{DE} * \overline{DE} / 2$. De igual manera, para el otro par de triángulos, los lados congruentes miden $80 - \overline{DE}$, y por lo tanto escriben que el área es $(80 - \overline{DE}) (80 - \overline{DE}) / 2$. Por último, para el área de la plazoleta usan los resultados arrojados por GeoGebra. Aunque calculan correctamente las áreas mencionadas no realizan la suma del área total de las zonas verdes con el área de la plazoleta	16	72.7%
R2	Los estudiantes contestan de forma incorrecta. Aunque con el uso de GeoGebra registran bien las tres áreas de plazoletas para distintas ubicaciones del punto E, no calculan de forma correcta el área de las zonas verdes. En la tabla manifiestan que el área total de las zonas verdes es la del triángulo $\triangle DEG$; además, en la explicación escrita manifiestan que el área de dicho triángulo debe multiplicarse por cuatro para hallar el área total de las zonas verdes.	6	27.3%

(P2) **Pregunta 2:** Esboza la gráfica *Área total de las zonas verdes vs longitud del segmento $\overline{DE}$* , explica la estrategia que usaste.

Tabla 71 Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P2)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes, de forma correcta, esbozan la gráfica esperada (parábola cóncava hacia arriba y vértice en 40, 3200). Para ello, organizan la información de la tabla de la respuesta anterior, para posteriormente ubicar las coordenadas en el plano cartesiano, de tal manera que la abscisa es el valor de $\overline{DE}$, y la ordenada es correspondiente valor de la zona verde. Sin embargo algunos de ellos unen los puntos con trazos rectilíneos.	4	18.2%
R2	Los estudiantes esbozan de forma incorrecta la gráfica. Usan los puntos obtenidos en la tabla de la pregunta anterior, pero obtiene una gráfica en forma de V con vértice el punto (40,0)	4	18.2%
R3	El esbozo de la gráfica NO corresponde a una parábola cóncava hacia arriba. Aunque los estudiantes mencionan que la estrategia usada fue ubicar los puntos obtenidos en la tabla de la pregunta anterior, no los ubican bien en el plano cartesiano. Para esta clasificación no es relevante si la información de tabla anterior es correcta o no.	14	63.6%

(P3) **Pregunta 3:** Teniendo en cuenta la gráfica anterior, explica el significado del vértice de la gráfica en relación con las condiciones de la plazoleta.

Tabla 72. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P3)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes mencionan de forma correcta que cuando $0 < \overline{DE} \leq 40m$ el área de las zonas verdes empieza a disminuir y el de la plazoleta empieza a aumentar. Mientras que cuando $40 \leq \overline{DE} < 80m$ el área de las zonas verdes aumenta y el de la plazoleta disminuye. Algunos de ellos hacen esta afirmación aunque la gráfica de la pregunta 2 les quedó incorrecta.	4	18.2%
R2	Los estudiantes, mencionan de forma correcta que cuando $0 < \overline{DE} \leq 40m$ el área de las zonas verdes empieza a disminuir, mientras que cuando $40 \leq \overline{DE} < 80m$ el área de las zonas verdes aumenta. En esta respuesta no hacen alusión al área de la plazoleta.	4	18.2%
R3	Como consecuencia de haber esbozado mal la gráfica en la pregunta anterior, los estudiantes identifican el vértice como el punto (70,2450), y al intentar explicar el significado del vértice sólo menciona que es el punto más alto.	6	27.3%
R4	Los estudiantes mencionan que no hay vértice. Dentro de estos estudiantes hay dos que hacen dicha afirmación, aunque la gráfica fue correctamente esbozada. A los demás no les dio de forma parabólica	8	36.4%

(P4) **Pregunta 4:** Teniendo en cuenta las condiciones para la construcción de la plazoleta; esboza en el plano cartesiano la gráfica *Área total de las zonas verdes vs Área de la plazoleta*, explica la estrategia que usaste.

Tabla 73. Tipos de respuestas a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T3P4)

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
R1	Los estudiantes responden de forma correcta esbozando la gráfica esperada, a través de diferentes acercamientos, para ello usan la graficas <i>Área de plazoleta vs $\overline{DE}$</i> y <i>Área de las zonas verdes vs $\overline{DE}$</i>	12	54.5%
R2	Los estudiantes intentaron realizar dos graficas por separado: <i>Área de plazoleta vs Área zonas verdes 1 y 3</i> , y <i>Área de plazoleta vs Área zonas verdes 2 y 4</i> ; entendiendo que las zonas verdes están en parejas de triángulos congruentes. Sin embargo, no lograron concluir su propuesta.	2	9.1%

R3	Los estudiantes esbozan una gráfica que no corresponde a la respuesta esperada, igualmente los argumentos dados acerca de la estrategia usada son muy falsos o ambiguos.	8	36.4%
----	--	---	-------

De acuerdo con la tabla 70, el total de estudiantes no calcula la suma de áreas que se pide en la pregunta; sin embargo el 72.7% de los estudiantes calculan de forma correcta el área total de las zonas verdes y el área de la plazoleta para tres distintas ubicaciones del punto E. El resto de los estudiantes contesta de forma incorrecta.

La tabla 71, pone de manifiesto que sólo el 18.2% de los estudiantes esboza de forma correcta la gráfica *Área total de las zonas verdes vs longitud del segmento $\overline{DE}$* . El resto de los estudiantes esboza gráficas que no corresponden a las condiciones de la plazoleta.

Observando la tabla 72, sólo el 36.4% de los estudiantes explica de forma correcta el significado del vértice en la gráfica obtenida de la pregunta anterior. El resto de los estudiantes, como consecuencia de haber esbozado mal la gráfica, identifican una coordenada que no corresponde al vértice o, en el peor de los casos, mencionan que NO hay vértice.

Finalmente, de acuerdo a los resultados de la tabla 73, el 54.5% de los estudiantes logra esbozar una gráfica que se ajusta a la interpretación de la variación entre áreas de zonas verdes y área de la plazoleta. El resto de los estudiantes, aunque explican correctamente en palabras la variación entre dichas áreas, no la esbozan o representan de forma correcta en el plano cartesiano.

Es menester aclarar que el propósito de esta *tarea 3* es comprobar o verificar si los estudiantes, realmente, han de clasificarse o no en determinado nivel de razonamiento covariacional, pues es en esta tarea donde ellos podrían usar de forma explícita algunos elementos de la función y aspectos generales de la covariación, ya abordados en tareas anteriores. En lo que sigue se rescatan aspectos importantes que llamen la atención de las respuestas de algunos estudiantes. Esto sirve de insumo para realizar, posteriormente, un análisis general de la situación 3 donde se tendrán en cuenta todos los criterios de análisis detallados en apartados anteriores.

En la primera pregunta, la mayoría de estudiantes usa una estrategia adecuada para poder hallar el área de las zonas verdes, calculando para distintas posiciones del punto E, dos pares distintos de formas triangulares que representan dichas zonas verdes. En correspondencia, dichos pares de formas son cambiantes de acuerdo a la forma en que se mueva el punto E.

No obstante a lo anterior, es importante resaltar cómo algunos estudiantes, para distintas posiciones del punto E, calculaban el área de las zonas verdes en términos de una sola forma triangular al cuadruplicarla, tal como se observa a continuación.

Ilustración 53. S3T3P1R2

n	Area de las zonas verdes	Area de la plaza
70	2450	1400
70	200	2400
60	1800	2400

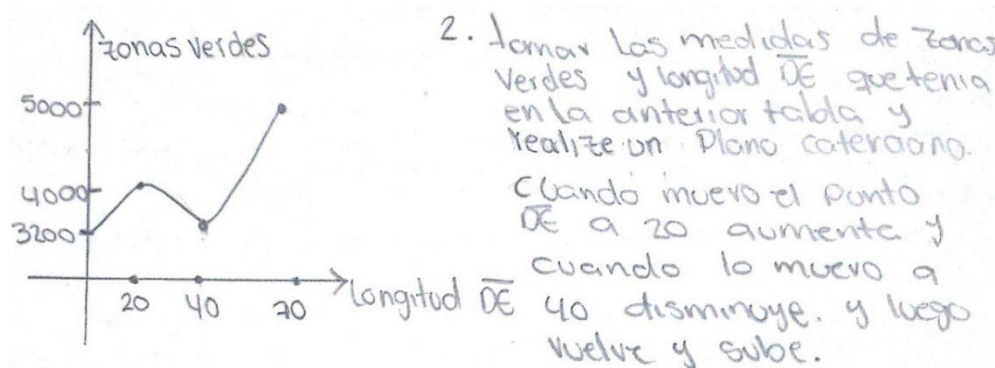
① lo que hice fue poner en práctica la fórmula de $\Delta = b \times a$ y hallar 4 veces el área, sumarla y dar el resultado del área de las zonas verdes

Esta perspectiva en dichos estudiantes, pone de manifiesto cómo aun teniendo la ayuda del software, se limitaron a la observación de una sola forma triangular, desconociendo la variación simultánea que sucedía en las otras tres formas triangulares que complementan el área total de las zonas verdes. De cierta manera, este comportamiento implica el no reconocimiento de variaciones conjuntas en términos de una, la del movimiento del punto E y como consecuencia, la de la variación en la longitud del segmento $\overline{DE}$.

Cuando se les propone esbozar la gráfica *Área total de las zonas verdes vs longitud del segmento $\overline{DE}$* se esperaba que los estudiantes con base en la consigna de la pregunta 1, exploraran con más puntos en la pregunta 2, sin embargo, la mayoría se limitó a los tres sugeridos en la pregunta anterior. Con estos puntos, construyeron una tabla a doble columna que hizo las veces de un ejercicio de tabulación, para posteriormente, representar en el plano cartesiano.

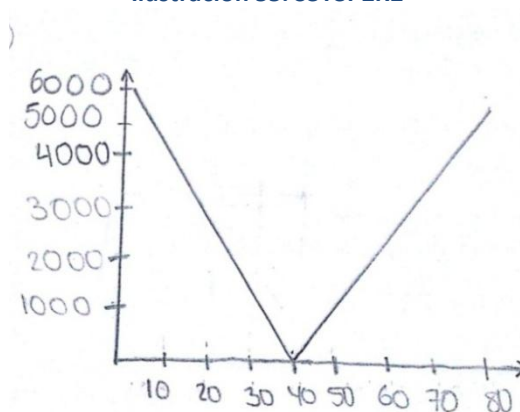
Durante el ejercicio individual, aunque solo el 36.4% de los estudiantes acierta con la forma de la gráfica, existe la tendencia a querer relacionar la parte izquierda de ella con un punto lo más cercano al origen, es decir, una tendencia cognitiva a que la gráfica inicialmente debe ser creciente desde un punto que intercepta al eje vertical y que está lo más cercano posible al origen. Ejemplo de ello se evidencia en la siguiente respuesta a la consigna de graficar *zonas verdes vs longitud del segmento $\overline{DE}$*

Ilustración 54. S3T3P2R3



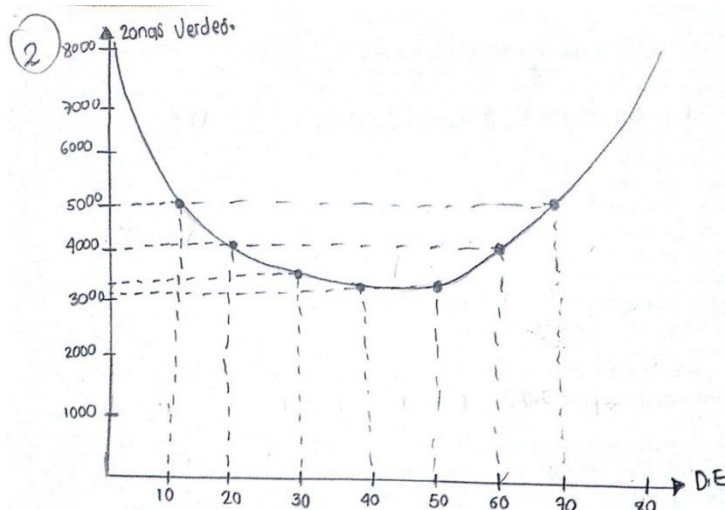
Igualmente se nota la tendencia a que el vértice quede sobre el eje horizontal, como se muestra a continuación.

Ilustración 55. S3T3P2R2



Las dos respuestas anteriores se dan pese a que los datos en el registro tabular los tienen de forma correcta, es decir la tabulación está bien registrada. Mientras que los que acertaron, no tuvieron esa dificultad, como se muestra a continuación.

Ilustración 56. S3T3P2R1



En la identificación del vértice de la gráfica de las zonas verdes en función del segmento $\overline{DE}$, la mayoría tiene dificultades con la exhibición del punto o coordenada en concreto, pues como consecuencia de haber esbozado de forma incorrecta la gráfica, obtienen respuestas diversas para tal punto. Sin embargo, al interpretar el significado coinciden en que la abscisa de dicho punto representa un punto de quiebre en el dominio (longitud del segmento $\overline{DE}$) y que su respectiva ordenada representa el área mínima de las zonas verdes. Inclusive, hubo algunos casos donde explicaba el significado del vértice en términos de los cambios simultáneos que ocurrían en el área de las zonas verdes y el área de la plazoleta y también en términos del crecimiento y decrecimiento de la función, de acuerdo con la forma de la gráfica. Esto se muestra en la siguiente ilustración.

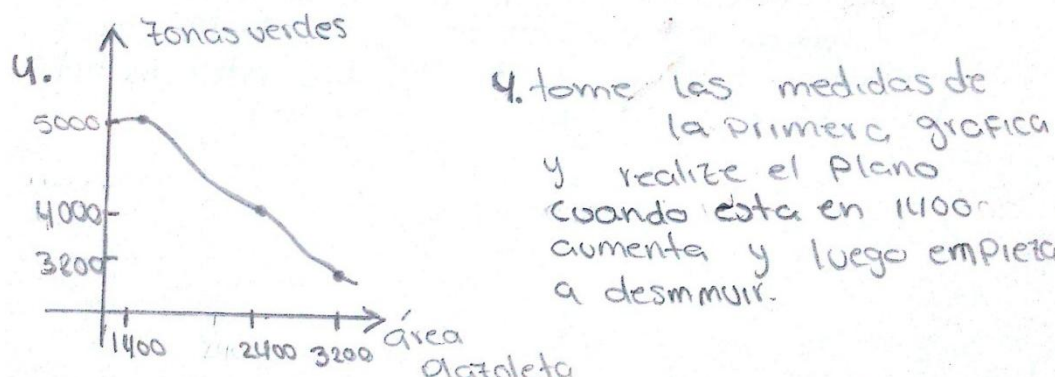
Ilustración 57. S3T3P3R1

El significado que tiene el vértice es que es el punto máximo que puede tener el área de la plazoleta. Esto quiere decir la vertice indica el área de la plazoleta, y el área total de las zonas verdes, es decir que si se mueve hacia la izquierda del segmento (DE) el área de la plazoleta comienza a disminuir y el área total de las zonas verdes va a ir aumentando y si se mueve a la derecha el área de la plazoleta a disminuir y el de las zonas verdes va a aumentar.

Dos de los estudiantes que esbozan bien la gráfica anterior, mencionan que no hay vértice. Esto es consecuencia de la no apropiación de SMS que se supone debe dominar desde la situación 2. En este orden de ideas, no recordaron bien la concepción o definición de vértice.

Por último, en la pregunta 4, cuando se les pide esbozar la gráfica *Área total de las zonas verdes vs Área de la plazoleta*, el 63.6% de los estudiantes tiene acercamientos importantes a la respuesta esperada. A continuación se detallarán 4 acercamientos que corresponden aproximadamente a tipificaciones dentro de las respuestas dadas por los estudiantes. En estas gráficas se muestra cómo los estudiantes representan lo solicitado.

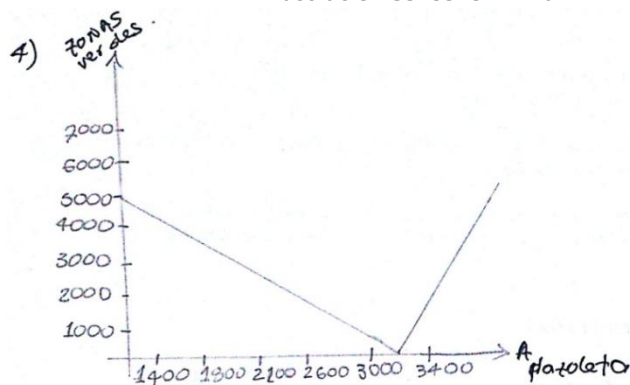
Ilustración 58. S3T3P4R1a



En esta gráfica se evidencia cómo los estudiantes, para graficar, tienen en cuenta la gráfica del área de la plazoleta y la gráfica de las zonas verdes, ambas en función de la longitud del segmento DE, con esto obtiene la variación o relación de dependencia entre el área de las zonas verdes y el área de la plazoleta. Lo que no es claro, es la parte en que la gráfica debe repetirse sobre esa línea trazada, pero en sentido contrario.

En la siguiente ilustración se muestra otro acercamiento a la respuesta

Ilustración 59. S3T3P4R1b

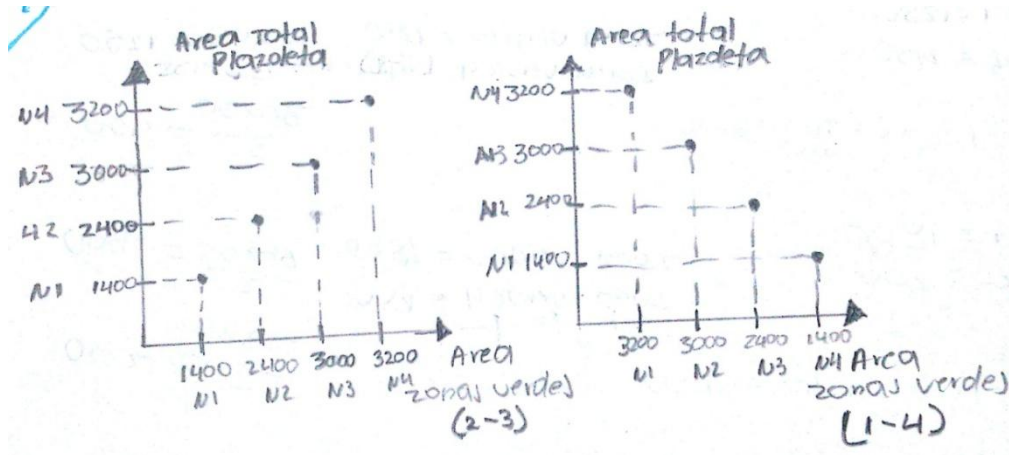


la estrategia que use fue fijarme en la gráfica de geogebra y por ello me di cuenta que hasta un punto las zonas verdes disminuyen y después de ese punto las zonas verdes aumenta al igual que disminuye el área de la plazoleta.

En esta gráfica se evidencia cómo los estudiantes aciertan con el primer tramo de lo esperado, pero hay tendencias cognitivas que los hace caer en errores, por ejemplo, pensar que por el hecho de que las gráficas de las zonas verdes en función del segmento DE y el área de la plazoleta en función del segmento $\overline{DE}$, son de forma parabólica, entonces también la gráfica solicitada en la pregunta 4 (*Área total de las zonas verdes vs Área de la plazoleta*) también debe tener esa forma. De tal manera que la tendencia es completar con un segundo trazo para que adopte esa forma. Además presentan dificultades con la escala representada en los ejes coordenados.

En otra opción de respuesta propuesta por estudiantes, se encuentra la que se muestra a continuación.

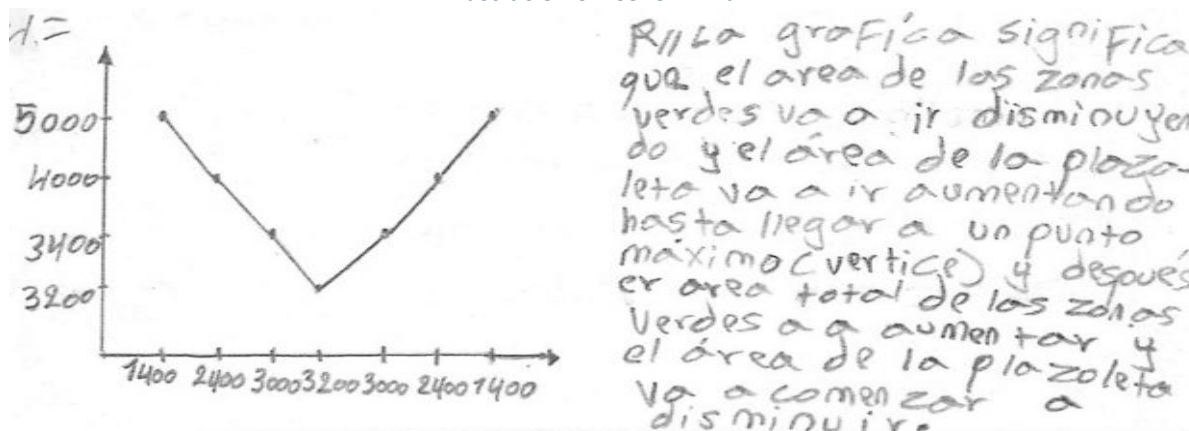
Ilustración 60. S3T3P4R1c



En esta ilustración se muestra cómo los estudiantes, al identificar dos pares de zonas verdes distintas, usan como estrategia esbozar dos gráficas independientes, una de ellas, la que relaciona el primer par de zonas verdes en función del área de la plazoleta, y la otra, la gráfica del segundo par de zonas verdes en función del área de la plazoleta. Aunque esta respuesta no es la esperada, es rescatable la forma en que los estudiantes acuden a una estrategia de hacer gráficas por aparte para solucionar el problema de que el lugar geométrico que representa la función, está compuesto por puntos que se mueven a lo largo de una recta, la cual recorren avanzando y devolviéndose. Además, se puede inferir que los estudiantes tienen ciertas dificultades con la consideración conjunta de las variaciones de las cuatro zonas que componen todo el terreno de zonas verdes, de tal manera que tuvieron que hacerlo por aparte. No obstante a lo anterior, se puede considerar que el comportamiento de ambas gráficas podría dar cuenta del comportamiento de la gráfica esperada.

En la siguiente respuesta se evidencia una estrategia para solucionar el hecho de que la gráfica debe representar una línea recta decreciente que continúa devolviéndose por el mismo trazado decreciente anterior. Para esto, en el eje horizontal, representa una escala numérica hacia la derecha, creciente hasta 3200 y luego decreciente hasta 0.

Ilustración 61. S3T3P4R1d



Esta estrategia se puede considerar como algo recursivo para representar el movimiento de los puntos del lugar geométrico cuando se mueve avanzando y regresando por la huella de una misma línea recta.

Análisis general de la situación 3

A continuación se destacan los elementos o aspectos matemáticos implicados en lo que los estudiantes han respondido y hecho de acuerdo a las consignas propuestas en las tareas. En esta última situación, adquiere mayor relevancia el trabajo con la razón de cambio.

Empezando en grado de complejidad ascendente, se puede citar en primera instancia la consigna de las preguntas que buscaban que el estudiante encontrara la diferencia entre abscisas y ordenadas para determinados pares de puntos. En respuesta a estas preguntas, tanto en la tarea 1 como en la 2, se pudo evidenciar que los estudiantes lograron acercamientos concretos al significado de cambio, de hecho al encontrar las diferencia se daban cuenta que el resultado de esa diferencia representaba el cambio ocurrido para ir de un valor a otro, aspecto que queda más aterrizado cuando se le sugiere usar una convención para representar dicho cambio, Δx o Δy . Esta nueva notación supone otro elemento nuevo de un acervo que sustenta un nuevo SMS, en la medida en que será una notación cuya interpretación es vital para la comprensión y comunicación de otras ideas abordadas en las en el transcurso de la tareas.

Asimismo, se pudo evidenciar la aplicación por parte de los estudiantes de conocimientos que daban cuenta de su memoria de trabajo, tal fue el caso de la asociación que hacían del cociente de los cambios en y y los cambios en x con la noción de pendiente de una recta. Esto, en virtud de que los estudiantes en sus saberes previos conocían el algoritmo para hallar la pendiente de una recta. Esta tendencia cognitiva hizo que los estudiantes trabajaran aspectos de un SMS que se supone, ya conocían. Sin embargo, se registraron algunas dificultades en el manejo correcto del cociente de diferencias entre un par de variables ($\frac{\Delta y}{\Delta x}$), pues algunos estudiantes no advertían la dirección del cambio, que era consecuencia inmediata de considerar unanimidad en el sentido en que se hacía cada diferencia, Δx y Δy . La consideración correcta de dichos cambios implicaba el adecuado tratamiento de la dirección del cambio. Cabe resaltar que la mayoría sí logró considerar esta dirección de cambio, lo cual permite afirmar que la mayoría de los estudiantes hizo buen uso de los SMS asociados al concepto de pendiente, en el acercamiento a la razón de cambio. Esta noción se vio reforzada cuando los estudiantes, en la tarea 2, complementaron la convención de Δx y Δy con la representación gráfica caracterizada por segmentos dirigidos (vectores), que de forma simultánea dan cuenta del valor y la dirección de cambio. Es de aclarar que aunque algunos reportaron dificultad al respecto, la mayoría de estudiantes logró asociar a la gráfica, formas de cambio, es decir, la consideración de estos cambios permitió que identificaran en la gráfica un comportamiento variacional al cual subyacen relaciones de dependencia entre variables.

Relación de dependencia que se vio fortalecida cuando la mayoría de los estudiantes interpreta el significado de la razón de cambio, que en primera instancia fue constante cuando la gráfica en consideración era constante (en el caso de la tarea 1.) y posteriormente, variable (en el caso de la tarea 2). En cuanto a la razón de cambio constante, los estudiantes lograron concretarla, manifestando que el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es siempre el mismo, sin embargo, no hubo, de parte de los estudiantes, alusión a la forma en que cambian los cambios, lo cual implicó, en primera instancia, el no reconocimiento de la posibilidad de comparar los cambios de cada variable. Antes de la plenaria, se notó cómo algunos estudiantes tenían dificultades con la diferenciación entre la magnitud y el cambio

de dicha magnitud. En otras palabras, la tarea 1 tiene como intención que el estudiante compare los cambios, es decir, los cambios en Δx y Δy , pero algunos estudiantes lo que hacen es comparar los cambios en x y en y , y responder en términos de Δx y Δy .

Posteriormente, cuando en la tarea 2, se les propone interpretar el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, los estudiantes reconocen que los cambios en cada variable se comportan de forma distinta, es decir, que los cambios en Δx son los mismos, son constantes, mientras que los cambios en Δy son variables. Estas respuestas denotan que los estudiantes ya están comparando los cambios, la forma en que cambian los cambios. Se puede afirmar esto, independientemente de que la pregunta haya sido guiada, pues ya hay conciencia en los estudiantes sobre la distinción entre la magnitud y el cambio de dicha magnitud, de tal manera que reconocen diferencias importantes entre x y y con Δx y Δy , respectivamente. En este sentido, fueron capaces de poder relacionar la magnitud con los cambios de ella, es decir, lograron darle origen y sentido a expresiones como “y aumenta pero cada vez aumenta en menor cantidad” y “y disminuye, pero cada vez disminuye en mayor cantidad”.

Lo anterior se ve reflejado como un avance respecto a la primera parte (la tarea 1), donde tuvieron dificultad de interpretar el significado de la razón de cambio.

En cuanto al tratamiento de las gráficas en relación con los datos y su interpretación, los estudiantes mostraron habilidades para caracterizar los máximos y mínimos de una función. Estas caracterizaciones permitieron que la mayoría de los estudiantes interpretara e identificara de forma correcta los intervalos o conjunto de valores del dominio (del segmento DE), donde la función es creciente y donde es decreciente (explicitando valores respectivos del rango). Esto se sustenta en las verbalizaciones y descripciones que los estudiantes realizan en su intento de explicar el comportamiento de la gráfica y por ende la función que subyace a ella. De nuevo, la aclaración de que los estudiantes no aludían de forma explícita a conceptos como máximo, mínimo, creciente, decreciente, dominio y rango, sin embargo, las actuaciones de ellos denotaron acercamientos importantes a tales nociones, la forma en que funcionan y se relacionan, de tal manera que lo único que les quedó faltando es conocer la etiqueta con la que se les va a rotular, dominio, rango, etc.

Igualmente, en lo que a gráficas se refiere, los estudiantes lograron avances significativos en poder representar en el plano cartesiano un acervo de información que es consecuencia de interpretaciones en otros registros y tratamientos y entender que no necesariamente una representación gráfica debe obedecer o ser consecuencia de una expresión algebraica que la sustente, y que por ende, no necesariamente, la función debe obedecer a la exhibición de patrón o regularidades.

Precisamente, a propósito de los sistemas semióticos de representación, los estudiantes evidenciaron de forma paulatina a través del desarrollo de las tareas, mayor dominio sistémico de los distintos registros para manipular o realizar el tratamiento de datos específicos según las condiciones y consignas solicitadas. Específicamente, en la tarea 3, se le pedía a los estudiantes esbozar dos gráficas y, a diferencia de tareas de otras situaciones, esta vez, no se les sugirió pauta alguna, de tal manera que los estudiantes debían poner en práctica sus conocimientos previos y las nociones que han venido afianzando en el desarrollo de las situaciones, para poder dar resolver lo requerido. Fue justamente en esta tarea, donde los estudiantes, para poder esbozar las gráficas, debían acudir a otros registros como el dinámico (uso del software), el tabular, lenguaje simbólico o algebraico, y el de la lengua natural. El uso sistémico de estos registros, permitió que la mayoría de estudiantes lograra sustentar verbalizaciones asociadas a las formas de cambio, la dirección de los cambios y la cuantificación de ellos, en términos de los cambios respectivos en otra magnitud que varía de forma conjunta con la primera. Esto se vio reflejado en las respuestas a la última pregunta de la tarea 3, donde los estudiantes debían considerar y modelar la variación de dos magnitudes, cada una de las cuales estaba en función de una misma variable independiente.

Pese a lo anterior, el software fue sub- utilizado, pues pudieron haber aprovechado mejor las simulaciones dinámicas de movimientos para sacar mejores conclusiones y poder dar cuenta del esbozo de un lugar geométrico compuestos por puntos que en su calidad de coordenadas, representan una relación y corresponden a una interpretación de acuerdo a un contexto empírico preestablecido.

Es importante manifestar que la *función* se ha trabajado desde la concepción de relación de dependencia, pues los estudiantes, por las mismas condiciones de las preguntas, no están realizando gráficas y tablas, necesariamente a partir de expresiones algebraicas, lo cual los aleja de una concepción netamente desde una relación de correspondencia o consecuencia de cálculos algorítmicos mediados por una regla de asignación.

En cuanto a lo sintáctico vs lo semántico, se evidenció dificultades en torno a la correcta interpretación de lo que significa el cambio de una variable y poderlo interpretar en términos de los cambios de otra variable. Es decir, dificultades en la correcta significación del cociente entre los cambios de cada variable y las implicaciones que ello tiene en la comparación de los cambios para determinar el cambio de los cambios, que en últimas determina nivel de pensamiento covariacional que puede llegar a desarrollar un estudiante. Un ejemplo de dichas dificultades, es la confusión de x con Δx .

Las tendencias cognitivas más relevantes por parte de algunos de los estudiantes, durante el desarrollo de la situación se centran en:

- La consideración del valor absoluto de las diferencias entre pares de valores de una variable, para poder determinar el cambio. Esta tendencia no permitió la asociación de una convención para representar la dirección de cambio entre dos variables en dependencia una de la otra.
- La confusión de la magnitud con los cambios en ella. Esto implicó la confusión entre x y Δx .
- La resistencia a retomar el contexto, después de haber explorado SMS más abstractos y complejos cuyo tratamiento no está asociado a lo empírico. Es decir, la dificultad de poder re-significar el contexto después de que se ha estudiado desde su matematización.
- Manejar el registro tabular con solo las indicaciones o puntos que se les sugiere, pero no procurar evaluar más valores para obtener puntos adicionales que den cuenta de la gráfica.

- La tendencia a que la gráfica de una función quede necesariamente intersectando a los ejes coordenados y que la parte de la gráfica que está más cercana al origen debe estar por debajo del grafo del resto de la representación gráfica. Esta tendencia se vio reflejada en las respuestas de las preguntas 2 y 4 de la tarea 3, donde además, a algunos estudiantes les causaba inseguridad en el hecho de que la curva no tuviera su vértice sobre el eje horizontal, y por esta razón trataban de ajustar la parábola, cuando el vértice de esta no intersectaba al eje x .
- La tendencia errónea de querer generalizar la forma de una gráfica para otras gráficas que relacionan algunas variables en común con la gráfica inicial de referencia. Esto fue evidenciado cuando los estudiantes consideraban que como tanto la gráfica del área de las zonas verdes como la del área de la plazoleta dependían cada una de la longitud del segmento $\overline{DE}$, y cada gráfica daba en forma parabólica; pretendían extender esta forma para la gráfica del *Área total de las zonas verdes vs Área de la plazoleta*. Los estudiantes a priori no conocen o no tiene noción alguna sobre las familias de funciones, aun así, la tendencia fue querer generalizar la forma de la gráfica, como si se tratara de una familia de funciones.

Ahora, en cuanto al marco conceptual para el razonamiento covariacional que propone Carlson, se analizan los resultados de los estudiantes en términos de los aspectos de dicho marco, para poder caracterizar las actuaciones de los estudiantes y sus implicaciones cognitivas de acuerdo con los niveles de razonamiento covariacional. Para esto, en primera instancia, se detallan algunos comportamientos en las actuaciones de los estudiantes que dan cuenta de unas acciones mentales asociadas, las cuales sustentan determinados niveles de covariación. Es menester recordar que de acuerdo con los resultados que los estudiantes han reportados en las tareas de las dos primeras situaciones, la mayoría de estudiantes se habían clasificado en el nivel de razonamiento covariacional N2.

En las tareas de la situación 3, algunos estudiantes reportaron ciertas dificultades en el uso de convenciones para representar la dirección del cambio en las variables, esto se vio reflejado cuando calculaban la diferencia de abscisas y ordenadas y cuando ubicaban los

vectores en la gráfica de la tarea 2. Estas dificultades implicaron que los estudiantes no identificaran convenciones para representar la forma o dirección de los cambios; pero esto no desdice la habilidad que tuvieron los estudiantes para describir de forma cualitativa la dirección de los cambios, a lo largo de estas tres tareas. Es decir, el considerar el signo negativo en la medida de los cambios, representa un aspecto más de forma que de contenido, aludiendo a un elemento de un SMS más complejo. En concordancia con esto, de los resultados de las situaciones anteriores y la 3; se puede afirmar que el total de estudiantes se puede considerar clasificado en el nivel 2, que sustenta las acciones mentales AM1 y AM2. Prueba de esto, es que la mayoría de estudiantes pudo tener acercamientos importantes al desarrollo de habilidades asociadas con la coordinación del cambio y la interpretación de la razón de cambio; aspectos que necesariamente debían estar soportados en la identificación, interpretación y coordinación de la dirección de cambio entre dos variables relacionadas.

Como se dijo al inicio del análisis de la situación 3, esta se caracteriza por el trabajo directo con la razón de cambio. De esta forma, a partir de los resultados de los estudiantes, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes identificó, describió e interpretó adecuadamente el significado de los cambios de una variable y los cambios de otra, es decir, Δy en relación con Δx . Cuando los estudiantes realizan afirmaciones como: “la razón de cambio es constante”, “por cada unidad que cambia el segmento $\overline{DE}$, el largo de la plazoleta cambia $\sqrt{2}$ unidades”; están verbalizando la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras atienden a los cambios en el valor de entrada. Esto, a su vez implica, en las actuaciones de los estudiantes, comportamientos asociados a la acción mental 3 (AM3) que a su vez da cuenta de la coordinación cuantitativa de los cambios de una variable con los cambios en la otra.

De acuerdo a lo anterior, la mayoría de los estudiantes se pueden clasificar en un nivel de razonamiento covariacional N3. Lo que implica que los estudiantes, en estricto orden y complejidad, sustentan las acciones mentales AM1, AM2 y AM3.

Explorando un poco más en las tareas y sus vinculaciones en el trabajo con la razón de cambio, algunos estudiantes reconocieron e interpretaron de forma correcta el significado del cociente entre los cambios de una variable y los cambios de otra, es decir, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Evidencia de lo anterior, está en respuestas de los estudiantes como “para cambios iguales en x hay cambios iguales en y ”, “ y aumenta pero cada vez aumenta en menor cantidad”, “ y disminuye, pero cada vez disminuye en mayor cantidad”. Igualmente, se refleja en comportamientos asociados que ponen de manifiesto cómo los estudiantes diferencian los cambios en una variable y los cambios de los cambios de esa misma variable. En otras palabras, comparan los cambios de una magnitud en términos de la comparación de los cambios de otra. Los estudiantes que presentan tal comportamiento, muestran la verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada. Como consecuencia, estos estudiantes se pueden clasificar en el nivel de razonamiento covariacional N4, cuya imagen de covariación sustenta la coordinación de la razón de cambio promedio de función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada; además sustenta también, por las características del marco conceptual de Carlson, las acciones mentales AM1, AM2 y AM3.

Hay que aclarar que en la plenaria, algunos estudiantes tuvieron ciertas dificultades con la interpretación del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pues aunque reconocían inicialmente los cambios en los cambios para cada variable por aparte, la forma en que estaba el cociente, hizo que expresiones para el cociente como $\frac{140}{1}$, $\frac{100}{1}$, $\frac{60}{1}$ y $\frac{20}{1}$ permitieran interpretaciones para Δy como variable y que variaba de 40 en 40 y para Δx , también como variable, en el sentido en que mencionan que Δx varía de 1 en 1. Este comportamiento denotó que aunque en el papel (en el trabajo individual), algunos estudiantes mostraron competencias en la interpretación de la comparación de los cambios; al indagar en la plenaria sobre el significado del cociente y enfatizar con preguntas en procura de analizar el razonamiento de los estudiantes, mostraron comportamientos pseudo-analíticos. Dicho comportamiento pseudo-analítico hizo pensar que en un principio los estudiantes implicados se ubicaban en el Nivel de razonamiento covariacional N4 que sustenta las acciones mentales AM1, AM2,

AM3 y AM4, pero al indagar más en sus razonamientos mostraron que no podían ser clasificados en ese nivel de razonamiento covariacional, razón por la cual deberían seguirse clasificando en el anterior nivel N3. De acuerdo a lo anterior, aproximadamente la mitad de los estudiantes involucrados en el estudio, se pudo clasificar en el nivel de razonamiento covariacional N4.

Finalmente, se puede afirmar que el propósito de toda la secuencia (situaciones 1, 2 y 3) se cumplió mayoritariamente en los estudiantes, pues hubo estudiantes que alcanzaron a clasificarse en el nivel N4. Es importante resaltar que el nivel N5 no fue objeto dentro de los propósitos de la secuencia.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS REFLEXIONES DIDÁCTICAS

En este apartado se presentarán algunas conclusiones relacionadas con el trabajo desarrollado hasta el momento, trabajo que ha estado centrado en la observación y el análisis de las actuaciones de los estudiantes cuando enfrentan situaciones relacionadas con la covariación. Así mismo, se explicitarán algunas implicaciones didácticas en torno al trabajo en la escuela en relación con el abordaje de la función desde la covariación.

4.1 Conclusiones Generales

Es importante recordar que el objetivo general de este trabajo es Identificar y caracterizar en un grupo de estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo, algunos rasgos y elementos del concepto de función a través del desarrollo de situaciones problema de covariación. En concordancia con este objetivo, y como consecuencia coherente del análisis realizado, se detallarán aspectos relevantes y concluyentes del presente trabajo. Para esto, se citarán conclusiones en términos de cada objetivo específico, lo cual redundará en torno alcance o no, del objetivo general.

De esta manera, y en relación el primer objetivo específico, se puede afirmar que se pudo determinar un modelo teórico local -MTL- para el estudio de la función a través de la covariación. Dicho MTL estuvo soportado en la documentación de sus cuatro componentes, el de competencia formal, el de enseñanza, el de cognición y el de comunicación.

La fenomenología histórico-epistemológica dejó ver que los fundamentos para la construcción del concepto de función obedecen a la asociación y estudio de fenómenos de cambio, por lo tanto, este concepto debe estar soportado en nociones de variable, de dependencia, de transformación y de variación. De forma paralela, la fenomenología pura, permitió dilucidar cuál es la concepción de función desde el saber sabio, de donde se destacan las definiciones presentadas con elementos en común como “Correspondencia

entre valores de variables”, “Correspondencia entre elementos de dos conjuntos”, “Dependencia entre dos variables” y “Conjuntos de pares ordenados”. Estas definiciones o concepciones se pueden detallar en los libros de texto que se usan para la formación de matemáticos. Se observó también que los usos que se proponen para el concepto de función, se dan en contextos de fenómenos de cambio, sin embargo, en las definiciones se excluye ese contexto dinámico y se restringe a un enfoque conjuntista, donde la correspondencia prima entre dos conjuntos y representan parejas ordenadas.

De acuerdo con lo anterior, tanto la fenomenología pura como la epistemológica, proponen una definición que actualmente, está en términos de una visión conjuntista, sin embargo, para el diseño de las tareas de covariación se retoma la definición dinámica, pues lo histórico la presenta como prevalente, además, el no hacerlo, sería desconocer el largo camino que ha sido necesario recorrer para llegar a las definiciones clásicas que respondían a la necesidad de estudiar el movimiento. Adicional a lo anterior y pese a la definición conjuntista, en la revisión de la literatura, los usos que se proponen se dan en el marco del estudio del cambio.

En cuanto al modelo de enseñanza, se puede concluir que el MEN propone el estudio de la función desde la consideración de fenómenos de cambio y variación, es decir, el acercamiento al concepto de función desde un punto de vista dinámico, donde la dependencia entre variables debe primar sobre las reglas de asignación o correspondencia. Sin embargo, los textos escolares que se supone, deben reflejar la propuesta del MEN, siguen presentando el concepto de función desde una perspectiva estática y conjuntista. Esta afirmación, se hace en particular, con el insumo que aportó el análisis de dos textos escolares usados en el sistema escolar. Se observó que, aunque uno de ellos propone ejercicios y problemas en diferentes contextos, ambos textos coinciden en la forma como presentan el concepto de función, de manera conjuntista.

Como en el modelo cognitivo y de comunicación es importante estudiar la forma en que los estudiantes comprenden ciertos contenidos y cómo comunican sus saberes; entonces es menester considerar una enseñanza controlada atendiendo al acercamiento a la función desde las consideraciones que se hicieron en estos modelos. En concordancia con lo

anterior, el marco conceptual propuesto por Carlson para el estudio del razonamiento covariacional, se consideró como eje principal para el diseño de las tareas y la clasificación de los estudiantes de acuerdo a sus respuestas. Igualmente, este marco conceptual atiende al análisis que se puede hacer de los distintos SMS involucrados cuando un estudiante logra razonamientos más complejos a partir de sus conocimientos previos.

Todo lo mencionado hasta el momento, hizo parte del análisis previo de la problemática, lo cual implicó un MTL inicial para el trabajo de la función desde las actividades de covariación. Modelo que se caracteriza por el reconocimiento del concepto de función que fundamentalmente prioriza su concepción desde un punto de vista conjuntista y sin embargo, pretende los alcances que se proponen en los lineamientos curriculares, desde un enfoque variacional. Este aspecto demarcó en el MTL inicial la necesidad de trabajar el concepto de función, atendiendo al análisis variacional y considerando la función como una relación de dependencia. De forma paralela, dicho modelo inicial justificó la viabilidad de poner en observación el contraste de la hipótesis planteada, que propende por el acercamiento al estudio de ciertos elementos o rasgos de una función, a través de la puesta en escena de actividades de covariación. La determinación de este MTL inicial fue insumo principal para el diseño y desarrollo de la experimentación. Por lo tanto, lo que se mencionó anteriormente sobre cada una de las componentes, se concluyó en primera instancia como determinantes para el MTL inicial.

De acuerdo con lo anterior y en alusión con el segundo objetivo específico, relacionado con el desarrollar el proceso de experimentación a través del diseño e implementación de una propuesta de aula que involucra situaciones problema de covariación, se puede afirmar que el diseño de las tareas de covariación estuvieron fundamentadas desde los elementos teóricos de cada componente del MTL inicial. Se determinaron dos rasgos o aspectos principales para que el diseño y desarrollo de la experimentación permitiera obtener resultados fiables para la consolidación de un nuevo modelo teórico local. Dichos aspectos fueron: los elementos matemáticos asociados al concepto de función, y el marco conceptual de Carlson. El detalle de cada aspecto se mencionó en el capítulo 3.

El marco conceptual propuesto por Carlson et al., (2003) fue una herramienta determinante para la clasificación de las actuaciones de los estudiantes pues involucra elementos asociados a los procesos cognitivos de estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de covariación. Además de la propuesta de Carlson para lograr comportamientos cercanos a los asociados a cada acción mental (AM1 hasta AM5), en el diseño de las preguntas se tuvo en cuenta lo que afirman Dolores y Salgado (2009), donde se busca que los estudiantes realicen acciones que los conlleven a involucrarse con preguntas como: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿a qué razón cambia? y ¿cómo se comporta globalmente la gráfica?

Para el diseño de las tareas, se tuvo en cuenta que las distintas nociones matemáticas, los tipos de representaciones y diferentes estratos de los SMS se encontraran correlacionadas y fueran aumentando gradualmente la complejidad de acuerdo con los comportamientos y las acciones mentales dilucidados por Carlson.

De forma paralela a los dos aspectos mencionados anteriormente, desde el marco curricular vigente en Colombia, para el diseño de las tareas también se tuvo en cuenta, los estándares básicos de competencia en matemáticas para los grados octavo y noveno. En el capítulo 3 se encuentra el detalle de los estándares tenidos en cuenta. Además, para el presente trabajo se tuvo en cuenta como insumo una actividad propuesta por Villa (2012) en un trabajo de investigación donde estudia la función cuadrática a través del razonamiento covariacional.

En cuanto a la metodología que se planteó en presente estudio, se pudieron evidenciar los diferentes matices o situaciones que se presentaron durante la intervención en el aula, aunque gran parte del tiempo, el trabajo individual fue el más predominante, esto no implicó o no descartó otras alternativas de trabajo como por ejemplo el trabajo entre parejas, de igual manera también fue importante las plenarias como prácticas de trabajo grupal y validación de conocimientos.

De otro lado, y en términos del tercer objetivo específico, los resultados de los estudiantes, en torno a las preguntas de las tareas, y sus respectivos análisis, pusieron de manifiesto la identificación y caracterización de elementos, rasgos y aspectos asociados al concepto de

función; a partir de la resolución de actividades de covariación. A continuación se explicitan algunas conclusiones en torno a ello:

- La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió que los estudiantes, con preguntas específicas se fueran encaminando y obteniendo avances en las formas del razonamiento que usaban. En dichos razonamientos fue evidente el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, como: variables independientes, variables dependientes, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función. Esta conclusión se hace a partir de los resultados de las actuaciones de los estudiantes en las tres tareas de la situación 2, donde las preguntas también tenían la intención de observar elementos presentes en el discurso de sus explicaciones para poder tener más información acerca de la forma en que están entendiendo o comprendiendo alguna situación. Asimismo, estos comportamientos observados en los estudiantes dan cuenta del porqué se les clasificó en el nivel N3 de razonamiento covariacional del marco conceptual propuesto por Carlson, puesto que los estudiantes, en sus actuaciones, dieron cuenta de la comprensión del comportamiento de los cambios desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo.
- Igualmente, con las tareas de covariación, específicamente, con la consideración de la razón de cambio, se logró que los estudiantes tuvieran acercamientos importantes a la comparación de los cambios. Este logro implica una serie de eventos asociados en diferentes grados de complejidad, pues se pasó del reconocimiento de una relación entre magnitudes, a capturar la covariación como tal. En este orden de ideas, es importante resaltar que los puntos en el plano cartesiano representan relaciones entre magnitudes, a su vez, la comparación de dos puntos da cuenta del cambio, cambio que relacionado con otros de la misma gráfica, da cuenta de la variación. Así pues, con las tareas se logró que los estudiantes analizaran los cambios de los cambios, es decir, que compararan los cambios; esto implicó el reconocimiento de la correlación de la forma de cambio entre dos cambios. Como se dijo al inicio del análisis de la situación 3, esta se caracteriza por el trabajo directo con la razón de cambio. De esta

forma, a partir de los resultados de los estudiantes, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes identificó, describió e interpretó adecuadamente el significado de los cambios de una variable y los cambios de otra, es decir, Δy en relación con Δx . Cuando los estudiantes realizan afirmaciones como: “la razón de cambio es constante”, “por cada unidad que cambia el segmento DE, el largo de la plazoleta cambia $\sqrt{2}$ unidades”; están verbalizando la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras atienden a los cambios en el valor de entrada. Esto, a su vez implica, en las actuaciones de los estudiantes, comportamientos asociados a la acción mental 3 (AM3) que a su vez da cuenta de la coordinación cuantitativa de los cambios de una variable con los cambios en la otra.

- Respecto a los sistemas semióticos de representación, los estudiantes evidenciaron de forma paulatina a través del desarrollo de las tareas, mayor dominio sistémico de los distintos registros para manipular o realizar el tratamiento de datos específicos según las condiciones y consignas solicitadas. Específicamente, en la tarea 3 de la situación 3, se le pedía a los estudiantes esbozar dos gráficas y, a diferencia de las tareas de las situaciones 1 y 2, esta vez no se les sugirió pauta alguna, de tal manera que los estudiantes debían poner en práctica sus conocimientos previos y las nociones que han venido afianzando en el desarrollo de las situaciones, para poder dar resolver lo requerido. Fue justamente en esta tarea 3 mencionada, donde los estudiantes, para poder esbozar las gráficas, debían acudir a otros registros como el dinámico (uso del software), el tabular, lenguaje simbólico o algebraico, y el de la lengua natural. El uso sistémico de estos registros, permitió que la mayoría de estudiantes lograra sustentar verbalizaciones asociadas a las formas de cambio, la dirección de los cambios y la cuantificación de ellos, en términos de los cambios respectivos en otra magnitud que varía de forma conjunta con la primera.
- Es importante manifestar que la *función* se ha trabajado desde la concepción de relación de dependencia, pues los estudiantes, por las mismas condiciones de las preguntas, no realizaron gráficas y tablas, necesariamente a partir de expresiones algebraicas, lo cual los aleja de una concepción netamente desde una relación de

correspondencia o consecuencia de cálculos algorítmicos mediados por una regla de asignación.

- En cuanto a lo sintáctico vs lo semántico, en algunos estudiantes se evidenció dificultades en torno a la correcta interpretación de lo que significa el cambio de una variable y poderlo interpretar en términos de los cambios de otra variable. Es decir, dificultades en la correcta significación del cociente entre los cambios de cada variable y las implicaciones que ello tiene en la comparación de los cambios para determinar el cambio de los cambios, que en últimas determina nivel de pensamiento covariacional que puede llegar a desarrollar un estudiante. Un ejemplo de dichas dificultades, es la confusión de x con Δx .
- El desarrollo del pensamiento covariacional en los estudiantes, permitió el acercamiento a nociones asociadas a la función como: decrecimientos, crecimientos, dependencia y visos del comportamiento dinámico que subyace a cualquiera de las representaciones de la función, representaciones que suelen ser estáticas sino se consideran aspectos variacionales y sino se estudia el comportamiento de los cambios de una variable en relación con los cambios de la otra que depende de la primera.
- Teniendo en cuenta que el estudio de la función es el eje principal para la comprensión del cálculo, es importante destacar que la función debe ser estudiada no sólo desde la definición de sus elementos asociados, sino también desde los aspectos dinámicos que ella modela o representa. En este orden de ideas, el estudio del comportamiento de los cambios posibilita que la función realmente sea el epicentro del estudio del cálculo. En la escuela, normalmente, la función se muestra aislada de otros aspectos como los límites, la derivada y las integrales, es decir, el cálculo diferencial e integral pierde sentido si no se le ha adjudicado al concepto de función su carácter dinámico.
- La consideración de la razón de cambio, le permitió a algunos estudiantes poder caracterizar el comportamiento y tendencia de una función, dependiendo si la razón

de cambio es constante o si es variable. Muestra de ello, fue la caracterización que se pudo hacer entre las funciones, de acuerdo a la comparación de los cambios y los grafos correspondientes, para diferenciar una función lineal de una cuadrática.

- La última tarea de la situación 3, permitió que los estudiantes llegaran a esbozar gráficas a partir de la descripción y conocimiento de la forma en que se comportan y relacionan los cambios de las magnitudes involucradas. En este orden de ideas, algunos estudiantes llegaron a reconocer que para esbozar una gráfica, no necesariamente se debe tener una expresión algebraica que la soporte predeterminadamente; en particular, que no siempre una gráfica es susceptible de ser modelada a través del estudio de regularidades.
- Aunque algunas nociones no habían sido trabajadas por los estudiantes previamente, el desarrollo de las tareas permitió en los estudiantes la exploración y aprendizaje relacionados con el concepto de función. En este orden de ideas, los estudiantes tuvieron la posibilidad de explorar diferentes procesos heurísticos que subyacen a las nociones citadas en las viñetas anteriores. Sin embargo, los estudiantes no necesariamente reconocían la mayoría de estas nociones con nombres específicos o con definiciones de conceptos claramente especificados por parte del docente.
- El proceso de visualización que se intentaba privilegiar en las tareas de covariación, se pudo evidenciar en las actuaciones de los estudiantes, cuando estos reconocieron aspectos de variabilidad del movimiento de puntos y magnitudes. Este comportamiento en los estudiantes, es consecuencia de la correcta identificación de cantidades que varían, la dirección de cambio, puntos y magnitudes invariantes; aspectos que estuvieron presentes, aumentando gradualmente la complejidad, en las actuaciones de los estudiantes en torno a las últimas seis tareas (correspondientes a las dos últimas situaciones). En particular, cuando se usó GeoGebra, todos los avances y consideraciones dinámicos a las que condujo el software, permitió abstracciones de mayor complejidad que inclusive están por fuera del alcance representacional de dicho instrumento. Esto se vio reflejado, por ejemplo, cuando se les propuso esbozar la gráfica de *área de la plazoleta vs área de las zonas verdes*,

donde los estudiantes tuvieron que realizar un razonamiento covariacional a lápiz y papel, que el software no proporcionaba directamente, y sin embargo, toda la exploración realizada al principio con el instrumento fue importante para que el estudiante lograra abstraer y operar con distintas representaciones más complejas que suponían la gráfica como consecuencia de la covariación.

- Los conocimientos previos de los estudiantes son importantes para poder desarrollar otros, en este caso, conocimientos asociados al pensamiento variacional. En el desarrollo de este trabajo, los estudiantes pudieron lograr acercamientos importantes relacionados con lo que debe subyacer a la comprensión de nociones relacionadas con el concepto de función. De esta manera, es relevante que a partir de los SMS concretos (conocimientos previos), los estudiantes sientan la necesidad de alcanzar unos SMS más abstractos, a través de otros que sean intermedios. Es decir, la imposición de un SMS abstracto, no es significativo si no se pone en conflicto con otros más concretos.
- El desarrollo del pensamiento variacional y en particular, el aprendizaje de la función, se ve potencializado a partir del estudio del razonamiento covariacional y la contemplación del marco conceptual de Carlson. Esto, en virtud de que la clasificación que se propone permite exaltar el comportamiento y descripción de los razonamientos de los estudiantes durante su actuación, que a su vez, permite dilucidar los aspectos matemáticos involucrados, en este caso los asociados al concepto de función. Igualmente, este marco en conjunto con unas tareas orientadas en el trabajo con la covariación, permite que los estudiantes pongan en juego distintas estrategias y procesos heurísticos que apuntan más al desarrollo de competencias que al abordaje simple de un tema.
- Después de la aplicación de las tareas y posterior análisis de las actuaciones de los estudiantes, a estos se les pudo clasificar en los distintos niveles de razonamiento covariacional propuestos por Carlson, exceptuando el nivel de razonamiento covariacional N5, pues las acciones mentales asociadas a él, no fueron consideradas para efectos de la secuencia de enseñanza, ya que no se tuvo la intención de trabajar

con la razón de cambio instantánea. De esta manera, en cuanto a los demás niveles, se puede afirmar que la totalidad de estudiantes pudo ubicarse en el nivel de razonamiento covariacional N2, en este nivel, las imágenes de Covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. (AM1 y AM2). En cuanto al nivel de razonamiento covariacional N3, la mayoría de estudiantes pudo clasificarse en él, es decir, la mayoría pudo sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra (AM1, AM2 y AM3). Finalmente, en el nivel N4, sólo aproximadamente la mitad de los estudiantes involucrados en el estudio, se pudo clasificar en él, esto obedece a ciertas dificultades que tuvieron algunos estudiantes en cuanto a lo sintáctico y lo semántico, específicamente, cuando confundían la magnitud con la forma de sus cambios, por ejemplo, confundir x con Δx .

- De acuerdo con todo lo que se ha mencionado hasta el momento y en relación con la hipótesis que se pretendía contrastar en el MTL inicial, se puede afirmar que en efecto, el concepto de función se puede y se debería trabajar a partir de tareas de covariación, ya que estas permiten observar el comportamiento dinámico que subyace a dicho concepto. Esto se pudo evidenciar en los resultados de las actuaciones de los estudiantes y la relación que se estableció con los elementos teóricos delimitados en cada componente del MTL inicial.

4.2 Algunas reflexiones didácticas para el aprendizaje y enseñanza del concepto de función

En este apartado se explicitaran discusiones y reflexiones didácticas, que como consecuencia de los resultados de este estudio, dan cuenta del cuarto objetivo específico de este trabajo, es decir, se contemplarán reflexiones teóricas y metodológicas a la enseñanza de la función, desde la covariación a la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta y en general, para la Escuela.

- Aunque este trabajo se centró en la observación de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven tareas de covariación para dilucidar los conocimientos asociados al concepto de función; el diseño de la secuencia de enseñanza y los resultados del presente estudio, se convierten en insumos importantes para el diseño y rediseño de secuencias didácticas o tareas cuyo objetivo sea desarrollar el pensamiento variacional. Para esto, la covariación y la función son ejes fundamentales como objetos matemáticos.
- Los resultados de las actuaciones de los estudiantes y la revisión de la literatura, permiten concluir que el trabajo con la covariación se puede articular en instrumentos de intervención en el aula, sin importar la edad. En este orden de ideas, se recomienda a la institución empezar a trabajar actividades cognitivas relacionadas con la covariación, desde grados escolares de la básica primaria y la básica secundaria anteriores a grado noveno. En el caso particular de este estudio, los estudiantes de grado noveno tuvieron aciertos notorios en relación con el pensamiento covariacional y se pudo inferir en ellos, rasgos asociados a sus actuaciones que ponen de manifiesto que se pueden obtener resultados satisfactorios en grados anteriores. Es decir, las actividades de covariación se pueden trabajar en edades tempranas de escolaridad, puesto que no necesariamente se requiere que los estudiantes tengan dominio de la sintaxis algebraica.
- El diseño y desarrollo de las actividades de covariación, deja en la Institución Educativa un precedente importante acerca de la importancia de que las actividades o tareas propuestas en el aula sean con la intención de desarrollar competencias y no simplemente abordar contenidos programáticos. De esta manera, se sugiere seguir trabajando en el desarrollo de competencias, pues para poder lograrlo hay varios medios, uno de ellos (pero no el único) es el abordaje de contenidos, pero hay otros acercamientos que permiten mayor profundidad en el desarrollo del pensamiento matemático. Esta es una implicación importante para tener en cuenta en la reformulación del plan de área, pues no se trata de enseñar sólo contenidos, se trata de poder proponer situaciones, inclusive transversales con otras áreas, que permitan

el trabajo y desarrollo de competencias matemáticas. En el caso particular del estudio realizado, la covariación permitió el desarrollo del pensamiento variacional a través del fomento y fortalecimiento del uso de actividades cognitivas por parte del estudiante, logrando, entre otras cosas, la concepción del concepto de función como relación de dependencia y no sólo como correspondencia.

- De los aspectos metodológicos llevados a cabo durante el diseño y la implementación, se destaca el hecho de que algunas nociones no habían sido trabajadas por los estudiantes previamente. En este orden de ideas, los estudiantes tuvieron la posibilidad de explorar diferentes procesos heurísticos que subyacen a las nociones asociadas al concepto de función, sin embargo, los estudiantes no necesariamente reconocían la mayoría de estas nociones con nombres específicos o con definiciones de conceptos claramente especificados por parte del docente. Como consecuencia de esto, para la Institución Educativa es necesario seguir implementando en las prácticas de enseñanza actividades o tareas que, aunque pretendan el logro de la comprensión de nuevos contenidos, partan del trabajo con los saberes previos de los estudiantes; lo cual permitirá establecer SMS intermedios entre los SMS concretos y los más abstractos. En este orden de ideas, es importante tener en cuenta que la imposición de un SMS abstracto, no es significativo si no se pone en conflicto con otros más concretos.
- El proceso de visualización que se intentaba privilegiar en las tareas de covariación, se pudo evidenciar en las actuaciones de los estudiantes, cuando estos reconocieron aspectos de variabilidad del movimiento de puntos y magnitudes. En particular, cuando se usó GeoGebra, todos los avances y consideraciones dinámicos a las que condujo el software, permitió abstracciones de mayor complejidad que inclusive están por fuera del alcance representacional de dicho instrumento. Esto, trae implicaciones importantes para la Institución Educativa y la escuela en general, en cuanto a la necesidad de explorar otros recursos como los software dinámicos, que pueden considerarse como una extensión fidedigna de la intuición y además permite

validar situaciones que difícilmente se pueden representar a lápiz y papel o se escapan de la visualización espontánea.

- En el estudio realizado, el razonamiento covariacional (Carlson et al., 2003) fue una herramienta importante para clasificar las actuaciones de los estudiantes como consecuencia de comportamientos asociados a determinadas acciones mentales, para posteriormente situar a los estudiantes en unos niveles de razonamiento covariacional. Ya en las interpretaciones y análisis de los resultados (mencionados en el capítulo 3) y algunas conclusiones mencionadas en el apartado 4.1, se detalló sobre sus implicaciones. Esas implicaciones ponen de manifiesto la importancia de que los profesores puedan contar con herramientas que permitan poder clasificar y observar las actuaciones de los aprendices, en procura de poder analizar los procesos cognitivos que subyacen a las respuestas de sus estudiantes y que por consiguiente le permitan reflexionar y reorientar sus prácticas pedagógicas.
- La metodología propuesta para la aplicación y evaluación de las tareas de covariación, se caracterizó por tener en algunos momentos trabajos en parejas (trabajo colaborativo) lo cual que permitió la discusión y confrontación de saberes que posteriormente condujo a la institucionalización de saberes. En este orden de ideas, la evaluación se convirtió en la observación y acompañamiento en el proceso cognitivo de los estudiantes, donde no necesariamente tiene que haber una nota de por medio. Teniendo en cuenta este aspecto, y la concepción de evaluación que propone el MEN, es necesario que las Instituciones Educativas promuevan la evaluación continua y permanente, entendiendo que para la evaluación necesariamente no tiene que haber una nota de por medio, más bien entendiendo que la evaluación es el proceso donde el profesor y el estudiante hacen un diagnóstico de las dificultades, con el fin de que estas sean aclaradas, para posteriormente seguir avanzado, es decir, no de la manera tradicional donde la evaluación es sinónimo de una nota, sino como un espacio donde se promueve el aprendizaje a través de la discusión, corrigiendo los errores y finalmente, institucionalizando los saberes.

- Es importante tener en cuenta que el uso de distintos registros de representación per se, en particular el tabular asociado al algebraico, no necesariamente garantizan que los estudiantes desarrollen pensamiento variacional, pues es necesario que además se haga alusión a contextos específicos y haya preguntas orientadoras que permitan que el estudiante no se quede en la sintaxis, de tal manera que lo semántico debe imperar para la significación de variables y correcta interpretación de las relaciones de dependencia existentes.

4.3 Limitaciones del estudio y recomendaciones para una posterior investigación

De acuerdo con los resultados de este trabajo, quedan varios aspectos que se convierten en precedentes para futuras investigaciones y no sólo desde el trabajo como tal, sino también desde la condición de recursividad que sugiere el marco de los MTL. En este orden de ideas, los resultados, análisis de los resultados y lo que se ha dicho en los apartados 4.1 y 4.2, donde se expresan algunas conclusiones y reflexiones didácticas; se convierten en insumos o línea de base para reformular o considerar otro MTL cuyo propósito esté relacionado con la covariación, razonamiento covariacional o concepto de función. La formulación de otro MTL implica entonces, la consideración de aspectos que hayan quedado por fuera de los alcances del MTL inicial y que se desarrolló en este trabajo.

A continuación, se explicitarán algunas recomendaciones que, a partir de los resultados de este trabajo, deberán ser objeto de observación y estudio para futuras investigaciones en torno a la función abordada desde la covariación, y para posibles consideraciones desde una propuesta de enseñanza y lo que ello implica en el aula de clases.

- Aunque este trabajo se centró en la observación de las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven tareas de covariación para dilucidar los conocimientos asociados al concepto de función; los resultados del presente estudio, pueden ser tomados como referentes importantes para el diseño de tareas de covariación y para diseñar una propuesta de enseñanza que propenda por el aprendizaje del concepto de función y la contemplación de la variación como eje articulador indispensable.

- El trabajo con la covariación se puede articular en instrumentos de intervención en el aula, sin importar la edad. En el caso particular de este estudio, los estudiantes de grado 9° tuvieron aciertos notorios en relación con el pensamiento covariacional y se pudo inferir en ellos, el manejo y reconocimiento de aspectos asociados al concepto de función. Esto sugiere una forma distinta de acercarse al trabajo con dicho concepto.
- Los resultados de este estudio mostraron que las tareas de covariación permitieron, en los estudiantes, el desarrollo de habilidades asociadas al razonamiento covariacional, que aporta mayor fuente de desarrollo del pensamiento variacional en comparación con el abordaje típico del concepto de función. De esta manera, se logró un acercamiento a lo que proponen los estándares en cuanto al concebir la función como relación de dependencia y no como relación de asignación.
- Para dimensionar con mayor precisión los alcances de las tareas, es importante que los estudiantes tengan unos prerrequisitos básicos en sus SMS, pues como pudo notarse en el desarrollo de este trabajo, en la medida en que los estudiantes dominen con suficiencia algunos aspectos conceptuales anteriores, se podría haber potencializado cada intervención de los estudiantes cuando intentaban comprender, justificar o comunicar alguna idea. Algunos de los prerrequisitos asociados a SMS concretos son: las notaciones asociadas al plano cartesiano, el tratamiento de la sintaxis algebraica, y el correcto tratamiento aritmético entre cantidades numéricas que no estén representadas en términos de números enteros (por ejemplo el uso y tratamiento de cantidades con radicales).
- Otro aspecto importante para tener en cuenta en el diseño de las tareas y actividades de covariación, es el hábito que deben tener en los estudiantes en cuanto al uso de habilidades de razonamiento y expansiones discursivas. Esta recomendación es importante en la medida en que permite evaluar y analizar con mayor especificidad cómo está razonando un estudiante y por ende, qué habilidades, conocimientos y

dificultades se pueden asociar a su proceso de aprendizaje. Además, las preguntas que se hagan tienen que estar diseñadas de tal manera que los estudiantes no respondan de forma concreta (un sí, un no, o una cantidad numérica) sino que les dé la posibilidad de poder manifestar sus estrategias, explicaciones y conjeturas con argumentos válidos para intentar defender su postura ante otra distinta. Si los estudiantes no están habituados a este tipo de metodologías; las preguntas o consignas: *¿por qué?*, *explica tu procedimiento*, *justifica tu respuesta*, *propone otra alternativa*, entre otras; carecerían de sentido para el estudiante y poco podrían hacerse entender al comunicar sus argumentos.

- Igualmente, en el diseño de propuestas de enseñanza en torno al concepto de función o la covariación, debe tenerse en cuenta que las preguntas no pueden ser tan conductistas, por el contrario, deben permitir la exploración por parte del estudiante y la respuesta de alguna pregunta no debe estar anclada de forma directa con el enunciado de la siguiente. Esto supone un grado de dificultad para el estudiante, pues el no poder responder una pregunta implica, necesariamente, no poder responder las que siguen.
- En el caso de este estudio, el uso de GeoGebra se dio de tal manera que los estudiantes exploraron sobre macros ya prediseñadas por los observadores. Esto abre la puerta para que una recomendación sea que el estudiante quien explore sin tener dichas macros predefinidas. Así pues, se sugiere el uso de un contexto real que se pueda matematizar y por ende permitir que el estudiante pueda modelar en un software ciertas regularidades del fenómeno, en caso de que las haya.
- De acuerdo al marco conceptual de Carlson, el nivel N5 no fue abordado en las tareas, lo cual es una limitación en el estudio de la razón instantánea y su relación con la función derivada. De esta manera, un posible estudio futuro podría estar basado en el diseño y posterior aplicación, de actividades donde las respuestas esperadas estén relacionadas con la función derivada y casos asociados al límite cuando la variación de una variable tienda a ser cero.

En lo que se ha mencionado en este apartado de conclusiones, se ha confrontado lo que ocurrió en el desarrollo del estudio experimental con la tesis teórica que se enunció a partir del Modelo Teórico Local inicial. A partir de los resultados obtenidos en la experimentación, la problemática inicial de este estudio, se enmarca en la perspectiva de un nuevo Modelo Teórico Local, en el que se debe tener en cuenta las aportaciones que se hacen a los componentes de cognición, enseñanza y comunicación del MTL inicial.

En los esquemas del diseño y desarrollo de la experimentación se observa que hay una recursividad que, a partir de las conclusiones de este estudio, debe llevarse a la primera fase del diseño para poder iniciar nuevamente. Sin embargo, podría darse el caso en que este trabajo tal como fue planteado desde el primer MTL (el inicial), sea rechazado o reformulado en otros que se adecúen mejor a la problemática o lo que se pudo observar.

De acuerdo con todo lo mencionado, en términos de restricciones y aciertos en cuanto los resultados de este trabajo; a continuación, se explicitan algunas preguntas o hipótesis que podrían delimitar o ser punto de partida como proyección de otros estudios o de doctorado.

- ¿En qué medida las tecnologías de la información y comunicación (TIC) pueden contribuir al desarrollo del concepto de función?
- ¿Cómo los estudiantes de primaria pueden acercarse al concepto de función desde una perspectiva covariacional?
- ¿Cómo lograr, en estudiantes de la educación media, acercamientos al desarrollo del concepto de función y la concepción de función derivada, desde el razonamiento covariacional?
- ¿Hasta qué punto el estudio de la función permea el desarrollo de otros aspectos del cálculo integral y diferencial?

REFERENCIAS

- Achinstein, P. (1967). *Los modelos teóricos*. México: UNAM.
- Allen, R., & Angel, D. R. P. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Séptima edición.
- Apostol, T. M. (2007). *Calculus, volume I*. New York: John Wiley & Sons.
- Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E. & Sánchez, G. (1999). *Análisis de textos escolares de Matemáticas*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano, pp. 97-140.
- Ávila, P. (2011). *Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática* (Tesis de maestría). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Ayala-García, J. (2015). *Evaluación externa y calidad de la educación en Colombia*. Bogotá: Banco de la República.
- Betancur, Y. (2013). *Una propuesta metodológica para enseñar el concepto de función desde la experimentación* (Tesis de maestría). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 17, pp. 1-9.
- Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42(14), p. 3.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5)pp. 352-378.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), pp. 121-156.
- Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in collegiatemathematicseducation*, 3, pp. 114-62.
- Carrasco, E. (2013). Visualizando lo que varía. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, 17, pp. 348-354.

- Chávez, H., Castañeda, N., Gómez, M., Joya, A., Chizner, J., & Gómez, M. (2010). *Hipertexto Matemáticas 9*. Bogotá, Colombia: Santillana.
- Chevallard, Y. (1986). *La Transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, *Revue française de pédagogie*, 76 (1), Grenoble: La pensée sauvage, pp. 89-91.
- Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 135-164.
- Del Castillo, A., & Montiel, G. (2007). El concepto de función en un ambiente geométrico dinámico bajo el enfoque covariacional. Yucatán: Memoria electrónica de la XI escuela de invierno, pp. 568-579.
- Del Castillo, A., & Montiel, G. (2009). Desarrollo del pensamiento covariacional en un ambiente gráfico dinámico. Hacia una génesis instrumental. En Leston (Ed.) *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, 22, pp. 1671-1680.
- Doorman, L. M., & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM*, 41(1-2), pp. 199-211.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), pp. 1243-1267.
- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. In *Proceedings of the 14th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 27-36.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington: Mathematical Association of America.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Edwards C., & Penney, D. E. (1996). *Cálculo con geometría analítica*. México: Pearson.
- Espinosa, F. H. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista Educación Matemática*, 10(2), pp. 23-45.
- Espinosa, L. R. Puig. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos. En *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Huesca: Instituto de Estudios Alto aragoneses. pp. 107-126.

- Farfán, R., & García, M. A. (2005). El concepto de función: Un breve recorrido epistemológico. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, 18, pp. 489-494.
- Fillooy, E. (1999). Modelos Teóricos Locales (MTL): Un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. En *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Iberoamericana.
- Fillooy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), pp. 327-342.
- Flores, C. Dolores., & Beltrán, G. Salgado. (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números*, (72), pp. 63-74.
- Galperín, P. Y. (1995). *Teoría de la formación por etapas de las acciones mentales*. Moscú: Editorial MGY.
- García, L., Vázquez, R. A., & Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Revista de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León*, (24), pp. 27-34.
- García, Vázquez & Hinojosa (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías*, VII, (24), pp. 27-34.
- Giménez, C. A., & Machin, M. C. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Edición Especial: Educación Matemática*, pp. 135.
- Gómez, J., Orozco, J., Realpe, G., Benavides, G., Navarro, N., Guacaneme & Edgar A. (2012). *El pensamiento variacional: un asunto de juego y actividad matemática en la escuela*. En Obando, Gilberto (Ed.), *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 914-921, Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- González, M., & Martín, E. (2004). Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas. En *actas de XVI Simposio Iberoamericano de enseñanza Matemática Matemáticas para el Siglo XXI*. Recuperado de www.iberomat.Uji.es/carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 1(1), pp. 5-21.
- Hernández, E., Galindo, O., & Santana, K. (2003). Una experiencia de diseño curricular en torno a la variación conjunta. *Revista EMA*, 8(2), pp. 237-255.

- Higueras, L. R. (1994). *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico* (Tesis doctoral) Granada: Universidad de Granada.
- Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *Investigaciones en matemática Educativa*, pp. 245-264.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), pp. 123-134.
- Hitt, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. *CINVESTAV-IPN*, pp. 131-147.
- Hitt, F., & Morasse, C. (2009). Pensamiento numérico-algebraico avanzado: construyendo el concepto de covariación como preludio al concepto de función. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(17), pp. 243-260.
- Jiménez, C. A., & Piquet, J. D. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis. Barcelona: Universidad de Barcelona.
- Kaput, J.J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En A.H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematics and cognitive science*, pp. 77-156, Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação*, pp. 47-82.
- López, J. (2007). Dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al concepto función. Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán.
- López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, (21), pp. 308-318.
- Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión de la matemática y la Teoría APOE. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 6(3), pp. 221-278.
- Mejía, P. (2011). Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática. (Tesis de maestría), Medellín: Universidad Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Serie Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN.

- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. En MEN, Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN.
- Moratalla, P. T. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, (21), pp. 35-50
- Noreña, R. A. (2012). Funciones racionales en el desarrollo de pensamiento variacional.(Tesis de pregrado), Cali: Universidad del Valle.
- Pisa (2014). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do Student Performance in Mathematics. París: OECD Publishing.
- Porras, F. (2012). El concepto de función en la transición bachillerato universidad (Tesis de maestría), Cali: Universidad del Valle.
- Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de maestría), Medellín: Universidad de Antioquia.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 61-94, Barcelona: Horsori.
- Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En Filloy E. (Ed.) *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual*, pp. 174-186, México: Fondo de cultura económica.
- Rasmussen, C. (2000). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, pp. 55-87.
- Rey, G., Boubée, C., & SastreVaz, P. (2009). Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (20), pp. 153-162.
- Rodríguez, M. Parraguez, M. Vásquez, P. (2013) Interpretaciones de estrategias en resolución de problemas desde la teoría antropológica de lo didáctico y concepto-imagen y concepto-definición de Vinner. *Actas del VII CIBEM*, pp. 3337-3344.
- Sánchez, C. (2011). *Propuesta didáctica para lograr aprendizaje significativo del concepto de función mediante la modelación y la simulación*. (Tesis de maestría), Medellín: Universidad Nacional.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 125-154.

- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), pp. 151-169.
- Tarazón A. I. (2012). Una metodología para abordar problemas algebraicos de enunciación verbal. Recuperado de <https://es.scribd.com/doc/158354615/Tesis-Israel-Tarazon-Tesis-maestria>
- Ugalde, W. J. (2013). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 14(1), pp. 1-48.
- Valero, M. D. S., Barba, M., Ventura, M. P., Del Castillo, A., & Torres, M. J. (2010). Un estudio de la covariación con profesores universitarios usando tecnología, *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, 23, pp. 1247-1256.
- Vasco, C. E. (2005). El pensamiento variacional y la modelación matemática, *Zetetiké*, 13, (23), pp. 63-86.
- Vasco, C. E., & Carlos, E. (2006). *Siete retos de la educación colombiana para el periodo de 2006 a 2019*. Recuperado de <http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/RetosEducativos.pdf>
- Villa-Ochoa, J. A. (2008). *El concepto de función: Una mirada desde las matemáticas escolares*. En: Leston, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME*, 21, pp. 245-254, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – Colegio Mexicano de Matemática Educativa. **DOI:** 10.13140/RG.2.1.3263.0481
- Villa Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), pp. 9-25.
- Villa Ochoa, J. (2013). El estudio de la tasa de variación como una aproximación al concepto de derivada. En Roa, S., Parada, S., Fiallo, J. (Eds.), *4to Seminario Taller de Educación Matemática: La enseñanza del cálculo y las componentes de su investigación*, Bucaramanga: Publicaciones UIS.
- Villa Ochoa, J. (2013, junio). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase. Presentado en *Conferencia nacional sobre modelagem na educação matemática. Modelagem matemática: pesquisas, práticas e implicações para la educação matemática*, pp. 5-7, Santa María: Centro universitário franciscano.
- Villa Ochoa, J., & Vahos, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação matematicapesquisa*, 12(3), pp. 514-528.

- Vrancken, S., Schmithalter, M., Engler, A., & Müller, D. (2014). Las funciones y sus gráficas en el estudio de la variación y el cambio, *Acta latinoamericana de Matemática educativa*, 27, pp. 1299-1307.
- Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of exact Sciences*, 16(1), pp. 37-85.
- Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, pp. 103-127.

ANEXOS

Anexos 1: Selección, presentación y descripción general de los textos

Criterios de selección de dos textos escolares

Tengamos en cuenta que el concepto objeto de análisis en los libros de texto es la función y que según lo mencionado anteriormente en el marco legal o curricular, dicho concepto aparece para el ciclo de octavo y noveno grado.

Revisando algunos textos escolares de esos dos grados, se puede evidenciar que para ambos grados se trata el concepto de función. Las diferencias radican en que en el de grado 8º, se dedica mayor parte a la sintaxis algebraica y el concepto de función aparece en una de las últimas unidades, especialmente se habla de la función lineal. En el de grado 9º, El concepto de función aparece en más unidades del texto y además de definirse, se dedican unidades aparte a tipos de funciones como las lineales, afines, cuadráticas, logarítmicas y exponenciales. Por esa razón, consideramos importante analizar los textos de grado 9º, pues según nuestro propósito, es importante poder identificar elementos de la función que son comunes y subyacen a todas, independientemente del tipo, y que no necesariamente deben ser lineales.

Por lo tanto, el criterio fundamental para seleccionar los textos es que fueran textos que los profesores usaran en grado 9º, que en la mayoría de casos, su título, viene rotulado o especifica que es para dicho grado.

Además de lo anterior, otro criterio tenido en cuenta fue el que los textos fueran de ediciones recientes, esto garantiza que sean usados actualmente. Por eso se tuvo en cuenta la preferencia al usar algún determinado texto, por parte de los profesores que orientan cursos de matemáticas para noveno grado. En esta parte, es menester resaltar que para la selección de los textos de matemáticas de grado noveno analizados, se tuvo en cuenta una encuesta realizada a profesores de matemáticas de distintas Instituciones Educativas. Específicamente, la pregunta fue: ¿qué libro usan sus estudiantes como texto guía en matemáticas, o cuál o cuáles usa usted para tomarlos como referencia a la hora de preparar sus clases o proponerles actividades a los estudiantes?

A continuación se muestra una tabla con el nombre de Instituciones educativas, el municipio donde está ubicado, su carácter y el texto guía que manejan. Se tuvo en cuenta que aproximadamente hubiera la misma cantidad de colegios privados y oficiales.

Institución o Colegio	Municipio	Carácter	Texto Guía
1. I.E. Policarpa Salavarrieta	Yumbo	Oficial	Guías, Álgebra Intermedia, Hipertexto
2. La Arboleda	Cali	Privado	Álgebra Intermedia
3. Liceo Benalcázar	Cali	Privado	Álgebra Intermedia
4. Nuestra Señora de la Consolación	Cali	Privado	Hipertexto. Matemáticas 9, Ed. Norma
5. Diana Oese	Cali	Privado	Álgebra Intermedia, Hipertexto
6. Colegio Jefferson	Yumbo	Privado	Álgebra Intermedia
7. Bennett	Cali	Privado	Hipertexto
8. I.E. Hernando Navia Varón	Cali	Oficial	Nuevas Matemáticas Santillana
9. Colegio Berchmans	Cali	Privado	Guías, Álgebra Intermedia
10. I.E. Francisco José Lloreda Mera	Cali	Oficial	Hipertexto. Álgebra intermedia.
11. Luis Carlos Valencia	Jamundí	Oficial	Avanza Matemáticas, hipertexto
12. Liceo Tacurí	Cali	Privado	Álgebra intermedia.
13. Eustaquio Palacios.	Cali	Oficial	Álgebra de Baldor.
14. I.E Rosa Zarate de Peña	Yumbo	Oficial	Alfa, Páginas de Internet
15. I.E. Leonor Lourido de Velasco	Yumbo	Oficial	Algebra y Geometría II Santillana
16. I.E. Inem Jorge Isaac	Cali	Oficial	Algebra y Geometría II Santillana, Álgebra de Baldor.
17. I.E. La Merced	Cali	Oficial	Algebra y Geometría II Santillana, Álgebra de Baldor.

Con los datos obtenidos anteriormente, los podemos clasificar de acuerdo a las siguientes frecuencias

Código Texto	Nombre del texto	Frecuencia	Porcentaje
T1	Algebra Intermedia	8	34%
T2	Hipertexto	6	25%
T3	Matemáticas 9, Ed. Norma.	1	4%
T4	Nuevas Matemáticas Santillana.	1	4%
T5	Avanza Matemáticas.	1	4%
T6	Álgebra de Baldor.	3	12%
T7	Alfa	1	4%
T8	Algebra y Geometría II	3	12%

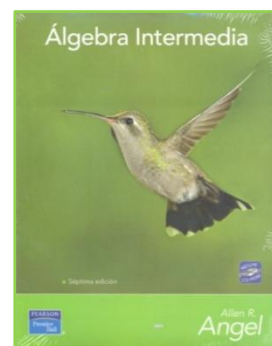
De acuerdo con esta tabla y notando que las frecuencias de los Textos T1 y T2 son significativamente mayores que las de los otros textos, hemos decidido realizar el análisis a los dos primeros.

A continuación, se presentarán los textos seleccionados, haciendo una descripción general de ellos.

ALGEBRA INTERMEDIA – PEARSON – ALLEN R. ANGEL

Presentación del texto:

Título:	Álgebra Intermedia
Atores:	Allen R. Angel
Distribuidores:	Editorial Pearson
ISBN:	978-970-26-1223-0
Edición:	México, 2008
Precio:	\$100,000
Material Complementario:	CD-ROM
Edición:	Séptima edición
Área:	Matemáticas
Grados:	8 y 9
Materias:	Álgebra, Geometría y Estadística.
Formato:	27cm X 21cm
Impresión de páginas Interiores:	Bicolor (negro y vino tinto)
Tipo de Encuadernación:	pegado y cosido.
Tipo de cubierta:	Pasta Semi-dura a color.
Páginas:	816
Papel:	Semi-esmaltado



Descripción general:

Este texto contiene 11 unidades dedicados a: Conceptos básicos - Ecuaciones y desigualdades - Graficas y Funciones - Sistemas de ecuaciones y desigualdades - Polinomios y funciones polinomiales - Expresiones racionales y ecuaciones - Raíces, radicales y números complejos - Funciones cuadráticas - Funciones exponenciales y logarítmicas - Secciones cónicas - Sucesiones, series y teorema del binomio. Además trae un prefacio donde mencionan y explican las características del texto, como son los ejercicios, los cambios que se hicieron en la séptima edición, los complementos que trae el texto y finalmente los agradecimientos. También trae una carta dirigida a los estudiantes. Al final del texto viene un apéndice que contiene algunas fórmulas geométricas, luego tiene las 43 páginas que contienen las respuestas de los ejercicios impares, después trae el índice de aplicaciones y el índice general, finalmente termina con un resumen general de cada uno de las unidades.

En el prefacio se menciona que este texto escolar tiene en cuenta los estándares nacionales de los Estados Unidos y las evaluaciones estándar para las escuelas de matemáticas de ese mismo país y preparadas por la NCTM (Consejo nacional de maestros de matemáticas). Para su distribución en catorce países hispanos, se hizo una traducción en la Universidad Anáhuac de México a cargo de Víctor Hugo Ibarra. Los países donde es comercializado por Pearson Educación son: México, Argentina, Brasil, Colombia, Costa Rica, Chile, Ecuador, España, Guatemala, Panamá, Perú, Puerto Rico, Uruguay y Venezuela.

Al inicio de cada unidad están los objetivos generales y los conceptos a trabajar, luego cada sección trae sus objetivos específicos, además cada sección viene acompañada de una cantidad considerable de ejemplos (en diferentes representaciones), estos están resueltos de manera detalla, es decir, explicando el paso a paso o dando la razón de por qué se hace. Cabe decir que este trabajo de grado se centra también en esas afirmaciones o expansiones discursivas que hace el estudiante. Entre los ejemplos se encuentran situaciones donde se utilizan calculadoras graficadoras, al final de cada sección viene un conjunto de ejercicios y en la mitad de la unidad viene un examen intermedio; ya en el final de la unidad, se encuentra un resumen detallado, ejercicios de repaso de todo la unidad, un examen de práctica y un examen de repaso acumulativo. En el conjunto de ejercicios encontramos que se enfoca en trabajar seis aspectos, ejercicios de concepto o redacción, ejercicios para practicar habilidades algebraicas, ejercicios de resolución de problemas, problemas de reto, actividades grupales, ejercicios para trabajar con el CD.

Una particularidad de este texto escolar es que en su séptima edición continúan utilizando sólo dos colores (negro y vino tinto), aunque se pudiera imaginar algo muy sobrio y simple, el texto tiene muy buena legibilidad y gran cantidad de gráficos, por ejemplo con el color vino tinto se resaltan las características más importantes como las definiciones o los resúmenes.

En cuanto a los apoyos tecnológicos, el texto viene con un CD el cual tiene videos, exámenes de preparación, solución completa y detallada de algunos ejercicios propuestos. Además en el texto también se estimula la utilización de calculadora graficadora, por ende no es raro encontrar recuadros de cómo utilizarla o problemas propuestos donde se incentiva el uso de la misma. Esta edición también tiene complementos en línea tanto para los profesores como para los estudiantes, apoyándose en *MyMathLab* y *MathXL*.

HIPERTEXTO MATEMÁTICAS 9 – SANTILLANA

Presentación del texto:

Título:	Hipertexto Santillana 9
Atores:	Hugo Hernán Chávez López. Neyla Yamile Castañeda Murcia. Moreia Gómez Bello. Anneris del Rocío Joya Vega. Johann Alexander Chizner Ramos. Mercedes Gómez Bello
Autores de la Edición Docente:	Julián Cifuentes Rubiano. Matemático de la Universidad Nacional de Colombia. Francia Leonora Salazar Suárez. Licenciada en Física. Universidad distrital José de Caldas
Distribuidores:	Editorial Santillana S.A.
ISBN:	978-958-24-1365-1
Edición:	Bogotá, Colombia 2010



Precio:	\$80,000
Material Complementario:	CD-ROM
Edición:	Primera Edición
Área:	Matemáticas
Grados:	9
Materias:	Álgebra, Geometría y Estadística.
Formato:	29cm X 21cm
Impresión de páginas Interiores:	A color
Tipo de Encuadernación:	pegado y cosido.
Tipo de cubierta:	Pasta Semi-dura a color.
Páginas:	304
Papel:	Semi-esmaltado

Descripción general:

El libro de texto está compuesto de 10 unidades de la siguiente manera: Números reales y expresiones algebraicas – Potenciación y radicación – Números complejos – Sistemas de ecuaciones lineales – Función cuadrática – Función exponencial y función logarítmica – Sucesiones, series y progresiones – razonamiento – Cuerpos geométricos – Estadística y Probabilidad. De esas diez unidades, las unidades 4, 5 y 6, aluden o tratan el concepto de función.

Es importante explicar que la edición del docente trae unas páginas extra que están dedicadas a:

- Los Estándares básicos de competencias relacionados con las unidades donde se trabajan.
- Objetivos generales para el grado noveno.
- Competencias generales para el grado noveno.
- La matriz de planeación, el mapa conceptual y unas sugerencias metodológicas para cada una de las diez unidades.
- Una prueba saber de matemáticas para el grado noveno.

Luego, tanto la edición del docente como la edición del alumno, trae una breve explicación de cómo está diseñado y organizado el texto. Después trae la tabla de contenido e inicia con la unidad 1, cada unidad tiene en el inicio los temas que ahí se trabajarán, un texto que sirve como entra al tema y una situación problema que la llaman “prepárate para... analizar”. Seguidamente inicia con el tema y al final de cada uno de ellos hay una actividad. Al final de la unidad hay un taller, que recoge todos los temas abordados en la unidad. Al final hay un resumen o una síntesis de los temas y una situación donde explican para que pueda servir lo que se vio en la unidad. Al final del texto, se exhibe el glosario y la bibliografía.

Anexo 2: Categorías de análisis y descripción de los criterios

Categoría	Criterios	Descripción
Orden relativo del concepto de función respecto a los demás contenidos	Temas o contenidos tratados en unidades anteriores	Este criterio alude a los contenidos tratados en las unidades que anteceden a la unidad donde se trabaja el concepto de función, según la organización en la tabla de contenido del texto.
	Temas o contenidos tratados en unidades posteriores	Este criterio alude a los contenidos tratados en las unidades siguientes a aquella donde se trabaja el concepto de función, según la organización en la tabla de contenido del texto.
	Requisitos conceptuales o de contenido que el autor considera antes del tema	Son aquellos contenidos que estando dentro de la misma unidad en la que aparece el concepto de función, son abordados antes de dicho concepto. Es decir, todo aquello que está justo antes de encontrar el título “ Funciones ”
Discursos en los textos escolares	Introducción al tema	Son aquellos contenidos que estando dentro de la misma unidad en la que aparece el concepto de función, son abordados después del título “ Funciones ” Es decir, aquel preámbulo que el autor realiza antes de definir el concepto, que puede ser a través de un ejemplo, una situación problema, un referente histórico, etc.
	Tipo de discurso usado en el texto	Aquí nos referimos al tipo de discurso que los autores utilizan en el diseño del texto, por ejemplo si es expositivo o heurístico.
	Marco definicional	Se refiere a cómo el texto presenta la definición del concepto de Función. Esta definición puede ser: Nominal, Con estructura, o de la forma T es un U tal que $C_1, C_2, \dots, C_n$
	Marco de ejemplificación	Relación con el marco definicional. Caracterización de la forma en que se presenta: ejemplo, no ejemplos o contraejemplos. Además, se especifica el contexto (según los Lineamientos Curriculares, ya sea desde la misma matemática, de la vida cotidiana o de las otras ciencias) en que está planteado el ejemplo.
	Marco de ejercitación	Caracterización de la forma en que se presenta: seriación o problema. Además, se especifica el contexto (según los Lineamientos Curriculares, ya sea desde la misma matemática, de la vida cotidiana o de las otras ciencias) en que está planteado el ejercicio. Igualmente, se explicitara algún ejemplo representativo para ilustrar cómo el autor se enfoca en cada uno de estos contextos.
	Elementos de la función que se explicitan	Son todos aquellos conceptos que están en torno al concepto de función, tales como: rango, dominio, codominio, variable dependiente e independiente y regla de asignación.

Usos de recursos externos al texto impreso	Representaciones	Implica explicitar los diferentes registros que se usan para representar el concepto de función, ya sea: gráfico, verbal, tabular, algebraico y diagrama sagital
	El papel de las expansiones discursivas en la resolución de las actividades propuestas	Se trata de revisar en las actividades propuestas, la existencia de consignas que impliquen que el estudiante deba hacer uso del lenguaje natural de forma escrita, para poder describir sus procedimientos. Igualmente, aquellas situaciones donde llegar a la respuesta solicitada no implique necesariamente el uso directo de algoritmo alguno, por ejemplo, preguntas que tienen como propósito el verificar el grado afianzamiento conceptual por parte del estudiante.
	Uso de la tecnología	Aunque el uso del lápiz y papel implica el uso de tecnología, en este criterio queremos referirnos al uso de graficadoras, software y demás programas con fines pedagógicos que permitan la exploración por parte del estudiante en determinadas situaciones planteadas por el texto. De esta manera, nos interesa poder describir si el texto, además de plantear actividades a lápiz y papel, también apela al uso de los recursos tecnológicos mencionados anteriormente, y por ende, permite potenciar actividades que a lápiz y papel pudieran ser limitadas.
	Sistema para-textual	Nos interesa describir si el texto se apoya de recursos externos tales como, videos, plataformas, cd, guía del docente y solucionarios de ejercicios. La diferencia con el anterior criterio radica en que el sistema para-textual implica recursos impresos o digitales. Además, en este tipo de recursos el estudiante puede aclarar dudas, profundizar o afianzar lo abordado en el libro de texto. En pocas palabras, son las ayudas que en determinado momento le pueden servir al profesor o al estudiante.

1 Localizar puntos en el sistema de coordenadas cartesianas

Muchas relaciones algebraicas son más fáciles de entender, si podemos ver una representación visual de ellas. Una gráfica es una imagen que muestra la relación entre dos o más variables en una ecuación. Antes de aprender cómo construir una gráfica, debe conocer el sistema de coordenadas cartesiano.

El **sistema de coordenadas cartesiano** (o **rectangular**), nombrado en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), consiste en dos ejes (o rectas numéricas) en un plano, dibujadas de forma perpendicular una de la otra (**figura 3.1**). Observe cómo los dos ejes determinan **cuadrantes**, etiquetados con numerales romanos, I, II, III y IV.

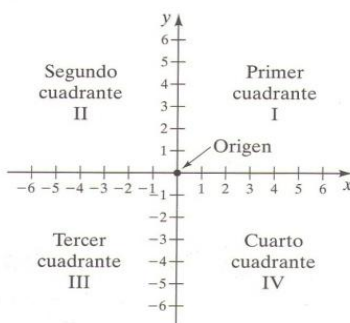


FIGURA 3.1

El eje horizontal se denomina **eje x**. El eje vertical se denomina **eje y**. El punto de intersección de los dos ejes se llama **origen**. Iniciando en el origen y moviéndose hacia la derecha, los números crecen; moviéndose hacia la izquierda, los números decrecen. Observe que el eje x y el eje y sólo son rectas numéricas, una horizontal y la otra vertical.

Un **par** (pareja) **ordenado** (x, y) se utiliza para dar las dos **coordenadas** de un punto. Si, por ejemplo, la coordenada x de un punto es 2 y la coordenada y es 3, el par ordenado que representa a ese punto es $(2, 3)$. La coordenada x siempre es la primera coordenada en el par ordenado. Para ubicar un punto, encuentre la coordenada x en el eje x y la coordenada y en el eje y, luego suponga que existe una recta vertical imaginaria desde la coordenada x y una recta horizontal imaginaria desde la coordenada y; el punto se coloca donde se intersequen las dos rectas imaginarias.

Por ejemplo, el punto correspondiente al par ordenado $(2, 3)$ aparece en la **figura 3.2**. Con frecuencia, abreviamos la frase “el punto correspondiente al par ordenado $(2, 3)$ ” como “el punto $(2, 3)$ ”. Por ejemplo, si escribimos “el punto $(-1, 5)$ ”, esto significa el punto correspondiente al par ordenado $(-1, 5)$. En la **figura 3.3** aparecen los pares ordenados A en $(-2, 3)$, B en $(0, 2)$, C en $(4, -1)$ y D en $(-4, 0)$.

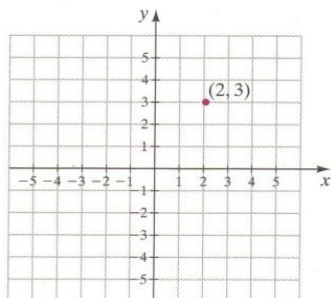


FIGURA 3.2

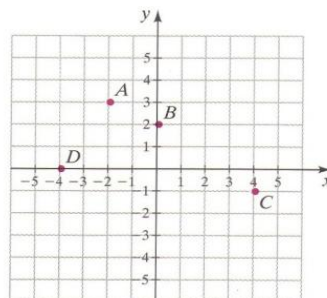


FIGURA 3.3

Anexo 4: Relación de parejas ordenadas en la solución de una ecuación T1 p.145

2 Dibujar gráficas por medio de puntos

En el capítulo 2, resolvimos ecuaciones que tenían una variable. Ahora analizaremos ecuaciones que tienen dos variables. Si una ecuación tiene dos variables, sus soluciones son parejas de números.

EJEMPLO 2 ▶ Determine si los siguientes pares ordenados son soluciones de la ecuación $y = 2x - 3$.

a) $(1, -1)$

b) $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

c) $(4, 6)$

d) $(-1, -5)$

Solución Sustituimos el primer número en el par ordenado por x y el segundo número por y . Si las sustituciones resultan en un enunciado verdadero, la pareja ordenada es una solución para la ecuación. Si las sustituciones dan como resultado una proposición falsa, la pareja ordenada no es una solución de la ecuación.

a) $y = 2x - 3$

$$-1 \stackrel{?}{=} 2(1) - 3$$

$$-1 \stackrel{?}{=} 2 - 3$$

$$-1 = -1 \quad \text{Verdadero}$$

b) $y = 2x - 3$

$$-2 \stackrel{?}{=} 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3$$

$$-2 \stackrel{?}{=} 1 - 3$$

$$-2 = -2 \quad \text{Verdadero}$$

c) $y = 2x - 3$

$$6 \stackrel{?}{=} 2(4) - 3$$

$$6 \stackrel{?}{=} 8 - 3$$

$$6 = 5 \quad \text{Falso}$$

d) $y = 2x - 3$

$$-5 \stackrel{?}{=} 2(-1) - 3$$

$$-5 \stackrel{?}{=} -2 - 3$$

$$-5 \stackrel{?}{=} -5 \quad \text{Verdadero}$$

Por tanto, las parejas ordenadas $(1, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ y $(-1, -5)$ son soluciones para la ecuación $y = 2x - 3$. El par ordenado $(4, 6)$ no es una solución.

1 Entender las relaciones

Con frecuencia en la vida diaria encontramos que una cantidad está relacionada con una segunda cantidad. Por ejemplo, la cantidad que gasta en naranjas está relacionada con el número de naranjas que usted compra. La velocidad de un bote de vela está relacionada con la velocidad del viento. Y el impuesto por ingresos que usted paga está relacionado con el ingreso que obtiene.

Suponga que las naranjas cuestan 30 centavos por pieza. Entonces una naranja cuesta 30 centavos, dos naranjas cuestan 60 centavos, tres naranjas cuestan 90 centavos, y así sucesivamente. Podemos listar esta información, o relación, como un conjunto de parejas ordenadas, listando el número de naranjas primero, y el costo en centavos en segundo lugar. Las parejas ordenadas que representan esta situación son $(1, 30)$, $(2, 60)$, $(3, 90)$, etcétera. Una ecuación que representa esta situación es $c = 30n$, donde c es el costo en centavos, y n es el número de naranjas. Como el costo depende del número de naranjas, decimos que el costo es la *variable dependiente* y el número de naranjas es la *variable independiente*.

Ahora considere la ecuación $y = 2x + 3$. Algunas parejas ordenadas que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$, etcétera. En esta ecuación, el valor obtenido para y depende del valor seleccionado para x . Por lo tanto, x es la *variable independiente* y y es la *variable dependiente*. Observe que en este ejemplo, a diferencia de las naranjas, no existe una conexión física entre x y y . La variable x es la variable independiente y y es la variable dependiente simplemente a consecuencia de su lugar en la ecuación.

Para una ecuación de las variables x y y , si el valor de y depende del valor de x , entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**. Ya que las cantidades relacionadas pueden representarse como parejas ordenadas, el concepto de **relación** puede definirse como sigue.

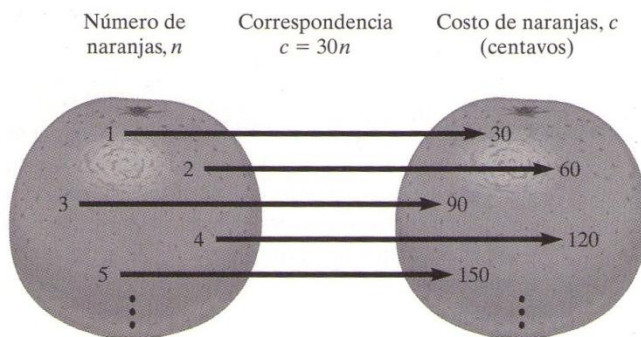
Relación

Una **relación** es cualquier conjunto de parejas ordenadas.

Como la ecuación $y = 2x + 3$ puede representarse como un conjunto de parejas ordenadas, es una relación.

Anexo 6: Ejemplo de función como correspondencia T1 p.159

Considere las naranjas que cuestan 30 centavos por pieza, que acabamos de analizar. Podemos ilustrar el número de naranjas y el costo de las naranjas por medio de la **figura 3.20**.



Observe que cada número en el conjunto de número de naranjas corresponde a (o es transformado en) exactamente un número en el conjunto de costo de naranjas, c . Por consiguiente, esta correspondencia es una función. El conjunto que consiste en el número de naranjas $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, se denomina **dominio**. El conjunto que consiste en los costos en centavos, $\{30, 60, 90, 120, 150, \dots\}$, se denomina **rango**. En general, el conjunto de valores para la variable independiente se llama **dominio**. El conjunto de valores para la variable dependiente se denomina **rango**, vea la **figura 3.21**.

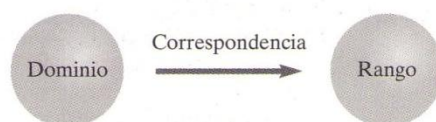


FIGURA 3.21

EJEMPLO 1 ▶ Determine si cada correspondencia es una función.

- | | | |
|----------|------------------------|----------------------|
| a) 1 → 1 | b) mariquita → insecto | c) JCPenney → Dallas |
| 2 → 4 | grillo → insecto | → Milwaukee |
| 3 → 9 | águila → ave | Sears → Chicago |
| | halcón → ave | |

Solución

- Para que una correspondencia sea una función, cada elemento en el dominio debe corresponder con exactamente un elemento en el rango. Aquí el dominio es $\{1, 2, 3\}$ y el rango es $\{1, 4, 9\}$. Como cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango, esta correspondencia es una función.
- Aquí el dominio es $\{\text{mariquita, grillo, águila, halcón}\}$ y el rango es $\{\text{insecto, ave}\}$. Aunque el dominio tiene cuatro elementos y el rango dos, cada elemento en el dominio corresponde con exactamente un elemento en el rango. Por lo tanto, esta correspondencia es una función.
- Aquí el dominio es $\{\text{JCPenney, Sears}\}$ y el rango es $\{\text{Dallas, Milwaukee, Chicago}\}$. Observe que JCPenney corresponde tanto a Dallas como a Milwaukee. Por lo tanto, cada elemento en el dominio *no* corresponde a exactamente un elemento en el rango. En consecuencia, esta correspondencia es una relación pero *no* una función.

Funciones

Concepto de función

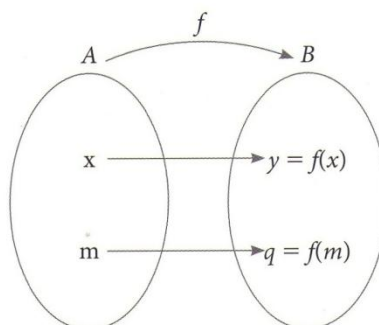
Una **función** es una regla o correspondencia que asigna a cada elemento de un conjunto A , uno y solo un elemento del conjunto B .

Las funciones se simbolizan con letras minúsculas, generalmente f, g y h , entre otras.

En una función que se define del conjunto A en el conjunto B , se utiliza la notación $f: A \rightarrow B$, donde A es el **conjunto de partida** y B es el **conjunto de llegada**. Así, si $x \in A$ y $y \in B$, la expresión $f(x) = y$ se lee efe de x es igual a y , se interpreta así:

- El elemento $x \in A$ está relacionado con el elemento $y \in B$ por medio de la función f .
- La **imagen** del elemento x en la función f es el elemento y .

Una función $f: A \rightarrow B$ se puede representar sagitalmente, así:



Elementos de una función

En una función $f: A \rightarrow B$ se identifican los siguientes elementos:

Dominio: es el conjunto de partida de la función. Se simboliza $Dom f$.

Codominio: es el conjunto de llegada de la función. Se simboliza $Cod f$.

Rango: es el conjunto formado por los elementos del codominio, que son la imagen de los elementos del dominio. Se simboliza $Ran f$.

Grafo: es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas (x, y) tales que $x \in Dom f$ y $y \in Ran f$.

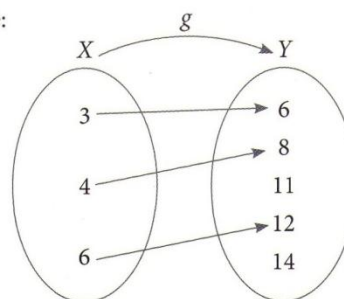
Por ejemplo, en la función $g: x \rightarrow y$, se tiene que:

$$Dom g = \{3, 4, 6\}$$

$$Cod g = \{6, 8, 11, 12, 14\}$$

$$Ran g = \{6, 8, 12\}$$

$$Grafo de g = \{(3, 6), (4, 8), (6, 12)\}$$

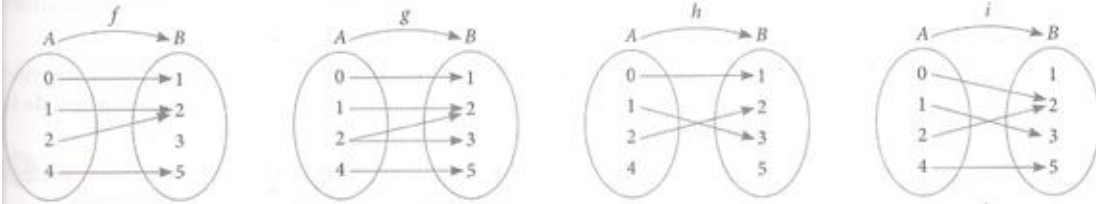


Anexo 8: Propuesta de actividades de función como correspondencia T2 p.83

× Ejemplo

Determinar cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no.

Si $A = \{0, 1, 2, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 5\}$



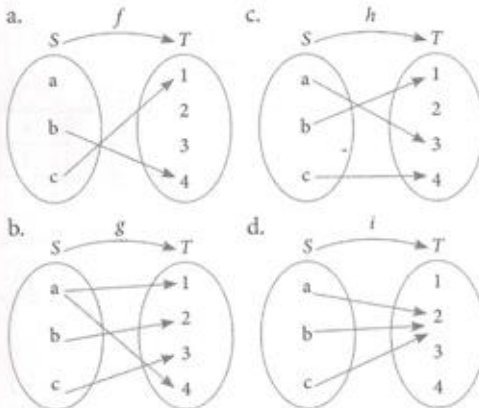
Las correspondencias f e i son funciones, porque en los dos casos a cada elemento de A se le asigna un único número del conjunto B . Mientras, las correspondencias g y h no son funciones, en la correspondencia g el elemento 2 de A tiene dos imágenes, y en la correspondencia h , el elemento 4 de A no tiene imagen.

Actividades

Ejercita: 1-2-3

Razona: 4-5

- 1 Determina cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Justifica tu respuesta. Si $S = \{a, b, c\}$ y $T = \{1, 2, 3, 4\}$.



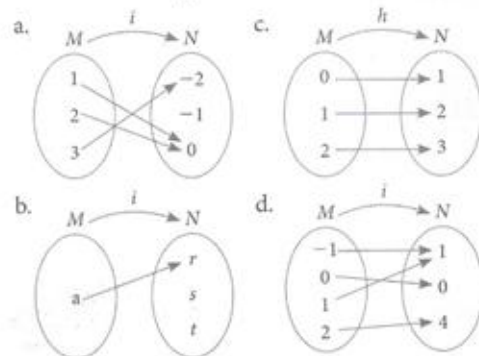
- 2 Encuentra cuáles de las relaciones del conjunto A con el conjunto B son funciones y cuáles no. Ten en cuenta que los conjuntos están determinados por $A = \{1, 2, 4, 6, 9, 12, 16\}$ y $B = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Un elemento de A se relaciona con su cantidad de divisores.
- Un elemento de A es el cuadrado de algún elemento de B .
- Un elemento de A y su opuesto.
- Cada elemento de A se relaciona con 5.

- 3 Determina cuáles de los conjuntos de parejas ordenadas corresponden a grafos de funciones.

- $\{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
- $\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$
- $\{(4, -1), (8, -2), (4, -3), (8, -4)\}$
- $\{(0, 0), (2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$
- $\{(-1, 3), (-2, 6), (-3, 9), (-4, 12), (-5, 15)\}$
- $\{(5, 10), (-5, 20), (10, 10), (-10, 20)\}$

- 4 Encuentra dominio, codominio, rango y grafo de cada una de las siguientes funciones.



- 5 Halla el dominio y el rango de cada función.

- $\left\{\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right), \left(1, \frac{2}{3}\right)\right\}$
- $\{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

Anexo 9: Ejemplo con el uso de herramientas tecnológicas T1 p.181



CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el ejemplo 9 resolvimos una ecuación en una variable por medio de la graficación de dos funciones. En el ejemplo siguiente, explicamos cómo determinar el punto de intersección de dos funciones en una calculadora graficadora.

Ejemplo Utilice una calculadora graficadora para determinar la solución de $2(x + 3) = \frac{1}{2}x + 4$.

Solución Asigne $2(x + 3)$ a Y_1 y asigne $\frac{1}{2}x + 4$ a Y_2 para obtener

$$Y_1 = 2(x + 3)$$

$$Y_2 = \frac{1}{2}x + 4$$

Ahora presione la tecla **GRAPH** para graficar las funciones. La gráfica de las funciones se muestra en la **figura 3.46**.

Examinando la gráfica, ¿puede determinar la coordenada x del punto de intersección? ¿Es -1 , -1.5 , o algún valor diferente? Podemos determinar el punto de intersección de varias formas. Un método implica utilizar las características TRACE y ZOOM. La **figura 3.47** muestra la ventana de una TI-84 Plus después de que se ha utilizado la característica TRACE y el cursor se ha movido muy cerca del punto de intersección. (Observe que al presionar las teclas de flecha hacia arriba y hacia abajo cambia de una función a la otra).

En la parte inferior de la pantalla de la **figura 3.47**, observe las coordenadas x y y del cursor. Para obtener una vista más cercana alrededor del área del cursor, podemos realizar un acercamiento (zoom in) por medio de la tecla **ZOOM**. Después de hacer un acercamiento, puede mover el cursor más cerca del punto de intersección y obtener una mejor lectura (**figura 3.48**). Puede hacer esto una y otra vez hasta que obtenga tanta precisión en su respuesta como necesite. Parece, de la **figura 3.48**, que la coordenada x de la intersección es alrededor de -1.33 .

Las calculadoras graficadoras también pueden mostrar la intersección de dos gráficas utilizando ciertas teclas. Las teclas que hay que presionar dependen de su calculadora; lea el manual de su calculadora para determinar cómo hacer esto. Por lo general, este procedimiento es más rápido y fácil de usar para determinar el punto de intersección de dos gráficas.

En la TI-84 Plus, seleccione la opción 5:INTERSECT, del menú CALC para determinar la intersección. Una vez que se ha seleccionado la característica INTERSECT, la calculadora mostrará

First curve?

En este momento, mueva el cursor a lo largo de la primera curva hasta que esté cerca del punto de intersección. Luego presione la tecla **ENTER**. Ahora la calculadora mostrará

Second curve?

Entonces, el cursor aparecerá en la segunda curva. Si el cursor no está cerca del punto de intersección, muévelo a lo largo de esta curva hasta que esté cerca. Ahora presione **ENTER**. A continuación la calculadora mostrará

Guess?

Ahora presione otra vez **ENTER** y se mostrará el punto de intersección.

La **figura 3.49** muestra la ventana después de que se ha realizado este procedimiento. Vemos que la coordenada x del punto de intersección es $-1.333... o -1\frac{1}{3}$ y la coordenada y del punto de intersección es $3.333... 3\frac{1}{3}$.

Para practicar el uso de una calculadora graficadora a fin de resolver una ecuación con una variable, resuelva los ejercicios del 65 al 68.

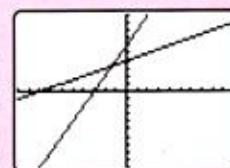


FIGURA 3.46

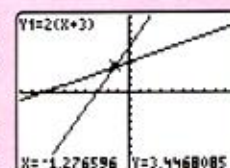


FIGURA 3.47

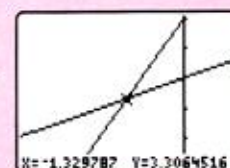


FIGURA 3.48

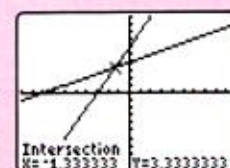


FIGURA 3.49

Anexo 10: Marco de ejercitación T1 p.183

Costo de operación de un taxi El costo semanal de Raúl López para la operación de un taxi es \$75 más 15 centavos por milla.

- Escriba una función que exprese el costo semanal de Raúl, c , en términos del número de millas, m .
- Dibuje una gráfica que ilustre el costo semanal contra el número de millas, hasta 200, conducidas por semana.
- Si durante una semana, Raúl condujo el taxi 150 millas, ¿cuál sería el costo?
- ¿Cuántas millas tendría que conducir Raúl para que el costo semanal fuese de \$135?



Salario más comisión El salario semanal de Jayne Haydock en Charter Network es \$500 más 15% de comisión sobre sus ventas semanales.

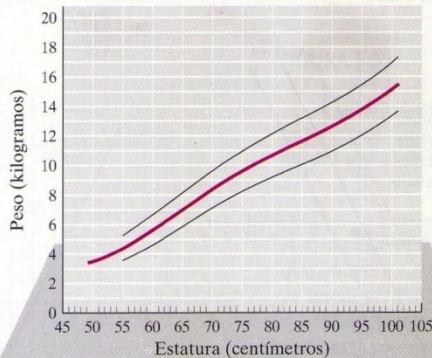
- Escriba una función que exprese el salario semanal de Jayne, s , en términos de sus ventas semanales, x .
- Dibuje una gráfica del salario semanal de Jayne contra sus ventas semanales, hasta \$5000 en ventas.
- ¿Cuál es el salario semanal de Jayne, si sus ventas fueron de \$3000?
- Si el salario semanal de Jayne durante la semana fue de \$1100, ¿cuáles fueron sus ventas semanales?

Salario más comisión Lynn Hicks, una agente de bienes raíces, gana \$100 por semana más 3% de comisión por ventas en cada propiedad que ella venda.

- Escriba una función que exprese su salario semanal, s , en términos de las ventas, x .
- Dibuje una gráfica de su salario contra sus ventas semanales, para ventas hasta de \$100,000.
- Si ella vende una casa por semana en \$75,000, ¿cuál será su salario semanal?

Peso de niñas La gráfica siguiente muestra el peso, en kilogramos, para niñas (hasta de 36 meses de edad) contra la altura (o estatura), en centímetros. La línea roja es el peso promedio de todas las niñas de la estatura dada, y las líneas más delgadas en negro representan los límites superior e inferior del rango normal.

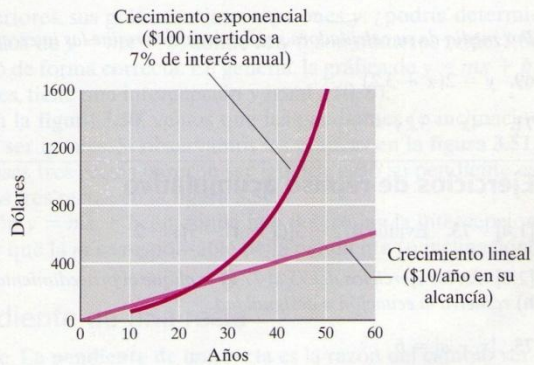
Niñas: Crecimiento físico de recién nacidas a 36 meses



Fuente: Centro Nacional de Estadísticas de Salud

- Explique por qué la línea roja representa una función.
- ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿La gráfica del peso contra la estatura es aproximadamente lineal?
- ¿Cuál es el peso, en kilogramos, de las niñas que tengan una estatura de 85 centímetros?
- ¿Cuál es la altura promedio, en centímetros, de las niñas con un peso de 7 kilogramos?
- ¿Qué pesos son considerados normales para una niña de 95 centímetros de estatura?
- ¿Qué le sucede al rango normal conforme la altura aumenta? ¿Esto es lo que usted esperaría que sucediese? Explique.

56. **Interés compuesto** La gráfica siguiente ilustra el efecto del interés compuesto.



Si un niño pone \$10 cada año en su alcancía, los ahorros crecerán linealmente, como lo muestra la curva inferior. Si, a la edad de diez años, el niño invierte \$100 al 7% de interés compuesto cada año, esos \$100 crecerán de manera exponencial.

- Explique por qué ambas gráficas representan funciones.
 - ¿Qué es la variable independiente? ¿Qué es la variable dependiente?
 - Por medio de la curva de crecimiento lineal, determine cuánto tiempo pasará para ahorrar \$600.
 - Por medio de la curva de crecimiento exponencial, la cual inicia en el año 10, determine cuánto tiempo después de que se haya abierto la cuenta la cantidad alcanzaría \$600.
 - Iniciando en el año 20 y el dinero creciendo a una tasa lineal, ¿cuánto tiempo pasará para que el dinero se duplique?
 - Si se iniciara en el año 20 y el dinero creciera a una tasa exponencial, ¿cuánto tiempo pasará para que el dinero se duplique? (El crecimiento exponencial se estudiará con detalle en el capítulo 9).
57. ¿Cuándo, si sucede, las intercepciones x y y de una gráfica serán iguales? Explique.
58. Escriba dos funciones lineales cuyas intercepciones x y y sean $(0, 0)$.
59. Escriba una función cuya gráfica no tenga intercepción x pero que tenga una intercepción y en $(0, 4)$.
60. Escriba una ecuación cuya gráfica no tenga intercepción y , pero que tenga una intercepción x en -5 .

1 Usar el procedimiento para resolución de problemas

Una de las razones principales para estudiar matemáticas es que las podemos utilizar para resolver problemas de la vida diaria. Para resolver de forma matemática la mayor parte de los problemas de aplicación de la vida real, necesitamos ser capaces de expresar el problema en símbolos matemáticos usando expresiones o ecuaciones, y cuando lo hacemos creamos un **modelo matemático** de la situación.

En esta sección presentamos un procedimiento para resolución de problemas y analizamos fórmulas. Una **fórmula** es una ecuación que es un modelo matemático de una situación de la vida real. A lo largo del libro resolveremos problemas; para hacerlo determinaremos una ecuación o fórmula que represente o modele la situación del mundo real.

Ahora daremos un procedimiento general de cinco pasos para la resolución de problemas, desarrollado por George Polya y presentado en su libro *How to Solve it*. Podemos enfocar cualquier problema siguiendo este procedimiento general.

Guía para la resolución de problemas

1. Entienda el problema.

- Lea el problema **cuidadosamente** al menos dos veces. En la primera lectura, obtenga un panorama general del problema. En la segunda lectura, determine a) de forma precisa qué le piden determinar y b) qué información proporciona el problema.
- Si es posible, haga un bosquejo que ilustre el problema. Etiquete la información dada.
- Liste la información en una tabla, si eso le ayuda en la resolución del problema.

2. Traduzca el problema a lenguaje matemático.

- Por lo general, esto implicará expresar el problema de forma algebraica.
- En ocasiones esto incluye seleccionar una fórmula particular por utilizar, mientras que en otras debe generar su propia ecuación. Puede ser necesario verificar otras fuentes para la fórmula apropiada por usar.

3. Realice los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.

4. Compruebe la respuesta obtenida en el paso 3.

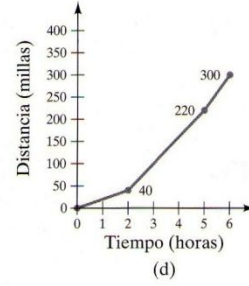
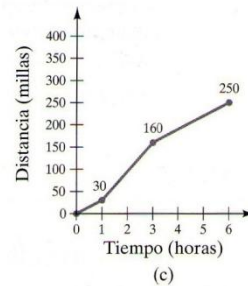
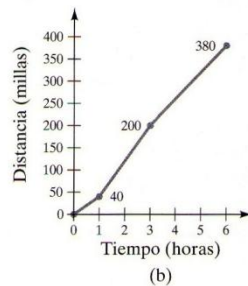
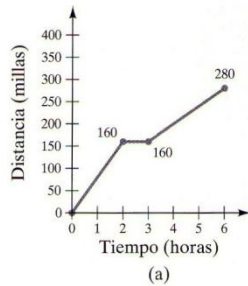
- Pregúntese: “¿La respuesta tiene sentido?” “¿Es razonable la respuesta?”. Si la respuesta no es razonable, vuelva a verificar su método de resolución del problema y sus cálculos.
- Si es posible, verifique la solución en el problema original.

5. Responda la pregunta. Asegúrese de haber respondido la pregunta. Establezca las respuestas con claridad.

Anexo 12: Marco de ejercitación por grupo de ejercicios T1 p. 157, 173

Relacione los ejercicios del 89 al 92 con la gráfica correspondiente de distancia recorrida contra tiempo, etiquetada de la a a la d. Del capítulo 2, recuerde que $\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$. En las gráficas se indican las distancias seleccionadas.

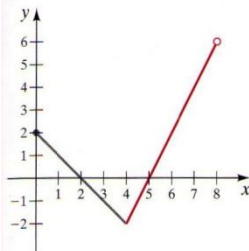
89. El tren A viajó a una velocidad de 40 mph durante una hora, luego durante dos horas a 80 mph y luego a 60 mph durante tres horas.
90. El tren C viajó a una velocidad de 80 mph durante dos horas, luego permaneció parado en una estación durante una hora y después viajó a 40 mph durante tres horas.
91. El tren B viajó a una velocidad de 20 mph durante dos horas, luego a 60 mph durante tres horas y luego a 80 mph durante una hora.
92. El tren D viajó a 30 mph durante una hora, después a 65 mph durante dos horas y después a 30 mph durante tres horas.



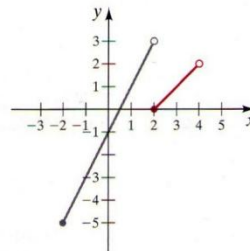
Actividad en grupo

En muchas situaciones de la vida real se puede requerir más de una función para representar un problema. Con frecuencia esto ocurre donde están implicadas dos o más tasas diferentes. Por ejemplo, cuando analizamos los impuestos federales por ingresos hay diferentes tasas de impuestos. Cuando se utilizan dos o más funciones para representar un problema, la función se denomina **definida por partes**. A continuación están dos ejemplos de funciones definidas por partes y sus gráficas.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \leq x < 4 \\ 2x - 10, & 4 \leq x < 8 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -2 \leq x < 2 \\ x - 2, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$$



En equipo, grafiquen las siguientes funciones definidas por partes.

78. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & -1 \leq x < 2 \\ 7 - x, & 2 \leq x < 4 \end{cases}$

79. $g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -3 < x < 0 \\ -3x + 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$

Anexo 13: Sistema de representación T1 p. 162

Capítulo 3 Gráficas y funciones

EJEMPLO 4 ▶ Considere la gráfica que se muestra en la **figura 3.26**.

- a) ¿Qué elemento del rango es pareja de 4 en el dominio?
- b) ¿Qué elementos del dominio son pareja de -2 en el rango?
- c) ¿Cuál es el dominio de la función?
- d) ¿Cuál es el rango de la función?

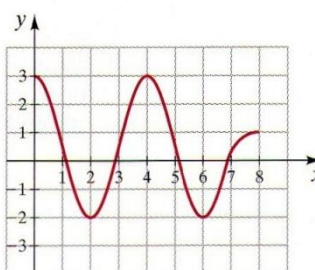


FIGURA 3.26

Solución

- a) El rango es el conjunto de valores de y . El valor de y que tiene como pareja el valor 4 de x es 3.
- b) El dominio es el conjunto de valores de x . Los valores de x que tienen como pareja al valor de y igual -2 son 2 y 6.
- c) El dominio es el conjunto de valores de x , del 0 al 8. Por tanto el dominio es

$$\{x|0 \leq x \leq 8\} \quad \text{o} \quad [0, 8]$$

- d) El rango es el conjunto de valores y , de -2 a 3. Así, el rango es

$$\{y|-2 \leq y \leq 3\} \quad \text{o} \quad [-2, 3]$$

▶ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

EJEMPLO 5 ▶ La **figura 3.27** ilustra una gráfica de velocidad contra tiempo de un hombre que salió a caminar y trotar. Escriba una historia acerca de la salida de este hombre que corresponda a esta función.

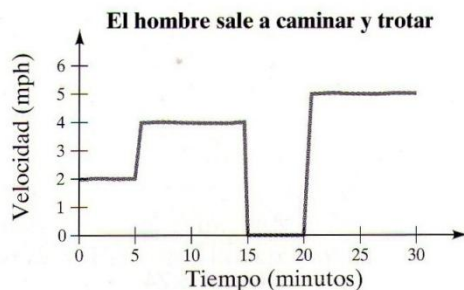


FIGURA 3.27

Anexo 14: Representación algebraica, tabular y grafica T1 p. 174

Sugerencia útil

Al graficar una función lineal, recuerde que $y = f(x)$.

EJEMPLO 1 ▶ Grafique $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Solución Construimos una tabla de valores por medio de la sustitución de valores para x y determinando los valores correspondientes de $f(x)$ o y . Luego trazamos los puntos y dibujamos la gráfica, como se ilustra en la **figura 3.33**.

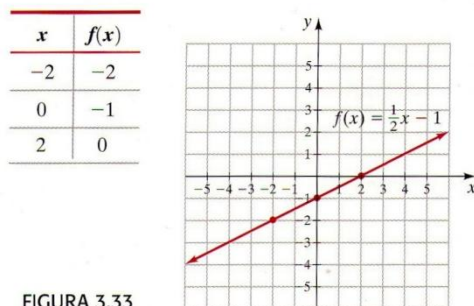
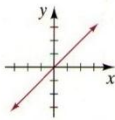
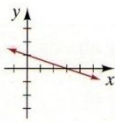
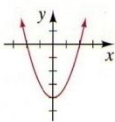
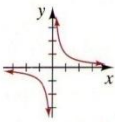
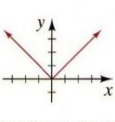


FIGURA 3.33

▶ Ahora resuelva el ejercicio 33

Anexo 15: Compilación de representaciones con sus dominios y rangos T1 p. 163

TABLA 3.1 Ejemplo					
Ejemplo sección 3.1	Ecuación que se grafica	Gráfica	¿La gráfica representa una función?	Dominio	Rango
3	$y = x$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
4	$y = -\frac{1}{3}x + 1$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
5	$y = x^2 - 4$		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[-4, \infty)$
6	$y = \frac{1}{x}$		Sí	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
7	$y = x $		Sí	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$

Representaciones de funciones

Para representar una función se puede utilizar la forma verbal, la fórmula, la tabla de valores y la gráfica.

Forma verbal: es la relación entre las variables que se realiza por medio de un enunciado, es decir, una descripción con palabras.

Fórmula: es la relación entre las variables que se realiza mediante una expresión algebraica. Esta expresión se simboliza como $y = f(x)$ y se llama **ecuación de la función**.

En la expresión $y = f(x)$, x es la **variable independiente** y representa los elementos de Dom f ; y es la **variable dependiente** y representa los elementos de Ran f .

Tabla de valores: es un arreglo con dos filas, en la fila superior se ubican los valores que toma la variable independiente y en la fila inferior se ubican los valores que se obtienen para la variable dependiente.

Gráfica: es un diagrama sagital o un diagrama cartesiano, en el que se ubican los elementos del dominio en el eje horizontal y los elementos del codominio en el eje vertical.

Una función puede ser representada en las cuatro formas anteriores, adquiriendo gran importancia pasar de una representación a otra; sin embargo, algunas funciones son descritas en forma más precisa mediante una forma en lugar de otra.

Por ejemplo, representar la función $f: X \rightarrow Y$ en forma de diagrama sagital, tabla de valores, diagrama cartesiano y por fórmula; determinada por el enunciado “a cada elemento de A se le asigna su doble menos uno en y ”. Si $x = \{1, 2, 3, 4\}$ y $y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se sigue:

Diagrama sagital

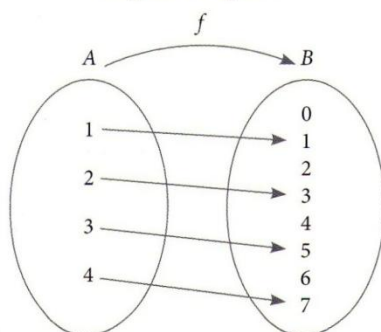
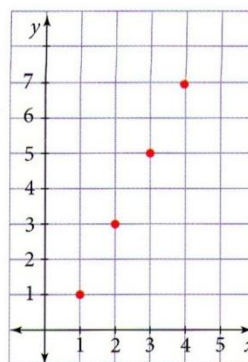


Tabla de valores

x	1	2	3	4
y	1	3	5	7

Diagrama cartesiano



Fórmula

$$y = 2x - 1$$

Anexo 17: Criterio de la vertical T2 p. 87

Método gráfico para identificar funciones

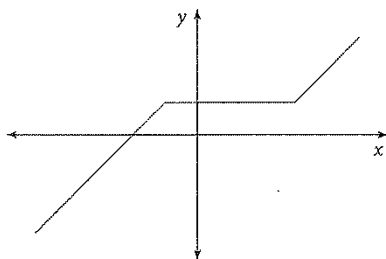
Para comprobar que una gráfica describe una función, se traza una línea recta vertical y se verifica que esta recta corte la gráfica de la función en un solo punto.

En el caso de que la recta corte a la gráfica en más de un punto, se afirma que la gráfica no corresponde a una función.

⌘ Ejemplos

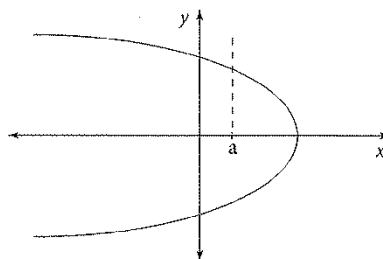
Determinar si las siguientes gráficas representan o no representan funciones.

a.



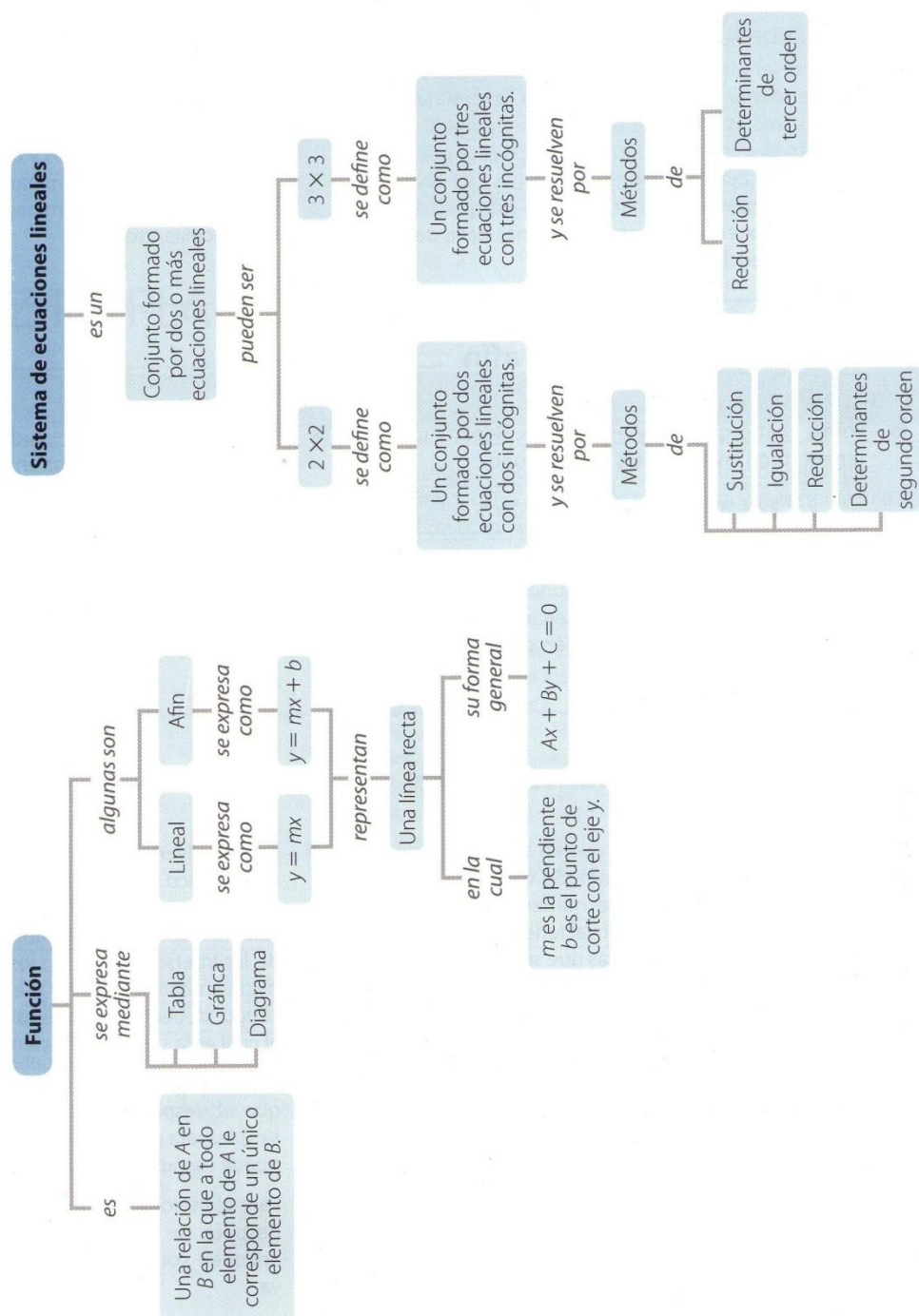
La gráfica corresponde a una función porque cada elemento del dominio tiene una única imagen.

b.



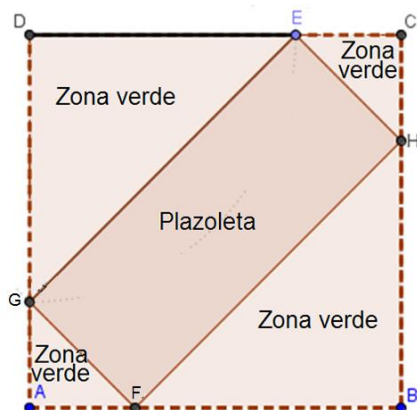
La gráfica no corresponde a una función porque el elemento a del dominio tiene más de una imagen, es decir, al trazar una recta vertical por a , esta corta en dos puntos a la gráfica.

Sistemas de ecuaciones lineales



Anexo 19: Contenido de la propuesta de aula

CONSTRUCCIÓN DE UNA PLAZOLETA



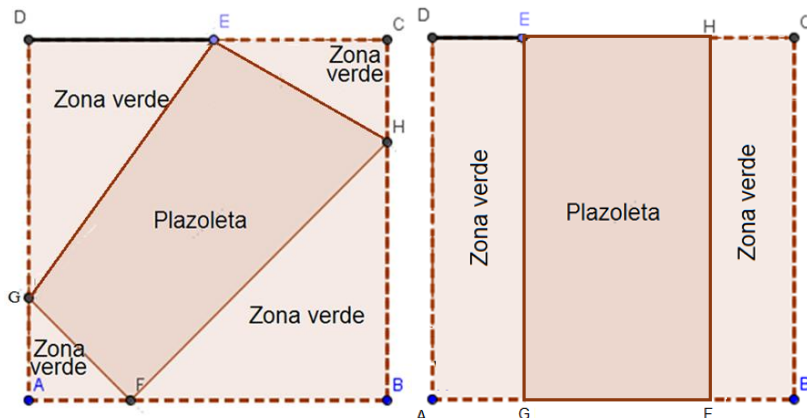
SITUACIÓN 1: Introduciendo la covariación mediante las medidas de la plazoleta

Se desea construir una plazoleta en forma rectangular dentro de un terreno cuadrado de 80m de largo. La condición es que cada vértice de la plazoleta debe quedar sobre uno de los lados del terreno, una vez construida la plazoleta, las zonas restantes se reservarán para sembrar árboles, es decir serán zonas verdes (ver grafica).

¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima?

Tarea 1: Comprendiendo la situación

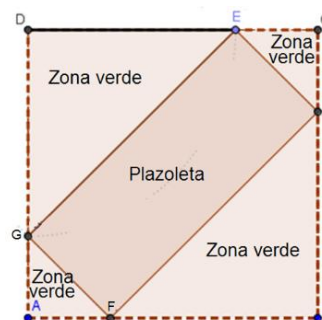
1. Dibuja por lo menos tres posibilidades de plazoletas dentro del terreno cuadrado, teniendo en cuenta las condiciones de la situación. Explica tus propuestas
2. Un estudiante propone dos plazoletas, de las formas que se muestran a continuación. ¿son posibles tales formas para la plazoleta? Explica tu respuesta.



3. Luisa afirma que dentro de los valores numéricos que puede tomar el segmento $\overline{DE}$ están: 0m, 47m, 80m, y 92m. Analiza la afirmación de Luisa para cada uno de estos valores y escribe si es posible.
4. Diseña una plazoleta de tal manera que el largo sea aproximadamente el doble ancho, luego determina la magnitud que debe tener segmento $\overline{DE}$.

Tarea 2: Reconozco dependencia entre magnitudes

1. Abra el archivo *Tarea 2* ubicado en el escritorio del computador. Explore posibles construcciones distintas de plazoletas moviendo o cambiando la ubicación del punto E. indica lo puntos que se mueven y los que permanecen fijos explica la razón de este comportamiento
2. Escribe lo que sucede cuando se mueve el punto E sobre el segmento $\overline{DC}$.
3. Teniendo en cuenta la exploración realizada en GeoGebra, Identifica y enuncia las magnitudes implicadas en la situación



4. sea:
- $\overline{FH}$ es el largo de la plazoleta
 - $\overline{FG}$ es el ancho de la plazoleta.
 - x = longitud del segmento $\overline{DE}$

- a. A medida que cambia x , describe el cambio del largo de la plazoleta
 - b. A medida que cambia x , describe el cambio del ancho de la plazoleta
 - c. A medida que cambia x , describe el cambio del segmento $\overline{EC}$
 - d. A medida que cambia x , describe el cambio del segmento $\overline{DC}$
 - e. ¿De qué dependen el ancho y el largo de la plazoleta?
5. Describe lo que sucede cuando comparas los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{DG}$ con los segmentos $\overline{BH}$ y $\overline{BF}$

Tarea 3: Cuantificando los cambios

- Determine el valor, en metros, del largo y el ancho de la plazoleta cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es:

a. 10m	b. 25m	c. 55m
--------	--------	--------

- Complete la siguiente tabla

Longitud $\overline{DE}$ (m)	Largo de la plazoleta ($\overline{FH}$) (m)	Ancho de la plazoleta ($\overline{FG}$)(m)
10m		
25m		
30m		
40m		
55m		
60m		
75m		
80m		
x		

Tabla 1

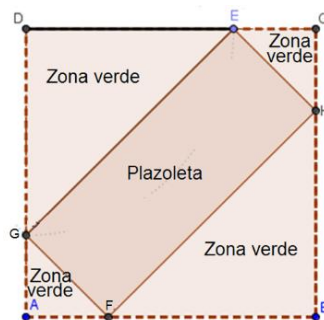
- De acuerdo con el comportamiento de los datos de la tabla(sin hacer los cálculos) determina el largo y el ancho de la plazoleta si el segmento $\overline{DE}$ midiera:

36m	58m	94m	Explica cómo lo hiciste
-----	-----	-----	-------------------------
 - Si la longitud del segmento $\overline{DE}$ se puede representar con la letra x , escribe una expresión para el largo y el ancho.
- En el plano cartesiano ubica los puntos del:
 - Largo de la plazoleta vs. Longitud del segmento $\overline{DE}$
 - Ancho de la plazoleta vs. longitud del segmento $\overline{DE}$
 - A partir de las gráficas determine y explique:
 - Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar la longitud del segmento $\overline{DE}$
 - Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar el largo de la plazoleta.
 - Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar el ancho de la plazoleta.
 - Ubique ambas gráficas en un mismo plano cartesiano, diferenciando el conjunto de puntos de cada una con colores distintos. A partir de esta representación, cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es 35m ¿qué longitud le corresponde al largo y al ancho de la plazoleta?
 - Teniendo en cuenta la anterior gráfica realizada,
 - escriba la coordenada del punto donde se interceptan las dos gráficas
 - ¿Qué interpretación podrías darle a dicho punto? Elabora un escrito de tal manera que tus compañeros puedan entender tu punto de vista.

SITUACIÓN 2:

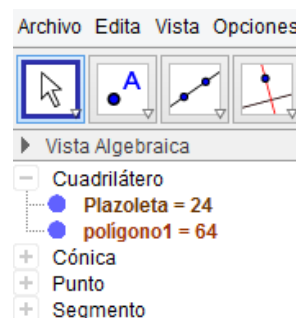
Teniendo en cuenta las condiciones de la situación 1, respecto a la construcción de la plazoleta, considera la siguiente situación:

La plazoleta se alquilará para realizar eventos sociales y el alcalde del pueblo quiere lograr los mayores ingresos posibles por el alquiler; por esta razón, se le pide al arquitecto que diseñe la plazoleta de tal manera que se garantice la mayor área posible para que contenga más personas.



¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima?

Tarea 1: Área máxima de la plazoleta (GeoGebra)



1. Abra el archivo *Tarea 2* ubicado en el escritorio del computador. En vista algebraica despliegue la pestaña de cuadrilátero, donde aparece el área de la plazoleta para determinadas ubicaciones del punto E. ahora mueva el punto E y describa cómo cambia el área.
2. Apoyados visualmente en GeoGebra, Luisa afirma que el área es máxima cuando el segmento $\overline{DE}$ mide 39.8m, mientras que Jairo afirma que el área es máxima cuando el segmento $\overline{DE}$ mide 40.5m. cómo podrías mostrar mediante un proceso distinto si tienen o no tienen la razón.
3. Mueva el punto E desde punto D hasta el C y observa detalladamente los valores del segmento n y de los lados de la plazoleta
 - a. Describe cómo es el comportamiento de estas tres magnitudes.
 - b. Describe cómo se relacionan entre ellas.
4.
 - a. ¿Qué magnitudes deben variar para que cambie el valor del área de la plazoleta?
 - b. Explica la relación existente entre el área y dichas magnitudes.

Tarea 2: Área de la plazoleta (registro tabular)

1. Si el punto E cambia de posición sobre el segmento $\overline{DC}$, complete la siguiente tabla. **Especifica** tus procedimientos.

Longitud $\overline{DE}$ (m)	Largo de la plazoleta $(\overline{FH})$ (m)	Ancho de la Plazoleta $(\overline{FG})$ (m)	Área de la Plazoleta (m^2)
10m			
	$30\sqrt{2}$		
		$60\sqrt{2}$	
60m			
50m			
	$35\sqrt{2}$		
	$48\sqrt{2}$		
			1400
n			

Tabla 2

2. Describa el cambio del área de la plazoleta cuando:
- cambia la longitud del segmento $\overline{DE}$.
 - cambia el largo de la plazoleta.
3. Luisa afirma que cuando la longitud del segmento $\overline{DE}$ es n , el área de la plazoleta sería $(n\sqrt{2}) \cdot (80 - n)\sqrt{2}$
- Usando la fórmula que propone Luisa completa la siguiente tabla para $n= 20, 35, 50$, y 65

Longitud $\overline{DE}$	Área de la Plazoleta $(n\sqrt{2}) \cdot (80 - n)\sqrt{2}$

Tabla 3

- De acuerdo con los resultados de la tabla 3 y comparándolos con los de la tabla 2 analiza la validez de afirmación de Luisa.
4. Teniendo en cuenta la tabla 2 y las condiciones de la plazoleta, explica por qué existen pares de magnitudes del segmento $\overline{DE}$, para los cuales el área de la plazoleta es la misma.

Tarea 3: Área de la plazoleta (gráficas)

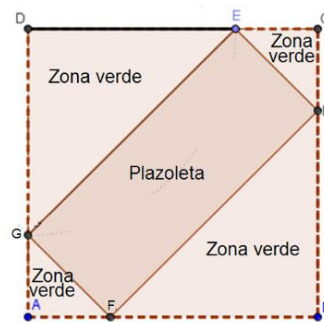
1. En plano cartesiano grafica el *Área de la plazoleta vs longitud del segmento $\overline{DE}$* .

Explica la estrategia que utilizaste para obtener los puntos de la gráfica.

2. Teniendo en cuenta que el vértice de una parábola es el punto de corte entre esta y el eje de simetría, responde

- a. ¿cuál es la coordenada el vértice?
- b. ¿Según las condiciones con las que debe cumplir la plazoleta, qué significado tiene la coordenada del vértice?

3. De acuerdo con la forma de la gráfica, describa cómo cambia el área a medida que cambia la longitud el segmento n .
4. De acuerdo con la gráfica ¿Para qué valores de n , el área de la plazoleta es 2622m^2 ?
5. De acuerdo con las condiciones que debe cumplir la plazoleta, explique por qué la gráfica Área vs. Segmento $\overline{DE}$, no intersecta a los ejes coordenados.
6. Con lo trabajado hasta el momento ¿Qué tan largo debe ser el segmento $\overline{DE}$, para que el área de la plazoleta sea máxima? Explica tu respuesta.

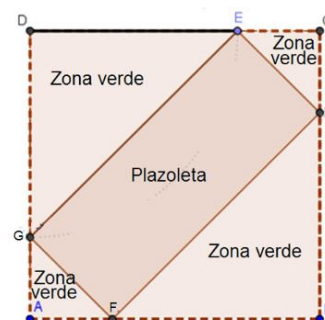


SITUACIÓN 3:

Observando otras variaciones.

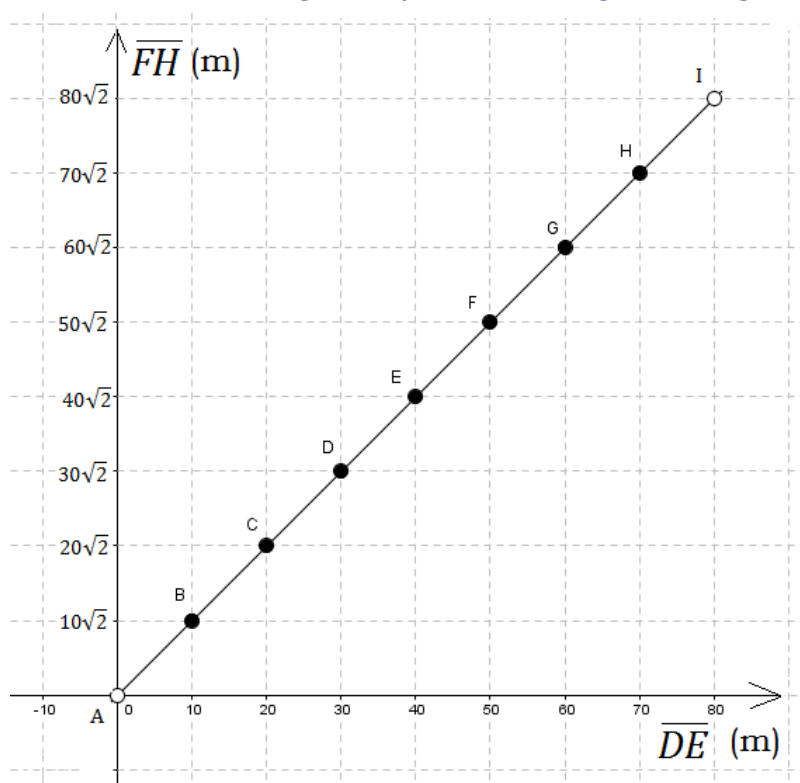
Teniendo en cuenta el enunciado acerca de la plazoleta, en las situaciones 1 y 2, te invitamos a explorar otras formas de cambios presentes en el diseño o construcción de la plazoleta.

Tarea 1: Razón de cambio - El cambio de los cambios (relación lineal)



1. Teniendo en cuenta la Gráfica 1 que corresponde al **Largo de la plazoleta ($\overline{FH}$) vs Longitud del segmento $\overline{DE}$** . Toma dos puntos de los referenciados en la gráfica, y a partir de los valores de sus coordenadas:

Largo de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$



Gráfica 1

- a. Determina cuál es la diferencia entre las dos abscisas, es decir, tomando como referencia el eje x , qué tanto están separados los puntos que tomaste. Explica cómo determinaste esta diferencia.

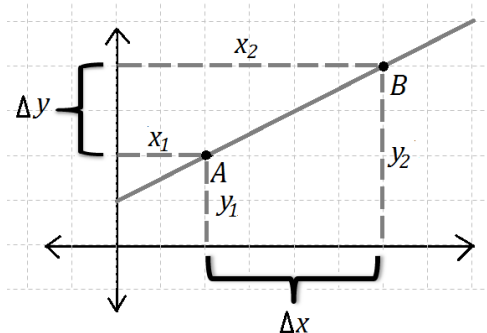
- b. Determina cuál es la diferencia entre las dos ordenadas, es decir, tomando como referencia el eje y , qué tanto están separados los puntos que tomaste. Explica cómo determinaste esta diferencia.
2. Repite este procedimiento cuatro veces más para parejas distintas de puntos de los referenciados en la gráfica. Explica tus procedimientos

*A la diferencia entre las abscisas de dos puntos, se le llama Δx ,
A la diferencia entre las ordenadas de dos puntos, se le llama Δy .*

3. Teniendo cuenta cada pareja de puntos escogidos y las diferencias entre sus abscisas y sus ordenadas completa la siguiente tabla
- a.

Coordenadas de la pareja de puntos	Diferencia de abscisas Δx	Diferencia de ordenadas Δy	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

- b. De acuerdo a los resultados en la última columna describe el comportamiento de los cambios en Δy respecto a los correspondientes cambios en Δx .



El cociente entre los cambios en y y los cambios en x , se conoce como razón de cambio y se calcula de la siguiente manera:

Para los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la razón de cambio es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por ejemplo entre los puntos $A(1,2)$ y $B(2,4)$ la razón de cambio es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 2}{2 - 1} = \frac{2}{1} \rightarrow$$

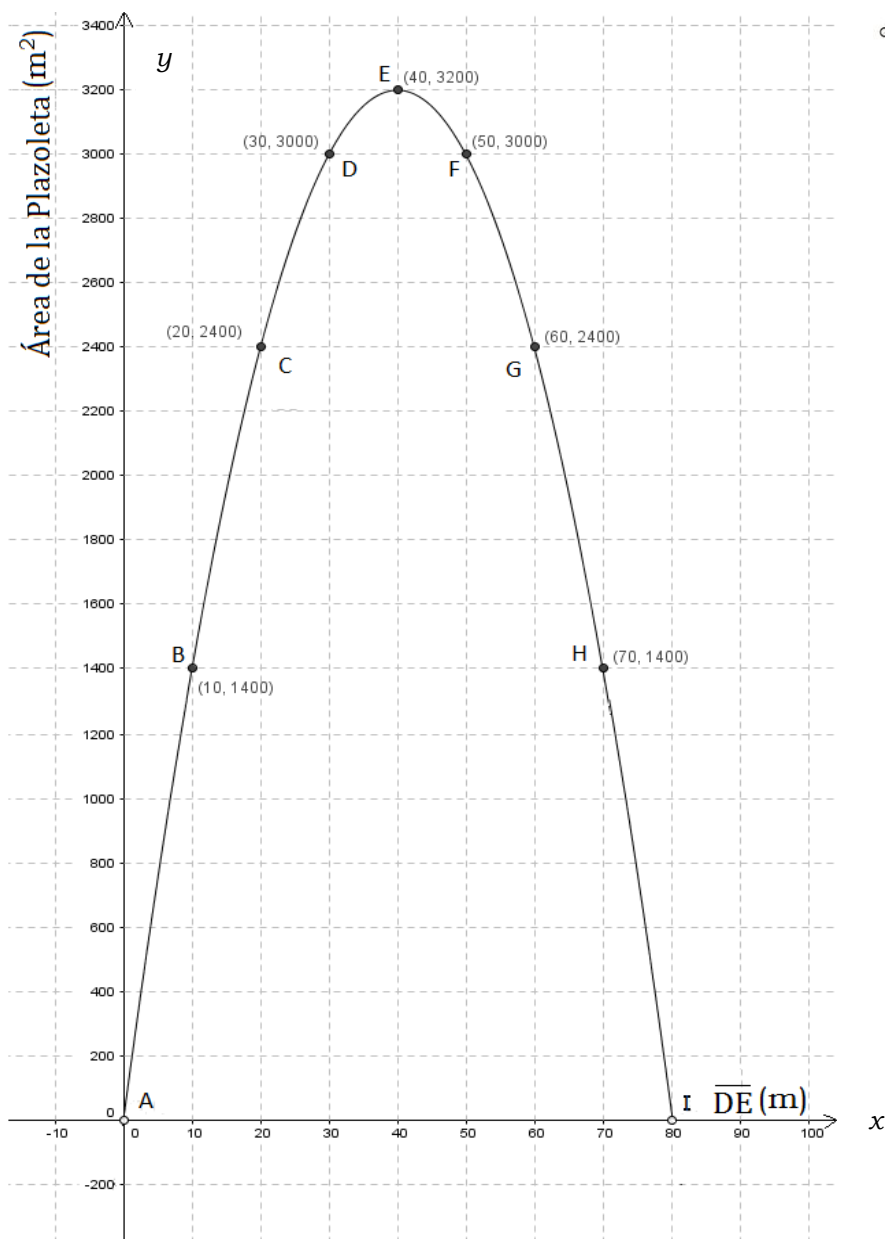
Es decir, que por cada cambio en una unidad en el eje x , hay un cambio de dos unidades en el eje y

4. Teniendo en cuenta el contexto de la plazoleta, si el segmento $\overline{DE}$ cambia en una unidad, entonces describe cómo es el cambio en el largo de la plazoleta ($\overline{FH}$)

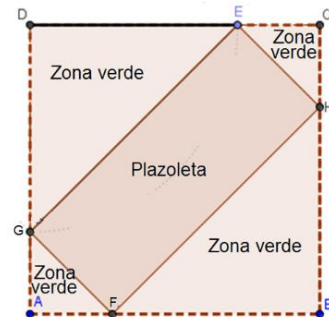
Tarea 2: Razón de cambio - El cambio de los cambios (relación cuadrática)

La Gráfica 2 que corresponde al *Área de la plazoleta vs Longitud del segmento $\overline{DE}$* , se obtuvo de la Situación 2 sobre el área máxima de la plazoleta. A partir de dicha grafica responde las siguientes preguntas:

Área de la Plazoleta vs. Longitud del segmento $\overline{DE}$



Gráfica 1



1. Teniendo en cuenta todas las posibles parejas de puntos consecutivos referenciados en la Gráfica 2, calcula las diferencias entre sus abscisas y sus ordenadas.

Recuerda que:

A la diferencia entre las abscisas de dos puntos, se le llama Δx y representa el **CAMBIO** en x
A la diferencia entre las ordenadas de dos puntos, se le llama Δy y representa el **CAMBIO** en y

Con la información anterior completa la siguiente tabla

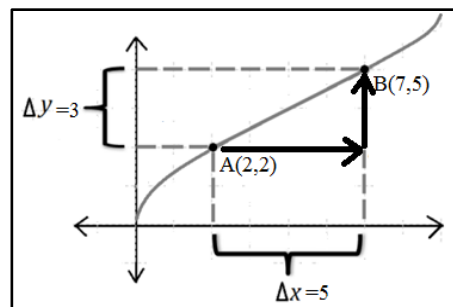
Coordenadas de la pareja de puntos	Diferencia de abscisas Δx	Diferencia de ordenadas Δy	Cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

2. **a.** Teniendo en cuenta el siguiente ejemplo (Gráfica 3), ubica los distintos Δx y Δy en la Gráfica 2

b. Si en la Gráfica 2, $\overline{DE}$ aumenta entre 0 y 80m, explica por qué Δx siempre es 10m.

3. **a.** Para los puntos A, B, C, D y E de la Gráfica 2 describe cómo son los cambios en la ordenadas, y los cambios en Δy .

b. Para los puntos E, F, G, H e I de la Gráfica 2 describe cómo son los cambios en la ordenadas, y los cambios en Δy .



Gráfica 2

4. De acuerdo a los resultados de la última columna y comparando todos los cocientes, describe los **cambios** en Δy con respecto a los **cambios** en Δx .
5. Con lo trabajado hasta el momento y apoyándose en la Gráfica 2, Luisa afirma que: “Para valores de $\overline{DE}$ entre 0 y 40m, y está aumentando, pero cada vez aumenta más; mientras que para valores de $\overline{DE}$ entre 40 y 80m, y está disminuyendo, pero cada vez disminuye menos”. Analiza y explica si esta afirmación es cierta.
6. Teniendo en cuenta el contexto de la plazoleta en la situación 2, a medida que cambia $\overline{DE}$, explica qué relación se puede establecer entre los valores del área y los cambios en los Δy .

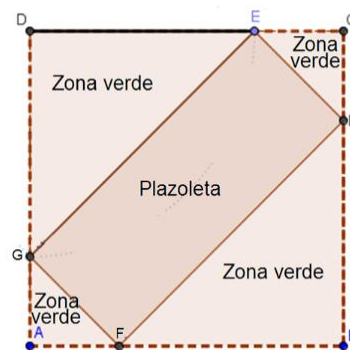
Tarea 3: Esbozando gráficas de funciones

1. Para 3 distintas ubicaciones del punto E, determine la suma del área total de las zonas verdes y del área de la plazoleta, Explique la estrategia que usaste.

2. Esboza la gráfica **Área total de las zonas verdes vs longitud del segmento $\overline{DE}$** , explique la estrategia que usaste.

3. Teniendo en cuenta la gráfica anterior, explique el significado del vértice de la gráfica en relación con las condiciones de la plazoleta.

4. Teniendo en cuenta las condiciones para la construcción de la plazoleta; esboza en el plano cartesiano la gráfica **Área total de las zonas verdes vs. Área de la plazoleta**, explique la estrategia que usaste.



Anexo 20: Resultados de las Pruebas Saber 3, 5, 9 y 11 de la Institución Educativa

