

SAA – SAMPLE AVERAGE APPROXIMATION METHOD, APLICADO A LA SOLUCIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL ESTOCÁSTICOS

Héctor Hernan Toro Díaz

Profesor Pontificia Universidad Javeriana, Colombia.

Contacto: hetordi@pino.univalle.edu.co

Resumen

Este trabajo aborda la solución de problemas de optimización de programación lineal estocásticos, mediante la generación de escenarios aleatorios usando el método monte carlo. Se presenta el algoritmo de solución, así como algunos de sus detalles de implementación computacional. Se desarrolla un ejemplo ilustrativo de la aplicación del algoritmo, sobre un modelo típico de PL Mixta, conocido como ULSP – *Uncapacitated Lot Sizing Problem*. Se presenta los resultados computacionales que permiten concluir, desde una perspectiva práctica, sobre la convergencia del algoritmo hacia la solución óptima del problema de PL.

Palabras clave: optimización estocástica, generación aleatoria de escenarios, Método Monte Carlo.

Abstract

This work faces the solution process of stochastic linear programming problems, using random scenario generation provided by Monte Carlo method. The solution algorithm is presented, as well as some of its computational implementation details. An example that shows the applicability of the algorithm is developed, using a typical LP problem, usually referred as ULSP, uncapacitated lot sizing problem. Computational results are shown, and they allow, from a practical perspective, to conclude about algorithm convergence to the optimal solution of LP problem.

Keywords: stochastic optimization, random scenario generation, Monte Carlo Method.

1. Introducción

En el estudio de los actuales sistemas de producción y distribución, cuando se abordan desde la perspectiva de una cadena de abastecimiento con la intención de tomar buenas decisiones a nivel estratégico, es usual que aparezcan modelos matemáticos de programación lineal mixta como herramientas de soporte a la toma de decisiones. Estos modelos suelen ser de gran tamaño, incluyendo típicamente cientos de miles de variables, y un número similar de restricciones, incluso para cadenas de abastecimiento de carácter regional.

Varios trabajos han abordado la modelación matemática de cadenas de abastecimiento, tanto regionales como internacionales, incluyendo aplicaciones prácticas. Entre ellos pueden citarse Eksioglu (2000), Goetschalckx et. al. (2002), Vidal y Goetschalckx (2001), Toro (2001) y Bravo y Bravo (2005). Elementos comunes de estos trabajos es el abordaje del problema de optimización de la cadena de suministro mediante la modelación matemática; que se ha llegado en todos los casos a modelos de PL mixta, o bien, a modelos no lineales que se pueden solucionar mediante un esquema que los descompone en un conjunto de modelos de PL Mixta relacionados; y por último, que los modelos son de naturaleza determinística, es decir, los parámetros que los asocian a una situación particular se asumen con condición de certeza.

Ha resultado más o menos natural que luego de trabajar con tal esquema de aproximación al problema de optimización de las redes de suministro se proponga estudiar el impacto de elementos de variabilidad en la estructura de los modelos, hecho que ha sucedido al reconocer que varios parámetros críticos que se han modelado de modo determinístico, son en realidad variables aleatorias, de las cuales apenas puede hacerse un pronóstico con un cierto nivel de confianza, respecto a lo que sería su valor o valores futuros. La inclusión de tales parámetros como variables aleatorias, cambia el panorama algorítmico de solución de los modelos matemáticos, incluso si se mantiene toda su restante estructura. En tal sentido, se ha visto la necesidad de estudiar los métodos de solución que pueden ser aplicados sobre modelos de programación matemática que incluyen elementos estocásticos, y hacer estos estudios y desarrollos en paralelo al proceso de plantear modelos de cadenas de abastecimiento que incluyen cada vez más elementos de representación del mundo real.

El presente trabajo aborda el estudio de uno de esos métodos de solución, bastante prometedor tanto por la solidez teórica con la cual se ha desarrollado, que incluye pruebas de optimalidad, análisis de convergencia y respuesta computacional, como por su relativa facilidad de implementación, usando para ello herramientas que usualmente están disponibles en el panorama de toma de decisiones en el mundo real. El método, conocido como SAA, *Sample Average Approximation*, se define básicamente como un esquema de aproximación mediante simulación monte carlo, al problema de optimización de modelos de programación matemática que incluyen parámetros estocásticos en su definición. La idea básica del método es que se genera una muestra aleatoria de los parámetros del modelo, con lo cual resulta una realización particular del modelo cuya naturaleza sería determinística, y para la cual se conocen algoritmos de optimización eficientes. Este proceso se repite un número determinado de veces, y el valor esperado de la función objetivo es aproximado mediante la función promedio aplicada sobre los valores de la función objetivo que se obtiene de cada muestra, luego del proceso de optimización. El número de veces que se repite el proceso es usualmente dinámico, pues se prefiere realizar la ejecución de una nueva iteración hasta que se cumpla un cierto criterio de parada, predeterminado por el decisor.

2. Problema de Optimización

La caracterización general de los problemas de optimización que se abordan en este trabajo es la siguiente:

$$\min_{x \in S} \{g(x) = E[G(x, W)]\} \quad (1)$$

En la ecuación (1), W es un vector aleatorio que tiene distribución de probabilidad conocida P ; S es un conjunto finito (por ejemplo un subconjunto de R^n con coordenadas enteras); $G(x, w)$ es una función real de dos vectores de variables, x y w ; y $E[G(x, W)] = \int G(x, w)P(dw)$ es el correspondiente valor esperado. Se asume que la función de valor esperado $g(x)$ está bien definida, de modo que para cada $x \in S$ la función $G(x, \bullet)$ se puede evaluar, y que el valor es finito, es decir, $E\{|G(x, W)|\} < \infty$.

El problema general es interesante de estudiar cuando además se dan una serie de características particulares que lo convierten en un problema de mayor complejidad, a saber:

1. La función de valor esperado $g(x) = E[G(x, W)]$ no puede escribirse fácilmente de forma analítica, o bien, incluso en tal caso los valores no se pueden calcular de un modo eficiente.
2. En cambio, la función $G(x, w)$ es fácilmente evaluable dados valores particulares para x y w .
3. El conjunto de soluciones factibles S , aunque es finito, es muy grande, de modo que cualquier estrategia de enumeración exhaustiva de soluciones queda descartada debido al consumo de recurso computacional. Es usual, de hecho, que en problemas de programación matemática con variables enteras el número de soluciones que conforman la región factible crezca exponencialmente respecto al número de variables del problema.

Un problema de optimización con variables enteras es usualmente más difícil de resolver que su contraparte con variables continuas, lo cual sucede incluso en un panorama determinístico. Para el caso del problema que se ha descrito, la otra dificultad es que la función objetivo $g(x)$ puede ser muy complicada o difícil de evaluar, incluso si se usan métodos numéricos de aproximación.

Se ha publicado variados trabajos que abordan el problema de optimización que nos concierne, la mayoría de los cuales trabaja con casos en los que el conjunto de soluciones factibles es lo suficientemente pequeño, de modo que se puede hacer una estimación de la función $g(x)$, para cada x dentro de la región factible. Como ejemplo de tales trabajos, Kleywegt et al (2001) cita a Hochberg y Tamhane (1987), Bechofer et. al (1995), Futschick y Pflug (1995, 1997) y Nelson et. al (2001). Kleywegt igualmente cita otra metodología de aproximación a la solución del problema, que consiste en realizar ciertas modificaciones a la meta heurística Temple Simulado, de modo que se use su estructura general, pero reconociendo que la función de optimización tiene términos que pueden cambiar entre iteraciones, debido a su naturaleza probabilística. Como ejemplo de tal metodología de aproximación a la solución del problema se cita a Gelfand y Mitter (1989), Alrefaei y Abdradóttir (1999), Fox y Heine (1995), Gutjahr y Pflug (1996) y Homem de Mello (1999). Por otra parte, Birge y Loveaux (1997) han propuesto un esquema de solución jerárquico para problemas de programación estocásticos de dos etapas. Norkin et. al (1998) sugiere un procedimiento de ramificación y acotamiento para la solución de un modelo de programación matemática con variables

enteras. Por último, en la misma línea que el presente trabajo, esto es, una aproximación a la solución de un problema de programación con variables enteras usando simulación Monte Carlo, se puede citar el trabajo de Morton y Wood (1998).

En cuanto a trabajos de diseño de redes de suministro que han generado la preocupación por un abordaje probabilístico en los parámetros de las redes, puede citarse los trabajos de Escudero et. al (1999, 2002), Vidal y Goetschalckx (2000), Birge (2002), Dupacova (2002), Dormer et. al (2003), Hagle (2003), Mitra et. al (2004), Parija et. al (2004) y Santoso et. al (2005).

3. Estrategia algorítmica de solución

Reformulemos el problema que se desea resolver, en un modo más conveniente para propósitos del diseño del algoritmo de solución. Considérese entonces la siguiente formalización:

$$\min_y f(y) = cy + E[Q(y, \xi)] \quad (2)$$

$$\text{Sujeto a: } y \in Y \subseteq \{0,1\}^{|P|} \quad (3)$$

En el problema (2) – (3), c es un vector de costos asociados a decisiones de primer nivel, como apertura de instalaciones, uso de máquinas, decisiones de producción de producto o similares. A su vez, el vector y es un vector de variables binarias relacionado con la toma de decisiones en ese primer nivel. Nótese que la $|P|$ que se incluye en la definición del dominio para el vector y , está relacionada con el tamaño del problema, en términos del número de decisiones de primer nivel que serían abordadas. $Q(y, \xi)$ hace referencia a al valor óptimo del siguiente problema de optimización:

$$\min_x qx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &g_j(x) \leq b_j \\ \text{Sujeto a: } &R(x) \leq M(y) \end{aligned} \quad (5)$$

En el problema (4) – (5) x es un vector de variables de segundo nivel, como decisiones de cantidad de producto a producir, tamaño de flujos entre nodos, entre otros. El vector q se compone de los coeficientes de costo asociados a las variables del vector x . El primer conjunto de restricciones en (5) hace referencia a aspectos que tienen relación con el funcionamiento del sistema una vez que se ha

tomado una cierta decisión en el primer nivel. El segundo conjunto de restricciones sirve de enlace entre las decisiones de primer nivel, representadas por el vector y , y las de segundo nivel, representadas por el vector x . Por ejemplo, si una decisión de primer nivel es NO producir un cierto producto en una instalación industrial, una restricción del segundo conjunto impedirá, por su propia estructura matemática, que se asigne una cantidad de producción del mismo en dicha instalación.

En la ecuación (2), ξ es un vector cuyos elementos son aleatorios, y representan la componente probabilística del problema de optimización en todos los parámetros que así lo requieran. El valor óptimo del problema (4) – (5) es una función de las variables de primer nivel y , y una realización particular, o escenario, del vector aleatorio ξ . El valor esperado en la ecuación (2) se toma con respecto a la distribución de probabilidad del vector aleatorio ξ , lo cual supone que se conoce dicha distribución.

El modelo matemático descrito por las ecuaciones (2) – (5) representa un problema de programación matemática de dos etapas, con elementos aleatorios. La primera etapa representa decisiones de configuración, mientras la segunda representa decisiones de procesamiento y de flujo, que serán tomadas teniendo en cuenta las decisiones de primer nivel, y un escenario particular de los parámetros aleatorios. El objetivo es minimizar los costos presentes de la inversión, representados en las decisiones de primer nivel que de hecho se ejecutarían de inmediato, más los costos futuros esperados, representados por la expresión $E[Q(y, \xi)]$.

Se puede citar dos fuentes potenciales de dificultad en la solución del problema (2) – (3): primero, una evaluación de la función objetivo $f(y)$ para una configuración de primer nivel dada, supone el cálculo del valor esperado de la función lineal $Q(y, \xi)$. Sin embargo, recordando la naturaleza aleatoria del vector ξ , puede suceder que las funciones de probabilidad sean de naturaleza continua, en cuyo caso habría que calcular varias integrales para poder obtener un resultado analítico del valor esperado de la función Q , proceso de integración que puede resultar prácticamente imposible. Por otra parte, si suponemos que las distribuciones de probabilidad son discretas, el cálculo del valor esperado supondría resolver un número elevado de subproblemas (4) – (5), uno por cada escenario que resulte de la combinación de los valores discretos que pueden tomar los parámetros.

El número de tales subproblemas es usualmente prohibitivo desde una perspectiva computacional; segundo, aún en los casos en que el valor esperado pueda obtenerse de modo exacto, la optimización de la función objetivo dada por la ecuación (2) presenta dificultades. El término $E[Q(y, \xi)]$ es una función convexa no lineal del vector de variables de primer nivel y . Tal función no está definida, en todo caso, de un modo analítico directo, pues supone simplemente una suma lineal de distribuciones de probabilidad conocidas, pero arbitrarias en un sentido general. El problema en (2) – (3) supone entonces la minimización de una función apenas implícitamente definida, de tipo no lineal, con respecto a un conjunto de variables binarias. Tal proceso de optimización resulta a menudo altamente complejo.

3.1 Sample Average Approximation - SAA

La metodología SAA aborda el problema de cálculo del valor esperado $E[Q(y, \xi)]$ mediante la generación de muestras del vector aleatorio ξ , y el posterior proceso de promediar los resultados. Se genera una muestra aleatoria $\xi^1, \dots, \xi^N$ de N escenarios del vector ξ , de modo que el valor esperado $E[Q(y, \xi)]$ es aproximado por la función promedio de las muestras obtenidas. Así, el problema original dado por las ecuaciones (2) – (3) es aproximado por el problema:

$$\min_{y \in Y} \left\{ \hat{f}_N(y) = cy + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(y, \xi^n) \right\} \quad (6)$$

Sean v_N y $\hat{y}_N$ el valor óptimo y el vector de la solución óptima respectivamente, para el problema SAA que representa la ecuación (6). Es de notar que tanto v_N como $\hat{y}_N$ son aleatorios, en el sentido que son funciones de la correspondiente muestra aleatoria de tamaño N . Sin embargo, para una realización particular de la muestra $\xi^1, \dots, \xi^N$, el problema de optimización (6) es determinístico y puede ser solucionado por las técnicas adecuadas de optimización clásica.

Kleywegt (2001) ha demostrado que, en tanto el tamaño de la muestra N se aumenta, v_N y $\hat{y}_N$ convergen con probabilidad uno al valor de sus contrapartes en el problema original, y más aún, que $\hat{y}_N$ converge a la solución óptima del problema original con probabilidad que se aproxima a uno de modo exponencial respecto al tamaño de la muestra. El análisis de convergencia sugiere que una aproximación medianamente buena a la solución

del problema se puede obtener con una muestra de tamaño modesto. En particular, se supone que se desea solucionar el SAA de la ecuación (6) con una brecha de optimalidad $\delta \geq 0$. Si se considera un escalar ε arbitrario, tal que $\varepsilon > \delta$ y se fija $\alpha \in (0,1)$, entonces una muestra de tamaño

$$N \geq \frac{3\sigma_{\max}^2}{(\varepsilon - \delta)^2} \log\left(\frac{|Y|}{\alpha}\right) \quad (7)$$

garantiza que la solución $\hat{y}_N$ es una solución ε -óptima (esto es, con una brecha absoluta de optimalidad de tamaño ε) del problema original, con una probabilidad de al menos $1 - \alpha$. El término $\sigma_{\max}^2$ de la expresión (7) hace referencia a la varianza de la diferencia de ciertas funciones, y es detallado a profundidad en el trabajo de Kleywegt (2001). Recuérdese que $|Y| \leq 2^P$, y por lo tanto, $\log|Y| \leq \log(2)P$. Si bien el trabajo de Kleywegt menciona que el tamaño de muestra estimado es muy conservativo, también su desarrollo sugiere que el tamaño de muestra requerido es cuando mucho lineal con respecto al número de decisiones de primer nivel que se deben tomar. Este estimativo, que también tiene relación con la complejidad computacional, es bastante importante y prometedor respecto a la aplicabilidad de la estrategia algorítmica.

3.2 El algoritmo SAA (Santoso et. al. 2005)

En la práctica, el esquema SAA supone la solución del problema dado por la ecuación (6) varias veces, cada vez con muestras independientes. Realizado ese proceso se pueden calcular indicadores estadísticos de las soluciones aproximadas, de modo que se extraiga algún criterio de la bondad de las soluciones obtenidas. El proceso se describe con detalle a continuación:

Paso 1:

Generar M muestras independientes, cada una de tamaño N, esto es, $(\xi_j^1, \dots, \xi_j^N)$, para $j = 1, \dots, M$. Para cada muestra solucionar el correspondiente problema SAA

$$\min_{y \in Y} \left\{ cy + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(y, \xi_j^N) \right\} \quad (8)$$

Del problema dado en (8), sea v_N^j y $\hat{y}_N^j$, para $j = 1, \dots, M$, el valor objetivo óptimo y la solución óptima respectivamente.

Paso 2:

Calcular los siguientes indicadores:

$$\bar{v}_{N,M} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M v_N^j \quad (9)$$

$$\sigma_{\bar{v}_{N,M}}^2 = \frac{1}{(M-1)M} \sum_{j=1}^M (v_N^j - \bar{v}_{N,M})^2 \quad (10)$$

El valor esperado de v_N es menor ó igual que el valor óptimo v^* del problema original. Puesto que $\bar{v}_{N,M}$ es un estimador insesgado de $E[v_N]$, se obtiene entonces la siguiente relación, $E[\bar{v}_{N,M}] \leq v^*$. Por tanto, $\bar{v}_{N,M}$ provee un límite estadístico inferior para el valor óptimo v^* , e igualmente, $\sigma_{\bar{v}_{N,M}}$ es un estimador de la varianza de $\bar{v}_{N,M}$.

Paso 3:

Seleccionar una solución $\bar{y} \in Y$ del problema real, por ejemplo, usando alguna de las soluciones $\hat{y}_N^j$ computadas. Usar la solución $\bar{y} \in Y$ para calcular su valor objetivo real $f(\bar{y})$, usando la siguiente expresión:

$$\tilde{f}_{N'}(\bar{y}) = c\bar{y} + \frac{1}{N'} \sum_{n=1}^{N'} Q(\bar{y}, \xi^n) \quad (11)$$

En (11), $(\xi^1, \dots, \xi^{N'})$ es una muestra de tamaño N' generada de manera independiente con respecto a las muestras usadas en el paso 1 para obtener el vector $\bar{y}$ que se esté usando. Se supone que se tome un valor de N' mucho más grande que el valor del tamaño de muestra N usado en el paso 1. El paso 3 corresponde entonces a la solución de N' subproblemas (de segunda etapa) independientes. Para el caso $\tilde{f}_{N'}(\bar{y})$ es un estimador insesgado de $f(\bar{y})$. Puesto que $\bar{y}$ es una solución factible del problema original, se tiene entonces que $f(\bar{y}) \geq v^*$. Por tanto $\tilde{f}_{N'}(\bar{y})$ es un estimado de un límite superior de v^* . Además, si la muestra $(f(\bar{y}) \geq \xi)$ es independiente e idénticamente distribuida, entonces la varianza del estimador puede calcularse a partir de la expresión:

$$\sigma_{\tilde{f}_{N'}}^2(\bar{y}) = \frac{1}{(N'-1)N'} \sum_{n=1}^{N'} (c\bar{y} + Q(\bar{y}, \xi^n) - \tilde{f}_{N'}(\bar{y}))^2 \quad (12)$$

Resulta natural seleccionar $\bar{y}$ de uno de los estimadores $\hat{y}_N^j$ con el menor valor objetivo estimado $\tilde{f}_{N'}(\bar{y})$, puesto que la dirección de optimización es minimización.

Paso 4:

Calcúlese un estimado de la optimalidad de la solución $\bar{y}$ obtenida con el SAA, usando la estimación del límite inferior y el valor óptimo de la función objetivo, obtenidos en los pasos 2 y 3 respectivamente:

$$\text{gap}_{N,M,N'} = \tilde{f}_{N'}(\bar{y}) - \bar{v}_{N,M} \quad (13)$$

La varianza estimada del indicador en (13) de la calidad de la solución, puede entonces obtenerse de la expresión:

$$\sigma_{\text{gap}}^2 = \sigma_{N'}^2(\bar{y}) + \sigma_{\bar{v}_{N,M}}^2 \quad (14)$$

3.3 Selección del tamaño de muestra - Réplicas

Si bien el componente teórico indica condiciones de convergencia hacia la solución óptima cuando el tamaño de muestra N del SAA tiende a infinito, la realidad es que en una implementación computacional el tamaño de N ha de ser finito, y debe estimarse siempre buscando un compromiso adecuado entre la precisión de la solución y el esfuerzo computacional requerido para llegar a ella. Para un tamaño N grande, la función objetivo del SAA tiende a ser una mejor aproximación de la función objetivo del problema original, y la solución óptima del SAA tiende igualmente a ser una mejor solución del problema real. Así mismo, los límites superior e inferior calculados tienden a acotar de mejor modo la solución, y por tanto a estar más cercanos el uno del otro. Sin embargo, dependiendo del problema que resulta una vez que se toma una muestra aleatoria de los componentes estocásticos, la solución de un número elevado de tales problemas puede resultar poco práctica, incluso imposible desde una perspectiva computacional. Recuérdese que cuando se toma una realización particular de los parámetros aleatorios, el problema resultante es de naturaleza determinística, y ha de ser solucionado con las técnicas adecuadas a cada tipo particular de problema. La complejidad de solución puede aumentar linealmente respecto al tamaño del problema determinístico resultante, pero a menudo puede aumentar de forma exponencial.

Típicamente, estimar el valor objetivo $f(y)$ de una solución factible usando la aproximación $\hat{f}_N(y)$ requiere menor esfuerzo computacional que la solución del problema $\min\{\hat{f}_N(y)\}$. Por tanto, aunque la eficiencia computacional parece guiar hacia la solución de un tamaño de muestra pequeño, tiene sentido seleccionar una muestra independiente de tamaño mucho más grande para estimar un valor más preciso del valor de la función objetivo $\tilde{f}_{N'}(\bar{y})$. Adicional a lo dicho sobre el tamaño de muestra, ha de mencionarse que en la práctica tal selección es dinámica, y apoyada en mucho en implementaciones computacionales. La mayoría de las veces lo que se sugiere es usar una muestra de tamaño moderado para iniciar, y observar tanto la precisión de la solución como el desempeño computacional. Luego, si no se satisface la precisión, entonces usar una muestra cuyo tamaño crezca paulatinamente, en un proceso de ensayo y error, podría decirse en términos generales.

Ahora, si la complejidad computacional de la solución del SAA crece más que linealmente con el tamaño de la muestra, puede resultar más eficiente seleccionar una muestra de tamaño moderado, y en cambio, hacer varias réplicas usando ese mismo tamaño moderado de muestra en cada réplica. Kleywegt (2001) sugiere que este proceso conduce de nuevo a la solución óptima cuando el número de réplicas M tiende a infinito. Puede presentarse el caso en el cual un número de réplicas elevado no mejore la calidad de la solución obtenida, hecho que puede deberse a una selección de un tamaño de muestra N muy pequeño. En general, tanto el tamaño de N como el de M han de ser evaluados simultáneamente, y cambios han de ser sugeridos en uno u otro si no se obtiene la precisión adecuada, o bien, si el tiempo de computación para la solución empieza a ser más que el panorama de tiempo que el decisor tiene para apoyar la toma de la decisión.

4. Caso de aplicación

Para la aplicación del algoritmo SAA se usará un modelo típico de PL que resulta en la operación de un sistema de gestión de compras en una empresa comercial. Se trata de determinar, sobre un horizonte de planeación en el cual se estima con antelación la demanda, los costos fijos de hacer una orden y los costos de mantenimiento de inventario, los momentos óptimos en los cuales se debería ordenar, así como las cantidades que se debería ordenar y el tamaño del almacenamiento en cada periodo. El

modelo que se resuelve para el caso se formula del siguiente modo:

$$\text{Costo Total} = A \sum_{i=1}^N y_i + vr \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \geq i}^N q_{ij} (j-i) + vr \sum_{j=1}^N I_j^0 (j-1) \quad (15)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^N q_{ij} + I_j^0 = d_j, \forall j, j \geq i \quad (15.a)$$

$$\sum_{i=1}^N q_{i,N+1} + I_{N+1}^0 \geq I_f \quad (15.b)$$

$$\sum_{i=1}^N q_{ij} \leq \sum_{j=1}^N (d_j) y_i, \forall i, j \geq i \quad (15.c)$$

$$q_{ij}, I_j^0 \geq 0, \forall i, j \quad (15.d)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad (15.e)$$

En (15), A es el costo fijo de emitir una orden de compra, v es el costo unitario del producto que se ordena, r es el costo de mantenimiento de inventario. La variable y_i es de tipo binario e indica si en un periodo dado se debe ordenar o no, en tanto la variable q_{ij} indica la cantidad a ordenar en el periodo i para satisfacer la demanda del periodo j . La variable I_j^0 se refiere al inventario inicial que sería usado para cubrir la demanda de un periodo j . El parámetro I_f se refiere a la política de inventario final deseado en el sistema. La ecuación (15.a) garantiza la satisfacción de la demanda. En (15.b) se especifica el cumplimiento de la política de inventario final. La restricción (15.c) es una de tipo estructural, que garantiza que si la variable binaria indica que en un periodo no se hace pedido, entonces las variables de cantidad que desde ese periodo satisfacen su demanda o la de periodos siguientes deban ser iguales a cero. Por último (15.d) y (15.e) son las restricciones de dominio sobre el valor de las variables de decisión.

Las siguientes distribuciones de probabilidad con sus respectivos parámetros se usan para alimentar el modelo particular que se resuelve, que es de 8 periodos:

Costo de ordenar: Uniforme (2800, 3500) Valor mínimo – Valor máximo].

Valor unitario del producto: Triangular (230, 250, 290) Valor optimista – Valor más probable – Valor pesimista].

Costo de mantener inventario: Uniforme(2%, 5%) Valor mínimo – Valor máximo].

Demanda: Normal (600, 35); Normal (420, 46); Normal (294, 27); Normal (206, 22); Normal (145, 16); Normal (101, 5); Normal (71, 4); Normal (50, 2) Media – Desviación estándar].

4.1 Implementación computacional

El modelo se ha implementado usando la hoja de cálculo Microsoft Excel 2003, tanto para la generación de las muestras, como para la solución de los modelos determinísticos, en este último caso haciendo uso de la herramienta Solver®. La generación de valores ajustados a las distribuciones de probabilidad usadas se ha programado usando el esquema VBA – *Visual Basic for Applications* - . La automatización del SAA ha sido igualmente programada en VBA. Se hace uso de un equipo con procesador Pentium Dual Core, a 1.8Ghz, y con 1 Gb de memoria RAM. Los tamaños de muestra usados son $N = 50$, $N' = 150$ y $M = 30$. En la sección 3.2 se define la notación relacionada con el tamaño de muestra. Se probó con valores más pequeños (20, 30) y más grandes (80, 100) para N , sin observar variaciones significativas en los resultados obtenidos. El tiempo de solución en cambio aumenta considerablemente con el aumento en el tamaño de muestra usado. Los valores que se usan para el tamaño de muestra son arbitrarios, pero teniendo en cuenta que para el trabajo de Santoso et. al(2005) se usó $N = 20, 30, 40$ y 60 , $M = 20$ y $N' = 1000$, en un ambiente en el cual el número de variables continuas es del orden de 500.000, con 100.000 restricciones y 100 variables binarias; además con tales tamaños de muestra se reporta convergencia al valor óptimo del problema que ellos abordan.

Es necesario mencionar un aspecto de la implementación relacionado con la característica de dos etapas del modelo. Nótese que la solución óptima entregada por el modelo después de las corridas, para las variables de solución, corresponde al promedio de los valores que se han obtenido en los diferentes procesos de muestreo. Ello tiene sentido para las variables continuas, pero no así para las variables binarias. En la práctica, la solución del modelo dado por la ecuación (6) supone contar con un procedimiento eficiente para la asignación de las decisiones de primer nivel, de modo que subproblema $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q(y, \xi^n)$ quede definido. Es decir, se hace necesario utilizar una técnica de particionamiento para abordar la solución del problema. Para el caso de ejemplo que se usó, dado su tamaño reducido, no fue necesario utilizar una técnica de descomposición. En contraste, se permite que para cada nuevo escenario generado con el esquema Monte Carlo, se optimice incluso las decisiones de primer nivel, relacionadas con las variables binarias. Como la convergencia de la solución se calcula a partir de los valores de la función objetivo, proceder así no supone un inconveniente en el uso de la metodología. El reporte

de los valores de solución para las variables de la segunda etapa se hace entonces tomando el promedio de los valores obtenidos para cada variable en cada iteración del método. Las variables de primer nivel, en cambio, se asignan analizando las variables de la segunda etapa, lo cual se puede hacer dada la naturaleza del problema y su tamaño, como ya se mencionó. En tal sentido, si el promedio de las variables indica que se ordena una cierta cantidad en un periodo i dado, con independencia del periodo en que se usará tal pedido, entonces sería necesario reportar una decisión de pedido en ese periodo i , con el correspondiente valor de 1 para la variable binaria.

4.2 Resultados

En la tabla 1 se resume los resultados obtenidos al aplicar el procedimiento SAA sobre el caso de estudio descrito en la sesión 4.

Nótese que se reportan dos experimentos computacionales para cada tamaño de muestra usado. Nótese también que, para los dos primeros casos (30, 30, 150), el algoritmo de optimización debe resolver, por un lado, 900 subproblemas de PL en la primera etapa y 150 en la segunda. Esos números se aumentan a 1500 modelos y 150, respectivamente, en los dos casos finales. A pesar que el modelo es pequeño, la implementación de solución de modelos de PL usando el Solver® de Excel consume tiempo importante de computación. Es claro también que es mucho mayor la proporción de aumento en el tiempo de computación al aumentar el tamaño de muestra, que la bondad lograda en los indicadores de desempeño gracias a ese aumento. Nótese que el $gap_{N,M,N'}(\bar{y})$ que mide la cercanía a la solución óptima es muy similar en los diferentes escenarios.

5. Conclusiones

Se ha abordado la presentación de un algoritmo de solución que puede ser aplicado sobre modelos de PL de naturaleza estocástica, esto es, que al menos uno de sus parámetros sea considerado una variable

aleatoria, con una distribución de probabilidad que se asume conocida. El esquema de solución es lo suficientemente general como para que pueda usarse en la solución de otros problemas de programación matemática y optimización, sin la exigencia de linealidad que aquí se ha usado. La estructura del algoritmo es muy sencilla en términos de su implementación, si bien se tiene que resolver inconvenientes relacionados con el tamaño de muestra que habría de usarse para lograr un grado de convergencia adecuado a los propósitos de la decisión que se desea tomar. Sin embargo, pueden surgir complejidades en el uso del método, pues se parte de una suposición, no siempre válida dependiendo de la naturaleza del modelo que se aborde, en el sentido que se dispone de algoritmos eficientes de solución para la versión determinística del modelo. De no ser este el caso, y dado que el SAA supone la solución repetidas veces (más de 1000 veces, para el caso de estudio usado, por ejemplo) del mismo modelo en su estructura pero con variaciones en los parámetros que lo definen, el tiempo computacional puede ser prohibitivo.

La metodología de abordaje para la solución es prometedora para los modelos de PL mixta, pues en tal caso se dispone de algoritmos eficientes de solución que han sido probados en modelos de cientos de miles de variables. Además, tal como se ha visto en el caso de estudio, así como en resultados reportados en otras investigaciones, un tamaño de muestra modesto puede dar lugar al cálculo de soluciones que están a un 5% del óptimo, o incluso a menos que 5%. Téngase en cuenta que para el caso de ejemplo se ha usado como solucionador la herramienta Solver® de Excel, cuya eficiencia puede ser superada ampliamente por herramientas específicamente diseñadas para solución de modelos de PL y PL mixta, como el caso de CPLEX, que es el solucionador comercial de más renombre en el mercado, comercializado por la casa de software ILOG.

Los resultados son importantes de cara al abordaje de los problemas de optimización de redes de

Tabla 1. Reporte de resultados y desempeño computacional

N, M, N'	$\bar{v}_{N,M}$	$\sigma_{\bar{v}_{N,M}}^2$	$\tilde{f}_{N'}(\bar{y})$	$\sigma_{\tilde{f}_{N'}(\bar{y})}^2$	$gap_{N,M,N'}(\bar{y})$	σ_{gap}^2	tiempoPC
30, 30, 150	17.367,0	1.747,7	18.209,9	34.510,0	4,85%	190,42	5 m 6 s
30, 30, 150	17.343,0	3.231,3	18.209,9	34.510,0	5,10%	194,27	4 m 20 s
50, 30, 150	17.388,4	1.937,9	18.195,0	32.226,4	4,64%	184,84	28 m 15 s
50, 30, 150	17.408,9	1.729,1	18.195,0	32.226,4	4,52%	184,27	29 m 36 s

abastecimiento, en los cuales típicamente se intenta tomar decisiones tanto de configuración o topología de las redes, como de optimización de los flujos dada una estructura de localizaciones específica. Es decir, son problemas que se pueden considerar de dos etapas, siendo la primera la decisión de localización de las instalaciones físicas, y la segunda, las decisiones de uso específico de tales instalaciones y sus respectivas relaciones. Recuérdese que es el estudio de tales sistemas logísticos el que ha dado lugar a las inquietudes respecto a la optimización estocástica, pues hay parámetros críticos que casi necesariamente han de considerarse sujetos a riesgo, como la demanda o los tiempos de reposición, para citar únicamente los que se mencionan con más frecuencia. Queda entonces abierto un interesante campo de aplicación, cuyos resultados pueden mejorar las decisiones sobre los sistemas de distribución de mercancías, sistemas que, en el panorama del comercio internacional se requiere que funcionen del modo más eficientemente posible.

6. Referencias Bibliográficas

1. M. H. Alrefaei and S. Andradóttir (1999). A simulated annealing algorithm with constant temperature for discrete stochastic optimization, *Management Science*, 45, 748–764.
2. R. E. Bechhofer, T. J. Santner, and D. M. Goldsman (1995). *Design and Analysis of Experiments for Statistical Selection, Screening and Multiple Comparisons*, John Wiley, New York.
3. J. R. Birge and F. Louveaux (1997). *Introduction to Stochastic Programming*, Springer Series in Operational. Research., Springer-Verlag, New York.
4. Bravo, Juan José y Bravo Jaime Felipe (2005). *Modelo matemático dinámico de distribución de productos a nivel nacional, con decisiones de localización, sistema de inventarios multi-eslabones y decisiones de cross-docking*. Trabajo de grado (Magíster en Ingeniería de Sistemas). Universidad del Valle, Cali - Colombia.
5. Eksioglu, Burak (2000). Global Supply Chain Models, documento de trabajo, *Industrial and Systems Engineering Department*. University of Florida. California.
6. Dupacová, Jitka (2002). Applications of stochastic programming: Achievements and questions. *European Journal of Operations Research*, 140, 281 – 290.
7. Dormer, A., Vazacopoulos, A., Verma, N. y Tipi (2003). H. *Modeling & Solving Stochastic Programming Problems in Supply Chain Management using Xpress-SP1*. Dash Optimization, Inc. 2003.
8. Escudero, Laureano.F., et al (1999). Schumann, a modeling framework for supply chain management under uncertainty. *European Journal of Operations Research*, 119, 14 – 34.
9. Escudero, Laureano, et al.(1999). CORO, a modeling and an algorithmic framework for oil supply, transformation and distribution optimization under uncertainty. *European Journal of Operations Research* 114, 638 – 656.
10. B. L. Fox and G. W. Heine (1995). Probabilistic search with overrides, *Annals in Applied Probabilistic*, 5, 1087–1094.
11. A. Futschik and G. C. Pflug (1995). Confidence sets for discrete stochastic optimization, *Annals in Operational Research*, 56, 95–108.
12. A. Futschik and G. C. Pflug (1997). Optimal allocation of simulation experiments in discrete stochastic optimization and approximative algorithms, *European Journal in Operational Research*, 101, 245–260.
13. S. B. Gelfand and S. K. Mitter (1989). Simulated annealing with noisy or imprecise energy measurements, *Journal in Optimization. Theory and Applications*, 62, 49–62.
14. Goetschalckx, M., Vidal, C. J., y Dogan, K. (2002) Designing Global Supply Chain Systems, *European Journal of Operational Research*, 143, 1–18.
15. Goetschalckx Marc, Vidal Carlos J., Dogan Koray (2002) Modeling and design of global logistics systems: A review of integrated strategic and tactical models and design algorithms, *European Journal of Operational Research*, 43, 57–63.
16. W. Gutjahr and G. C. Pflug (1996). Simulated annealing for noisy cost functions. *Journal on Global Optimization*, 8, 1–13.
17. Higle, J., y Sen, S (1999). An Introductory Tutorial on Stochastic Linear Programming Models. *Interfaces* 29, 33–61.
18. Y. Hochberg and A. Tamhane (1987). *Multiple Comparison Procedures*, John Wiley, New York.
19. T. Homem-de-Mello (1999). *Variable-Sample Methods and Simulated Annealing for Discrete Stochastic Optimization*, documento de trabajo, Department of Industrial, Welding and Systems Engineering, The Ohio State University, Columbus, Ohio.
20. D. P. Morton and R. K. Wood (1998). On a stochastic knapsack problem and generalizations, in *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic Search: Interfaces in Computer Science and Operations Research*, D. L. Woodruff, (editor), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 149–168.

21. Mitra, G., Poojari, Ch., y Sen, S. (2004). Strategic and tactical planning models for supply chain: an application of stochastic mixed integer programming. *Centre for the Analysis of Risk and Optimisation Modelling Applications*. Brunel University. United Kingdom.
22. V. I. NORKIN, Y. M. Ermoliev and A. Ruszczyński (1998). On optimal allocation of indivisibles under uncertainty, *Operational Research*, 46, 381–395.
23. TORO, Héctor (2001). *Modelación Matemática de la Cadena de Abastecimiento en Busca de Localización Eficiente de Plantas y/o Centros de Distribución*. Tesis como requisito parcial para obtener el título de Ingeniero Industrial. Universidad del Valle. Cali - Colombia.
24. VIDAL, Carlos y M. Goetschalckx (2000). Modeling the Impact of Uncertainties on Global Logistics Systems. *Journal of Business Logistics*. 21, 95 – 120.