



**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ESTRUCTURA ADITIVA EN
ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES**

Un estudio de caso en torno a la Discapacidad Cognitiva

LUCY CAROLINA BUENO ZABALA

DARIO ALBERTO FERNANDEZ TELLEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE - SEDE NORTE DEL CAUCA
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
Santander de Quilichao, febrero de 2018



**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ESTRUCTURA ADITIVA EN
ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES**

Un estudio de caso en torno a la Discapacidad Cognitiva

LUCY CAROLINA BUENO ZABALA

Código 1354266

DARIO ALBERTO FERNANDEZ TELLEZ

Código 1358905

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado (a) en
Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DIRECTOR

MG. RONALD ANDRES GRUESO

Profesor de Instituto de Educación y Pedagogía

UNIVERSIDAD DEL VALLE - SEDE NORTE DEL CAUCA

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

Santander de Quilichao, febrero de 2018

A mis padres Olivia y Asbel, y mi hermana Karen por ser
mis pilares dentro de todo mi proceso.

Lucy

A mi señora madre Martha Téllez y mi padre
Harold Fernández por su esfuerzo y motivación; a mis hermanos William e Iván, mis
sobrinos Samay y Juanse por la compañía y alegrías.

Darío

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirnos terminar con éxito nuestra carrera.

A nuestros padres por apoyarnos en todos estos años.

A nuestro tutor Ronald, por su apoyo incondicional para que este trabajo, que empezó de cero, fuera uno excelente. También, por compartir sus conocimientos y ánimos para ser mejor tanto personal como profesionalmente.

A la Institución Educativa José María Vivas Balcázar, en especial a María Eugenia y al profesor Carlos, por apoyarnos en la realización de este trabajo, por permitirnos aprender de ellos y experimentar lo lindo que fue este proceso, que deja muchas enseñanzas para nuestra vida profesional.

A nuestras evaluadoras, porque gracias a ellas, se hizo un mejor esfuerzo para tener un mejor trabajo al grado.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS	vii
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	viii
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO	4
1.1 Presentación del problema	4
1.2 Justificación.....	10
1.3 Objetivos.....	15
1.3.1 Objetivo general.....	15
1.3.2 Objetivos específicos	15
1.4 Antecedentes.....	15
1.5 Marco Contextual	28
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO.....	31
2.1 Dimensión normativa	31
2.2 Dimensión didáctica.....	44
2.2.1 Categorías Semánticas	44
2.2.2 Problemas Aritméticos	49
2.2.3 Estrategias y modelos.....	52
2.2.4 Formas de representación	58
2.2.5 El juego como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas.....	59
2.3 Dimensión Curricular	62
CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	70
3.1 Metodología.....	70
3.2 Caracterización de la población	73
3.3 Prueba diagnóstica	77
3.3.1 Presentación de la prueba diagnóstica	78
3.3.2 Resultados y análisis de los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica	78
3.4 Diseño de la propuesta de aula	80
3.4.1 Presentación de la propuesta de aula	81
3.4.2 Metodología de aplicación e instrumentos para la recolección de datos	83
3.5 Sobre las variables de análisis	83
3.6 Resultados y análisis de resultados.....	85

3.6.1 Resultados y análisis de resultados de la situación 1.....	85
3.6.2 Resultados y análisis de resultados de la situación 2.....	105
3.6.3 Resultados y análisis de resultados de la situación 3.....	119
CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS RECOMENDACIONES	
DIDÁCTICAS	134
4.1 Conclusiones generales	134
4.2 Reflexiones y recomendaciones.....	140
Productos del trabajo de grado.....	142
REFERENCIAS.....	143
ANEXOS.....	146
Anexo 1: Matriz de análisis de la prueba diagnóstica: resolución de problemas de estructura aditiva	146
Anexo 2. Estructura de la prueba diagnostica.....	152
Anexo 3. Prueba diagnóstica sobre resolución de problemas de estructura aditiva	153
Anexo 4. Instrumento utilizado para la caracterización de la población.....	155
Anexo 5. Propuesta de aula	158

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Trabajos que se tomaron como referencia para los antecedentes	25
Tabla 2. Tipos de problemas de cambio	45
Tabla 3. Tipos de problemas de combinar	46
Tabla 4. Tipos de problemas de comparar	47
Tabla 5. Tipos de problemas de igualar	47
Tabla 6. Problemas con estructura aditiva de suma propuestos por el MEN (1998).....	66
Tabla 7. Problemas con estructura aditiva de resta propuestos por el MEN (1998).....	67
Tabla 8. Coherencia vertical y horizontal	68
Tabla 9. Estructura de la propuesta de aula	82
Tabla 10. Categorías y criterios de análisis de resultados de la propuesta de aula.....	84

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Normatividad internacional sobre Necesidades Educativas Especiales	35
Ilustración 2. Normatividad Nacional sobre prestación del servicio educativo a personas con NEE	38
Ilustración 3. Categorías de capacidades y talentos excepcionales	41
Ilustración 4. Categorías de Discapacidad - SIMAT	44
Ilustración 5. Participación de estudiantes en el juego Serpientes y Escaleras	86
Ilustración 6. Cartelera del juego de boliche S1T2	94
Ilustración 7. Representación icónica gráfica en juego del boliche S1T2.....	94
Ilustración 8. Representación simbólica numérica en el juego de boliche S1T2.....	95
Ilustración 9. Representación simbólica numérica en S1T2P1	97
Ilustración 10. Resultados tabla de personajes en S1T2.....	98
Ilustración 11. Representación simbólica numérica para tabla de personajes en S1T2.....	98
Ilustración 12. Representación simbólica numérica en S1T2P3	100
Ilustración 13. Respuesta del estudiante a S1T2P4	101
Ilustración 14. Respuestas a S1T2P5	102
Ilustración 15. Representación simbólica numérica en S1T2P6	103
Ilustración 16. Representación de los puntajes de los equipos de fútbol de S2T1P4	109
Ilustración 17. Intento de respuesta de S2T2P7.....	111
Ilustración 18. Representación simbólica numérica en S2T2P4	116
Ilustración 19. Operación errada de S2T2P5	118
Ilustración 20. Representación icónica manipulativa de la pregunta S3T1P2.....	122
Ilustración 21. Respuesta de S3T2P3	129

RESUMEN

En este trabajo de grado se presenta una propuesta para el estudio de la estructura aditiva en niños con Necesidades Educativas Especiales (NEE) a través de una propuesta de aula teniendo en cuenta los planteamientos de Puig & Cerdán (1988) acerca de los problemas aritméticos de enunciado verbal de tipo aditivo; realizando un estudio de caso de tipo cualitativo-participativo, que resalta la interacción estudiante-investigador. Para ello, se propone el diseño e implementación de una prueba diagnóstica, cuyos resultados permitieron el posterior diseño de propuesta de aula que fue implementada con un estudiante de segundo grado de básica primaria de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar. La propuesta busca poder potenciar la habilidad para resolver problemas de tipo aditivo, privilegiando así, el proceso de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento numérico propuestos por el MEN (1998).

Posteriormente, se busca realizar un análisis a la luz de los planteamientos teóricos sobre los resultados obtenidos luego de la implementación de la propuesta de aula; determinando finalmente algunas conclusiones y reflexiones en torno a la enseñanza de la estructura aditiva con estudiantes que presentan Necesidades Educativas Especiales.

Palabras claves: Estructura aditiva, resolución de problemas, Necesidades Educativas Especiales, Pensamiento numérico, Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal.

INTRODUCCIÓN

Todos los días nos enfrentamos con información numérica en diversos contextos; por ejemplo, el costo de los alimentos y productos, el precio de los combustibles, el número de asistentes a alguna actividad. En las noticias vemos cifras que explican alguna situación, como el costo del barril del petróleo, precio del dólar o el euro, resultados de encuestas de candidatos a ocupar puestos gubernamentales, entre otros. Para comprender la información numérica con la que se relacionan a diario, los estudiantes necesitan apropiarse de los contenidos matemáticos para lidiar con esas situaciones de manera satisfactoria. En la escuela los niños deben no sólo apropiarse de esos contenidos escolares sino también ser capaces de resolver problemas que involucren dicho contenido.

Lo anterior pone de manifiesto la importancia de proponer la enseñanza de las operaciones básicas a través de la resolución de problemas, para poder llevar el contexto del estudiante a lo que ve en el aula de clase. De este modo, el presente estudio, que se inscribe en la línea de investigación de Didáctica de las Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle hace énfasis en considerar, de forma sistémica, lo que la revisión de la literatura aporta y el diseño de una propuesta de aula que impacte las prácticas de enseñanza en la escuela, en particular, en la Institución Educativa José María Vivas Balcázar de la ciudad de Cali (Valle del Cauca).

En virtud de las dificultades y problemáticas de la enseñanza y aprendizaje en torno a los problemas aritméticos, este estudio presenta una propuesta de aula para potenciar el tipo de tareas que puede ser una alternativa para resolver problemas aditivos con estudiantes con Discapacidad Cognitiva. De esta manera, la pregunta que orienta este trabajo es: ¿Qué tipo de tareas se pueden tener en cuenta para potenciar la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal con estructura aditiva en estudiantes con DI cognitivo de 2° de primaria de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar?

El marco teórico que permite la consolidación del diseño y aplicación de la propuesta de aula, es el de las categorías semánticas de cambio y combinación (Puig & Cerdán, 1988); también, los modelos y estrategias (Díaz, 2004) y representaciones icónicas o simbólicas (Maza, 1999) para la resolución de problemas aritméticos.

La documentación, el desarrollo y los resultados de esta propuesta de trabajo de grado se organizaron en cuatro capítulos, de la siguiente manera: En el primer capítulo se describen los elementos relevantes que permiten explicar la problemática y la forma en que esta se manifiesta. Posteriormente se encuentran la justificación, en la cual se explica el por qué es importante dar solución a la problemática, y los objetivos. Seguidamente, se encuentran los antecedentes que consisten en el rastreo de investigaciones que se centran en tres aspectos (resolución de problemas, estructura aditiva y Discapacidad Cognitiva). Al final de este capítulo se encuentra el marco contextual, el cual trata de describir lo realizado por parte de la Institución Educativa al hablar de Necesidades Educativas Especiales.

En el segundo capítulo, se describen los aspectos teóricos en tres dimensiones: normativa, didáctica y curricular. La dimensión normativa se centra en describir, desde la normatividad colombiana y externa, los aspectos relacionados con las Necesidades Educativas Especiales, y en particular la Discapacidad Cognitiva. En la dimensión didáctica se encuentra lo relacionado con las categorías semánticas propuestas por Puig & Cerdán (1988), lo referente a los problemas aritméticos, las estrategias y modelos expuestos en Díaz (2004), las formas de representaciones presentadas en Maza (1999) y el juego como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas en Marín & Mejía (2015). En la dimensión curricular, se realiza un barrido de lo propuesto por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Lineamientos Curriculares en Matemáticas en torno al pensamiento numérico y la resolución de problemas. Además, se realiza una relación entre los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y lo propuesto en el marco de referencia.

En el tercer capítulo se describen los aspectos relevantes para consolidar el diseño y aplicación de la propuesta de aula, es decir, se encuentra la descripción de la población, diagnóstico, diseño y aplicación de la propuesta, y los análisis de los resultados del estudiante, que surgieron de la implementación de las tres situaciones, cada una con dos tareas.

En el capítulo 4, se mencionan las conclusiones, reflexiones y recomendaciones didácticas para la escuela que van en concordancia con: los objetivos propuestos, los propósitos de las tareas y las interpretaciones de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DEL ESTUDIO

En este capítulo se describen los elementos relevantes que permiten explicar la problemática y la forma en que esta se manifiesta. Al final de la presentación del problema se plantea la pregunta la cual orienta el presente trabajo. Posteriormente se encuentra la justificación, en la cual se explica el por qué es importante dar solución a la problemática. Seguidamente está el objetivo general y los objetivos específicos. Luego, se encuentran los antecedentes que consisten en el rastreo de investigaciones que se centran en tres aspectos (estudios sobre resolución de problemas, investigaciones referentes a la resolución de problemas aritméticos y estudios relacionados con la educación inclusiva). Por último, se encuentra el marco contextual, el cual trata de describir las características académicas, sociales y geográficas de la Institución Educativa donde se hizo la intervención de aula.

1.1 Presentación del problema

La actividad de resolver problemas, entendida como el proceso que implica la realización de una serie de acciones para dar respuesta o solución a alguna dificultad con la intención de resolverla (Iriarte, 2011); es considerada un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas, por tal razón se considera un proceso importante del currículo de matemáticas, como lo establecen los Lineamientos Curriculares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional - MEN (1998):

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel. (p.52)

Sin embargo, al abordar la resolución de problemas con estrategias basadas en la repetición, soluciones algorítmicas y resolviendo ejercicios de rutina con base en modelos presentados por el docente, se generan dificultades en los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, debido a la falta de análisis, reflexión, comprensión y evaluación de resultados que implica el dar respuesta a una situación en contexto (Iriarte, 2011).

Así, las dificultades que trae consigo la enseñanza tradicional de las matemáticas cuando se realiza la presentación exclusivamente algorítmica, resta importancia a la

comprensión y reflexión en la resolución de problemas, dando lugar a que los estudiantes manifiesten desmotivación e incluso rechazo hacia los contenidos matemáticos que se enseñan, originando además creencias como que las matemáticas son difíciles y aburridas (Díaz, 2004). Por esto, los estudiantes en el proceso de resolución de problemas, sólo piensan en identificar cantidades numéricas en un enunciado, con el fin de ejecutar un algoritmo entre estas, pero no se dan a la tarea, siquiera de entender el problema planteado. Al respecto, Sweeney (citado por Ramos, Castro & Rodríguez, 2016) afirma que:

La psicología percibe la resolución de problemas como uno de los aspectos más importantes del desarrollo cognitivo de los estudiantes, como aprendices de matemáticas, siempre que la resolución de problemas sea considerada una actividad que implica pensar y usar conocimiento, algo más que usar operaciones numéricas. (p.174)

De acuerdo con Sweeney, la resolución de problemas cumple un papel primordial en el desarrollo cognitivo de los estudiantes y sin lugar a dudas, debe dedicarse espacio para promover este proceso de manera adecuada, dentro del aula de clase.

Asimismo, al precisar sobre los problemas que involucran la estructura aditiva, se encuentra que los estudiantes presentan ciertas dificultades, ocasionadas por la falta de comprensión o reflexión sobre el enunciado verbal que presenta el problema. Parte de estas dificultades, se deben al uso de algunas palabras que en los problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) con estructura aditiva indican al estudiante si se debe recurrir a una suma o una resta para llegar a la solución. De esta manera, asocia verbos como añadir, unir, juntar o reunir a la operación de suma y similarmente, puede relacionar la sustracción con verbos como quitar, descontar, perder, etc.

En lo que respecta a los problemas de estructura aditiva Castro, Rico & Castro (1995) afirman que:

Muchas de las dificultades que tienen los niños al resolver problemas verbales de adición y sustracción se debe a su limitada comprensión de las operaciones aritméticas con las que estos se resuelven. A menudo no saben cuándo se debe utilizar una de estas operaciones porque les falta el conocimiento específico referente a las variadas situaciones que dan lugar a estas operaciones. Se les suele enseñar la adición solamente como “poner juntos” y la

sustracción como “quitar” a pesar de las otras circunstancias que implican operaciones de sumar y de restar. Los niños necesitan recibir instrucción específica en diferentes situaciones si queremos que consigan buenos resultados en la resolución de este tipo de problemas verbales. (p.38)

Establecen también, que las proposiciones que involucran sustracción, son generalmente más difíciles que las de adición, en especial, cuando el minuendo en la proposición es desconocido ($? - b = c$); además, las proposiciones con la operación al lado derecho del signo igual ($c = a + ?$), son significativamente más difíciles que las otras.

De manera similar, en relación con los tipos de proposiciones en los problemas simbólicos, se considera de gran interés, el trabajo realizado por Nesher (citado por Castro, Rico & Castro, 1995), al proponer una clasificación en cuatro categorías semánticas para los tipos de problemas verbales, que involucran las operaciones de suma y resta. Nesher establece la categoría de *cambio* para los problemas que implican un incremento o disminución de una cantidad, donde intervienen tres cantidades: una inicial, otra de cambio y una final. Una segunda categoría es la de *combinación*, en la cual, los problemas de este tipo hacen referencia a la relación que existe entre una colección y dos subcolecciones disjuntas de la misma. La categoría de *comparación*, implica una comparación entre dos colecciones, donde la relación entre las cantidades se establece utilizando los términos “más que”, “menos que”. Por último, en los problemas de *igualación*, se produce alguna acción relacionada con la comparación entre dos colecciones disjuntas, pero hay que responder qué hacer con una de las colecciones para que presente el mismo número de elementos que la otra.

Al respecto, Puig & Cerdán (1988), considerando las cuatro categorías que se han propuesto para clasificar los problemas verbales de tipo aditivo, y teniendo en cuenta algunos resultados de estudios realizados por Nesher et al. (1982), mencionan algunas dificultades de orden sintáctico, en las cuales se evidencia que la longitud del enunciado, el número de oraciones que lo forman y la posición de la pregunta, son variables que son útiles para explicar la dificultad del problema que presentan los estudiantes al resolverlo. Esto quiere decir, que tanto estas variables, como otras de la estructura superficial del problema, son fuentes de dificultad añadidas al problema. Otro de los factores asociados a las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas verbales de tipo aditivo, está dado por la

relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben de ser colocados a la hora de realizar con ellos la operación necesaria para resolver el problema.

Además de las dificultades de orden sintáctico, es preciso mencionar las dificultades de orden semántico, ya que estas también influyen en el éxito que pueden tener los estudiantes al resolver problemas de tipo aditivo. En este sentido, Puig & Cerdán (1998), a partir de los resultados de investigaciones realizadas por Nesher (1982) y Riley et al. (1983); establecen que el orden de dificultad en general, se encuentra en los problemas de cambio, combinación y comparación; pero en los problemas de resta, hay una ligera variación porque combinar resulta más difícil. De manera similar, en los problemas de cambio, en los cuales la incógnita es la cantidad inicial, se presenta mayor dificultad y en efecto, cualquier modelado o simulación es imposible en la versión directa del problema, luego hay que reformularlo para poder resolverlo. Cosa que ocurre también con los problemas de la categoría de comparación que presentan la incógnita en la cantidad inicial.

Con lo expuesto anteriormente, se añade que una de las dificultades en la resolución de problemas con estructura aditiva, es el hecho de que los estudiantes presentan una limitada comprensión de las operaciones aritméticas con las que resuelven los problemas verbales de tipo aditivo, lo que implica tener en cuenta que no solo se trata de saber hacer una suma (resolver un ejercicio o ejecutar un algoritmo de manera correcta), sino que implica algo más profundo como es la comprensión del concepto, es decir, que el estudiante logre identificar propiedades que se comprenden tanto en la adición como en la sustracción, que logre comprender el hecho de que estas dos operaciones son inversas y que además, logre extender la aplicación de las operaciones a otros problemas del mismo tipo pero que varían en ciertos aspectos, como el tamaño de los números o la forma de la proposición. Al respecto, Hiebert & Lefevre (citados por Agudelo et al, 2007), realizan la siguiente distinción:

En el conocimiento conceptual lo más importante es la red de conexiones y ligazones entre los elementos de información. El conocimiento profundo de esa red permite su reorganización y reestructuración, su aplicación a nuevos elementos de información. Lo más destacado del conocimiento procedimental son los nodos, las piezas de la información en sí mismas, que presentan escasa o nula relación entre ellas. (p.26)

Así, saber sumar no solo es aplicar un algoritmo, sino también, establecer relaciones y comprender las propiedades de las operaciones que contiene la estructura aditiva, utilizando razonamientos, y diferentes estrategias para la resolución de un problema; aspectos que no se evidencian con el simple hecho de saber hacer una suma.

Todo lo anterior, permite constatar las dificultades en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal con estructura aditiva por parte de estudiantes ideales o promedio. Lo cual, no quiere decir que dichas dificultades no se evidencian en aquellos estudiantes o población estudiantil cuyas capacidades intelectuales, físicas y/o mentales no corresponden a las esperadas de acuerdo a su edad y grado escolar; por el contrario, suponen dificultades bien diferenciadas a la hora de centrar la atención en su aprendizaje.

Por esta razón, en el marco de la educación inclusiva, a la cual la UNESCO (2008) define como “un proceso orientado a responder a la diversidad de los estudiantes incrementando su participación y reduciendo la exclusión en y desde la educación” (p.7); y entendiendo la diversidad como las diferencias que existen de persona a persona, que a la vez enriquecen los procesos de interacción que se comprenden entre los seres humanos, donde es el sistema educativo el ente encargado de ofrecer diferentes propuestas que generen un clima escolar a partir de relaciones de aceptación, respeto y valoración de las diferencias entre docentes, estudiantes, padres y demás miembros de la comunidad educativa (Cardona & Carmona, 2012); los estudiantes en general, presenten o no necesidades educativas especiales, tienen derecho a una educación de calidad. Al respecto, Vidarte & Celis (2016) mencionan que:

Considerar las diferencias del sujeto y el conocimiento, amerita de un despliegue de soportes y apoyos que contemplen las características que tal condición plantea, al tiempo que se sustenta en el reconocimiento que no todos los estudiantes aprenden igual, ni al mismo ritmo, lo que obliga al docente a asumir la dimensión general de cada dificultad así como la dimensión personal, para realizar un proceso de flexibilización y de ajuste en el desarrollo curricular y por lo tanto garantizar una calidad educativa con equidad. (p.9)

Es así, como la educación inclusiva en pro de una Educación para Todos (EPT) en el marco de la diversidad, se convierte en un logro de suma importancia para el sistema educativo, en especial, para aquellos estudiantes que presentan Discapacidad Cognitiva, puesto que alrededor de estos, existen ciertos mitos como menciona Salazar (citada por el

MEN, 2006) “la forma como denominamos a las personas con Discapacidad Cognitiva, da vida, de forma inconsciente, a ciertos mitos existentes entorno a ellas, por ejemplo que son eternos niños, incapaces de aprender y libidinosos” (p.12). Es por esto, que las personas con Discapacidad Cognitiva requieren especial atención, puesto que en las aulas de clase, estos estudiantes terminan realizando actividades por pasar el tiempo como consecuencia del mito sobre su incapacidad de aprender.

De esta manera, teniendo en cuenta el enfoque de educación inclusiva desde la diversidad y en relación con la población que presenta Necesidades Educativas Especiales, particularmente de las personas con Discapacidad Cognitiva, resulta pertinente mencionar algunas de las características que dicha población presenta en cuanto a la resolución de problemas aritméticos con enunciado verbal de tipo aditivo. Al respecto, la Secretaría de Educación Pública de México - SEP (2004) se refiere a las dificultades que esta población manifiesta en torno a la resolución de problemas de tipo aditivo vinculando diferentes situaciones que ocurren en su vida cotidiana:

El desfase de los alumnos está vinculado a tres situaciones: el impacto de la discapacidad del alumno en proceso de aprendizaje; una metodología de enseñanza limitada propuesta por los profesores; y una baja expectativa de los padres hacia sus hijos, limitando su experiencia matemática hasta en la vida cotidiana. (pág. 14)

Estas tres situaciones, se deben tener en cuenta al trabajar la resolución de problemas con niños que presenten alguna NEE, porque desde los primeros años de escolaridad, la construcción de los conceptos iniciales en matemáticas (concepto de número, sistema de numeración decimal y resolución de problemas con suma y resta), pueden tener mayor dificultad para ser desarrollados que con los demás estudiantes, porque se necesita de una mayor atención por parte de los docentes; pero estos, no poseen el suficiente tiempo por la cantidad de estudiantes que se encuentran en un aula de clase.

Particularmente, los estudiantes con Discapacidad Cognitiva, siendo esta, una necesidad educativa especial, pueden tener problemas en su conducta, al relacionarse con sus compañeros; por esto, expresar su propio pensamiento les causa dificultad y esto conlleva al estudiante a abstenerse de comunicar el procedimiento que encontró para resolver un problema, es decir, tratar de formular un argumento matemático que justifique su

procedimiento como válido. Incluso, es importante tener en cuenta los planteamientos realizados en la guía para la atención educativa de los alumnos y alumnas con síndrome de Down (citada por Cardona & Carmona, 2012) sobre los procesos matemáticos en el estudiante con Discapacidad Cognitiva, donde establecen que:

En el aspecto de numeración, se debe partir de las habilidades que tienen los estudiantes con Discapacidad Cognitiva, llevando a cabo procesos de manipulación de los objetos de su entorno, los cuales facilitan el aprendizaje ya que para ellos es más fácil desde la relación directa con los mismos. En cuanto a las operaciones básicas, la fase manipulativa es el comienzo de un aprendizaje funcional, práctico y aplicado. La siguiente fase, de representación gráfica, se realiza con la ayuda de imágenes cercanas, de su entorno y pasando finalmente a una fase de abstracción donde se aplican los conocimientos, simultáneo a esto, se da la resolución de problemas, ya que mediante la manipulación se le ha pedido que agrupe y reagrupe objetos, a partir de preguntas sencillas. (pág. 76)

Lo antes expuesto, permite identificar la problemática existente en torno a la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal con estructura aditiva por parte de estudiantes que no tienen dificultades en su aprendizaje, así como también, las implicaciones adicionales que trae consigo el aprendizaje en estudiantes con alguna necesidad educativa especial, particularmente, de aquellos que presentan Discapacidad Cognitiva. De acuerdo con la problemática identificada es menester preguntarse:

¿Qué tipo de tareas se pueden tener en cuenta para potenciar la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal con estructura aditiva en estudiantes con Discapacidad Cognitiva de grado 2° de primaria de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar?

1.2 Justificación

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Educación Básica Primaria se convierten en un eje fundamental en el campo de la educación, dado que posibilitan la adquisición de conocimientos básicos que en ciertos momentos son necesarios para el aprendizaje de nuevos conceptos y la solución de diversas situaciones matemáticas. Por esto, es pertinente tener en cuenta lo mencionado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN,

1998) en el documento de Lineamientos Curriculares de Matemáticas, ya que en éste se establece que:

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. (p.24)

En concordancia con el MEN, es importante involucrar al estudiante con su entorno, es decir, presentar situaciones problemáticas de su vida diaria, de tal manera que resulte un aprendizaje más significativo, en el cual el estudiante encuentre un sentido y utilidad no solo a los algoritmos, sino también que sea capaz de mejorar su capacidad de análisis ante situaciones problemáticas que enfrente. Además, Carpenter & Moser (citados por Castro, Rico & Castro, 1995) señalan que:

La estructura aditiva, subyace en gran número de conceptos matemáticos, y su desarrollo en el niño ocupa un extenso período de tiempo ya que ha de cubrir la transición desde los recuentos informales y las estrategias propias que los niños realizan al margen de su instrucción hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de la adición y sustracción. Este es un período crítico para el aprendizaje de las matemáticas por los niños y se cree que algunas de las dificultades posteriores en matemáticas tienen su origen en la deficiente instrucción inicial de la suma y la resta. (p. 27)

Es de suma importancia que se trabaje la estructura aditiva en los primeros años de escolaridad del niño, puesto que algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en el uso y la aplicación de los algoritmos de suma y resta en grados posteriores, pueden ser derivadas de una instrucción inicial pobre, a causa de las ya mencionadas falencias en las metodologías de la enseñanza tradicional, como la presentación de la estructura aditiva, meramente algorítmica y más aún, cuando se aborda la resolución de problemas pensando únicamente en identificar cantidades numéricas de un enunciado para ejecutar un algoritmo. Lo anterior también lo asegura Ordoñez (2014), al mencionar que:

Se hace necesario que desde la primaria se trabajen estrategias didácticas en matemáticas con las estructuras aditivas y las operaciones básicas para que los estudiantes

logren comprender en el nivel de formación propuesto por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y estos no se conviertan en una dificultad adicional en grados posteriores. (p. 50)

Además de esto, se debe trabajar en la resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva de diferentes tipos, dejando a un lado los enunciados comunes, en los que predomine “poner juntos o reunir” por el lado de la adición y, “quitar” por el lado de la sustracción, para así, disminuir la falencia en los estudiantes de no saber qué operación utilizar por falta de conocimiento de diversas situaciones.

Podría pensarse que la resolución de problemas aritméticos verbales aditivos de una sola etapa, tarea propia de los primeros cursos escolares, es un conocimiento sencillo que todos los estudiantes adquieren sin esfuerzo, pero no es así con aquellos que presentan dificultades de aprendizaje (Ramos, Castro & Rodríguez, 2016). Es por esto que resulta pertinente la implementación de una propuesta de aula que permita un mejor desempeño en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal con estructura aditiva en estudiantes con Discapacidad Cognitiva, respondiendo a las diferentes políticas en pro de la diversidad y la educación inclusiva que reglamentan a nivel nacional e internacional la prestación del servicio educativo como derecho fundamental de todas las personas, sin discriminación alguna, como se establece en la política educativa Colombiana, orientada desde un marco de atención a la diversidad, donde se expresan principios cimentados en el respeto a los derechos fundamentales del ser humano y el reconocimiento a los derechos sociales, económicos, culturales y del ambiente que se han consagrado en la Constitución Política de Colombia.

Es así, como la Constitución Política de 1991, establece el Derecho a la igualdad (Artículo 13); el Derecho al libre desarrollo de la personalidad (Artículo 16); el Derecho que tienen todas las personas a la educación (Artículo 67); el Derecho de las personas a gozar de un ambiente sano (Artículo 79); además, la Constitución del 91 indica que es deber del Estado Colombiano promover las condiciones para que exista una igualdad real y efectiva (Artículo 13); así como también es deber del Estado Colombiano promover el acceso de todos los colombianos a la cultura en igualdad de oportunidades (Artículo 70); de manera similar se establece que es obligación del Estado la educación de las personas con Necesidades Educativas Especiales (Artículo 68); al igual que la adopción de políticas de previsión, rehabilitación e integración social de esta población.

Además, la Ley General de 1994, el Decreto 2082 de 1996 y la Resolución de 2565 de 2003, presentan estrategias que posibilitan la atención educativa para las personas en situación de discapacidad en el sistema educativo, tanto en la modalidad formal como en la no formal, procediendo a partir de normas curriculares flexibles que se adapten a las necesidades del estudiante con discapacidad; para que de esta forma se dé respuesta a un servicio educativo inclusivo (Rojas, 2012).

Respecto a lo mencionado anteriormente, es importante reconocer que se deben implementar mejoras en los currículos y metodologías de enseñanza, por el hecho de que en el aula de clase pueden haber estudiantes que requieran de estrategias diferentes para comprender los diversos conceptos que se enseñan y es ahí, donde el docente debe tener en cuenta que al hablar de situaciones o tareas diferenciadas en el aula, se debe tener presente que no debe pensar en un tipo de población con limitaciones; sino más bien pensar en personas quienes están sujetas a los mismos deberes y derechos, donde el problema no radica en algún tipo de discapacidad, bien sea física o cognitiva, sino en los recursos con los cuales se cuenta para enseñar en la clase (Celis & Vidarte, 2016).

En el caso de estudiantes que presentan Discapacidad Cognitiva, es importante considerar que las matemáticas deben pasar por tres momentos (manipulativo, gráfico y abstracto) y es necesario que el material utilizado para el trabajo pueda estar al alcance de todos los estudiantes, porque el poder tocar y sentir les ayuda a crear mejores representaciones mentales de los elementos y reconocer sus características hasta llegar al momento abstracto (Cardona & Carmona, 2012).

Sin embargo, puede ocurrir, que en el aula de clase se encuentre algún estudiante con dificultades en su aprendizaje, donde la respuesta del docente sea apartarlo de la clase, asignando tareas diferentes a las que desarrolla normalmente con el resto de los estudiantes; tareas que no contribuyen con el desarrollo de los conceptos que se tienen previstos, incurriendo así, en un acto de discriminación, ya que legalmente se establece que tanto los estudiantes con dificultades en su aprendizaje como los que no las presentan, tienen derecho a una educación de calidad.

Al respecto, Salazar (citada por el MEN, 2006) y en relación con el mito sobre la “incapacidad de aprender” de las personas con Discapacidad Cognitiva, menciona que:

Consideramos que su pensamiento no evoluciona, nos queda la duda de la transición de operaciones concretas a operaciones formales, el docente corre el riesgo de asumir dos posiciones extremas: la primera es aferrarse al mito de que no pueden aprender, bajando significativamente las expectativas y los niveles de exigencia, terminando el estudiante con actividades de coloreado, picado y recortado, haciendo planas interminables o participando en actividades lúdicas. La segunda es tratar de nivelarlo a las exigencias de los grados escolares, lesionando de algún modo su autoestima al confrontarlo con actividades superiores a sus capacidades. (p.12)

Lo anterior, supone la necesidad de realizar adaptaciones con base en estándares curriculares y objetos de enseñanza funcionales, de tal manera que se aborden contenidos que generen impacto realmente en la vida de estas personas, definiendo metas que orienten el proceso educativo de estos estudiantes en el contexto de la Educación Formal, con el fin de no correr el riesgo de terminar en actividades por pasar el tiempo, situación que pone de manifiesto un impacto negativo para el proyecto de vida de estas personas (MEN, 2006).

El argumento mencionado anteriormente, justifica la importancia y pertinencia de diseñar e implementar una propuesta de aula con el fin de mejorar la habilidad de resolución de problemas de tipo aditivo en estudiantes con Necesidades Educativas Especiales, particularmente de estudiantes con Discapacidad Cognitiva. Además, prestar un servicio educativo de calidad, exige un cambio en las metodologías de enseñanza del docente, lo que requiere de mayor compromiso, tiempo y dedicación, para encontrar o mejorar sus estrategias de enseñanza, reconociendo que los estudiantes tienen ritmos de aprendizaje distintos, más aún, cuando algunos requieren de elementos auxiliares para la comprensión, como el uso de materiales manipulativos.

La propuesta de aula, se convierte así, en un apoyo importante para el docente, en la medida en que proporciona una estrategia para enseñar, en este caso, las operaciones de suma y resta que componen la estructura aditiva, por medio de la resolución de problemas, al tiempo que brinda elementos a tener en cuenta, en la enseñanza de las matemáticas con niños

que tienen algún tipo de dificultad en su aprendizaje, como aquellos con Discapacidad Cognitiva.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Identificar y caracterizar el tipo de tareas que se pueden tener en cuenta para potenciar la habilidad de resolver problemas aritméticos de tipo aditivo en un estudiante con Discapacidad Cognitiva de grado 2° de primaria de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar

1.3.2 Objetivos específicos

- Establecer y caracterizar, mediante la documentación de la problemática, algunos elementos teóricos y metodológicos que posibiliten el diseño y aplicación de una propuesta de aula centrada en la resolución de problemas aditivos para estudiantes con Necesidades Educativas Especiales.
- Caracterizar, según el análisis de la actuación del estudiante, el tipo de tareas que se deben tener en cuenta para que estudiantes con Necesidades Educativas Especiales desarrollen habilidades en la resolución de problemas de tipo aditivo.
- Aportar reflexiones teóricas y metodológicas a la enseñanza de la estructura aditiva, desde la resolución de problemas aditivos, para estudiantes con NEE de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar.

1.4 Antecedentes

La búsqueda de investigaciones relacionadas con la problemática expuesta anteriormente, se realizó en distintas bases de datos de diferentes universidades y en documentos digitales publicados oficialmente en otros países; con el objetivo de guiar esta investigación y realizar un estudio sobre algunos de los aportes que hasta el momento se han realizado sobre resolución de problemas aditivos de enunciado verbal en niños en situación de Discapacidad Cognitiva.

Sin embargo, frente a esta temática de investigación en particular, no se encontraron muchos trabajos de investigación que aborden simultáneamente la resolución de problemas, la estructura aditiva y tuviera en cuenta la población con Discapacidad Cognitiva. Aun así, se

logran recopilar y organizar tesis, artículos y libros, de acuerdo a las temáticas que trata cada una de las publicaciones, y de esta manera poder fundamentar la presente investigación relacionando los tres ejes fundamentales (resolución de problemas, estructura aditiva y Discapacidad Cognitiva).

Para presentar los ejes fundamentales, inicialmente, se consideran investigaciones relacionadas con la resolución de problemas de tipo aditivo. Posteriormente se centrará la atención en documentos relacionados con la inclusión de estudiantes con Necesidades Educativas Especiales. Luego, se hace referencia a los trabajos que toman como eje central la resolución de problemas con estructura aditiva en estudiantes con Necesidades Educativas Especiales. Finalmente, se alude a niños con Discapacidad Cognitiva y su aprendizaje de las matemáticas.

Respecto a la resolución de problemas matemáticos se relaciona la investigación de Iriarte sobre la importancia de estos en el aula de clase. De esta manera, Iriarte (2011), menciona la influencia de la implementación de estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas matemáticos para estudiantes de quinto de primaria en Colombia.

En esta investigación, la resolución de problemas matemáticos constituye una actividad que requiere de la formación de modos de actuación, métodos de solución y procedimientos específicos, de la cual, hacen parte el conocimiento y uso adecuado de estrategias de solución de problemas a través de la aplicación de modelos, que les permite a los estudiantes desarrollar la competencia de resolver problemas desde la matematización de sus realidades.

Iriarte (2011) en su marco teórico, hace referencia a tres grandes grupos: la resolución de problemas matemáticos, los procesos metacognitivos y la educación matemáticas realista. Para la resolución de problemas matemáticos, se toma como referencia a Llivina (1999) quien centra su atención en la capacidad específica que se desarrolla en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática haciendo uso de la metacognición.

Esta investigación establece que los estudiantes presentan dificultades en cuanto a interpretación y comparación de distintas representaciones de un mismo número, en resolver

problemas en contexto de tipo aditivo y multiplicativo, entre otras. Con lo anterior, Iriarte (2011) aporta así, que los docentes deben utilizar estrategias metacognitivas como parte fundamental del proceso de resolución de problemas, puesto que, las estrategias metacognitivas se caracterizan por “la toma de conciencia mental de las estrategias necesarias utilizadas al resolver un problema, para planear, monitorear, regular o controlar el proceso mental de sí mismo”(p.170). Además, estas estrategias contribuyen con el desarrollo de competencias en el aula, ayudando así a un aprendizaje autónomo por parte de los estudiantes. Finalmente, algunas recomendaciones que esta investigación propone es poner en práctica otras estrategias didácticas con el enfoque metacognitivo, las cuales permitan a los estudiantes reforzar el aprendizaje autónomo y desarrollar habilidades metacognitivas, que contribuyan a la formación de aprendices reflexivos y conscientes de sus potencialidades, pero de igual forma, de sus deficiencias.

En cuanto a la resolución de problemas con estructura aditiva, las investigaciones están vinculadas con el método utilizado para la enseñanza de problemas de suma y resta. De esta manera, Díaz (2004) propone estudiar las diferencias en la competencia de solución de los problemas de cambio de suma y resta en distintos grados de abstracción con estudiantes de primero hasta cuarto de primaria comparando contexto rural y urbano en España.

Díaz (2004), aborda un marco teórico constructivista que presenta el desarrollo del pensamiento matemático, considerando dos contenidos de dicho pensamiento: las nociones de suma y resta y el esquema parte-todo. Con relación al esquema parte-todo, comienza mencionando a Resnick (1983) quien habla de la intuición matemática que implica complementar la suma y resta con flexibilidad al pensar, para continuar con Sophian y Vong (1995) quienes sugieren la comprensión de la suma y la resta con el esquema parte-todo y resolución de problemas con problemas de cambio.

Seguidamente, se hace alusión a Bermejo, Lago & Rodríguez (1998), donde proponen que a medida que los niños comienzan a resolver algoritmos aditivos descubren las propiedades de la suma: identidad, conmutatividad y asociatividad.

Al referirse al esquema parte-todo, se comienza mencionando a Resnick (1983) quien habla de la intuición matemática que implica complementar la suma y resta con flexibilidad

al pensar, para continuar con Sophian y Vong (1995) quienes sugieren la comprensión de la suma y la resta con el esquema parte-todo y resolución de problemas con problemas de cambio.

Al referirse a los tipos de problemas verbales identificados a partir de las estructuras semánticas, Díaz (2004) expone las clasificaciones propuestas por Vergnaud (1982) y sus seis categorías semánticas; Carpenter y Moser (1982) con las tres dimensiones semánticas: conjunto-subconjunto, incremento-decremento y ubicación de la incógnita; Riley et al. (1983) con las tres categorías de problemas: Combinación, Cambio y Comparación; y Bermejo (1998, 2002) que no se distancia mucho de las categorías anteriores: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación.

Como metodología, esta investigación utilizó principalmente el método de Piaget, aplicando 16 problemas con la estructura semántica de cambio presentados en cuatro modalidades distintas; para llegar a concluir que el contexto sociocultural no influye en el rendimiento de los estudiantes, asimismo, los grupos obtienen mejor rendimiento en la suma en comparación con la resta tanto con la incógnita al final como al principio. En cuanto al grado de abstracción, los problemas concreto y pictórico en los niveles primero y segundo se realizaron satisfactoriamente por los estudiantes, mientras que los problemas numéricos y verbales en los niveles de tercero y cuarto del curso urbano se resuelven de manera correcta.

De manera similar a la investigación anterior, Martínez (2012) fija como propósito principal estudiar el proceso de resolución de problemas de estructura aditiva que desarrollan los estudiantes de 2° de primaria en una institución educativa de México, así como los procedimientos y estrategias que utilizan y las dificultades que presentan al resolver los diferentes tipos y subtipos de problemas de estructura aditiva.

Los referentes teóricos que utilizan en esta investigación son: la teoría de los campos conceptuales y el concepto de representaciones externas. En primer lugar, se toma la teoría de los campos conceptuales propuesta por Vergnaud (1990), en la que se considera que el núcleo del desarrollo cognitivo es la conceptualización; se menciona todo lo relacionado a esta teoría, como lo es el concepto, la situación, el esquema, el invariante operatorio y la representación. En segundo lugar, se hace alusión a sistemas de representaciones externas

propuestas por Goldin (1998), que incluyen los sistemas de habla, símbolos escritos, modelos figurativos o imágenes, modelos de manipulación y situaciones del mundo real.

Martínez (2012) utiliza como metodología un estudio descriptivo y explicativo con el fin de buscar especificar las características que presentan los niños de 2° de primaria de una escuela pública en el Distrito Federal en México. Para esto, se aplicaron inicialmente dos cuestionarios, uno sobre la escritura numérica decimal y otro sobre problemas de estructura aditiva; seguido de entrevistas clínicas sobre el cuestionario de problemas de estructura aditiva; posteriormente, se realizó un diseño y aplicación de una propuesta de aula con los resultados de las pruebas iniciales, y teniendo en cuenta los siguientes tipos de problemas con estructura aditiva: combinación con diferencia desconocida, comparación con grande desconocido, combinación con inicio desconocido y cambio aumentado con comienzo desconocido, asimismo se buscó favorecer la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal.

Los resultados de esta investigación encuentran que los niños elaboran diferentes estrategias para resolver diversos tipos y subtipos de problemas de tipo aditivo, de esta manera, se logra determinar que los niños tienen un desarrollo cognitivo diferente en situaciones individuales. Sin embargo, el docente debe realizar adecuaciones en función de las características particulares de sus estudiantes y los objetivos específicos que desea lograr con ellos.

Al hablar de inclusión, Rojas (2012) realiza un acercamiento a las principales características del proceso histórico de la inclusión, de la educación especial y su consolidación en la ciudad Cali, en el período 1990 -2010.

Inicialmente se desarrolla un barrido histórico por todas las principales corrientes teóricas que ayudaron a la concepción de la educación especial, entre ellas, la teoría de Piaget: el desarrollo cognitivo y la teoría de equilibración; y la teoría de Vigotsky: la teoría de aprendizaje. Luego, un marco normativo de la educación especial, tomado desde miradas internacionales, nacionales y locales, centrando su atención en la educación especial en Santiago de Cali, en especial en las aulas inclusivas y todo el proceso que se lleva en la Institución Educativa Álvaro Echeverry Perea.

Una conclusión importante de este trabajo es que se debe buscar la manera de avanzar hacia el desarrollo de comunidades educativas abiertas y respetuosas de la diversidad; que acojan a todos los niños y niñas que presentan algún tipo de discapacidad y requieren de un cambio importante en la respuesta pedagógica, en el funcionamiento actual de las escuelas y en las actitudes de las personas. Logrando así un desarrollo pleno de los valores en las instituciones educativas.

En esta misma temática, pero centrada en educación matemática, Celis & Vidarte (2016) apuntan a caracterizar los logros y dificultades de dos estudiantes de grado 9° de bachillerato de dos instituciones educativas de la ciudad de Cali, que requieren una educación diferencial (discapacidad de tipo visual y deficiencia de aprendizaje), a través del desarrollo de una propuesta de enseñanza sobre las ecuaciones de primer grado con una variable real.

Esta propuesta de aula descompone su marco teórico en cuatro componentes: la educación diferencial, la perspectiva curricular, la perspectiva matemática y la perspectiva didáctica. El primer componente caracteriza a la población, iniciando con un rastreo histórico sobre el concepto de discapacidad, pasando por una posición médica y terminando en una posición de ámbito escolar con la población objeto de estudio. El segundo componente sitúa el papel del concepto de ecuación en la escuela con lo establecido en los documentos nacionales propuestos por el Ministerio de Educación Nacional. El tercer componente hace un acercamiento formal al concepto de ecuación de primer grado. Finalmente, el cuarto componente proporciona diferentes perspectivas acerca de los problemas en la enseñanza del álgebra y en particular sobre las ecuaciones lineales con variable real.

Celis & Vidarte utilizan en su metodología, primero, una caracterización de la población objeto de estudio por medio de entrevistas y una prueba diagnóstica de matemáticas que se realizó con seis estudiantes de dos instituciones de la ciudad de Cali de grado noveno. Segundo, un instrumento para referir información sobre los estudiantes asociada a diferentes aspectos (académico, social y familiar). Y por último se realiza una propuesta de aula conformada por tres situaciones que proponen movilizar el concepto de ecuación lineal con variable real.

Entre las conclusiones de este trabajo, se menciona que las dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones lineales con variable real se dan en la manera procedimental

desde lo netamente numérico y de los procedimientos estructurales en el álgebra; asimismo, se determina que el álgebra no se encuentra estandarizada en un manual para una educación diferenciada, además de que los estudiantes no logran modelar la parte operacional en un nivel formal del álgebra.

Celis & Vidarte recomiendan que al hablar de situaciones o tareas diferenciadas en el aula, el docente debe tener presente que no debe pensar en un tipo de población con limitaciones; sino más bien pensar en personas quienes están sujetas a los mismos deberes y derechos, en donde el problema no radica en algún tipo de discapacidad, bien sea física o cognitiva, sino en los recursos con los cuales se cuenta para enseñar en la clase.

Seguidamente y centrando la atención en la población objeto de estudio, se hace necesario mencionar la investigación de Ramos, Castro & Rodríguez (2016), quienes hacen referencia a un proceso de introducción y posible influencia de la resolución de problemas verbales aditivos de una etapa con tres estudiantes (17-18 años) con dificultades de aprendizaje diferentes, utilizando esquemas visuales en España.

Ramos, Castro & Rodríguez (2016), dividen su marco teórico en dos partes: por un lado, los problemas aritméticos verbales y su trabajo en la escuela, y por el otro, el esquema que representa la situación expuesta en el texto. Al hablar de los problemas aritméticos verbales y su trabajo en la escuela, recopilan de las investigaciones de Castro, Rico y Gil (1992); Puig, y Cerdán (1988); Riley, Greeno, y Heller (1983) la definición de problema verbal, para referirse a un problema aditivo usan la definición propuesta por Vergnaud (1982) y cuando se habla de problemas aditivos de una etapa, según diferentes investigaciones (Carpenter y Moser, 1984; De Corte, Verschaffel y De Win, 1985; Nesher y Katriel, 1977; Nescher, Greeno y Riley, 1982; Riley, Greeno y Heller, 1983) se pueden llegar a clasificar en cuatro tipos: cambio, combinación, comparación e igualación. Esta clasificación se establece basándose en la teoría de los esquemas cognitivos de la psicología y la comprensión mostrada por estudiantes de educación primaria al resolver los problemas.

Con referencia a el esquema que representa la situación expuesta en el texto, esta investigación se basa en lo definido por esquema que propone HersHKovitz y Nesher (2003) y Marshall (1995) para justificar que es una herramienta potente que permite analizar un problema verbal dado, proporcionando una posibilidad para que los estudiantes den un

significado a una tarea haciendo menos énfasis en la memorización y las habilidades del cálculo.

La metodología utilizada en esta investigación es de instrucción directa o explícita, utilizando esquemas para realizar un estudio exploratorio de carácter descriptivo con tres tipos de problemas aritméticos: cambio, combinación y comparación, en el cual no se incluyen los problemas de igualación debido a que el esquema coincide con el de cambio.

Esta investigación, aporta con detalle facilidades y dificultades que se encuentran en estudiantes con necesidades educativas especiales para diferenciar situaciones y problemas de los tipos cambio, combinación y comparación.

También, se obtuvo información sobre las debilidades de la institución en cuanto a material, tiempo de intervención, motivación para los estudiantes con Necesidades Educativas Especiales, intervención del profesor e interacción con estos estudiantes.

En un caso más específico de las necesidades educativas especiales, la propuesta del libro de la Secretaría de Educación Pública de México - SEP (2004) centra su atención en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos en básica primaria para estudiantes con discapacidad intelectual, la cual se fundamenta en los resultados que se han obtenido de las investigaciones realizadas desde 1999 en algunos Centros de Atención Múltiple (CAM) de Educación Especial.

En estos centros, se observaron las dificultades y aciertos en el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos de los estudiantes con discapacidad intelectual y algunas de las problemáticas que se enfrentan los docentes en la enseñanza de las matemáticas para apropiarse del enfoque y/o modelo curricular propuesto a nivel nacional.

Algunas de las dificultades que presenta el texto con respecto al desfase de los estudiantes, es el impacto de su discapacidad, la metodología de enseñanza regida por los docentes y la baja expectativa de los padres en el aprendizaje de sus hijos; pero a pesar de todo, los estudiantes con discapacidad intelectual a través de una intervención didáctica pueden acceder a contenidos matemáticos escolares, teniendo en cuenta que los tiempos son variables entre contenidos y no hay seguridad que accedan completamente a dicho contenido.

En cuanto a la Discapacidad Cognitiva en Matemáticas se referencia el trabajo realizado por, Cardona & Carmona (2012), quienes reconocen las estrategias pedagógicas implementadas por los maestros en el área de Matemáticas, para la atención educativa de escolares con Discapacidad Cognitiva de los grados 1º, 2º y 3º de la institución Educativa Gimnasio Risaralda sede América Mixta de la ciudad de Pereira, con el fin de elaborar estrategias pedagógicas que faciliten su inclusión escolar.

En este trabajo, se toma un marco referencial que comprende dos partes. La primera parte, comprende un marco contextual, donde se fundamenta todo lo relacionado con el ámbito legal sobre el servicio educativo de los niños con Necesidades Educativas Especiales. La segunda parte, centra su atención en todo lo relacionado con la inclusión educativa, la Discapacidad Cognitiva y las estrategias pedagógicas en el área de matemáticas, basándose en lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional.

Cardona & Carmona (2012) emplean como metodología una investigación cualitativa de tipo descriptivo, donde se implementan 10 entrevistas y 8 sesiones de clase observadas con el fin de reconocer las estrategias pedagógicas para la inclusión educativa que utilizan los docentes en un contexto educativo.

Como conclusiones, se llegó a que los modelos implementados para la enseñanza de las matemáticas por las docentes de la institución en la cual se llevó a cabo el trabajo, se enmarcan en el modelo socio-constructivista, ya que los estudiantes alcanzan logros propuestos por ellas dentro de un contexto social y cultural a través de la interiorización de cada estudiante y la conciliación de nuevos conocimientos con las estructuras previas; además, las docentes tienen en cuenta para la enseñanza de las matemáticas los conocimientos previos y parten de estos sin separarlos de la adquisición de los nuevos conocimientos, donde se ve el aprendizaje como una experiencia social donde el contexto juega un papel importante y el lenguaje es una herramienta mediadora para el proceso de aprendizaje.

Cardona & Carmona recomiendan, tener en cuenta que las matemáticas deben pasar por tres momentos (manipulativo, gráfico y abstracto) y es necesario que el material utilizado para el trabajo pueda estar al alcance de todos los estudiantes, especialmente los niños con

Discapacidad Cognitiva, porque el poder tocar y sentir les ayuda a crear mejores representaciones mentales de los elementos y reconocer sus características hasta llegar al momento abstracto. Además, realizar actividades extras de refuerzo en el hogar o en la institución para los estudiantes con Discapacidad Cognitiva, asegurándose de que interioricen los conceptos, partiendo siempre de sus capacidades y potencialidades.

En la Tabla 1 se sintetiza a groso modo los diferentes estudios que se tendrán en cuenta en el presente proyecto de grado, donde se relaciona el nombre del trabajo, el autor, la problemática y/o justificación, los principales referentes teóricos, la propuesta metodológica y, resultados y/o conclusiones de cada uno de los estudios realizados.

Tabla 1. Trabajos que se tomaron como referencia para los antecedentes

Nombre y Autor	Ámbito¹	Problemática y/o Propósito	Referentes Teóricos	Propuesta Metodológica	Resultados y/o Conclusiones
<i>Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de 5° de básica primaria – Iriarte (2011)</i>	Nacional	Implementar estrategias didácticas con enfoque metacognitivo en el desarrollo de la habilidad de resolución de problemas matemáticos para estudiantes de quinto de primaria.	Llivina (1999), Flavell (1976) y Freudenthal (1968).	Se aplicó un pre y pos test a cuatro grupos, dos experimentales y dos grupos de control, tomando situaciones problemas utilizadas por el ICFES.	Los docentes pueden aplicar estrategias didácticas con enfoque metacognitivo para desarrollar competencias en el aula.
<i>El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano - Díaz (2004)</i>	Internacional	Proponer estudiar las diferencias en la competencia de solución de los problemas de cambio de suma y resta.	Piaget (1952), Bermejo el al (1998), Resnick (1983), Sophian y Vong (1995), Vergnaud (1982), Carpenter y Moser (1982) y Riley et al. (1983).	Se centra en el método de Piaget, aplicando 16 problemas con la estructura semántica de cambio.	El contexto sociocultural no influye en el rendimiento de los estudiantes.
<i>Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria - Martínez (2012)</i>	Internacional	Estudiar los procesos, procedimientos y estrategias de la resolución de problemas de estructura aditiva que desarrollan los estudiantes de 2° de primaria.	Vergnaud (1990) y Goldin (1998)	Se aplicó una secuencia didáctica que permita en los estudiantes resolver problemas de estructura aditiva de combinación, comparación y cambio.	Los docentes deben realizar adecuaciones en función de las características particulares de sus estudiantes y los objetivos específicos que desea lograr con ellos.
<i>Recorrido histórico de la educación especial y su proceso de inclusión en el contexto de Santiago de Cali (1990-2010) – Rojas (2012)</i>	Local	Determinar las principales características del proceso histórico de la inclusión de la educación especial y su consolidación en la ciudad Cali, en el período 1990 -2010.	Corrientes teóricas que ayudan a la concepción de la educación especial, marco normativo de la educación especial, internacional, nacional y local.	Recorrido histórico desde la teoría, normatividad internacional, nacional y centrada en Santiago de Cali.	La educación especial en Cali, pasó de ser integradora a inclusiva en los últimos 8 años, siendo una realidad institucional desde el 2011.

¹ Al hablar de local se refiere a los trabajos realizados en la Universidad del Valle, Cali (Colombia). En lo que respecta al nivel nacional se refiere a los trabajos realizados por universidades Colombianas. El nivel internacional, alude a trabajos realizados fuera de Colombia.

<i>Una propuesta de aula para la enseñanza de las ecuaciones lineales con variable real, en dos estudiantes que requieren una educación diferencial – Celis & Vidarte (2016)</i>	Local	Caracterizar los logros y dificultades de dos estudiantes de grado noveno que requieren educación especial.	Desde cuatro perspectivas: la educación diferencial, la perspectiva curricular, la perspectiva matemática y la perspectiva didáctica.	Se aplicó una secuencia didáctica para movilizar el concepto de ecuación lineal con una variable real, basada en los resultados de entrevistas y una prueba diagnóstica matemática.	Al hablar de situaciones o tareas diferenciadas en el aula, los docentes deben tener presente que el problema no radica en algún tipo de discapacidad, sino en los recursos con los cuales se cuenta para enseñar en la clase.
<i>Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con Necesidades Educativas Especiales - Ramos, Castro & Rodríguez (2016)</i>	Internacional	Utilizar un proceso de introducción y posible influencia de la resolución de problemas verbales aditivos de una etapa con estudiantes con NEE.	Vergnaud (1982), Carpenter y Moser (1984), De Corte, Verschaffel y De Win (1985), Nesher y Katriel (1977), Nescher, Greeno y Riley (1982), Riley, Greeno y Heller (1983), HersHKovitz y Nesher (2003) y Marshall (1995)	Se utilizó una instrucción directa o explícita, utilizando esquemas para realizar un estudio exploratorio de carácter descriptivo con problemas de tipo de cambio, combinación y comparación.	Aporta facilidades y dificultades que se encuentran en estudiantes con necesidades educativas especiales para diferenciar situaciones y problemas de los tipos cambio, combinación y comparación.
<i>Aprendiendo a contar. Situaciones didácticas para alumnos con Discapacidad Intelectual - Secretaría de Educación Pública de México - SEP (2004)</i>	Internacional	Centra su atención en la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos en básica primaria para estudiantes con discapacidad intelectual.		Se observó las dificultades y aciertos en el aprendizaje de determinados contenidos matemáticos de los estudiantes con discapacidad intelectual.	Algunas de las dificultades que se presentan son: el impacto de la discapacidad, la metodología de enseñanza y la baja expectativa de los padres en el aprendizaje de sus hijos.
<i>Estrategias pedagógicas en el área de matemáticas para la inclusión educativa de escolares con discapacidad cognitiva de los grados 1°, 2° y 3° de la Institución Educativa gimnasio Risaralda sede América mixta del municipio de Pereira - Cardona, J. & Carmona, M. (2012)</i>	Nacional	Reconocer las estrategias pedagógicas implementadas por los maestros en el área de Matemáticas, para la atención educativa de escolares con discapacidad cognitiva de los grados 1°, 2° y 3°.	Fundamentos legales institucionales, nacionales e internacionales para estudiantes con NEE, especialmente para con Discapacidad Cognitiva. Estrategias pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas a estudiantes con Discapacidad Cognitiva.	Se realizaron entrevistas y observaciones a docentes y estudiantes con Discapacidad Cognitiva.	La enseñanza de las matemáticas debe partir del contexto de los estudiantes y de sus conocimientos previos, además de incluir en las actividades a los estudiantes con Discapacidad Cognitiva fomentando así, una educación inclusiva generando igualdad, aceptación y respeto entre todos los estudiantes.

De acuerdo con los antecedentes presentados, se puede notar de manera recurrente, que la intención o problemática, ha sido promover el aprendizaje de resolución de problemas aditivos en los estudiantes de primaria de diferentes formas, ya sea utilizando situaciones problema, estrategias metacognitivas o utilizando esquemas para un mejor entendimiento de dichos problemas; para así, lograr una mejor comprensión de diferentes temáticas en grados superiores.

En cuanto a los referentes teóricos, a los que alude cada investigación, se logra identificar la influencia de la teoría de Vergnaud y la propuesta de Carpenter & Moser acerca de la estructura aditiva y las categorías semánticas para clasificar los problemas de tipo aditivo, de estas categorías, las más trabajadas fueron las de cambio, comparación y combinación. De manera similar, pero en relación a la resolución de problemas, se presta especial atención a las propuestas de Piaget y el modelo empírico de aprendizaje por parte de los estudiantes.

En torno a los resultados, se ha logrado un aprendizaje significativo en los estudiantes a los que se les aplicó las diferentes estrategias para la enseñanza de resolución de problemas con estructura aditiva. Dentro de las limitaciones encontradas, se destacan aquellas que proponen que los resultados no se pueden generalizar al punto de incidir en la teoría existente, esto debido a que en las propuestas metodológicas imperaba el estudio de casos; así mismo, la dificultad que hay para generalizar a partir de distintos resultados que en cantidad son casi tantos como la cantidad de estudiantes. Adicional a esto, los tiempos de intervención en el aula, fueron limitados exclusivamente al desarrollo de la investigación, sin permitir mayor trabajo con los estudiantes después de la aplicación. A pesar de todos los logros, aún queda por trabajar la resolución de problemas con estructura aditiva para estudiantes de segundo grado con necesidades educativas especiales, ya que se ha reportado un trabajo con estudiantes por fuera de las edades promedio para dicho grado de escolaridad y, un trabajo relacionado con las estrategias que utilizan los docentes para la enseñanza de las Matemáticas en estudiantes con Discapacidad Cognitiva; exceptuando dichos trabajos, no se han citado más estudios con esta población.

En relación a los trabajos que se tendrán en cuenta para el desarrollo de esta propuesta, se puede establecer definitivamente, que la categoría semántica en la cual se ha hecho más énfasis, es la categoría de cambio, que integra la estructura aditiva. Además, se

debe tener en cuenta que al trabajar con estudiantes con Discapacidad Cognitiva, se debe utilizar material manipulable que favorezca el aprendizaje en los estudiantes, promoviendo una educación inclusiva en el aula de clase. Teniendo en cuenta que, a estos estudiantes no solo se evalúan los resultados que escriban en el papel, por el contrario, se pueden evaluar de forma diferente, acentuando así, los procedimientos que realizan al resolver problemas.

Con todo lo mencionado anteriormente, los antecedentes aportan al trabajo de grado, la categoría semántica a trabajar, estrategias que pueden utilizar los estudiantes para resolver problemas, instrumentos para potenciar la caracterización del estudiante, documentos legales sobre la inclusión y recomendaciones para trabajar con estudiantes con discapacidad cognitiva.

1.5 Marco Contextual

La Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar de carácter oficial, se encuentra en la comuna 10 del municipio de Santiago de Cali. La educación que brinda es formal e inclusiva, basada en una formación integral de los estudiantes con énfasis en procesos contables. Su inclinación es la satisfacción de las necesidades y expectativas de sus estudiantes, aplicando un modelo pedagógico flexible, activo, constructivista y por proyectos de vida.

La institución educativa cuenta con tres sedes:

- **Sede central:** Esta sede está ubicada en el barrio la Selva. Cuenta con 1.640 estudiantes de básica secundaria y media técnica, a quienes se presta el servicio en las tres jornadas (mañana, tarde y noche por ciclos). Posee convenios con el SENA y ALLIANCE (programa de profundización en la enseñanza de idioma extranjero - Inglés).
- **Sede Santo Domingo:** Esta sede se ubica en el barrio Santo Domingo. Cuenta con 460 estudiantes que asisten a preescolar y básica primaria, en jornadas de la mañana y tarde. Asimismo, cuenta con un programa de extensión a la comunidad en sistemas y maneja el proyecto de niños lectores y escritores.
- **Sede Fernando Velasco:** Esta sede se ubica en el barrio San Judas. Cuenta con 660 estudiantes en las jornadas de mañana y tarde para los grados de preescolar y básica primaria, en la jornada nocturna se realiza formación por ciclos. Maneja el proyecto en valores y cultura folclórica.

Esta institución educativa cuenta con una oficina de atención a la diversidad, a cargo de un equipo interdisciplinario conformado por una profesional de apoyo, una psicóloga y una fisioterapeuta, quienes realizan un proceso de observación, seguimiento y caracterización de la población estudiantil, tanto de aquella que presenta alguna(s) necesidad(es) educativa(s) especial(es), teniendo en cuenta las categorías propuestas por el Sistema Integral de matrícula SIMAT, como de aquella población que sufre o ha sufrido desplazamiento, consumo de sustancias psicoactivas, etc.; o aquellos que se encuentran en peligro de ser marginados.

El proceso que lleva a cabo el equipo de apoyo a la diversidad de la institución, inicia con el año lectivo, junto con las observaciones que el docente realiza sobre aquellos estudiantes que él considera tienen alguna dificultad en el proceso de aprendizaje.

El equipo, previamente recomienda a los docentes, tener un periodo de observación de aproximadamente un mes, tiempo en que el estudiante se adapta al nuevo año lectivo. En este sentido, el docente debe diligenciar en el observador, todo lo que haya logrado percibir en el proceso de aprendizaje del estudiante, documento que se incluye en la carpeta de cada escolar.

El papel del equipo de apoyo es determinar, en primera instancia, si es un caso nuevo o uno antiguo. Para el caso de un estudiante antiguo, el equipo retoma las observaciones que los docentes han plasmado al finalizar el año anterior, ya sean comportamentales, de tipo académico, u otras. Para el caso de un estudiante nuevo, se toma como base lo que el docente escriba y analice en el transcurso del periodo de observación. Una vez finalizado el periodo de observación llevado a cabo por el docente, el equipo de apoyo estudia el caso y procede a realizar jornadas de observación para determinar la complejidad de este y si es necesario abordarlo.

En segunda instancia, si se decide abordar el caso; se inicia el proceso con una carpeta, en la cual estará toda la información respectiva del estudiante y la información básica del acudiente; es decir, se inicia una valoración psicopedagógica que posee un formato que contiene aspectos como: datos básicos del estudiante, datos básicos del grupo en que está y el docente a cargo del grado, datos relevantes sobre la historia clínica, historia educativa, contexto escolar, contexto familiar. En caso de que el estudiante ya cuente con un

diagnóstico, médico, este será el punto de partida para el equipo de apoyo, que realizará acompañamiento al estudiante. Cabe resaltar que el equipo de apoyo no está facultado para realizar ningún tipo diagnóstico médico o especializado.

Para complementar lo diligenciado por el docente y comenzar a tramitar la carpeta de un estudiante, se presta especial atención al docente, puesto que es quien constantemente está observando al estudiante, luego se cita al acudiente y se continua la valoración psicopedagógica, con el fin de incluir la información familiar, historia escolar, antecedentes médicos y la información respectiva al proceso que se haya realizado con el estudiante en su formación académica hasta la fecha, entre otras.

Finalmente, se cita al padre de familia y/o acudiente para persuadirlo de realizar un acompañamiento, mientras se le explica el proceso a seguir con el estudiante para tener herramientas que faciliten una completa valoración psicopedagógica por parte del equipo de apoyo, que al final de todo el proceso, realizará conclusiones y recomendaciones de todo el acompañamiento al docente para mejorar tanto el proceso de enseñanza, como el proceso de aprendizaje del estudiante.

Los estudiantes de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar en su mayoría viven en estrato 3, sin embargo, se puede encontrar estudiantes pertenecientes a los estratos 1, 2 y pocos del 4. En cuanto a la situación socioeconómica, varían de acuerdo a las sedes, aunque se registran condiciones muy difíciles, más aún en las sedes de primaria, porque los niños no tienen cómo solventar sus necesidades en comparación con los estudiantes de bachillerato. También, existe mucha desintegración familiar en todas las sedes y un nivel de vulnerabilidad muy alto, no solo por discapacidad sino por maltrato, abuso, entre otras.

En el grado segundo de primaria de la sede Santo Domingo, se encuentran matriculados 34 estudiantes, donde las edades promedio son de 7 a 8 años. En este grado, solo se encuentra un estudiante con diagnóstico clínico, pero el resto del grupo contiene una problemática psicosocial (se encuentran muchas familias reinsertadas). Para efectos de esta investigación, se va a trabajar con el estudiante que tiene diagnóstico clínico, específicamente retraso mental leve.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

La fundamentación teórica del presente trabajo, consta de diferentes dimensiones (normativa, didáctica y curricular), que determinan las directrices de la investigación; dando así, un sustento teórico para el diseño de una propuesta de aula que permita fortalecer la habilidad para resolver problemas con estructura aditiva en estudiantes con retraso mental leve (DI cognitivo).

De esta manera, la dimensión normativa determina el marco legal para la prestación del servicio educativo a personas con Necesidades Educativas especiales; la dimensión didáctica permite una visión amplia acerca de la estructura aditiva a través de diferentes perspectivas didácticas y la dimensión curricular permite contrastar las propuestas del Ministerio de Educación Nacional con los referentes didácticos en torno a la estructura aditiva.

2.1 Dimensión normativa

Esta dimensión se centra en el ámbito legal y educativo referente a las personas con Necesidades Educativas Especiales. En un primer momento, se hace referencia a lo planteado por la Declaración Universal de Derechos Humanos, además, se tiene en cuenta lo presentado en: el informe Warnock, la convención sobre los derechos del niño, la Declaración Mundial sobre Educación para todos, el Marco de Acción para satisfacer las Necesidades Básicas de Aprendizaje, la Declaración de Salamanca y el marco de Acción para las Necesidades Educativas Especiales.

Luego, en un segundo momento, se indica lo que presenta Colombia desde una perspectiva legal concerniente a la atención de la población que presenta discapacidad o capacidad o talento excepcional dentro de los establecimientos educativos del Estado Colombiano, en el marco de la educación inclusiva y las categorías propuestas por el Sistema Integrado de Matricula SIMAT.

En primer lugar, el Artículo 26 de la Declaración Universal de Derechos Humanos adoptada y proclamada en el año 1948 en la ciudad de París por la Unesco (1948), establece que:

1. Toda persona tiene derecho a la educación... 2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos. (p.8)

Es gracias a la declaración realizada por la Unesco que se tiene en cuenta a nivel mundial, el acceso a la educación de todas las personas como obligación de los estados, que además deben ofrecer a las personas todas las garantías para el desarrollo pleno de su derecho.

Posterior a la declaración universal de los derechos humanos, surge, gracias al informe Warnock (1978) el término Necesidades Educativas Especiales - NEE que hace referencia a estudiantes que presentan dificultades en su aprendizaje y se crea la necesidad de contar con recursos educativos especiales para atender dichas dificultades, con el objetivo de lograr una educación de calidad en niños, niñas y jóvenes que presentan alguna necesidad educativa especial. Entendiendo que la expresión, engloba los términos de discapacidad, capacidad o talento excepcional.

Además, se menciona que la necesidad educativa especial puede tomar la forma de la necesidad de uno o más de los siguientes:

- La provisión de medios especiales de acceso al currículo, mediante equipos, instalaciones o recursos especiales, modificación del entorno físico o técnicas de enseñanza especializada.
- La provisión de un currículo especial o modificado;
- Atención particular a la estructura social y el clima emocional en el cual toma lugar la educación.(Warnock, 1978, p.41)

Lo que indica que si un estudiante presenta una necesidad educativa especial, esto no quiere decir que presente una y solo una de las formas de necesidad, puede ser que presente una o más de las formas de necesidades educativas especiales.

El informe también sugiere la integración de la población con NEE al sistema educativo de las diferentes naciones, bajo los siguientes principios según mencionan Bruno & Noda (2010):

- Ningún niño será considerado ineducable.

- La educación es un bien al que todos tienen derecho.
- Los fines de la educación son los mismos para todos.
- Ya no existirán dos grupos de alumnos, los deficientes que reciben Educación Especial, y los no deficientes que reciben simplemente educación.
- Las prestaciones educativas especiales tendrán un carácter adicional o suplementario y no alternativo o paralelo.
- Se utilizará el término dificultad de aprendizaje para describir al alumnado que necesitan alguna ayuda especial.
- Se adaptará un sistema de registro de los alumnos necesitados de prestaciones educativas especiales en el que no se impondrá una denominación de la deficiencia, sino una explicación de la prestación requerida.(p.143)

Sin duda alguna, el informe Warnock marca un antes y un después en la consideración de la educación de niños, niñas y jóvenes que presentan alguna dificultad en el aprendizaje, dado que en este, se tienen en cuenta aspectos como la forma de necesidad que presente un estudiante, es decir, se consideran aspectos como el currículo, el ambiente físico, la atención en el ámbito social y el clima emocional educativo.

De manera análoga, la Convención sobre los Derechos del Niño del Fondo de la Naciones Unidas para la Infancia - Unicef (1989), elaborada durante diez años con las aportaciones de diversas sociedades, culturas y religiones; fue aprobada como un tratado internacional de los derechos humanos el 20 de noviembre de 1989.

En su Artículo 23, Unicef (1989) hace referencia a los niños mental o físicamente impedidos, indicando que éstos deberán disfrutar de una vida plena y decente, asegurando su dignidad y permitirles llegar a ser ellos mismos para participar en sociedad; también el Estado debe asegurar que el niño tenga acceso a la educación, capacitación, servicios sanitarios, servicios de rehabilitación, preparación para empleo y oportunidades de esparcimiento, con el fin de que el niño logre una interacción social, desarrollo individual, cultural y espiritual en la máxima medida posible.

Asimismo, la Declaración Mundial sobre Educación para Todos y el Marco de Acción para satisfacer las Necesidades Básicas de Aprendizaje - Unesco (1990) son el resultado de un proceso de consulta iniciado en octubre de 1989 y que siguió hasta finales de enero de

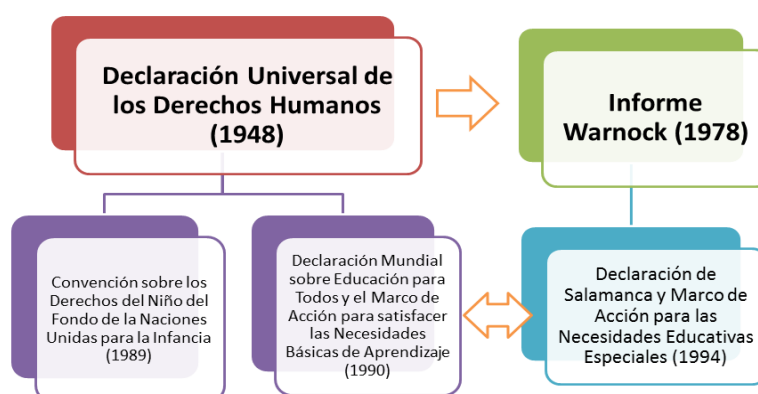
1990, con el fin de llegar a un consenso mundial sobre una visión ampliada de la educación básica y constituyen un compromiso renovado para garantizar que las necesidades básicas de aprendizaje de todos se satisfacen realmente en todos los países.

En el Artículo 3 de este documento, se hace mención a universalizar el acceso a la educación y fomentar la equidad, siendo la educación un servicio de calidad que se debe proporcionar a niños, jóvenes, mujeres y adultos brindando una oportunidad de alcanzar y mantener un nivel aceptable de aprendizaje, sin existir discriminaciones en las posibilidades de aprendizaje de los grupos desasistidos; los pobres, los niños de la calle y los niños que trabajan, las poblaciones de las zonas remotas y rurales, los nómadas y los trabajadores migrantes, pueblos indígenas, las minorías étnicas, raciales y lingüísticas, refugiados, los desplazados por la guerra, y los pueblos sometidos a un régimen de ocupación. También, las personas impedidas necesitan especial atención, para garantizarles la igualdad de acceso a la educación como un integrante del sistema educativo (Unesco, 1990).

La Declaración de Salamanca y Marco de Acción para las Necesidades Educativas Especiales (1994), aprobada por la conferencia mundial sobre necesidades educativas especiales: acceso y calidad, celebrada en España, estipula que “las personas con necesidades educativas especiales deben tener acceso a las escuelas ordinarias, que deberán integrarlos en una pedagogía centrada en el niño, capaz de satisfacer esas necesidades” (Unesco, 1994, p.6). Se proclama también que cada niño tiene sus propias necesidades de aprendizaje, al igual que sus propios intereses, capacidades y características.

Todo lo anterior, se sintetiza en la Ilustración 1, donde se organiza lo ocurrido a nivel global en relación con las Necesidades Educativas Especiales y su trascendencia a nivel mundial.

Ilustración 1. Normatividad internacional sobre Necesidades Educativas Especiales



En cuanto a la normatividad colombiana, respecto a la prestación del servicio educativo a personas con algún tipo de discapacidad, capacidad o talento excepcional; la Constitución Política en su Artículo 67, acorde con lo propuesto en la Declaración Universal de los Derechos Humanos, establece que:

La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura. La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente (Const., 1991, art 67).

De esta manera, la prestación del servicio educativo en Colombia se reconoce como un derecho de las personas, de tal manera que el Estado deberá velar por la prestación del servicio, ofreciendo las garantías para que toda persona sea educada en el marco del respeto a los derechos humanos.

De la misma manera, en el Artículo 13 se menciona que el Estado garantizará condiciones de igualdad y protegerá especialmente a aquellas personas que se encuentren en estado o circunstancia de debilidad manifiesta ya sea por su condición económica, física o mental (Const., 1991, art. 13).

Incluso, en el Artículo 47 se establece que “el Estado adelantará una política de previsión, rehabilitación e integración social para los disminuidos físicos, sensoriales y psíquicos, a quienes se prestará la atención especializada que requieran” (Const., 1991, art

47). De este modo, el Estado brinda protección a aquellos que presenten algún tipo de discapacidad, ofreciendo atención profesional para mejorar su calidad de vida, permitiendo su integración a la sociedad.

Por otra parte, la Ley General de Educación (Ley 115), hace referencia a la atención educativa de personas con alguna discapacidad o capacidades excepcionales, exigiendo así a los establecimientos educativos la prestación del servicio a personas con algún tipo de discapacidad; así mismo, se exige que el establecimiento educativo debe contar con personal capacitado para una atención especializada (Ley 115, 1994, art. 46-49).

Igualmente, el Decreto 2082 (1996) puntualiza todo lo referente a la atención educativa, las orientaciones curriculares, orientaciones de prestación de servicios, formación de los educadores y apoyo financiero para las personas con alguna discapacidad o capacidad o talento excepcional.

De acuerdo a la Ley 361 (1997), se habla de una educación pública garantizada para todos, sin importar si posee una limitación; integrando en las aulas de los establecimientos educativos convenios para adoptar las acciones pedagógicas necesarias para la integración académica y social de estas personas, incluyéndose a las personas con alguna limitación en el Proyecto Educativo Institucional de cada establecimiento educativo.

Por su parte, en la Resolución 2565 (2003) se establecen los parámetros y criterios para la prestación del servicio educativo a la población con necesidades educativas especiales, donde se plantea un proceso de integración social y educativo con ayuda de profesionales de apoyo pedagógico como lo son: los profesionales en educación especial, psicología, fonoaudiología, terapia ocupacional, trabajo social, intérpretes de lengua de señas colombiana, modelos lingüísticos, etc.

Cabe agregar, que la Ley 1098 (2006), por la cual se expide el código de infancia y adolescencia, establece en su articulado sobre derechos y libertades, el derecho a la educación de calidad de niñas, niños y adolescentes, que se considera obligatoria por parte del Estado y gratuita en las instituciones estatales.

En cuanto a los derechos de los niños, las niñas y los adolescentes con discapacidad, se menciona que el Estado, debe proporcionar las condiciones necesarias para que reciban cuidados especiales en educación y de igual manera tengan derecho a la educación gratuita en las entidades especializadas para tal fin.

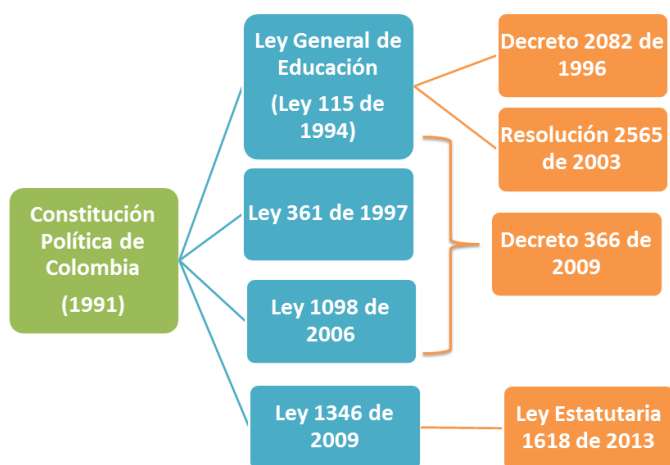
En concordancia con la Ley 1098 de 2006, el Decreto 366 (2009) reglamenta la organización del servicio de apoyo pedagógico para la atención de los estudiantes matriculados en alguno de los establecimientos educativos del Estado y que presentan algún tipo de discapacidad o que por el contrario cuentan con capacidades o con talentos excepcionales, lo anterior en el ámbito de la educación inclusiva. Con esto, se manifiesta el apoyo y compromiso con la formación docente de los establecimientos educativos, que presten el servicio a estudiantes con alguna discapacidad o capacidad o talento excepcional en el marco de los planes de mejoramiento institucional.

De hecho, mediante la Ley 1346 (2009), se aprueba la convención sobre los derechos de las personas con discapacidad, donde el propósito es promover, proteger y asegurar la igualdad de todos, fundamentalmente de las personas con discapacidad, promoviendo el respeto de su dignidad, la no discriminación, la participación e inclusión en la sociedad, el respeto por la diferencia y aceptación, igualdad en oportunidades, accesibilidad, igualdad entre hombre y mujer, y el derecho a preservar su identidad.

En relación con la Ley anterior, la Ley estatutaria 1618 (2013) garantiza y asegura los derechos de las personas con discapacidad, mediante la adopción de medidas de inclusión social, de ajustes razonables y eliminando toda forma de discriminación por razón de discapacidad. Así, se establece que es deber de las entidades territoriales certificadas en educación, promover en las instituciones educativas una cultura inclusiva en la cual se tenga en cuenta el derecho a una educación de calidad para aquellas personas que presenten algún tipo de discapacidad, con el propósito de fomentar sus competencias básicas y ciudadanas.

La Ilustración 2, condensa lo presentado anteriormente a nivel nacional acerca de la fundamentación legal para la prestación del servicio educativo a todas las personas, teniendo en cuenta primordialmente aquellas que presentan Necesidades Educativas Especiales, en el marco de la educación inclusiva y apoyo a la diversidad.

Ilustración 2. Normatividad Nacional sobre prestación del servicio educativo a personas con NEE



De lo anteriormente expuesto, es de tener en cuenta que se presenta un cambio de enfoque como consecuencia de la coyuntura que ha tenido la educación de personas con algún tipo de discapacidad, dificultad en el aprendizaje o por el contrario, con algún tipo de capacidad o talento excepcional que se ha ido fundamentando legalmente a lo largo del tiempo, con la declaración universal de los derechos humanos, el informe Warnock y nacionalmente, a través de la constitución política, diferentes leyes, decretos y resoluciones que amparan a las personas que presentan alguna de las condiciones ya mencionadas.

Es así, como en un primer momento, se tiene en cuenta la declaración de los derechos humanos y lo establecido en el informe Warnock sobre las personas con Necesidades Educativas Especiales, expresión que es acuñada a propósito por dicho informe y que es abordado posteriormente bajo un proceso de integración que hace referencia a la unificación del sistema de educación especial con el sistema educativo regular, ya que en la década de los años 80's y 90's se tenían en el país los dos sistemas educativos paralelos.

Es gracias a la Conferencia Mundial sobre necesidades educativas especiales en Salamanca en 1994, cuando se presenta un segundo momento, el cual se rige bajo lo propuesto en la conferencia y surge entonces en Colombia y el mundo, la idea de adaptar los sistemas educativos bajo un enfoque inclusivo y no de integración, dado que éste último sólo tenía en cuenta el hecho de que aquellos estudiantes que hacían parte del sistema de educación especial se incorporarán al sistema regular. Sin embargo, no se tuvieron en cuenta las adaptaciones curriculares y de las instalaciones físicas que debían realizarse para brindar un servicio educativo de calidad, que tuviera más en cuenta justamente las necesidades

educativas especiales de cada estudiante y el proceso de aprendizaje, dado que cada estudiante como lo menciona la declaración de Salamanca, tiene sus propias necesidades de aprendizaje.

Por tanto, el proceso de integración no es un proceso completo, ya que no se tienen en cuenta las necesidades de aprendizaje de los estudiantes, mientras que el enfoque de inclusión que se propone luego de la declaración de Salamanca y la declaración mundial sobre educación para todos, tiene una finalidad más amplia que la del proceso de integración, buscando prestar especial atención a aquellos estudiantes con necesidades educativas especiales o que por diferentes razones se encuentran excluidos o en riesgo de ser marginados, considerando que éstos tienen sus propios intereses, características, necesidades de aprendizaje y capacidades como se expone en la declaración de Salamanca.

Así, el enfoque de inclusión, no solo aborda las necesidades educativas especiales, sino que éste también está relacionado con “la capacidad de potenciar y valorar la diversidad (entendiendo y protegiendo las particularidades), promover el respeto a ser diferente y garantizar la participación de la comunidad dentro de una estructura intercultural en los procesos educativos” (MEN, 2013, p. 4).

Bajo este último enfoque, la UNESCO (2008) define la educación inclusiva como:

Un proceso orientado a responder a la diversidad de los estudiantes incrementando su participación y reduciendo la exclusión en y desde la educación. Está relacionada con la presencia, la participación y los logros de todos los alumnos, con especial énfasis en aquellos que, por diferentes razones, están excluidos o en riesgo de ser marginados, constituyendo un impulso fundamental para avanzar en la agenda de la EPT (Educación Para Todos). (p.7)

Se habla entonces de educación inclusiva y no de inclusión educativa, ya que la primera hace referencia a las diferentes posibilidades que el sistema educativo a través de las instituciones estatales, debe brindar a los diferentes estudiantes presenten o no necesidades educativas especiales, con el fin de brindar educación de calidad, atendiendo a los diferentes aspectos que aluden a la educación inclusiva como participación, interculturalidad, equidad, calidad y diversidad, siendo este último el término representativo de la educación inclusiva,

ya que tiene en cuenta la cultura, el contexto social, etc. Estos, son los aspectos que deben abordarse en los sistemas educativos, según el MEN (2013):

Es fundamental precisar que estas características (diversidad, interculturalidad, participación, calidad, equidad) están relacionadas entre sí y articulan de manera coherente la construcción conceptual (de la educación inclusiva). De manera general, la relación entre cada una de ellas gira en torno a su relevancia respecto al enfoque de derechos, el cual tiene como núcleo el respeto y fomento de la diversidad e interculturalidad con equidad, calidad y participación en los sistemas educativos. (p.16)

Por su parte, la inclusión educativa se refiere al proceso por el cual, el estudiante es quien debe adaptarse al sistema educativo y no en el sentido contrario, es por esta razón que se habla de educación inclusiva como un proceso más acorde con lo establecido en la declaración universal de los derechos humanos y la educación para todos (EPT).

Considerando que la educación inclusiva resulta ser un enfoque más amplio que el enfoque de integración, y que además, dicho enfoque inclusivo tiene en cuenta la atención a estudiantes con NEE; en Colombia se ha organizado por medio de categorías a través del sistema integrado de matrícula SIMAT, la prestación del servicio educativo a estudiantes con algún tipo de discapacidad, capacidad o talento excepcional. Estas categorías deben manejarse en el registro de cada estudiante sea nuevo o antiguo en los establecimientos educativos.

Las categorías propuestas por el SIMAT son:

1. Definiciones de categorías de capacidades y talentos excepcionales

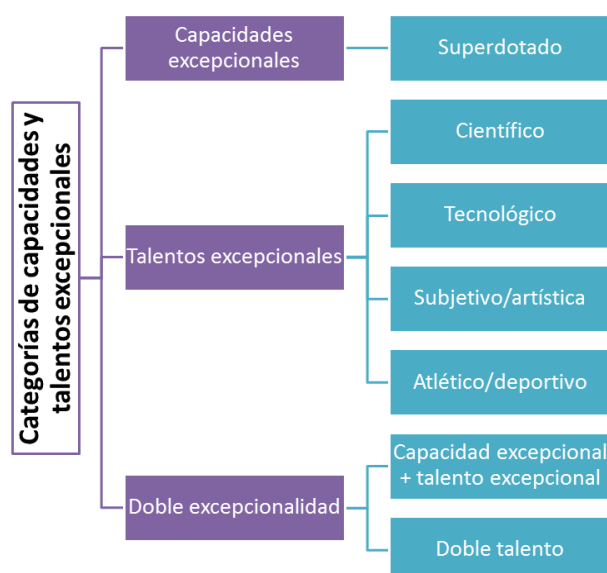
1.1 Capacidades excepcionales: Nivel intelectual muy superior, nivel de creatividad por encima de la media, altos niveles de interés por el conocimiento, de autonomía o independencia en edades tempranas y de desempeño en varias áreas del conocimiento o varios talentos.

1.2 Talentos excepcionales: Aptitud y dominio sobresaliente en un campo específico, demostrado en edades tempranas que le permite expresar fácilmente sus creaciones por medio de este talento.

1.3. Doble excepcionalidad: Cuando presentan dos de las anteriores.

En la Ilustración 3, se presentan las categorías de capacidades y talentos excepcionales con las correspondientes características que se proponen en el SIMAT.

Ilustración 3. Categorías de capacidades y talentos excepcionales



2. Definiciones de categorías de discapacidad

2.1 Movilidad: En esta categoría se deben reportar las personas-estudiantes que presentan en forma permanente debilidad muscular, pérdida o ausencia de alguna parte de su cuerpo, alteraciones articulares o presencia de movimientos involuntarios. Las personas con esta condición presentan dificultad de diferentes grados para caminar o desplazarse, cambiar o mantener posiciones del cuerpo, llevar, manipular o transportar objetos y realizar actividades de cuidado personal, o del hogar en el desarrollo de sus actividades cotidianas, entre otras. Para aumentar su grado de independencia pueden requerir de la ayuda de otras personas, prótesis, órtesis o ayudas técnicas como sillas de ruedas, bastones, caminadores, muletas, entre otras.

Nota importante: Los estudiantes con limitaciones en la movilidad requieren instituciones educativas con espacios y mobiliario accesibles, ojalá con diseño universal: mesas de trabajo, sillas, atriles, útiles escolares, TIC.

2.2 Sensorial Auditiva: En esta categoría se reportan las personas-estudiantes que presentan en forma permanente alteraciones en las funciones auditivas como localización, tono, volumen y calidad de los sonidos. Quienes tienen esta condición pueden presentar diferentes grados de dificultad en la recepción y producción de mensajes verbales en el desarrollo de sus actividades cotidianas incluidas las escolares.

Para aumentar el nivel de independencia los estudiantes con estas condiciones pueden requerir de la ayuda de intérpretes, audífonos, implantes, sistemas de frecuencia modulada-FM y apoyos pedagógicos, entre otros.

2.3 Sensorial Visual: En esta categoría se reportan los estudiantes que presentan en forma permanente alteraciones para percibir la luz, forma, tamaño, o color.

Se refiere a aquellas personas que presentan diferentes grados de dificultad en la ejecución de actividades de cuidado personal, estudio, trabajo, entre otras. Existen personas ciegas y personas con baja visión quienes a pesar de usar su mejor corrección en gafas o lentes de contacto, o haberle practicado una cirugía, tienen dificultades para distinguir formas, colores, rostros, objetos en la calle, ver en la noche, ver de lejos o de cerca, independiente que sea por uno o ambos ojos.

Para que los estudiantes que presentan estas condiciones tengan más independencia y autonomía, deben contar con espacios accesibles, señales sonoras, apoyos tecnológicos, entre otros.

2.4 Sensorial Voz y Habla: En esta categoría se encuentran aquellas personas que presentan en forma permanente alteraciones en el tono de la voz, la vocalización, la producción de sonidos y la velocidad del habla. También las personas con dificultades graves o importantes para articular palabra; es decir con alteraciones graves del lenguaje.

Hace referencia a aquellas personas que pueden presentar diferentes grados de dificultad en la emisión de mensajes verbales en el desarrollo de sus actividades cotidianas y escolares. Para una mayor independencia podrían requerir de apoyos terapéuticos, tecnológicos.

2.5 Sordoceguera: Es una discapacidad que resulta de la combinación de dos deficiencias sensoriales (visual y auditiva) y que genera en quienes la presentan problemas de comunicación únicos y necesidades especiales derivadas de la dificultad para percibir el entorno. Algunas personas sordociegas son sordas y ciegas totales, mientras que otras conservan restos auditivos y/o restos visuales. Generalmente las personas sordociegas requieren de apoyos táctiles para comunicarse, los cuales se proveen a través de guías intérpretes o mediadores y en algunos casos de apoyos tecnológicos.

2.6. DI cognitivo: Se refiere a la discapacidad intelectual, en la cual se encuentran los trastornos de tipo cognitivo. En esta categoría se encuentran aquellas personas-estudiantes, que en forma permanente presentan alteraciones en las funciones intelectuales y cognitivas. Se refiere a aquellas personas que podrían presentar en el desarrollo de sus actividades cotidianas, diferentes grados de dificultad en la adquisición y aplicación de los elementos del aprendizaje para la ejecución de actividades de cuidado personal, del hogar, comunitarias, y

sociales entre otras; así como dificultades para interactuar con otras personas de una manera apropiada dentro de su entorno social. Para lograr una mayor independencia se requiere de apoyos especializados terapéuticos y pedagógicos.

2.7 Discapacidad Mental Psicosocial: En esta categoría se encuentran aquellas personas-estudiantes que presentan en forma permanente alteraciones de conciencia, orientación, energía, impulso, atención, temperamento, memoria, personalidad y en las conductas psicosociales, entre otras. Pueden presentar diferentes grados de dificultad en la ejecución de actividades que implican organizar rutinas, manejar el estrés y las emociones; interactuar y relacionarse con otras personas; al igual que en actividades, de educación, trabajo, comunitarias, sociales y cívicas.

En esta categoría, los estudiantes requieren de tratamiento psiquiátrico para poder ser incluidos al sistema educativo, ya que pierden el contacto con la realidad

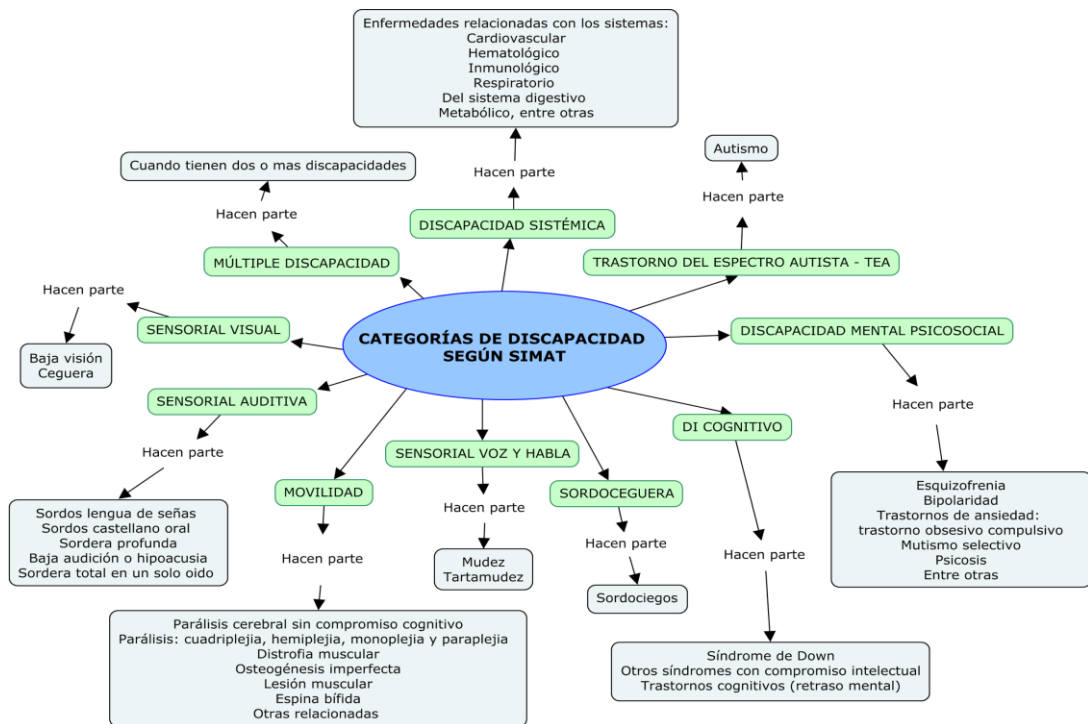
2.8. Trastorno del espectro autista - TEA: Afecta el desempeño de funciones intelectuales, psicosociales, la voz y el habla, incidiendo en las relaciones interpersonales

2.9. Discapacidad Sistémica: Cuando las condiciones de salud ocasionan limitaciones en la actividad y restricciones en la participación, debido a enfermedades relacionadas con los sistemas cardiovascular, hematológico, inmunológico, respiratorio, del sistema digestivo, metabólico, endocrino, de la piel, enfermedades terminales, entre otras

2.10. Múltiple discapacidad: Cuando tiene 2 o más discapacidades.

En la Ilustración 4, se sintetiza lo presentado anteriormente sobre las diferentes categorías de discapacidad, comprendidas en el Sistema de Integrado de Matricula SIMAT, teniendo así, una mejor claridad de las categorías y las discapacidades que hacen parte de cada una.

Ilustración 4. Categorías de Discapacidad - SIMAT



Para efectos de este trabajo, la normatividad permite determinar que se ha avanzado en el ámbito legal a nivel internacional, tanto en la educación para todos como en la inclusión de personas con alguna Necesidades Educativas Especiales, mejorando así la educación de estas a nivel nacional, dando la posibilidad que sean integradas en un ambiente escolar digno para ellas, cumpliendo con las condiciones que se requieran para un mejor aprendizaje.

2.2 Dimensión didáctica

Esta dimensión se centra en el ámbito didáctico referente a la resolución de problemas de tipo aditivo y se encuentra dividida en cinco ítems: Categorías semánticas propuestas por Puig & Cerdán (1988), problemas aritméticos planteados desde la perspectivas de Puig & Cerdán (1988), modelos y estrategias utilizadas en la resolución de problemas tomadas de Días (año), formas de representación planteadas por Maza (1999) y finalmente, el papel del juego dentro de la propuesta de Marín & Mejía (2015).

2.2.1 Categorías Semánticas

Siendo la estructura aditiva el objeto matemático alrededor del cual gira esta investigación cabe aclarar que en este trabajo se entiende por estructura aditiva lo propuesto por Vergnaud (1995) (citado por Ordoñez, 2014) como: “la capacidad que se tiene de identificar, comprender y abordar las situaciones en las que tiene aplicabilidad las

operaciones de suma y resta” (p. IX) y se toma como referencia las categorías semánticas para la clasificación de los problemas de tipo aditivo que propone Puig & Cerdán (1988) desde el punto de vista semántico en cuatro grandes categorías:

Cambio: En los problemas de cambio se distinguen tres momentos en los que se describe que existe una cantidad inicial que es sometida a una acción que la modifica para llegar a una cantidad final. En estos problemas las tres cantidades son homogéneas.

Existen seis tipos de problemas de cambio posibles, los cuales se muestran en la **Tabla 2**, donde los datos ofrecidos por el problema se representan con la letra “d” y la incógnita aparece representada por la letra “i”, además de aparecer indicado si es de adición o sustracción.

Tabla 2. Tipos de problemas de cambio

	Inicial	Cambio	Final	Adición	Sustracción
Cambio 1	d	d	i	*	
Cambio 2	d	d	i		*
Cambio 3	d	i	d	*	
Cambio 4	d	i	d		*
Cambio 5	i	d	d	*	
Cambio 6	i	d	d		*

Nota: Tomado de Puig & Cerdán (1988).

Como ejemplos de problemas de cambio que proponen Puig & Cerdán (1988) se tienen:

- **Cambio 1:** Juan tenía a. Le dan b. ¿Cuántos le quedan ahora?
- **Cambio 2:** Juan tiene a. Da b. ¿Cuántos le quedan?
- **Cambio 3:** Juan tenía a. Pedro le dio algunos. Ahora tiene c. ¿Cuántos le dio Pedro?
- **Cambio 4:** Juan tenía a. Dio algunos a Pedro. Ahora tiene c. ¿Cuántos dio a Pedro?
- **Cambio 5:** Juan tenía algunos. Pedro le dio b. Ahora tiene c. ¿Cuántos tenía?
- **Cambio 6:** Juan tenía algunos. Dio b a Pedro. Ahora tiene c. ¿Cuántos tenía?

Combinar: En esta categoría se describe la relación entre conjuntos que responde al esquema parte-parte-todo. En estos problemas la relación entre las proposiciones está dada por sustantivos, adjetivos, localizaciones, etc. En la **Tabla 3**, se muestran los dos tipos posibles de problemas de combinar.

Tabla 3. Tipos de problemas de combinar

	Parte	Parte	Todo
Combinar 1	d	d	i
Combinar 2	d	i	d

Nota: Tomado de Puig & Cerdán (1988).

Los siguientes problemas sirven como modelo donde se relacionan las partes heterogéneas que pertenecen a un grupo universal:

- Combinar 1: Hay a hombres. Hay b mujeres. ¿Cuántas personas hay?
- Combinar 2: Hay a hombres. Hay b personas. ¿Cuántas mujeres hay?

Los problemas de cambio y combinación, pueden llegar a ser confundidos por los estudiantes en cuanto a la forma en que se presentan las cantidades a operar. Se va a enfatizar la diferencia entre ambas categorías semánticas con el mismo ejemplo algorítmico $5+3=8$. Para el cambio se tiene el siguiente problema: Juan tiene 5 canicas y su mamá le regala 3. ¿Cuántas canicas tiene Juan en total? y para combinación se tiene el siguiente: Juan tiene 5 canicas, Pedro tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tienen Juan y Pedro en total?

En el problema de cambio, la cantidad inicial (5 canicas) sufre un cambio o una transformación (+3) que altera la cantidad final de canicas que tiene Juan (8 canicas). Mientras que en el problema de combinación, existen dos partes, la de Juan (5 canicas) y la de Pedro (3 canicas), entre los dos tienen unas todas (8 canicas), pero eso no altera la cantidad de canicas que tiene cada uno en comparación con el problema de cambio, donde sí se alteran.

Comparar: En esta categoría se dan simultáneamente dos cantidades independientes que se relacionan mediante la comparación. En estos problemas, la cantidad comparada

aparece a la izquierda de la expresión “más que” o “menos que”, y la cantidad de referencia a su derecha. Existen seis tipos de problemas de comparación posibles, los cuales se muestran en la **Tabla 4**.

Tabla 4. Tipos de problemas de comparar

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos
Comparar 1	d	d	i	*	
Comparar 2	d	d	i		*
Comparar 3	d	i	d	*	
Comparar 4	d	i	d		*
Comparar 5	i	d	d	*	
Comparar 6	i	d	d		*

Nota: Tomado de Puig & Cerdán (1988).

Igualación: Estos problemas se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, establecida por medio del comparativo de igualdad “tantos como”. Para esta categoría, existen seis combinaciones que se muestran en la **Tabla 5**.

Tabla 5. Tipos de problemas de igualar

	Referencia	Comparada	Diferencia	Más	Menos
Igualar 1	d	d	i	*	
Igualar 2	d	d	i		*
Igualar 3	d	i	d	*	
Igualar 4	d	i	d		*
Igualar 5	i	d	d	*	
Igualar 6	i	d	d		*

Nota: Tomado de Puig & Cerdán (1988).

Los problemas de comparación e igualación, pueden llegar a ser asimilados por los estudiantes de la misma manera porque ambos tienen la misma estructura. Sin embargo, estos problemas difieren en la manera en que se formula la pregunta. De esta manera, se enfatiza la diferencia entre ambas categorías semánticas con el ejemplo algorítmico $5-3=2$. Así, para la comparación se tiene como ejemplo: María tiene 5 canicas y Pedro tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tiene María más que Pedro? y para igualación se tiene el mismo problema pero la pregunta cambia: ¿Cuántas canicas tiene que perder María para tener tantos como Pedro?

Ambas categorías tienen una cantidad de referencia, una cantidad comparada y la diferencia entre ambas. Las categorías de comparación e igualación difieren en las palabras que aparecen en el contexto, para comparar se utilizan las palabras “más que” o “menos que”, y para igualar se utiliza “tanto(s) como”.

Cabe resaltar que en el presente trabajo se van a abordar sólo las categorías de cambio y combinación, el cambio por ser una de las categorías con mayor dificultad en los estudiantes y la combinación por ser la más común dentro de la resolución de problemas.

De igual forma que Puig & Cerdán, es preciso aludir a Vergnaud (1991) al mencionar que: “por problemas de tipo aditivo entendemos aquellos cuya solución exige adiciones o sustracciones; de la misma manera que por estructuras aditivas entendemos las estructuras o relaciones en juego que sólo están formadas de adiciones o sustracciones” (p.161).

Cabe aclarar, que Vergnaud en sus planteamientos sobre los problemas de tipo aditivo, hace una distinción entre los números naturales y los números relativos, puesto que para él, los números naturales son números sin signos que representan medidas incluyendo el número cero “0” que corresponde a la medida del conjunto vacío y, los números relativos, son números que van acompañados del signo más “+” o el signo menos “-” y representan transformaciones aditivas, es decir, adiciones o sustracciones, que se llevan a cabo sobre la medida de un conjunto. Así, el conjunto de los números relativos para Vergnaud se representa con la letra Z. En síntesis, las medidas de los conjuntos se representan con números naturales y los números relativos representan las transformaciones sobre dichas medidas.

Asimismo, Vergnaud (1991) propone una clasificación en seis categorías semánticas de los problemas de tipo aditivo que define como sigue a continuación:

Primera categoría: Composición de medidas. Son problemas en los cuales, dos medidas se componen para dar lugar a una tercera medida.

Segunda categoría: Transformación de medidas. En los problemas de este tipo, una transformación opera sobre una medida en su estado inicial, para dar lugar a dicha medida en un estado final, es decir, luego de su transformación.

Tercera categoría: Comparación de medidas. Una relación une dos medidas.

Cuarta categoría: Composición de transformaciones. Dos transformaciones se componen para dar lugar a una transformación.

Quinta categoría: Transformación sobre estados relativos. Una transformación opera sobre un estado relativo (una relación) para dar lugar a un estado relativo.

Sexta categoría: Composición de estados relativos. Dos estados relativos (relaciones) se componen para dar lugar a un estado relativo.

Es menester aclarar que Vergnaud hace referencia a categorías semejantes a las que propone Puig & Cerdán, pero finalmente se decidió abordar la propuesta de los últimos porque las categorías que propone Vergnaud están pensadas desde preescolar hasta los primeros años de secundaria, por esta razón habla de cantidades relativas, mientras que Puig & Cerdán centran su propuesta en los primeros años de escolaridad.

Además, para evitar abordar un marco referencial restringido, no se podría trabajar con Vergnaud porque solo se tomarían las dos primeras categorías por el tipo de población a la cual va dirigido este trabajo y las categorías planteadas por Puig & Cerdán son más aterrizadas a la básica primaria y a los objetivos de esta investigación.

2.2.2 Problemas Aritméticos

En la escuela, los problemas aritméticos se proponen, se enuncian y se resuelven. Así, situados en un ambiente escolar, se trabaja en este apartado la noción y proceso de solución de un problema aritmético.

Noción de problema aritmético

Para poder saber qué entender por problema aritmético, es necesario tener presente que en la escuela, los problemas aritméticos se enuncian y se resuelven. Desde esta perspectiva, se requiere describir las características tanto del enunciado, como de la resolución de un problema. Con esto, se puede establecer que la información que se

suministra a través del enunciado es de carácter cuantitativo, puesto que los datos son cantidades y la relación que existe entre ellas es a través de una condición del problema presenta la determinación de una o varias de las cantidades o relaciones entre ellas. En cuanto a la resolución del problema, se refiere a lo que se debe realizar con el objetivo de responder a la pregunta del problema, que consiste básicamente de la realización o ejecución de una o más operaciones aritméticas (Puig & Cerdán, 1988).

De acuerdo con lo anterior, se puede establecer que la información que se suministra a través del enunciado es de carácter cuantitativo, puesto que los datos con frecuencia son cantidades y la relación que se presenta entre éstas a través de la condición del problema es de tipo cuantitativo, además, la pregunta que se presenta, alude a la determinación de una o varias de las cantidades o relaciones entre las cantidades. En cuanto a la resolución del problema, se refiere a lo que se debe realizar con el objetivo de responder a la pregunta del problema, que consiste básicamente de la realización o ejecución de una o más operaciones aritméticas (Puig & Cerdán, 1988).

Un ejemplo de lo que se considera un problema aritmético, teniendo en cuenta las características mencionadas anteriormente es el siguiente: A la clase de Matemáticas asistieron en principio 25 estudiantes, luego llegaron 13 estudiantes más. ¿Cuántos estudiantes en total asistieron a la clase de Matemáticas?

Es importante mencionar, que los problemas aritméticos generalmente resultan problemas de aplicación, lo que implica que surjan enunciados de problemas en diversos contextos. Considerando lo anterior, a veces puede tornarse un poco difícil decidir si efectivamente un problema puede considerarse o no un problema aritmético, cuando se encuentra inmerso por ejemplo en un contexto físico, biológico o geométrico. Sin embargo, Puig & Cerdán (1988) consideran que “un problema será un problema aritmético siempre que los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos de los contextos que aparecen en el enunciado no sean decisivos a la hora de resolver el problema” (p.6). Así, no se considerado el siguiente como un ejemplo de problema aritmético:

Un hombre debe llevar un mensaje a través del desierto. Cruzar el desierto lleva nueve días. Un hombre puede llevar únicamente alimento para 12 días. No hay alimento en el

lugar donde debe dejarse el mensaje. Se dispone de dos hombres. ¿Puede llevarse el mensaje y volver sin que falte alimento? (Puig & Cerdán, 1988, p.6)

Estos tipos de problemas no se toman en cuenta porque Puig & Cerdán se interesan por la resolución de problemas que hacen los estudiantes de la escuela, donde se considera el contexto escolar y los currículos de Matemáticas en los que están inmersos.

En general, un problema aritmético se compone de dos factores: el primero, existen dos cantidades involucradas y una pregunta que las relaciona; el segundo, el proceso de resolución de problemas es la actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que el problema se asume como uno y desea resolverlo.

Proceso de resolución de un problema aritmético

En el proceso de resolución de problemas Puig & Cerdán (1988) realizan una adaptación de los modelos propuestos por Polya (resolución de problemas matemáticos) y Dewey (resolución de problemas en la vida cotidiana), que los lleva a distinguir en el proceso de resolución de un problema aritmético elemental (PAE) las siguientes fases:

- Lectura
- Comprensión
- Traducción
- Cálculo
- Solución
- Revisión y comprobación.

Las fases de lectura y comprensión de un PAE son una subdivisión de la fase de comprensión de Polya, y Puig & Cerdán han realizado esta separación para acentuar el cuidado que se debe tener en la lectura del problema en las primeras etapas de instrucción en resolución de problemas en el comienzo del currículo escolar. La fase de traducción, es la denominada por Polya como “elaboración de un plan”, la cual, es crucial en la resolución de cualquier problema, porque consiste en el paso del enunciado verbal a la expresión aritmética correspondiente. Por último, en la fase de cálculo correspondiente a la “ejecución del plan” de Polya, se predomina las destrezas algorítmicas de los estudiantes y los docentes pueden utilizarla como una instrucción que incide sobre aquellas destrezas que los estudiantes no posean y poder mejorarlas.

2.2.3 Estrategias y modelos

Además de la revisión sobre la clasificación de los problemas de tipo aditivo, es fundamental referirse a las distintas estrategias de solución de los problemas verbales con estructura aditiva; por lo cual, se toma en consideración el trabajo realizado por Carpenter & Moser (citado por Díaz, 2004), donde se logra determinar las estrategias llevadas a cabo por estudiantes en la resolución de problemas verbales de suma y resta, como son el modelado directo, el conteo y los hechos numéricos; estrategias a las que también se refieren Castro, Rico & Castro (1995).

De acuerdo a Carpenter & Moser (citados por Díaz, 2004) y a Castro, Rico & Castro (1995), se plantean las siguientes estrategias de solución de los problemas verbales con estructura aditiva.

2.2.3.1 Estrategias de suma

En la operación de suma, se encuentran las estrategias de modelado directo, las estrategias de conteo y las estrategias de hechos numéricos. Además, cada una de estas estrategias para la adición, se puede llevar a cabo a través de varias formas. Así, las estrategias de modelado directo, se pueden realizar a partir de contar todo con modelos; las estrategias de conteo (secuencias de recuento), se pueden realizar de tres formas: contar todo sin modelos, contar todo a partir del primer sumando o contar todo a partir del sumando mayor. Finalmente, las estrategias de hechos numéricos (datos numéricos recordados), se pueden realizar de dos maneras: utilizando hechos conocidos o haciendo uso de hechos derivados.

A continuación, se precisa sobre cada una de las estrategias antes mencionadas, tomando como referencia el trabajo de Díaz (2004):

Estrategias de modelado directo: este tipo de estrategia, busca representar cantidades con elementos físicos o con los dedos (contar todo con modelos).

Contar todo con modelos: esta estrategia, plantea la representación de cada uno de los sumandos (conjuntos) y posteriormente se determina la unión de ambos conjuntos a partir de uno de ellos. Esta estrategia, se lleva a cabo de dos formas; la primera se da al sumar un

conjunto al otro, o al unir los dos conjuntos que han sido representados físicamente. La segunda forma, se cumple al contar el total, sin realizar la unión físicamente de los conjuntos.

Una tercera forma de esta estrategia, surge cuando el niño construye un conjunto que representa uno de los sumandos, y a partir de este, incrementa el número de elementos que componen el conjunto de un segundo sumando, pero sin representar físicamente, es decir, que se realiza la suma directamente sobre uno de los sumandos.

Con respecto a esta estrategia de contar todo con modelos, Bermejo & Rodríguez (citados por Díaz, 2004) proponen cuatro niveles para llevarla a cabo:

En el *primer nivel*, se representa con los dedos, cada uno de los sumandos, realizando el conteo de cada uno y posteriormente, se cuenta todo conjuntamente.

El *segundo nivel*, consiste en representar los dos sumandos con los dedos, sin realizar un conteo, y finalmente se cuentan los dedos conjuntamente.

En un *tercer nivel*, se realiza el conteo total, mientras se va representando cada uno de los sumandos.

Finalmente, en el *cuarto nivel*, se menciona un primer sumando e inmediatamente se añade el otro sumando apoyándose en los dedos.

Estrategias de conteo: este tipo de estrategias, se basan en la utilización de secuencias de conteo. Castro Rico & Castro (1995), afirman que “se trata de conductas puramente verbales y se puede proceder de varias formas: contar todo (el niño cuenta todos los objetos), contar a partir del primero de los números dados, o contar a partir del mayor de los números” (p.29).

Contar todo sin modelos: consiste en contar objetos sin realizar su representación física o con los dedos, como ocurre en la estrategia anterior, la secuencia de conteo comienza con uno, y se continúa hasta encontrar la respuesta.

Para este tipo de estrategia, de contar todo sin modelos, Bermejo & Rodríguez (citados por Díaz, 2004) encuentran dos niveles:

Primer nivel: contar todo mentalmente empezando por el menor.

Segundo nivel: contar todo empezando por el mayor.

Contar a partir del primer sumando: consiste en contar hacia adelante a partir del primer sumando que aparece en el problema, hasta llegar a la respuesta (hasta haber contado el segundo sumando). Por ejemplo, un problema planteado con la proposición $2 + 5 = ?$, utilizando este tipo de estrategia, sugiere que el niño mencione el dos y cuente hacia adelante, a partir del tres hasta siete (tres, cuatro, cinco, seis, siete) haciendo uso de los dedos, para representar el segundo sumando.

Bermejo & Rodríguez (citados por Díaz, 2004), plantean varios niveles para la estrategia de contar a partir del primer sumando:

En el *primer nivel*, se realiza la representación de los dos sumandos del problema, pero solo se cuenta el mayor.

En el *segundo nivel*, se representa el sumando menor, con los dedos, contando sólo el mayor, a medida que se representa con los dedos.

En el *tercer nivel*, se representa solamente el mayor de los sumandos a medida que se cuenta.

En el *cuarto nivel*, se añade el mayor de los sumandos, de manera mental.

Estrategia contar a partir del sumando mayor: en esta estrategia, el niño inicia el conteo hacia adelante pero a partir del mayor de los dos sumandos del problema. Por ejemplo, se plantea un problema con proposición $3 + 6 = ?$. Haciendo uso de la estrategia de contar a partir del sumando mayor, el niño lo que hará será contar hacia adelante, menciona el seis, pero cuenta partiendo del siete, hasta llegar a nueve (siete, ocho, nueve), representando el sumando menor con los dedos.

Bermejo & Rodríguez (citados por Díaz, 2004), proponen tres niveles en esta estrategia:

En el *primer nivel*, se representa el sumando mayor con los dedos y se añade el sumando menor al realizar el conteo.

En el *segundo nivel*, se añade el menor de los sumandos, utilizando los dedos a medida que se cuenta.

En el *tercer nivel*, se cuenta el menor de los sumandos mentalmente.

Estrategias de hechos numéricos: se basan en recordar datos numéricos. Al respecto, Castro, Rico & Castro mencionan que en este tipo de estrategias, se “emplean combinaciones numéricas que recuerdan como son: aplicación de la idea de doble o aplicación de sumas conocidas como $6 + 4 = 10$ ” (p.29). Así, existen entonces dos tipos de estrategias de hechos numéricos:

Los hechos conocidos. Por medio de esta estrategia, los niños recuperan de la memoria el resultado de una suma. Por ejemplo, $6 + 4 = 10$, porque seis más cuatro son diez.

Los hechos derivados. Son usados por los niños partiendo de hechos conocidos haciendo uso de números dobles o números cuya suma es 10. Así, por ejemplo, si se propone un problema con proposición $6 + 9 = ?$, la posible respuesta será $6 + 6 = 12$ y $7 + 9 =$ es 3 más que 12.

2.2.3.2 Estrategias de resta

En la operación de resta, se encuentran las estrategias de modelado directo, las estrategias de conteo y las estrategias de hechos numéricos al igual que en la suma, pero en este caso, para la sustracción, se encuentran categorías distintas dentro del modelado directo: separar de, separar a, añadir a, y emparejamiento. Además, en las estrategias de conteo para la sustracción, se encuentran tres tipos de estrategias: contar hacia atrás a partir de, contar hacia atrás y contar a partir de lo dado.

Estrategias de modelado directo: en este tipo de estrategias, según Castro, Rico & Castro (1995) “se construye una colección de objetos que represente al minuendo y de esta se van quitando objetos” (p.29). Así, el modelado directo se puede realizar de varias formas de acuerdo con Carpenter & Moser (citados por Díaz, 2004):

Separar de: en esta estrategia, se representa la cantidad mayor a través de material concreto o haciendo uso de los dedos, de tal manera que permita al estudiante restar, o separar de la cantidad representada, la cantidad menor. Por ejemplo, si se propone resolver un problema con proposición $9 - 5 = ?$, el niño realiza la construcción del conjunto mayor (representa la cantidad mayor “9” con objetos físicos) y posteriormente separa de esta

cantidad mayor, un número de objetos que representan la menor cantidad (separa 5 elementos). Al contar los elementos restantes, el niño obtiene la respuesta al problema propuesto (cuatro elementos).

Separar a: en esta estrategia, se representa la cantidad mayor, utilizando objetos físicos o material de ayuda. Una vez realizada la representación del conjunto, el niño separa tantos elementos, hasta que queden en el conjunto mayor, el número de elementos que representan la cantidad menor. Por ejemplo, se quiere resolver un problema con proposición $6 - 4 = ?$. El niño realiza la construcción del conjunto mayor (6), y separa (4) elementos que representan la cantidad menor. La solución, será el número de elementos restantes, es decir 2 elementos.

Añadir a: En esta estrategia, se realiza la construcción de los conjuntos que representan las cantidades mayor y menor. Luego, se añaden al conjunto menor, tantos elementos como sean necesarios para que este sea equivalente con el mayor. La respuesta será el número de elementos añadidos al conjunto menor. En el ejemplo $6 - 4 = ?$, el niño construye los dos conjuntos (con material de ayuda), el que representa la cantidad mayor y el de menor cantidad. Una vez representados los dos conjuntos, empieza a añadir elementos al conjunto de 4 elementos, hasta que este conjunto sea equivalente al mayor, es decir, el niño agrega dos elementos al conjunto de cuatro, para que sea equivalente con el conjunto de seis elementos. La respuesta será dos, ya que fue la cantidad de elementos añadidos.

Emparejamiento: para esta estrategia, se requiere de material concreto, ya que el niño representa dos conjuntos que representan cada uno, los números dados en un problema. Posteriormente, se realiza un emparejamiento estableciendo una correspondencia uno-a-uno, donde finalmente la respuesta, estará dada por el número de objetos que no fue posible emparejar o hacer corresponder con elementos del otro conjunto. Por ejemplo, para resolver un problema de proposición $7 - 5 = ?$, se construyen dos conjuntos, uno de 7 y otro de 3 elementos. Luego, se realiza un emparejamiento entre los elementos de los dos conjuntos y la respuesta será 2, puesto que 2 elementos del conjunto de 7, no se logran emparejar o hacer corresponder con algún elemento del conjunto de 5 elementos.

Estrategias de conteo: este tipo de estrategias, se pueden presentar de varias maneras, siguiendo a Carpenter & Moser (citados por Díaz, 2004):

Contar hacia atrás a partir de: en esta estrategia, el niño realiza un conteo, partiendo de la cantidad mayor hacia atrás, tantos pasos como indique la cantidad menor y el último número que menciona, será la respuesta. Por ejemplo, en el caso de $9 - 4 = ?$, el niño pronuncia nueve e inicia el conteo hacia atrás (4 pasos como indica la cantidad menor), cuenta ocho, siete, seis, cinco. Este último (cinco) es la respuesta.

Contar hacia atrás: se parte del número mayor y se cuenta hacia atrás, hasta alcanzar el número menor. La respuesta es determinada por el número de elementos contados. Por ejemplo, para $9 - 6 = ?$, se cuenta hacia atrás, partiendo de nueve, hasta mencionar (sin contar) el número menor (seis), es decir nueve, ocho, siete; la respuesta es tres, puesto que se cuentan tres números (nueve, ocho y siete).

Contar a partir de lo dado: en esta estrategia, se cuenta a partir del menor de los números hasta alcanzar el mayor y la respuesta será la cantidad de numerales mencionados para igualar el número mayor. Por ejemplo, en $7 - 3 = ?$, se pronuncia el número menor (tres) y se cuenta hacia adelante hasta igualar a siete, así: cuatro, cinco, seis, siete. La respuesta es cuatro, ya que se usaron 4 numerales (cuatro, cinco, seis, siete) para igualar el número menor con el mayor.

Estrategias de hechos numéricos: al igual que en la suma, estas estrategias se basan en datos conocidos o derivados de ciertas reglas; lo que pone de manifiesto que se recurre a la memoria para llevar a cabo este tipo de estrategias.

Estas estrategias no se enseñan ni se aprenden en la escuela, el niño las elabora para resolver los problemas que encuentra en su medio y a veces las mantiene por encima de su aprendizaje escolar. Es conveniente que el profesor las conozca y sepa ampliar en cada ocasión y para cada niño su campo de utilidad. (Castro, Rico & Castro, 1995, p.30)

Además, este tipo de estrategias comprenden dos clases: hechos conocidos y hechos derivados según Carpenter & Moser (citados en Díaz, 2004):

Hechos conocidos: esta estrategia ocurre cuando la respuesta se obtiene a partir de un dato conocido como en $12 - 6 = 6$ (porque doce menos seis es igual a seis), donde la respuesta se consigue recurriendo a la memoria.

Hechos derivados: en este tipo de estrategia, la respuesta se obtiene a partir de hechos numéricos conocidos al igual que en la suma. Sin embargo, en la sustracción se presentan dificultades, puesto que los estudiantes tienen un conocimiento pobre sobre las diferentes combinaciones de resta.

2.2.4 Formas de representación

Según Maza (1999) existen diferentes formas de representar un problema, y estas se vuelven de suma importancia en la solución del mismo, aún más dentro de los primeros años de escolaridad.

Se pueden distinguir dos grandes grupos de representaciones: las de carácter icónico y las de carácter simbólico. En el primer grupo se distinguen los materiales manipulativos y las representaciones gráficas, mientras que en el segundo grupo, se encuentran las representaciones verbales y las numéricas.

Las representaciones icónicas se dividen en dos grupos:

- ★ *Representaciones manipulativas:* Este tipo de representación comienza desde preescolar y lo esencial de estas es que reflejan la transparencia de los distintos elementos que comprende el problema. En este caso, cualquier material por más elemental que sea, puede representar de forma real y por extensión las cantidades que debe sumar o restar. Por ejemplo: fichas de colores, lentejas, dulces, entre otros.
- ★ *Representaciones gráficas:* este tipo de representación se apoya en diagramas de Venn, cuadrados “unifix”, las “placas” de puntos, entre otras; de tal forma que se logre representar el conjunto de elementos que contiene el problema para poder llegar a una solución.

Las representaciones simbólicas se dividen en dos tipos:

- ➔ *Representaciones verbales:* Son las que expresan con palabras del acervo cultural los elementos del lenguaje utilizado. Entre las representaciones verbales, se distinguen el lenguaje formal y el lenguaje informal, donde las acciones ejercidas sobre el mismo

problema hacen la diferencia entre lo que puede dar el niño (informal) y las matemáticas (formal). Por ejemplo: en el lenguaje informal: “hay cinco gallinas y ocho gusanos. Si cada gallina se come un gusano, ¿cuántos gusanos quedan sin ser comidos?” y el lenguaje formal: “hay cinco gallinas y ocho gusanos. ¿Cuántos gusanos más que gallinas hay?”.

→ *Representaciones numéricas*: Se dan durante el periodo preescolar y el primer año de escolaridad. Son las representaciones de problemas en forma algebraica, realizando un esquema que ubica las cantidades dadas, la operación a realizar y se deja el espacio para las incógnitas. Por ejemplo, para el problema “Tienes cuatro lápices de colores y te dan varios más. Al final tienes siete en total. ¿Cuántos lápices te dieron?”, el esquema algebraico sería el siguiente: $4 + \square = 7$.

2.2.5 El juego como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas

El juego, es considerado un elemento fundamental en las estrategias utilizadas para favorecer el aprendizaje. Al respecto, Marín & Mejía (2015) se refieren al juego como:

Un conjunto de actividades agradables, cortas, divertidas, con reglas que permiten el fortalecimiento de los valores: respeto, tolerancia grupal e intergrupal, responsabilidad, solidaridad, confianza en sí mismo, seguridad, amor al prójimo, fomenta el compañerismo para compartir ideas, conocimientos, inquietudes, todos ellos – los valores- facilitan el esfuerzo para internalizar los conocimientos de manera significativa. (p.29)

De esta manera, el juego permite al estudiante aprender de manera más agradable y al docente, le permite realizar su actividad más amena, eficiente y eficaz. Así, el juego se convierte en una estrategia primordial para facilitar el aprendizaje del estudiante.

Importancia del juego en el aprendizaje

El juego, al ser considerado un elemento importante dentro del aula de clase, permite una forma diferente de construir el conocimiento, al tiempo que resulta una actividad recreativa. De esta manera, el juego permite enfocar el interés que despierta en el estudiante hacia las áreas o temáticas que se desarrollen en el aula de clase, donde el docente debe poseer la habilidad para saber aprovechar la atención del estudiante por el juego e inventar nuevos juegos teniendo en cuenta las necesidades, expectativas, intereses, edad y ritmo de

aprendizaje del estudiante, además de considerar que un juego complicado, llama poco la atención del educando.

Así, el juego como estrategia busca estimular y promover el aprendizaje del estudiante a través de actividades generadas a partir del diseño, la planificación y la ejecución. Además, para realizar el diseño de una estrategia es necesario conocer, los siguientes aspectos:

- ¿Qué se quiere fomentar en el estudiante, es decir, qué competencias desarrollar?
- ¿Cómo se va a desarrollar el proceso?
- ¿Con qué recursos se cuenta?
- ¿Por qué ese aprendizaje? ¿Para qué le sirve?. (Marín & Mejía, 2015, p.31)

De acuerdo con lo anterior, el juego resulta de gran importancia si se incluye como herramienta didáctica en las diversas actividades que se desarrollan con los estudiantes a través de los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que se desarrolla la creatividad, se propicia la participación, el respeto por los demás, atender y cumplir reglas, actuar con seguridad e interiorizar los conocimientos de manera significativa (Marín & Mejía, 2015).

Ventajas de los juegos.

Dentro de las ventajas que presenta la utilización del juego como estrategia para favorecer el aprendizaje dentro del aula de clase, Caneo (citado por Marín & Mejía, 2015) menciona las siguientes:

- Permite romper con la rutina, dejando de lado la enseñanza tradicional, la cual es monótona.
- Desarrolla capacidades en los niños y niñas: ya que mediante el juego se puede aumentar la disposición al aprendizaje.
- Permite la socialización; uno de los procesos que los niños y niñas deben trabajar desde el inicio de su educación.
- En lo intelectual-cognitivo fomenta la observación, la atención, las capacidades lógicas, la fantasía, la imaginación, la iniciativa, la investigación científica, los conocimientos, las habilidades, los hábitos, el potencial creador entre otros.(p.32)

Las ventajas mencionadas sugieren que el juego se convierte en un elemento primordial en el proceso educativo, puesto que la utilización del juego como estrategia permite enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Ventajas de los materiales manipulativos.

Según Galdames y Cols (citados por Marín & Mejía, 2015), los materiales manipulativos favorecen el aprendizaje de los alumnos en aspectos tales como:

- Aprender a relacionarse adecuadamente con los demás.
- Desarrollar procesos de pensamiento.
- Ejercitar ciertos procesos científicos (observar, interpretar modelos, experimentar).
- Aprender a ocupar el tiempo libre.(p.33)

Para Caneo (citado por Marín & Mejía, 2015) a través de la manipulación de materiales didácticos existen niveles de aprendizaje como:

- Nivel activo o de manipulación de los objetos: A través de materiales concretos los niños pueden manipular, tocar y relacionarse con objetos.
- Nivel icónico o representacional: En donde el niño y la niña piensa en los objetos, los dibuja, pero no los manipula.
- Nivel simbólico o formal: El niño y la niña maneja ideas, conceptos y no imágenes.(p.34)

El juego y la enseñanza de las matemáticas.

Contar con estrategias que sean innovadoras y despierten el interés tanto para el aprendizaje como para la enseñanza de las matemáticas, es de gran importancia a la hora de construir conocimiento matemático a través de diversas situaciones en las cuales, al igual que el estudiante, el docente tenga total disposición dentro del aula de clase. Es así, como en el proceso de adquisición de conceptos, de construcción del conocimiento, resulta necesario innovar en la enseñanza, y es ahí, donde el juego puede ser útil al momento de acercar al estudiante al mundo de las matemáticas dentro del aula de clase o afianzar conceptos a través de la creatividad y la actividad de resolver problemas.

Función del juego matemático.

El juego, como se ha mencionado con anterioridad, resulta ser una estrategia de gran relevancia en el proceso educativo, sin embargo, para que el juego sea efectivo debe cumplir con algunos principios de tal forma que se garantice un proceso o actividad educativa y que según Caneo (citado por Marín & Mejía, 2015) se puede destacar que:

- El juego debe facilitar reacciones útiles para los niños y niñas, siendo de esta forma sencilla y fácil de comprender.

- Debe provocar el interés de los niños y niñas, por lo que deben ser adecuadas al nivel evolutivo en el que se encuentran.
- Debe ser un agente socializador, en donde se pueda expresar libremente una opinión o idea, sin que el niño(a) tenga miedo a estar equivocado(a).
- Debe adaptarse a las diferencias individuales y al interés y capacidad en conjunto, tomando en cuenta los niveles de cognición que se presentan.
- Debe adaptarse al crecimiento en los niños, por lo tanto se deben desarrollar juegos de acuerdo a las edades que ellos presentan.(p.33)

Referente a todo lo mencionado en la dimensión didáctica, se tiene que para este trabajo es de suma importancia, ya que, aparte de ser la línea de investigación aporta en su mayoría los referentes que se van a tener en cuenta para el diseño, aplicación y análisis de la propuesta de aula, tales como: las estrategias y modelos para la resolución de problemas, las representaciones utilizadas por el estudiantes, las categorías semánticas (cambio y combinación) y el juego como parte de una estrategia para introducir los problemas aditivos de cambio y combinación en la primera situación.

2.3 Dimensión Curricular

En este apartado, se realiza un acercamiento a los documentos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) en relación al marco legal curricular, particularmente, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), con el fin de identificar aspectos que se proponen para el estudio y enseñanza de la estructura aditiva (operaciones de suma y resta) como objeto matemático y eje central de esta investigación.

De acuerdo con el documento de Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), el aprendizaje de las matemáticas debe permitir a los estudiantes aplicar los conocimientos adquiridos en un ambiente extraescolar, es decir, en un contexto donde el estudiante se ve enfrentado a diferentes situaciones en las cuales debe tener la capacidad para decidir, enfrentar y lograr adaptarse a situaciones nuevas. De esta manera, se plantea la necesidad de relacionar los contenidos de aprendizaje con la cotidianidad de los estudiantes, además de presentarlos y enseñarlos a través de situaciones problemáticas. Es así, como se proponen tres aspectos que permitirían organizar el currículo de matemáticas: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

Con respecto a los procesos generales y atendiendo a los fines de la presente investigación, se ha privilegiado el proceso de resolución y planteamiento de problemas, para el cual, el MEN (1998) toma en consideración las propuestas de enseñanza de este proceso desarrolladas por Polya y Schoenfeld. Además, la resolución de problemas se destaca como un elemento importante en el desarrollo de las Matemáticas, puesto que a medida que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las Matemáticas y al mismo tiempo desarrollan su capacidad de comunicarse matemáticamente mientras van aumentando su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de niveles cada vez más complejos.

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas hablan de la manera para desarrollar pensamiento numérico en los estudiantes, tales como la descomposición y la recomposición de cantidades, y la comprensión de propiedades numéricas al utilizar algoritmos dando importancia a la reflexión de las respuestas. De igual forma, la utilización de operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de las relaciones entre el contexto y el cálculo son necesarios para desarrollar pensamiento numérico.

En relación con la estructura aditiva, el MEN (1998) propone en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas algunas consideraciones para abordar la adición y sustracción en la educación básica primaria. Estas dos operaciones que componen la estructura aditiva, hacen parte del pensamiento numérico del que McIntosh (citado por MEN, 1998) afirma que:

El pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones. (p.26)

Al igual que la competencia matemática, el pensamiento numérico se adquiere gradualmente a medida que el estudiante tiene la oportunidad de pensar y usar los números en diferentes situaciones y contextos significativos.

Dentro del pensamiento numérico y los sistemas numéricos definido en los Lineamientos Curriculares del MEN (1998), se hace alusión a la comprensión del concepto

de las operaciones de adición y sustracción entre números naturales; para lo cual, se sugieren algunos aspectos básicos que se pueden tener en cuenta para construir el significado de las operaciones y que ofrecen algunas pautas para orientar el aprendizaje de cada operación:

- Reconocer el significado de la operación en situaciones concretas, de las cuales emergen;
- Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones;
- Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones;
- Comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.

Es importante tener presente lo anterior, en el sentido que son las matemáticas las que ayudan al estudiante a entender y dar sentido a lo que sucede en el mundo que lo rodea. Dentro del aprendizaje de las matemáticas, el estudiante aparte de desarrollar su capacidad de pensamiento y reflexión lógica, emplea razonamiento para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla para actuar en y para ella.

Además, el aprendizaje de las matemáticas brinda al estudiante la posibilidad de aplicar sus conocimientos dentro y fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, para poder exponer sus opiniones y ser abierto a lo que piensen los demás. De esta manera, es indispensable establecer una relación entre los contenidos desarrollados dentro del aula de clase en el proceso de aprendizaje con la experiencia de los estudiantes en su cotidianidad; asimismo, presentar los contenidos y enseñarlos de tal manera que se encuentren inmersos en situaciones problemáticas donde se promuevan espacios para el intercambio de opiniones y puntos de vista.

En lo que respecta al desarrollo del pensamiento numérico, algunos indicadores de esta acción son la consideración del efecto de las operaciones aritméticas y la utilización de estas en la formulación y resolución de problemas. Además, el contexto por medio del cual se realiza un acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, resulta un aspecto importante en el desarrollo del pensamiento numérico, puesto que según el MEN (1998)

El pensamiento numérico es a veces determinado por el contexto en el cual las matemáticas evolucionan, por ejemplo, mientras un estudiante en la escuela no se incomoda porque 514 sea la suma de $26 + 38$, el mismo estudiante en una tienda

puede exigir que se le revise la cuenta si tiene que pagar \$5140 por dos artículos cuyos precios son \$260 y \$380. (p.26)

Es pertinente mencionar que dependiendo de la forma como se trabaje con los números en el aula de clase, se puede aportar o no a la consecución del pensamiento numérico. Más aun, cuando regularmente el éxito en las matemáticas se mide considerando la habilidad o no de los estudiantes en la realización de cálculos con algoritmos en lápiz y papel, por lo que no es preciso afirmar si el estudiante puede estar o no desarrollando el pensamiento numérico (MEN, 1998).

Por otra parte, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, se proponen diversos tipos de problemas para la enseñanza de la estructura aditiva que resultan equivalentes con algunas de las categorías semánticas propuestas por Puig & Cerdán para clasificar los problemas de tipo aditivo. A continuación, se realiza un contraste entre lo propuesto por el MEN (1998) y las categorías semánticas de Puig & Cerdán (1988), relacionando el tipo de problema con la categoría semántica de acuerdo con los autores antes mencionados, con el fin de exponer la relación que hay entre el marco contextual tomado como referencia y la normatividad colombiana.

Para la adición, se presentan cinco problemas de acuerdo con el significado que se puede dar a la proposición $3+2$, como se muestra en la **Tabla 6**.

Tabla 6. Problemas con estructura aditiva de suma propuestos por el MEN (1998)

Problema propuesto por MEN (1998)	Categoría semántica según Puig & Cerdán
a) Unión. Parte - parte – todo. Juan tiene 3 carritos grandes y 2 carritos pequeños. ¿Cuántos carritos tiene en total?	Combinación.
b) Añadir o adjunción. Juan tiene 3 carritos. Compra 2 más. ¿Cuántos carritos tiene ahora?	Cambio.
c) Comparación. Juan tiene 3 carritos. María tiene 2 carritos más que Juan. ¿Cuántos carritos tiene María?	Comparación
d) Sustracción complementaria. Juan le da 2 carritos a María. Ahora le quedan 3. ¿Cuántos tenía al empezar?	Cambio
e) Sustracción vectorial. Esta mañana Juan perdió 2 carritos. Al medio día tenía 3 carritos más que al desayuno. ¿Cuántos carritos se encontró?	No se logra establecer categoría

Nota: Tomado de MEN (1998).

Para la sustracción, se presentan algunos problemas de acuerdo con el significado que se puede dar a la expresión 5-3, como se muestra en la **Tabla 7**.

Tabla 7. Problemas con estructura aditiva de resta propuestos por el MEN (1998)

Problema propuesto por MEN (1998)	Categoría semántica según Puig & Cerdán
a) Separación o quitar. Juan tiene 5 carritos. Pierde 3. ¿Cuántos le quedan?	Cambio.
b) Comparación – Diferencia. María tiene 5 carritos y Juan tiene 3. ¿Cuántos carritos más tiene María que Juan? ¿Cuántos carritos menos tiene Juan que María? ¿Qué diferencia hay entre el número de carritos que tiene María y el número de los que tiene Juan?	Comparación
c) Parte- parte- todo. Unión. Juan tiene 5 carritos, 3 son grandes. ¿Cuántos son pequeños?	Combinación
d) Adjunción. Añadir. Juan quiere 5 carritos. Ya tiene 3. ¿Cuántos más necesita?	Cambio
e) Añadir. Juan tenía algunos carritos. Ha comprado 3 más. Ahora tiene 5. ¿Cuántos tenía al empezar?	Cambio
f) Sustracción vectorial. Juan perdió hoy 5 carritos. Por la mañana perdió 3. ¿Cuántos perdió por la tarde?	No se logra establecer categoría

Nota: Tomado de MEN (1998).

De esta manera, se reconoce a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas que existen variadas situaciones que implican las operaciones de adición y sustracción; y no solamente problemas de “reunir o poner juntos” o problemas de “quitar”. También, existe relación entre lo que se establece en el marco referencial y lo propuesto en el ámbito curricular. Algunos ejemplos son:

- Los lineamientos curriculares, se refieren a problemas con el esquema parte-parte-todo que en Puig y Cerdán se denominan como problemas aritméticos de combinación.
- Puig y Cerdán hablan de cambio con seis subtipos de problemas, donde consideran tres de sustracción y tres de adición tomando en cuenta la posición que adopte la incógnita dentro del problema; mientras que en los lineamientos curriculares los separan y enuncian problemas de añadir o adjunción, problemas de sustracción complementaria y problemas de separación o quitar. Esto no quiere decir que se esté hablando de posturas opuestas.
- En la categoría de comparación, tanto Puig y Cerdán como el MEN a través de los lineamientos curriculares se refieren a dicha categoría de igual manera.
- Existe la categoría de sustracción vectorial que en los lineamientos curriculares se menciona, sin embargo, no se logra establecer una relación de ésta con alguna de las categorías propuestas por Puig y Cerdán.

En relación a la estructura aditiva, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas que propone el MEN (2006) realizan una gradualidad del aprendizaje de las matemáticas con una coherencia vertical (mismo pensamiento en conjuntos de grados) y horizontal (mismo grado en diferentes pensamientos). En este trabajo, se toma como eje central el pensamiento numérico y sistemas numéricos para los grados primero a tercero, donde se logra identificar lo propuesto en dicho documento en la tabla 8 así:

Tabla 8. Coherencia vertical y horizontal

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMERICOS	PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS
• Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. • Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.	• Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas. • Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar.

● Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.	
--	--

Nota: Tomado de MEN (2006).

Por último, los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias Matemáticas se refieren al objeto matemático y los conocimientos básicos que deben tener los estudiantes “promedio”, pero quedan en deuda con los estudiantes que presentan algún tipo de discapacidad, por ejemplo, los estudiantes ciegos, sordos, con problemas de aprendizaje, entre otros. Sin embargo, el MEN en el marco de la revolución educativa, propone ocho documentos con las orientaciones pedagógicas para la atención de los niños, niñas y jóvenes colombianos que presentan necesidades educativas especiales, pero son solo orientaciones pedagógicas que no se equiparan con lineamientos curriculares o estándares básicos de competencias.

CAPÍTULO 3: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se hace alusión a la metodología del trabajo y la parte metodológica de la propuesta de aula, explicando sus distintas etapas y resultados finales. En este orden de ideas, luego de la descripción del tipo de estudio seleccionado, se pormenoriza la población que es objeto de estudio. Además, se presenta la articulación que tiene este capítulo con lo que ya se ha realizado en los capítulos 1 y 2, de acuerdo con el marco teórico y metodológico. Igualmente, se explicita el contenido de la propuesta de aula con las respectivas conexiones que tiene con las categorías semánticas, los modelos o estrategias y las representaciones que puede utilizar el estudiante al resolver problemas aritméticos. Seguidamente, se exponen los detalles relacionados con la implementación, para posteriormente, mostrar los resultados de la implementación como producto de las actuaciones del estudiante. Finalmente, se presenta el análisis de estos resultados, de acuerdo con unas variables y criterios de análisis en concordancia con lo planteado en el marco teórico.

3.1 Metodología

Tipo de estudio

El tipo de estudio abordado en este trabajo es cualitativo - participativo, en la medida que prima la información objetiva de situaciones que acontecen en un ambiente escolar, siendo una perspectiva interpretativa que busca comprender el significado de acciones, describiendo y explicando las características de una población específica.

Este trabajo busca poder interpretar resultados obtenidos mediante la implementación de una propuesta de aula, de tal manera que permitan evidenciar el aprendizaje matemático respecto a la estructura aditiva, por parte de un niño con discapacidad cognitiva

Un aspecto relevante en el estudio cualitativo - participativo, es partir de la interacción estudiante-investigador, teniendo así una interacción directa sin ser necesarias observaciones programadas adicionales para hacer seguimiento a la conducta del estudiante.

En este sentido, el presente trabajo se fundamenta en un estudio de caso descriptivo que implica llevar a cabo un proceso de indagación; que consiste en la observación del estudiante cuando se enfrenta a una propuesta de aula relacionada con problemas aritméticos

de enunciado verbal con estructura aditiva, para luego, explicar a la luz de la teoría descrita en el marco teórico, los resultados obtenidos con la aplicación de la propuesta de aula.

Para especificar un poco, Barrio et al (s.f) mencionan que “llamamos casos a aquellas situaciones o entidades sociales únicas que merecen interés de investigación” (p.3). De esta manera, se considera en este trabajo como caso, un estudiante con discapacidad cognitiva, teniendo en cuenta, que el estudio de casos puede incluir estudios de un solo caso como también de múltiples casos dependiendo de la cantidad de las unidades de análisis (Barrio et al, s.f.).

La elección de un estudio de caso con un solo estudiante obedece a las características de la población, puesto que se atiende la discapacidad cognitiva dentro de la investigación y en la institución educativa seleccionada para el desarrollo del estudio solo existía un caso diagnosticado médicamente.

A pesar de que el estudio de casos no es tan sencillo de aplicar, Montero y León (citados por Barrio et al, s.f.) proponen el desarrollo del estudio de casos como método de indagación a partir de cinco etapas.

La selección y definición del caso. En esta etapa se busca seleccionar el caso apropiado y además definirlo, identificando los ámbitos en los cuales el estudio resulta relevante, además de identificar los sujetos que pueden ser fuente de información, identificar el problema y los objetivos de investigación.

Elaboración de una lista de preguntas. Una vez identificado el problema, es crucial determinar un conjunto de preguntas que guiarán al investigador. Luego de los primeros contactos en el proceso de interacción con el caso, es importante realizar una pregunta global y desglosarla en preguntas más variadas, de tal forma que permita orientar la recogida de datos.

La localización de las fuentes de datos. Puesto que los datos se obtienen mirando, preguntando o examinando; en esta etapa se determinan las estrategias para la obtención de datos, como entrevistas, sujetos a examinar, estudio de documentos personales y la observación, entre otras.

El análisis e interpretación. Al tratarse de un análisis cualitativo y luego de establecer una correlación entre los contenidos y los personajes, tareas, situaciones, etc., del análisis; cabe la posibilidad de plantearse su generalización o exportación a otros casos.

La elaboración del informe. De manera cronológica, se debe contar a través de descripciones detalladas, los eventos y situaciones más relevantes. Además, debe explicitarse cómo se ha conseguido la información (recogida de datos, elaboración de las preguntas, etc.); esto, con el fin de trasladar al lector a la situación que se cuenta, provocando su reflexión sobre el caso.

En este sentido, se realiza un estudio de caso que implica llevar a cabo un proceso de indagación; que consiste en la observación de un estudiante cuando se enfrenta a una propuesta de aula relacionada con problemas aritméticos de enunciado verbal con estructura aditiva. De esta manera, se llevan a cabo las siguientes fases:

Fase I: En esta fase se ven reflejadas las etapas de selección y definición del caso de estudio teniendo en cuenta la información obtenida por medio de entrevistas realizadas tanto a la profesional encargada en su momento de la atención a la población vulnerable en la secretaría de educación de la alcaldía municipal de Santiago de Cali como a las profesionales encargadas de la oficina de atención a la diversidad de la institución educativa seleccionada. De igual manera, se consigue información valiosa sobre el caso con ayuda de algunos docentes de la institución. Esta fase también comprende la elaboración de una lista de preguntas que corresponden a la metodología de estudio de caso, en la medida en que aquí se realiza la documentación de la problemática, justificación, objetivos y un marco teórico concerniente a las posturas didácticas acerca de la estructura aditiva, los planteamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional frente a la enseñanza de la estructura aditiva a través de los documentos de Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencias; además, de una revisión de la política nacional e internacional acerca de la prestación del servicio educativo de calidad a personas con Necesidades Educativas Especiales en el marco de la educación inclusiva y la educación para todos. La información comprendida en esta fase, se encuentra detallada en el capítulo 1 del presente trabajo.

Fase II: Esta fase hace alusión a la localización de las fuentes de datos que corresponde a la metodología de estudio de caso, lo cual se ve reflejado cuando se define la población con la cual se lleva a cabo el trabajo de investigación, población integrada por un estudiante de segundo grado de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar de la ciudad de Cali, el cual, ha sido diagnosticado con retraso mental leve² (DI cognitivo) y cuenta con el acompañamiento del grupo de profesionales de apoyo responsables de la oficina de atención a la diversidad en la institución.

Una vez seleccionada la población, se realiza la aplicación de una prueba diagnóstica diseñada con problemas de tipo aditivo de cambio y combinación; para así, realizar un diseño de una propuesta de aula que logre, en mayor medida, disminuir las dificultades que se evidenciaron en la prueba diagnóstica.

Durante la aplicación de la propuesta de aula, se espera recolectar información a través de registros fotográficos, de video, audio, registros escritos, notas de campo y evidencias que se puedan sustraer de la manipulación por parte del estudiante del material concreto de la propuesta de aula. Con lo anterior, se pretende realizar una sistematización de la información recolectada a través de los diferentes medios.

Fase III: En esta fase se evidencian las etapas de análisis e interpretación de resultados y la elaboración del informe final que pertenecen a la metodología de estudio de caso, donde se ve reflejado la realización del análisis de los resultados obtenidos en la fase anterior con la implementación de la propuesta de aula, análisis que se elabora a la luz de las propuestas teóricas que fundamentan este trabajo. Finalmente, se espera poder determinar algunas conclusiones y reflexiones en torno a la enseñanza de la estructura aditiva con estudiantes que presenten discapacidad cognitiva.

3.2 Caracterización de la población

Los estudiantes con discapacidad cognitiva pueden ser identificados en el ambiente escolar porque a menudo se encuentran diferencias con los demás estudiantes en las funciones sensoriales, psicomotoras, de atención, lingüísticas y de memoria, que los sitúan en

² La prueba neuropsicológica determina que el estudiante presenta un “retraso mental” leve, sin embargo, debido a la evolución que ha sufrido la expresión, dentro del presente estudio se refiere a dicha dificultad como discapacidad cognitiva.

niveles cognitivos equivalentes a estudiantes de menor edad. Por esta razón, para caracterizar al estudiante, se va a tomar una fracción del instrumento realizado por Celis & Vidarte (2016), la cual cuenta con: datos generales, historia escolar y aprendizaje actual, observaciones de los maestros acerca del aprendizaje del estudiante en el grado actual, observaciones generales del maestro, observaciones del estudiante, experiencias, gustos e intereses personales del estudiante e historia terapéutica (ver anexo 3). Los datos fueron recolectados por medio de entrevistas al estudiante, padres de familia, profesores y demás personas que tiene contacto directo con él.

La institución educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar sede Santo Domingo del sector oficial de la ciudad de Santiago de Cali, se selecciona para este estudio porque cuenta con una oficina de atención a la diversidad, a cargo de un equipo de profesionales en psicología y fisioterapia; además, la institución atiende diversos casos que presentan NEE. A partir de ahí, se opta por la discapacidad cognitiva obedeciendo a una situación personal de uno de los investigadores y, en la escuela, para el grado seleccionado (segundo de primaria), solo había un estudiante diagnosticado médicamente y es con quien finalmente, se lleva a cabo el desarrollo de la propuesta de aula diseñada.

La información que se referencia en adelante se infiere a partir los datos obtenidos a través de la aplicación del instrumento propuesto por Celis & Vidarte en relación con el estudiante seleccionado para el estudio. De esta manera, se determina que el estudiante tiene 8 años de edad, de sexo masculino, vive con su padre, su madrastra, hermanastra y un hermano por parte de padre. Estudia actualmente en la institución educativa mencionada y es remitido por neuropediatría a educación especial por discapacidad cognitiva desde los 7 años cuando cursaba primero de primaria, después de haber realizado la prueba neuropsicológica con resultados CI³ 87 por debajo del promedio. Por su condición, su rendimiento académico está ubicado entre bajo y básico.

En el ámbito escolar, el estudiante presenta distracción con facilidad, pero le gusta participar en las clases. Su profesor al dictar las diferentes asignaturas para el mismo grado

³ El Coeficiente Intelectual es un número que resulta de la realización de una prueba estandarizada que permite medir las habilidades cognitivas de una persona en relación con su grupo de edad. Su clasificación se es: 120-129 superior, 110-119 arriba de lo normal - brillante, 90-109 normal, 80-89 debajo de lo normal.

(entre ellas, lengua Castellana y Matemáticas), tiene mucho contacto con él, pero resalta mucho que no cuenta con el acompañamiento necesario en casa por parte de algún familiar, ya que las tareas que envía, vuelven igual de la casa y esto se evidencia en el desorden con el que maneja sus cuadernos (falta de apuntes de clase, tareas incompletas, presentación estética de sus cuadernos, entre otros). El profesor también destaca su entusiasmo por aprender y un nivel de lectura destacado respecto al resto de estudiantes.

Para un mejor aprendizaje del estudiante, el docente utiliza como estrategias dentro del salón, ubicarlo en un pupitre por delante de sus compañeros para centrar su atención en lo que él tiene propuesto para la clase y la asignación de un estudiante de secundaria de la misma institución para realizarle acompañamiento, con el fin de controlar aspectos disciplinarios y de concentración. Pero a pesar de las estrategias utilizadas por el docente, al estudiante se le dificultan las operaciones básicas con números de 3 o más cifras y al no dominar las tablas de multiplicar, esta operación le causa mucha dificultad en lo algorítmico y en la resolución de problemas.

Al hablar de la relación con sus compañeros, tiene pocos amigos, pero intenta socializar con todos y le gusta trabajar en grupo, aunque algunos compañeros le hacen bullying por su discapacidad, lo que hace que dicho trabajo en grupo no sea eficaz, en la medida en que al estudiante le es difícil poder socializar sus pensamientos con espontaneidad.

En la historia clínica del estudiante, se menciona que presenta desde el año y dos meses de nacido, convulsiones y tiene antecedentes en infecciones que ocasionan fiebre que terminan en mayor parte con convulsiones. Desde los 3 años ha asistido a terapia ocupacional y fonoaudiología de manera intermitente por causas de cambio de EPS y dificultad para radicar las órdenes médicas. También, debe asistir periódicamente a neuropsicología para realizar seguimiento a su condición, pero por los mismos inconvenientes, su seguimiento se ve afectado.

Dentro de las pruebas que le han realizado al estudiante, la prueba neuropsicológica menciona algunas debilidades que posee, entre ellas están que se distrae en ocasiones con estímulos del contexto, se evidencia debilidades en la vía visual y en la audio-verbal y logra fijar la atención pero no por un tiempo prolongado. También, habla de algunas habilidades que tiene el estudiante respecto a atención, memoria, lenguaje, entre otras. Entre estas

habilidades están que el estudiante es capaz de mantener y utilizar información durante la ejecución de actividades, su mayor fortaleza está en la memoria visual y muestra un funcionamiento adecuado en tareas que implican comprensión del lenguaje a partir de estímulos visuales y auditivos. Dicha prueba también sugiere algunas recomendaciones para el aula escolar que permitirían un mejor aprovechamiento de su aprendizaje:

- Ofrecer espacios propicios en los cuales se favorezca la atención y no se encuentren estímulos que distraigan su atención
- Promover actividades escolares por diversos canales sensoriales como visual, táctil, olfativo y auditivo
- Favorecer el desarrollo de la autoconfianza, seguridad y autocontrol emocional
- Favorecer el desarrollo del pensamiento estratégico expresando el problema con otras palabras; explicar con sus propias palabras en qué consiste el problema, representa el problema en otro formato por ejemplo con objetos, dibujos, gráficos, etc.
- Identificar los datos más importantes para resolver el problema, buscar un problema semejante que haya resuelto antes de manera exitosa, entre otros
- Utilizar métodos de enseñanza y evaluación utilizando como apoyo material concreto (juguetes, fichas, figuras, etc.)
- Es recomendable dividir las tareas en etapas breves. Determinar el tiempo de trabajo/atención y ajustar su trabajo a ese tiempo, que poco a poco deberá aumentarse, a medida que se identifique progreso.
- Se recomienda la práctica de reforzamientos positivos cuando realice las actividades escolares de manera adecuada.
- Repetirle la consigna las veces que sean necesarias comprobando que haya comprendido lo que tiene que hacer.

Igualmente, la prueba tiene recomendaciones para realizar en casa, como las siguientes:

- Establecer horarios con actividades diarias a cumplir (baño, levantada, cepillada de los dientes, etc.), incluyendo los fines de semana.
- Determinar un lugar cómodo y sin estímulos que distraigan su atención para realizar tareas o actividades de aprendizaje.
- Dividir tareas y quehacer de la casa

- Favorecer su autonomía y el uso del autocontrol.
- Evitar compararlo con los demás.
- Promover juegos didácticos de concéntrese, domino, rompecabezas, sopa de letras, organización de secuencias, entre otros.

A pesar de las sugerencias que se han dado, específicamente para la familia, es importante destacar que ha habido acompañamiento suficiente en el colegio por parte del grupo de diversidad pero no ha habido respuesta positiva de parte de la familia para hacer un trabajo adecuado con el estudiante, lo que impide una mejoría en el estudiante respecto a las dificultades que presenta.

3.3 Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica se organizó teniendo en cuenta el marco referencial de Puig & Cerdán (1988) que proponen las diferentes categorías semánticas para problemas de tipo aditivo (cambio, combinación, igualación y comparación).

En particular, para fines del presente trabajo se abordan únicamente las categorías de cambio y combinación. Estas categorías se eligen porque la categoría de combinación es la más usual y se quiere observar cómo se encuentra el estudiante dentro de esta categoría y, la categoría de cambio es la que más dificultad genera cuando la incógnita toma la posición de cantidad inicial, cambio o de cantidad final. Además, los antecedentes han reportado que ésta última categoría es la que causa mayor dificultad en los estudiantes, especialmente en relación a la sustracción.

Debido a las dificultades lecto-escritoras que presenta el estudiante, es de esperarse que en el trabajo con problemas aritméticos de las categorías de igualación y comparación, el estudiante tenga mayor dificultad que al trabajar con problemas aritméticos de cambio y combinación. Por esta razón, se abordan únicamente problemas aritméticos de cambio y combinación en la prueba diagnóstica. También, se realiza esta prueba diagnóstica con el fin de observar las dificultades que tiene el estudiante en las categorías de cambio y combinación, para dar énfasis en ellas dentro de la propuesta de aula y así, poder lograr un avance en el estudiante, que se puede ver evidenciado al resolver la situación 3.

3.3.1 Presentación de la prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica presenta ocho preguntas de selección múltiple con única respuesta y dos preguntas abiertas; algunas de las cuales fueron adaptadas de Manzano, L., Otero, M., Pachón, A. & Patiño, O. (2014), de acuerdo con los subtipos de problemas de cambio o combinación que se abordan en el trabajo. En anexo 2, se resume la prueba diagnóstica con el enunciado del problema, el tipo de problema, la categoría semántica y el subtipo de problema trabajado.

La aplicación de la prueba diagnóstica se desarrolla en una sesión de 90 minutos, con la finalidad de conocer la manera como el estudiante resuelve problemas de tipo aditivo.

3.3.2 Resultados y análisis de los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica

En esta parte del estudio se describen los resultados de la prueba diagnóstica, realizando una revisión cuantitativa sobre los aciertos y desaciertos tanto en el total de la prueba como en las categorías de cambio y combinación (cada uno con su interpretación); seguido de algunas conclusiones que se evidenciaron dentro de la aplicación de la prueba diagnóstica.

Cabe mencionar, que para el análisis de la prueba diagnóstica es utilizada una matriz (ver anexo 1) enmarcada en la resolución de problemas de estructura aditiva que se conforma de seis aspectos que permitieron el análisis de los resultados obtenidos a través de la prueba diagnóstica, dichos aspectos fueron:

- *Número de la pregunta:* Se refiere al número de la pregunta que se está analizando. Estos oscilan del 1 al 10.
- *Contenido específico evaluado:* Se menciona si el tipo de problema aritmético es de la categoría semántica de cambio o combinación.
- *Caracterización del problema:* Se expone la categoría semántica y las partes que el estudiante debe identificar para la solución del problema.
- *Desempeño evaluado:* Se describe el desempeño que debe alcanzar el estudiante al resolver el problema.
- *Clave:* Se indica la respuesta correcta, ya que la prueba diagnóstica tuvo preguntas de selección múltiple con única respuesta y dos preguntas abiertas.

- *Características de los tipos de respuesta:* Se describe la respuesta que seleccionó el estudiante y la estrategia que utiliza para resolverlo. Si la respuesta es incorrecta, se describen las posibles causas por las cuales el estudiante pudo haberse equivocado.

A partir de los aspectos anteriores, se llega a que el total de las soluciones correctas e incorrectas que tuvo el estudiante al enfrentarse a los diversos problemas de cambio y combinación presentados mediante la prueba diagnóstica, el porcentaje de aciertos es del 50%, que coincide con el porcentaje de soluciones incorrectas, el cual fue del 50%, con un total de 10 problemas de tipo aditivo.

En particular con las categorías semánticas, de los diez problemas que se presentaron al estudiante por medio de la prueba diagnóstica, 3 problemas fueron de combinación y 7 problemas fueron de cambio. El estudiante logró 1 acierto y dos desaciertos en los problemas de combinación; y en los problemas de cambio, tuvo 4 aciertos y tres soluciones erradas.

En los problemas de combinación, las dos soluciones erradas, representan el 67% y el 33% corresponde al porcentaje de aciertos que tuvo el estudiante al resolver problemas de combinación. En estos problemas, el estudiante no tuvo dificultad en identificar las partes para hallar un todo, utilizando cantidades de dos y tres cifras; pero cuando se pregunta por una de las partes (ofreciendo la otra parte y el todo), el estudiante relaciona el todo con una de las partes y aborda el problema como si dieran dos partes y tuviera que determinar el todo, siendo esta última una interpretación errada del problema.

En los problemas de cambio, el porcentaje de aciertos fue del 57% que corresponde a 4 de los 7 problemas; mientras que el 43% representa el porcentaje de desaciertos que tuvo el estudiante en los problemas de cambio, es decir, que el estudiante tuvo tres soluciones erradas de los 7 problemas presentados de la categoría de cambio.

Es importante resaltar que en la mayoría de los problemas de cambio con la forma $a+?=c$; $?+b=c$ se presentaron dificultades. El estudiante normalmente reconoce la cantidad inicial, el cambio y determina la cantidad final, es decir no presenta mayor dificultad en la resolución de problemas aditivos de cambio con la forma canónica $a+b=?$. Sin embargo, sí presenta dificultades al resolver problemas de cambio con las formas $a+?=c$ y $?+b=c$; en las

cuales la incógnita se ubica en una posición distinta a la habitual, esto es, la incógnita resulta ser la cantidad inicial o el cambio sobre la cantidad inicial. En ambos casos, la incógnita se encuentra al lado izquierdo del signo igual.

Como conclusiones de la prueba diagnóstica, se observa que al estudiante se le dificulta resolver problemas diferentes a las formas canónicas normalmente presentadas en el salón de clase, como los problemas de cambio con las formas $a+?=c$ y $?+b=c$ y presenta algunas debilidades relacionadas con la forma de resolver adiciones y sustracciones, y por su condición de hiperactividad, se distrae con frecuencia equivocándose en los algoritmos y conteos que esté ejecutando.

Entre las fortalezas que se observan, se encuentra el buen manejo del algoritmo de adición si se enfrenta a un ejercicio. Además, utiliza ceros relativos para realizar operaciones, tanto de suma como de resta. También, reconoce números hasta de tres cifras y utiliza diferentes medios para tratar de dar solución a los problemas planteados.

Es importante tener en cuenta que algunos de los problemas escritos causaron confusión al estudiante. Por esto, es importante contextualizar al estudiante por medio de ilustraciones o material manipulativo que favorezcan la acción - ejecución, promoviendo sus diversos canales sensoriales, para entender y realizar mejor los problemas planteados.

3.4 Diseño de la propuesta de aula

El diseño de la propuesta de aula se basa en el marco teórico reflejado en el capítulo 2, la caracterización del estudiante y los resultados de la prueba diagnóstica, proponiendo diversas situaciones encaminadas a propiciar la resolución de problemas de estructura aditiva; las cuales, se organizaron en problemas de combinación y cambio.

Otro aspecto que se observa al realizar la prueba diagnóstica es que el estudiante se distrae mucho cuando se enfrenta a situaciones problema cuyo único medio de representación usado es el escrito, por esto, se tienen en cuenta para el diseño de la propuesta, recomendaciones puntuales que sugiere la prueba neuropsicológica sobre los métodos de enseñanza y evaluación del estudiante, los cuales incluyen material concreto como juguetes, fichas, figuras, material manipulativo, entre otros. Además, diversas representaciones

distintas a la lengua natural escrita, tareas en etapas cortas de tiempo y acompañamiento en la lectura.

Al formular cada pregunta de la propuesta de aula, se espera que el estudiante realice un procedimiento que sea susceptible de poderlo clasificar en algún modelo o estrategia que se ha planteado en el marco referencial. En este sentido, el análisis de la actuación del estudiante se centrará más en los procesos llevados a cabo que en la propia respuesta. Asimismo, se toman en cuenta las representaciones que el estudiante utiliza para resolver los problemas, siendo autónomo en la elección de dicho material, teniendo en cuenta que se tiene como material billetes didácticos y palos de paleta para facilitar el conteo.

De acuerdo con los aspectos anteriores, la propuesta de aula se caracteriza por hacer énfasis en el juego como elemento fundamental en las primeras tareas que permiten al estudiante aprender de manera más agradable y construir conocimiento de manera lúdica, sin dejar de lado el objeto matemático abordado que corresponde a la estructura aditiva con las categorías semánticas de cambio y combinación. También, en las siguientes tareas, al no ser relacionadas con el juego, se potencia con material manipulativo e ilustraciones que permiten al estudiante facilitar la comprensión del problema, utilizando así estrategias y representaciones para resolver dichos problemas.

3.4.1 Presentación de la propuesta de aula

El objetivo del desarrollo de las tareas específicas de enseñanza fue estudiar la evolución de los procesos del estudiante al resolver problemas de estructura aditiva, y apoyar su desarrollo en la adquisición de su propio conocimiento. Este diseño de la propuesta de aula (ver anexo 5) consistió en seis sesiones y las tareas se estructuraron de la siguiente manera:

Tabla 9. Estructura de la propuesta de aula

Situación	Tarea/ nombre	Contenido matemático	Objetivo
1	1. Serpientes y escaleras	Resolución de problemas aditivos de cambio.	Que el estudiante explore situaciones que impliquen resolver problemas aditivos de cambio (al inicio, el cambio o al final), haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego.
	2. Boliche	Resolución de problemas aditivos de combinación.	Que el estudiante explore situaciones que impliquen resolver problemas aditivos de combinación (una de las partes y el todo), haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego.
2	1 y 2. Encuesta	Resolución de problemas aditivos de combinación y cambio.	Que el estudiante sea capaz de resolver problemas de tipo aditivo de combinación de la forma $a+b=?$ y $a+?=c$.
			Que el estudiantes sea capaz de resolver problemas de tipo aditivo de cambio de la forma $a-?=c$ y $a-b=?$.
3	1 y 2. Kermesse escolar	Resolución de problemas aditivos de cambio.	Que el estudiante sea capaz de resolver problemas de tipo aditivo de cambio con la forma $a+?=c$, $?+b=c$ y $?-b=c$.
		Resolución de problemas aditivos de cambio y combinación.	Que el estudiante sea capaz de identificar y resolver problemas aditivos de cambio y combinación en una situación planteada.

La aplicación de la propuesta de aula se llevó a cabo en 6 sesiones realizadas día de por medio, cada una con duración entre 30 y 40 minutos aproximadamente. En cada pregunta de cada tarea se realizó un acompañamiento al estudiante, desarrollando lectura acompañada,

ejemplos más sencillos si no se entendía el problema, identificación de las cantidades, utilizando material manipulativo (palos de paleta y billetes didácticos), entre otras; teniendo en cuenta las recomendaciones establecidas dentro de la caracterización del estudiante, implementando así y con mayor facilidad el marco teórico referenciado.

3.4.2 Metodología de aplicación e instrumentos para la recolección de datos

Las situaciones de la propuesta de aula se desarrollaron con un estudiante con discapacidad cognitiva de grado segundo de educación básica primaria. Cada situación planteada, se lleva a cabo de tal manera que la complejidad de cada situación fuera aumentando progresivamente, y el acompañamiento al estudiante fuera cada vez menor. Considerando lo anterior, el diseño de la propuesta consta de tres situaciones distribuidas en seis sesiones con una duración de dos horas en promedio para cada una.

Las sesiones consistieron en trabajo grupal (investigadores - estudiante) e individual y se propició la argumentación por parte del estudiante, en cuanto a la estrategia utilizada para resolver determinado problema.

Durante la aplicación de la propuesta de aula, se recolecta información a través de registros fotográficos, video, audio, registros escritos, notas de campo y evidencias que se puedan sustraer de la manipulación por parte del estudiante del material concreto que se utilizó en la propuesta de aula. Con lo anterior, se busca realizar una sistematización de la información recolectada a través de los diferentes medios.

En la recolección de información, los registros visuales se convierten en un apoyo fundamental debido a la cantidad de variables que son objeto de análisis y los registros escritos no son suficientes para dar cuenta de ellas. Por lo tanto, los gestos, lo que el estudiante expresa y realiza dentro de la resolución de cada problema se convierte en un elemento primordial para esta investigación.

3.5 Sobre las variables de análisis

Luego de la implementación de la propuesta de aula, se describen los resultados obtenidos de acuerdo con todo lo mencionado hasta el momento en el marco teórico (la perspectiva curricular, didáctica y normativa), además de la caracterización de la población y la prueba diagnóstica realizadas, teniendo en cuenta las variables de análisis determinadas

para tal fin: categorías semánticas (cambio y combinación), estrategias de resolución de problemas, las formas de representación.

A continuación se detalla de manera sintetizada las categorías y criterios de análisis para la clasificación de los resultados del estudiante respecto a la propuesta de aula.

Tabla 10. Categorías y criterios de análisis de resultados de la propuesta de aula

#	Categoría	Criterios	Descripción
I	Categoría semántica de Cambio	1. $a + b = ?$ 2. $a - b = ?$ 3. $a + ? = c$ 4. $a - ? = c$ 5. $? + b = c$ 6. $? - b = c$	Estas subcategorías se aplican en el análisis de los problemas de cambio, identificando cual es la correspondiente a cada problema.
II	Categoría semántica de Combinación	1. $a + b = ?$ 2. $a + ? = c$	Estas subcategorías se aplican en el análisis de los problemas de combinación, identificando cual es la correspondiente a cada problema.
III	Modelo o estrategia para la resolución del problema	1. Para la suma a) Modelos directos b) Conteos c) Hechos numéricos 2. Para la resta a) Modelos directos b) Conteos c) Hechos numéricos	En cada problema, el estudiante puede utilizar una o más estrategias para resolverlo, así, se realiza un análisis diferente dependiendo con cual se emplee.
IV	Formas de representación	1. Representaciones icónicas a) Representaciones manipulativas b) Representaciones gráficas 2. Representaciones simbólicas a) Representaciones verbales b) Representaciones numéricas	En cada problema, el estudiante puede utilizar una o más formas de representación para resolverlo, así, se realiza un análisis diferente dependiendo con cual se emplee.
V	Logro de la tarea	1. De acuerdo con las respuestas del estudiante, se analiza el acercamiento a los propósitos pre-establecidos de cada tarea.	

3.6 Resultados y análisis de resultados

A continuación, se explicitan los resultados e interpretación de los resultados de acuerdo con los anteriores criterios de análisis. Por grupos de preguntas, se describen las respuestas y su interpretación a la luz de las variables de análisis. La conformación de dichos grupos de preguntas, se hace de acuerdo con los propósitos comunes dentro de los objetivos de cada tarea.

3.6.1 Resultados y análisis de resultados de la situación 1

(S1) Situación 1: JUGANDO Y APRENDIENDO ANDO

Propósito: Que el estudiante sea capaz de resolver problemas aditivos de cambio y combinación con incógnita en diferentes posiciones, a partir del juego como estrategia de aprendizaje.

(T1) Tarea 1: SUBE Y BAJA

Propósito: Que el estudiante explore situaciones que impliquen resolver problemas aditivos de cambio, haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego.

Antes de comenzar con la situación 1 tarea 1 (S1T1), se inicia jugando con el estudiante “serpientes y escaleras” varias veces para que tome confianza y se apropie de las reglas de juego. El estudiante en las primeras veces que juega, se equivoca en el consecutivo del tablero, ya que al llegar al extremo derecho inferior de la primera fila del tablero (casilla 10), se devuelve al extremo izquierdo en la segunda fila (casilla 20) en vez de seguir arriba (de la casilla 10) de derecha a izquierda (casilla 11), pero al preguntarle si está seguro, el estudiante rectifica la numeración y vuelve a contar las casillas en el tablero del juego, esta vez de manera correcta.

Entre las diferentes partidas que se realizan estudiante-investigador, de manera inesperada salen los compañeros de salón al descanso que se acercan curiosos a observar el juego; al ver esta situación (sin estar presupuestada), se invitan a jugar para percibir la relación que tiene el estudiante con sus pares en una situación determinada (ver ilustración 5). En ese momento, el estudiante trata de ser el líder del juego, aunque algunos de los participantes realizan sumas mentales de manera más rápida que les sirve para agilizar el juego. Entre los niños participantes, se observa que algunos de ellos corren la ficha y van contando (el estudiante utiliza esta estrategia) y, otros cuentan primero y luego mueven la ficha.

El papel de los demás niños con relación al estudiante en ese momento fue de acompañamiento, el cual, sirvió para reforzar las reglas del juego. Así, cuando se introduce T1S1, el estudiante maneja más acertadamente los problemas que se presentan, identificando el cambio (serpientes, escaleras y dados), la cantidad inicial (casilla donde se encuentra la ficha) y la cantidad final (casilla donde termina la ficha luego de realizar algún movimiento).

Ilustración 5. Participación de estudiantes en el juego Serpientes y Escaleras



Además, el estudiante utiliza las estrategias de conteo a partir del sumando mayor y hechos conocidos. Para referirnos a la primera estrategia, el estudiante suma los dados contando a partir del mayor, eso quiere decir, por ejemplo, si salen los dados uno con dos puntos y el otro con cinco puntos, el estudiante empieza a contar desde el 5 hasta el 7 hasta haber añadido el sumando menor. En la segunda estrategia, se habla de hechos conocidos, ya que, la primera vez que el estudiante saca un par de seis, cuenta desde el 6 hasta el 12, para la segunda vez, vuelve y cuenta, pero a la tercera, ya sabe que la suma de ambos dados es 12, así que solo corre en el tablero las 12 casillas.

Dentro de las preguntas orientadoras que se realizaban para establecer si el estudiante entendía las reglas del juego y para propiciar a través del razonamiento el análisis sobre las preguntas próximas a realizarse se encuentran: ¿qué número debes sacar para ganar? o ¿en cuál casilla estabas y en cuál quedarás al avanzar lo que indican los dados?.

En conclusión del momento del juego, el estudiante entendió las reglas y estaba preparado para resolver casos hipotéticos de terceras personas relacionadas con el mismo contexto. Así, se prosigue a realizar el cuestionario de la tarea 1.

(P1) **Pregunta 1:** A Karen en la primera tirada le salieron sus dados así:
¿Cuántos lugares tenía que avanzar?



Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 1 pregunta 1 (S1T1P1): El estudiante organiza los dados que se le suministran para el desarrollo de la situación, de tal forma que en sus caras superiores, un dado tenga dos puntos y el otro, cuatro puntos, como se muestra en el enunciado de la pregunta 1, luego suma los números (2 y 4) y al finalizar responde a la pregunta, afirmando: 6 casillas, la cual es correcta.

En relación a la respuesta S1T1P1 se logra determinar que el estudiante se basa en el ejemplo propuesto en la introducción de la tarea 1 para responder a la pregunta propuesta. De esta manera, el estudiante utiliza los dados proporcionados para recrear la situación y establecer que el número de casillas a avanzar se determina a partir de la suma del número que representa cada una de las caras de los dados que aparecen en la ilustración del enunciado.

Puesto que se trata de una pregunta introductoria para cerciorarse de que el estudiante comprende la dinámica del juego con los dados, la pregunta realizada no busca movilizar implícitamente elementos asociados a la estructura aditiva. Cabe mencionar que el estudiante realiza una representación icónica manipulativa de lo presentado en el enunciado de la pregunta 1, puesto que representa los dados que se encuentran en S1T1P1 por medio de los dados físicos. También, emplea la estrategia de contar a partir del sumando mayor, en este caso, cuenta a partir del número cuatro que representa uno de los dados que empleó y seguidamente menciona en voz alta “cuatro y dos es igual a cinco, seis” contando el menor de los sumandos (dos) mentalmente.

(P2) **Pregunta 2:** Karen cae en la casilla 21 donde hay una escalera que conduce a la casilla 42. ¿Cuántas casillas avanzó Karen gracias a la escalera?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 1 pregunta 2 (S1T1P2): El estudiante ubica la escalera (en el juego serpientes y escaleras) que se le está mencionando en la pregunta 2, luego coloca una ficha de color en la casilla 21 y otra en la 42, posteriormente procede a contar en el tablero cuantas casillas avanzó gracias a la escalera, para dar acertadamente como respuesta a S1T1P2: 21 casillas.

(P3) **Pregunta 3:** A Daniel le salió una serpiente en la casilla 93 y tuvo que regresar a la casilla 73. ¿Cuántas casillas se devolvió Daniel por culpa de la serpiente?

Descripción de la respuesta situación 1 tarea 1 pregunta 3 (S1T1P3): El estudiante ubica la serpiente (en el juego serpientes y escaleras) que se le está mencionando en la pregunta 3, luego coloca una ficha de color en la casilla 93 y otra en la 73, posteriormente procede a contar en el tablero cuantas casillas retrocedió a causa de la serpiente, para dar como respuesta acertada a S1T1P3: 20 casillas.

(P4) **Pregunta 4:** Laura lanzó los dados y llegó a la casilla 28 donde había una escalera que la llevó hasta la casilla 84 ¿Cuántas casillas avanzó Laura gracias a la escalera?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 1 pregunta 4 (S1T1P4): El estudiante ubica la escalera (en el juego serpientes y escaleras) que se le está mencionando en la pregunta 4, luego coloca una ficha de color en la casilla 28 y otra en la 84, posteriormente procede a contar en el tablero cuantas casillas avanzó gracias a la escalera, para dar como respuesta correcta a S1T1P4: 56 casillas.

Para la pregunta S1T1P2 que corresponde a un problema de cambio con la forma $21 + ? = 42$, se observa que el estudiante identifica, de manera exploratoria, el cambio que ocasiona la escalera dentro del problema, utilizando la estrategia de contar todo sin modelos, es decir, el estudiante cuenta las casillas del tablero sin realizar alguna representación física o con los dedos y construye una secuencia de conteo comenzando con uno, y continúa hasta encontrar la respuesta. En este punto, el estudiante sitúa dos fichas, una en la casilla 21 y otra en la casilla 42. Luego, realiza el conteo entre las casillas mencionadas, asumiendo el 21 como un cero relativo, es decir, el estudiante cuenta "1, 2, 3, 4, 5,..." al tiempo que va haciendo alusión a las casillas "22, 23, 24, 25, 26,..." respectivamente. Esto lo hace de forma

secuencial hasta llegar a la casilla 42, que en el conteo corresponde al número 21 (cuando termina el conteo, la secuencia que inició en uno, termina en 21 al llegar a la casilla 42). De esta manera, el estudiante identifica una cantidad inicial (21), y un estado final de dicha cantidad (42) al emplear fichas de color para resaltar las casillas (21 y 42) dentro del tablero; a partir de ello, el estudiante determina el número de casillas (correspondiente al cambio) que avanza Karen gracias a la escalera.

A pesar de que el estudiante presentó inicialmente algunas confusiones respecto a la forma en que se encuentran dispuestos los números en el tablero del juego y de que esto lo llevó a establecer una respuesta incorrecta (el estudiante realizó la secuencia numérica de manera errada); el estudiante, luego de preguntarle ¿estás seguro?, duda y vuelve a contar asegurándose del sentido que siguen los números en las casillas del tablero para llegar a una solución acertada (21 casillas).

Respecto a la forma de representación, el estudiante utiliza formas de representación verbal informal, puesto que enuncia los números que va contando a medida que construye la secuencia de números que inicia en 1 (en la casilla 22 al asumir la casilla 21 como cero relativo) y termina en 21 al llegar a la casilla 42. De esta manera, el estudiante empleando la estrategia de contar todo sin modelos (contar sin emplear representaciones físicas) realiza el conteo señalando con uno de sus dedos, cada casilla a medida que va contando y construyendo la secuencia a partir de 1 (desde la casilla 22).

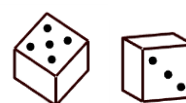
A pesar de que el estudiante en S1T1P2 comete errores al realizar el conteo, estos los corrige al momento de enfrentar S1T2P3 y S1T1P4 fijándose en la secuencia numérica que siguen las casillas en el tablero del juego.

En S1T1P3, al tratarse de un problema de cambio con la forma $93 - ? = 73$, se logra observar que el estudiante identifica el cambio por medio de lo experimentado en el juego, para este caso, al tratarse de un cambio que implica disminución sobre una cantidad inicial (93), el estudiante hace alusión al hecho de que la serpiente retrocede la ficha de la casilla 93 a la casilla 73 (estado final de la cantidad inicial) y da como respuesta a S1T1P3 20 casillas, lo cual es correcto. Para esta pregunta, el estudiante se apoya en la estrategia de conteo para la sustracción, *contar hacia atrás*. En este sentido, el estudiante realiza un conteo hacia atrás (descendente) considerando el 93 que es el número mayor como cero relativo, por lo cual

inicia el conteo desde la casilla 92 hasta llegar a la casilla 73. De esta manera, en la casilla 92 enuncia el uno, en la casilla 91 enuncia el dos y así sucesivamente hasta enunciar el veinte al llegar a la casilla 73. Así, el tipo de representación que el estudiante emplea para dar respuesta a S1T1P3 es verbal informal, al momento de enunciar cada uno de los números que cuenta a partir de uno hasta 20.

En S1T1P4, al haber experimentado con las preguntas anteriores (S1T1P1 -P2 -P3), el estudiante maneja las reglas del juego y se le facilita la resolución de esta pregunta, utilizando la misma estrategia y representación que utilizó en S1T1P2, puesto que tanto el problema propuesto en S1T1P2 como en S1T1P4 corresponden a problemas con la categoría de cambio y la forma $a+?=c$. También, el estudiante reconoce el cambio, que para este caso provoca un incremento sobre la cantidad inicial (28) hacia un estado final (84), contando a partir del 29 (como cero relativo se tiene la casilla 28) hasta llegar a la casilla 84. En este sentido, el estudiante emplea fichas de color para resaltar las casillas 28 y 84 en el tablero, luego decide que debe contar las casillas que hay desde la 28 hasta la 84 para poder saber cuántas casillas avanzó Laura gracias a la escalera. En el momento en que el estudiante trata de establecer el número de casillas entre la 28 y la 84, reconoce qué hay que averiguar, para este caso, el cambio que provoca la escalera al llevar la ficha de Karen desde la casilla 28 hasta la 84, empleando la representación verbal al enunciar los números del 1 al 56 que cuenta desde la casilla 29 (asumiendo la 28 como cero relativo) hasta la casilla 84 de manera ascendente apoyado en la estrategia de contar todo sin modelos (sin emplear representaciones físicas de las cantidades involucradas en el problema).

(P5) **Pregunta 5:** Si Adriana lanzó los dados y le salieron así:



y avanzó a la casilla 74 ¿En qué casilla estaba Adriana?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 1 pregunta 5 (S1T1P5): El estudiante ubica una ficha en la casilla 74 y cuenta desde casillas anteriores hacia adelante hasta que cuenta 8 casillas y termina en la casilla 74. De esta manera, el estudiante empieza a contar desde la casilla 67 (señala con los dedos las casillas y cuenta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) sin obtener el resultado esperado; luego cuenta desde la casilla 66 y obtiene nueve casillas porque cuenta la casilla donde empezó (casilla 66); el estudiante vuelve a la casilla 67 pero le

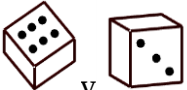
ocurre lo mismo; sigue intentando con la casilla 68 y 69 sin obtener el resultado. Al final, cuenta desde la casilla 66 (sin contarla, cuenta a partir de la casilla 67) y obtiene como resultado las ocho casillas que debía contar hasta la casilla 74. Pero cuando se analiza de nuevo el enunciado del problema y se le pregunta en qué casilla estaba Adriana, el estudiante dice que estaba en la casilla 67, entonces, los investigadores colocan otra ficha en la casilla 67 para que el estudiante pueda corroborar si su respuesta es correcta o no, pero él sigue contando la casilla donde está ubicada la ficha. Uno de los investigadores realiza un ejemplo para que el estudiante se dé cuenta del error, colocando una ficha en la casilla 67 y lanza los dados que indican que tiene que correr 3 casillas y el estudiante la realiza bien (mueve tres casillas sin contar donde se encuentra), pero al volver a la pregunta, el estudiante sigue insistiendo en contar desde la casilla 67. Los investigadores le preguntan ¿tu cuentas desde la casilla donde estas o desde la casilla después?, el estudiante dice que desde la casilla después y corre la ficha a la casilla 66, y ahí si obtiene como resultado las 8 casillas (respuesta correcta) que debía avanzar según lo que indican los dados.

En la pregunta S1T1P5, se propone un problema aritmético con la categoría semántica de cambio con la forma $?+8=74$, en el cual el estudiante presenta dificultades para identificar la cantidad inicial que corresponde a la casilla en que estaba ubicada Adriana, porque el estudiante utiliza una aproximación desde dónde podría estar la ficha y a partir de ahí, cuenta de manera ascendente intentando llegar a la casilla 74. A pesar de las dificultades para hallar la cantidad inicial, el estudiante identifica el cambio que ocasionan los dados y la cantidad final, que se refiere a la casilla en la cual termina la ficha de Adriana.

No se identifica que el estudiante reformule el problema (con la forma $74-8=?$) o cuente las 8 casillas (que indican los dados) de manera descendente desde la casilla 74, pero el estudiante intenta responder a S1T1P5 a través del ensayo y error, haciendo uso de representaciones verbales informales ya que, enuncia los números que va contando, sin realizar ninguna operación formal, y emplea el conteo sin modelos porque no utiliza representaciones físicas de las cantidades involucradas para resolver el problema, también, cuenta a partir del primer sumando, esto quiere decir que el estudiante infiere el primer sumando a partir de aproximación o tanteo, sumando que corresponde realmente a la cantidad inicial.

Al no encontrar una estrategia adecuada para determinar la respuesta a la pregunta, como podría ser el contar hacia atrás, el estudiante presenta dificultades para encontrar un camino que lo conduzca a la respuesta de la pregunta. Sin embargo, se vale del ensayo y error, partiendo de una cantidad inicial que determina al azar pero teniendo en cuenta que debe ser una casilla con la cual, al sumar ocho casillas tal como indican los dados, Adriana avance a la casilla 74 como se menciona en el enunciado. Así, el estudiante supone una cantidad inicial (66) que asume como cero relativo e inicia el conteo con 1 a partir de la casilla 67, de tal manera que en la casilla 68 enuncia el número 2, en la casilla 69 el número tres y así sucesivamente hasta llegar a contar ocho como indican los dados, terminando en la casilla 74. Para realizar el conteo, el estudiante emplea una representación simbólica verbal, enunciando los números que cuenta (1, 2, 3, ..., 8) partiendo de la casilla 67 hasta la 74, afirmando como respuesta que Adriana se encontraba en la casilla 66, “porque si estaba en la 66 y se movió 8 casillas, llega a la 74”.

(P6) **Pregunta 6:** Le toca el turno a Daniel, tiene su ficha en la casilla 85 y al lanzar los

dados caen  y . ¿Hasta qué casilla avanza Daniel?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 1 pregunta 6 (S1T1P6): El estudiante coloca una ficha en la casilla 85 (como punto de referencia) y suma los números que indican los dados (6 y 3). Luego, avanza el número de casillas indicado por los dados (9 casillas) y de esta manera llega a la casilla 94, lo cual es correcto.

En S1T1P6, la respuesta del estudiante se basa en lo experimentado en el momento de jugar y el momento de resolver las preguntas anteriores, por lo tanto, el estudiante no presenta dificultad al resolver esta pregunta, sin embargo, hay que mencionar que el problema propuesto es un problema aritmético con la categoría semántica de cambio y la forma de la proposición es $85 + 9 = ?$. En este caso, son identificadas la cantidad inicial (casilla 85) y el cambio que provoca los dados (+9), esto conlleva a facilitar el cálculo de la cantidad final (casilla 94).

La estrategia utilizada por el estudiante para determinar el número de casillas a avanzar indicado por los dados (6 y 3) es contar a partir del sumando mayor (7, 8, 9) para saber cuántas casillas debe avanzar (9 casillas) y dónde termina la ficha que parte de la casilla

85. Además, el estudiante utiliza la forma de representación icónica manipulativa, porque ubica los dados de igual forma como se ilustra en el enunciado de S1T1P6 y a partir de ello, realiza el procedimiento descrito anteriormente. El estudiante reconoce una cantidad inicial (casilla 85) y un cambio (9) que hace que la cantidad inicial adquiera un estado final (casilla 94). De esta manera, emplea una representación simbólica verbal al enunciar los números desde 1 hasta 9 a medida que avanza desde la casilla 85 hasta la 94. El estudiante apoyado en la estrategia de contar a partir del primer sumando (85) y asumiendo el 85 como cero relativo, cuenta hacia adelante iniciando con uno en la casilla 86, luego enuncia el dos en la casilla 87 y así sucesivamente hasta haber contado el segundo sumando (9) llegando a la casilla 94, que corresponde a la casilla donde avanza Daniel luego de sacar 9 en los dados, partiendo de la casilla 85. Así, el estudiante determina que la respuesta a la pregunta es que Daniel avanza hasta la casilla 94.

(S1) Situación 1: JUGANDO Y APRENDIENDO ANDO

Propósito: Que el estudiante sea capaz de resolver problemas aditivos de cambio y combinación con incógnita en diferentes posiciones, a partir del juego como estrategia de aprendizaje.

(T2) Tarea 2: MÁS BOLOS, MÁS PUNTOS

Propósito: Que el estudiante explore situaciones que impliquen resolver problemas aditivos de combinación, haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego.

Antes de iniciar la situación 1 tarea 2 (S1T2), se realizan tres rondas del juego de boliche, con el fin de familiarizar al estudiante con lo que se enfrentará posteriormente. Se utiliza una cartelera que registra los puntos que cada jugador (investigador y estudiante) realiza en cada lanzamiento.

En esta parte, el estudiante utiliza en cada ronda diferentes estrategias y varias representaciones para dar respuesta al puntaje obtenido. Sin embargo, la representación utilizada con más frecuencia fue la representación manipulativa, ya que siempre ubica los bolos que se caen y a partir de ello realiza la adición (suma los números de los bolos derribados en el juego). En la primera ronda, solo logra derribar un bolo (con el número 23), lo enuncia y lo escribe en la cartelera que se muestra en la ilustración 6. En la segunda ronda, utiliza la representación icónica gráfica al representar cada número por medio de una raya

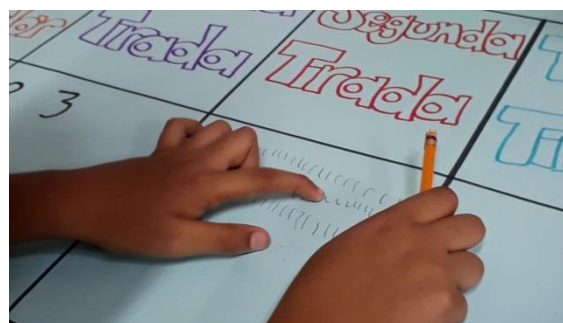
vertical (palito), también empleó una representación icónica manipulativa al representar cada sumando con los bolos suministrados en el juego. Además, el estudiante emplea la estrategia de contar todo con modelos, es decir, el estudiante determina la adición entre los sumandos a partir de la representación gráfica de las cantidades numéricas empleando rayas verticales (palitos). De igual manera, lo hace con los sumandos representados por medio del material manipulativo.

Ilustración 6. Cartelera del juego de boliche S1T2

Nombre del Jugador	Primera Tirada	Segunda Tirada	Tercera Tirada	Total de Puntos
Estudiante	23	72 82	93	198
Investigador	9	9	65	83

En la ilustración 7 se evidencia de mejor manera la representación icónica gráfica que emplea el estudiante, además del uso de estrategias de modelado directo, particularmente de contar todo con modelos, puesto que el estudiante plantea la representación de cada uno de los sumandos por medio del uso de los bolos proporcionados en el juego y por medio de la representación gráfica de los sumandos (palitos), con el fin de determinar la suma entre los conjuntos (número de puntos indicado por cada bolo derribado).

Ilustración 7. Representación icónica gráfica en juego del boliche S1T2



Finalmente, para la tercera ronda, el estudiante utiliza la representación simbólica numérica como se evidencia en la ilustración 8 con ayuda de la estrategia contar a partir del sumando mayor, para determinar la cantidad de puntos que obtuvo tanto el estudiante como el investigador que participó en el juego.

Ilustración 8. Representación simbólica numérica en el juego de boliche S1T2



En esta fase de juego inicial, se evidencia el uso de varias representaciones, tanto icónicas (gráficas, manipulativas) como simbólicas (numéricas) además el estudiante empleó estrategias como contar todo con modelos y contar a partir del sumando mayor para sumar los puntos obtenidos al derribar bolos. Al tratarse de una cantidad de puntos que aumenta dependiendo de la cantidad y número etiquetado en los bolos derribados, el estudiante, de manera exploratoria, se acerca a la resolución de problemas de cambio de forma canónica ($a+b=?$), donde identifica una cantidad inicial (un primer bolo derribado) y a partir de esta va añadiendo cada uno de los sumandos (efectuando un cambio sobre la cantidad inicial) que representa cada bolo derribado hasta haberlos sumado todos. De esta manera, el estudiante determina un puntaje total que corresponde al estado final que adquiere la cantidad inicial luego de haberse aplicado un cambio (haber sumado cada bolo derribado).

(P1) Pregunta 1: Juan y sus amigos fueron a jugar boliche y se dieron cuenta que cada bolo tiene un número de puntos. Como Juan lanzó de primero, derribó los siguientes bolos:



¿Cuántos puntos obtuvo Juan? _____

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 2 pregunta 1 (S1T2P1): El estudiante

busca los bolos proporcionados en el juego de boliche los bolos que están representados gráficamente en el enunciado de la pregunta y a partir de estos, el estudiante intenta realizar un cálculo mental con los números representados. A continuación, toma los bolos con los números 23, 30 y 40 para realizar la suma mentalmente, esto le da como resultado 93 puntos, pero uno de los investigadores le dice que hace falta el 17 y empieza desde el 93 y sigue contando 94, 95, 96, 97, 98, 99, pero vuelve a empezar 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, y pierde la cuenta. Un investigador le sugiere que haga rayas, cuente con los dedos o como quiera, pero no los utiliza y vuelve a contar, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, hasta el 110. Los investigadores al no ver seguridad en la respuesta, le preguntan cuánto iba hasta aquí (señala el bolo 23), el estudiante responde 93 y expresa “93 y 17, una suma” y realiza la suma numérica obteniendo como respuesta 110, lo cual es correcto.

En la pregunta S1T2P1 se trabaja en el contexto del juego de boliche pero no directamente con los datos proporcionados por la experimentación que tuvo el estudiante, sino con una tercera persona que realiza la acción (Juan, Karla, Ana y Tomás). El estudiante, empleando la estrategia de conteo a partir del primer sumando, empieza a realizar la suma de los puntos que indica cada uno de los últimos tres bolos (23, 30, 40), es decir, que inicia con 23 y cuenta hacia adelante añadiendo cada uno de los números indicados en los dos últimos bolos (30 y 40). En esta primera parte, el estudiante emplea una representación verbal informal, ya que enuncia en voz alta el conteo que realiza.

Una vez finalizado el conteo de los números 23, 30 y 40 el estudiante obtiene como resultado 93, sin embargo, no se había percatado de que le faltó contar el bolo con el número 17 en su etiqueta. Para realizar la adición de lo que llevaba (93) y 17 del bolo faltante, el estudiante utiliza una representación simbólica numérica (ver ilustración 9).

Lo anterior, pone de manifiesto el uso de diferentes estrategias por parte del estudiante en procura de dar solución a problemas que plantean interrogantes, en este caso, de problemas de cambio canónicos de la forma $a+b=?$, ya que el número 17 realiza una modificación aditiva al 93 que da como resultado 110, tal como se muestra en la ilustración 9.

Ilustración 9. Representación simbólica numérica en S1T2P1

$$\begin{array}{r} 1 \\ 193 \\ + 17 \\ \hline 210 \end{array}$$

Antes de realizar las preguntas posteriores a S1T2P1, el estudiante debió completar alguna información, donde se requería conocer el total de puntos de cada uno de los personajes (Ana, Karla, Juan y Tomas) que aparece en la ilustración 10, haciendo énfasis en que se trabaja la categoría de cambio al realizar los puntajes que cada personaje hace.

Para diligenciar la información anterior, el estudiante utiliza la misma representación y estrategia para realizar el cálculo del total de puntos de cada uno de los personajes. El estudiante, emplea la representación simbólica numérica como se evidencia en la ilustración 11, y se vale de la estrategia de conteo a partir del sumando mayor. Sin embargo, es importante mencionar que el estudiante identificó los números con una sola cifra en cada uno de los casos (cada uno de los personajes) y ejecutó la suma con el mayor de los sumandos mentalmente; luego, apoyándose en la representación simbólica ejecuta el algoritmo de suma entre los sumandos con más de una cifra.

Cabe resaltar, que a partir de la expresión “total de puntos” el estudiante infiere que se trata de una suma en un problema de cambio entre los puntos de las etiquetas que se encuentran en los bolos, que se indicaba para cada casos, además siempre tuvo presente la utilización de los bolos con las etiquetas de los números que aparecían en cada ilustración de la tabla. Este último aspecto de “recrear” la imagen con los bolos en cada caso de la tabla con el material manipulativo, ayudó al estudiante a tener presente las cantidades involucradas en cada problema.

Ilustración 10. Resultados tabla de personajes en S1T2

 Karla	 Total de puntos <u>62 puntos</u>
 Javier	 Total de puntos <u>74 puntos</u>
 Ana	 Total de puntos <u>82 puntos</u>
 Tomás	 Total de puntos <u>99 puntos</u>

Para diligenciar la información anterior, el estudiante utiliza la misma representación y estrategia para realizar el cálculo del total de puntos de cada uno de los personajes. El estudiante, emplea la representación simbólica numérica como se evidencia en la ilustración 11 porque realiza la adición de manera directa, y se vale de la estrategia de conteo a partir del sumando mayor, realizando el conteo desde el sumando mayor y añadiendo el otro sumando. Sin embargo, es importante mencionar que el estudiante identificó los números con una sola cifra en cada uno de los casos (cada uno de los personajes) y ejecutó la suma con el mayor de los sumandos mentalmente; luego, apoyándose en la representación simbólica ejecuta el algoritmo de suma entre los sumandos con más de una cifra.

Ilustración 11. Representación simbólica numérica para tabla de personajes en S1T2

$$\begin{array}{r}
 49 \\
 +13 \\
 \hline
 62
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 25 \\
 +27 \\
 \hline
 49 \\
 +32 \\
 \hline
 81
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 40 \\
 +25 \\
 \hline
 65 \\
 +27 \\
 \hline
 92
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 42 \\
 +23 \\
 \hline
 65 \\
 +25 \\
 \hline
 90
 \end{array}$$

(P2) **Pregunta 2:** ¿Cuántos puntos en total hicieron Ana y Karla?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 2 pregunta 2 (S1T2P2): El estudiante observa la tabla que ha llenado anteriormente y suma mentalmente el puntaje de Ana (82 puntos) y el de Karla (61 puntos) que da como resultado 143 puntos, pero al equivocarse en la realización del puntaje de Karla (era 62 puntos, no 61 puntos), la respuesta que el estudiante determina es incorrecta porque entre Karla y Ana suman realmente 144 puntos.

(P3) **Pregunta 3:** ¿Cuántos puntos en total hicieron Juan y sus amigos?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 2 pregunta 3 (S1T2P3): El estudiante observa la tabla que ha llenado anteriormente y suma por medio del algoritmo de adición el puntaje de Juan (110 puntos), de Javier (74 puntos), de Tomás (99 puntos), de Ana (82 puntos) y de Karla (61 puntos) que da como resultado 426 puntos. Por la misma razón de S1T2P2, el estudiante da una respuesta incorrecta puesto que realmente la respuesta correcta es 427 puntos.

En las respuestas S1T2P2 y S1T2P3, el estudiante identifica las partes que componen un todo, siendo las partes los puntajes de Ana, Juan, Tomás y Karla, y el todo el total de puntos. El estudiante al realizar lo anterior, pone de manifiesto que reconoce las componentes (partes y un todo) de los problemas de combinación propuestos con la forma $a+b=?$, realizando una ejecución adecuada de la operación de adición, pero al tener un error de cálculo anteriormente en la tabla (puntaje de Karla), los resultados de estas preguntas (S1T2P2 y S1T2P3) no son correctos.

En S1T2P2, el estudiante emplea una representación simbólica verbal formal porque se expresa de manera verbal, pero refiriéndose a la operación correspondiente (en este caso a la adición). Además, utiliza como estrategia contar a partir del primer sumando porque opera los números en la medida que van apareciendo. Así, el estudiante en S1T2P2 identifica, gracias a la tabla que diligenció previamente, el puntaje de Ana (82) y luego el puntaje de Karla (según el estudiante, 61 puntos), cantidades que combina por medio de la adición para establecer finalmente que el puntaje total entre Ana y Karla es de 143 puntos, luego de interpretar que Ana pone una parte de los puntos y Karla la otra parte, de tal manera que entre las dos, hacen “143” puntos.

Para la pregunta S1T2P3, el estudiante emplea una representación simbólica numérica al recurrir al algoritmo de suma para determinar la respuesta a la pregunta. Además, el estudiante se apoya en la estrategia de contar a partir del primer sumando, teniendo en cuenta, que en esta pregunta hay más cantidades (subconjuntos o partes) involucradas puesto que se trata del puntaje de Juan, Karla, Ana, Javier y Tomás. A pesar de haber más partes, que en el problema de la pregunta S1T2P2, el estudiante lleva a cabo el mismo procedimiento que en S1T2P2, pero iniciando a partir del puntaje de Tomás (99), al cual le añade el puntaje de Javier (74); luego, suma el puntaje de Juan (110) y finalmente añade el puntaje que determinó en la pregunta anterior (143 puntaje Ana y Karla). Así, el estudiante reconoce cada una de las partes, subconjuntos que representa cada puntaje para poder determinar un puntaje global (el todo, en el esquema parte-parte-todo) de 426 puntos, lo que es incorrecto, a causa del cálculo errado en el puntaje de Karla. En la ilustración 12 se evidencia el uso de la representación simbólica numérica para responder a S1T2P3.

Ilustración 12. Representación simbólica numérica en S1T2P3

$$\begin{array}{r}
 99 \\
 + 74 \\
 \hline
 173 \\
 + 110 \\
 \hline
 283 \\
 + 143 \\
 \hline
 426
 \end{array}$$

(P4) **Pregunta 4:** Juan y sus amigos, jugaron otra ronda de bolos, igual que la anterior, pero esta vez jugaron por parejas, Juan y Tomás contra Karla y Ana.

Entre Juan y Tomás hicieron 130 puntos. Tomás ganó puntos al derribar estos bolos



. ¿Cuántos puntos hizo Juan?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 2 pregunta 4 (S1T2P4): El estudiante representa los bolos indicados en la pregunta con los bolos suministrados en el juego de

boliche, cuenta mentalmente los dos primeros bolos (23 y 9) que da como resultado 32, luego, le suma a esa cantidad el bolo que hace falta (12) y así obtiene como resultado que Tomás hace 44 puntos. Conociendo el puntaje de Tomás, el estudiante procede a averiguar cuántos puntos hizo Juan, así que escribe el 44, deja un espacio, luego hace una raya y debajo escribe el total de puntos logrado por Juan y Tomás (130 puntos). Empieza a contar mentalmente y dice: “cuánto le falta a 4 para llegar a 10 (cuenta: 5, 6, 7, 8, 9, 10), y cuánto le falta a 4 para llegar a 12(5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)”, esta segunda parte, el estudiante como ya había descontado 10, entonces al 13 que faltaba, le quitó una decena que deja al número en 12, el cual procede a realizar la resta como lo desarrolla en la primera parte. Después de hacer el conteo, escribe el resultado (86) en el espacio que había dejado al comienzo (entre el 44 y la raya). En este sentido, el resultado planteado por el estudiante es correcto.

El estudiante, en la respuesta a S1T2P4, identifica una de las partes (44 puntos de Tomás) al realizar la suma de los bolos derribados por este (23, 9, 12), incluso, de manera implícita el estudiante utiliza la categoría de cambio con incógnita al final, reconociendo las cantidades que iniciales y el cambio que sufren entre ellas. Además, con los datos obtenidos identifica el todo (130 puntos) que se menciona en la pregunta. El estudiante, por medio de la estrategia de sustracción *contar a partir de lo dado*, contando a partir del menor de los números (44) hasta alcanzar el mayor (130), logra llegar a una respuesta (86 puntos) que se refiere a la parte faltante, para lo cual plantea una adición considerando también lo que ha trabajado a lo largo de S1T2, como se evidencia en la ilustración 13.

Ilustración 13. Respuesta del estudiante a S1T2P4



De lo anterior, es importante mencionar que el problema planteado es de combinación con la forma $44 + ? = 130$. El estudiante reconoce una parte (44) y el todo (130), puesto que inicialmente el estudiante propone una adición entre el primer sumando (44) y un segundo sumando que deja en blanco. Seguidamente dibuja la raya horizontal que separa los

sumandos, del total de la suma. Luego expresa: “¿cuánto le falta a 4 para ser 10?, 6. ¿cuánto le falta a 4 para ser 12?, 8” y de esta manera, determina que el segundo sumando que corresponde a la parte a averiguar en el problema es 86, por lo cual por medio de una representación simbólica numérica, obtiene como respuesta correcta que Juan hizo 86 puntos.

Es importante resaltar que para dar respuesta a S1T2P4, el estudiante tuvo que resolver un problema que involucra la categoría semántica de cambio y la categoría semántica de combinación, en la medida en que para hallar el puntaje obtenido por Tomás, el estudiante se enfrenta a un cambio, al tomar cada puntaje obtenido por los bolos en la ilustración del enunciado y partiendo de uno de los bolos, va añadiendo los demás bolos hasta haber sumado cada uno de los puntajes indicados por los bolos. En cuanto a la combinación, el estudiante debió establecer una relación entre los dos puntajes, el de Juan y el puntaje de Tomás como partes en el problema, es decir, el puntaje de Tomás representa una parte y el puntaje de Juan, otra parte.

(P5) **Pregunta 5:** Ahora, es el turno de Karla y Ana. Karla ganó algunos puntos y Ana ganó 43 puntos. Si entre las dos hicieron 125 puntos, ¿cuántos puntos hizo Karla?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 2 pregunta 5 (S1T2P5): El estudiante, a partir del total de puntos entre Karla y Ana (125 puntos) y teniendo en cuenta que Karla ganó 43 puntos de los 125, logra determinar que los puntos que hizo Karla fueron 82 ayudándose de una sustracción para obtener tal respuesta que además es correcta.

Para S1T2P5, el estudiante emplea una representación simbólica numérica como se evidencia en la ilustración 14, porque realiza la operación de manera vertical. Además, el estudiante logra reformular el problema puesto que inicialmente tiene la forma $?+43=125$ y pasa a la forma $125-43=?$ de tal manera que logra obtener como respuesta 82 puntos, luego de efectuar la sustracción entre ambas cantidades (125 y 43).

Ilustración 14. Respuestas a S1T2P5

Ahora, es el turno de Karla y Ana. Karla ganó algunos puntos y Ana ganó 43 puntos. Si entre las dos hicieron 125 puntos, ¿cuántos puntos hizo Karla?

$$\begin{array}{r} 125 \\ - 43 \\ \hline 82 \end{array}$$

Lo anterior, permite notar que el estudiante no tiene mayor dificultad al ejecutar el algoritmo para la sustracción, y a pesar de que inicialmente es un problema de combinación con la incógnita en la cantidad inicial, logra reformular el problema a uno canónico con sustracción, pero teniendo presente que se trata de una combinación identificando una parte como 43 (puntos de Ana), el todo como 125 y la otra parte como la cantidad a averiguar (puntos de Karla). Finalmente, luego de ejecutar el algoritmo, el estudiante determina que la respuesta es 82 que corresponde a los puntos que hizo Karla (una de las partes). Para esto, el estudiante se vale de una representación simbólica numérica, al efectuar el algoritmo de sustracción entre el todo (125) y una de las partes (43), con el fin de averiguar por la otra parte que se pregunta. Al efectuar el algoritmo anterior, el estudiante emplea la estrategia de *contar hacia atrás*, es decir, el estudiante ejecuta la sustracción columna por columna, primero cuenta desde el cinco hasta llegar a tres obteniendo 2 y luego, cuenta desde el doce hasta llegar a 4 obteniendo 8 y así es como consigue 82 como respuesta.

(P6) **Pregunta 6:** Teniendo en cuenta las preguntas 4 y 5 ¿Cuántos puntos hicieron en total Juan, Tomás, Karla y Ana?

Descripción de la respuesta a la situación 1 tarea 2 pregunta 6 (S1T2P6): El estudiante se percató de que la respuesta de la pregunta 4 le proporciona cuántos puntos hicieron Juan y Tomás (130 puntos) de igual forma, la respuesta a la pregunta 5 le dice que Karla y Ana hicieron 125 puntos; con esta información el estudiante infiere que al tratarse del total de puntos de los cuatro, debe realizar una suma entre las cantidades anteriores (130 y 125), por lo cual obtiene como respuesta correcta, 255 puntos.

Se logra evidenciar que el estudiante identifica las cantidades numéricas a operar, además de ejecutar el algoritmo correcto (adición). Para dar respuesta a S1T2P6, el estudiante se apoya en una representación simbólica numérica como se ilustra a continuación, de manera que opera numéricamente la adición.

Ilustración 15. Representación simbólica numérica en S1T2P6

$$\begin{array}{r} 130 \\ + 125 \\ \hline 255 \end{array}$$

Además, el estudiante hace uso de una estrategia de conteo a partir del primer sumando cuando ejecuta el algoritmo de la suma, es decir, suma las dos unidades, las dos decenas y las dos centenas (columna por columna), pero partiendo del primer número que aparece en la suma (130). Es importante mencionar que el estudiante logra identificar las dos partes (130 y 125) que se combinan para establecer un todo (255), en este caso identifica el puntaje de cada pareja (Juan y Tomás; Karla y Ana) y los combina por medio de la adición para conocer el puntaje total de los cuatro personajes, determinando como respuesta 255 puntos.

Cabe resaltar, que al tratarse de un problema aritmético con la categoría de combinación de forma canónica, es decir, cuya proposición tiene la forma $a+b=?$, la pregunta S1T2P6 no presenta mayor dificultad para el estudiante puesto que la información de las dos partes a combinar para obtener un todo son suministradas. En esta parte, el estudiante se refiere a Juan y Tomás como un primer equipo y a Karla y Ana como un segundo equipo y al final, entre los dos equipos obtienen en total 225 puntos que corresponden al todo dentro del problema.

Análisis general de la situación 1

De acuerdo con los resultados de la situación 1, se puede afirmar que el propósito de la *tarea 1*, que consistía en que el estudiante explorara situaciones que implicaran resolver problemas aditivos de cambio, haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego, se cumplió puesto que el estudiante, de forma general, logró dar cuenta de un acercamiento por medio del juego “serpientes y escaleras” hacia problemas de cambio, utilizando diferentes estrategias para dar respuesta a cada problema propuesto en la *tarea 1*. Además, las representaciones que el estudiante empleó como las icónicas manipulativas, las simbólicas verbales (formales e informales) y las simbólicas numéricas estuvieron presentes en cada uno de los intentos del estudiante de abordar cada pregunta y ofrecer una respuesta. Aunque es importante mencionar que las representaciones icónicas manipulativas resultaron de gran ayuda para el estudiante al momento de identificar las cantidades involucradas en cada problema.

Respecto a la *tarea 2*, se puede decir que de manera general se cumplió el propósito de que el estudiante explorara situaciones que implicaran resolver problemas aditivos de combinación, haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego;

puesto que se logró evidenciar en el desarrollo de cada pregunta, que el estudiante identificó las cantidades y las relacionó considerando el esquema parte-parte-todo, lo que le permitió en algunas preguntas reformular el problema y determinar una respuesta de manera correcta.

Es importante mencionar que tanto la categoría de cambio como la categoría de combinación no presentaron para el estudiante mayor dificultad cuando el problema contenía la forma canónica $a+b=?$ o $a-b=?$, sin embargo el material manipulativo fue esencial para que el estudiante pudiera identificar y relacionar las cantidades involucradas en cada problema. De esta manera, el juego de serpientes y escaleras facilitó al estudiante la comprensión de los problemas que involucran el cambio, puesto que pudo explorar, a través del juego, el cambio que en este caso estaba asignado por los dados y se efectuaba en algunos de los problemas sobre una cantidad inicial que se indicaba por el número de una de las casillas del tablero del juego.

En cuanto a la combinación, utilizando el contexto del juego de boliche, al poder el estudiante manipular los bolos que contenían cada uno una etiqueta con un número, facilitó al estudiante la identificación de cantidades involucradas, aunque al inicio (en la parte introductoria del juego), el estudiante empleó estrategias de representación icónica gráfica (dibujos de palitos), actividad que en la solución de las preguntas no realizó, pero en vez de ello, hizo uso de representaciones simbólicas numéricas ejecutando el algoritmo de adición o el algoritmo de sustracción según cada caso. Sin embargo, la decisión del estudiante de emplear el algoritmo no fue impedimento para dar solución a las preguntas en general de manera correcta, aunque sí se logró evidenciar que las representaciones gráficas le permitían una mejor interpretación de la información, además de permitirle emplear estrategias de modelado directo de manera más efectiva.

3.6.2 Resultados y análisis de resultados de la situación 2

(S2) Situación 2: ENTREVISTA: 1, 2, 3 Y CONTANDO.

Propósito: Que el estudiante por medio de material manipulativo e ilustraciones, pueda resolver problemas de tipo aditivo de combinación y cambio de manera más sencilla.

(T1) Tarea 1: ORDENO PARA GANAR

Propósito: Que el estudiante resuelva problemas de tipo aditivo de combinación de la forma $a+b=?$ y $a+?=c$ por medio de palos de paleta para facilitar el conteo.

(P1) **Pregunta 1:** Ayuda a Juana y Lucía a completar la siguiente tabla, colocando la cantidad numérica que corresponda a cada dibujo, de acuerdo con la información leída.

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 1 (S2T1P1): El estudiante, por medio de la información dada en el enunciado, organiza los datos en las tablas de acuerdo a los grupos propuestos (personas, frutas, bebidas, etc.). Al tratarse solamente de organizar información, no se presenta dificultad y completa las tablas de manera correcta.

La pregunta S2T1P1 se realiza con el fin de que el estudiante organice la información obtenida en la entrevista presentada al inicio de la tarea y logre identificar las partes de un todo. La identificación de las partes del todo (como conjunto), ayuda a distinguir los subconjuntos (niños, niñas, manzanas, peras, bananas, bombones, gaseosas, jugos, perros, hamburguesas, globos azules, globos blancos) que conforman el conjunto universal (personas, frutas, dulces, bebidas, comidas rápidas, globos). Puesto que la categoría semántica de combinación sigue el esquema de parte-parte-todo, se evidenció que las ilustraciones contenidas en la tabla facilitaron la comprensión del estudiante al identificar subconjuntos de un conjunto como partes que conforman un todo o conjunto universal. Lo anterior, ayuda al estudiante a responder de manera más sencilla las preguntas siguientes.

(P2) **Pregunta 2:** ¿Cuántas personas en total asistieron a la semana deportiva?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 2 (S2T1P2): El estudiante identifica la información en las tablas que ha completado anteriormente, al leer la pregunta responde lo que dice la tabla con la información sobre personas (34 niños y 45 niñas), pero uno de los investigadores aclara que si escribe la respuesta en términos de niñas y niños, no estaría respondiendo a la pregunta porque esta se refiera a personas en total. Entonces, el estudiante dice que hay que realizar una suma entre los dos números y procede a realizar la adición en forma vertical de $34 + 45 = 79$, con esto concluye que el resultado son 79 personas, contestando correctamente.

(P3) **Pregunta 3:** ¿Cuántos globos había en total en la semana deportiva?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 3 (S2T1P3): El estudiante toma como referencia la pregunta anterior y tiene en cuenta que para resolverla puede realizar una suma entre 45 y 56 que respectivamente corresponden a la cantidad de globos

azules y la cantidad de globos blancos, esto da como resultado 101 globos, la cual es la respuesta esperada.

Las respuestas S2T1P2 y S2T1P3 cuentan con la misma forma semántica de combinación (con esquema parte-parte-todo) y la incógnita está ubicada en el todo ($a+b=?$). Para estas preguntas, la representación que el estudiante utiliza es simbólica numérica porque al identificar las cantidades a operar, realiza las adiciones de manera tradicional (verticalmente), el cual, complementa con la estrategia de contar a partir del sumando mayor (cuenta a partir del sumando mayor desde el 1 hasta haber contado el cardinal que indica el sumando menor).

En S2T1P2, los niños (34 niños) y las niñas (45 niñas) representan las partes y el total de personas (79 personas) representan el todo y en S2T1P3, los globos azules (45) y los globos blancos (56) representan las partes y el total de globos (101) representa el todo. En ambos casos, el estudiante identifica correctamente los elementos (parte-parte-todo) que hacen parte de la combinación y, emplea tanto la misma representación como la misma estrategia de conteo para resolver las preguntas.

Se logra identificar que las ilustraciones resultan de gran ayuda para el estudiante al momento de tener presente las cantidades involucradas en cada pregunta y la tabla proporciona una organización de la información que le permite comprender lo que se pregunta en cada problema. De esta manera, el estudiante una vez ha identificado la información diligenciada en cada tabla y atendiendo a lo que se pregunta, realiza la combinación entre conjuntos. Sin embargo, cabe mencionar que en un momento determinado, el estudiante en vez de referirse a niños y niñas en la tabla de personas, hizo referencia a futbolistas y porristas en relación con los atuendos; en ese momento tuvo que intervenir uno de los investigadores para orientar al estudiante hacia el hecho de que se trataba de un conjunto de personas del cual hacían parte niños y niñas.

(P4) **Pregunta 4:** En el campeonato de fútbol, sólo participaron 4 equipos. En el momento de la premiación, entre los cuatro sumaron 34 puntos en total. ¿Cuántos puntos obtuvo el cuarto puesto?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 4 (S2T1P4): El estudiante

lee la pregunta y se dirige a la información suministrada en el contexto, pero confunde el cuarto puesto al que se refiere la pregunta con el grado cuarto que se encuentra en la información; el investigador le pregunta si está seguro, al no estarlo, el estudiante vuelve a leer la pregunta y asegura que el cuarto puesto no se encuentra dentro de la información suministrada en el enunciado de la tarea. Al no saber qué responder, los investigadores deciden realizar una lectura acompañada para lograr que el estudiante entienda qué debe hacer. Al no tener resultados, los investigadores intentan recrear la situación presentada en la pregunta. Para ello, se determina que los dos investigadores y el estudiante representan cada uno de los grados (equipos) mencionados en el enunciado de la pregunta, y se especifica que hay otro equipo, para lo cual, el estudiante menciona a uno de sus amigos como representante del otro equipo. Ahora, se empieza a asignar a cada persona un puesto y que el estudiante mencione cuántos puntos tiene, pero al intentar dar el puntaje, el estudiante sigue confundiendo los grados con los puestos (grado tercero con tercer puesto), por eso, los investigadores hacen que el estudiante vuelva y lea la pregunta, la entienda y ubique bien los puntos que cada puesto ganó, al hacer esto, el estudiante logra identificar los puntajes de cada puesto. Al realizar lo anterior, se hace énfasis en los puntajes de cada equipo (representados por los investigadores y el estudiante) para que el estudiante los tenga presente. Luego, los investigadores le preguntan ¿cuántos puntos tenemos entre los tres? y el estudiante responde que hay que hacer una suma pero no sabe cómo plantearla, así que los investigadores repiten los puntajes y el estudiante utiliza los palos de paleta (solo estaban ahí por si el estudiante decide usarlos) para representar las cantidades (7, 9, 13) que se requieren para realizar la operación que da como resultado 29 puntos. Luego, al preguntarle ¿cuántos puntos hizo el cuarto puesto?, el estudiante realiza un conteo mental a partir del 29 hasta el 34, pero duda de su respuesta, así que decide volver a utilizar los palos de paleta contando desde el 30 hasta el 34 (suponiendo que cada palo corresponde a un número) y da como respuesta que el cuarto puesto obtuvo 5 puntos. La respuesta que da el estudiante es correcta.

Para llegar a la respuesta de S2T1P4, el estudiante tiene mucha dificultad para identificar, según la información proporcionada, los puntos que cada equipo participante tiene, por esto, se debe realizar una lectura acompañada y utilizar diferentes estrategias para que el estudiante comprenda el enunciado. Cuando se logra esto, se procede a hacer que el estudiante entienda qué se le está preguntando y así, obtener una respuesta a dicha pregunta.

Al estudiante se le dificulta reconocer la incógnita (parte) y cómo hallar la otra parte, lo que sí identifica es el todo dentro de la pregunta. En este caso, para identificar la parte faltante, el estudiante debe realizar primero una suma de los puntos que brinda el contexto (29 puntos), así, se identifica la parte dada y el todo está dado en la pregunta (34 puntos). Con esto, el estudiante puede hallar la parte faltante, la cual causa dificultad resolverla a través de de adición o sustracción como lo había venido realizando en las preguntas anteriores, por eso, el estudiante utiliza una representación icónica manipulativa por medio de palos de paleta para representar, en primera instancia, los conjuntos de números que indican los puntajes de los equipos de fútbol y para contar el total utiliza la estrategia de contar físicamente, porque cuenta de manera física los conjuntos anteriores.

Con los resultados obtenidos anteriormente, el estudiante utiliza la estrategia de contar a partir de lo dado ya que empieza a contar desde el 29 hasta llegar al 34, y realiza una representación icónica manipulativa por medio de palos de paletas como se evidencia en la ilustración 16, de los números que faltan para llegar hasta 34 puntos.

Ilustración 16. Representación de los puntajes de los equipos de fútbol de S2T1P4



(P5) **Pregunta 5:** ¿Cuántas personas en total participaron en el juego de los bolos?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 5 (S2T1P5): El estudiante se va a la información del contexto ubicando los datos (13 niñas y 6 niños). Como se le pregunta por el total de personas que participaron en el juego de los bolos, realiza una suma (como ya tiene la experiencia de las respuestas anteriores, sabe cómo resolver este tipo de preguntas) y cuenta 14, 15, 16, 17, 18, 19, dando como respuesta que 19 personas participaron en el juego de los bolos. La respuesta es correcta

La pregunta S2T1P5 al tener la misma estructura de S2T1P2 y S2T1P3, se le facilita al estudiante la forma de resolverla, ya que identifica las partes (13 niñas y 6 niños) del todo (19 personas). Para llegar a este resultado, el estudiante por medio del conteo a partir del sumando mayor (comienza por el 13 como un cero relativo y agrega 6) y utilizando la representación verbal informal, realiza un conteo desde el 14 hasta el 19, mencionando cada dígito en voz alta.

(P6) **Pregunta 6:** ¿Cuántas personas en total participaron en los juegos de bolos y ajedrez?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 6 (S2T1P6): El estudiante toma como referencia la respuesta de la pregunta S2T1P5 (19 personas) e identifica las personas que jugaron en ajedrez (45 personas), luego menciona “cuánto es 45 más 19” y pregunta a los investigadores si hay que realizar una suma, los investigadores le responde con la misma pregunta y él determina que sí. Luego el estudiante procede a realizar la suma vertical $45 + 19$, que da como resultado 64 personas. La responde correctamente

La pregunta S2T1P6 tiene la forma parte-parte-todo, siendo el interrogante el todo, por lo tanto, como el estudiante ya ha manejado preguntas de la misma forma, se le facilita identificar las dos partes (19 y 45) que le permiten hallar el todo (64). Para esto, el estudiante utiliza una representación simbólica numérica realizando la suma de forma vertical colocando como primer sumando el número 45 y después el 19, para continuar realizando dicha suma con la estrategia de contar a partir del sumando mayor, en este caso a 9 le suma 5 y a 4 le suma 1.

(P7) **Pregunta 7:** En el juego de ajedrez participaron 79 personas. Si 47 personas ganaron, ¿cuántas personas perdieron en el juego?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 7 (S2T1P7): El estudiante lee la pregunta, pero no entiende que tiene que hacer con los datos que se proporcionan. Uno de los investigadores le explica haciendo lectura nuevamente del enunciado de la pregunta, mencionando que en total hubo 79 participantes en el juego de ajedrez y que si ganaron el juego 47 personas, entonces cuántas personas perdieron en el juego.

A pesar de los esfuerzos de los investigadores explicando de diferentes maneras la pregunta (repitiendo la pregunta varias veces y representando las cantidades con palos de paletas), el estudiante no responde a la pregunta S2T1P7.

A pesar de no dar respuesta a S2T1P7, el estudiante trata de utilizar representaciones icónicas manipulativas apoyado en los palos de paleta para representar cada una de las cantidades. Además, emplea como estrategia el modelado directo contando todo con modelos, representando el conjunto indicado por el primer sumando y posteriormente empieza a añadir el segundo sumando.

El estudiante pierde la concentración y el interés en la pregunta que se desarrolla por el ambiente escolar del momento, puesto que se desarrollaría una actividad recreativa minutos posteriores, así que presta más atención a la organización de dicha actividad que al problema que está resolviendo, aun así, decide intentar dar respuesta a la pregunta 8 (S2T1P8). Además de que el estudiante se distrae con el ambiente escolar y por el intento de acabar rápido para ser partícipes de dicha actividad, realiza lo mismo que ha hecho con las preguntas anteriores, toma ambas cantidades (79 y 17) como si fueran las partes del todo y las opera, como se muestra en la ilustración 17, pero al indagar porque realizó lo anterior, el estudiante se cierra en que no sabe cómo realizarla y continúa con la siguiente pregunta.

Ilustración 17. Intento de respuesta de S2T2P7

$$\begin{array}{r} 1 \\ 79 \\ + 17 \\ \hline 126 \end{array}$$

(P8) **Pregunta 8:** ¿Cuántas frutas se vendieron en total?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 1 pregunta 8 (S2T1P8): El estudiante, a partir de la información que diligenció en las tablas con ilustraciones, información proporcionada a través del enunciado que contextualiza al estudiante al inicio de la tarea 1 (S2T1), no presenta mayor dificultad al dar respuesta a la pregunta (S2T1P8), puesto que gracias a la tabla (con el nombre de frutas) que diligenció previamente, identificando las

partes gracias a las ilustraciones, determina que al tratarse de frutas y a que en la entrevista se contaron 34 manzanas y 56 peras, entonces en total habían 90 frutas, luego de efectuar la suma entre las cantidades (34 y 56). Respuesta correcta.

El estudiante, al tratarse de un problema aritmético con la categoría de combinación de forma canónica ($34+56=?$), no presenta mayor dificultad para identificar las partes que componen el todo y determinar una respuesta. Efectúa de manera correcta la combinación entre las dos cantidades por medio del algoritmo de adición, que realiza de manera vertical, para lo cual, emplea una representación simbólica numérica (representa las cantidades numéricamente para realizar la adición). Es de resaltar que de nuevo, las ilustraciones ayudaron al estudiante en la identificación de las cantidades involucradas en el problema y facilitaron la comprensión de la pregunta que se realizó.

(S2) Situación 2: ENTREVISTA: 1, 2, 3 Y CONTANDO.

Propósito: Que el estudiante por medio de material manipulativo e ilustraciones, pueda resolver problemas de tipo aditivo de combinación y cambio de manera más sencilla.

(T2) Tarea 2: ¡DESCUIDO TERRIBLE!

Propósito: Que el estudiante resuelva problemas de tipo aditivo de cambio de la forma $a-?=c$ y $a-b=?$ por medio de palos de paleta para facilitar el conteo.

(P1) Pregunta 1: Al terminar la jornada deportiva, se explotaron 15 globos azules.
¿Cuántos globos azules quedaron?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 2 pregunta 1 (S2T2P1): El estudiante se ubica en la información del contexto para saber cuántos globos azules habían, de ahí, empieza a contar de forma descendente a partir del total de globos así: 45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28 y dice que son 28 globos, uno de los investigadores le pregunta ¿y por qué 28 globos?, a lo que responde que es porque cree que son 28 y vuelve a contar realizando lo mismo que hizo antes (contar descendentemente desde 45 hasta haber disminuido 15 números). El estudiante realiza el conteo hacia atrás varias veces para asegurarse de la respuesta, finalmente responde correctamente a la pregunta afirmando que quedaron 30 globos azules.

Para dar respuesta a S2T2P1, el estudiante inicialmente emplea la estrategia de contar hacia atrás a partir de la cantidad mayor (45), tantos pasos (números) como indique la cantidad menor (15). Sin embargo, al no realizar una representación icónica manipulativa o icónica gráfica, el estudiante se equivoca en el conteo hacia atrás, puesto que lo hace de manera mental con representaciones simbólicas verbales.

Es importante mencionar, que en algún momento el estudiante realizó el conteo hacia adelante, a partir de 45 aumentando 15 pasos, pero se percató de ello e inmediatamente inició de nuevo con el conteo hacia atrás, teniendo en cuenta que de 45 globos, 15 se habían explotado. El estudiante argumentó que como se explotaron 15 globos, había que quitar 15, por eso realizó el conteo hacia atrás.

Para estar seguro de la respuesta, en vista de que uno de los investigadores pregunta si esta es correcta, el estudiante recurre a una representación simbólica numérica y efectúa la sustracción entre las cantidades involucradas en el problema (45 y 15), a lo que obtiene como resultado 30 (globos azules que quedaron).

De esta manera, se evidencia que el estudiante desde un inicio tuvo presente que debía sustraer de una cantidad inicial (45) una segunda cantidad (el cambio, 15) para poder determinar la respuesta a la pregunta (S2T2P1). Por tal razón, el estudiante no presentó mayor complicación para resolver el problema relacionado con la categoría de cambio involucrando sustracción con la forma $45-15=?$, porque logró identificar tanto la cantidad inicial, como el cambio para poder determinar la cantidad final. Sin embargo, el conteo hacia atrás que realizó de manera mental, tuvo que repetirlo varias veces porque perdía la concentración y a pesar de que contaba con material auxiliar (palos de paleta) para representar las cantidades y efectuar el cálculo de manera más simple, no utilizó dicho material.

(P2) **Pregunta 2:** Juana y Lucía contaron 79 asistentes a la jornada deportiva, pero el profesor les dijo que eran 19 asistentes menos. ¿Cuántos asistentes participaron en la jornada deportiva?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 2 pregunta 2 (S2T2P2): El estudiante lee la pregunta y se percata que se encuentra la palabra *menos*, por lo cual asume que debe realizar una resta y procede a realizar la sustracción de forma vertical entre 79 y 19, que da como resultado acertado 60 asistentes.

(P3) **Pregunta 3:** A los jugos que ellas contaron; el profesor les dijo que eran 24 jugos menos. ¿Cuántos jugos había en realidad?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 2 pregunta 3 (S2T2P3): El estudiante lee la pregunta y se vuelve a percatar que en el enunciado se encuentra la palabra *menos*, y asocia dicha palabra con la sustracción, la cual realiza de forma vertical operando la cantidad de jugos que menciona el enunciado introductorio de la tarea 2 (78 jugos) con la cantidad que se menciona en la pregunta 3 (24 jugos), que da como resultado correcto 54 jugos.

Las preguntas S2T2P2 y S2T2P3 tienen la misma forma semántica, ambas preguntas son de la forma $a - b = ?$, dada la cantidad inicial y el cambio (las cuales no presenta dificultad en identificar), se debe averiguar la cantidad final. En ambas preguntas, el estudiante utiliza una representación simbólica numérica al plantear la sustracción entre dos cantidades. Además, en el momento de realizar dicha operación, utiliza como estrategia contar a partir de lo dado porque parte del número más pequeño y cuenta hacia adelante hasta llegar al número mayor, por ejemplo: ¿cuánto le falta a 4 para llegar a 8?, cuenta 5, 6, 7, 8 y concluye que faltan 4.

En S2T2P2, 79 asistentes es la cantidad inicial y 19 es el cambio con el cual se realiza la sustracción que da como resultado 60 asistentes. En S2T2P3, la cantidad inicial hace referencia a los 78 jugos que ofrece el enunciado introductorio de la tarea 2 y el cambio hace referencia a los 24 jugos menos que indica la pregunta, realizando la sustracción entre las cantidades involucradas en la pregunta (78 y 24) el estudiante obtiene como resultado 54 jugos.

Ante la respuesta del estudiante asociando la palabra “menos” con la sustracción, la intervención por parte de los investigadores estuvo encaminada a que se diera una respuesta verbal de por qué realizaba dicha operación, así se estaría ratificando que su razonamiento no fuera solo por la asociación de la palabra sino porque entendió el problema de manera clara, pero la respuesta del estudiante fue: “es una resta porque ahí dice menos” y se limitó a resolverla de manera sistemática. Por esta razón, se comparte la posición de Castro, Rico & Castro (1995) al mencionar que frecuentemente los estudiantes no comprenden o reflexionan sobre problemas de tipo aditivo, por el contrario, se limitan a realizar operaciones ligadas a palabras que indiquen lo que se debe realizar.

(P4) **Pregunta 4:** En la encuesta se contaron 24 hamburguesas y el profesor les dijo que se debían descontar 15. ¿Cuántas hamburguesas quedaron?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 2 pregunta 4 (S2T2P4): El estudiante lee el enunciado y asocia la palabra descontar con una resta, ya que eso era lo que había realizado con las preguntas anteriores, pero al preguntarle (los investigadores) si está seguro que es menos, responde con ¿una suma? pero al final, realiza una resta de forma vertical. En el momento de resolver la operación, el estudiante la resuelve incorrectamente porque plantea tomar el menor de los números y sustraer el mayor, en este caso no es posible hacer eso porque no se puede sustraer 5 de 4.

En la pregunta S2T2P4 se propone un problema aritmético con la categoría semántica de cambio y la forma $24-15=?$, donde se evidencia que el estudiante identifica la cantidad inicial (24 hamburguesas) y el cambio (15), junto con la operación que se debe realizar (sustracción), a partir de lo que infiere con la palabra *descontar* que aparece en el enunciado. Es decir, que el estudiante relaciona dicha palabra con la operación de sustracción. Sin embargo, el estudiante al tratar de resolver la operación, inicialmente plantea la operación de manera errada, puesto que expresa que: “a 15 hay que descontarle 24” de lo que se puede mencionar que el estudiante toma el número mayor, sin importar la posición (minuyendo o sustraendo), y trata de sustraerlo del número menor ($15-24$). Para este primer planteamiento de sustracción, el estudiante emplea una representación verbal formal con ayuda de la estrategia de contar hacia atrás, pero partiendo de 15 hasta pretender llegar a 24, lo cual es

errado y lleva posteriormente a que el estudiante se percate de ello al no poder realizar el conteo.

En un segundo intento, el estudiante plantea la misma operación (sustracción) entre las cantidades involucradas en el enunciado (24 y 15), pero esta vez, el estudiante utiliza una representación simbólica numérica como se logra evidenciar en la ilustración 18, además, en el momento de realizar dicha operación (así sea de manera incorrecta), utiliza como estrategia contar a partir de lo dado, contando a partir del menor de los números hasta alcanzar el mayor. Sin embargo, se evidencia que el estudiante ejecuta el algoritmo de manera incorrecta, al mencionar que “cinco para llegar a cuatro, uno; y uno para llegar a dos, uno” por lo que obtiene 11 como resultado de la operación.

Ilustración 18. Representación simbólica numérica en S2T2P4

$$\begin{array}{r} 24 \\ -15 \\ \hline 11 \end{array}$$

En esta pregunta sucede algo similar a la pregunta anterior, el estudiante se limita a buscar una palabra (descontar) que relaciona a una operación (sustracción) la cual debe realizar, sin importar qué representa cada cantidad dentro del enunciado. En la socialización con el estudiante, este cuenta a partir del 15 hasta el 24 y responde que quedaron 9, este razonamiento pone de manifiesto que el estudiante es consciente de lo que hace y se requiere, pero la ejecución del algoritmo lo confunde.

(P5) **Pregunta 5:** El profesor dijo que al inicio había 100 globos blancos y el viento se llevó algunos antes de que Juana y Lucía los contaran. ¿Cuántos globos blancos se llevaron el viento?

Descripción de la respuesta a la situación 2 tarea 2 pregunta 5 (S2T2P5): El estudiante, al leer el enunciado de la pregunta (S2T2P5) y teniendo en cuenta la información suministrada al inicio de la tarea 2 (S2T2), plantea la solución de la pregunta por medio de una sustracción, para la cual, identifica las cantidades involucradas (100 y 56); 100 que

aparece en el enunciado de la pregunta y 56 que se suministra a través de la información introductoria de la tarea. Finalmente, el estudiante, luego de efectuar la sustracción erradamente determina como respuesta que 54 globos blancos se llevó el viento, cuando la respuesta correcta es 44 globos blancos.

El estudiante en S2T2P5, emplea una representación simbólica numérica para efectuar la sustracción que planteó inicialmente. Sin embargo, en un comienzo solo identificó las cantidades y expresó que habría que realizar una sustracción para dar respuesta a la pregunta, pero utiliza una disposición de los números errada, pone el menor arriba y el mayor abajo al realizar la sustracción. Sin embargo, se da cuenta del error e invierte el orden de los números, es decir, ubica el número mayor (100) arriba y el número menor (56) abajo para luego efectuar la sustracción correctamente.

Es importante mencionar que el estudiante inicialmente presentó dificultades en la interpretación de la pregunta, pero luego de leer en compañía de uno de los investigadores logra comprender el enunciado.

Al tratarse de un problema aritmético con la categoría de cambio involucrando sustracción, se evidencia que el estudiante aún presenta dificultad con los problemas de cambio que implican sustracción y preguntan justamente por el cambio ($100 - ? = 56$). Sin embargo, reconoce que se efectúa una variación sobre el estado inicial de una cantidad (100) y que se pregunta por la cantidad que implica un cambio sobre la cantidad inicial para que pase a un estado final (56), es decir, que el estudiante reconoce que la incógnita corresponde a una cantidad que hace variar la inicialmente dada (100) hacia un estado final (56), teniendo en cuenta, el hecho de que “habían cien pero como el viento se llevó unos quedaron 56”. Sin embargo, al realizar la operación, se evidencia en la ilustración 19 que la efectúa de manera errada porque hace $10-6=4$ y $10-5=5$, de ahí, es que se origina la respuesta incorrecta.

A pesar de tener a disposición de material manipulativo (palos de paleta) para representar cantidades numéricas, el estudiante decide ejecutar el algoritmo de sustracción directamente sin emplear algún tipo de representación icónica gráfica o manipulativa. Por el contrario, emplea una representación simbólica numérica como se evidencia en la ilustración 19.

Ilustración 19. Operación errada de S2T2P5

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 56 \\ \hline 54 \end{array}$$

Análisis general de la situación 2

En la situación 2 al estar alejada del juego, se proporciona al estudiante material manipulativo para su utilización de la forma que él vea conveniente. De la *tarea 1*, es importante destacar el uso de este tipo de material para la representación de las cantidades en cada problema. Con este recurso se facilitó al estudiante identificar cada elemento que componen los problemas de combinación (parte-parte-todo), aunque se le dificulta cuando se pregunta por una de las partes. Para subsanar lo anterior, se realizó una lectura acompañada durante toda la situación, con el fin de permitir al estudiante un acercamiento más analítico y no solo exploratorio.

Se observan en los resultados que el estudiante obtuvo en la tarea 1 de la situación 2, que opera de manera adecuada los tipos canónicos de combinación pero se le dificulta S2T1P7 al preguntar por una de las partes porque el ambiente escolar en ese momento no era el adecuado para desarrollar la pregunta; y por dar respuesta a esta, el estudiante intenta realizarla de manera similar a las anteriores.

Se evidenció que en la tarea 2 el estudiante prefiere realizar el algoritmo de sustracción empleando una representación simbólica numérica guiándose por las palabras que liga a la operación a realizar, a pesar de disponer material manipulable para la representación de las cantidades involucradas en el problema, lo que le permitiría realizar la operación más simple. De esta manera, cuando no se pregunta por la cantidad final, el estudiante presenta problemas para identificar qué se debe hacer y cómo debe razonar para resolver determinada pregunta.

Por lo tanto, el propósito de la tarea 2, el cual se propone que el estudiante sea capaz de resolver problemas de tipo aditivo de cambio de la forma $a-?=c$ y $a-b=?$, se cumple parcialmente, teniendo en cuenta que el estudiante identifica la cantidad inicial, el cambio y la cantidad final en los problemas aditivos que involucran la categoría semántica de cambio, pero se basa en las palabras como “menos”, “descontar”, “explotar” para inferir el tipo de

operación que debe ejecutar sin realizar algún tipo de razonamiento adicional respecto al problema.

3.6.3 Resultados y análisis de resultados de la situación 3

(S3) Situación 3: KERMES ESCOLAR

Propósito: Que el estudiante pueda resolver problemas de tipo aditivo cambio y combinación.

(T1) Tarea 1: JUGANDO Y COMIENDO RESUELVO PROBLEMAS

Propósito: Que el estudiante pueda resolver problemas de tipo aditivo cambio con la forma $a+?=c$, $?+b=c$ y $?-b=c$ por medio de material manipulativo e ilustraciones que permiten mayor comprensión de dicho problema.

(P1) **Pregunta 1:** La profesora Mariana elaboró 63 manillas de recuerdo para los asistentes en la mañana, y en la tarde hizo más. En total fueron 98 manillas. ¿Cuántas manillas hizo la profesora Mariana en la tarde?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 1 pregunta 1 (S3T1P1): Al estudiante se le proporciona material manipulativo (palos de paletas, billetes didácticos) para que resuelva las preguntas, él elige los billetes didácticos. En el problema, el estudiante identifica las cantidades que debe operar, toma como cantidad de partida el 63 y con los billetes empieza a contar. Con un billete de 5 mil, cuenta 64, 65, 66, 67, 68; toma otro billete de 5 mil, cuenta en la mente y dice 73; realiza lo mismo y dice 78; toma otro de la misma cantidad y dice 83; toma un billete de 2 mil, realiza la cuenta mental y dice 85; luego toma un billete de 10 mil, cuenta mentalmente y dice 95; toma nuevamente un billete de 2 mil y pregunta ¿cuánto dije?, el investigador le responde 95, entonces el estudiante cuenta los 2 mil, otros 2 mil y un billete de mil, y dice “aquí van 98”. El investigador le pregunta si está seguro y él cuenta los billetes que apartó empezando con el billete de 10 mil, sigue con dos de 2 mil (11, 12, 13, 14 mil), continúa con uno de mil (15 mil), sigue con uno de 2 mil (16, 17), toma uno de 5 mil (18, 19, 20, 21), toma uno de 5 mil (26), otro de la misma cantidad (31) y toma el último billete de 5 mil (36). Al finalizar, responde incorrectamente que hizo 36 manillas.

El estudiante elige los billetes porque se siente más familiarizado (puesto que el padre tiene un restaurante y el estudiante ayuda en la atención). También, no emplea la cantidad

que indica el billete completamente, es decir, solo utiliza los números indicados entre las unidades y decenas de mil indicadas en el billete didáctico.

La forma semántica que tiene S3T1P1 es de cambio con incógnita en el cambio ($63 + ? = 98$). El estudiante identifica la cantidad inicial y la final; y emplea empíricamente la estrategia de contar a partir de lo dado desde el 63 hasta el 98, pero en este conteo, el estudiante cuenta un billete de 2 mil de más y no se percató de ello, o sea que en realidad no cuenta hasta el 98 sino hasta el 100. Luego, para concluir cuál es el cambio que sufre la cantidad de manillas que elabora la profesora Mariana, el estudiante cuenta los billetes que ha separado por medio de la estrategia contar a partir del mayor, empezando por el billete de 10 mil hasta haber sumado todos los billetes, no obstante, el estudiante se equivoca de nuevo al contar el primer billete de 5 mil porque cuenta una cantidad menos (da 21 en vez de 22). Lo anterior pone de manifiesto que el estudiante identifica la cantidad inicial, al realizar el conteo a partir de 63, luego cuenta tantos números como necesite hasta llegar a la cantidad final (98), identificando una cantidad que implica un cambio sobre dicha cantidad inicial. De esta manera, determina la respuesta a la pregunta considerando cuántos números hay desde 63 hasta el 98, haciendo uso de los billetes didácticos.

A pesar de los errores cometidos que causan una respuesta incorrecta, el estudiante intenta resolver el problema de manera adecuada, solo que se equivoca en el conteo, aun así, la representación icónica manipulativa que utiliza al emplear los billetes es acertada para su contexto familiar y le facilita resolver el problema.

(P2) **Pregunta 2:** En el puesto de bebidas, Carlos, Andrés y Luis al comenzar la kermés contaron muchas bebidas, se vendieron 109 y quedaron 43. ¿Cuántas bebidas había al inicio de la kermés?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 1 pregunta 2 (S3T1P2): El estudiante al leer la pregunta no comprende que debe realizar (después de leer varias veces la pregunta), así que uno de los investigadores ayuda al estudiante a leer y entender la pregunta por medio de ejemplos sobre su contexto (restaurante del padre). Luego, el estudiante toma los billetes didácticos y pregunta ¿cuento para atrás o cuento para adelante?, el investigador le devuelve la pregunta y le dice ¿por qué vas a contar para atrás

o por qué vas a contar para adelante?, pero el estudiante no responde, así que los investigadores vuelven y leen con el estudiante el enunciado pero fraccionado (resaltando lo que piden y lo que dan) refiriéndose a las cantidades del problema. El estudiante toma un billete de 10 mil y cuenta desde 43 hasta 53, con un billete de mil dice 54, con un billete de 2 mil dice 56, con 7 billetes de mil dice 63, con un billete de 5 mil dice 68, con un billete de 2 mil dice 70, con dos billetes de 5 mil dice 80, con cuatro billetes de 2 mil dice 88, con dos billete de 5 mil dice 98, con un billete de 2 mil dice 100, con dos billetes de 5 mil dice 110, pero como en la pregunta dice 109, entonces decide volver a contar, pero esta vez empieza con los billetes de 10 mil, contando de diez en diez dice 80, continúa con los billetes de 5 mil (4 billetes) y dice 100, prosigue con los billetes de 2 mil (4 billetes) y dice 108, por último, toma un billete de mil para completar los 109 que es la cantidad de bebidas que se vendieron. El investigador al ver que el estudiante no sabe qué hacer con esa cantidad, vuelve a explicarle la pregunta y el estudiante opta por escribir en los palos de paletas números más grandes que en los billetes no se encontraban (100, 50, 20) y de igual forma, los números pequeños, para facilitar aún más el conteo. Con lo anterior, el estudiante representa las cantidades dadas en el problema (109 y 43), pero sigue sin saber que tiene que realizar, entonces, el investigador pone un ejemplo más sencillo pero que debe realizar el mismo ejercicio, con esto, el estudiante dice que “como los dos números están separados, hay volverlos a unir”, y empieza a sumar mentalmente a partir del 109 hasta 140, pero tiene una respuesta errada porque la respuesta correcta es 152.

En la pregunta S3T1P2, el estudiante tiene mucha dificultad en distinguir qué se está preguntando, a pesar de los diferentes ejemplos que se ofrecen para su explicación, pero al final se da un ejemplo más sencillo con ayuda de los billetes: “*tengo una plata en el bolsillo, si saco 7 mil y en el bolsillo quedaron 3 mil, entonces ¿cuánta plata tenía en el bolsillo?*” a lo que el estudiante responde acertadamente 10 mil. El ejemplo, permitió al estudiante identificar qué operación realizar para resolver S3T1P2.

El estudiante utiliza diferentes representaciones icónicas manipulativas, empezando por los billetes didácticos, los cuales inicialmente le obstaculizaron el conteo e hicieron más difícil la representación de las cantidades mencionadas en el problema. Al ver que esta representación no funciona, utiliza los palos de paletas (ver ilustración 20) con números que son más fáciles de contar para él, así, logra representar las cantidades que se presentan en el

problema, sin embargo, el estudiante tiene un problema en el conteo que ocasionan una respuesta incorrecta.

Ilustración 20. Representación icónica manipulativa de la pregunta S3T1P2



Respecto a la categoría semántica del problema (cambio), el estudiante identifica la cantidad final (43) y el cambio (109), pero se le dificulta reformular el problema con la forma $109+43=?$ para hallar la cantidad inicial (152), aun así, plantea después de varios intentos una posible solución. Con las representaciones utilizadas, el estudiante cuenta físicamente los objetos que representan las cantidades proporcionadas en el enunciado del problema, pero cuando va a realizar la operación utiliza como estrategia contar a partir del sumando mayor, es decir, empieza desde 109 y a medida que añade palos de paletas con números, cuenta de forma ascendente. Así, una vez el estudiante ha realizado la representación física de las cantidades (109 y 43), menciona que: “como los números (conjuntos representados) están separados, entonces hay que volverlos a unir para saber cuántas bebidas había al comienzo”. De esta manera, el estudiante por medio de una adición determina la respuesta del problema, lo que finalmente indica que el estudiante replanteó el problema con la forma $?-109=43$ a un problema con la forma $109+43=?$.

(P3) Pregunta 3: En el juego de tiro al pato que Daniel, Juan y Marcela organizaron; Ángel decidió jugar. Al final del juego, Ángel realizó dos lanzamientos. Si en el segundo tiro hizo 67 puntos y acumuló un puntaje de 145 puntos. ¿Cuántos puntos hizo Ángel en el primer tiro?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 1 pregunta 3 (S3T1P3): El estudiante

inicialmente identifica las cantidades en el enunciado del problema (67 y 145) para luego hacer una adición entre las cantidades realizando el algoritmo en forma vertical. Sin embargo, el estudiante decide usar el material manipulativo suministrado, particularmente los billetes didácticos y realiza una suma teniendo en cuenta 67 como cantidad inicial y 145 la cantidad a la cual debería llegar. Para ello hace uso de los billetes para contar a partir de 67 hasta que llegar a 145 y, finalmente vuelve y cuenta los billetes que utilizó para la cuenta, obteniendo como respuesta acertada a la pregunta, 78 puntos.

Para responder a S3T1P3, el estudiante emplea la representación icónica manipulativa para simbolizar la cantidad a averiguar en el problema de cambio que se plantea con la forma $?+67=145$. Para este caso, el estudiante identifica como cantidad inicial el 67, puesto que apoyado en la estrategia de contar a partir de lo dado, contando a partir del menor (67), realiza un conteo de los números hasta llegar al mayor (145) que identificaría como cantidad final. Para lo anterior, el estudiante inicia el conteo en 67 y empieza a añadir numerales ascendentemente hasta llegar al número mayor (145). De esta manera, se puede notar que el estudiante realiza un replanteamiento del problema con la forma $67+?=145$ al asumir 67 como una cantidad inicial, el 145 como cantidad final y la incógnita por averiguar correspondería al cambio sobre la cantidad inicial. De esta forma, el estudiante con ayuda de los billetes didácticos, realiza el conteo desde 67 hasta 145; asumiendo el 67 como cero relativo toma un billete de 10 mil y cuenta “68,69,...,77”, luego toma un billete de 5 mil y cuenta “78,79,...,82” y así lo hace hasta llegar a 145, donde suma los billetes que fue tomando para el conteo y obtiene como respuesta 78.

Se evidencia en el procedimiento del estudiante para dar respuesta a la pregunta, que el material proporcionado (billetes didácticos) resultó de gran ayuda para el estudiante al momento de realizar el conteo, puesto que le permitió tener presente las cantidades involucradas en el problema y determinar de manera más sencilla la respuesta a la pregunta. Cabe resaltar que el estudiante se familiarizó con los billetes didácticos puesto que su padre posee un restaurante donde el estudiante ayuda con la atención, lo que hace que maneje dinero y se sienta cómodo con la utilización de los billetes didácticos.

(P4) **Pregunta 4:** Elisa se compró un jugo y una porción de pizza. Le sobraron \$800. ¿Cuánto dinero tenía Elisa antes de comprar el jugo y la pizza?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 1 pregunta 4 (S3T1P4): El estudiante realiza la representación de la cantidad que corresponde al precio de la pizza (2500), información que el estudiante encuentra en la parte introductoria a la tarea 1 (S3T1) empleando el material manipulable con monedas didácticas de 500 y 200 pesos. Posteriormente se percata de que falta el precio del jugo, para lo cual, vuelve a la información inicial de la tarea e identifica que el precio del jugo es de 700 y recurre al material manipulativo para representar la cantidad. Ya representadas las dos cantidades, el estudiante realiza la unión de los dos conjuntos y cuenta todo lo reunido obteniendo como resultado 3200. Luego, el estudiante vuelve a la pregunta (S3T1P4) e inicia el análisis sobre los 800 que aparecen en el enunciado teniendo en cuenta los 3200 que obtuvo anteriormente. El estudiante representa los 800 con el material manipulativo y al tener los dos conjuntos (3200 y 800) decide juntarlos y realiza la suma de las cantidades, dando como respuesta correcta a la pregunta 4000 pesos.

El estudiante, para responder a S3T1P4, emplea la representación icónica manipulativa para representar las cantidades en el problema de tal forma que se le facilita el conteo, para continuar con la estrategia el modelado directo contando todo con modelos, lo que significa que utiliza modelos, en este caso los billetes didácticos, para realizar el conteo.

El problema planteado en S3T1P4 se compone de dos etapas, en la primera el estudiante se enfrenta a un problema de combinación con la forma $2500 + 700 = ?$, en el cual, se debe averiguar el todo (\$3.200) después de operar el valor de la pizza (\$2.500) y el valor del jugo (\$700). En la segunda etapa, el estudiante se enfrenta a un problema aritmético con la categoría semántica de cambio de la forma $? - 3200 = 800$, donde la cantidad inicial (incógnita) corresponde al dinero que inicialmente tendría Elisa y el cambio sería el valor de la pizza más el valor del jugo que previamente el estudiante ha averiguado y que llevaría a la cantidad inicial a un estado final de 800. En S3T1P4, el estudiante no tiene dificultad para determinar el total que se gastó Elisa comprando la pizza y el jugo, pero al momento de preguntarse qué hacer con los 800 que le dieron como devolución para determinar cuánto pagó Elisa, presenta dificultades para saber cómo hacer uso de esa cantidad (800) para obtener la

respuesta. Sin embargo, gracias a la representación que el estudiante realizó de las cantidades con ayuda del material manipulativo, logra responder a la pregunta, puesto que trató el problema como si fuese el tendero en el restaurante del papá.

(P5) **Pregunta 5:** Las mamás de Alberto y José al inicio de la kermés tenían muchos perros calientes, al final de la kermés quedaron 19 perros y se vendieron 84. ¿Cuántos perros calientes había antes de comenzar la kermés?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 1 pregunta 5 (S3T1P5): El estudiante lee la pregunta y representa con los billetes didácticos las cantidades que el problema indica, iniciando con 84 que se refiere a la cantidad que se vendió y terminando con 19 que es la cantidad de perros que quedaron. Como ya había realizado preguntas similares, el estudiante infiere que se deben “reunir” los 19 con los 84, así como hizo en las anteriores preguntas. Así que parte de los 84 y añade billete por billete contando ascendentemente hasta llegar a 103, que obtiene como respuesta correcta.

La respuesta S3T1P5 es basada en los procesos que realizó el estudiante en las preguntas anteriores, por esto, no posee mayor dificultad para resolverla. Por tal motivo, identifica con facilidad el cambio (84) y la cantidad final (19), para hallar por medio de la estrategia contar a partir del sumando mayor la cantidad inicial (103), esto quiere decir que empieza a contar a partir del 84 (lo utiliza como un cero relativo) y añade el 19. Como el estudiante se familiariza bien con los billetes didácticos, los utiliza para realizar una representación icónica manipulativa de las cantidades, que facilitan la adición de ambas (84 y 19).

Como el estudiante se familiariza muy bien con los billetes didácticos, los utiliza para realizar una representación icónica manipulativa de las cantidades, que facilitan la adición de ambas cantidades (84 y 19).

Es importante mencionar que el problema planteado corresponde a un problema de cambio con la forma $? - 84 = 19$. Sin embargo, el estudiante al haber enfrentado problemas con esta misma forma y categoría semántica como en S3T1P2, no tuvo mayor dificultad

considerando el hecho de que en S3T1P2 si presentó complicaciones en la interpretación y resolución de dicho problema.

(S3) Situación 3: KERMES ESCOLAR

Propósito: Que el estudiante pueda resolver problemas de tipo aditivo cambio y combinación.

(T2) Tarea 2: ¿COMBINO O CAMBIO?

Propósito: Que el estudiante identifique y resuelva problemas aditivos de cambio y combinación en una situación planteada.

(P1) Pregunta 1: En la kermés la mamá de Alberto y la mamá de José vendieron 168 empanadas y les quedaron al final de la kermes 52. ¿Cuántas empanadas tenían la mamá de Alberto y la mamá de José al comienzo de la kermés?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 2 pregunta 1 (S3T2P1): El estudiante representa con los billetes didácticos las 52 empanadas que quedaron en la kermes y con los palos de paleta con números, las 168 empanadas que se vendieron. Luego de tenerlas representadas, junta los dos conjuntos para dar como resultado acertado: 220 empanadas.

La pregunta S3T2P1 es de la categoría de cambio y cuenta con la forma $? - 168 = 52$, donde se pregunta por la cantidad inicial. El estudiante identifica las cantidades (el cambio y la cantidad final) y las representa de manera icónica manipulativa por medio de billetes didácticos y palos de paleta con distintos números. Así, al identificar la cantidad que se debe hallar, el estudiante procede a contar todo con modelos, puesto que representa las cantidades numéricas por medio del material didáctico suministrado. Para este caso, el estudiante emplea los billetes didácticos para representar las 52 empanadas que quedaron y al darse cuenta de que el número de empanadas que se vendieron (168) era un número grande y no le alcanzarían los billetes, decidió realizar la representación de 168 por medio de los palos con números.

Una vez el estudiante representa los dos conjuntos (168 y 52), realiza la unión de los dos a partir del conjunto mayor empleando la estrategia de contar a partir del sumando mayor (168) apoyado en el material manipulativo. Para lo cual asume el 168 como cero relativo, lo enuncia pero no lo cuenta; y comienza a añadir el conjunto menor (52) representado con

billetes. De esta manera, el estudiante toma cada uno de los billetes en el conjunto menor (52), por ejemplo un billete de 10 mil y lo agrega al conjunto mayor (168) para lo cual, cuenta: “169, 170,...,179”, luego toma otro billete y sigue el conteo desde 180, así lo hace hasta no tener más billetes en el conjunto menor (52), terminando en 220 que corresponde a la respuesta correcta a la pregunta.

El procedimiento anterior, indica que el estudiante llevó a cabo un replanteamiento del problema inicialmente presentado con la forma $?-168=52$, de manera tal que el problema queda con la forma $168+52=?$, el cual es mucho más simple de solucionar por parte del estudiante, ya que se trata de un problema de cambio con adición y forma canónica. Además, es importante mencionar que en algún momento, se evidenciaron problemas en el conteo, pero no resultaron graves, ya que el estudiante se dio cuenta del error y lo corrigió inmediatamente.

(P2) **Pregunta 2:** Sandra quería comprar unas crispetas, ella tenía 9 monedas de \$500, pero al correr hacia el puesto de comidas se le cayeron algunas monedas. Al llegar a comprar las crispetas, solo tenía \$1000. ¿Cuántas monedas se le cayeron a Sandra?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 2 pregunta 2 (S3T2P2): El estudiante al trabajar con las cantidades, cuenta el valor de las 9 monedas de \$500 en vez de la cantidad de monedas. Al ver esto, los investigadores hacen énfasis en la cantidad de monedas que hay (a lo que se refiere la pregunta), así el estudiante se da cuenta que debe centrarse en la cantidad y separa 9 monedas de \$500, luego cuenta su valor y le da \$4.500. Vuelve a leer la pregunta y se da cuenta de que con los mil que tenía Sandra, no le alcanzaba para las crispetas. El investigador, le hace preguntas sobre el problema como: ¿cuánto tenía cuando llegó?, a lo que el estudiante responde, mil, sigue el investigador, ¿cuántas monedas se le cayeron?, pero no responde. Entonces, el investigador vuelve y le explica para que el estudiante tome la cantidad de monedas y no el valor de ellas. Con esto, el estudiante vuelve y separa las 9 monedas, quita los mil (dos monedas) y cuenta las monedas restantes, que dan por resultado correcto 7 monedas.

El problema propuesto en S1T2P2 corresponde a un problema aritmético con la categoría semántica de cambio y la forma $9-?=2$. A pesar de que el estudiante se confunde

entre la cantidad de monedas y el valor monetario que representan, se realiza un acompañamiento en la lectura y explicación del problema para que el estudiante logre identificar en S3T2P2 la cantidad inicial (9) y la cantidad final (2) en el enunciado de la pregunta, la cual resuelve con éxito a pesar de algunas confusiones.

Para resolver S3T2P2 el estudiante utiliza la representación icónica manipulativa, al emplear las monedas didácticas para representar ambos conjuntos (9 y 2); también hace uso de la estrategia *separar de* porque toma como cantidad inicial las 9 monedas y quita las 2 monedas que representan los mil que quedaron, para llegar a la conclusión de que se cayeron 7 monedas. Es importante resaltar que el estudiante al utilizar la representación icónica manipulativa (monedas didácticas), maneja de manera adecuada y simultánea los dos sentidos: la cantidad y el valor nominal parcial o total de las monedas.

(P3) **Pregunta 3:** Jorge compró una hamburguesa y otra cosa. En total pagó \$12.000. ¿Qué producto compró Jorge además de la hamburguesa?

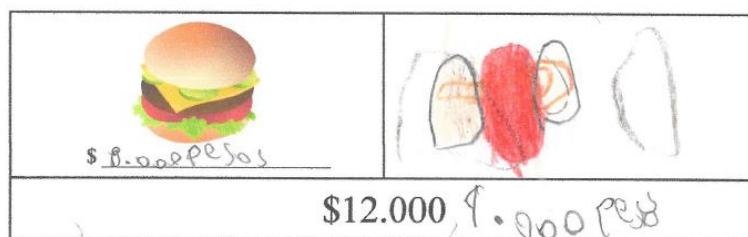
Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 2 pregunta 3 (S3T2P3): El estudiante se dirige a la información introductoria de la tarea 2 e identifica que la hamburguesa cuesta \$8.000 y cuenta 9, 10, 11, 12, y dice: “4, Jorge compró algo de \$4.000” y busca directamente en la información del contexto algo que cueste 4 mil, donde se da cuenta que el perro caliente vale \$4.000. Luego, parte de 8.000 y cuenta “9, 10, 11, 12” y concluye correctamente que es un perro caliente el otro producto que compró Jorge.

En la pregunta S3T2P3, el estudiante identifica bien la parte (8.000) y el todo (12.000) a donde debe llegar, para esto utiliza como estrategia el conteo a partir de lo dado (8.000) para continuar contando hasta el 12, y darse cuenta que la diferencia es de 4.000. Al tener la información que proporciona el contexto, no hace uso de los billetes didácticos, pero utiliza la representación simbólica verbal informal, puesto que explica cómo llegó al resultado por medio del conteo luego de darse cuenta de que la hamburguesa costaba ocho mil y cuenta “9,10,11,12” para determinar que el otro artículo comprado tuvo que costar 4 mil, lo cual es correcto.

A continuación se evidencia por medio de la ilustración 21, el registro de la respuesta del estudiante, donde identifica la parte, el todo y la parte que se pregunta, puesto que S3T2P3 corresponde a un problema aritmético con la categoría semántica de combinación (esquema parte-parte-todo) y forma en la proposición $8000 + ? = 12000$.

Ilustración 21. Respuesta de S3T2P3

Jorge compró una hamburguesa y otra cosa. En total pagó \$12.000. ¿Qué producto compró Jorge además de la hamburguesa? 10 pesos cariente



(P4) **Pregunta 4:** Isabela compró unos jugos y 7 gaseosas para compartir con sus amigos en la kermes. En total, Isabela compró 16 bebidas. ¿Cuántos jugos compró para sus amigos?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 2 pregunta 4 (S3T2P4): El estudiante con ayuda de uno de los investigadores, identifica cuales son los datos que proporciona el problema (7 gaseosas y 16 bebidas) y qué es lo que se está preguntando (por los jugos), al saber esto, el estudiante empieza a contar “8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16” y concluye que compró 9 jugos, pero al escribir la respuesta pone 8 jugos. Luego, el investigador le pregunta ¿si son 8 o 9? y él dice que son 8. Al haber un momento de distracción, el estudiante escribe incorrectamente 8 habiendo dicho que era 9.

En la pregunta S3T2P4, al tratarse de un problema aritmético con la categoría semántica de combinación y forma $? + 7 = 16$, el estudiante identifica una de las partes (7 gaseosas) y el todo (16 bebidas). Para dar respuesta al problema, el estudiante realiza el conteo a partir de lo dado, es decir, cuenta a partir del número menor (7) hasta llegar al número mayor (16), para lo cual menciona que realiza el conteo “8,9,...,16”.

Se logra evidenciar, que el estudiante asume el 7 como cero relativo, por lo cual enuncia el 7 pero no lo cuenta y la cantidad de numerales que hay desde ocho hasta dieciséis

(9 números) corresponde a la respuesta, es decir, corresponde al total de jugos que compró Isabela para sus amigos, respuesta que determina de manera correcta.

Es importante mencionar que el estudiante escribe como respuesta 8, lo que es incorrecto, esto ocurre en un momento de distracción. Además, para esta pregunta, el estudiante utiliza una representación simbólica verbal informal al momento de explicar la forma como realizó el procedimiento para encontrar una respuesta. También, cabe mencionar que el estudiante no emplea el material manipulativo puesto que las cantidades numéricas involucradas en el problema, no son muy grandes y puede manejar el conteo mentalmente. Al finalizar la situación 3 tarea 2 (S3T2), se vuelve a esta pregunta porque es importante retomarla, ya que, el estudiante emplea un procedimiento acertado pero escribe la respuesta errónea, lo que hace conveniente que el estudiante se de cuenta de su equivocación para ser corregida. En ese momento, el estudiante lee de nuevo el problema, realiza el mismo procedimiento que desarrolla anteriormente y esta vez, se concentra en lo que está haciendo, y llega a la conclusión que no fueron 8 jugos sino 9.

(P5) **Pregunta 5:** Natalia compró y se comió 9 empanadas, pero quedo con hambre y compró 5 más. ¿Cuántas empanadas compró en total Natalia?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 2 pregunta 5 (S3T2P5): El estudiante lee la pregunta y asocia la palabra “más” con la adición, así, que realiza un conteo ascendente en voz alta desde el 9 hasta el 14 y concluye correctamente que Natalia se comió 14 empanadas en total.

En S3T2P5, se propone un problema aritmético de la categoría semántica de cambio con la forma canónica $9+5=?$. En este sentido, el estudiante identifica la cantidad inicial (9 empanadas), el cambio (5 más) que sufre dicha cantidad inicial, asociando la palabra “más” con la realización de una suma. Por esto, el estudiante utiliza la estrategia de contar a partir del sumando mayor, partiendo de 9 como cero relativo cuenta: “10, 11, 12, 13 y 14” hasta haber contado el sumando menor (5). Junto con esta estrategia, el estudiante utiliza la representación simbólica verbal informal, al enunciar los números en voz alta para explicar cuál es el procedimiento realizado por él.

Al tratarse de cantidades numéricas pequeñas que intervienen en el problema, el estudiante no ve la necesidad de recurrir al material manipulativo ni al uso de representaciones gráficas ni simbólicas, puesto que puede determinar el conteo mentalmente. Es importante mencionar que el estudiante no presentó dificultad alguna en la interpretación y resolución del problema, recordando que se trata de un problema de cambio de forma canónica ($a+b=?$).

(P6) **Pregunta 6:** En el juego de tiro al pato, Luisa jugó dos veces. En la primera jugada hizo 145 puntos y en la segunda hizo algunos puntos más. El total de las dos veces que Luisa jugó ganó 267 puntos. ¿Cuántos puntos hizo Luisa en la segunda ronda?

Descripción de la respuesta a la situación 3 tarea 2 pregunta 6 (S3T2P6): Inicialmente el estudiante luego de leer el enunciado de la pregunta, identifica las cantidades numéricas y decide realizar una adición entre ellas para dar solución a la pregunta, lo cual es errado; además expresa no comprender el problema.

Ante las dificultades del estudiante en la interpretación del enunciado, es gracias a la lectura y reestructuración de la pregunta que realiza uno de los investigadores que logra comprender el problema. Así, identifica una cantidad inicial como 145 (puntos de la primera ronda) y 267 (puntaje final de Luisa luego de las dos rondas) como el estado final de la cantidad inicial luego de un cambio. De lo anterior y atendiendo a la pregunta (S3T2P6), el estudiante se da cuenta que efectivamente hay que averiguar el cambio (puntos de Luisa en la segunda ronda) que hace falta para que Luisa ganara 267 puntos en total. Para lo anterior, el estudiante realiza un conteo, partiendo de 145 hasta llegar a 267, a lo que obtiene como resultado correcto 122 puntos en la segunda ronda.

Al momento de abordar la pregunta, el estudiante luego de haber realizado la lectura, expresa no entender lo que se quiere decir en el enunciado, por lo cual, uno de los investigadores trata de explicar la situación al estudiante, puesto que a pesar de reconocer las cantidades (145 y 267), no entiende cómo proceder para obtener la respuesta a la pregunta (problema de cambio con la forma $145+?=267$). El investigador dice que “Luisa jugó dos veces. Si en la primera jugada hizo 145 y al finalizar las dos rondas ganó en total 267 puntos, entonces ¿cuántos puntos tuvo que haber ganado Luisa en la segunda ronda para llegar a

tener 267 puntos si en la primera ronda hizo 145?”. El estudiante inmediatamente identifica la cantidad inicial (145) y el estado final de dicha cantidad (267), con ello, menciona que “debe contar a partir de 145 para llegar a 267 porque hacen falta unos puntos (el cambio) para que Luisa gane los 267 puntos”.

Lo anterior, pone de manifiesto que el estudiante emplea la estrategia de contar a partir de lo dado, puesto que inicia contando a partir de 145 hasta llegar a 267, donde obtiene 122 que corresponde a la cantidad de numerales mencionados desde 145 hasta 267. Para ello, el estudiante se vale de representaciones icónicas manipulativas (representación de números con palos de paleta) y de esta manera, toma un palito con el número 50 y lo suma a partir de 145 (cero relativo) “146, 147, ..., 195” obteniendo luego de la adición 195, luego toma otro palito y lo suma a partir de 195 y así lo hace hasta que llega a 267. Posterior a ello, el estudiante suma los valores representados en cada palito que utilizó para contar desde 145 hasta 267, obteniendo como respuesta 122.

Por un momento, el estudiante trata de representar la primera cantidad (145) que corresponde a la cantidad inicial del problema empleando una estrategia basada en hechos numéricos conocidos, recurriendo a la memoria, puesto que tomó dos de los palos de paletas que representaban el número 50 cada uno y expresa que cincuenta y cincuenta es cien ($50 + 50 = 100$).

A pesar de las dificultades en la interpretación del enunciado de la pregunta, el estudiante apoyado en el material manipulativo y en la lectura acompañada por uno de los investigadores que trata de contextualizar al estudiante en la situación del juego de Luisa y las dos rondas, termina por comprender el problema que se plantea, resolviéndolo de manera correcta y más amena al usar el material dispuesto para el desarrollo de la situación.

Análisis general de la situación 3.

De manera general, el propósito de la situación 3 (que el estudiante fuera capaz de resolver problemas de tipo aditivo de cambio y combinación) se cumplió a pesar de algunas dificultades en la interpretación de algunos enunciados.

Es de aclarar, que la situación 3 se desarrolló en un ambiente más agradable (sin mucho ruido y distracción) lo que evidenció mayor interés y concentración del estudiante en

el desarrollo de cada tarea. A pesar de que en esta situación, el estudiante se encuentra alejado del contexto del juego y tiene menos acompañamiento por parte de los investigadores, desarrolla cada uno de los problemas propuestos, la mayoría de forma correcta porque en algunos casos, el estudiante se vio impulsado a identificar cantidades numéricas en el enunciado y realizar entre ellas la operación que se le ocurriera, sin haber tratado de realizar una interpretación o haber tratado de recrear la situación que se presentaba en cada problema.

En cuanto a la tarea 1 con el propósito de que el estudiante fuera capaz de resolver problemas de tipo aditivo de cambio con la forma $a+?=c$, $?+b=c$ y $?-b=c$, es decir, con la incógnita en la cantidad inicial o en el cambio, el estudiante recurre en la mayoría de los casos (preguntas) a la estrategia de contar a partir de lo dado que corresponde a una estrategia para la sustracción y en algunos otros casos emplea la estrategia de contar a partir del sumando mayor.

Respecto a la tarea 2 que buscaba que el estudiante fuera capaz de identificar y resolver problemas aditivos de cambio y combinación en una situación planteada, tarea donde el estudiante encontraría problemas aritméticos variados respecto a las categorías semánticas de cambio y combinación, se logra notar que el estudiante implícitamente reconoce cuando una cantidad incide sobre el estado inicial de otra, generando un cambio; además de reconocer cuando dos cantidades se combinan para conformar un conjunto más grande.

De esta manera, la resolución de problemas aditivos de cambio y combinación se consiguió en gran medida, gracias al contexto utilizado en las tareas de la situación 3, basado en situaciones relacionadas con el entorno del estudiante, es decir, relacionadas con compra, venta y manejo de dinero efectivo (didáctico), lo que resultó de gran interés para el estudiante, por lo cual se mostró motivado al intentar recrear la situación de cada pregunta para facilitar su comprensión.

Es de resaltar que parte del éxito que el estudiante tuvo en la solución de las preguntas planteadas tanto en la tarea 1 como en la tarea 2, se debe en gran medida al uso del material manipulativo proporcionado, puesto que permitió al estudiante la representación y relación de cantidades numéricas.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y ALGUNAS RECOMENDACIONES DIDÁCTICAS

En este apartado se presentarán algunas conclusiones relacionadas con el trabajo desarrollado hasta el momento, trabajo que ha estado centrado en la observación y el análisis de las actuaciones de un estudiante con discapacidad cognitiva cuando se enfrenta a situaciones relacionadas con la resolución de problemas de estructura aditiva, particularmente problemas aritméticos con las categorías semánticas de cambio y combinación. Asimismo, se establecerán algunas reflexiones didácticas en torno al trabajo en la escuela en relación con el abordaje del tipo de tareas que deben tener en cuenta los docentes para potenciar las habilidades en estudiantes con discapacidad cognitiva, para esto, de manera implícita se menciona en cada conclusión los aspectos importantes que se deberían tener en cuenta para refinar una propuesta de aula dirigida a la población cuya necesidad educativa especial sea acorde con las del estudiante que fue objeto de observación (estudio de caso) en este trabajo.

4.1 Conclusiones generales

Se exponen a continuación las conclusiones generales relacionadas con los objetivos propuestos para este trabajo, dando cuenta de esta forma de los logros alcanzados a través del desarrollo del trabajo.

En relación con el objetivo específico 1, referido a establecer y caracterizar, mediante la documentación de la problemática, algunos elementos teóricos y metodológicos que posibiliten el diseño y aplicación de una propuesta de aula centrada en la resolución de problemas aditivos para estudiantes con Necesidades Educativas Especiales, es posible concluir que:

- Desde la perspectiva normativa, se concluye que en Colombia y en el mundo se ha avanzado en la propuesta legal sobre las Necesidades Educativas Especiales, existiendo un respaldo bajo una normatividad que fomenta la importancia de esta población tanto en la sociedad como a nivel educativo, generando así, una inclusión en las Instituciones Educativas, que por medio de una identificación y caracterización en las categorías que propone el SIMAT, brindan condiciones óptimas para un aprendizaje digno y que estos estudiantes con alguna NEE puedan aprender los mismos contenidos que los demás.

- Desde la perspectiva del estudio curricular se reconoce que lo propuesto por el MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas sobre la resolución de problemas aditivos, va en concordancia con lo que se plantea en el marco referencial tomado (propuesta de Puig y Cerdán), reconociendo las diferentes categorías semánticas presentes en los problemas aritméticos como lo son el cambio, la combinación, la igualación y la combinación. Además, contextos cercanos al estudiante permiten un mejor manejo de dichos problemas.
- Desde la perspectiva didáctica, la resolución de problemas de estructura aditiva es una problemática compleja que los docentes deben conocer y manejar para poder llevar al aula los diferentes tipos y subtipos de problemas aritméticos, alejándose de la idea errónea de solo considerar la categoría de combinación como la única que existe. Así, el estudiante explora las diferentes situaciones que se puedan presentar en el contexto fuera del aula de clase utilizando las categorías de cambio, igualación y comparación, relacionando lo que sucede en su entorno con las matemáticas aprendidas en la escuela. Asimismo, la estructura aditiva no solamente se limita a saber algoritmos, por el contrario, es un proceso que se desarrolla con el tiempo, para llegar a alcanzar la competencia propuesta. También, se debe considerar para la evaluación las formas de representación y estrategias que utiliza el estudiante para resolver problemas, con el fin de entender el procedimiento que este realizó y la manera que razona sobre dicho problema.

Respecto al objetivo 2, caracterizar, según el análisis de la actuación del estudiante, el tipo de tareas que se deben tener en cuenta para que estudiantes con Necesidades Educativas Especiales desarrollen habilidades en la resolución de problemas de tipo aditivo, se puede concluir:

- Para realizar el diseño de la propuesta de aula se tuvo en cuenta lo establecido por la caracterización del estudiante, el marco teórico de referencia y los resultados de la prueba diagnóstica, haciendo énfasis en emplear algunas de las recomendaciones que se sugieren en la caracterización para contemplar en el aula escolar al trabajar con el estudiante, así, utilizar material concreto, desarrollar el pensamiento estratégico, ofrecer espacios que favorezcan su atención, dividir las tareas en tiempos de estudio

breves, fueron claves para un buen desarrollo de la propuesta de aula; convirtiendo esta propuesta, en un insumo importante para los docentes cuando van a diseñar o rediseñar propuestas de aula que movilicen razonamiento matemático, ya que, como se evidencia dentro de los resultados, se obtiene un mejor aprendizaje cuando se desarrollan partiendo de las necesidades y particularidades del estudiante.

- De acuerdo con lo señalado en los resultados de la propuesta de aula, la metodología empleada, de considerar una primera situación en el contexto del juego, para luego en las situaciones 2 y 3 plantear problemas alejados de éste y con poco acompañamiento en lectura e interpretación de los enunciados, se infiere que dicha metodología resultó exitosa en la medida en que se observó avances significativos por parte del estudiante, puesto que se vio interesado en las situaciones que se presentaron inicialmente en el contexto de juegos que llamarón la atención por ser “simples” o no muy complejos de comprender, con pocas reglas, siendo una alternativa diferente a la clase magistral a la que está acostumbrado diariamente. A pesar de que el juego solo se consideró en la primera situación, se logró captar el interés del estudiante en las dos situaciones siguientes acentuando la parte visual en las situaciones por medio de ilustraciones que de alguna manera intentaban representar la situación que se presentaba en cada enunciado de los problemas planteados, con lo cual se logró que el estudiante tuviera una excelente disposición para el desarrollo de las situaciones, lo que se vio reflejado en un progreso del estudiante en cuanto a la resolución de problemas aditivos de cambio y combinación, en algunos casos intentando recrear la situación presentada en cada problema.
- Como resultados observados dentro de la categoría semántica de cambio, se observa un progreso respecto a lo hecho en la prueba diagnóstica, ya que en ésta arrojó que el estudiante tenía dificultades en hallar la incógnita en la cantidad inicial y el cambio ($a \pm ? = c$ o $? \pm b = c$), tanto en adición como en sustracción. En la medida en que avanzan las situaciones, las dificultades disminuyen y el estudiante en mayor medida identifica cuándo se pregunta por la cantidad inicial y final, aunque tiene algunas dificultades para hallar el cambio ($a \pm ? = c$), sobre todo cuando se propone sustracción. Sin embargo, se logra evidenciar que el estudiante puede realizar hacer replanteamientos empíricos de los problemas presentados para darles solución como ocurrió en S3T2P1. Además, es importante mencionar que en los problemas de sustracción se

hace más énfasis, porque se observan dificultades al ejecutar el algoritmo con el fin de dar solución a determinada situación.

- Al referirse a la categoría semántica de combinación, se logra un avance más significativo que con la categoría de cambio, porque el estudiante identifica las partes y el todo, como se ve evidenciado en S3T2P3, donde el estudiante identifica la parte (hamburguesa) y el total (\$12.000), para hallar con esto, la parte faltante (perro caliente). También, se evidencia en S3T2P4, ya que el problema se asemeja al anterior, con la única diferencia es que el estudiante realiza la operación correctamente por medio del material manipulativo (billetes didácticos) pero al escribir la respuesta, la escribe incorrecta. Además, reformula implícitamente los problemas para darle solución. Respecto a la prueba diagnóstica, el estudiante tenía dificultades cuando una de las partes era la incógnita, pero, en la propuesta se nota mejoría en el razonamiento sobre el enunciado y se ve reflejado en la solución de las preguntas de combinación en S3T2.

Finalmente, de acuerdo al objetivo 3, Aportar reflexiones teóricas y metodológicas a la enseñanza de la estructura aditiva, desde la resolución de problemas aditivos, para estudiantes con NEE de la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar, se concluye que:

- Se puede determinar que los procesos de justificación, comunicación y razonamiento por parte del estudiante, es importante mencionar que durante la implementación de la prueba diagnóstica, el estudiante se mostró tímido en cuanto a dichos procesos para dar respuesta a cada pregunta. Sin embargo, gracias al contexto del juego en el cual se realizaron las tareas fue importante porque permitió que el estudiante mostrara confianza en la medida en que interactuaba con los investigadores, logrando así, un progreso al comunicar su pensamiento y opiniones de manera verbal y escrita al resolver cada problema.
- En cuanto a la situación 3, donde se pretendía que el estudiante fuera más autónomo en la resolución de ésta, se pone de manifiesto que el estudiante requiere algunas veces el acompañamiento de los investigadores en torno a la lectura, el significado de las cantidades, ejemplos más sencillos, entre otras, para lograr la comprensión de los

enunciados. Además, es importante aclarar que este acompañamiento en lectura se hacía con el propósito de subsanar algunas dificultades que tenía el estudiante al leer, porque el estudiante al leer en voz alta podía comprender mejor el enunciado y llegar a la operación que debía realizar. Con esto se puede concluir que los estudiantes con discapacidad cognitiva requieren un acompañamiento en la lectura para desarrollar competencias en torno a la resolución de problemas con estructura aditiva, así, esta estrategia puede ser muy útil para ayudar a estos estudiantes a tener un progreso más efectivo dentro de su aprendizaje.

- Como resultado de las variables de análisis, se concluye que la representación que facilita la resolución de problemas aditivos al estudiante es la representación icónica manipulativa, ya que al poder manipular las cantidades a través de conjuntos representados por medio de objetos físicos, el estudiante comprendía de mejor manera lo que el enunciado de cada problema planteaba, además de facilitarle el conteo y de centrar su atención en la actividad que realizaba. Cabe mencionar que el estudiante también empleó la representación simbólica numérica pero en ésta, generalmente tenía dificultades en cuanto a la interpretación de la información presentada en los enunciados de cada problema, además presentó dificultades en la identificación del tipo de operación a realizar, particularmente en la sustracción presentó dificultades en la ejecución del algoritmo por medio de este tipo de representación (simbólica numérica). También, las estrategias que el estudiante más utiliza para sumar es la de contar a partir del sumando mayor y la estrategia de contar a partir del primer sumando. En cuanto a la resta, el tipo de estrategia más utilizada por el estudiante fue la de contar a partir de lo dado, aunque también empleó el conteo hacia atrás. El estudiante utiliza estas estrategias porque son con las que se siente cómodo y mejor maneja, también se puede decir que son con las que el estudiante aprendió sus saberes previos y por eso no utiliza las demás estrategias.
- En el desarrollo de este trabajo, se consideró que los procesos que el estudiante lleva a cabo cuando se enfrenta a un problema aritmético son de suma importancia, por ejemplo en S3T2P4, el estudiante resuelve correctamente el problema, identificando la parte y el todo que ofrece el enunciado para hallar la parte faltante, pero al escribir el resultado, el estudiante escribe la respuesta incorrecta. Por esto, los docentes cuando evalúan a los estudiantes con discapacidad cognitiva, no se deben centrar solo

en el resultado final, por el contrario, es relevante prestar atención tanto a los procesos que realiza, como a las inquietudes, dudas y participaciones del estudiante, en procura de construir el conocimiento en conjunto para desarrollar su autoconfianza, seguridad y autocontrol emocional.

- En general, se observa un progreso en el estudiante en comparación con lo observado en la prueba diagnóstica. El estudiante, por medio del material manipulativo (billetes didácticos) tuvo un mayor dominio sobre las cantidades y las operaciones a realizar al contar con dicho apoyo. Además, los conocimientos previos del estudiante hacen parte fundamental en su progreso, ya que, maneja las cantidades que aparecen en los billetes, logrando un conteo de 5 en 5, 10 en 10, 20 en 20 y de 50 en 50, facilitando la representación y conteo de dichas cantidades. Dentro del progreso que se notó, el estudiante identifica las cantidades dadas en el enunciado (ya sean problemas de cambio o de combinación), y dependiendo de qué se pregunta, el estudiante analiza qué se debe realizar con las cantidades (adición o sustracción), las opera y obtiene un resultado acertado. Aunque, se debe tener en cuenta que no se enseñó a realizar el algoritmo al estudiante, por el contrario, él ya sabía hacerlo con algunos errores menores, lo que se realizó fue un afianzamiento de estos por medio de problemas que contienen contextos que se presentan en su quehacer diario.
- Sobre el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes que tienen NEE, se puede concluir que no todos los estudiantes aprenden de la misma manera y al mismo ritmo, por el contrario sus construcciones son diversas y de ahí, que la escuela debe partir propiciando condiciones que amplíen, sistematicen y construyan conocimientos matemáticos, logrando así que ellos puedan aprender lo mismo que los demás estudiantes, estableciendo estrategias diferentes (dependiendo de cada necesidad) para enseñar dichos conocimientos, contando con el acompañamiento familiar, médico y escolar, para trabajar en conjunto por un aprendizaje digno dentro de las estrategias que favorezcan dicho aprendizaje.
- En cuanto a las estrategias para el aprendizaje de las matemáticas de la población con NEE, se determina que el uso del contexto del juego es una de las estrategias más eficaces puesto que tiene en cuenta las necesidades, expectativas, intereses, edad y ritmos de aprendizajes de cada estudiante. También, a través del juego se desarrolla la

creatividad y se promueven valores (respeto, tolerancia, compañerismo, entre otros) entre los estudiantes. Esto se ve evidenciado en S1, ya que por medio del juego, el estudiante identifica de forma divertida las cantidades que se preguntan sin estar frente a un cuestionario que valida lo que está aprendiendo, aun así, se evalúa por medio de preguntas orales y situaciones que van apareciendo dentro del juego en relación con las cantidades numéricas que se encuentran involucradas en cada pregunta donde implícitamente el docente debe orientar al estudiante para indagar acerca de aquellas cantidades que se requieran para resolver cada problema. Cabe aclarar, que el juego no sólo debe ser visto como un simple elemento divertido o recreativo, más allá de eso, debe ser considerado como estrategia de aprendizaje cuando se direcciona adecuadamente con el fin de movilizar conocimiento, en este caso promoviendo la resolución de problemas de tipo aditivo.

4.2 Reflexiones y recomendaciones

En este apartado se exponen algunas reflexiones en torno al desarrollo del trabajo realizado y se sugieren algunas recomendaciones en cuanto al tipo de tareas que se deben tener en cuenta en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de niños con discapacidad cognitiva, la cual se deben caracterizar por los siguientes aspectos:

- La recomendación para las actividades de aula, es importante que el docente tenga claridad en los propósitos de cada una de las tareas, las cuales no solo están relacionadas con la estructura aditiva, sino también con el contexto social y escolar del estudiante. Al tener presente todos estos elementos involucrados en cualquier actividad en el aula, es importante reflexionar sobre el hecho de que los resultados inmediatos no son lo más importante, por el contrario, el aspecto relevante alude a los procesos que van ligados a las características propias del saber matemático y el tipo de comprensión de aprendizaje del estudiante. Por esto, se recomienda al profesor que se cerciore de las respuestas que el estudiante propicia porque en ocasiones estas pueden obedecer a distintos factores como: un hecho numérico, uno memorístico o uno aleatorio, entonces, al indagar más allá de lo que una respuesta puede ofrecer (correcta o incorrecta), el docente se puede dar cuenta con otra pregunta si el estudiante verdaderamente comprende lo realizado o por el contrario no lo hace.

- Se sugiere que el estudiante trabaje más problemas de cambio con sustracción de la forma $a - ? = c$ o $? - b = c$, porque fueron las proposiciones con las que el estudiante tuvo mayor dificultad durante la implementación de la propuesta de aula, además, trabajar problemas con enunciados que no contengan palabras (más, menos, entre otras) que sugieran alguna operación permitiendo evidenciar un apropiado manejo e interpretación de dichos problemas.
- Se sugiere al docente destinar mayor tiempo a la implementación de la propuesta de aula, con el fin de promover de mejor manera la habilidad en el estudiante de resolver problemas de tipo aditivo. Esto, atendiendo al hecho de que los tiempos de enseñanza no son los mismos del aprendizaje; lo que supone que el aprendizaje del estudiante debe ser progresivo, dando espacio y mayor énfasis a la argumentación de los procesos llevados a cabo por el estudiante al momento de resolver problemas aditivos.
- Al hablar de situaciones o tareas diferenciadas en el aula, no se debe pensar en un tipo de población con limitaciones; ni mucho menos que el problema radica dentro de una discapacidad, por el contrario, se debe pensar en los recursos con los cuales se cuenta y en la disposición que debe tener el docente de matemáticas para transformar su enseñanza, pensando en lo que verdaderamente necesita el estudiante, en el currículo y maneras flexibles de evaluación; logrando así, alternativas de aprendizaje para que toda la población estudiantil (con o sin necesidades educativas especiales) logre aprender algún contenido matemático a su propio ritmo.
- Dentro de los aspectos que se deberían tener en cuenta para posteriores propuestas de aula se sugiere trabajar con un grupo completo o con una parte de él, para así examinar cómo los estudiantes con discapacidad cognitiva se desarrollan en un entorno académico presentando sus puntos de vista a sus compañeros para llegar a una solución, tratando de abolir situaciones de discriminación o exclusión.

Productos del trabajo de grado

El trabajo realizado se presentó a través de una comunicación breve en el VIII simposio de Matemáticas y Educación Matemática y VII Congreso internacional de Matemática asistida por computador. Evento que se llevará a cabo los días 9 y 10 de febrero de 2018 en la Universidad de Nariño sede Federman en la ciudad de Bogotá D.C. y tiene como objetivo compartir con la comunidad de docentes de las matemáticas resultados de investigaciones realizadas en la Universidad Antonio Nariño y otras universidades colombianas y extranjeras, escuchar experiencias de avanzada que han obtenido los docentes de las matemáticas básica, superior y de pregrado, tanto desde la dimensión de las matemáticas, su educación y el uso del computador para ambos fines; como una vía que permita una retroalimentación y divulgación científica. De la comunicación que se llevará a cabo en el evento, se tendrán en cuenta las apreciaciones más relevantes que se realicen por parte del auditorio con el fin de poderlas explicitar como parte de las conclusiones que se tendrán en cuenta en el trabajo de grado.

Además de la presentación mencionada anteriormente, el trabajo aporta a la Institución Educativa José María Vivas Balcázar, los resultados de la implementación de la propuesta de aula y una guía con recomendaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con niños que presentan alguna necesidad educativa especial, particularmente de aquellos que presentan discapacidad cognitiva. De igual manera, queda para la institución, la propuesta de aula diseñada en el trabajo con sugerencias para su implementación en el aula. De esta manera, el producto que se aporta a la institución se constituye en un insumo importante tanto para docentes como para directivos y profesionales de apoyo en cuanto a la atención a la diversidad se refiere, en especial, para tener en cuenta el tipo de tareas y las características que se requieren en las actividades que se presentan a los estudiantes con alguna NEE. Es de aclarar, que cuando se solicitó trabajar (para efectos del trabajo de grado) con el estudiante en la Institución Educativa, se acordó dejar como insumo una guía con la propuesta de aula y las recomendaciones generales para trabajar con los estudiantes que tienen discapacidad cognitiva. Una vez, sustentado este trabajo, ese requerimiento que se acordó con la institución, se dejará como insumo en la oficina de atención a la diversidad.

REFERENCIAS

- Agudelo, E., Cardona, N., Castañeda, C., Espinoza, M., Moreno, P., & Valencia, A. (2007) *Sistematización de situaciones problema para desarrollar pensamiento aditivo* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Alfaro, C. (2006). Las ideas de Polya en la resolución de problemas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemáticas*, 1 (1), 1-13.
- Barbosa, J. A., Bertel, J., Arias, E. E., & Galindo, J. C. (2013) *La adición en los textos del programa "Todos a Aprender". Educación Científica y Tecnológica, Edición especial*, 373-377.
- Barrio, I., González, J., Padín, L., Peral, P., Sánchez, I., & Tarín, E. (2009). Métodos de investigación educativa. El estudio de casos. *Magisterio Educación Especial*. Universidad Autónoma de Madrid, (3), 5-6.
- Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas, El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemáticas*, 1 (1), 1-13.
- Bruno, A., Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en Matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. En M.M. Moreno, A. Estrada. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*(pp. 141-162). Lleida: SEIEM.
- Cardona, J. & Carmona, M. (2012) *Estrategias pedagógicas en el área de matemáticas para la inclusión educativa de escolares con Discapacidad Cognitiva de los grados 1º, 2º y 3º de la Institución Educativa Gimnasio Risaralda sede America Mixta del municipio de Pereira* (Tesis de pregrado). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995) *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Celis, S. & Vidarte, R. (2016) *Una propuesta de aula para la enseñanza de las ecuaciones lineales con variable real, en dos estudiantes que requieren una educación diferencial* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) *Ley General de Educación*. [Ley 115 de 1994]. Santafé de Bogotá. DC.
- Constitución política de Colombia [Const.] (1991) 2da Ed. Legis. Santa Fe de Bogotá.

- Díaz, J. J. (2004) *El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
- Iriarte, A. J., (2011) Estrategias metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de 5° de básica primaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 24, 161-173.
- Manzano, L., Otero, M., Pachón, A. & Patiño, O. (2014). *Los caminos del saber: Matemáticas 1*. Bogotá, Colombia: Santillana.
- Marín, A. & Mejía, S. (2015) *Estrategias lúdicas para la enseñanza de las matemáticas en el grado quinto de la institución educativa La Piedad* (Tesis de especialización). Fundación Universitaria Los Libertadores. Medellín, Colombia.
- Martínez, C. (2012) *Resolución de problemas de estructura aditiva con estudiantes de segundo grado de educación primaria* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, México, D. F., México.
- Maza, C. (1999). Formas de representación. En C. Maza (Ed.), *Enseñanza de la suma y de la resta* (pp. 39-48). Madrid: Editorial Síntesis.
- MEN. (2006). Fundamentación Conceptual para la Atención en el Servicio Educativo a Estudiantes con Necesidades Educativas Especiales -NEE-. Bogotá, D.C., Colombia. Enlace editores Ltda.
- MEN. (2006). Orientaciones pedagógicas para la atención a estudiantes con Discapacidad Cognitiva. Bogotá, D.C., Colombia. Enlace editores Ltda.
- MEN. (2013). Lineamientos Política de educación superior inclusiva. Bogotá, D.C., Colombia. Enlace editores Ltda.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Santa fe de Bogotá: fondo editorial MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de competencias en Matemáticas. Santa fé de Bogotá.
- Ordoñez, L. I. (2014) Estructuras aditivas en la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal (PAEV) (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Palmira, Colombia.
- Organización de las Naciones Unidas. (1948). Declaración Universal de los Derechos Humanos, United Nations. P. 8

- Puig, L. (1988). Problemas de una etapa: adición y sustracción. En: Puig, L. & Cerdán, F., *Problemas aritméticos escolares* (Cap. 3, 1-23). Madrid: Síntesis. [Versión conmemorativa 20° aniversario].
- Puig, L. (1988). Problemas y problemas aritméticos elementales. En: Puig, L. & Cerdán, F., *Problemas aritméticos escolares* (Cap. 1, 1-33). Madrid: Síntesis. [Versión conmemorativa 20° aniversario].
- Rojas, K. (2012) *Recorrido histórico de la educación especial y su proceso de inclusión en el contexto de Santiago de Cali (1990-2010)* (Tesis doctoral). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.
- Ramos, L., Castro, E., & Rodríguez, E. (2016). Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con necesidades educativas especiales. *Enseñanza de las ciencias*, 34 (1), 173-192
- Secretaría de Educación Pública de México - SEP (2004). *Aprendiendo a contar. Situaciones Didácticas para Alumnos con Discapacidad Intelectual*. México D.F.
- UNESCO (junio de 1994). *Declaración de salamanca y marco de acción para las necesidades educativas especiales*, Salamanca, España. P. 6, disponible en: http://www.unesco.org/education/pdf/SALAMA_S.PDF
- UNESCO (marzo de 1990). *Declaración mundial sobre Educación para Todos*. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, Nueva York, Art. 3, disponible en: <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001275/127583s.pdf>
- UNESCO (noviembre, 2008). *Conferencia Internacional de Educación*. Trabajo presentado en la educación inclusiva: el camino hacia el futuro de UNESCO, Ginebra, Suiza, disponible en: http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user_upload/Policy_Dialogue/48th_ICE/CONFINTED_48_Inf_2_Spanish.pdf
- UNICEF (Junio de 2006). *Convención sobre los derechos del niño del Fondo de las naciones unidas para la Infancia*, Madrid, Art. 23, disponible en: <http://www.un.org/es/events/childrenday/pdf/derechos.pdf>
- Vergnaud, G. (autor). (1991). Los problemas de tipo aditivo. En: El niño, las matemáticas y la realidad. (pp. 161-184). México: Trillas.
- Warnock, M. (1978). *Special Educational Needs. Report of the Committee of Enquiry into the Education of Handicapped Children and Young People*. London.

ANEXOS

Anexo 1: Matriz de análisis de la prueba diagnóstica: resolución de problemas de estructura aditiva

Problema No.	Contenido específico evaluado	Caracterización del problema	Desempeño evaluado	Clave	Características de los tipos de respuesta
1	Resolución de problemas aditivos de cambio.	En el enunciado se identifica un problema aditivo de cambio. Para dar solución al problema es necesario identificar la cantidad inicial y el cambio que sufre dicha cantidad sobre su estado inicial que finalmente se transforma con un aumento.	Interpreta condiciones necesarias para resolver problemas aditivos de cambio.	D	El estudiante selecciona la opción D porque identifica: el dato inicial que son 25 personas; el aumento sobre el dato inicial de 13 personas y el cambio a una cantidad final de 38 personas en total. Es decir, de forma acertada reconoce que el algoritmo para resolver el problema, es una suma y lo efectúa correctamente. El estudiante realiza la solución del problema por medio de marcas (registros en papel) partiendo de un cero relativo que es 25 y contando hacia adelante 13 más.
2	Resolución de problemas aditivos de combinación.	En el enunciado se identifica un problema aditivo de combinación (parte-parte-todo). Para dar solución a este problema se identifican una parte y el todo (dados en el enunciado), con el fin de hallar la parte que hace falta. Para lograr esto, la solución del problema se reduce a establecer la diferencia entre las cantidades dadas. Es decir, se sustrae del todo, la parte dada para obtener la parte faltante.	Interpreta y resuelve problemas aditivos de combinación.	B	El estudiante selecciona la opción A, esto quiere decir que confunde en el enunciado la cantidad correspondiente al total con una de las partes. En ese orden, si una parte es 18 canicas la otra es 8 canicas, así obtiene una respuesta incorrecta (26 canicas). El estudiante asume la cantidad de 18 canicas como cantidad inicial y procede adicionando la cantidad de 8 canicas. Parte de 18 (como cero relativo) apoyado en los dedos de la mano cuenta hasta sumar 8, elevando un dedo cada vez que pronuncia cada número (19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26) y así obtiene 26 como respuesta.

					Si el estudiante hubiera seleccionado la opción B, es porque identifica que las cantidades 18 canicas y 8 canicas hacen referencia al todo y a una de las partes respectivamente. De esta manera, logra determinar a partir de una sustracción efectuada entre el todo y la parte dada, la parte faltante o incógnita en el problema (10 canicas), aplicando el algoritmo correcto.
3	Resolución de problemas aditivos de combinación.	En el enunciado se identifica un problema aditivo de Combinación (parte - parte - todo). Para dar solución a este problema se requiere identificar las dos partes, con el fin de hallar el todo. Para lograr esto, el enunciado del problema contiene las dos partes que requieren ser combinadas a través de una adición, para poder hallar el todo.	Interpreta y resuelve problemas aditivos de combinación.	B	El estudiante selecciona la opción A porque identifica las partes que son necesarias para hallar el todo, pero utiliza la operación incorrecta, ya que efectúa una sustracción en vez de una adición. Si el estudiante hubiera seleccionado la opción B, es porque identifica las cantidades en el enunciado como partes del problema de combinación. Así, 29 pelotas rojas y 41 pelotas azules, se combinan por medio de una suma para hallar el todo que son 70 pelotas. De este modo, el estudiante obtiene una respuesta correcta al utilizar el algoritmo correcto una vez identificadas las cantidades iniciales. El estudiante con ayuda de palitos, toma como cero relativo el 29 y empieza a contar hacia adelante hasta llegar a 41, pero luego cuenta los palitos hechos y le dan 11; entonces se encuentra en un problema porque 11 no está ninguna de las respuestas que aparecen, pero si esta el 12, por consiguiente, marca la opción A.
4	Resolución de problemas aditivos de cambio.	Se plantea un problema aditivo de cambio. Para su solución, el estudiante debe identificar	Interpreta condiciones necesarias para la solución de problemas aditivos de cambio.	A	El estudiante selecciona la opción A porque identifica una cantidad inicial (28 galletas) y el cambio (12 galletas) que se requiere para hallar la

		en el enunciado del problema, dos cantidades, donde la primera es la cantidad que sufre un cambio y que además, es un cambio que implica sustracción. Es decir, la primera cantidad disminuye lo que indica la segunda cantidad y así puede obtener la solución correcta al problema propuesto.			cantidad final (16 galletas), efectuando una sustracción entre las cantidades iniciales para obtener la respuesta correcta. En este problema, la palabra “dar” es clave para que el estudiante comprenda que se debe realizar una sustracción entre las cantidades y por medio de palitos(registros escritos) y conteo hacia atrás, logra dar una solución cercana, aunque en la operación obtiene como resultado 17 y al no estar entre las opciones, aproxima la respuesta a alguna de las opciones dadas.
5	Resolución de problemas aditivos de cambio.	En el enunciado se identifica un problema aditivo de cambio. Para este problema se debe identificar las cantidades que representan el cambio dado y la cantidad final; con el fin de hallar la cantidad inicial por la cual se pregunta, y esta se encuentra por medio de una adición entre el cambio y la cantidad final.	Interpreta y resuelve problemas aditivos de cambio.	C	El estudiante selecciona la opción B puesto que para resolver el problema relaciona la palabra “soltaron” en el enunciado del problema con la acción de quitar (restar); así, determina que la operación a realizar es una sustracción. El estudiante realiza un conteo hacia atrás, partiendo de 46 hasta llegar a 22, efectuando además del algoritmo incorrecto, el conteo hacia atrás de manera errada. El estudiante en este problema tuvo dificultad en dar una respuesta, al principio, se deja llevar por los datos mostrados en el problema, luego realiza un conteo hacia atrás, el cual realiza erradamente porque se confunde en medio del conteo con los palitos (registros escritos) que utiliza, y de esta manera, obtiene como resultado 15. Si el estudiante hubiera seleccionado la opción C, es porque logra replantear el problema identificando un cambio (48 globos) sobre la cantidad final (22 globos) para hallar la cantidad inicial (68 globos). El problema planteado inicialmente tiene la forma

					?-b=c, que replanteado toma la forma $c+b=a$.
6	Resolución de problemas aditivos de cambio.	En el enunciado se plantea un problema aditivo de cambio. Para su solución, el estudiante debe identificar en el enunciado dos cantidades, una inicial y otra final; con estas cantidades, se halla el cambio por medio de una adición entre ambas cantidades.	Interpreta condiciones necesarias para la solución de problemas aditivos de cambio.	D	El estudiante selecciona la opción B, porque identifica la cantidad final, pero hace caso omiso a la otra cantidad, sin efectuar alguna operación; simplemente establece la opción B como solución porque el dato final (124 castillos) aparece entre las opciones de respuesta y además la palabra “quedaron”, en el enunciado del problema la asume como total . Si el estudiante hubiera seleccionado la opción D, es porque identifica dos cantidades, la inicial (239 castillos) y la cantidad final (124 castillos), con las cuales, realiza una sustracción para hallar el cambio pedido (115 castillos). Puesto que el problema tiene la forma $a-?=c$, el problema se puede replantear con la forma $a-c=b$. El estudiante se deja llevar por las cantidades que están en el enunciado, sin entender lo que se pregunta, por lo tanto, tiene una respuesta errada.
7	Resolución de problemas de Cambio.	El enunciado implica la resolución de un problema de estructura aditiva de tipo cambio. Para entender el problema, el estudiante debe reconocer que existen dos cantidades, una inicial y otra final, y por medio de una sustracción entre ambas cantidades, se halla el cambio.	Interpreta condiciones necesarias para resolver problemas aditivos de cambio.	C	El estudiante selecciona la opción B, porque identifica la cantidad final, pero no realiza ninguna operación con la otra cantidad dada. El estudiante presentó dificultades en la interpretación del enunciado del problema y determinó que la solución correspondía a la opción B porque ésta aparecía en el enunciado del problema y además estaba precedida de la palabra “total”. Si el estudiante hubiera seleccionado la opción C,

					estaría reconociendo las cantidades como inicial (62 peluches) y final (77 peluches) tal como aparecen en el enunciado del problema. Además, determina que el cambio (15 peluches) resulta de sustraer las dos cantidades dadas en el problema, así que habrá reconocido que el problema se resuelve mediante una sustracción, entre la cantidad inicial (62 peluches) y la cantidad final (77 peluches). La proposición del problema tiene la forma $a+?=c$ inicialmente, y se replantearía de la forma $c-a=b$. Al igual que la pregunta anterior, el estudiante solo selecciona una de las opciones que se presentan, guiándose por lo que está enunciado en el problema y sin realizar algún análisis a lo preguntado.
8	Resolución de problemas de cambio.	Se plantea la resolución de un problema de estructura aditiva de tipo cambio. En este problema, la información suministrada hace referencia a dos cantidades, una inicial y una final, con las cuales debe realizar una sustracción entre la cantidad final y la inicial para hallar el cambio pedido.	Interpreta condiciones necesarias para resolver problemas aditivos de cambio.	A	El estudiante selecciona la opción A, porque identifica el cambio que se efectúa a la cantidad final para hallar la cantidad inicial. En este caso, se pide hallar la cantidad inicial, dado el cambio (13 chocolates), se sustrae a la cantidad final (28 chocolates) y así se obtiene la cantidad inicial requerida (15 chocolates). El problema tiene la forma $?-b=c$, para su solución se replantea con la forma $c-b=a$. A pesar que el estudiante selecciona la respuesta correcta, no realiza una operación rutinaria, por el contrario, utiliza un conteo hacia atrás, pero se equivoca durante el conteo porque el resultado obtenido no se encuentra dentro de las respuestas que se ofrecen. Por esto, realiza una aproximación con el resultado y las diferentes respuestas, dando como explicación que 15 está más cercano a 28.

9	Resolución de problemas aditivos de combinación.	El problema, sin opciones de respuesta (de respuesta abierta), presenta un problema de estructura aditiva de tipo de combinación (parte - parte - todo). Para solucionar el problema, el estudiante debe identificar las dos cantidades en el enunciado, que corresponden a las partes y luego debe adicionarlas (combinarlas) para poder hallar el todo (solución).	Interpreta condiciones necesarias para resolver problemas aditivos de combinación.	353 paletas.	El estudiante, presentó dificultades en la interpretación del problema, por lo cual, fue necesario tratar de recrear la situación referenciando personas y narrando el enunciado. Una vez recreado el contexto del problema, el estudiante identifica acertadamente las cantidades en el enunciado e inmediatamente determina que la operación a realizar es una adición, entendiendo que las cantidades se combinan para formar otra. Así, no tiene problemas en establecer que la cantidad de paletas es 353 independientemente de si son de fresa o mandarina, realiza la combinación para determinar el total de paletas. El estudiante ejecuta una adición (por medio de registros simbólicos) entre las cantidades involucradas en el problema sin tener mayor dificultad haciendo uso de papel y lápiz como ayuda, puesto que las cantidades son de tres cifras. De esta manera, el estudiante determina la operación acertada y la ejecuta de correctamente.
10	Resolución de problemas aditivos de cambio.	En el enunciado se identifica un problema aditivo de cambio. Para dar solución al problema es necesario identificar la cantidad inicial y el cambio que sufre dicha cantidad sobre su estado inicial que finalmente se transforma con un aumento.	Interpreta condiciones necesarias para resolver problemas aditivos de cambio.	10 masmelos.	El problema resulta ser bastante sencillo para el estudiante, por lo cual, identifica inmediata y correctamente que se trata de un problema de cambio, en el cual, la cantidad inicial sufre un cambio (aumento) indicado por la segunda cantidad, es decir, determina que se debe aplicar una adición entre las dos cantidades dadas en el problema. Así, razona de la siguiente manera: “como tenía siete masmelos y le regaló 3, ahora tiene 10 masmelos”.

Anexo 2. Estructura de la prueba diagnóstica

No.	Categoría semántica	Problema
1	Cambio $a + b = ?$	A la clase de matemáticas asistieron en principio 25 estudiantes, luego llegaron 13 estudiantes más. ¿Cuántos estudiantes en total asistieron a la clase de matemáticas?
2	Combinación $a + ? = c$	En dos cajas tengo 18 canicas. Si en una de ellas tengo 8 canicas ¿Cuántas canicas tengo en la otra?
3	Combinación $a + b = ?$	En una piscina de pelotas, hay 29 pelotas rojas y 41 pelotas azules ¿cuántas pelotas en total hay en la piscina?
4	Cambio $a - b = ?$	Andrea tenía 28 galletas y repartió 12 galletas a su familia, ¿Cuántas galletas le sobraron a Andrea?
5	Cambio $? - b = c$	En la fiesta de Ana María había algunos globos. Si se soltaron 46 globos y quedaron 22 globos, ¿Cuántos globos había en la fiesta de Ana María?
6	Cambio $a - ? = c$	En la playa hubo un concurso de figuras de arena. Se hicieron 239 castillos y se cayeron algunos. Ahora quedan 124 castillos. ¿Cuántos castillos se cayeron?
7	Cambio $a + ? = c$	En un almacén había 62 peluches y se compraron algunos más, en total hay 77 peluches. ¿Cuántos peluches compró el almacén?
8	Cambio $? + b = c$	Ángel tenía algunos chocolates, su mamá le regaló 13 más. Ahora tiene 28 chocolates. ¿Cuántos chocolates tenían ángel antes de que su mamá le regalara más?
9	Combinación $a + b = ?$	Ana María está en el parque y tiene curiosidad de saber, ¿cuántas paletas ha vendido Rosa en total? Rosa le responde: Hoy he vendido 215 paletas de fresa y 138 paletas de mandarina.

		¿Cuántas paletas vendió en total?
10	Cambio $a + b = ?$	Liliana tenía siete masmelos y Daniel le regaló tres. ¿Cuántos masmelos tiene Liliana?

Anexo 3. Prueba diagnóstica sobre resolución de problemas de estructura aditiva

Resuelve los siguientes problemas y recuerda que sólo puedes marcar con una equis (x) una opción en cada uno de los problemas.



1. A la clase de matemáticas asistieron en principio 25 estudiantes, luego llegaron 13 estudiantes más. ¿Cuántos estudiantes en total asistieron a la clase de matemáticas?
 A. 12 estudiantes.
 B. 13 estudiantes.
 C. 25 estudiantes.
 D. 38 estudiantes.
2. En dos cajas tengo 18 canicas. Si en una de ellas tengo 8 canicas ¿Cuántas canicas tengo en la otra?
 A. 26 canicas.
 B. 10 canicas.
 C. 8 canicas.
 D. 18 canicas.
3. En una piscina de pelotas, hay 29 pelotas rojas y 41 pelotas azules ¿cuántas pelotas en total hay en la piscina?
 A. 12 pelotas en total.
 B. 70 pelotas en total.
 C. 29 pelotas azules.
 D. 41 pelotas rojas.
4. Andrea tenía 28 galletas y repartió 12 galletas a su familia, ¿Cuántas galletas le sobraron a Andrea?





5. En la fiesta de Ana María habían algunos globos. Si se soltaron 46 globos y quedaron 22 globos, ¿Cuántos globos había en la fiesta de Ana María?

- A. 48 globos.
- B. 15 globos
- C. 68 globos.
- D. 24 globos.

6. En la playa hubo un concurso de figuras de arena. Se hicieron 239 castillos y se cayeron algunos. Ahora quedan 124 castillos. ¿Cuántos castillos se cayeron?

- A. 239 castillos.
- B. 124 castillos.
- C. 363 castillos.
- D. 115 castillos.

7. En un almacén había 62 peluches y se compraron algunos más, en total hay 77 peluches. ¿Cuántos peluches compró el almacén?

- A. 139 peluches.
- B. 77 peluches.
- C. 15 peluches.
- D. 5 peluches.

8. Ángel tenía algunos chocolates, su mamá le regaló 13 más. Ahora tiene 28 chocolates. ¿Cuántos chocolates tenía ángel antes de que su mamá le regalara más?

- A. 15 chocolates.
- B. 41 chocolates.
- C. 31 chocolates.
- D. 5 chocolates.

En los siguientes problemas, no tienes opciones para escoger; pero debes resolver cada uno de los problemas en el espacio en blanco y escribir cómo lo hiciste.

9. Ana María está en el parque y tiene curiosidad de saber, ¿cuántas paletas ha vendido Rosa en total? Rosa le responde:

Hoy he vendido 215 paletas de fresa y 138 paletas de mandarina.
¿Cuántas paletas vendió en total?



10. Liliana tenía siete masmelos y Daniel le regaló tres. ¿Cuántos masmelos tiene Liliana?

Anexo 4. Instrumento utilizado para la caracterización de la población

A. Datos generales

Nombre del estudiante: Información personal que no se publica	
Edad: 8 años	Fecha de nacimiento: 14 octubre de 2008
Nombre del padre: Información personal que no se publica	
Nombre de la madre: Información personal que no se publica	
Número de hermanos: 2	
Establecimiento educativo: Institución Educativa José María Vivas Balcázar	
Sede: Santo Domingo	
Barrio o comuna: Santo Domingo	
Grado: 2 de primaria	
Área asignada: Matemáticas	

B.

Nombre del docente: Carlos Arturo Aragón
Título profesional: Tecnólogo en ingeniería industrial
Área asignada: Todas las materias, en especial Lengua Castellana y Matemáticas.
Director de grupo: Sí

C. Historia escolar y aprendizaje actual

Cantidad de años de repitencia escolar y grados repetidos

Grados reprobados: sí	Motivo o causas de las pérdidas del años escolar
Cuales: Transición	Bajo rendimiento académico e indisciplina

D. Observaciones de los maestros acerca del aprendizaje del Estudiante en el grado actual

Observaciones	Descripción de las ayudas que el maestro realiza para el aprendizaje del niño
Es muy hiperactivo, no se queda quieto en el puesto y es muy desordenado en los cuadernos. A pesar de todo, es uno de los estudiantes que mejor lee del salón y se le ve el entusiasmo por aprender. La mayor preocupación sobre el aprendizaje del estudiante es que no se tiene un apoyo en la casa o no se ve reflejado en las tareas que se dejan para la casa.	Una de las estrategias que utilizo es ponerlo adelante, para intentar centrar su atención en lo que propongo para la clase, uso la repetición de contenido para ejercitar la memorización y, la asignación de daniel con un estudiante de secundaria de la misma institución para realizar acompañamiento y evitar mal comportamiento para centrar su atención

E. Observaciones del estudiante

Actividades de rutina sencilla y compleja

¿Empleas una agenda diaria de trabajo? (para tareas, trabajos pendientes, organización de su tiempo) No tiene agenda	¿En tu institución educativa, cuentas con un espacio en el cual se te permita avanzar en tareas y trabajos escolares? No	¿Eres ordenado y organizado en la toma de apuntes en diferentes aspectos de tu vida escolar? No
---	---	--

F. Experiencias, gustos e intereses personales del estudiante

Nivel social

¿Te gusta estudiar en grupo, solo o de las dos formas?: Me gusta estudiar en grupo porque me gusta escuchar lo que piensan los demás.
¿Cuando trabajas en grupo, tienes la perspectiva del otro?: Si
Escribe las actividades que compartes con tus compañeros: Me gusta jugar en los descansos con ellos y compartir mis ideas en el salón de clase.
Identificación de intereses del estudiante (actualmente): Le llama la atención el fútbol; tanto que quiere ser arquero del deportivo Cali.

G. Historia terapéutica

Informe terapéutico o ayuda especializada de rehabilitación

El estudiante ha asistido a:	Si	No	Motivo	Que cambios ha tenido a partir de sus asistencias a las terapias
Psicología		x		Al no ser constantes con las terapias, no se evidencia cambio o progreso.
Terapia ocupacional	x		Alteración de su motricidad, concentración y su parte cognitiva	
Fonoaudiología	x		Trastorno de fonemas R, L(J) y G	
Fisioterapia		x		
Otro: Neurología pediátrica	x		Seguimiento de patología de base	
Observaciones: Al tener 1 año y 2 meses empieza a convulsionar y es tratado con ácido valproico. Diagnóstico: Síndrome convulsivo, TDAH, retardo del desarrollo psicomotor.				

Anexo 5. Propuesta de aula

Situación 1: JUGANDO Y APRENDIENDO ANDO

Propósito: Que el estudiante pueda resolver problemas aditivos de cambio y combinación con incógnita en diferentes posiciones, a partir del juego como estrategia de aprendizaje.

Tarea 1: SUBE Y BAJA

Propósito: Que el estudiante explore situaciones que impliquen resolver problemas aditivos de cambio, haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego.

Descripción:

- **Contenido matemático:** Resolución de problemas aditivos de cambio
- **Materiales:** Juego “serpientes y escaleras”, dos dados y fichas.
- **Serpientes y escaleras:**
 - Este juego requiere entre 2 participantes (estudiante e investigador), cuatro fichas y un dado.
 - Cada jugador escoge una ficha con que jugara toda la partida.
 - El tablero inicia en la casilla 1 a partir de la esquina inferior izquierda hacia la derecha. Cuando llega a la casilla 10, inicia la segunda fila con la casilla 11 de derecha a izquierda y así sucesivamente hasta terminar en la casilla 99 que corresponde a la esquina superior izquierda del tablero. El primer jugador que llegue a la casilla 100, gana.
 - El primer jugador lanza el dado y corre lo que este indique y así con todo los jugadores.
 - Si algún jugador cae en una casilla donde se encuentra un cabeza de serpiente, bajará hasta donde se encuentre la cola de esa serpiente. El tablero cuenta con 9 serpientes, sus cabezas están ubicadas en las casillas 47, 49, 56, 62, 64, 87, 93, 95 y 98.
 - Si un jugador cae en una casilla donde se encuentra la parte baja de una escalera, sube hasta donde se encuentre la parte superior de esta. El tablero cuenta con 9 escaleras, sus bases se encuentran ubicadas en las casillas 1, 4, 9, 21, 28, 36, 51, 71 y 80.



- **Consignas y/o reglas de juego:** Estas reglas de juego fueron ajustadas de las mencionadas anteriormente para el propósito de este trabajo.
 - Se organiza al estudiante con uno de los investigadores para comenzar el juego, se utiliza un juego de “Serpientes y escaleras”, dos dados y dos fichas.
 - Por turnos, cada jugador lanza los dados, suma los puntos de estos y avanza según se indique.
 - Si una ficha llega a una casilla donde se encuentra una cabeza serpiente, bajará hasta donde se encuentre la cola de la serpiente.
 - Si la ficha llega a una casilla donde se encuentra la parte baja de una escalera, subirá hasta donde ella termine.
 - Gana el jugador que llegue primero a 100.
- **Sugerencias docentes:** Es importante plantear preguntas al estudiante con el fin de orientarlo en la consecución del propósito planteado en la tarea 1 de sube y baja, puesto que estas propician a través del razonamiento en el estudiante el análisis de cada una de las preguntas planteadas; preguntas como ¿qué número debes sacar para ganar? o ¿en cuál casilla estabas y en cuál quedarás al avanzar lo que indican los dados? permitirían comprender la dinámica del juego y brindar elementos para enfrentar las preguntas de la tarea, pero sin dejar de lado el contexto del juego.

Contexto:

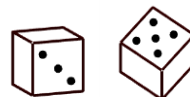
En la Institución Educativa Técnico Comercial José María Vivas Balcázar se va a realizar una semana deportiva que incluye diferentes deportes y juegos, entre ellos están el fútbol, baloncesto, voleibol, ajedrez, boliche, “serpientes y escaleras”, dominó, entre otros.

Para poder participar en los deportes, los estudiantes hacen grupos de diferentes cantidades, dependiendo qué deporte o juego van a participar, por ejemplo, si es para fútbol, deben hacer grupos de 11; para el ajedrez y el dominó, se juega individualmente.

De acuerdo con lo que has podido experimentar y el contexto anterior, contesta las siguientes preguntas:

Laura y sus amigos jugaron serpientes y escaleras. Por turnos cogían dos dados, los lanzaban y la suma de los números que cayeran, eran el número de casillas que avanzaban. Por

ejemplo, si alguien lanzaba los dados y caían así:



sumaban $3+5=8$, y

avanzaba 8 casillas.



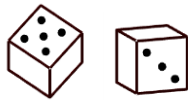
1. A Karen en la primera tirada le salieron sus dados así:

¿Cuántos lugares tenía que avanzar? _____

2. Karen cae en la casilla 21 donde hay una escalera que conduce a la casilla 42. ¿Cuántas casillas avanzó Karen gracias a la escalera? _____

3. A Daniel le salió una serpiente en la casilla 93 y tuvo que regresar a la casilla 73. ¿Cuántas casillas se devolvió Daniel por culpa de la serpiente?

4. Laura lanzó los dados y llegó a la casilla 28 donde había una escalera que la llevó hasta la casilla 84 ¿Cuántas casillas avanzó Laura gracias a la escalera?

5. Si Adriana lanzó los dados y le salieron así:  y avanzó a la casilla 74 ¿En qué casilla estaba Adriana?

6. Le toca el turno a Daniel, tiene su ficha en la casilla 85 y al lanzar los dados caen  y  . ¿Hasta qué casilla avanza Daniel? _____

Tarea 2: MÁS BOLOS, MÁS PUNTOS

Propósito: Que el estudiante explore situaciones que impliquen resolver problemas aditivos de combinación, haciendo uso de diferentes estrategias para su solución en el contexto del juego.

Descripción:

- **Contenido matemático:** Resolución de problemas aditivos de combinación
- **Materiales:** Juego didáctico el boliche, donde cada bolo tiene una etiqueta con los números 9, 12, 13, 17, 23, 25, 30 y 40 que equivale a un puntaje parcial del lanzamiento y, al sumar todos estos puntajes se llega al total de la partida por jugador.



- **Consignas y/o reglas de juego:**

- Se organizan el juego de boliche para jugar el estudiante y uno de los investigadores.
- Se colocan los bolos y una marca (aproximadamente de 3 metros de distancia) para indicar el sitio de lanzamiento de la pelota.
- Cada jugador lanza la pelota una vez, alternándose por turnos.
- Después que cada jugador lanza, recoge los bolos que cayeron y lee en voz alta el número correspondiente de cada bolo para que los demás jugadores escuchen los números y poder realizar el cálculo del total de los puntos, es decir, que para que un jugador consigne la puntuación en el tablero, los demás deben estar de acuerdo con ese puntaje.
- La siguiente tabla es utilizada para recolectar la información de los lanzamientos de cada jugador; además, para que el estudiante se familiarice con la metodología del juego, que luego será utilizada en la actividad.

NOMBRE DEL JUGADOR	PRIMERA TIRADA	SEGUNDA TIRADA	TERCERA TIRADA	TOTAL DE PUNTOS

- Se realizan 3 rondas y gana el jugador que más puntos tenga.
- **Sugerencias docentes:** Se proporciona una cartelera que contiene la tabla anterior, donde el estudiante debe ir diligenciando la información según corresponda en cada una de las columnas de la tabla, al tiempo que valida la información que se va generando a medida que el juego se desarrolla y se realizan los diferentes cálculos hasta determinar el total de puntos. Es importante mencionar que esta tarea busca el propósito enunciado anteriormente a través del juego de bolos.

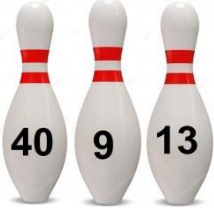
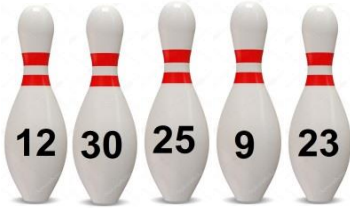
De acuerdo con lo que has podido experimentar, contesta las siguientes preguntas:

1. Juan y sus amigos fueron a jugar boliche y se dieron cuenta que cada bolo tiene un número de puntos. Como Juan lanzó de primero, derribó los siguientes bolos:



¿Cuántos puntos obtuvo Juan? _____

Observa los bolos que derribaron los amigos de Juan y escribe los puntos que obtuvo cada uno.

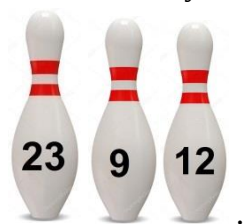
 Karla	 Total de puntos _____
 Javier	 Total de puntos _____
 Ana	 Total de puntos _____
 Tomás	 Total de puntos _____

2. ¿Cuántos puntos en total hicieron Ana y Karla? _____

3. ¿Cuántos puntos en total hicieron Juan y sus amigos? _____

Juan y sus amigos, jugaron otra ronda de bolos, igual que la anterior, pero esta vez jugaron por parejas, Juan y Tomás contra Karla y Ana

4. Entre Juan y Tomás hicieron 130 puntos. Tomás ganó puntos al derribar estos bolos



¿Cuántos puntos hizo Juan? _____

5. Ahora, es el turno de Karla y Ana. Karla ganó algunos puntos y Ana ganó 43 puntos. Si entre las dos hicieron 125 puntos, ¿cuántos puntos hizo Karla? _____

6. Teniendo en cuenta las preguntas 4 y 5. ¿Cuántos puntos hicieron en total Juan, Tomás, Karla y Ana? _____

Situación 2: ENTREVISTA: 1, 2, 3 Y CONTANDO.

Propósito: Que el estudiante por medio de material manipulativo e ilustraciones, pueda resolver problemas de tipo aditivo de combinación y cambio de manera más sencilla.

Tarea 1: ORDENO PARA GANAR

Propósito: Que el estudiante resuelva problemas de tipo aditivo de combinación de la forma $a+b=?$ y $a+?=c$ por medio de palos de paleta para facilitar el conteo.

Descripción:

- **Contenido matemático:** Resolución de problemas aditivos de combinación
- **Materiales:** Hojas impresas, palos de paleta.
- **Consignas:**
 - Se realiza esta actividad de manera individual.
 - A cada estudiante se le dan 20 palos de paleta para facilitar el conteo que este realiza, con esto, debe responder las preguntas de la actividad.
 - La actividad trata de problemas de combinación, iniciando con la identificación de las partes y algunas preguntas van dirigidas a la identificación del todo.

Contexto:

Juana y Lucía debían realizar un ejercicio que el profesor de matemáticas les pidió para recuperar el segundo periodo. Ellas aprovecharon la semana deportiva para realizar una entrevista a los niños y niñas que participaron en ella.

Se obtuvieron los siguientes resultados:

- Asistieron a la semana deportiva 34 niños y 45 niñas.

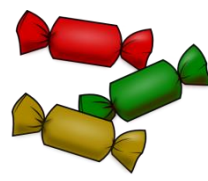
- Se vendieron 34 manzanas, 56 peras, 45 bombones, 34 bananas, 53 gaseosas, 78 jugos, 24 hamburguesas y 20 perros.
- Habían 45 globos azules y 56 globos blancos.
- En el juego de bolos participaron 13 niñas y 6 niños.
- El juego que más gustó fué el ajedrez con 45 participantes.
- En fútbol, el tercer puesto fué para el grado 4° con 7 puntos, en segundo lugar quedó el grado 3° con 9 puntos y el primer lugar fue para el grado 5° con 13 puntos.



De acuerdo con el contexto anterior, contesta las siguientes preguntas:

1. Ayuda a Juana y Lucía a completar la siguiente tabla, colocando la cantidad numérica que corresponda a cada dibujo, de acuerdo con la información leída.

Personas	
	

Dulces	
	

Frutas	
	

Bebidas	
	

Comidas rápidas	
	

Globos	
	

Ahora, Juana y Lucía quieren saber:

2. ¿Cuántas personas en total asistieron a la semana deportiva?_____
3. ¿Cuántos globos había en total en la semana deportiva?_____
4. En el campeonato de fútbol, sólo participaron 4 equipos. En el momento de la premiación, entre los cuatro sumaron 34 puntos en total. ¿Cuántos puntos obtuvo el cuarto puesto?_____
5. ¿Cuántas personas en total participaron en el juego de los bolos?_____
6. ¿Cuántas personas en total participaron en los juegos de bolos y ajedrez?_____
7. En el juego de ajedrez participaron 79 personas. Si 47 personas ganaron, ¿cuántas personas perdieron en el juego? _____
8. ¿Cuántas frutas se vendieron en total?_____

Tarea 2: ¡DESCUIDO TERRIBLE!

Propósito: Que el estudiante resuelva problemas de tipo aditivo de cambio de la forma $a-?=c$ y $a-b=?$ por medio de palos de paleta para facilitar el conteo.

Descripción:

- **Contenido matemático:** Resolución de problemas aditivos de cambio
- **Materiales:** Hojas impresas,
- **Consignas:**
 - El trabajo es individual. palos de paletas.
 - Se utilizan palos de paletas para facilitar el cálculo de las operaciones correspondientes a cada problema de cambio de la forma canónica.

De acuerdo el contexto de la situación 2, contesta las siguientes preguntas:

Juana y Lucía le entregan al profesor de matemáticas los resultados que obtuvieron en la encuesta.

El profesor al revisar el trabajo, se dio cuenta de que Juana y Lucía habían cometido un error en algunos datos.



1. Al terminar la jornada deportiva, se explotaron 15 globos azules. ¿Cuántos globos azules quedaron?

2. Juana y Lucía contaron 79 asistentes a la jornada deportiva, pero el profesor les dijo que eran 19 asistentes menos. ¿Cuántos asistentes participaron en la jornada deportiva?

3. A los jugos que ellas contaron; el profesor les dijo que eran 24 jugos menos. ¿Cuántos jugos habían en realidad?

4. En la encuesta se contaron 24 hamburguesas y el profesor les dijo que se debían descontar 15. ¿Cuántas hamburguesas quedaron?

5. El profesor dijo que al inicio habían 100 globos blancos y el viento se llevó algunos antes de que Juana y Lucía los contaran. ¿Cuántos globos blancos se llevó el viento?

Situación 3: KERMES ESCOLAR

Propósito: Que el estudiante pueda resolver problemas de tipo aditivo cambio y combinación.



Contexto:

Al finalizar la semana deportiva, el profesor Carlos y su grupo de segundo organizaron una kermés. En la kermés hubo muchos juegos divertidos para los niños y también rica comida.

En la organización de la kermes, se repartieron actividades entre profesores y estudiantes de 2° del colegio:

- La profesora Mariana elaboró manillas de recuerdo para los asistentes a la kermes.

- Los estudiantes Carlos, Andrés y Luis, fueron los encargados de las bebidas e hicieron este cartel.

Bebidas	
Gaseosas	\$800
Agua	\$500
Jugos	\$700

- En el juego de tiro al pato, estaba Daniel, Juan y Marcela.
- La mamá de Alberto y la mamá de José vendieron comida, en el puesto pusieron un anuncio que decía lo siguiente:

LISTA DE COMIDAS	
PRODUCTO	PRECIO
Hamburguesa	\$ 8000
Porción de pizza	\$ 2500
Perros calientes	\$ 4000
Crispetas	\$ 1500
Empanadas	\$ 600

Tarea 1: JUGANDO Y COMIENDO RESUELVO PROBLEMAS

Propósito: Que el estudiante pueda resolver problemas de tipo aditivo cambio con la forma $a+?=c$, $?+b=c$ y $?-b=c$ por medio de material manipulativo e ilustraciones que permiten mayor comprensión de dicho problema.

Descripción:

- **Contenido matemático:** Resolución de problemas aditivos de cambio
- **Materiales:** Hojas impresas, objetos que representen lo mencionado en el contexto
- **Consignas:**
 - Se va a trabajar de forma individual.
 - Se utiliza objetos que representen lo expuesto en el contexto, para que al estudiante se le facilite la comprensión de los problemas expuestos.

De acuerdo con el contexto, responde las siguientes preguntas:

1. La profesora Mariana elaboró 63 manillas de recuerdo para los asistentes en la mañana, y en la tarde hizo más. En total fueron 98 manillas. ¿Cuántas manillas hizo la profesora Mariana en la tarde?

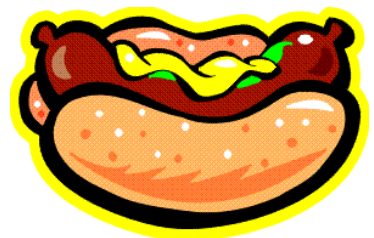
2. En el puesto de bebidas, Carlos, Andrés y Luis al comenzar la kermés contaron muchas bebidas, se vendieron 109 y quedaron 43. ¿Cuántas bebidas había al inicio de la kermés? _____

3. En el juego de tiro al pato que Daniel, Juan y Marcela organizaron; Ángel decidió jugar. Al final del juego, Ángel realizó dos lanzamientos. Si en el segundo tiro hizo 67 puntos y acumuló un puntaje de 145 puntos. ¿Cuántos puntos hizo Ángel en el primer tiro?



4. Elisa se compró un jugo y una porción de pizza. Le sobraron \$800. ¿Cuánto dinero tenía Elisa antes de comprar el jugo y la pizza? _____

5. Las mamás de Alberto y José al inicio de la kermés tenían muchos perros calientes, al final de la kermés quedaron 19 perros y se vendieron 84. ¿Cuántos perros calientes había antes de comenzar la kermés? _____



Tarea 2: ¿COMBINO O CAMBIO?

Propósito: Que el estudiante identifique y resuelva problemas aditivos de cambio y combinación en una situación planteada.

Descripción:

- **Contenido matemático:** Resolución de problemas aditivos de cambio y combinación
- **Materiales:** Hojas impresas, objetos que representen lo mencionado en el contexto, palitos de paleta.
- **Consignas:**
 - Se realiza de manera individual.
 - Se utilizan los objetos para recordar el contexto y utilizar la observación para facilitar la resolución de los problemas.
 - Los palos de paleta facilitan las operaciones que el estudiante debe realizar.

De acuerdo con el contexto de la situación 3, responde las siguientes preguntas:



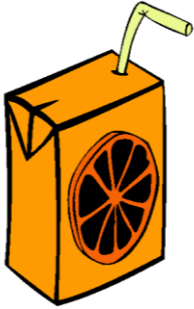
1. En la kermés la mamá de Alberto y la mamá de José vendieron 168 empanadas y les quedaron al final de la kermés 52. ¿Cuántas empanadas tenían la mamá de Alberto y la mamá de José al comienzo de la kermés? _____

2. Sandra quería comprar unas crispetas, ella tenía 9 monedas de \$500, pero al correr hacia el puesto de comidas se le cayeron algunas monedas. Al llegar a comprar las crispetas, solo tenía \$1000. ¿Cuántas monedas se le cayeron a Sandra? _____

3. Jorge compró una hamburguesa y otra cosa. En total pagó \$12.000. ¿Qué producto compró Jorge además de la hamburguesa? _____

 \$ _____	
\$12.000	

4. Isabela compró unos jugos y 7 gaseosas para compartir con sus amigos en la kermés. En total, Isabela compró 16 bebidas. ¿Cuántos jugos compró para sus amigos?

 _____	 _____
Total de bebidas: _____	

5. Natalia compró y se comió 9 empanadas, pero quedó con hambre y compró 5 más. ¿Cuántas empanadas compró en total Natalia? _____



6. En el juego de tiro al pato, Luisa jugó dos veces. En la primera jugada hizo 145 puntos y en la segunda hizo algunos puntos más. El total de las dos veces que Luisa jugó ganó 267 puntos. ¿Cuántos puntos hizo Luisa en la segunda ronda? _____