

SOBRE MÉTODOS ALGEBRAICOS DEL COLOREADO DE GRAFOS

JHON JADER MIRA A.
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS.
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA.

1 Introducción

Durante los últimos años han aparecido múltiples trabajos relativos a la estrecha relación que existe entre los métodos combinatorios y algebraicos, impulsados especialmente por la ventajas que ofrece el uso del computador personal, [ST], [NB].

Aquellos problemas en que el tiempo de solución depende polinómicamente de los datos de entrada se dice que es “fácil” (easy) y aquellos en los que ese tiempo es muchísimo mayor y no es posible en general diseñar un algoritmo rápido se denominan “duro” (hard). El problema del coloreamiento de grafos es un problema “duro”.

Nuestro objetivo en este trabajo es estudiar, por vía algebraica el problema del coloreado de grafos, utilizando algunos métodos del álgebra conmutativa en particular la teoría de las bases de Gröbner.

Un grafo general $G = (V_G, E_G)$ consiste de un conjunto finito V_G de vértices, un conjunto finito E_G de aristas, y una relación, la cual asigna a cada arista a exactamente dos vértices i y j (distintos o no) que llamaremos los extremos de a y que denotaremos por $a = \{i, j\}$.

Usualmente los vértices i y j son diferentes; cuando $i = j$ decimos que a es un lazo en i . Si a tiene extremos i y j , decimos que a une i con j ; y cuando dos vértices están unidos por las aristas $a_1, a_2, \dots, a_t$, con $t \geq 2$, entonces las aristas $a_1, a_2, \dots, a_t$ se llaman aristas múltiples. Para muchos problemas lazos y aristas múltiples son irrelevantes, así que a los grafos generales sin lazos y sin aristas múltiples les damos un nombre especial, los llamaremos grafos simples o simplemente grafos.

Decimos que dos vértices son adyacentes si ellos están unidos por una arista. Si v es un extremo de a , decimos que v y a son concurrentes. Un vértice que no es concurrente con ninguna arista lo llamaremos aislado.

Podemos ilustrar un grafo general $G = (V_G, E_G)$ con un diagrama, asignando a cada vértice un punto en el plano y a cada arista una curva de Jordan, es decir una curva continua entre los extremos que no se cruza a si misma (la cual, naturalmente en el caso de un lazo es cerrada). Si existe una representación en la cual las aristas de G se cruzan solamente en los vértices y no entre ellas, decimos que el grafo general G es planar y llamaremos grafo plano al grafo (general o simple) empotrado en dicho plano.

Un grafo general se llama conexo si cualquier par de vértices están unidos por una trayectoria, en caso contrario se llama desconexo. Notemos que la accesibilidad de vértices por trayectorias es una relación de equivalencia sobre V_G , luego cada grafo general puede descomponerse en sus componentes conexas.

Definición 1 Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo general, con conjunto de vértices V_G y conjunto de aristas E_G . Un q -coloreamiento propio de G es una función

$$c : V_G \longrightarrow C$$

de V_G en un conjunto C de cardinalidad q , tal que $c(i) \neq c(j)$ para todo $\{i, j\}$ en E_G . Decimos que el grafo G es q -coloreable si admite un q -coloreamiento propio.

A los elementos del conjunto C de cardinalidad q los llamaremos colores. Así, un q -coloreamiento propio de un grafo G es una asignación de colores a sus vértices de manera que ningún par de vértices adyacentes tengan el mismo color.

Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo. Cualquier q -coloreamiento propio $c : V_G \rightarrow C$ induce una partición en el conjunto de vértices V_G , de tal manera que dos vértices $i, j \in V_G$ están en la misma clase si $c(i) = c(j)$. Es decir, dos vértices están en la misma clase si a ellos les hemos asignado el mismo color. Luego, podemos decir que dos q -coloreamientos propios de G son distintos si ellos inducen particiones distintas en el conjunto de vértices V_G de G .

Definición 2 Una partición cromática de un grafo general G es una partición de V_G en subconjuntos llamados clases cromáticas:

$$V_G = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_q$$

tal que para todo $1 \leq i \leq q$ el subgrafo inducido $\langle V_i \rangle$ no tiene aristas.

Notemos que si G tiene un lazo, entonces no tiene ninguna partición cromática. Además, la definición de partición cromática sólo depende de si los vértices son adyacentes o no. Entonces si G tiene aristas múltiples, con extremos en un mismo par de vértices, sólo una de ellas interesa para la definición de partición cromática. Por tanto, podemos tratar con grafos simples.

El menor número de colores con el cual se puede colorear un grafo se llama *número cromático* de dicho grafo y se denota por $\chi(G)$. Así, el número cromático de un grafo G es el menor entero positivo n para el cual G es n -coloreable y decimos que G es n -cromático. Observemos que si $G = (V_G, E_G)$ es un grafo; entonces G es $|V_G|$ -coloreable, $\chi(G)$ -coloreable; además, si $\chi(G) \leq n \leq |V_G|$, entonces G también es n -coloreable.

Hasta ahora no se ha podido establecer una caracterización de grafos n -coloreables para $n \geq 3$; ni se conoce un método, que de manera rápida, determine si cualquier grafo G es n -coloreable o no. Tampoco, un método conveniente para determinar el número cromático de un grafo arbitrario. Sin embargo, se conocen varias cotas para $\chi(G)$ en término de otras invariantes.

Para decidir si un grafo es q -coloreable podríamos probar cualquier forma posible de colorear los vértices de G con q colores y ver si alguna de ellos funciona. Existen q^n de tales posibilidades si G tiene n vértices. Luego, para valores muy grandes de q y de n necesitamos

cantidades muy grandes de tiempo de computación. El problema consistente en encontrar el número cromático de un grafo G , el de determinar si dado un número natural q el grafo es q -coloreable o el de encontrar el número de q -coloreamientos propios de G , distintos, hacen parte de una gran clase de problemas computacionales que bosquejaremos a continuación.

Un algoritmo es eficiente si existe un polinomio $p(n)$ tal que el algoritmo puede resolver cualquier caso de tamaño n en un tiempo que está en $O(p(n))$, donde $O(p(n))$ es el conjunto de todas las funciones $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tales que existen una constante c y un entero positivo n_0 que cumplen $t(n) \leq cp(n)$ para todo $n \geq n_0$. Se dice que estos algoritmos son de tiempo polinomial en caso contrario se dice que es “duro”. El hecho de que un problema computacional sea “duro” no significa que cualquier caso de él sea duro. Un problema es duro porque no podemos idear un algoritmo para el cual podamos garantizar una ejecución rápida para todos los casos.

Problemas de decisión son aquellos para los cuales la respuesta es si o no, o lo que es equivalente, verdadero o falso. Se denota por P a la clase de problemas de decisión que se pueden resolver mediante un algoritmo de tiempo polinomial y se dice que un problema es NP , “tiempo polinomial no determinista”, en caso contrario. Un problema se denomina NP -completo si es un problema NP y es posible reducir polinomialmente cualquier otro problema NP al mismo. En [HSW] y en [GBrPBr] prueban que el problema del coloreado de grafos es NP -completo.

En adelante, daremos métodos algebraicos para determinar, si dados un grafo G y un entero positivo q , el grafo G es q -coloreable o no y para encontrar el número de q -coloreamientos propios de G distintos.

2 Polinomio cromático

El polinomio cromático de un grafo fue introducido por Birkhoff y Lewis en su ataque al problema de los cuatro colores, el cual, es un problema que surgió hace 147 años y fue resuelto en 1978 por Appel y Haken W [APHA]. Este polinomio es una función que a cada grafo G y a cada entero positivo q le asocia el número de q -coloreamientos propios de G .

El problema de hallar el número cromático de un grafo es parte del problema general de encontrar los ceros de su polinomio cromático, porque el número cromático $\chi(G)$ es el número natural más pequeño para el cual $C(G; u)$ es distinto de cero.

Definición 3 Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo con n vértices y sea u un número complejo. El polinomio cromático de G es la función definida por

$$C(G; u) = \sum_{i=1}^n m_i(G) u_{(i)} \quad (1)$$

donde $m_i(G)$ denota el número de particiones cromáticas distintas de G en i clases cromáticas y $u_{(i)}$ es el número complejo $u(u-1)(u-2)\cdots(u-i+1)$.

Un hecho importante, acerca del polinomio cromático, es que el número de q -coloreamientos propios de un grafo con q colores es el valor de una función polinomial, ya que cada $u_{(i)}$ que aparece en la definición de $C(G; u)$ es un polinomio.

Proposición 4 Si $G = (V_G, E_G)$ es un grafo y q es un número natural, entonces $C(G; q)$ es el número de q -coloreamientos propios de G .

El polinomio cromático de un grafo se puede calcular así ([FH]): Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo y sea $e = \{i, j\}$ una arista en E_G . Si en el grafo G eliminamos la arista e , entonces obtenemos un nuevo grafo, el cual se denota por $G^{(e)}$, cuyo conjunto de vértices y aristas son V_G y $E_G - \{e\}$ respectivamente. O sea que se puede considerar el grafo $G^{(e)} = (V_G, E_G - \{e\})$. Ahora, si en este nuevo grafo identificamos los extremos de e , es decir, identificamos i con j obtenemos de $G^{(e)}$ otro grafo, denotado por $G_{(e)}$, el cual tiene un vértice y una arista menos que G .

Theorema 5 Si $G^{(e)} = (V_G, E_G - \{e\})$ es el grafo que se obtiene de G al quitar la arista e y $G_{(e)}$ es el grafo que se obtiene de $G^{(e)}$ al identificar i con j , entonces

$$C(G; u) = C(G^{(e)}; u) - C(G_{(e)}; u). \quad (2)$$

El teorema anterior da una técnica recursiva para calcular el polinomio cromático de un grafo, dado que los grafos que aparecen en el lado derecho de la ecuación 2, son ambos más “pequeños” que G en el sentido que uno de estos tiene menos aristas que G y el otro tiene menos vértices. Calcular el polinomio cromático de un grafo se reduce en última instancia a calcular el polinomio cromático de grafos más simples y más pequeños en cuanto al número de aristas y vértices. Para la prueba de la proposición 4 y el teorema 5 puede consultar [NB].

En [HSW] prueban que el polinomio cromático de un grafo se puede calcular recursivamente con un algoritmo cuyo costo operacional es $O(2^{|E_G|})$, este costo es exponencial y tal cálculo es muy grande excepto para grafos con muy pocas aristas.

3 Bases de Gröbner y Grafos coloreables

En esta sección, aplicaremos métodos computacionales del álgebra conmutativa a la teoría de grafos. Además, describiremos como aplicar bases de Gröbner al coloreado de grafos. En [DLOJEA] se da una base de Gröbner universal para el ideal radical de una familia de subespacios lineales relacionados con el número cromático de un grafo. El tratamiento de esta sección sigue básicamente el artículo [DLOJEA]

Definición 6 Sea $G = (V_G, E_G)$ un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$, definimos el polinomio

$$P_G = \prod_{\{i,j\} \in E_G} (x_i - x_j) \quad (3)$$

Como un grafo G no es $(k-1)$ -coloreable si y solo si para cualquier asignación de $(k-1)$ colores a los vértices siempre queda un par de vértices adyacentes con el mismo color, entonces se puede relacionar el polinomio

$P_G = \prod_{\{i,j\} \in E_G} (x_i - x_j)$ con la coloreabilidad de G notando que un grafo G no es $(k-1)$ -coloreable si y solo si el polinomio P_G se anula cuando identificamos sus variables de tal forma que quedan a lo sumo $(k-1)$ variables distintas.

Sea $\mathbb{K}$ un campo cualquiera. Se denota por $V(n, k)$ el conjunto de vectores en $\mathbb{K}^n$ que tienen a lo sumo $k-1$ coordenadas distintas y

por $J(n, k)$ el conjunto de polinomios en el anillo $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ que se anulan en todos los elementos de $V(n, k)$.

Ahora expondremos algunas ideas que después aplicaremos al problema general de encontrar el número de q -coloreamientos propios de G que son distintos.

Sea G un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$. A cada elemento $a = (a_1, \dots, a_n)$ perteneciente a $V(n, k)$ le asociamos la función

$$\begin{aligned} c: V_G &\longrightarrow C \\ x_i &\longrightarrow c(x_i) = a_i \end{aligned}$$

donde C es el conjunto formado por las coordenadas distintas de a . Como $a \in V(n, k)$ entonces $|C| \leq k - 1$. Notemos, primero, que cuando G es $(k - 1)$ -coloreable algunos de los elementos en $V(n, k)$ corresponden a $(k - 1)$ -coloreamientos propios de G , donde dos vértices tienen el mismo color si las correspondientes entradas en dicho elemento son iguales. Observemos, también, que si G es $(k - 1)$ -coloreable, entonces el polinomio P_G no se anula en aquellas componentes irreducibles de $V(n, k)$ que corresponden a $(k - 1)$ -coloreamientos propios de G . Podemos detectar estas componentes con las operaciones de los ideales cociente y saturación aplicadas a $J(n, k)$.

Muchas preguntas acerca de ideales en el anillo de polinomios se pueden reducir a preguntas un poco mas fáciles de responder acerca de ideales generados por monomios. A continuación damos algunas definiciones y resultados sobre teoría de bases de Gröbner que necesitaremos más adelante. El lector interesado en consultar más sobre el tema puede leer los libros [WAPL] o [DCJLDO].

Se denota por x^β el monomio $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$, donde $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ y al conjunto $\mathbb{T}^n = \{x^\beta : \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n\}$ se le denomina producto de potencias. Un orden de términos para $\mathbb{T}^n$ es un orden total, denotado por $\preceq$, sobre $\mathbb{T}^n$ que satisface dos condiciones:

1. Para todo $x^\beta \in \mathbb{T}^n$, si $x^\beta \neq 1$ entonces $1 \prec x^\beta$ y
2. para todo $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma \in \mathbb{T}^n$, si $x^\alpha \prec x^\beta$ entonces $x^\alpha x^\gamma \prec x^\beta x^\gamma$.

Fijamos alguna notación. Primero, escogemos un orden de términos sobre $\mathbb{T}^n$, el cual da un orden de términos para $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Luego,

para todo $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, con $f \neq 0$, escribimos $f = a_1x^{\alpha_1} + a_2x^{\alpha_2} + \dots + a_rx^{\alpha_r}$ donde $0 \neq a_i \in \mathbb{K}$, $x^{\alpha_i} \in \mathbb{T}^n$ y $x^{\alpha_1} > x^{\alpha_2} > \dots > x^{\alpha_r}$. Definimos:

1. $lp(f) = x^{\alpha_1}$, potencia líder de f ;
2. $lc(f) = a_1$, coeficiente líder de f ;
3. $lt(f) = a_1x^{\alpha_1}$, el termino líder de f .

Para un subconjunto S contenido en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, definimos el ideal de términos líderes de S como el ideal $lt(S) = \langle lt(f) : f \in S \rangle$. En particular, para un ideal I contenido en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, definimos su ideal de términos líderes como el ideal

$$lt(I) = \langle lt(f) : f \in I \rangle.$$

Un subconjunto finito de polinomios $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ de I es una base de Gröbner para I con respecto a un orden de términos $\preceq$ si y solo si para todo $f \in I$, con $f \neq 0$, $lp(g_i)$ divide a $lp(f)$ para algún $1 \leq i \leq t$. Se puede probar de la definición que una base de Gröbner es un conjunto generador para el ideal I y que G es una base de Gröbner para el ideal I si y solo si $lt(I) = \langle lt(g_i) : g_i \in G \rangle$. Una base de Gröbner universal de I es un subconjunto de I que es una base de Gröbner simultáneamente con respecto a cualquier orden de términos. Una base de Gröbner para un ideal I es un conjunto de generadores con propiedades computacionales adicionales.

Dado un ideal I y cualquier orden de términos $\preceq$, una base de Gröbner da un algoritmo de la división para calcular el residuo de un polinomio f modulo I . Primero calculamos una base de Gröbner G para I con respecto al orden de términos $\preceq$ e iteramos el siguiente procedimiento: comprobamos si todos los términos en f no están en $lt(I)$. Si es así, tenemos un residuo para f . En caso contrario, consideramos el mayor termino m de f que está en $lt(I)$ y hallamos $g \in G$ tal que $lp(g)$ divide a m , así para algún termino q tenemos $m = lp(g)q$. Remplazamos f por $f - gq$ y repetimos el anterior procedimiento hasta que todos los términos en f no estén en $lt(I)$. El residuo obtenido de esta manera es único y se llama la forma normal de f módulo I . Se puede probar que f está en I si y solo si el residuo de f modulo I es cero.

Ahora aplicaremos estas ideas al coloreado de grafos. En [DLOJEA] prueban que el conjunto de polinomios

$$\rho(n, k) = \left\{ \prod_{1 \leq r < s \leq k} (x_{i_r} - x_{i_s}) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}, \quad (4)$$

es una base de Gröbner universal para el ideal $J(n, k)$, y se interpreta este resultado en termino de los clique de un grafo. Un clique de un grafo G es un subgrafo de G que es maximal y completo. Denotamos por $G(n, k)$ el conjunto de todos los polinomios P_H , donde H es un grafo etiquetado, el cual, es la unión de un clique de tamaño k (esto es, que tiene k vértices) con $n - k$ vértices aislados. Podemos reformular este resultado en términos de $G(n, k)$ como sigue.

Theorema 7 $G(n, k)$ es una base de Gröbner universal para el ideal $J(n, k)$

Pueba. Veamos que $G(n, k) = \rho(n, k)$.

Si $f \in \rho(n, k)$, entonces existen $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ tal que

$$f = \prod_{1 \leq r < s \leq k} (x_{i_r} - x_{i_s}). \quad (5)$$

Consideremos el grafo Q , con conjunto de vértices $\{i_1, \dots, i_k\}$ y conjunto de aristas $\{i_r, i_s\}_{1 \leq r < s \leq k}$, y el grafo H formado por la unión de Q con los vértices aislados $1 \leq j \leq n$ tales que $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. El grafo H lo podemos etiquetar así:

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \cup \{x_j : 1 \leq j \leq n, j \notin \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

son los vértices de H , en consecuencia, $P_H = f$ y por tanto $f \in G(n, k)$.

Si $f \in G(n, k)$; entonces, por la definición de $G(n, k)$, existe un grafo etiquetado H con conjunto de vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$, el cual, es la unión de un clique Q , de tamaño k , con $n - k$ vértices aislados y además, $f = \prod_{\{i,j\} \in E_H} (x_i - x_j)$. Luego Q es el grafo completo K_k , $E_H = E_Q$ y $V_Q = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ para $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, de donde, podemos expresar f así

$$f = \prod_{1 \leq r < s \leq k} (x_{i_r} - x_{i_s}).$$

Por lo tanto, existen $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tal que $f = \prod_{1 \leq r < s \leq k} (x_{i_r} - x_{i_s})$, luego $f \in \rho(n, k)$.

De lo anterior se concluye que $G(n, k) = \rho(n, k)$ y como $\rho(n, k)$ es una base de Gröbner universal para el ideal $J(n, k)$ entonces $G(n, k)$ también lo es. ■

Corolario 8 Sea (G, ϕ) un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El grafo G no es $(k - 1)$ -coloreable
2. P_G está en $J(n, k)$
3. La forma normal de P_G por el algoritmo de la división usando $\rho(n, k)$ es cero. Es decir, $N_{\rho(n, k)}(P_G) = 0$.

Pueba. (1) $\Rightarrow$ (2)

Supongamos que el grafo G no es $(k - 1)$ -coloreable veamos que $P_G(a) = 0$ para todo $a = (a_1, \dots, a_n) \in V(n, k)$.

Razonemos por el absurdo, supongamos que $P_G(a) \neq 0$ para algún $a = (a_1, \dots, a_n) \in V(n, k)$. Luego a tiene a lo sumo $k - 1$ coordenadas distintas, y por definición,

$$P_G(a) = \prod_{\{i, j\} \in E_G} (a_i - a_j),$$

de donde $\prod_{\{i, j\} \in E_G} (a_i - a_j) \neq 0$. Así, para todo $\{i, j\} \in E_G$, $a_i \neq a_j$; y para todo $1 \leq i < j \leq n$, si $a_i = a_j$ entonces $\{i, j\} \notin E_G$. Podemos definir la función $c : V_G \rightarrow C$ de V_G en C , donde C está formado por todas las coordenadas distintas en a y $c(i) = a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego, $|C| \leq k - 1$ y de $c : V_G \rightarrow C$ podemos obtener un $(k - 1)$ -coloreamiento propio de G , de donde, G es $(k - 1)$ -coloreable. Esto es absurdo pues habíamos supuesto que G no es $(k - 1)$ -coloreable. Por lo tanto, $P_G(a) = 0$ para todo $a = (a_1, \dots, a_n) \in V(n, k)$, y en consecuencia, P_G está en $J(n, k)$. (2) $\Rightarrow$ (3)

Supongamos que P_G está en $J(n, k)$ y veamos que el residuo de dividir P_G por $\rho(n, k)$ con el algoritmo de la división es cero.

El resultado se sigue, ya que $\rho(n, k)$ es una base de Gröbner universal para el ideal $J(n, k)$, y del hecho que P_G está en $J(n, k)$.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Supongamos que la forma normal de P_G usando $\rho(n, k)$ con el algoritmo de la división es cero y veamos que el grafo G no es $(k - 1)$ -coloreable.

Razonemos por el absurdo, supongamos que G es $(k - 1)$ -coloreable, luego existe un $(k - 1)$ -coloreamiento propio de G , es decir, existe una función $c : V_G \rightarrow C$ de V_G en un conjunto C de cardinalidad $(k - 1)$, tal que $c(i) \neq c(j)$ para todo $\{i, j\}$ en E_G . En particular, podemos considerar una función $c : V_G \rightarrow C$, donde C es un subconjunto del campo $\mathbb{K}$ con $k - 1$ elementos y $c(i) \neq c(j)$ para todo $\{i, j\}$ en E_G y por tanto, considerar el vector $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que $c(i) = a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, luego $a \in V(n, k)$. Como la forma normal de P_G usando $\rho(n, k)$ con el algoritmo de la división es cero y $\rho(n, k)$ es una base de Gröbner universal para el ideal $J(n, k)$, entonces P_G está en $J(n, k)$, luego, por definición de $J(n, k)$, $P_G(b) = 0$ para todo $b \in V(n, k)$; en particular $a \in V(n, k)$ así que $P_G(a) = 0$.

Por definición de P_G ,

$$P_G(a) = \prod_{\{i,j\} \in E_G} (a_i - a_j).$$

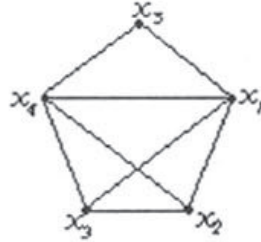
O sea que $\prod_{\{i,j\} \in E_G} (a_i - a_j) = 0$, por tanto, $a_i = a_j$ para algún $\{i, j\} \in E_G$, pero $a_i = c(i)$ y $a_j = c(j)$, o sea que $c(i) = c(j)$ para algún $\{i, j\} \in E_G$ lo cual contradice el hecho que $c : V_G \rightarrow C$ es un $(k - 1)$ -coloreamiento propio de G . Por lo tanto, el grafo G no es $(k - 1)$ -coloreable. ■

Determinar si un grafo es $(k - 1)$ -coloreable utilizando el corolario anterior es útil porque varios sistemas de álgebra computacional tal como MACAULAY, MAPLE, y MuPAD Pro. tienen implementados algoritmos para hallar una base de Gröbner de un conjunto de polinomios, computar la forma normal de un polinomio y otras aplicaciones de las bases de Gröbner. Las bases de Gröbner se pueden usar, por ejemplo, para calcular los generadores de un ideal, la intersección de ideales, relaciones algebraicas de un conjunto de polinomios, y calcular la dimensión y grado de una variedad algebraica.

Ejemplo 9 Sea $P_G = (x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_2)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)$ el polinomio asociado al grafo $G = (V_G, E_G)$,

con $V_G = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ y

$E_G = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_5\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_1, x_3\}\}.$



Calculando con MACAULAY obtenemos una representación para P_G en término de los diez polinomios en $\rho(5, 3)$ $P_G = \sum a_i f_i$, donde

$$a_3 = (x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3 + x_3^2 - x_1 x_4 - x_2 x_4 + x_3 x_4 + x_4^2 + x_1 x_5 + x_2 x_5 - x_3 x_5 - x_4 x_5)(x_3 - x_4)(x_1 - x_5)(x_4 - x_5),$$

$$a_4 = (x_4 - x_5)^2(x_2 - x_3)(x_3 - x_5)(x_2 - x_5)(-1),$$

$$a_5 = (x_4 - x_5)^2(x_3 - x_4)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5),$$

$$a_8 = (x_4 - x_5)^2(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_2 - x_5)(-1),$$

$$a_{10} = (x_4 - x_5)^2(x_2 - x_3)(x_3 - x_5)(x_2 - x_5)$$

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_6 = 0, a_7 = 0, a_9 = 0;$$

Por lo tanto, de acuerdo al corolario 8 G no es 2-coloreable.

Sea I un ideal en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. En teoría de ideales, $(I : f^\infty)$ denota el ideal de polinomios $g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tal que para algún entero positivo m se cumple que $f^m g \in I$. El ideal $(I : f^\infty)$ se llama la saturación del ideal I respecto a f y lo podemos interpretar como el ideal que definen los puntos en la variedad $V(I)$ que no están en la hiper-superficie definida por $f = 0$. En particular, $(J(n, k) : P_G^\infty)$ es la saturación de $J(n, k)$ con respecto al polinomio P_G y $(J(n, k) : P_G^\infty)$ está definido por los puntos en la variedad $V(n, k)$ que no están en la hiper-superficie $P_G = 0$.

El lector interesado en la justificación de estas afirmaciones puede consultar alguno de los siguientes textos: [WAPL], [DCJLDO] o [MAIM].

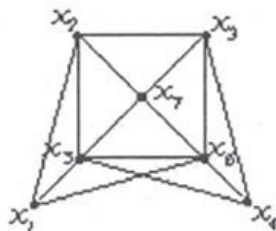
Así, los $(k - 1)$ -coloreamientos propios de G corresponden, justamente, a las componentes irreducibles de la variedad asociada con

el ideal $(J(n, k) : P_G^\infty)$. El ideal $J = (J(n, k) : P_G^\infty)$ es un ideal radical y el grado de cada componente irreducible es uno. En consecuencia, el grado $\deg(J)$, del ideal J , cuenta, justamente, el número de componentes irreducibles. Así, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 10 Sea G un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$. El número de $(k-1)$ -coloreamientos propios de G distintos es igual a $\deg((J(n, k) : P_G^\infty))$.

Ejemplo 11 Consideremos el grafo G de la figura 3.2

1. El ideal saturación $(J(7, 4) : P_G^\infty)$, donde $J(7, 4)$ es el ideal asociado a G y $P_G = (x_1 - x_2)(x_1 - x_5)(x_1 - x_6)(x_2 - x_3)(x_2 - x_5)(x_2 - x_7)(x_3 - x_4)(x_3 - x_6)(x_3 - x_7)(x_4 - x_5)(x_4 - x_6)(x_5 - x_6)(x_5 - x_7)(x_6 - x_7)$ (calculados con MACAULAY) es generado por los polinomios $\{x_4 - x_7, x_3 - x_5, x_2 - x_6, x_1 - x_7\}$ y además $\deg((J(7, 4) : P_G^\infty)) = 1$. Esto significa que existe solo un 3-coloreamiento propio de G .
2. El ideal saturación $(J(7, 5) : P_G^\infty)$, del ideal $J(7, 5)$ asociado a G , tiene como conjunto de generadores (calculados con MACAULAY) $\{x_3x_4 - x_4x_5 - x_3x_7 + x_5x_7, x_2x_3 - x_2x_5 - x_3x_6 + x_5x_6, x_1x_2 - x_1x_6 - x_2x_7 + x_6x_7, x_2^2x_4 - x_2x_4^2 - x_2x_4x_6 + x_4^2x_6 - x_2^2x_7 + x_2x_4x_7 + x_2x_6x_7 - x_4x_6x_7, x_1^2x_4 - x_1x_4^2 - x_1^2x_7 + x_4^2x_7 + x_1x_7^2 - x_4x_7^2, x_1^2x_3 - x_1x_3^2 - x_1^2x_5 + x_1x_3x_5 - x_1x_3x_7 + x_3^2x_7 + x_1x_5x_7 - x_3x_5x_7\}$ y $\deg((J(7, 5) : P_G^\infty)) = 7$. Por tanto el número de 4-coloreamientos propios de G distintos es 7.



Para terminar esta sección expondremos otro criterio para determinar la q -coloreabilidad de un grafo G , el cual es la interpretación de un resultado debido a N. Alon ver [DLOJEA].

Sea $f(x)$ un polinomio en $\mathbb{K}[x]$ de grado q y sin raíces múltiples. Podemos considerar el ideal $\langle f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \rangle$; el cual, es un ideal en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, que se denota por $C(f, n, q)$ y por

$V_f(n, q)$ la variedad a él asociada. Notemos que un vector $(u_1, \dots, u_n) \in V_f(n, q)$, si y solo si, cualquier coordenada u_i es una raíz del polinomio f . Los monomios líderes de los polinomios en el conjunto $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ son primos relativos dos a dos con respecto a cualquier orden de términos. De la teoría de bases de Gröbner se sabe que si los monomios líderes de un conjunto de polinomios Γ son primos relativos dos a dos, entonces Γ es una base de Gröbner para el ideal que el genera. Por lo tanto $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ es una base de Gröbner universal para el ideal $C(f, n, q)$.

Proposición 12 *Sea G un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$ y sea $f(x)$ un polinomio en $\mathbb{K}[x]$ de grado q y sin raíces múltiples. El grafo G no es q -coloreable si y solo si el polinomio P_G pertenece a $C(f, n, q)$.*

Pueba. Sea G un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $f(x)$ un polinomio en $\mathbb{K}[x]$, de grado q y sin raíces múltiples.

Supongamos que G no es q -coloreable. Como $(u_1, \dots, u_n) \in V_f(n, q)$, si y solo si, cualquier coordenada u_i es una raíz del polinomio f , entonces $V_f(n, q)$ tiene q^n elementos y cada uno de ellos tiene a los sumo q coordenadas distintas, así, P_G se anula en cada uno de los elementos de $V_f(n, q)$, de donde P_G pertenece a $C(f, n, q)$.

Supongamos que P_G pertenece a $C(f, n, q)$, entonces P_G se anula en todos los q^n elementos de $V_f(n, q)$, de donde P_G no puede tener q -coloreamientos propios. Por lo tanto G no es q -coloreable. ■

Una consecuencia de la proposición 12 es que G es q -coloreable si y solo si la forma normal de P_G que se obtiene por división módulo $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ es distinta de cero.

Al expandir P_G la suma de los exponentes de cada uno de sus términos es igual al número de aristas de G . Por lo tanto P_G es un polinomio homogéneo de grado $|E_G|$ y podemos obtener otro criterio para determinar cuando G es q -coloreable.

Proposición 13 *Si la expansión de P_G contiene un monomio con coeficiente distinto de cero en el cual cualquier exponente es menor que q , entonces G es q -coloreable.*

Pueba. Supongamos que el monomio $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, con $a \neq 0$ y $\alpha_i < q$ para todo $0 \leq i \leq n$; está contenido en la expansión de P_G . Veamos que G es q -coloreable. Razonemos por el absurdo supongamos que G no es q -coloreable. Por la proposición 12 $P_G \in C(f, n, q)$, donde $f(x)$ es un polinomio en cierta variable de grado q y sin raíces múltiples. Consideremos el polinomio $x^q - 1$, el cual tiene grado q y no tiene raíces múltiples, entonces $P_G \in C(x^q - 1, n, q)$. Luego, la forma normal de P_G con respecto a la base de Gröbner $\{x_1^q - 1, \dots, x_n^q - 1\}$ es cero. Esto significa que el monomio $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ se cancela en alguna parte al reducir P_G a su forma normal. Tenemos que el polinomio P_G es homogéneo con grado igual al número de aristas de G y durante el proceso de reducción los grados de los nuevos monomios que aparecen son estrictamente menores que los monomios originales de P_G , luego $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ no se cancela con ellos ya que tienen grado menor y dado que $\alpha_i < q$ para todo $1 \leq i \leq n$, el monomio $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ no se puede cancelar con un monomio de la forma hx_i^q , donde h es un monomio. Así, $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ está en la forma normal de P_G modulo $\{x_1^q - 1, \dots, x_n^q - 1\}$ y como por hipótesis $a \neq 0$, entonces la forma normal de P_G es distinta de cero con lo cual se contradice el hecho de que $P_G \in C(x^q - 1, n, q)$. Por lo tanto G es q -coloreable. ■

4 Otra Aplicación de Bases de Gröbner para determinar la Coloreabilidad de un Grafo

En esta sección ilustraremos otra aplicación de las bases de Gröbner para resolver el problema del colorado de grafos. Para su justificación necesitamos el Teorema de los ceros de Hilbert. El lector interesado puede consultar en el texto [DCJLDO].

Recordemos que un campo $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado si para cualquier polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ en una variable, la ecuación $p = 0$ tiene solución en $\mathbb{K}$. Cualquier campo $\mathbb{K}$ está contenido en un campo $\overline{\mathbb{K}}$ algebraicamente cerrado. Este campo es único salvo isomorfismos y se llama la clausura algebraica de $\mathbb{K}$. Por ejemplo la clausura algebraica de $\mathbb{R}$ es $\mathbb{C}$.

Si $V_{\overline{\mathbb{K}}}(I)$ denota la variedad asociada al ideal I , es decir el conjunto de vectores en $\overline{\mathbb{K}}^n$ que se anulan en todos los elementos del ideal I .

Theorema 14 (*Weak Hilbert Nullstellensatz*). Sea I un ideal contenido en $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Entonces $V_{\mathbb{K}}(I) = \emptyset$ si y solo si $I = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Sea (G, ϕ) un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$. Queremos determinar si G es q -coloreable. El conjunto $C = \{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{q-1}\}$ representa los q -colores, donde $\xi = e^{\frac{2\pi k}{q}} \in \mathbb{C}$ son las raíces q -ésimas de la unidad. A cada vértice del grafo G le debemos asignar uno de los colores $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{q-1}$. Esto lo podemos representar con las siguientes ecuaciones:

$$x_i^q - 1 = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad (6)$$

De otro lado, si dos vértices x_i y x_j son adyacentes, entonces necesitamos asignarles colores diferentes para tener un q -coloreamiento propio de G . Dado que $x_i^q = x_j^q$, entonces $(x_i - x_j)(x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + x_i^{q-3}x_j^2 + \dots + x_i x_j^{q-2} + x_j^{q-1}) = 0$. Por lo tanto los vértices x_i y x_j tienen colores diferentes si y solo si

$$x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + x_i^{q-3}x_j^2 + \dots + x_i x_j^{q-2} + x_j^{q-1} = 0 \quad (7)$$

Podemos considerar el ideal I de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ generado por los polinomios en las ecuaciones 6 y 7, donde x_i y x_j son vértices adyacentes y la variedad $V(I)$ está contenida en $\mathbb{C}^n$

Proposición 15 Sean G un grafo etiquetado con vértices $\{x_1, \dots, x_n\}$ y I el ideal de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ generado por los polinomios en las ecuaciones 6 y 7, donde x_i y x_j son vértices adyacentes. El grafo G es q -coloreable si y solo si $V(I) \neq \emptyset$.

Pueba. Tenemos que el grafo G es q -coloreable si y solo si el sistema determinado por las ecuaciones dadas en 6 y 7 tiene solución y este sistema tiene solución si y solo si $V(I) \neq \emptyset$. ■

Por el teorema 14 $V_{\mathbb{C}}(I) = \emptyset$ si y solo si $I = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Luego $V_{\mathbb{C}}(I) = \emptyset$ si y solo si $1 \in I$. Pero esta última condición equivale a que $G = \{1\}$, donde G es una base de Gröbner reducida para I . Por lo tanto $V_{\mathbb{C}}(I) = \emptyset$ si y solo si $1 \in G$. Es decir, el sistema determinado por las ecuaciones dadas en 6 y 7, donde x_i y x_j son vértices adyacentes; tienen solución en $\mathbb{C}^n$ si y solo si $G = \{1\}$. Así,

una manera de determinar si un grafo G es q -coloreable utilizando la proposición anterior es: primero calculamos una base de Gröbner reducida para I . Luego, si 1 está en dicha base, entonces G no es q -coloreable; y si 1 no está, se tendrá que G es q -coloreable.

Ejemplo 16 El grafo $G = (V_G, E_G)$ de la figura 3.2, es 4-coloreable.

Sea I el ideal generado por los polinomios en las ecuaciones

$$x_i^4 - 1 = 0 \text{ con } 1 \leq i \leq 7 \quad (8)$$

y

$$x_i^3 + x_i^2 x_j + x_i x_j^2 + x_j^3 = 0 \text{ donde } \{i, j\} \in E_G \quad (9)$$

Una base de Gröbner para el ideal I (calculada con MuPAD Pro.) es:

$\{g_1, g_2, \dots, g_{13}\}$ con respecto al orden de términos lexicográfico

$$g_1 = x_1^2 + x_1 x_5 + x_1 x_6 - x_5 x_7 - x_6 x_7 - x_7^2,$$

$$g_2 = x_1 x_2 - x_1 x_6 - x_2 x_7 + x_6 x_7,$$

$$g_3 = x_2^2 + x_2 x_5 + x_2 x_7 - x_5 x_6 - x_6^2 - x_6 x_7,$$

$$g_4 = x_2 x_3 x_5 + x_2 x_3 x_7 - x_2 x_5 x_7 + x_2 x_6^2 + x_3 x_5 x_7 + x_3 x_7^2 + x_4 x_5 x_6 + x_4 x_5 x_7 + x_4 x_6 x_7 + x_4 x_7^2 + x_5 x_6 x_7 + x_6^2 x_7 + x_6 x_7^2 + x_7^3,$$

$$g_5 = x_2 x_3 x_6^2 + x_2 x_3 x_7^2 - x_2 x_5 x_6^2 - x_2 x_5 x_7^2 + x_3 x_6^2 x_7 + x_3 x_7^3 - x_5 x_6^2 x_7 - x_5 x_7^3,$$

$$g_6 = x_2 x_4 x_5 x_6 + x_2 x_4 x_5 x_7 + x_2 x_4 x_6 x_7 + x_2 x_4 x_7^2 + x_2 x_5 x_6 x_7 + x_2 x_5 x_7^2 + x_2 x_6 x_7^2 + x_2 x_7^3 - x_4 x_5 x_6^2 - x_4 x_5 x_6 x_7 - x_4 x_6^2 x_7 - x_4 x_6 x_7^2 - x_5 x_6^2 x_7 - x_5 x_6 x_7^2 - x_6^2 x_7^2 - x_6 x_7^3,$$

$$g_7 = x_3^2 + x_6^2,$$

$$g_8 = x_3 x_4 + x_3 x_6 - x_4 x_5 + x_5 x_7 + x_6 x_7 + x_7^2,$$

$$g_9 = x_3 x_5 x_6 + x_3 x_5 x_7 + x_3 x_6 x_7 + x_3 x_7^2 + x_4 x_5 x_6 + x_4 x_5 x_7 + x_4 x_7^2,$$

$$g_{10} = x_4^2 + x_4 x_5 + x_4 x_6 - x_5 x_7 - x_6 x_7 - x_7^2,$$

$$g_{11} = x_5^2 + x_5 x_6 + x_5 x_7 + x_6^2 + x_6 x_7 + x_7^2,$$

$$g_{12} = x_6^3 + x_6^2 x_7 + x_6 x_7^2 + x_7^3,$$

$$g_{13} = x_7^4 - 1.$$

Como 1 no está en la base de Gröbner para el ideal I , entonces G es 4-coloreable. Un 4-coloreamiento para G es $c : V_G \rightarrow \{1, \xi, \xi^2, \xi^3\}$; donde

$$c(x_1) = c(x_4) = 1, \quad c(x_2) = c(x_6) = \xi, \quad c(x_3) = c(x_5) = \xi^2 \text{ y } c(x_7) = \xi^3.$$

Quiero agradecerle al Prof. Mario Estrada su colaboración en la redacción y a Jesús David Serna por los cálculos de los ejemplos con MACAULAY.

Con la ayuda del Cien de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia.

Referencias

- [WAPL] W. Adams and P. Lousstaunau: An introduction to Gröbner bases. American Mathematics Society. Providence. Rhode Island, 1994.
- [DCJLDO] D. Cox, J. Little and D. O'Shea: Ideals, Varieties and Algorithms, Springer Undergraduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1992
- [NB] N. Biggs: Algebraic Graph Theory, Cambridge University press, Cambridge
- [FH] F. Harary: Graph Theory, Addison-Wesley Publishing Company, Philippines 1972
- [MAIM] M. Atiyah and I MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, Reading. Massachusetts. 1969.
- [ELSH] Eliahou Shalom: An Algebraic Criterion for a Graph to be Four-Colourable, Aportaciones Matemáticas, Soc. Mat. Mexicana, Notas de Investigación, 6 (1992), 3-22.
- [DLOJEA] De Loera A: Gröbner Bases and Graph Colorings, Contributions to Algebra and Geometry, Vol 36, No 189-96
- [WIRUJ] Wilson, Ruben J: Introducción a la Teoría de Grafos, Alianza Editorial, 1983.
- [HSW] Herbert S. Wilf: Algorithms and Complexity, Prentice Hall, New Jersey 07632 1936.

- [GBrPBr] G. Brassard, P. Bratley: Fundamentos de Algorit-mia, Département d' Informatique et de Recherche Opérationnelle Université de Montréal (Traducción Rafael Garcia Bermejo, Facultad de Fisicas, Universi-dad de Salamanca), Prentice Hall, España 1997
- [ST] A Simis, W. V. Vasconcelos, R Villarreal: On the Ideal Theory of Graphs, J of Algebra, 167,(1994) 389-419.
- [APHA] Appel K. and Haken W., The Four Color Prob-lem Mathematics Today, Steene, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978, 153-180.

JHON JADER MIRA A.

e-mail : jjmira@matematicas.udea.edu.co

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES,

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA,

MEDELLÍN, COLOMBIA