

# UN MODELO ESTOCÁSTICO PARA LAS FIGURAS DE CHLADNI

CARLOS ANDRÉS REYES KREIE

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
CALI  
2013

UN MODELO ESTOCÁSTICO PARA LAS FIGURAS  
DE CHLADNI

CARLOS ANDRÉS REYES KREIE

Trabajo de investigación presentado  
como requerimiento parcial  
para el grado en Maestría en Ciencias Matemáticas

Director  
Jaime Arango Dr. rer. nat.

UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS  
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
CALI

2013

## *Un modelo estocástico para las figuras de Chladni*

### RESUMEN

A finales del siglo XVIII, E. Chladni observa que la arena fina, esparcida al azar sobre una placa, se reacomoda formando bellos patrones predecibles cuando se excita la placa con una fuerza externa apropiada. Al frotar su borde con un arco de violín, la placa entra en resonancia con una de sus frecuencias naturales y la arena se acomoda sobre las líneas nodales del modo de vibración correspondiente. En este trabajo se propone un modelo plausible en el que la posición de las partículas obedece una ecuación diferencial estocástica (EDE) relativamente simple. El resultado principal muestra que los puntos que conforman las líneas nodales del modo de vibración resonante, son equilibrios estocásticamente estables de la EDE. Para validar el modelo se comparan simulaciones estocásticas con algunos resultados experimentales y las líneas nodales de placas empotradas y placas con frontera libre.

# Índice general

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUCCIÓN</b>                                           | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>G. KIRCHHOFF Y LA VIBRACIÓN DE PLACAS</b>                  | <b>5</b>  |
| 2.1      | Líneas inmóviles . . . . .                                    | 6         |
| 2.2      | Placas circulares . . . . .                                   | 9         |
| 2.3      | Dominios generales y el método de elementos finitos . . . . . | 17        |
| 2.4      | Los dibujos de Chladni . . . . .                              | 20        |
| 2.5      | Hecho en casa . . . . .                                       | 22        |
| <b>3</b> | <b>MOVIMIENTO BROWNIANO EN PLACAS</b>                         | <b>24</b> |
| 3.1      | Se mueven a saltos . . . . .                                  | 25        |
| 3.2      | Simulación del proceso estocástico . . . . .                  | 26        |
| 3.3      | Métodos numéricos para EDE . . . . .                          | 30        |
| 3.4      | Movimiento Browniano en dominios acotados . . . . .           | 32        |
| 3.5      | Equilibrios estables y las figuras de Chladni . . . . .       | 34        |
| 3.6      | Ejemplo de inestabilidad . . . . .                            | 37        |
| 3.7      | El modelo 1-dimensional y las funciones de Lyapunov . . . . . | 38        |
|          | <b>BIBLIOGRAFÍA</b>                                           | <b>43</b> |

# Índice de figuras

|       |                                                                                                                                                                                                       |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.0.1 | Figuras de Chladni en una placa cuadrada con frontera libre . . .                                                                                                                                     | 2  |
| 1.0.2 | Antes y después de la simulación estocástica del modelo. . . . .                                                                                                                                      | 3  |
| 1.0.3 | Figura de Chladni lograda experimentalmente. . . . .                                                                                                                                                  | 3  |
| 2.1.1 | Modos de vibración de un círculo empotrado correspondientes<br>a las dos frecuencias naturales más bajas. . . . .                                                                                     | 7  |
| 2.2.1 | Picos que indican la posición de algunas de las raíces de $\rho_n(\lambda) =$<br>o para la placa empotrada. Ver también la tabla 2.2.1. . . . .                                                       | 13 |
| 2.2.2 | Líneas nodales de los modos de vibración $\phi_{nm}$ para placas circula-<br>res (negro). La placa empotrada (izquierda) y la placa libre (de-<br>recha). . . . .                                     | 15 |
| 2.3.1 | Líneas nodales (blanco) para una placa (triángulo equilátero de<br>lado 2) con borde libre ( $\nu = 0.225$ ). Abajo, las figuras de Chladni<br>correspondientes, obtenidas experimentalmente. . . . . | 19 |
| 2.4.1 | Líneas nodales (blanco) y contornos para una placa cuadrada de<br>lado 1 con los valores de $\lambda$ correspondientes ( $\nu = 0.225$ ). . . . .                                                     | 20 |
| 2.4.2 | Figuras de Chladni obtenidas como combinación lineal de los<br>modos en la figura 2.4.1 para $\lambda = 5.995$ . . . . .                                                                              | 21 |
| 2.5.1 | Montaje experimental: se sujeta la placa desde su centro por me-<br>dio de un tornillo, el cual a su vez se sujeta a una base utilizando<br>una prensa. . . . .                                       | 22 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.5.2 | Figuras de Chladni obtenidas experimentalmente sobre una placa de hierro cuadrada sujeta de su centro. . . . .                                                                                                                                               | 23 |
| 2.5.3 | Figuras de Chladni que no atraviesan el centro de la placa (el tornillo se encuentra a 2 centímetros del centro). . . . .                                                                                                                                    | 23 |
| 3.1.1 | Granos de sal fotografiados a través de un microscopio, se pueden apreciar las esquinas e irregularidades de las partículas. . . . .                                                                                                                         | 25 |
| 3.2.1 | Los caminos que siguen algunas partículas en una simulación del proceso estocástico $\{X_n^a\}_{n=0}^N$ . A la derecha se encuentran los contornos del modo de vibración $\phi$ . . . . .                                                                    | 27 |
| 3.2.2 | Caminos de las partículas para distintos valores de $a$ . . . . .                                                                                                                                                                                            | 28 |
| 3.2.3 | Utilizando software para el análisis de imágenes podemos trazar los caminos recorridos por las partículas en una filmación del experimento. El gráfico muestra dos imágenes independientes, en la de la derecha se utilizaron más partículas de sal. . . . . | 29 |
| 3.2.4 | Distribución inicial de las partículas (izquierda) y posición final tras la simulación (derecha). . . . .                                                                                                                                                    | 30 |
| 3.4.1 | Los caminos Brownianos parten desde los cuadrados negros, al final de la simulación se cuentan cuantos caen sobre $\Gamma_1$ y cuantos sobre $\Gamma_2$ . . . . .                                                                                            | 33 |
| 3.5.1 | Contornos de la función $u$ definida en la prueba del lema 1. . . . .                                                                                                                                                                                        | 36 |
| 3.6.1 | Algunos caminos de la solución (3.10), el gráfico está en escala logarítmica. Este gráfico ilustra la inestabilidad de las soluciones de (3.8). . . . .                                                                                                      | 39 |

# Agradecimientos

Por la dirección de este trabajo agradezco al profesor Jaime Arango. También estoy en deuda con el Posgrado de Matemáticas y con el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle por el apoyo generoso que recibí durante mis estudios.

En el desarrollo de esta investigación me beneficié de las discusiones que tuve con varias personas. Entre ellas quiero destacar a la profesora Adriana Gómez y al señor Carlos Delgado del Centro de Cómputo de la Universidad del Valle.

Recibí una gran ayuda del Laboratorio de Imágenes del Posgrado de Biología de la Universidad del Valle, al permitirme usar sus equipos de fotografía.

Mi deuda de gratitud va también para mis padres Antonio José Reyes e Inge Kreie, y a mis hermanos Eduardo y Carolina Reyes por su afecto y apoyo incondicional.

# 1

## Introducción

ERNST FLORENS CHLADNI (1756–1827), doctor en derecho, conferencista itinerante, cazador de meteoritos y músico aficionado, era un preclaro exponente del siglo de las luces. El padre de la acústica moderna se propone explicar la naturaleza del sonido a finales del siglo XVIII. En uno de sus experimentos más famosos, que alguna vez presentaría a Napoleón Bonaparte, Chladni esparcía arena sobre una placa cuadrada. Mientras hacía vibrar la placa, frotándola con el arco de un violín, su público observaba asombrado como la arena saltaba en todas las direcciones hasta formar patrones de una belleza extraordinaria. En la figura 1.o.1 se muestran algunos de estos patrones dibujados por el mismo Chladni en su libro ‘Die Akustik’ [6]. Ya sea por el atractivo del experimento o por el kilo de oro que ofreció Napoleón al que lograra desentrañar el misterio, muchas de las mentes más brillantes de

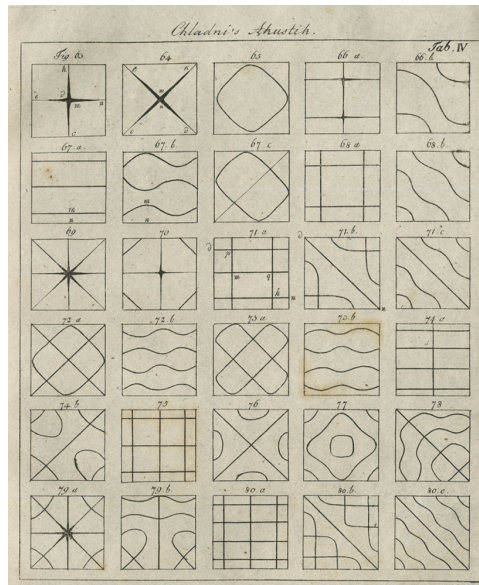


**Figura 1.0.1:** Figuras de Chladni en una placa cuadrada con frontera libre

la época pondrían sus mejores esfuerzos en explicar las figuras de Chladni, llamadas así en honor a su descubridor.

El estudio del fenómeno fue paralelo a avances revolucionarios en las matemáticas, entre ellos el nacimiento del método de los elementos finitos bajo la mano de Walther Ritz, y el desarrollo de una teoría de elasticidad para placas a la que contribuyeron Gustav Kirchhoff y Sophie Germain. Fue precisamente Kirchhoff quien finalmente estableció correctamente las ecuaciones diferenciales que rigen las vibraciones de las placas con sus respectivas condiciones de frontera (aunque el premio de Napoleón fue entregado a Sophie Germain). Para un entretenido e iluminador análisis de los hechos históricos y repercusiones del estudio de este fenómeno en las matemáticas referimos al lector a [9].

El fenómeno se explicó de la siguiente manera: las líneas de Chladni corresponden con las líneas nodales de los modos de vibración de la placa. En otras palabras, la arena se acomoda en las líneas donde la placa no está vibrando. Según esto, si una partícula de arena llega a uno de estos puntos donde no vibra la placa, permanece inmóvil de ahí en adelante debido a que no hay vibraciones que la hagan

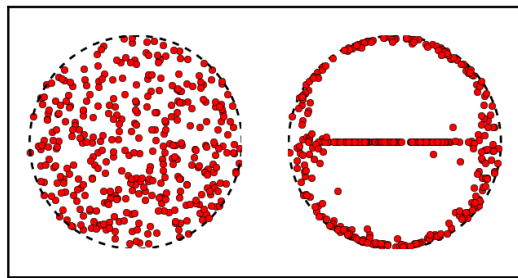


**Figura 1.0.2:** Antes y después de la simulación estocástica del modelo.

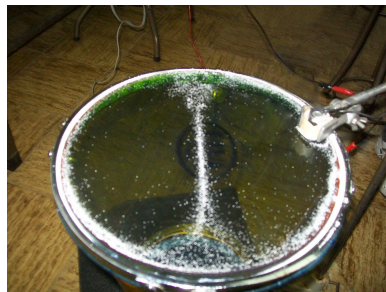


**Figura 1.0.3:** Figura de Chladni lograda experimentalmente.

mover. Sin ayuda de computadores, Ritz fue capaz de calcular los modos de vibración para la placa cuadrada y dibujar algunas de estas líneas nodales, mostrando de forma espectacular como coinciden estas con las figuras de Chladni. Replicando el experimento se puede observar que la arena se mueve de manera impredecible, de algún modo recuerda la imagen de un televisor con mala señal o al movimiento Browniano. No es claro en absoluto que la trayectoria serpenteante de una partícula de arena tenga en algún momento que llegar a una línea nodal. En este sentido creemos que queda mucho por decir acerca del fenómeno. ¿Cómo es el movimiento de la arena sobre la placa? ¿Y por qué termina la arena sobre estas líneas inmóviles de la placa?

Nuestro propósito es reconciliar el movimiento aparentemente caótico de las partículas sobre la placa, con las figuras claras y deterministas que se forman al final del experimento. Proponemos un modelo estocástico para describir las trayectorias que siguen los granos de arena, basado en simples observaciones experimentales. Las simulaciones numéricas del modelo que hemos adelantado coinciden bien, tanto con los resultados teóricos como con las observaciones de los experimentos realizados. Por ejemplo, en la figura 1.0.2 se muestran la configuración inicial de 800 partículas distribuidas sobre un círculo y el resultado al final de la simulación del modelo, a la derecha, en la figura 1.0.3 se muestra la fotografía de una figura de Chladni obtenida experimentalmente sobre una caja vallenata. Lla-

ma poderosamente la atención la similitud entre las dos figuras.

El trabajo consiste de dos partes: en la primera repasamos la teoría sobre la vibración de placas, y hacemos una comparación de la teoría con las observaciones de Chladni y resultados de algunos experimentos que hemos realizado. En la segunda parte discutimos el movimiento de la arena sobre la placa, y proponemos una ecuación diferencial estocástica (EDE) como modelo para dicho movimiento. Nuestro resultado principal consiste en demostrar que los puntos inmóviles de la placa son equilibrios estables de la EDE. De esta forma tendremos partículas que, con una alta probabilidad, permanecerán siempre cerca de las líneas nodales y formarán las líneas de Chladni.

*“Las ecuaciones diferenciales parciales  
fueron creadas por Dios, las condiciones de  
frontera por el demonio.”*

Alan Turing

# 2

## G. Kirchhoff y la vibración de placas

EN UNO DE LOS ARTÍCULOS más influyentes en la teoría de elasticidad [13], escrito en 1850 por Gustav Kirchhoff, se deducen las ecuaciones diferenciales que gobiernan la deformación de placas y sus debidas condiciones de frontera. Supongamos que tenemos una placa homogénea definida en una región plana,  $U$  (la placa en reposo), y que está sometida a una fuerza externa  $F$ . El desplazamiento vertical en el tiempo  $t$  de un punto  $(x, y) \in U$ , denotado por  $u(t, x, y)$ , está gobernado por la solución de

$$\begin{aligned}\rho h u_{tt} + D \Delta^2 u &= F(t, x, y), & \text{en } \mathbb{R} \times U, \\ u &= p, & \text{en } \{t = 0\} \times U, \\ u_t &= v, & \text{en } \{t = 0\} \times U, \\ B(u) &= 0, & \text{en } \mathbb{R} \times \partial U,\end{aligned}\tag{2.1}$$

en donde  $\Delta$  es el operador de Laplace y  $\Delta^2$  es el operador biarmónico (la composición del operador de Laplace consigo mismo). Las demás variables representan los siguientes parámetros físicos:

$$\begin{aligned} \rho &: \text{densidad de la placa,} \\ h &: \text{espesor de la placa,} \\ D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, & \quad E : \text{modulo de Young,} \\ & \quad \nu : \text{razón de Poisson,} \\ p = p(x, y) &: \text{posición inicial de la placa,} \\ v = v(x, y) &: \text{velocidad inicial de la placa.} \end{aligned}$$

Finalmente  $B(u)$  es un operador que representa las condiciones de frontera de la placa, la cual asumiremos que está empotrada o que vibra libremente (ver [18]). En el caso de la placa empotrada, es decir con bordes sujetos, digamos que a una caja con rigidez infinita, las condiciones de contorno están dadas por

$$u = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \partial U, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \partial U, \quad (2.2)$$

en donde  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  es la derivada en la dirección normal exterior al borde  $\partial U$ . Cuando la placa vibra libremente, las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \nu \Delta u + (1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} &= 0, \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \partial U, \\ (1 - \nu) \frac{\partial^3 u}{\partial \eta \partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\Delta u) &= 0, \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \times \partial U, \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  es la derivada en la dirección tangente al borde  $\partial U$ .

## 2.1 LÍNEAS INMÓVILES

Conocer la forma en que vibra la placa es sin duda un buen punto de partida para estudiar el fenómeno de Chladni, sin embargo, calcular las soluciones de (2.1) es

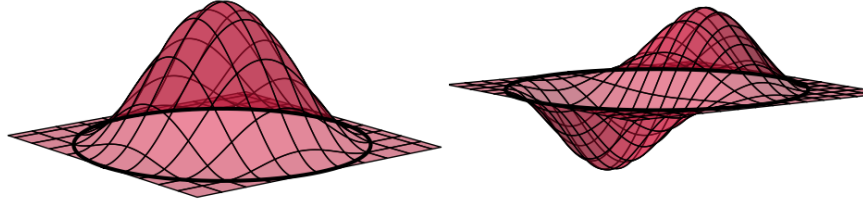


**Figura 2.1.1:** Modos de vibración de un círculo empotrado correspondientes a las dos frecuencias naturales más bajas.

muy difícil y solo puede hacerse en casos muy especiales; por ejemplo cuando la placa es cuadrada o circular. A pesar de esto, el método de separación de variables, la teoría espectral y un fenómeno de resonancia permiten describir el movimiento de la placa de una manera relativamente sencilla. En efecto, la variable temporal  $t$  puede separarse de las variables espaciales  $x$  y  $y$  con ayuda del problema de valores propios (ver [7])

$$\begin{aligned}\Delta^2 \varphi - \lambda^4 \varphi &= 0 \quad \text{en } U, \\ B(\varphi) &= 0 \quad \text{en } \partial U.\end{aligned}\tag{2.4}$$

De acuerdo con resultados conocidos de la teoría espectral de operadores diferenciales (ver [1]) tenemos que cualquier solución de (2.1) se puede escribir de la forma

$$u(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \varphi_n(x, y),\tag{2.5}$$

donde, para todo  $n \in \mathbb{N}$  el par  $(\lambda_n, \varphi_n)$  satisface el problema de valores propios (2.4). Para  $n = 1, 2, \dots$ , la función  $\varphi_n$  se conoce como el  $n$ -ésimo modo de vibración de la placa modelada por (2.1). En la figura 2.1.1 se muestran los primeros dos modos de vibración de una placa circular empotrada. De acuerdo con (2.5), la vibración de la placa es una superposición a la cual contribuyen los movimientos de estos dos modos (entre infinitos otros).

Sabemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$  el espacio propio definido por (2.4) es de di-

mensión finita, y se puede ordenar la secuencia de valores propios así

$$0 \leq \lambda_1^4 \leq \lambda_2^4 \leq \dots, \text{ con } \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^4 = \infty. \quad (2.6)$$

Además, si

$$F(t, x, y) = \cos \omega t \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n(x, y), \quad (2.7)$$

es decir, si la vibración de la placa se debe a una fuerza externa armónica de frecuencia  $\omega$ , reemplazando (2.5) en (2.1) (ver [3] o [2]), se obtiene que  $T_n$  satisface

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_n}{dt^2} + \left( \frac{D \lambda_n^4}{\rho h} \right) T_n(t) &= f_n \cos \omega t, \quad t \geq 0, \\ T_n(0) &= 0, \quad T'_n(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para simplificar los cálculos hemos supuesto que las condiciones iniciales son nulas, es decir  $p(x, y) \equiv v(x, y) \equiv 0$ . Como se sabe, el crecimiento en el tiempo de la solución  $T_n$  de (2.8) dependerá de si la frecuencia externa  $\omega$  entra en resonancia con la frecuencia natural  $\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$ . Un cálculo sencillo muestra que

$$T_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n \cos \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2}, & \text{si } \omega_n \neq \omega, \\ \frac{f_n t \sin \omega t}{2\omega}, & \text{si } \omega_n = \omega. \end{cases}$$

De (2.6) se deduce que existe a lo más una frecuencia natural, digamos  $\omega_m$ , que entra en resonancia con la fuerza externa, de frecuencia  $\omega$ . En tal caso la solución dada por la serie (2.5) tendrá un término dominante, más precisamente

$$\frac{u(t, x, y)}{t} = \frac{f_m}{2\omega} \sin \omega t \varphi_m(x, y) + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Es evidente que en la realidad  $u$  no puede ser arbitrariamente grande, y que hay factores de amortiguamiento que evitan que esto pase y se rompa la placa. Sin embargo, el modelo indica un modo dominante y por lo tanto es razonable asumir

que las vibraciones de la placa se pueden aproximar por

$$u(t, x, y) = T(t) \varphi_m(x, y), \quad (2.9)$$

donde  $T$  es una función periódica cuya frecuencia coincide con  $\omega_m$ .

Esto simplifica enormemente las cosas, en efecto, estamos preparados para entender la explicación de las figuras de Chladni a la que se llegó con el trabajo de Kirchhoff. Si observamos (2.9), los ceros de  $\varphi_m$  son puntos estáticos de la placa, y por lo tanto es lógico pensar que si una partícula de arena llega a uno de estos puntos, permanecerá ahí en lo que sigue del experimento. Sucede que las líneas nodales de un modo  $\varphi$ ,

$$N_\varphi = \{(x, y) \in U \mid \varphi(x, y) = 0\},$$

coinciden con las figuras de Chladni. Si volvemos a la figura 2.1.1 podemos apreciar que en el modo de la izquierda las líneas nodales coinciden con la frontera del disco, mientras que en el modo de la derecha hay adicionalmente una línea diametral donde el modo se anula. Alentamos al lector a hacer la comparación de este último modo con las figuras 1.0.2 y 1.0.3 de la introducción. A continuación mostraremos como se obtienen estos modos cuando la placa es circular, uno de los casos excepcionales donde (2.4) se puede resolver explícitamente.

## 2.2 PLACAS CIRCULARES

Resulta que (2.4) se puede factorizar como

$$\Delta^2 \varphi - \lambda^4 \varphi = (\Delta + \lambda^2)(\Delta - \lambda^2)\varphi = 0. \quad (2.10)$$

Como los factores conmutan, es claro que cualquier solución de

$$(\Delta + \lambda^2)\varphi_1 = 0 \quad (2.11)$$

o de

$$(\Delta - \lambda^2)\varphi_2 = 0 \quad (2.12)$$

es a su vez solución de (2.10). Además, si  $\lambda \neq 0$ , toda solución  $\varphi$  de (2.10) se puede escribir como  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , donde  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son soluciones de (2.11) y (2.12) respectivamente. Esto se puede ver escribiendo

$$\varphi = \underbrace{\frac{1}{2\lambda^2}(\Delta + \lambda^2)\varphi}_{\varphi_1} + \underbrace{\frac{1}{2\lambda^2}(-\Delta + \lambda^2)\varphi}_{\varphi_2},$$

y verificando fácilmente (2.11) y (2.12).

Consideremos entonces el disco unitario  $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ , y el Laplaciano en coordenadas polares, dado por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Para resolver (2.11) podemos aplicar el método de separación de variables y suponer que  $\varphi_1(r, \theta) = R_1(r)\Theta_1(\theta)$ . Reemplazando en (2.11) obtenemos

$$r^2 \left[ \left( \frac{d^2 R_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} \right) \frac{1}{R_1} + \lambda^2 \right] = -\frac{1}{\Theta_1} \frac{d^2 \Theta_1}{d\theta^2},$$

de tal forma que cada lado de la ecuación debe ser igual a una constante digamos  $k^2$ . Obtenemos entonces las siguientes dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2 \Theta_1}{d\theta^2} + k^2 \Theta_1 = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} + \left( \lambda^2 - \frac{k^2}{r^2} \right) R_1 = 0. \quad (2.14)$$

La solución de (2.13) está dada por

$$\Theta_1 = G_1 \cos k\theta + H_1 \sin k\theta, \quad (2.15)$$

donde  $G_1$  y  $H_1$  son constantes arbitrarias. Para que  $\Theta_1$  sea  $2\pi$ -periódica,  $k$  debe ser un número entero; por otro lado, los números naturales  $n = 0, 1, 2, \dots$  bastan para generar todas las soluciones.

Para la ecuación (2.14) hacemos el cambio de variable  $\xi = \lambda r$  obteniendo así la ecuación de Bessel de orden entero

$$\frac{d^2 R_1}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR_1}{d\xi} + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) R_1 = 0,$$

cuya solución se puede dar en términos de las funciones de Bessel de primera y segunda especie  $J_n$  y  $Y_n$

$$R_1(r) = A J_n(\lambda r) + B Y_n(\lambda r),$$

y así

$$\varphi_1(r, \theta) = (A J_n(\lambda r) + B Y_n(\lambda r)) (G_1 \cos n\theta + H_1 \sin n\theta). \quad (2.16)$$

Análogamente para solucionar (2.12) suponemos  $\varphi_2(r, \theta) = R_2(r)\Theta_2(\theta)$ , y llegamos a las ecuaciones

$$\frac{d^2 \Theta_2}{d\theta^2} + k^2 \Theta_2 = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2 R_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_2}{dr} - \left(\lambda^2 + \frac{n^2}{r^2}\right) R_2 = 0. \quad (2.18)$$

La ecuación angular (2.17) es la misma que en (2.13) y para (2.18) hacemos nuevamente la substitución  $\xi = \lambda r$  y llegamos a la ecuación de Bessel modificada

$$\frac{d^2 R_2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dR_2}{d\xi} - \left(1 + \frac{k^2}{\xi^2}\right) R_2 = 0, \quad (2.19)$$

cuyas soluciones son las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda

especie  $I_n$  y  $K_n$ . Así,

$$\varphi_2(r, \theta) = (C I_n(\lambda r) + D K_n(\lambda r)) (G_2 \cos n\theta + H_2 \sin n\theta). \quad (2.20)$$

Además  $Y_n$  y  $K_n$  tienen una singularidad en  $r = 0$  de modo que  $B = D = 0$ . Por (2.16) y (2.20), la solución general de (2.10) en el disco está dada por

$$\varphi(r, \theta) = \cos n\theta (A^* J_n(\lambda r) + C^* I_n(\lambda r)) + \sin n\theta (B^* J_n(\lambda r) + D^* I_n(\lambda r)), \quad (2.21)$$

donde  $A^*, B^*, C^*$  y  $D^*$  son constantes arbitrarias.

Ahora consideremos las condiciones de frontera, empezando por el caso más sencillo.

#### 2.2.1 LA PLACA CIRCULAR EMPOTRADA

En el caso de la placa circular empotrada, las condiciones de frontera (2.2) se traducen en

$$\varphi|_{r=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = 0. \quad (2.22)$$

La primera condición es equivalente a pedir  $A^* J_n(\lambda) + C^* I_n(\lambda) = B^* J_n(\lambda) + D^* I_n(\lambda) = 0$ . Esta condición permite simplificar la solución (2.21) aun más: un cálculo fácil muestra que  $A^* D^* = B^* C^*$ , y por lo tanto,  $(A^* J_n(\lambda r) + C^* I_n(\lambda r))$  es múltiplo escalar de  $(B^* J_n(\lambda r) + D^* I_n(\lambda r))$ . De esta forma podemos escribir la solución (2.21) como

$$\varphi(r, \theta) = \cos(n\theta - \eta_0) (p J_n(\lambda r) + q I_n(\lambda r)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

de modo que las condiciones de frontera (2.22) se pueden escribir así

$$\begin{pmatrix} J_n(\lambda) & I_n(\lambda) \\ J'_n(\lambda) & I'_n(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Se tiene una solución no nula de (2.22) cuando la matriz en (2.23) es no invertible,

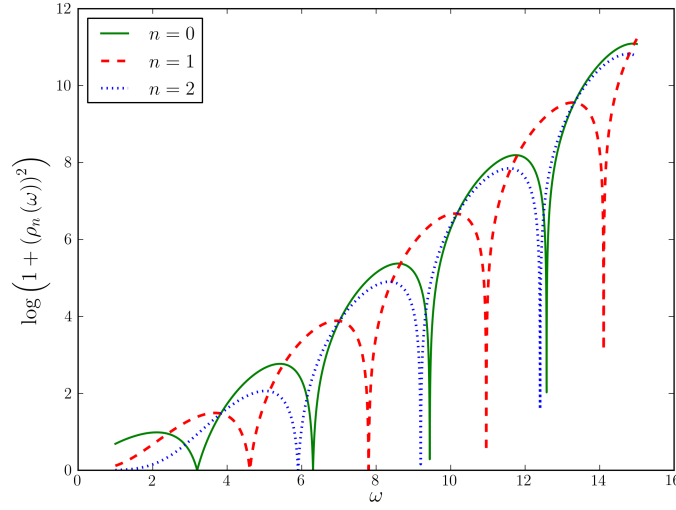


**Figura 2.2.1:** Picos que indican la posición de algunas de las raíces de  $\rho_n(\lambda) = 0$  para la placa empotrada. Ver también la tabla 2.2.1.

y obtenemos así la ecuación característica para la placa circular empotrada:

$$\rho_n(\lambda) = J_n(\lambda) I'_n(\lambda) - J'_n(\lambda) I_n(\lambda) = 0. \quad (2.24)$$

Es conocido que para cualquier  $n = 0, 1, \dots$ , (ver [14]) existen una cantidad infinita y numerable de soluciones  $\lambda_{nm}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , de la ecuación característica (2.24). Los ceros  $\lambda_{nm}$  se pueden aproximar de manera muy precisa utilizando bibliotecas de funciones de Bessel como la de SciPy (ver [16]). En la figura 2.2.1 se muestran los gráficos de las funciones  $\log(1 + |\rho_n|)$  para  $n = 0, 1, 2$  aquí los picos indican la ubicación de los ceros de las funciones características. La tabla 2.2.1 muestra la aproximación de varios  $\lambda_{nm}$ .

Una vez que conocemos  $\lambda_{nm}$ , el modo de vibración correspondiente es fácil de obtener observando que los coeficientes  $p$  y  $q$  satisfacen

$$p J_n(\lambda_{nm}) + q I_n(\lambda_{nm}) = 0, \quad (2.25)$$

| $n \backslash m$ | 1      | 2      | 3       |
|------------------|--------|--------|---------|
| 0                | 3.1962 | 6.3064 | 9.4395  |
| 1                | 4.6109 | 7.7992 | 10.9581 |
| 2                | 5.9057 | 9.1969 | 12.4022 |

| $n \backslash m$ | 1      | 2      | 3       |
|------------------|--------|--------|---------|
| 0                | 2.4041 | 5.5200 | 8.6537  |
| 1                | 3.8317 | 7.0156 | 10.1734 |
| 2                | 5.1356 | 8.4172 | 11.6198 |

**Tabla 2.2.1:** Raíces  $\lambda_{nm}$  de la ecuación característica para una placa circular empotrada (arriba). Valores  $\lambda_{nm}$  para una membrana circular con condición de Dirichlet (abajo).

con esto quedan determinados  $p$  y  $q$  hasta un múltiplo escalar común, digamos

$$p = \frac{-I_n(\lambda_{nm})}{\sqrt{J_n^2(\lambda_{nm}) + I_n^2(\lambda_{nm})}}, \quad q = \frac{J_n(\lambda_{nm})}{\sqrt{J_n^2(\lambda_{nm}) + I_n^2(\lambda_{nm})}}, \quad (2.26)$$

se obtiene así la expresión para el modo de vibración  $\varphi_{nm}$ :

$$\varphi_{nm}(r, \theta) = \cos(n\theta - \eta_o) (p J_n(\lambda_{nm} r) + q I_n(\lambda_{nm} r)), \quad (2.27)$$

donde  $\eta_o$  es arbitrario y  $p$  y  $q$  satisfacen (2.25).

Observemos que para  $n = 0$  el modo de vibración  $\varphi_{0m}$  genera un espacio propio 1-dimensional del problema (2.4) junto con las condiciones de frontera (2.22). Estos espacios propios son generados por una función radialmente simétrica. Mientras que para  $n \geq 1$  el espacio propio correspondiente a  $\lambda_{nm}$  es 2-dimensional. En la parte izquierda de la figura (2.2.2) se muestran las líneas nodales,  $N_{\varphi_{nm}}$ , para  $n = 0, 1$  y  $m = 1, 2$ . Observe que para la placa empotrada todos los modos se anulan en el círculo  $r = 1$ .

Es interesante comparar las soluciones de este problema con los modos de vi-

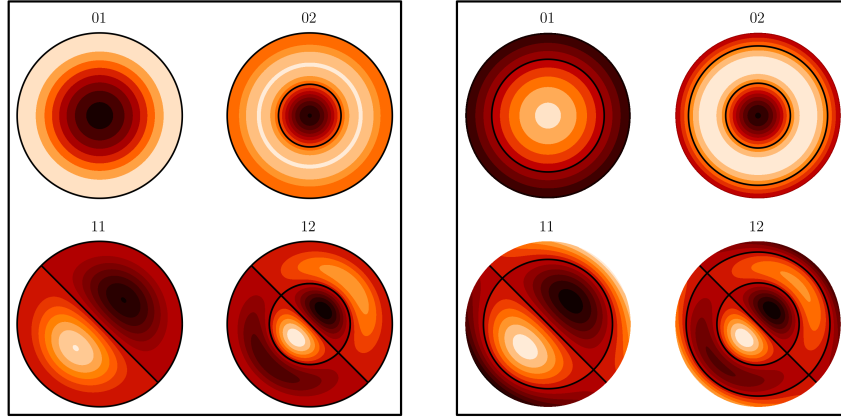


**Figura 2.2.2:** Líneas nodales de los modos de vibración  $\varphi_{nm}$  para placas circulares (negro). La placa empotrada (izquierda) y la placa libre (derecha).

bración de una membrana con condiciones de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi + \lambda^2 \varphi &= 0 \quad \text{en} \quad \{x : |x| < 1\}, \\ \varphi &= 0 \quad \text{en} \quad \{x : |x| = 1\}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

ya que esta es considerada como una primera aproximación al modelo de vibración de placas. En (2.27), el valor de  $|q|$  es muy pequeño en comparación con  $|p|$ ; por ejemplo, para el modo  $\varphi_{11}$  tenemos  $p \simeq -0.9998$  y  $q \simeq 0.0198$ , de manera que los modos de vibración de las placas son muy parecidos a una función de la forma  $\cos(n\theta - \eta_o)(pJ_n(\lambda r))$ , precisamente está es la forma de los modos de vibración de una membrana. Por otro lado, las diferencias en los valores propios y por ende en las frecuencias de vibración si son considerables; la comparación se hace en la tabla 2.2.1. Tenemos entonces que las líneas nodales de los modos tanto de la membrana como de la placa circular se constituyen de líneas diametrales y de círculos concéntricos, sin embargo los radios de los círculos son distintos en los dos modelos.

### 2.2.2 PLACAS CIRCULARES CON BORDE LIBRE

En el caso de la placa circular las condiciones de frontera libre (2.3) toman la siguiente forma (ver [14]) :

$$\begin{aligned} \left[ \Delta \varphi - \frac{1-\nu}{r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{r=1} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\Delta \varphi) + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right] \Big|_{r=1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

en lo que sigue y por razones históricas tomaremos  $\nu = 0.225$  (este fue el valor utilizado por Ritz en [17]).

Al igual que en el ejemplo anterior, las soluciones de (2.4) con las condiciones de frontera (2.29) son de la forma

$$\varphi = \cos(n\theta - \eta_0) (p J_n(\lambda_{nm} r) + q I_n(\lambda_{nm} r)), \quad n \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Reemplazando en (2.29) se llega a una ecuación característica como (2.24). Los detalles son engorrosos y los omitimos; damos la ecuación característica

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2 J_n(\lambda) + (1-\nu) [\lambda J'_n(\lambda) - n^2 J_n(\lambda)]}{\lambda^2 I_n(\lambda) - (1-\nu) [\lambda I'_n(\lambda) - n^2 I_n(\lambda)]} = \\ \frac{\lambda^3 I'_n(\lambda) + (1-\nu)n^2 [\lambda J'_n(\lambda) - J_n(\lambda)]}{\lambda^3 I'_n(\lambda) - (1-\nu)n^2 [\lambda I'_n(\lambda) - I_n(\lambda)]} \end{aligned} \quad (2.30)$$

tomada de [14], la principal referencia correspondiente a la vibración de placas. Nuevamente, dado  $n = 0, 1, \dots$ , podemos encontrar una secuencia de valores  $\lambda_{nm}$  que satisfacen la ecuación característica (2.30), y obtener, de forma análoga al procedimiento para las placas empotradas, las expresiones de los modos de vibración correspondientes.

En este caso  $\lambda_{00} = 0$  es un cero de la ecuación característica, sin embargo, si recordamos (2.5), el espacio propio correspondiente contribuye a la solución de la vibración de la placa en la forma de una traslación y una rotación. En este caso la frecuencia asociada es  $\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 0$ , y por lo tanto no consideramos los

| $n \backslash m$ | 1      | 2      | 3       | 4       |
|------------------|--------|--------|---------|---------|
| 0                | 2.971  | 6.1873 | 9.3591  | 12.5165 |
| 1                | 4.5140 | 7.7260 | 10.9008 | 14.0619 |
| 2                | 2.3637 | 5.9418 | 9.1837  | 12.3793 |

**Tabla 2.2.2:** Aproximación de varios ceros  $\lambda_{nm}$  de la ecuación característica para la placa circular con frontera libre ( $\nu = 0.225$ ). Se omite el cero  $\lambda_{00} = 0$ .

elementos de este espacio propio como modos de vibración, esencialmente porque no vibran. La tabla 2.2.2 muestra algunas raíces de (2.30). Las líneas nodales para la placa circular empotrada y para la placa circular con frontera libre son muy similares; ambas se componen de líneas diametrales y círculos concéntricos (Vea la figura 2.2.2), sin embargo, como se puede apreciar en la figura 2.2.2,  $r = 1$  nunca es una línea nodal de los modos de vibración  $\varphi_{nm}$  de la placa circular libre.

### 2.3 DOMINIOS GENERALES Y EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El problema (2.4) para dominios acotados generales  $U$  es muy difícil, y sólo hay soluciones explícitas en el ejemplo que mostramos, en las placas rectangulares y otros pocos casos dispersos. Afortunadamente existen métodos numéricos avanzados con los cuales se puede resolver este problema en prácticamente cualquier dominio; precisamente con el método de elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés) inspirado por Walter Ritz en [17], cuando estudiaba este problema en una placa cuadrada con frontera libre. Hasta el desarrollo del FEM, lo que existía para solucionar ecuaciones diferenciales numéricamente era el método de diferencias finitas; sin embargo, este método es de difícil aplicación en dominios generales. A diferencia del método de diferencias finitas, que se basa en las propiedades locales descritas por una ecuación diferencial, el FEM se basa en propiedades globales dadas por la forma variacional del operador.

En nuestro caso, la forma variacional del problema de valores propios (2.4) con

condiciones de frontera libre es

$$\begin{aligned} \iint_U \left( \Delta u \Delta v - (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] \right) dx dy, \\ = \lambda^4 \iint_U uv dx dy. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Se dice también que  $u \in H^2(U)$  es una solución débil de (2.4), si para toda  $v \in H^2(U)$  se satisface (2.31).  $H^2(U)$  es un espacio de Hilbert muy específico; pero no entraremos en los detalles, para eso está el excelente libro de L. Evans [7]. Es muy interesante que se haya llegado antes al problema variacional (2.31), que la ecuación diferencial parcial (2.4). De hecho, el punto clave del trabajo [13] de G. Kirchhoff es dar el funcional de energía correcto para una placa con frontera libre; de este funcional se desprende la forma variacional (2.31) y de aquí la ecuación diferencial (2.4) con sus respectivas condiciones de frontera. Alentamos al lector a leer un poco sobre la historia de este fascinante problema en [8].

Observe que las condiciones de frontera están implícitas en la formulación variacional junto con el espacio de Hilbert  $H = H^2(U)$ . Por ejemplo en el caso de las placas empotradas, la forma variacional se transforma en

$$\iint_U (\Delta u \Delta v) dx dy = \lambda^4 \iint_U uv dx dy, \quad \text{con } u, v \in H_0^2(U), \quad (2.32)$$

en este caso el espacio  $H_0^2(U)$  exige que las funciones  $u, v$  y sus primeras derivadas parciales se anulen en la frontera  $\partial U$ .

En esencia lo que hace el FEM es utilizar un subespacio de dimensión finita de  $H = H^2$  junto con una base de funciones, para aproximar las soluciones  $u$  de (2.31) o de cualquier otro problema variacional. De esta forma se transforma (2.31), o (2.32) si es el caso, en un problema de valores propios de matrices, de matrices muy grandes claro está. El área de los FEM es todo un mundo en si, afortunadamente contamos con programas como FreeFem++ (ver [11]), que tienen incorporadas las herramientas para hallar soluciones aproximadas de este tipo de problemas.

En la tabla 2.3.1 mostramos los primeros nueve valores propios (excluyendo el

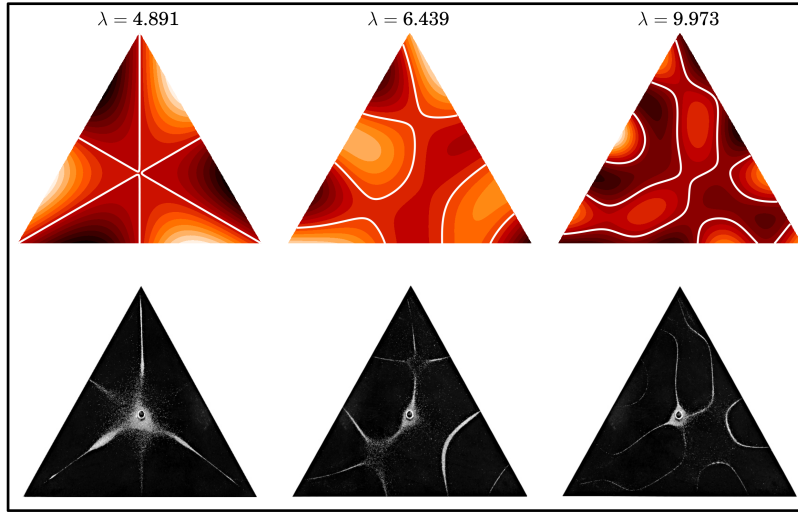


**Figura 2.3.1:** Líneas nodales (blanco) para una placa (triángulo equilátero de lado 2) con borde libre ( $\nu = 0.225$ ). Abajo, las figuras de Chladni correspondientes, obtenidas experimentalmente.

| $n$         | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\lambda_n$ | 2.93 | 3.06 | 3.06 | 4.63 | 4.63 | 4.89 | 5.43 | 6.37 | 6.44 |

**Tabla 2.3.1:** Valores de  $\lambda_n$  para una placa con borde libre y forma de triángulo equilátero de lado 2 ( $\nu = 0.225$ ). Se omite el valor  $\lambda_0 = 0$ .

valor propio 0) de un triángulo equilátero de lado 2 que vibra libremente; y en la figura 2.3.1 se encuentran las curvas de nivel y los contornos de los modos de vibración (arriba), comparados con algunas figuras de Chladni que obtuvimos experimentalmente (abajo). El poder del método es asombroso, este nos permite calcular, en cuestión de segundos, los modos de vibración para placas de formas arbitrarias.

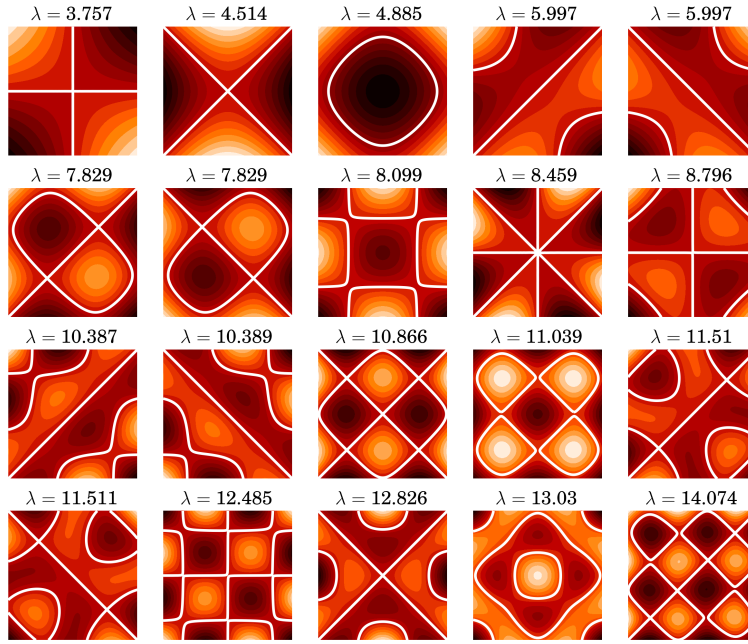


**Figura 2.4.1:** Líneas nodales (blanco) y contornos para una placa cuadrada de lado 1 con los valores de  $\lambda$  correspondientes ( $\nu = 0.225$ ).

## 2.4 LOS DIBUJOS DE CHLADNI

La figura 2.3.1 muestra lo bien que se ajustan los experimentos al modelo, sin embargo, es mucho lo que se puede decir sobre esto; miremos por ejemplo el caso de la placa cuadrada. Aunque existen soluciones explícitas en este caso, podemos utilizar el FEM para aproximar las soluciones sin recurrir a cálculos largos y engorrosos. En la figura 2.4.1 se muestran los contornos de los veinte primeros modos de vibración para una placa cuadrada de lado 1. Es interesante comparar estos modos con las dibujos de Chladni en la figura 1.0.1.

Observe que hay valores de  $\lambda$  (en la figura 2.4.1) que se repiten para algunos modos consecutivos, esto quiere decir que el espacio propio correspondiente tiene como dimensión el número de veces que este valor se repite, y que los modos de vibración bajo dicho valor forman una base de este espacio. Observe también

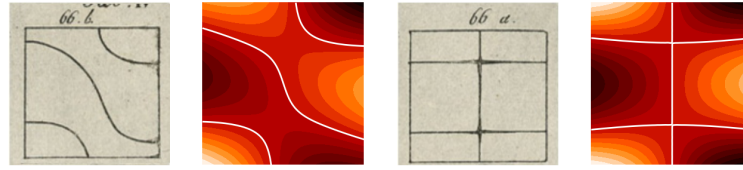


**Figura 2.4.2:** Figuras de Chladni obtenidas como combinación lineal de los modos en la figura 2.4.1 para  $\lambda = 5.995$ .

que los modos correspondientes a  $\lambda = 3.757, 4.514, 4.884, 8.095, 8.788, 10.847, 11.019, 12.467, 12.804, 13.004$ , es decir, los que no se repiten, se pueden encontrar fácilmente en los dibujos de Chladni. Sin embargo hay modos como el que corresponde a  $\lambda = 5.995$  para los cuales no hay un dibujo en la figura 1.0.1 y, a su vez, muchos dibujos que no aparecen en la figura 2.4.1. Lo que sucede es que cuando la dimensión del espacio propio es mayor o igual a 2, el modo de vibración de la placa puede ser cualquier combinación lineal de los elementos de la base. De esta forma, es posible crear figuras de Chladni distintas a las que aparecen en la figura 2.4.1; por ejemplo para  $\lambda = 5.995$ , se puede obtener una figura muy parecida al cuarto dibujo en la primera fila de la figura 1.0.1, si al primer modo se le resta el segundo (Ver la figura 2.4.2). En esencia la figura que se genera depende de la forma de la fuerza armónica externa, es decir de los valores de  $f_n$  en (2.7), en realidad sólo de los  $f_n$  de los modos en resonancia. Chladni era un excelente violinista, y era capaz de variar la contribución de los modos a la fuerza externa variando el sitio de la placa y la técnica con la que frotaba el arco del violín; obteniendo así, varias figuras para la misma frecuencia.



**Figura 2.5.1:** Montaje experimental: se sujeta la placa desde su centro por medio de un tornillo, el cual a su vez se sujeta a una base utilizando una prensa.

## 2.5 HECHO EN CASA

El experimento se puede reproducir con recursos muy limitados, y especular sobre las dificultades que pudo haber tenido Chladni resulta ser muy divertido. En esencia se necesita tan solo una placa metálica ( $30cm \times 30cm$  es un buen tamaño), el arco de un violín, un poco de sal o de arena seca, e ingeniarse una forma para sostener la placa. Podemos sujetar la placa de uno o más bordes, dejarla reposar sobre sus bordes, o sujetarla desde un punto en su interior como lo hacía Chladni; claro está que para cada caso hay condiciones de frontera diferentes. El último caso mencionado tiene condiciones de frontera libre, y la placa se hace vibrar con la combinación de dos fuerza externas: la que se ejerce con el arco del violín y la fuerza de reacción que ejerce el soporte sobre la placa. Siguiendo los pasos de Chladni decidimos sujetar la placa con un tornillo desde su centro, en la figura 2.5.1 se muestra el montaje experimental.

Mostramos algunas de las figuras obtenidas en la figura 2.5.2, observe que por el centro de la placa siempre pasa alguna línea, y en la mayoría de los casos más de una. Aunque sería muy difícil describir la fuerza externa, es claro que el movimiento en el centro de la placa está restringido por el tornillo, y por lo tanto la fuerza externa total sobre este punto debe ser cero o muy pequeña. De esta manera es muy difícil obtener en la placa un modo de vibración cuyas líneas nodales no pasen por el

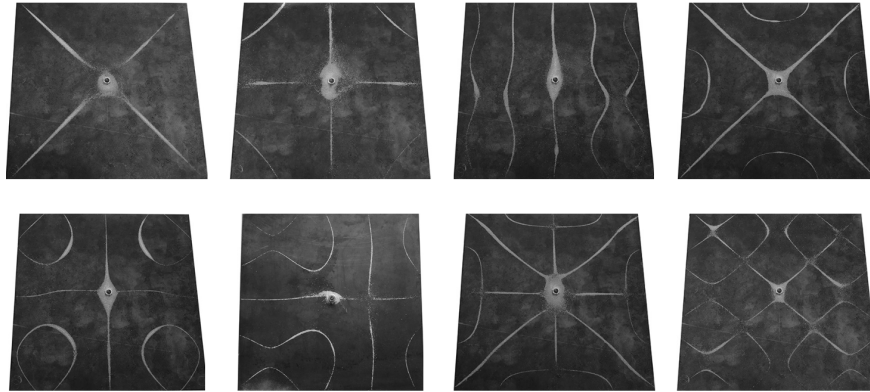


**Figura 2.5.2:** Figuras de Chladni obtenidas experimentalmente sobre una placa de hierro cuadrada sujeta de su centro.

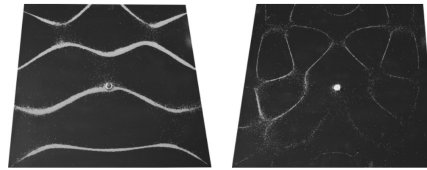


**Figura 2.5.3:** Figuras de Chladni que no atraviesan el centro de la placa (el tornillo se encuentra a 2 centímetros del centro).

centro; sin embargo, en los dibujos de Chladni hay figuras que no pasan por el centro estás seguramente se obtienen sujetando la placa de otro punto. En la figura 2.5.3 se muestran dos figuras obtenidas sujetando la placa a un par de centímetros del centro.

Las figuras de Chladni también se pueden obtener sobre tambores como mostramos en la figura 1.0.3. En este caso la experimentación requiere de equipos más sofisticados entre estos un generador de señales y una bobina, referimos al lector interesado a [3] para los detalles.

*"Caos es un nombre para aquellos ordenes que nos confunden."*

George Santayana

# 3

## Movimiento Browniano en placas

LASTIMOSAMENTE EN LAS fotografías no se puede capturar lo que, en nuestra opinión, es lo más fascinante del fenómeno: la forma en que salta la arena para formar las figuras. Todo ocurre muy rápido, en menos de 3 segundos desde que se empieza a perturbar la placa con el arco del violín, ya se han formado las figuras de Chladni. Cuando hay bastantes partículas de sal sobre la placa, pareciera como si el viento las soplara hacia las figuras, pero si se observa con más cuidado el evento se torna aún más fascinante. Resulta casi imposible seguir la trayectoria de una sola partícula, no solo porque hay muchas, sino también que los caminos de estas son completamente impredecibles. Es muy parecido a ver los puntos que saltan en un televisor con mala señal. Incluso después que la mayoría se ha acomodado sobre las líneas o saltado hacia el abismo, quedan unos cuántos granos deambulando por

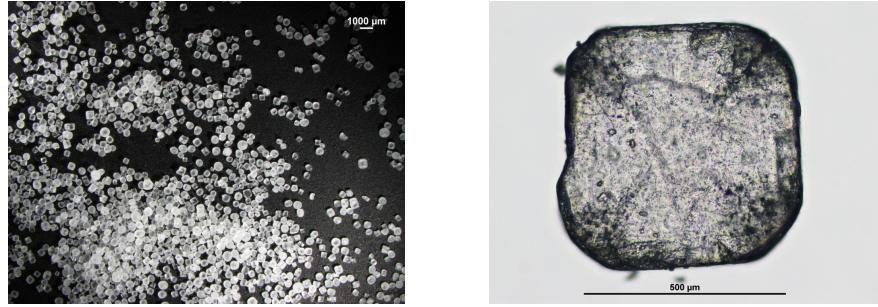


**Figura 3.1.1:** Granos de sal fotografiados a través de un microscopio, se pueden apreciar las esquinas e irregularidades de las partículas.

la placa sin decidirse a donde ir. Verlo en cámara lenta es simplemente mágico.<sup>1</sup>

Lo segundo que se puede observar, es que entre más cerca estén las partículas a las líneas nodales más cortos son sus saltos. Según el modelo de G. Kirchhoff (Capítulo 2), si suponemos que la vibración está dominada por el modo  $\varphi$ , el movimiento de la placa es pequeño alrededor de las líneas nodales de  $\varphi$  y aumenta al alejarse de estas; así la placa golpea con menor fuerza a las partículas más cercanas a las líneas nodales y sus saltos son más pequeños. De esta forma es evidente que, para una partícula la distancia de cada uno de sus saltos está relacionada con el desplazamiento vertical de la placa,  $\varphi(x, y)$ , del punto  $(x, y) \in U$  desde donde salta.

### 3.1 SE MUEVEN A SALTOS

Tenemos entonces que el movimiento de la arena se compone de pequeño saltos aleatorios relacionados con la vibración del modo resonante  $\varphi$ . Denotaremos por  $X_0 \in U$  la posición inicial de la partícula sobre la placa y por  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , su posición tras el  $n$ -ésimo salto, y haremos las siguientes suposiciones:

- Las partículas se mueven independientemente: por simplicidad supondremos que las demás partículas no interfieren en la trayectoria de la partícula

<sup>1</sup><http://www.youtube.com/watch?v=rVHLVQqiswI>

cuyo movimiento queremos describir.

- Como la sal salta por los golpes que le propina la placa, y debido a la geometría irregular de un grano de sal (ver la figura 3.1.1) y las imperfecciones de la placa, es razonable pensar que los saltos dados por estas partículas no tienen direcciones predilectas. Siendo así, lo más natural es suponer que cada salto tiene una distribución normal alrededor del punto desde donde salta, es decir, cada salto  $X_{n+1} - X_n$  es una variable aleatoria bivariada normalmente distribuida con media  $\mu = (0, 0)$  y matriz de covarianza  $\sigma^2 I$  ( $I$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ ).
- Como dijimos, la magnitud del salto está relacionada con la amplitud del movimiento de la membrana en el punto desde donde salta. Podemos incorporar esto al modelo suponiendo que la desviación estándar de cada salto  $X_{n+1} - X_n$  es proporcional a  $\varphi(X_n)$ , esto es  $\sigma^2 = \alpha^2 \varphi^2(X_n)$ , donde  $\alpha$  es una constante que escala el tamaño de los saltos. De esta forma se tiene que

$$X_{n+1} - X_n \sim \alpha \varphi_n(X_n) N(0, 1), \quad (3.1)$$

donde  $N(0, I)$  es una variable aleatoria bivaluada normalmente distribuida con media  $\mu = (0, 0)$  y matriz de covarianza  $I$ .

- Suponemos adicionalmente que los incrementos  $X_{n+1} - X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  son independientes entre si, en otras palabras, que los saltos anteriores no condicionan al salto  $n$ -ésimo.

Para hacer énfasis en la dependencia de  $\alpha$  denotaremos al proceso por  $\{X_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$  de ahora en adelante.

### 3.2 SIMULACIÓN DEL PROCESO ESTOCÁSTICO

Se han adelantado simulaciones numéricas del proceso estocástico  $\{X_n^\alpha\}_{n=0}^N$ ; se escoge un punto inicial  $X_0^\alpha = q \in U$  luego, usando un generador de número alea-

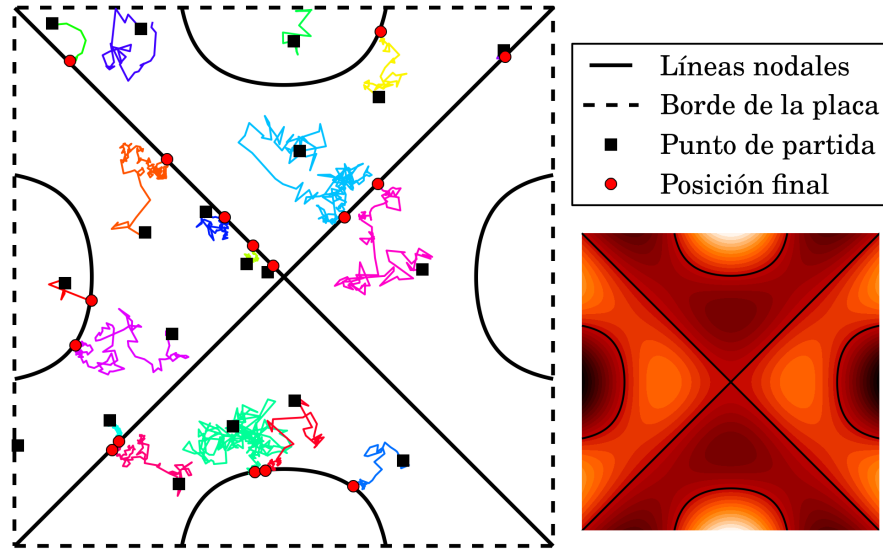


**Figura 3.2.1:** Los caminos que siguen algunas partículas en una simulación del proceso estocástico  $\{X_n^a\}_{n=0}^N$ . A la derecha se encuentran los contornos del modo de vibración  $\varphi$ .

torios, se escoge un vector  $(dw_1^1, dw_1^2)$  al azar utilizando una distribución normal bivariada  $N(0, I)$ , o lo que es equivalente, se escogen de forma independiente  $dw_1^1$  y  $dw_1^2$  de una distribución normal con media  $\mu = 0$  y varianza  $\sigma^2 = 1$ . La posición tras el primer salto estará dada por

$$X_1^a = X_0^a + a\varphi(X_0^a) \begin{pmatrix} dw_1^1 \\ dw_1^2 \end{pmatrix},$$

y en general por

$$X_{n+1}^a = X_n^a + a\varphi(X_n^a) \begin{pmatrix} dw_n^1 \\ dw_n^2 \end{pmatrix}.$$

El proceso se repite un número  $N$  de veces y se obtiene así una trayectoria po-

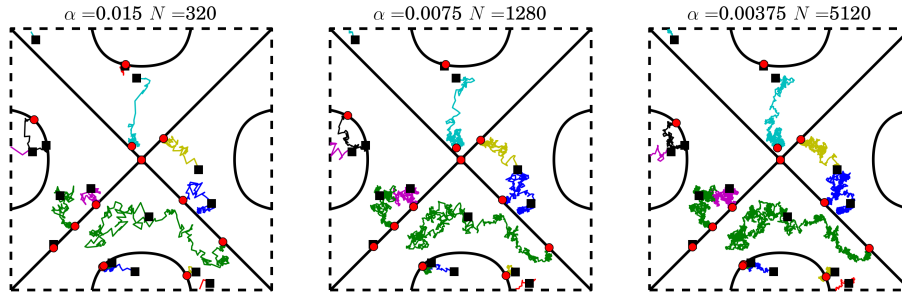


**Figura 3.2.2:** Caminos de las partículas para distintos valores de  $\alpha$ .

sible para el proceso  $\{X_n^\alpha\}_{n=0}^N$ . Si se repitiera la simulación, la trayectoria de la partícula podría ser completamente diferente, así se empieza en el mismo punto. En la figura 3.2.1 se muestran los caminos de varias partículas sobre una placa cuadrada, los caminos fueron simulados utilizando la biblioteca NumPy de Python (ver [16]) y para evaluar  $\phi$  se utilizó una aproximación del modo de vibración obtenida con FreeFem++.

Observe que las trayectorias son muy distintas las unas de las otras y bastante impredecibles; sin embargo, la mayoría de las partículas terminan sobre las líneas nodales del modo de vibración. Note además que los saltos de las partículas son grandes cuando se encuentran cerca de los extremos locales del modo de vibración y disminuyen en tamaño cerca de las líneas nodales. La partícula cambia muchas veces de dirección hasta que se acerca lo suficiente a una línea nodal, donde parece quedar atrapada debido a la baja probabilidad de dar un salto grande para alejarse de ella. También hay partículas que abandonan la placa, como las de trayectorias azul y verde en la parte superior, y una al margen izquierdo que se salió en su primer salto. En todo esto el valor de  $\alpha$  es muy importante, si el valor de  $\alpha$  es muy grande entonces los saltos también lo son y prácticamente todos los puntos se salen de la placa; es el equivalente a hacer vibrar la placa tan fuerte que tire todo al suelo (esto también lo hemos logrado experimentalmente). Sin embargo, hacer  $\alpha$  pequeño es muy costoso en el siguiente sentido: para reducir  $\alpha$  en un factor de  $k$ , se debe incre-

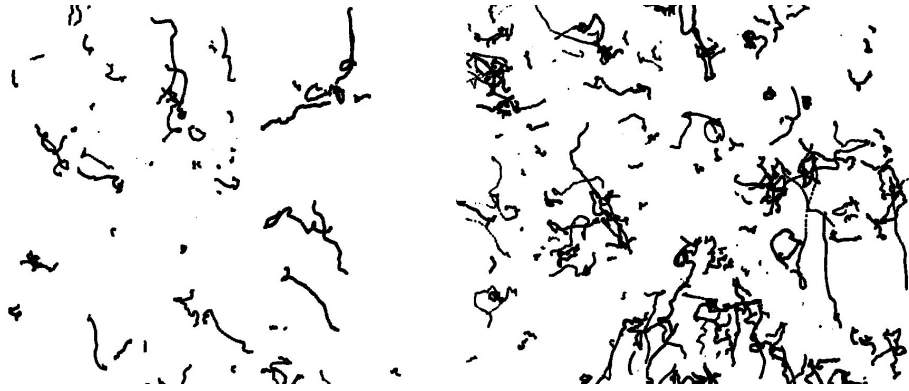


**Figura 3.2.3:** Utilizando software para el análisis de imágenes podemos trazar los caminos recorridos por las partículas en una filmación del experimento. El gráfico muestra dos imágenes independientes, en la de la derecha se utilizaron más partículas de sal.

mentar el número de pasos  $N$  en un factor de  $k^2$ . Volveremos a esto más adelante, pero si no se hacen los incrementos de  $N$  adecuadamente las partículas parecen no ir a ningún lado. De esta forma, se debe escoger  $\alpha$  con precaución; ensayando con distintos valores se llega a la idea intuitiva que existe un valor de  $\alpha$  a partir del cual las partículas convergen en su mayoría hacia las líneas nodales. Este parece ser el caso en procesos de este tipo, sin embargo determinar ese valor analíticamente es complicado aún en los casos más sencillos (ver [12]). En el ejemplo de la figura 3.2.1 utilizamos  $\alpha = 0.015$ , para este valor las trayectorias de las partículas son muy parecidas a las que se observan experimentalmente. Utilizando la librería openCV (ver [5]) podemos trazar los caminos de las partículas en una filmación del experimento. Con la librería se detecta pixel por pixel lo que se mueve de un cuadro al siguiente, y se pinta de negro; en la figura 3.2.3 se muestran los resultados de este procesamiento.

La simulación se puede hacer para muchas partículas; en la figura 3.2.4 se puede apreciar como las partículas distribuidas inicialmente de forma uniforme sobre la placa, replican con precisión los resultados teóricos tras la simulación. Para  $\alpha < 0.015$  el experimento funciona con igual éxito siempre y cuando se incre-

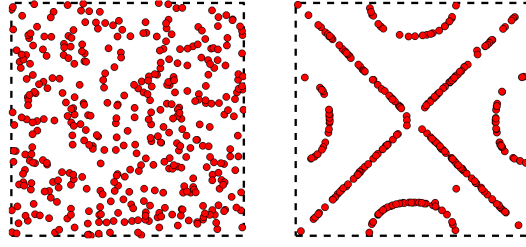


**Figura 3.2.4:** Distribución inicial de las partículas (izquierda) y posición final tras la simulación (derecha).

mente  $N$  de manera adecuada, aunque al hacer esto los caminos se tornan más enroscados y largos como se muestra en la figura 3.2.2. A pesar de esto los caminos se parecen mucho para los distintos valores de  $\alpha$ , en especial para los  $\alpha$  pequeños. De hecho, en un sentido que especificaremos en la próxima sección, el proceso  $\{X_n^a\}_{n=0}^N$  converge hacia un proceso estocástico  $\{X_t\}_{0 \leq t \leq \infty}$  continuo y sus caminos (como los mostrados en la figura 3.2.2) convergen hacia las trayectorias del proceso  $\{X_t\}_{0 \leq t \leq \infty}$ .

### 3.3 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EDE

Si hacemos  $\alpha = \sqrt{dt}$ , entonces la simulación descrita en la sección anterior coincide con el método de Euler–Maruyama (con pasos de tamaño  $dt$ ) que aproxima la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE) homogénea:

$$\begin{pmatrix} dX_t^1 \\ dX_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(X_t^1, X_t^2) & 0 \\ 0 & \varphi(X_t^1, X_t^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$X_0 = q, \quad \text{con } q \in U.$$

Por ahora podemos ver la solución  $X_t = (X_t^1, X_t^2)$  en el intervalo  $[0, T]$  como el límite de los procesos  $\{X_n\}_{n=0}^N$  cuando  $a = \sqrt{dt} \rightarrow 0$  y  $N \times dt = T$ , en los siguientes sentidos:

$$\mathbb{E} [|X_n^a - X_{n \times dt}|] \leq K (dt)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

$$|\mathbb{E} [X_n^a] - \mathbb{E} [X_{n \times dt}]| \leq K dt \quad (3.4)$$

Nos interesa en especial la convergencia (3.3) conocida como convergencia fuerte de orden  $1/2$ , la cual implica la convergencia de los caminos (ver [12]):

$$P \left( |X_n^a - X_{n \times dt}| \geq (dt)^{\frac{1}{4}} \right) \leq K (dt)^{\frac{1}{4}},$$

es decir, que para un tiempo  $\tau = n \times dt$  la probabilidad que  $X_\tau$  se aleje de  $X_n^a$  es baja siempre y cuando  $dt$  sea pequeño. El segundo tipo de convergencia (3.4) se conoce como convergencia débil e implica que la distribución de probabilidad de  $X_n^a$  tiende a la distribución de la variable  $X_\tau$  cuando  $a \rightarrow 0$

### 3.3.1 EL TIEMPO

Aceptamos que haciendo  $a = \sqrt{dt}$ , introducimos en nuestro modelo el tiempo de manera arbitraria; y que de esta forma  $X_t$  no representa la posición de una partícula en el tiempo  $t$ . El significado de  $X_t$  es otro; recordemos que partimos de un proceso estocástico discreto  $\{X_n^a\}_{n=0}^N$ , donde  $X_n^a$  indica la posición de una partícula tras el  $n$ -ésimo salto. Así, para  $dt = a^2$  fijo  $X_{n \times dt}$  es una aproximación de  $X_n^a$ , es decir para  $\tau = ndt$ ,  $X_\tau$  representa la posición tras el  $n$ -ésimo salto. El tiempo de los saltos de las partículas es algo más complejo. De hecho, si denotamos por  $t_j$  el tiempo en el cual ocurre el salto  $n$ -ésimo, entonces  $t_{n+1} - t_n$  depende de la altura que alcance la partícula en este salto, y  $t_{n+1} - t_n$  es a su vez una variable aleatoria. Tomar esto en cuenta complica considerablemente las cosas y se sale del ámbito de este trabajo, nos conformamos con que para  $t$  grande  $X_t$  representa la posición de una partícula tras muchos saltos.

Con estas consideraciones en mente y teniendo en cuenta que los tamaños de

los saltos en el experimento son pequeños y la convergencia del método de Euler–Maruyama, proponemos (3.2) como modelo para el movimiento de un grano de arena sobre una placa en vibración. La razón para tomar como modelo la EDE (3.2), más no el método numérico, es la misma que en ecuaciones diferenciales ordinarias: la capacidad de aplicar las técnicas de cálculo al estudio de la estabilidad de equilibrios. El cálculo de Itô, desarrollado por el celebre matemático Kiyoshi Itô, es el fundamento de la teoría de las EDE, y en nuestro caso proporciona las herramientas necesarias para estudiar la estabilidad de (3.2). En lo que sigue usaremos el cálculo de Itô y la teoría de las EDE; el desarrollo de la teoría se encuentra en los libros [4] y [15], daremos referencias más específicas a medida que necesitemos la teoría.

Tenemos entonces un modelo que es en esencia una caminata aleatoria sobre un dominio, donde el tamaño de los saltos varia de acuerdo con el modo de vibración  $\varphi$ .

### 3.4 MOVIMIENTO BROWNIANO EN DOMINIOS ACOTADOS

El movimiento Browniano posee una variedad de propiedades interesantes e incluso difíciles de creer, nos interesa en particular su conexión con las ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Problemas en EDP dan información inesperada sobre procesos estocásticos descritos por EDE, como es el caso de las fórmulas de Feynman–Kac (ver [15]). Consideremos un movimiento Browniano 2-dimensional  $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ , un dominio acotado  $U$  con frontera  $\partial U = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  y la única solución  $u$  de la EDP

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \text{ en } U, \\ u &= 1 \text{ sobre } \Gamma_1, \\ u &= 0 \text{ sobre } \Gamma_2.\end{aligned}\tag{3.5}$$

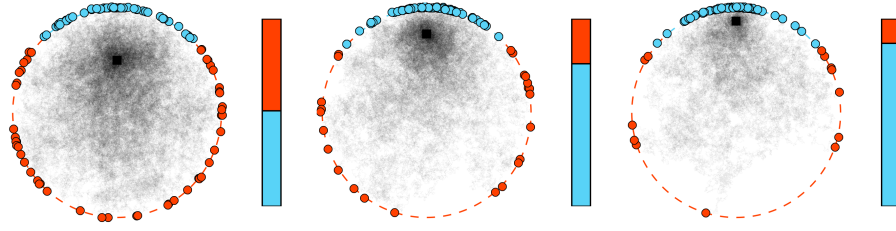


**Figura 3.4.1:** Los caminos Brownianos parten desde los cuadrados negros, al final de la simulación se cuentan cuantos caen sobre  $\Gamma_1$  y cuantos sobre  $\Gamma_2$ .

Si se aplica la fórmula de Itô al proceso estocástico  $u(W_t)$  se llega a que para  $q \in U$ ,  $u(q)$  describe la probabilidad de que el proceso  $q + W_t$  cruce la frontera  $\Gamma_1$  antes de cruzar la frontera  $\Gamma_2$ . En la próxima sección mostraremos los detalles, no para  $W_t$ , sino para la solución de nuestro modelo (3.2),  $X_t$ . Esta interpretación probabilística implica que a medida que el punto  $q$  se acerca a la frontera  $\Gamma_1$  entonces la probabilidad de que llegue a  $\Gamma_1$  antes que a  $\Gamma_2$  va incrementando.

En la figura (3.4.1) consideramos un dominio  $U$  circular, y  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como arcos del círculo (línea azul y roja respectivamente), el cuadrado negro representa el punto de partida  $q$ . Desde  $q$  se simulan 100 trayectorias de un movimiento Browniano (las sombras negras son los trazos de estas trayectorias) hasta que se alcanza el borde del círculo. Los puntos azules son los puntos de llegada de los caminos que llegaron a  $\Gamma_1$  y los rojos los puntos de llegada de los caminos que llegaron a  $\Gamma_2$  primero. Podemos observar que ha medida que se acerca  $q$  a  $\Gamma_1$  la cantidad de puntos azules aumenta, esto es precisamente porque la probabilidad de llegar a  $\Gamma_1$  antes que a  $\Gamma_2$  aumenta.

Resulta que en nuestro modelo la solución  $X_t$  de (3.2) se comporta de manera muy similar al movimiento Browniano, con la condición adicional que  $X_t$  no puede cruzar las líneas nodales de  $\varphi$ . Usaremos este hecho para demostrar nuestro resultado principal.

### 3.5 EQUILIBRIOS ESTABLES Y LAS FIGURAS DE CHLADNI

Es bien conocido que los modos de vibración,  $\varphi$  son suaves en el interior de  $U$  y continuos en  $\bar{U}$ . Suponemos que existe una extensión de soporte compacto y de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$  del modo  $\varphi$ , de esta forma la ecuación (3.2) satisface el teorema de existencia y unicidad de soluciones fuertes para EDE (ver [4], capítulo 6), además cualquier solución está definida para  $t \geq 0$  ([4] teorema 9.3.1). Por otro lado tenemos que cualquier punto perteneciente a las líneas nodales de  $\varphi$ , es un equilibrio de (3.2), es decir, para  $q \in N_\varphi$  la solución de (3.2) está dada por  $X_t \equiv q$ . En los ejemplos que hemos tratado su puede ver que las líneas nodales de los modos  $\varphi$  se componen de un número finito de curvas suaves (ver por ejemplo las figuras 2.2.2 y 2.4.1); supondremos que este es siempre el caso.

El resultado principal de este trabajo es mostrar que las líneas nodales son equilibrios estocásticamente estables de (3.2) (ver [4], capítulo 11 para más detalles). Es conocido que (3.2) define un espacio de probabilidad sobre el espacio de trayectorias  $\Omega$ ; denotaremos por  $P$  la función de probabilidad sobre este espacio.

**Lema 1.** *Sea  $D$  un dominio acotado tal que  $\partial D$  contenga un conjunto no vacío  $\Gamma_1$  compuesto de un número finito de curvas suaves tal que  $\varphi|_{\Gamma_1} = 0$  y sea  $\Gamma_2 = \partial D \setminus \Gamma_1$ . Para  $q \in D$  definimos*

$$p(q) = P \left( \left\{ \omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ permanece en } \bar{D} \text{ para todo } t \geq 0 \right\} \right),$$

*y tomamos  $q_0 \in \Gamma_1$  fijo. Entonces tenemos que  $\lim_{q \rightarrow q_0} p(q) = 1$ .*

*Prueba.* Considere la solución clásica  $u$  del problema (3.5). Es conocido que  $u$  es suave en  $D$  y por el principio fuerte del máximo  $0 < u < 1$  en  $D$  (ver [7]). Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $\tau_q$  el ‘hitting time’ de  $X_t$  con  $\partial D$ .  $\tau_q$  es una variable aleatoria sobre  $\Omega$ , para cada trayectoria  $\omega \in \Omega$ ,  $\tau_q(\omega)$  es el tiempo en que la trayectoria  $X_t(\omega)$  choca con  $\partial D$ . Escribimos  $s \wedge t = \min\{s, t\}$ . Aplicando la fórmula de Itô a  $u(X_t)$  obtenemos:

$$u(X_t) - u(X_0) = \int_0^t \frac{1}{2} \varphi^2(X_s) \Delta u(X_s) ds + \int_0^t \varphi(X_s) \nabla u(X_s) dW_s.$$

Como la integral de Itô (la segunda integral de la expresión anterior) es una martingala y  $X_0 = q$  es una constante, tomando  $t = \tau_q \wedge n, n \in \mathbb{N}$ , obtenemos

$$E [u(X_{\tau_q \wedge n})] - u(q) = E \left[ \int_0^{\tau_q \wedge n} \frac{1}{2} \varphi^2(X_s) \Delta u(X_s) ds \right] = 0.$$

Si consideramos los conjuntos

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ permanece en } \bar{D} \text{ para todo } 0 \leq t \leq n\} = \{\tau_q \geq n\},$$

entonces llegamos a que

$$\begin{aligned} u(q) &= E [u(X_{\tau_q \wedge n})] \\ &= \int_{\{\tau_q < n\}} u(X_{\tau_q}) dP + \int_{\{\tau_q \geq n\}} u(X_n) dP \\ &\leq \int_{\{\tau_q < n\}} u(X_{\tau_q}) dP + P(\{\tau_q \geq n\}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

Note que si  $\tau_q(\omega) < n$ , entonces  $u(X_{\tau_q}(\omega)) = 1$  si  $X_{\tau_q}(\omega) \in \Gamma_1$  y  $u(X_{\tau_q}(\omega)) = 0$  si  $X_{\tau_q}(\omega) \in \Gamma_2$ , de modo que  $\int_{\{\tau_q < n\}} u(X_{\tau_q}) dP$  es igual a la probabilidad que  $X_t$  alcance la frontera  $\Gamma_1$  antes que llegue a  $\Gamma_2$  en un tiempo  $t = \tau_q \leq n$ . Pero debido a la continuidad de los caminos  $X_t(\omega)$  y a que los puntos sobre  $\Gamma_1$  son equilibrios de (3.2),  $X_t$  no puede abandonar  $\bar{D}$  a través de  $\Gamma_1$ , de modo que el lado derecho de la desigualdad (3.6) es exactamente la probabilidad de que  $X_t$  permanezca en  $\bar{D}$  tras el tiempo  $t = n$ . Ahora, dejamos  $n \rightarrow \infty$  y obtenemos  $u(q) \leq p(q)$ . Si  $q_0 \in \Gamma_1$  no es una esquina, entonces  $\lim_{q \rightarrow q_0} u(q) = 1$  y se tiene el resultado.  $\square$

Este lema nos dice que dado  $q \in U$ , las trayectorias de  $X_t$  permanecen en  $U$  con una probabilidad no nula, la cual puede ser elegida tan cercana a 1 como se quiera siempre y cuando  $q$  este lo suficientemente cerca a una línea nodal. Esto se muestra en la figura 3.5.1, donde las curvas de nivel de la solución  $u$  de (3.5) en un dominio  $D$  indican que la probabilidad de permanecer en  $D$  se aproxima a 1 cuando  $q$  se acerca a  $\Gamma_1$ . En el dibujo  $D$  está delimitado por un semicírculo ( $\Gamma_2$ ) y una curva

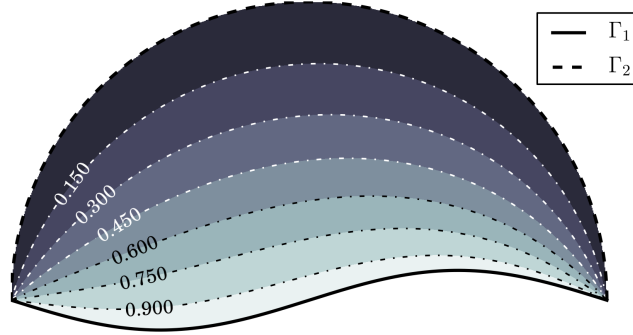


**Figura 3.5.1:** Contornos de la función  $u$  definida en la prueba del lema 1.

$y = a \sin x$ , donde  $a$  y el centro del círculo fueron elegidos para el propósito del dibujo.

La prueba del lema 1 se basa en la representación probabilística de las funciones armónicas en dominios acotados. Sin embargo el ‘hitting time’  $\tau_q$  del proceso  $X_t$  con  $\partial D$  no es necesariamente finito y se debe sortear este inconveniente en la demostración.

La estabilidad de los procesos estocásticos difiere de la estabilidad para las ecuaciones diferenciales ordinarias, no podemos garantizar que una partícula cuya posición inicial  $q$  sea cercana a  $q_o \in \Gamma_1$  permanezca cerca de  $q_o$  para todo tiempo  $t \geq 0$ . Existen caminos  $\omega \in \Omega$  que la pueden llevar lejos, sin embargo podemos probar que esos caminos se vuelven más escasos a medida que  $q \rightarrow q_o$ . Esto corresponde a la siguiente definición de equilibrio (ver [4]):

**Definición 1.** Decimos  $q_o$  es un equilibrio estocásticamente estable de (3.2), si para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{q \rightarrow q_o} P \left[ \sup_{0 \leq t < \infty} |X_t - q_o| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

**Teorema 1.** Si las líneas del modo de vibración  $\varphi$  se componen de un número finito de curvas suaves, entonces cualquier punto en  $N_\varphi$  es un equilibrio estocásticamente estable

de (3.2).

*Prueba.* Sea  $q_o \in N_\varphi$  y  $\varepsilon > 0$  tal que la bola de centro  $q_o$  y radio  $\varepsilon$ ,  $B_\varepsilon(q_o)$ , se puede dividir en un número finito de regiones que satisfacen las hipótesis del lema 1. Denote por  $D$  uno de estos subdominios. Si  $q \in D$ , entonces por el lema 1  $\lim_{q \rightarrow q_o} p(q) = 1$ , lo que implica la estabilidad del punto  $q_o$ .  $\square$

Esto prueba que en nuestro modelo una partícula que se acerque a una línea nodal tiene una probabilidad muy alta de quedarse atrapada cerca a esta, y si hay muchas partículas es inevitable que varias queden atrapadas en las cercanías de las líneas nodales, formando así las figuras de Chladni. Puede haber orden a pesar del caos!

### 3.6 EJEMPLO DE INESTABILIDAD

La demostración de la estabilidad da la impresión que para cualquier  $\varphi$ , y  $q_o \in U$  con  $\varphi(q_o) = 0$ , es un equilibrio. El ejemplo que damos a continuación muestra que este no es el caso; y que la estructura de curva de los ceros de  $\varphi$  juega un papel importante en la estabilidad ya que esta es la que permite atrapar las partículas. Consideremos la EDE

$$\begin{pmatrix} dX_t \\ dY_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{X_t^2 + Y_t^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{X_t^2 + Y_t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t^1 \\ dW_t^2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

la cual solo tiene un equilibrio aislado en  $(X_t, Y_t) \equiv (0, 0)$ . Introduciendo las variables  $R = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$  y  $\Theta_t = \arctan \frac{Y_t}{X_t}$  y aplicando la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned} dR_t &= \frac{1}{2} R_t dt + R_t (\cos \Theta_t dW_t^1 + \sin \Theta_t dW_t^2) \\ d\Theta_t &= -\sin \Theta_t dW_t^1 + \cos \Theta_t dW_t^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Definimos

$$\begin{aligned} W_t^r &= \cos \Theta_t W_t^1 + \sin \Theta_t W_t^2 \\ W_t^\theta &= -\sin \Theta_t W_t^1 + \cos \Theta_t W_t^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

los cuales son una rotación de los procesos independientes  $W_t^1$  y  $W_t^2$ , y resultan ser a su vez movimientos Brownianos independientes (ver [10] sección 4.4). Esto nos permite escribir (3.8) como

$$\begin{aligned} dR_t &= \frac{1}{2} R_t dt + R_t dW_t^r \\ d\Theta_t &= dW_t^\theta \end{aligned}$$

cuya solución está dada explícitamente por

$$R_t = R_0 e^{W_t^r}, \quad (3.10)$$

$$\Theta_t = \Theta_0 + W_t^\theta. \quad (3.11)$$

Es bien conocido que el equilibrio  $R_t \equiv 0$  de (3.10) es inestable (ver [4] capítulo 11); en la figura 3.6.1 se muestra el comportamiento típico de los caminos de (3.10).

### 3.7 EL MODELO 1-DIMENSIONAL Y LAS FUNCIONES DE LYAPUNOV

Finalmente analizamos el caso 1-dimensional de nuestro modelo, este ayuda a entender algunos aspectos de la estabilidad de los equilibrios de las EDE. Las técnicas más comunes para analizar la estabilidad en EDE son una versiones análogas a las funciones de Lyapunov y a la linearización en ecuaciones diferenciales ordinarias (ver [4] capítulo 11). Consideremos la versión 1-dimensional de nuestro modelo:

$$\begin{cases} dX_t &= \varphi(X_t) dW_t, \\ X_0 &= q, \quad q \in [a, b], \end{cases} \quad (3.12)$$

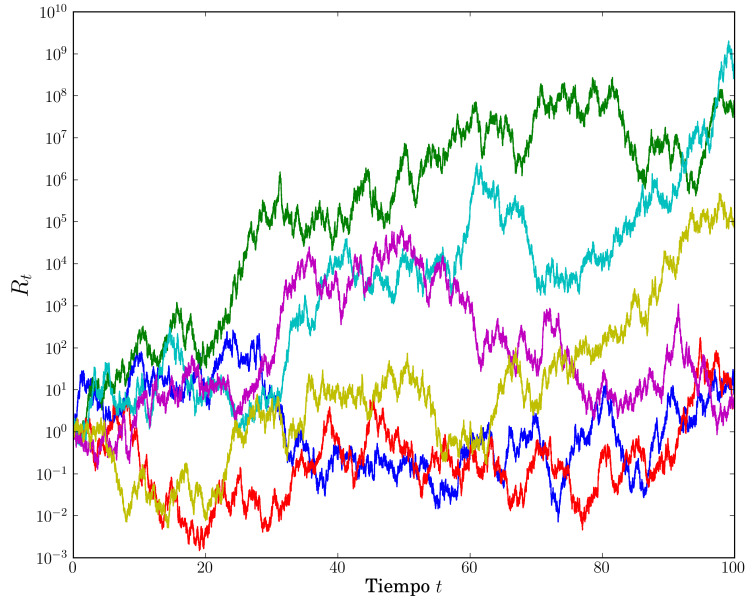


**Figura 3.6.1:** Algunos caminos de la solución (3.10), el gráfico está en escala logarítmica. Este gráfico ilustra la inestabilidad de las soluciones de (3.8).

donde  $\varphi$  es una función Lipschitz en  $\mathbb{R}$ , y supongamos que  $x = 0$  es un cero aislado de  $\varphi$ . Tenemos que la función  $v(x) = (x^2)^{1/4}$  es de clase  $C^2$  excepto que no es diferenciable en  $x = 0$ . Además tenemos que  $v'(x) = \frac{1}{2}(x^2)^{-3/4}x$  y  $v''(x) = -\frac{1}{4}(x^2)^{-3/4}$ . Aplicando la fórmula de Itô al proceso  $V_t = v(X_t)$  se obtiene

$$dV_t = \frac{1}{2}\varphi^2(X_t)v''(X_t) dt + v'(X_t) dW_t.$$

La teoría establece que si para algún  $\delta > 0$

$$\mathcal{L}(v)(x) = -\frac{1}{8}\varphi^2(x)(x^2)^{-3/4} < 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < \delta,$$

entonces el equilibrio  $x = 0$  es asintóticamente estocásticamente estable. Es decir,  $X_t$  satisface la definición 1 y además

$$\lim_{q \rightarrow 0} P \left( \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = 0 \right) = 1.$$

Tenemos entonces que cualquier cero aislado de (3.12) es un equilibrio asintóticamente estocásticamente estable. Es claro que no podemos esperar este tipo de estabilidad para las líneas nodales en el modelo 2-dimensional; ya que los equilibrios no son aislados y la partícula no sabría a cual de todos converger asintóticamente.

## Conclusiones y perspectivas

El camino que hemos seguido en nuestro estudio de las figuras de Chladni ha sido muy emocionante, empezando con el análisis de sonido de tambores y panderos hasta llegar al mundo de las EDE. Las figuras de Chladni proporcionan un ejemplo muy bonito y directo de nuestra comprensión de los fenómenos físicos a través de las matemáticas, estas además, pueden reproducirse experimentalmente con instrumentación casera. Nuestro intento por describir el movimiento de la arena nos ha adentrado en el increíble mundo de los procesos estocásticos y las EDE, y nos encontramos muy satisfechos con el resultado obtenido. Es un caso muy bonito en el que la estabilidad de los equilibrios de las EDE le dan orden a la naturaleza. En el momento nos encontramos haciendo análisis de imágenes sobre vídeos del fenómeno, con la intención de trazar los movimientos de las partículas.

# Bibliografía

- [1] S. Agmon. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 15(2):119–147, 1962.
- [2] J. Arango and C. Reyes. A stochastic model for Chladni figures. *Puesto a consideración de la revista PEMS (Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society)*, 2013.
- [3] J. Arango, C. Reyes, and L. Escobar. Figuras de Chladni en tambores. *Lecturas Matemáticas*, 33:5–18, 2012.
- [4] L. Arnold. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 1974.
- [5] G. Bradski. The OpenCV Library. *Dr. Dobb's Journal of Software Tools*, 2000.
- [6] E.F. Chladni. *Die Akustik*. Leipzig, 1802.
- [7] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1998.
- [8] M. Gander and F. Kwok. Chladni figures and the Tacoma bridge: Motivating pde eigenvalue problems via vibrating plates. *SIAM Review*, 54(3):573–596, 2012.
- [9] M. Gander and G. Wanner. From Euler, Ritz and Galerkin to modern computing. *SIAM Review*, 54(4):627–666, 2012.
- [10] C. Gardiner. *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences*. Springer Series in Synergetics. Springer, 2009.
- [11] F. Hecht. Freefem++ version 3.23. <http://www.freefem.org/ff++>, 2013.

- [12] D. Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 43(3):525–546, 2001.
- [13] G. Kirchhoff. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 44:51–92, 1850.
- [14] A. Leissa. *Vibration of Plates*. NASA SP. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- [15] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Hochschultext / Universitext. Springer, 2003.
- [16] T.E. Oliphant. Python for scientific computing. *Computing in Science & Engineering*, 9.
- [17] W. Ritz. Theorie der Transversaleschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Annalen der Physik*, 18(4):737–807, 1909.
- [18] G. Sweers, H. Grunau, and F. Gazzola. *Polyharmonic Boundary Value Problems*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1991. Springer, 2010.

## Colofón

**E**STE TRABAJO FUE escrito utilizando  $\text{\LaTeX}$ , originalmente desarrollado por Leslie Lamport y basado en  $\text{\TeX}$ , de Donald Knuth. El cuerpo del texto está escrito en Arno Pro a 11 pts, diseñado por Robert Slimbach en el libro de tipos de Aldine Press en Venecia, y licenciado por Adobe en el 2007. Una plantilla para escribir una tesis de doctorado con esta apariencia se puede encontrar en línea en la dirección [github.com/suchow/](https://github.com/suchow/) o del autor en [suchow@post.harvard.edu](mailto:suchow@post.harvard.edu), y se puede utilizar bajo la licencia perimitiva MIT (X11).