

UNA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA A PARTIR DE LA GENERALIZACIÓN DE
PATRONES

Diana Fernanda Castrillón Brand

Código 1425781

Directora trabajo de grado:

Mg. Mónica Correa Ángel

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2021

UNA INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA A PARTIR DE LA GENERALIZACIÓN DE
PATRONES

Diana Fernanda Castrillón Brand

Código 1425781

Trabajo de grado para optar al título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en
Matemáticas

Directora trabajo de grado:

Mg. Mónica Correa Ángel

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

2021



Fecha

Día	Mes	Año
7	12	2021

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
Una introducción al álgebra a partir de la generalización de patrones				
Se trata de:				
Proyecto		Informe Final x		
Director				
Mónica Correa Ángel				
Nombre del Primer Evaluador				
Leidy Cristina Cumbal				
Nombre del Segundo Evaluador				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Téfonos de contacto
Diana Fernanda Castrillón Brand	1425781	3469	diana.castrillon.brand@correounivalle.edu.co	
Evaluación				
Aprobado x	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones	No Aprobado		Incompleto	
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (<i>diligenciar la página siguiente</i>), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (<i>diligenciar la página siguiente</i>), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: <u>dd</u> <u>mm</u> <u>aa</u>				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (<i>diligenciar la página siguiente</i>).				

Firmas		
		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

[illegible]

DEDICATORIA

A mi tío Orlando, que me brindó un amor real,

capaz de trascender tiempo y distancia.

Un amor fuerte, que me sostuvo en los momentos difíciles.

Un amor sincero, que no daba lugar a dudas.

Un amor incondicional, que apoyaba mis causas por encima de todo.

Un amor único, que me hacía sentir importante y especial entre los demás.

Este gatico te dedica su triunfo,

con la convicción de que estás presente desde ese amor que nunca deja de ser,

desde la esencia de Dios que estaba en ti y sembraste en nosotros.

AGRADECIMIENTOS

Al Espíritu Santo, por iluminarme y acompañarme en este proceso.

A mi tía Heidi, por el apoyo, la confianza y la paciencia.

A los profesores Myriam Vega y Simón Reif, por instruirme desde su ejemplo,
conocimiento y calidad humana.

A mi directora de trabajo de grado Mónica Correa, por encausarme en lo que siempre quise
hacer, por todo su tiempo, su ayuda, su guía y sus enseñanzas.

A mis hijas, por inspirarme a ser mejor cada día,

todo esto es de ustedes y para ustedes.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ejes organizadores del currículo de matemáticas en Colombia. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas MEN (1998).....	21
--	----

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Descripción mandala.....	51
Ilustración 2. Dibujo de una mandala realizada por una estudiante.....	54
Ilustración 3. Identificación de la existencia de un patrón asociado a una regularidad....	55
Ilustración 4. Identificación de las relaciones entre cantidades.	56

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Identificación de un patrón como el cambio generado por el aumento de una misma cantidad. Fuente: elaboración propia.	53
Tabla 2. Identificación de un patrón como un ciclo en el que aumenta el tamaño de las figuras. Fuente: elaboración propia.....	57
Tabla 3. Identificación de un patrón como generador de cantidades ordenadas con un cambio constante. Fuente: elaboración propia.....	57

Tabla 4. Identificación de un patrón como el cambio generado por el aumento de una misma cantidad. Fuente: elaboración propia.	58
Tabla 5. La multiplicación como relación entre cantidades. Fuente: elaboración propia. 58	
Tabla 6. Diferencia igual entre cantidades como una característica necesaria en un patrón. Fuente: elaboración propia.....	59
Tabla 7. Identificación del funcionamiento de un patrón. Fuente: elaboración propia.....	60
Tabla 9. Diferencia entre el comportamiento de dos patrones. Fuente: elaboración propia.	61
Tabla 10. Suma iterada para encontrar una cantidad desconocida de la secuencia. Fuente: elaboración propia.....	62
Tabla 11. Reducción de operaciones en la aplicación de un patrón. Fuente: elaboración propia.	63
Tabla 12. Expresión simbólica del patrón. Fuente: elaboración propia.....	65
Tabla 13. Verificación de cálculos con otro procedimiento. Fuente: elaboración propia. 66	
Tabla 14. Operaciones del patrón. Fuente: elaboración propia.....	67
Tabla 16. Macroactos asociados a la indeterminancia. Fuente: Elaboración propia.	69
Tabla 17. Macroactos asociados a la analiticidad. Fuente: Elaboración propia.....	70

Tabla 18. Macroactos de la estudiante 7 (E7)	72
Tabla 19. Contraste de intervenciones. Fuente: Elaboración propia.....	74
Tabla 20. Secuencias con respuestas inseguras. Fuente: Elaboración propia.	76

RESUMEN

Este trabajo investigativo presenta un análisis pragmático del discurso como medio para reconocer la construcción de significado sobre las expresiones algebraicas, en una situación de generalización, en la cual se realiza una introducción al álgebra a través de la identificación y formulación de patrones en secuencias numéricas.

Con el fin de describir el discurso de los estudiantes según la teoría de los actos de habla y relacionarlos con los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico y el contexto de comunicación, se empleó la metodología de los *Experimentos de enseñanza* aplicada en tres fases: preparación, experimentación y análisis. Como resultado se logra identificar en las expresiones de los estudiantes referencias acerca de la indeterminancia, analiticidad y expresión simbólica como parte del desarrollo del pensamiento algebraico y algunas modificaciones y adecuaciones de su discurso como sinónimo de aprendizaje.

Palabras claves: Análisis del discurso, pensamiento algebraico, Experimentos de enseñanza, generalización, patrones.

Contenido

INTRODUCCIÓN	4
CAPÍTULO 1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	7
Planteamiento del problema.....	7
Objetivos	14
General	14
Específicos	14
Justificación y antecedentes	15
Justificación.....	15
Antecedentes	17
CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA	20
Perspectiva curricular.....	20
Directriz del Ministerio de Educación Nacional	20
Contextualización.....	23
Perspectiva de enseñanza del álgebra	25
Generalidades.....	25
La enseñanza del álgebra a través de la generalización	28
Reflexiones sobre el discurso en las prácticas educativas	31
La relación discurso y enseñanza.....	31
Perspectiva pragmática del discurso	33
Teoría de los actos de habla	34
Secuencias de actos	36
Macroactos de habla.....	37
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LOS EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA.....	40
Aspectos generales.....	40
Situación de enseñanza en el marco de los experimentos de enseñanza.....	42
Diseño y preparación del experimento.....	44
Descripción de las situaciones	47

Experimentación	50
Análisis Local.....	52
Análisis situación 1	53
Análisis situación 2	60
Análisis situación 3	64
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS RETROSPECTIVO.....	68
Desde el pensamiento algebraico	68
Desde el contexto de comunicación.....	72
Desde el diseño implementado.....	77
CONCLUSIONES	79
BIBLIOGRAFÍA.....	82
ANEXOS.....	86

INTRODUCCIÓN

En el marco de la educación colombiana, los documentos emitidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) presentan una propuesta para la enseñanza de las matemáticas desde el avance en competencias, esto a través de actividades enfocadas en los diferentes tipos de pensamiento: numérico, aleatorio, variacional, métrico y espacial. Especificando que para el aprendizaje con este enfoque se requieren de un ambiente que aborde situaciones significativas y comprensivas para los estudiantes.

Sin embargo, estas orientaciones dejan un escenario muy amplio de posibilidades, ya que cada institución tiene autonomía en la manera como organiza su currículo educativo. Así, las formas de enseñanza tienen variaciones significativas según la institución o según el docente y se constituyen como una de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas (Socas, 2011). Lo cual, termina por influir o hacer parte de los resultados desfavorables que arrojan las pruebas nacionales e internacionales en educación.

Por esto, es necesario integrar los aspectos didácticos y curriculares para promover en los estudiantes una construcción de significado sobre los objetos matemáticos que permita el avance en competencias, centrándose en un tipo de pensamiento específico para el desarrollo del pensamiento matemático en general.

En concordancia con lo anterior, este trabajo de grado se centra en el desarrollo del pensamiento variacional, el cual adquiere forma y sentido a través del pensamiento algebraico (Rojas y Vergel, 2013) y a su vez, este último, se caracteriza por presentar tres elementos: la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica (Radford, 2006).

Así, partiendo de las interacciones comunicativas que tienen lugar al resolver una situación de generalización, se establece la construcción de significado sobre las expresiones algebraicas, según la relación entre estas y los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico que menciona Radford (2006).

Para lograr este objetivo se realizó un análisis pragmático del discurso desde la propuesta de van Dijk (1996), con el fin de establecer la relación entre lo que se dice y el contexto de enunciación, en actividades de identificación y formulación de patrones, como un caso de generalización. Este tipo de actividades, son reconocidas como método para reducir la tensión entre la aritmética y el álgebra, en la que se reportan varios tipos de dificultades (Castro, 2012).

El análisis mencionado tuvo lugar a través de la metodología de los *Experimentos de enseñanza*, caracterizada por presentar varias fases en busca de una relación entre la preparación del experimento, que incluye los elementos teóricos; la experimentación, de la que hacen parte la aplicación de las situaciones de enseñanza y los análisis locales y retrospectivos. Particularmente, en este trabajo, los análisis locales y retrospectivos se enfocan en la identificación de los Actos de habla y las Secuencias de actos que constituyen un Macroacto, tomado como un acto global o idea principal en la comunicación (Correa, 2017) y la relación entre los Macroactos y los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico respectivamente.

En cuanto a la situación de enseñanza, se aplicaron actividades de identificación y formulación de patrones por medio del análisis de secuencias numéricas extraídas de la cantidad de figuras de uno dibujos llamados mandalas, los cuales, fueron diseñadas con características especiales que permitieron identificar un patrón y representarlo mediante una expresión algebraica.

Según lo anterior, el presente trabajo de grado se organiza en cuatro capítulos. El primer capítulo pone de manifiesto el problema de investigación que se aborda, en consideración de las investigaciones existentes acerca de la enseñanza del álgebra y estableciendo una relación con el discurso como materia de análisis dentro de la metodología de los *Experimentos de enseñanza*, se plantea el objetivo general y la pregunta que guía la investigación.

En el segundo capítulo, se encuentran todos los elementos teóricos que sustentan este trabajo, se parte de los referentes curriculares para contextualizar la aplicación de las actividades con estudiantes de la institución educativa Evaristo García, para luego, presentar las posturas implementadas desde la concepción del álgebra, sus perspectivas de enseñanza y su introducción por medio de la generalización. Además, se incluyen todos los planteamientos de base en el análisis pragmático del discurso, que involucra la teoría de los actos de habla, las secuencias y los macroactos.

El tercer capítulo, recoge toda la información acerca de la experimentación. Inicia con un recorrido sobre las características de los *Experimentos de enseñanza* como parte de las Investigaciones Basadas en Diseño, para continuar con la descripción de las actividades y todos los pormenores de la aplicación, concluyendo con el análisis local.

Finalmente, se encuentra el cuarto capítulo que contiene el análisis retrospectivo desde los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico y el contexto de comunicación, cerrando con las conclusiones, que sintetizan los resultados de la investigación y el avance con respecto a los objetivos planteados.

CAPÍTULO 1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Planteamiento del problema

La enseñanza de las matemáticas en la escuela supone una serie de consideraciones didácticas y curriculares que deben complementarse entre sí en busca de las mejores estrategias para contribuir en el aprendizaje de esta área de conocimiento; en Colombia, la educación matemática ha sufrido varios cambios en las últimas décadas, en la década de los ochenta se introduce la programación por contenidos como reemplazo al enfoque estructural de los conjuntos, para luego dar paso a la normativa vigente (Murcia & Henao, 2015).

Tal normatividad determina una autonomía curricular que le permite a cada institución educativa implementar su propio proyecto educativo (PEI), bajo las directrices de los documentos que ha emitido el Ministerio de Educación Nacional (MEN), los cuales se desarrollan atendiendo a los objetivos establecidos para la educación matemática. De este modo, se encuentra en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) que la enseñanza de las matemáticas debe responder a las nuevas demandas globales y nacionales relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad, a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos.

Otros documentos del MEN que pretenden servir de apoyo para los docentes, en cuanto al desarrollo de competencias en matemáticas, son los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2017). Así, mientras los Lineamientos de matemáticas establecen unos fines comunes de acuerdo con lo establecido en la Ley 115 de 1991 o también llamada Ley General de Educación, los Estándares Básicos de

Competencias especifican las competencias por ciclos que se espera desarrollen los estudiantes, definiendo unos criterios fundamentales de calidad en relación con la enseñanza (Murcia & Henao, 2015). Por su parte, los Derechos Básicos de Aprendizaje pretenden señalar rutas para cada año, de manera que los estudiantes puedan desarrollar las competencias establecidas por el MEN (2017).

Sin embargo, los documentos citados son una guía que deja abierta la puerta a diferentes metodologías y formas de enseñanza definidas por cada institución, las cuales influyen en la situación actual de la educación, reflejada en los resultados de las evaluaciones periódicas realizadas a nivel nacional por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) e internacional, como las que aplica el Programa de Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA); en las que el país ha obtenido puntajes poco satisfactorios, los cuales permiten reconocer la existencia de dificultades en el desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes (Murcia & Henao, 2015).

Cabe resaltar que las dificultades mencionadas pueden estar relacionadas con diferentes aspectos y no solamente con los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, como lo plantea Socas (2011), sino también en relación con la Matemática como disciplina, los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes y las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas, que, por lo general, para esta ciencia tienden a ser desfavorables.

Con respecto a la investigación en la enseñanza de las matemáticas, Kieran (1992) afirma que ha estado enfocada hacia los aspectos comunes de esta, sin tener en cuenta las distinciones que se deben hacer cuando nos referimos a temas específicos dentro ellas, dándole así valor a todo trabajo que se encargue de describir las diferencias en las formas de enseñar aritmética, álgebra o

geometría. Particularmente, menciona que, aunque hay poca información sobre los profesores de álgebra, la existente permite establecer una preferencia de estos por ajustarse a los libros de texto, explicando algunos ejemplos y dejando ejercicios como tarea con la preocupación principal de cumplir con el programa de estudios, lo cual se encuentra vigente en gran cantidad de instituciones y es apoyado por la creencia popular de considerar mejor la cantidad que la calidad.

Todas estas cuestiones están relacionadas con la forma cómo se entiende la educación, con el papel que debe cumplir el docente, los estudiantes y la materia de estudio según el contexto en el que se encuentren, porque precisamente considerar el contexto de la educación en Colombia puede ser uno de los criterios más importantes al momento de realizar reformas en este ámbito.

Por lo anterior, se hacen necesarias estrategias que permitan integrar el contexto y tomar a los estudiantes como participantes activos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, en consideración de las orientaciones que toman en cuenta aspectos específicos y procesos generales en la actividad matemática.

De esta forma, el MEN (1998) reconoce tres grandes aspectos en la actividad matemática que deben considerarse para organizar el currículo: Contexto, Procesos y los Conocimientos Básicos. Logrando articular con esto el ambiente donde se desenvuelven los estudiantes, los procesos generales del aprendizaje y los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático; considerando a su vez que el pensamiento matemático en general parte del trabajo específico en las matemáticas.

De manera que el desarrollo del pensamiento matemático se produce en relación con el avance en competencias que se logran a partir del trabajo en:

- El *pensamiento numérico y los sistemas numéricos*, se enfoca en la comprensión de los números y las operaciones entre ellos, de manera que estos sean usados flexiblemente para hacer juicios matemáticos y así tener la habilidad de comunicar, procesar e interpretar información numérica.
- El *pensamiento espacial y sistemas geométricos* que hace referencia a todos los procesos cognitivos a través de los cuales se construyen y se manipulan los objetos en el espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y representaciones materiales.
- El *pensamiento métrico y sistemas de medidas* que busca desarrollar habilidades para cuantificar parámetros en distintos contextos, así como para compararlos y relacionarlos haciendo uso de magnitudes y unidades.
- El *pensamiento aleatorio y sistemas de datos* que está relacionado con la adopción de un espíritu investigativo y de exploración, mediante la comprensión de contenidos propios de la estadística y la probabilidad aplicados a situaciones de la cotidianidad.
- El *pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos*, que tiene relación con la capacidad para identificar y caracterizar la variación y el cambio en diferentes situaciones, haciendo uso de modelos, descripciones y representaciones en distintos sistemas.

Así, en este abanico de posibilidades que se tienen para el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de habilidades relacionadas con el aprendizaje y aplicación de dichos conceptos en la vida cotidiana, el interés de este trabajo se centra en el desarrollo del pensamiento variacional, el cual se puede entender como “... *una forma específica de pensar matemáticamente*” (Rojas y Vergel, 2013, p. 766) lo que significa resolver problemas en diferentes contextos generando en los estudiantes la reflexión sobre la utilidad de las matemáticas, la notación simbólica y los conceptos matemáticos pertinentes.

Al referirse al pensamiento variacional se han de considerar actividades relacionadas directamente con el trabajo en el pensamiento algebraico, dado que es a través de este que el pensamiento variacional adquiere forma y sentido (Rojas y Vergel, 2013). Así pues, se hace

necesario una caracterización de dicho pensamiento, en la cual desde la perspectiva de Radford (2006) se identifican tres elementos relacionados entre sí: la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica; estos se refieren respectivamente a los objetos básicos (como incógnitas, variables y parámetros), la forma de trabajar con los objetos indeterminados y la manera específica de nombrar los objetos.

Igualmente, se plantea la necesidad de considerar en la enseñanza del álgebra, al menos, tres grandes entradas: la generalización (que incluye el uso de la aritmética como dominio de expresión y formalización para la generalización), la variación y el cambio (la modelización como un dominio para expresar y formalizar generalizaciones), y las correlaciones. Cada una de ellas recoge la variedad de registros de representación semiótica en los que se expresa el álgebra, tales como las tablas, ecuaciones, funciones, esquemas sagitales, fórmulas, etc. (Correa, 2017)

Sin embargo, la historia del simbolismo algebraico muestra una pérdida gradual de significado al pasar de descripciones generales en lenguaje cotidiano hacia representaciones simbólicas y procedimientos (Kieran, 1992); esta puede ser una razón por la cual es frecuente encontrar estudiantes que presenten dificultades al estar ante una situación que requiere la interpretación de una variable en un contexto determinado.

Dado lo anterior, las expresiones algebraicas pueden aparecer sin más y ser parte de una lección a tomar, en la que a muchos estudiantes solo les queda la opción de memorizar esa información. De ahí la importancia de una adecuada introducción al álgebra en la que se les dé relevancia a los aspectos centrales de esta, trabajando directamente en el desarrollo del pensamiento variacional.

Teniendo en cuenta esto, nos remitimos entonces al desarrollo del pensamiento algebraico y a aquellos procesos que lo hacen posible, entre ellos la generalización que se identifica como uno de los tres tipos de tareas presentes en el álgebra escolar (Kieran, 1996), en la que se abordan actividades relacionadas con las ecuaciones y las expresiones de generalización de patrones geométricos o secuencias numéricas.

La introducción al álgebra por medio del uso de patrones ha sido uno de los métodos empleados para reducir la tensión existente en el paso de la aritmética al álgebra; aunque se encuentran algunas dificultades asociadas con este tipo de actividad, como por ejemplo la dificultad para expresar algebraicamente un patrón, encontrándose más errores cuando los estudiantes pasan de las expresiones verbales a las algebraicas que cuando van de lo simbólico a lo verbal (Castro, 2012).

No obstante, decir que los estudiantes tienen dificultades al expresar simbólicamente un enunciado no significa necesariamente una total incomprensión al respecto; es apenas natural que haya mucha más facilidad expresando sus ideas en un lenguaje cotidiano, en el que no se debe ser tan preciso ni riguroso en su uso; lo que lleva a cuestionar si esta forma de expresión representa una construcción del aprendizaje de las matemáticas.

Sfard (2008) define el aprendizaje como un proceso mediante el cual se da lugar a un cambio en las formas discursivas propias; de esta manera, el discurso usado por los estudiantes puede dar indicios de la forma como se da la comprensión, en este caso de los elementos propios del pensamiento algebraico.

Por lo anterior, este trabajo presenta el diseño de una situación de aprendizaje para introducir al álgebra por medio del uso de patrones. Para esto, se propone el reconocimiento y el conteo de los elementos que componen unos dibujos llamados “Mandalas”; los cuales fueron elaborados con características especiales que permiten establecer secuencias numéricas, con el fin de dar lugar a la identificación y formulación de los patrones que las generan. Durante este proceso, se toma en consideración el discurso usado por los estudiantes para referirse a las cantidades que varían, a las relaciones entre dichas cantidades y a las operaciones que realizan para calcular otros términos de las secuencias; buscando con esto, el establecimiento de las condiciones que dan lugar a la caracterización del pensamiento algebraico.

Así, a través de un análisis pragmático del discurso desde la propuesta de van Dijk (1996), que permite establecer una conexión entre lo que se dice y el contexto de enunciación (Correa, (2017), se utiliza la metodología de los *Experimentos de enseñanza* para establecer las condiciones mencionadas.

De esta manera, en el desarrollo del presente trabajo se pretende dar respuesta al siguiente interrogante:

¿Cómo a partir de un análisis pragmático del discurso, centrado en la perspectiva de los Actos de habla, se puede reconocer la construcción de significado que realiza un grupo de estudiantes de las expresiones algebraicas a partir de una situación de generalización de patrones?

Objetivos

General

Caracterizar el discurso desde la perspectiva de los actos de habla para reconocer la construcción de significado, que realiza un grupo de estudiantes, de las expresiones algebraicas a partir de una situación de generalización.

Específicos

- Diseñar una situación de enseñanza que dé lugar al reconocimiento de los elementos algebraicos en una situación de generalización.
- Reconocer los actos de habla que realizan los estudiantes para referirse a los elementos algebraicos en una situación de generalización.
- Identificar a través de una situación de generalización las características propias del pensamiento algebraico definidas en la propuesta de Radford.

Justificación y antecedentes

Partiendo de las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, las investigaciones indican la necesidad de generar métodos alternativos que involucren a los estudiantes desde grados iniciales, tomando en cuenta cómo se realiza ese acercamiento, esto es, la perspectiva que se aborde para su enseñanza. Al respecto, se presentan investigaciones llevadas a cabo con estudiantes de primaria, que involucran el reconocimiento de secuencias y patrones; además, de otras consideraciones acerca del discurso y su papel fundamental en la educación.

Justificación

Los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar se han convertido en objeto de diversos estudios tanto por investigadores locales como internacionales, dichas investigaciones tienen en común que se enfocan en los problemas que presentan los estudiantes con el aprendizaje del álgebra escolar.

En este proceso de introducción al álgebra existen varios problemas que según Kieran (1989), estarían relacionadas con: a) el cambio de convenciones respecto del referente aritmético, b) la interpretación de las letras, y c) el reconocimiento y uso de estructuras. Con estos hallazgos en su primera etapa de carácter cognitivo se manifiesta una dificultad de carácter didáctico en la enseñanza del álgebra en grados iniciales. De esta manera, las dificultades mencionadas, hacen visible la necesidad de implementar en grados iniciales acciones pertinentes desde la enseñanza, que contribuyan a facilitar el paso de la aritmética al álgebra en su momento dado.

En una investigación posterior Kieran y Yagüe (1989) realizaron un análisis detallado y encontraron que las dificultades presentadas por parte de los estudiantes en efecto tenían relación

con la conceptualización del signo igual, dificultad en la resolución de ejercicios y en especial cuando los números son reemplazados por letras en casos algebraicos.

Con lo anterior, se ratifica la necesidad de generar nuevas estrategias de enseñanza en las matemáticas, en especial del álgebra escolar al tener en cuenta que gran parte del trabajo en la aritmética ha estado orientado a encontrar la respuesta, énfasis que ha permitido a los niños arreglárselas con procedimientos informales e intuitivos; sin embargo, en álgebra, se les pide que reconozcan y usen la estructura que antes han tenido la posibilidad de evitar en aritmética, lo cual genera dificultades en la iniciación al álgebra como las referidas por Kieran (1989).

La estructura del álgebra mencionada por Kieran (1989) es un concepto implícito desde el origen de ésta, por tal razón Correa (2017) citando a otros autores expone el surgimiento histórico del álgebra como una disciplina independiente en la que se han reconocido tres etapas de desarrollo: retórica, sincopada y simbólica, las cuales comúnmente se consideran de una forma lineal.

Es precisamente este desarrollo el que ha influenciado las concepciones de los profesores y la forma de enseñar el álgebra en la escuela. Encontrándose así, distintas perspectivas sobre la enseñanza del álgebra, en las cuales se consideran diferentes aspectos para la formación del pensamiento matemático (Correa, 2017).

Varios autores hacen la distinción de las perspectivas mencionadas, detectando clasificaciones muy similares que señalan enfoques como la generalización, la resolución de problemas, el estudio de relaciones entre cantidades o funcional y el estudio de estructuras o

modelación. Entre dichas perspectivas, este trabajo se sitúa en la generalización debido a que el álgebra se caracteriza principalmente por la expresión de resultados generales.

Antecedentes

Con frecuencia, tanto estudiantes como profesores, manifiestan tener dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en los grados de media vocacional, en especial en los grados de octavo y noveno en donde se introduce la utilización de variables y se desarrolla el trabajo analítico con estas. Por esto, en Kieran (1989) se reconoce la dificultad asociada con el proceso de aprendizaje del álgebra debido a que previamente venían de resolver operaciones de carácter aritmético. También, se plantea que existen tres cambios significativos: la concatenación de símbolos, uso de paréntesis y usos del signo igual; además de reconocer otras dificultades, como la interpretación de las “letras” y el reconocimiento y uso de estructuras (superficial y sistémica).

Este reconocimiento de cambios y dificultades que enfrentan profesores y estudiantes al iniciar el trabajo con el álgebra muestra una necesidad por abordar este tema desde la investigación, buscando nuevas estrategias que permitan minimizar el impacto del cambio y que consideren aspectos relevantes en el desarrollo de cada tipo de pensamiento.

Por esta razón, Sessa (2005) planteó una introducción al álgebra a través de la generalización, que permita hacer de esta una herramienta adaptable para expresar la generalidad, así como para proveer un mecanismo de validación de conjeturas. Con varios ejemplos, se presentó un trabajo apoyado en la noción de fórmula, vista no solo como un modelo de una situación sino también como el reflejo de un proceso de cálculo.

Sobre la introducción al álgebra haciendo uso de la generalización de patrones, se tienen varias investigaciones que abordan esta temática desde la educación primaria. Luego de estudiar este tema, Zapatera (2018) realizó una secuencia de tareas a desarrollar en la Educación infantil y Educación Primaria, con el fin de fomentar la introducción al pensamiento algebraico desde edades tempranas. Así mismo, Medina (2018) presentó un proyecto pedagógico para estudiantes de segundo de primaria, basado en el reconocimiento de patrones y secuencias, en el que se tiene en cuenta un orden particular para el análisis de las secuencias.

En la configuración didáctica de las actividades para introducir el álgebra se deben tener en cuenta varios aspectos, como la disponibilidad de tiempo para abordar el contenido, si se cuenta con un libro o guía y desde luego el punto de vista del profesor con respecto a los objetos de conocimiento dados en clase y la forma como el estudiante debe dar cuenta de ellos. Al centrar la atención en el profesor, es imprescindible pensar en el lenguaje o discurso utilizado en clase, el cual puede influir en la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes.

Al considerar el discurso matemático presentado en los libros de texto, cabe identificar el manejo que se le da a los conceptos y las formas de enseñanza propuestas, las cuales tienen una organización específica del saber y configuran un tipo de discurso para la clase de matemáticas Díaz, L. y Morales, L., (2005). Debido a esto, el profesor debe crear un discurso que pueda integrar su discurso propio con el del material guía.

Los investigadores Cubero, R., Cubero, M., Santamaría, A., De la Mata Benítez, M. L., Ignacio-Carmona, M. y Prados, M. (2008), analizaron y describieron las estrategias de comunicación utilizadas por estudiantes y profesores en actividades del aula; tomando el discurso como una actividad generadora de significado que además de ser responsable de la construcción

de conocimiento, también lo es de la propia realidad del aula. Incluso, en este trabajo investigativo, se resalta la importancia que tiene la orientación denominada *análisis del discurso*, como fuente de inspiración para establecer una postura teórica relacionada con la comprensión del discurso educativo.

Por su parte, Sfard (2008) establece que la comunicación es casi equivalente al pensamiento mismo y, por ende, enfocar la educación matemática en este aspecto conllevaría un cambio en la forma de enseñar y en la forma de pensar sobre el aprendizaje y sobre lo que se aprende. Siguiendo estos parámetros, el aprendizaje se define como la iniciación a un discurso matemático.

Con base en los trabajos mencionados, la presente investigación plantea introducir el álgebra en grado octavo utilizando la generalización de patrones, considerando cómo los estudiantes inician su proceso de construir un nuevo conocimiento y la forma en que, a partir de su discurso se puede evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA

Perspectiva curricular

Desde las propuestas del Ministerio de Educación Nacional (MEN) para la enseñanza de las matemáticas, se toman en consideración varios aspectos que hacen parte del desarrollo de este trabajo de grado. Fundamentalmente, la subdivisión del pensamiento matemático, que permite el enfoque hacia la introducción al álgebra como un medio para desarrollar competencias. Así mismo, al ser parte del currículo colombiano las actividades se ubican dentro de los estándares y los derechos básicos de aprendizaje según el grado y los objetivos propuestos.

Directriz del Ministerio de Educación Nacional

Las matemáticas, lo mismo que otras áreas del conocimiento, están presentes en el proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes; así, en el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes además de desarrollar su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica paralelamente desarrollan competencias dadas por la adquisición de un conjunto de instrumentos útiles que les permitan afrontar la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana (MEN, 1998).

En este sentido, se puede hablar del aprendizaje por competencias como un aprendizaje significativo y comprensivo, lo que conlleva a que las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más profundos.

Específicamente, la competencia en matemáticas se evidencia en el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

De acuerdo con esta visión global e integral del quehacer matemático, la teoría propone tres grandes aspectos para organizar el currículo de forma armónica: Contexto, Conocimientos básicos y Procesos. Se presentan estos aspectos enfatizando en el pensamiento variacional, dado que el presente trabajo pretende el desarrollo del pensamiento algebraico y este a su vez le da forma y sentido al anterior.



Figura 1. Ejes organizadores del currículo de matemáticas en Colombia. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas MEN (1998)

El desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones cotidianas y de las ciencias donde la variación es su

principal característica; su estudio se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes (MEN, 2006).

Lo anterior se encuentra directamente relacionado con la enseñanza del álgebra en la escuela, particularmente desde su introducción en los grados séptimo u octavo de la educación básica secundaria, en la cual se busca que inicialmente los estudiantes puedan generalizar patrones aritméticos, para luego hacer del álgebra una potente herramienta en la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio (MEN, 1998).

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo de grado se vincula al siguiente estándar básico en matemáticas, correspondiente al bloque de sexto a séptimo dentro del pensamiento variacional y sistemas algebraicos: *“Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas)”* (MEN. 2006, p.85), ya que, en las actividades de generalización de patrones como introducción al álgebra, se espera lograr una representación simbólica de la variación.

Además, se atiende al siguiente Derecho Básico de Aprendizaje para grado séptimo: *“Plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica”* (MEN. 2016, p. 56). Cabe aclarar que, aunque en la propuesta nacional, tanto de estándares como de los DBA, las actividades se sitúan en el grado séptimo, estas se desarrollaron en grado octavo considerando que en la institución donde se aplicaron se da inicio al álgebra en este grado.

Contextualización

La aplicación de las actividades propuestas se llevó a cabo con los estudiantes del grupo 8-2 de la Institución Educativa Evaristo García. Esta Institución de carácter público se encuentra ubicada en la comuna 8 de Cali, con su sede central en el barrio Saavedra Galindo. Con respecto al tiempo de la pandemia, iniciaron trabajando con talleres para entregar por áreas, mientras se establecía la conectividad con los estudiantes; según fueron llegando los recursos, algunos estudiantes tuvieron la posibilidad de obtener tabletas y módems de internet para recibir sus clases y realizar sus tareas. Sin embargo, este beneficio no alcanzó para todos, por lo cual, varios estudiantes que no tenían acceso a internet ni dispositivos para conectarse recogían los talleres directamente en la institución y hacían entregas por semanas al correo electrónico de cada profesor.

El grupo mencionado, estaba conformado por 29 estudiantes, de los cuales 13 son mujeres y 16 hombres, con edades entre los 13 y 16 años. La docente de matemáticas los describe como un grupo homogéneo, con características muy similares en cuanto al trabajo de esta área, expresa que son autónomos y responsables, con una actitud de expectativa por los contenidos matemáticos. En cuanto al trabajo virtual, se encontraron con dificultades de conectividad, pero gracias a la colaboración de los padres la mayoría de ellos logró adquirir equipos.

Según la docente, el cambio a la virtualidad generó ciertos temores sobre el proceso de enseñanza y la receptividad de los estudiantes en esta modalidad. No obstante, la realidad fue diferente, encontrando facilidad en las explicaciones por este medio y una buena respuesta en participación por parte de los estudiantes.

Sobre la introducción al álgebra con estos estudiantes, la docente manifiesta que no hubo mayor complicación dado que ellos habían trabajado en séptimo algunos temas relacionados con álgebra. No se aportan especificaciones con relación a las actividades para introducir el álgebra en séptimo u octavo, pero si revela que continuamente trata de contextualizar las matemáticas en la cotidianidad y en otras áreas como el arte.

Perspectiva de enseñanza del álgebra

Para el desarrollo de este trabajo de grado se tienen en cuenta varios elementos conceptuales que justifican y soportan el diseño de las situaciones y su posterior análisis. En primer lugar, se consideran algunos aspectos relacionados con el álgebra, su definición, formas y enfoques de enseñanza, tomando como referente el trabajo realizado por Kieran (2014) y Correa (2017); para luego abordar específicamente la generalización a través de las propuestas de Radford (2006) y Vergel (2015).

Generalidades

El álgebra como muchos otros conceptos puede tener varias definiciones que dependen de sus funciones y utilidades en determinadas comunidades. Por esto, es necesario adoptar una definición o postura frente a lo que es el álgebra y su enseñanza, en las que tengan lugar las problemáticas planteadas. Así, para efectos de este trabajo el álgebra sigue la definición de Freudenthal (1977) mencionada en Kieran (2014) en la cual se caracteriza al álgebra escolar como un conjunto de actividades que incluyen la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, así como el pensamiento algebraico; incluyendo en este la capacidad de describir relaciones y resolver procedimientos de manera general.

Lo anterior es una generalidad de la propuesta de Kieran (2007) en la que se considera al álgebra como una actividad, la cual es sintetizada por Correa al reportar que:

Este modelo se centra en la idea del álgebra como una actividad, en la que se asume ante todo que se realizan acciones sobre los objetos algebraicos y la construcción de los mismos. En este sentido, es válido y necesario pensar la enseñanza del álgebra como promotora del desarrollo del pensamiento algebraico

a partir de la construcción y transformación de los objetos que le son propios (2017, p.42).

Además, esta propuesta tiene en cuenta la caracterización del álgebra escolar que se fundamenta en la realización de tres tipos de actividad: Generacional, Transformacional y Global/meta – nivel (GTG), para las cuales se consideran aspectos como la construcción de significado, la transformación de una expresión algebraica y la contextualización respectivamente.

Específicamente, en este trabajo se busca la construcción de significado de las expresiones algebraicas a través del reconocimiento de patrones y regularidades en secuencias, lo cual se relaciona principalmente con la actividad generacional; según el trabajo de Kieran (2014) esta se constituye como un punto de referencia donde se construyen la mayoría de los significados, mediante la interpretación y representación de situaciones, propiedades, patrones y relaciones. También se presentan como ejemplos claros de esta actividad ecuaciones que representan situaciones problemas con valores desconocidos, expresiones de generalidad derivadas de patrones geométricos o secuencias numéricas, expresiones de las reglas que rigen las relaciones numéricas, así como las diferentes representaciones de una función.

Los tres tipos de actividad mencionados representan parte de la variedad de trabajos que se han realizado para la enseñanza del álgebra, en el modelo de Kieran (2007) estos tres deben ser un apoyo en esta labor. Del mismo modo, y en un sentido más amplio, la comunidad en Educación Matemática ha señalado la existencia de cuatro enfoques para la introducción al álgebra en la escuela: la generalización, la resolución de problemas, la modelación y la perspectiva funcional Bednarz, Kieran & Lee 1996, (citado en Correa, 2017, p. 43).

Cada uno de los enfoques mencionados se relaciona con las distintas concepciones que se tienen acerca del álgebra y a su vez, estos poseen diferentes bondades y limitaciones al ser abordados. Correa (2017) presenta las implicaciones de introducir el álgebra en la escuela según cada perspectiva:

- La generalización favorece el desarrollo de procesos de visualización, el reconocimiento de propiedades y relaciones y presenta como dificultad la posibilidad de no reconocer el patrón al valerse de la observación y percepción.
- La resolución de problemas hace uso de muchas situaciones didácticas, incluyendo las de carácter histórico; sin embargo, pueden existir diferentes interpretaciones para determinada situación.
- La modelación busca encontrar un modelo capaz de representar las relaciones entre las variables, para esto primero se debe formular y luego verificar el modelo obtenido.
- La perspectiva funcional se basa en el estudio de los cambios producidos al considerar los valores de una variable.

De los enfoques mencionados, este trabajo pretende usar la generalización para el desarrollo del pensamiento algebraico. Tomando como referente a Vergel quien define este concepto como *“un conjunto de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente”* (2015, p.196) y asume que el pensamiento algebraico tiene características específicas que lo distinguen de otras formas de pensamiento matemático.

Según Radford existen tres elementos interrelacionados que le otorgan la particularidad al pensamiento algebraico: la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. El primero de ellos se refiere a la sensación de indeterminación que poseen las incógnitas, variables y parámetros vistos como objetos algebraicos. El segundo, hace referencia a la posibilidad de operar con aquellos objetos indeterminados, es decir, poder manejarlos analíticamente; y como último

elemento, la designación simbólica hace alusión a la expresión semiótica de los objetos, lo que comprende poder nombrar y representar incógnitas, variables y parámetros a través de signos.

La enseñanza del álgebra a través de la generalización

Al definir y caracterizar lo que es el pensamiento algebraico se llega a plantear su relación con la generalización y la correspondencia entre estos términos. De manera que pensar algebraicamente va más allá que pensar en algo general. Por esto, para dar lugar al pensamiento algebraico, es necesario pensar en lo general como algo susceptible de ser razonado y expresado mediante objetos algebraicos (Radford, 2006).

Particularmente, el enfoque de este trabajo se relaciona con la identificación y expresión de patrones numéricos presentes en la cantidad de figuras de varios mandalas. Por esto, es importante definir este término y mencionar su importancia en la educación matemática.

Un patrón conlleva en si la idea de una situación repetida con regularidad (Steen, 1988; pg: 611; Stacey, 1989; 147-149, citado en Castro (1999)), en la cual existe un núcleo generador, que puede repetirse o crecer de forma regular. Es decir, que los patrones son una pauta o característica común que se aplica en una situación de forma regular. Al tener en cuenta esto, hablar de la regla del patrón es referirse a esa pauta en términos de operaciones matemáticas, que da lugar a la formación de una secuencia de términos generada bajo esas condiciones.

Así, en la enseñanza de las matemáticas se reconoce que el uso de patrones ayuda a comprender intuitivamente expresiones y relaciones que pueden ser usados en estudios posteriores (Ericksen, 1991; pgs:255-258) citado en Castro (1999)), ya que, en esta área de conocimiento, por

lo general se trabaja con modelos que guardan esa característica de ser regulares y que además de esto hacen uso de las relaciones entre cantidades determinadas o variables.

Lo anterior, tiene relevancia en el desarrollo del pensamiento algebraico pues funciona como un puente entre este y la generalización. Merino (2012) se refiere a la relación entre patrones y generalización apoyándose en autores como Polya (1966) y Kaput (1999), los cuales, indican que el reconocimiento de patrones es útil y esencial para desarrollar la habilidad de generalizar; teniendo en cuenta que estas actividades parten de la identificación de una regularidad que se puede extender a otros casos y que conllevan con esto a enfocarse en los patrones, los procedimientos, las estructuras y las relaciones entre ellos.

Profundizando un poco más en el tema, Radford (2006) asegura que no todas las generalizaciones son de tipo algebraico, por tanto, al introducir el álgebra mediante la generalización de patrones se debe tener la capacidad para identificar el tipo generalización y contar con estrategias pedagógicas que orienten a los estudiantes a involucrarse con los patrones en un sentido algebraico.

La identificación del tipo de generalización se encuentra estrechamente relacionada con las formas de expresión en que se materializan los razonamientos acerca de lo general. De esta forma se reconocen tres tipos de generalización: factual, contextual y simbólica. Las cuales son presentadas por Vergel (2015):

- La generalización factual en la que se utilizan gestos, movimientos, ritmo, percepciones y palabras. La indeterminancia queda implícita dado que es expresada por medio de acciones concretas, como por ejemplo al realizar movimientos con un lápiz y decir “aquí”, señalar y decir “más dos”.

- La generalización contextual que hace uso de frases “clave” por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”. En estas expresiones la indeterminancia es explícita, ya que se convierte en el objeto del discurso.
- La generalización simbólica que da paso al uso de los símbolos alfanuméricos propios del álgebra como representación de las frases clave. Por ejemplo, mediante expresiones como $n+(n-1)$ o $2n-1$.

Para concluir con estos planteamientos, se reconoce la existencia de algunos casos en los que, a pesar de encontrar una característica común a todos los términos de la secuencia, no se llega a plantear una regla o esquema que permita calcular cualquier término de esta. Lo anterior se conoce como generalización aritmética, la cual se puede considerar como una generalización algebraica incompleta, puesto que para Radford (2006) la generalización algebraica de un patrón se basa en notar una propiedad común de forma local, que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia y que sirve como soporte para construir expresiones de elementos de la secuencia que permanecen más allá del campo perceptivo.

Reflexiones sobre el discurso en las prácticas educativas

De forma general, el discurso se constituye como un medio de comunicación a través del cual interactuamos con otras personas y expresamos nuestras ideas. Sin embargo, en una interacción comunicativa se encuentran inmersos diferentes elementos, los cuales posibilitan la comunicación y permiten que haya una adecuada comprensión e interpretación de las ideas e intenciones de los otros participantes. Todo esto, se pone de manifiesto, con el fin de entender un poco mejor cómo se logra construir un conocimiento a partir del discurso de los estudiantes.

La relación discurso y enseñanza

En el día a día de un aula de clase se pueden encontrar diversas actividades de enseñanza en las que necesariamente hay un factor común, todas utilizan el lenguaje como medio para la construcción de un conocimiento. Así, la educación en general parte de los procesos comunicativos que se gestan en torno a un tema en específico; dichos procesos son particulares, no solo por el hecho de que se traten diferentes temas sino también por las condiciones en las que se sitúa cada uno.

Cubero, R., Cubero, M., Santamaría, A., De la Mata Benítez, M. L., Ignacio–Carmona, M. y Prados, M. (2008) asumen la educación como algo similar a lo mencionado, agregando que, en el proceso de comunicación es necesario un discurso educativo capaz de adquirir sentido y significado, para llegar a ser una representación del mundo y del discurso propio. Con esto, se resalta la importancia que tiene el discurso educativo, mencionando que a través de este no solo se construye significado, sino que se genera la realidad del aula.

En este sentido, generar una realidad se asume como la capacidad que posee el discurso de operar, dando lugar a hechos y acciones establecidos por las relaciones y los intercambios que se van presentando en la interacción de una clase. Por consiguiente, el discurso hace parte fundamental de los procesos de enseñanza, ya que en las interacciones del aula se crea un contexto de comunicación formado por las expresiones de sus participantes, que llaman la atención de este trabajo para analizar cómo a partir de su lenguaje habitual se comunican respecto a las situaciones propuestas.

Partiendo del enfoque comunicacional de Sfard, que considera el aprendizaje como “*el proceso de cambiar de cierta manera, bien definida, las formas discursivas propias*” (2008, p.44) y que reconoce la importancia de las condiciones en las que tiene lugar, se establece una relación directa entre el discurso y el contexto en que se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje, la cual toma a los estudiantes como personas interesadas por hacer parte de una comunidad específica en la que se comunican de manera particular.

En este caso, hacer parte de la comunidad matemática que se construye en el aula incluye esa comunicación efectiva y concertada, en la que se utilizan palabras para nombrar objetos de esta disciplina y hacer uso de sus propiedades y características en la resolución de situaciones problema. Para que esto tenga lugar, los estudiantes deben pasar por el proceso de introducir esos nuevos términos a su discurso y usarlos dentro de los parámetros establecidos por un experto, el cual está representado por el docente en cada clase.

Sfard (2008) identifica dos etapas en este proceso, el primero es el uso de *plantillas*, que hace referencia a la utilización del discurso conocido por los estudiantes para involucrar un nuevo término que al inicio puede ser usado como una cosa en sí misma, para luego, en la segunda etapa

tomar un significado por medio de la *objetificación*, lo cual sugiere que esas nuevas palabras empiezan a usarse como representaciones de objetos independientes, logrando más fluidez y propiedad en la comunicación.

De esta forma, se tiene que el discurso juega un papel fundamental en la educación, en tanto que refleja el pensamiento de los estudiantes y la forma cómo a través de determinadas situaciones se empieza a construir un conocimiento. Además de lo anterior, cabe señalar que cada situación tiene unas condiciones particulares, que influyen directamente en las decisiones discursivas de los participantes, esto es el contexto de comunicación.

Perspectiva pragmática del discurso

En consideración del contexto como parte fundamental del discurso usado por los estudiantes se toman elementos de análisis desde la pragmática del discurso, dado que esta disciplina se encarga del estudio de las emisiones verbales como Actos de habla, lo que quiere decir que se asumen como acciones. De esta manera, se vinculan las emisiones con el contexto, haciendo referencia a la función que cumplen en el desarrollo del discurso, la cual se considera en conjunto con aspectos como el acento, la entonación, las estructuras sintácticas y el significado (Van Dijk, 1996).

Teniendo en cuenta lo anterior, y respecto a la enseñanza del álgebra, el análisis del discurso de los estudiantes al resolver actividades de generalización de patrones puede brindar indicios acerca del nivel de comprensión sobre el tema, por cuanto se establecen relaciones entre lo que se dice, cómo se dice y la función de cada emisión en el discurso, de acuerdo con una idea principal de comunicación acerca de los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico.

Para precisar esto, se presenta la propuesta de Searle (2005) sobre los actos de habla, sus reglas y categorías existentes y la de van Dijk (1966) acerca de las Secuencias de actos de habla y los Macroactos de habla.

Teoría de los actos de habla

Según Searle (2005) en una situación de habla típica existen muchas clases de actos asociados con la emisión del hablante, entre los cuales se encuentran los actos ilocucionarios, los cuales son actos de habla o actos lingüísticos que se constituyen como la unidad básica de la comunicación lingüística. En la realización de un Acto de habla se identifica una intencionalidad y son caracterizados por varias reglas o condiciones.

De esta forma, el discurso de los estudiantes se compone en su mínima unidad por Actos de habla, emitidos en unas condiciones particulares, en las que se incluyen los gestos y otras expresiones que brinden información acerca de la construcción de significado que tiene lugar en ese momento.

Esto conlleva a un análisis inicial, sobre el tipo de actos que realizan los estudiantes teniendo en cuenta también las formas de expresión que utilizan en una situación de generalización de patrones, con el fin de establecer las condiciones contextuales que los sitúan en determinada categoría como actos satisfactorios. Esto se refiere a que la acción que se pretende realizar con la emisión de un Acto de habla cumpla con el propósito por el cual fue emitida (van Dijk, 1996).

Para categorizar los Actos de habla se establecen varias reglas que están relacionadas con el *dispositivo indicador de la función*, tomando este como una parte de la oración al igual que el dispositivo indicador de la proposición. El dispositivo indicador de la función indica la

interpretación que debe hacerse de una oración mientras que el dispositivo indicador de la proposición se refiere al contenido proposicional de esta. Así, las reglas mencionadas, tomando en cuenta elementos contextuales terminan por definir el tipo de acto realizado Searle (2005).

La primera regla es la del *contenido proposicional*, el cual se reconoce por la identificación de un sujeto y un predicado. La segunda, es la regla o condición *preparatoria* que establece las condiciones bajo las cuales se realiza un acto y las facultades que deben tener el hablante y el oyente para poder hacer parte de este. La tercera, es la regla de *sinceridad* que se enfoca en la intención del hablante al realizar una emisión. Y, por último, la regla o condición *esencial* que establece condiciones para llevar a cabo el contenido proposicional del acto de habla Correa (2017).

De acuerdo con las reglas para el uso del dispositivo indicador de función, se tienen actos asertivos, directivos, compromisorios, expresivos y declarativos. Los asertivos comprometen al hablante con la verdad de la proposición. Los directivos pretenden que el oyente realice una acción. Los compromisorios comprometen al hablante con una acción futura. Los expresivos tienen como objeto expresar una emoción o estado psicológico con respecto a lo que se dice. Los declarativos son aquellos que cambian una situación de la realidad, es decir, que el hecho de emitirlos constituye la acción como tal Searle (2005).

Según lo anterior, los actos de habla constituyen acciones que se definen de acuerdo con la interpretación que se realice de una expresión determinada, teniendo en cuenta que esta parte de las condiciones particulares en las cuales fue emitida y que, por lo general, estos actos forman parte una secuencia de interacción comunicativa y no ocurren de forma aislada.

Secuencias de actos

La comunicación tiene lugar mediante una unidad básica, los actos de habla, pero dicha unidad no se basta para entregar una idea completa por sí misma, sino que actúa en complemento con otros actos para cumplir con su objetivo. A esto se refieren, las secuencias de actos, a una concatenación de actos de habla que forman parte de una intención comunicativa.

Van Dijk (1980) expresa que las secuencias de actos también se pueden interpretar como un solo acto de habla, constituido por varios actos componentes o auxiliares. Para referirse a que los actos que componen una secuencia, cumplen con una función y se van organizando de acuerdo con una idea general; por lo cual, al cumplir con las condiciones para hacer un Acto de habla satisfactorio, la situación cambia de alguna manera y esto requiere que las condiciones de salida de un acto sean las mismas condiciones de entrada para el acto siguiente en la secuencia (van Dijk, 1996).

Al relacionar lo anterior con el desarrollo de las actividades propuestas para la introducción al álgebra, se genera un análisis sobre las interacciones que se producen en la identificación y formulación de patrones, incluyendo de forma global las Secuencias de actos de habla, así como las relaciones entre los actos que las constituyen.

En cuanto a la relación entre actos de habla van Dijk (1996) expresa que en lo pragmático un acto tiene la posibilidad de no ser adecuado individualmente, pues su adecuación está dada al ser parte de una secuencia. Así, se pueden tener actos preparatorios, que dan paso a otros actos, como peticiones o aserciones; actos que funcionan como condiciones, para decir algo; o actos que

son consecuencia de otros actos. También, se consideran aquellos actos auxiliares que tienen la función de especificar o corregir otros actos de habla.

De igual forma, se reconoce en el contexto concreto y en el conocimiento del hablante sobre el mundo, una relación de dependencia con las interpretaciones semánticas de las emisiones. De tal manera que cada hablante interpreta el discurso desde las condiciones en las que tiene lugar y desde su conocimiento previo general y específico en algún tema, además de las creencias sobre lo que los interlocutores conocen, quieren o necesitan escuchar. Por lo tanto, al generar una intervención discursiva, esta viene organizada según lo mencionado.

Cabe destacar que, la organización elegida por cada uno de los interlocutores obedece a un propósito o finalidad en la comunicación. Por eso, analizar las funciones y estructura de estas permite identificar la idea general que se quiere expresar. Estas ideas tienen un nombre particular y se definen a continuación.

Macroactos de habla

Cuando se hace referencia al propósito o finalidad con que se realiza un acto de habla, es necesario tener presente, según lo planteado por van Dijk (1996), que este puede ser diferente al propósito del discurso, y, aun así, su lugar dentro de la secuencia cumple con alguna función que conlleva a alcanzarlo. De esta manera, se pasa a definir las estructuras de actos globales en una secuencia como un Macroacto de habla.

Partiendo de las intervenciones en clase de los estudiantes al realizar las actividades propuestas, el concepto de Macroacto de habla es útil para extraer una acción principal o global; lo anterior se logra a partir de una Secuencia de actos que tienen lugar en el trabajo de identificar

elementos variables, establecer relaciones entre dichos elementos y expresar simbólicamente las relaciones mencionadas; los trabajos anteriores, se vinculan con los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico según Radford (2006) y dan cuenta de la construcción de significado que tiene lugar con respecto a las expresiones algebraicas.

Para lo anterior, se toman en cuenta las siguientes especificaciones sobre los Macroactos. La primera de ellas es que la secuencia de actos debe estar linealmente conectada, esto implica que el discurso es linealmente coherente y que se satisfacen las condiciones para la secuencia. La segunda, es la existencia de actos auxiliares y actos principales en una secuencia, lo cual indica que algunos actos tienen una mayor importancia de acuerdo con el objetivo principal de la interacción.

Con esto, se concluyen las posturas teóricas para realizar un análisis pragmático, en el cual se identifican inicialmente las secuencias de actos y la función de los actos componentes como parte de la expresión de una idea general alrededor de los temas mencionados. De igual forma, se toma en consideración el contexto como parte fundamental de las decisiones discursivas de los estudiantes, de manera que, a través del mismo discurso se entreguen indicios sobre el aprendizaje que tuvo lugar o no, en el desarrollo de las actividades.

Así, este trabajo de grado se fundamenta desde unos claros referentes curriculares, que conducen al desarrollo del pensamiento matemático partiendo del pensamiento variacional y que, en conjunto con las posturas teóricas acerca de la enseñanza del álgebra, guían las actividades para promover el pensamiento algebraico en los estudiantes mediante una situación de generalización; en este caso, el análisis pragmático del discurso y las posturas relacionadas con el contexto y el

aprendizaje, proporcionan un medio para establecer la comprensión acerca de las expresiones algebraicas en los estudiantes participantes.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LOS EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA

Aspectos generales

Este trabajo utiliza la metodología de Experimentos de enseñanza para el desarrollo de las actividades y su posterior análisis. La metodología mencionada se ubica dentro de las Investigaciones Basadas en Diseño (IBD), que se caracterizan por ser principalmente de índole cualitativa, enmarcadas dentro de las “Ciencias del aprendizaje” y sustentadas desde diversos campos como la antropología, la neurociencia, la sociología, la psicología educativa, la didáctica, entre otros (Molina, 2011).

El propósito de este tipo de investigación se relaciona directamente con el objetivo principal del presente trabajo, considerando que para reconocer la construcción de significado en los estudiantes con respecto a las expresiones algebraicas, se requiere de un análisis pragmático del discurso en el que el contexto es parte fundamental para la comprensión de lo que dicen los estudiantes más allá de los desarrollos verbales; del mismo modo, Molina (2011) resalta que bajo este paradigma de investigación, se busca analizar el aprendizaje en contexto, haciendo uso del diseño y la sistematización de las particularidades del aprendizaje.

Dentro de este orden de ideas, las IBD precisan la manera en la que se deben orientar las investigaciones durante un determinado lapso sobre ciertas interacciones educativas suscitadas por un conjunto de tareas innovadoras, es decir, estudios de diseño. Una de las características de este paradigma es la interdependencia que existe entre el diseño instruccional y la investigación. La creación de los diseños busca explicar la razón por la cual el diseño que se propone evidentemente funciona y da lugar a sugerencias sobre formas en las que es posible su adaptación en nuevas

eventualidades y contextos, más allá de concebir diseños efectivos para cualquier tipo de aprendizaje (Molina, 2011).

Según Godino (2013) retomando a autores como Cobb y Gravemeijer (2008), para la realización de un experimento de diseño se pueden considerar tres fases:

1. Preparación del experimento: comprende la fase previa al experimento que involucra la clarificación de los fines instruccionales, la documentación de puntos instruccionales iniciales (conocimientos previos de los estudiantes y restricciones instruccionales), la delimitación de una trayectoria de aprendizaje y la ubicación del experimento en un contexto teórico.

2. La experimentación: es la implementación y puesta en práctica que incluye la recogida de datos que dependen de la intención teórica, el establecimiento de las conjeturas, constituidas desde las dimensiones pedagógica y de contenido; y, los análisis locales, que parten de los datos para refinar las conjeturas en cuanto a lo que se quiere enseñar y cómo se enseña.

3. La realización de un análisis retrospectivo: pretenden ubicar el aprendizaje y los medios por medio de los cuales fueron respaldados en un determinado contexto teórico más general. Esta fase incluye la gramática argumentativa, la confiabilidad, la repetibilidad o reproductibilidad y la capacidad de generalización. Estos análisis se realizan sobre los datos recogidos en forma de grabaciones o notas durante cada intervención del investigador-docente en las interacciones de los estudiantes.

Ahora bien, debe señalarse que la evaluación de los estudios de diseño se articula a través de los siguientes criterios: fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización y utilidad. La fiabilidad es el “*grado en el que las inferencias y afirmaciones que resultan son razonables y*

justificables” (Molina, 2011, p.78). La replicabilidad “*consiste en los aspectos de proceso de aprendizaje estudiado que pueden repetirse potencialmente en otros contextos o situaciones*” (Molina, 2011, p.79). La capacidad de generalización está “*íntimamente relacionada con la replicabilidad e implica que otros serán capaces de usar los productos que deriven de él para promover aprendizaje en otros contextos*” (Molina, 2011, p.79).

Teniendo en cuenta las características mencionadas, este trabajo se desarrolló siguiendo la metodología de los *Experimentos de enseñanza* como parte de las IBD, con el propósito de investigar el aprendizaje bajo unas condiciones específicas, en las que se tienen en cuenta las particularidades del entorno y las interacciones entre los participantes para adecuar las situaciones de enseñanza. Lo anterior, en concordancia con el objetivo de realizar un análisis pragmático del discurso, en el cual el contexto es de vital importancia.

Situación de enseñanza en el marco de los experimentos de enseñanza

La propuesta de este trabajo de grado se basa en el diseño y aplicación de una situación de aprendizaje, en la cual se generen espacios de discusión y participación relacionados con la identificación de patrones en varias secuencias. De este modo, se toman como referencia las teorías relacionadas con la pragmática del discurso Searle (2005), van Dijk (1966) y Sfard (2008) y la caracterización del pensamiento algebraico de Radford (2006).

Desde la pragmática del discurso se toman elementos del contexto que hacen parte de las expresiones utilizadas por los estudiantes, de esta manera al analizar el discurso se pueden atribuir intenciones de comunicación producidas bajo unas condiciones específicas de interacción. Lo cual se relaciona con la esencia de un *Experimento de enseñanza* (Steffe & Thompson, 2000) en el

sentido que se toma como base lo que los estudiantes dicen y hacen para tratar de comprender su realidad matemática; entendiendo que dicha realidad hace parte de una interpretación condicionada por la propia realidad del investigador.

Un *Experimento de enseñanza* está compuesto por una secuencia de episodios de enseñanza en la que participan un grupo de estudiantes, investigadores y/o docentes (Steffe & Thompson, 2000). En este caso, se toma la figura de un docente investigador, el cuál dentro de su experiencia en el aula debe dar orientaciones sin intervenir de manera significativa en el desarrollo de las actividades, dando paso a las intervenciones de los estudiantes y sus formas de abordar cada situación propuesta.

Esto permitirá que, bajo esta metodología, se generen modelos que caractericen las formas de comunicación de los estudiantes como reflejo de los esquemas matemáticos que tienen lugar en las interacciones de clase. Así, partiendo del análisis de las intenciones comunicativas de los estudiantes se establece una relación entre estas y la caracterización del pensamiento algebraico de Radford (2006), con el objetivo de establecer algún avance en la construcción de significado sobre las expresiones algebraicas.

La secuencia de episodios de este *Experimento de enseñanza* se toman como situaciones, las cuales han sido diseñadas considerando los elementos teóricos mencionados, con el objetivo de probar una trayectoria de aprendizaje; esta hipótesis general guía al docente investigador para establecer unas condiciones iniciales, que se dejan de lado durante el experimento, para adaptarse a los límites de las interacciones y regresar a ella de forma retrospectiva una vez terminado el experimento (Steffe & Thompson, 2000).

Al ser parte de las IBD, los *experimentos de enseñanza* conllevan un desarrollo por fases como ya se había mencionado: la preparación del experimento, en la que se incluye también el diseño; la experimentación y los análisis retrospectivos (Godino, 2013). Durante este proceso es posible plantear nuevas conjeturas a partir de la realización de análisis y el rediseño de las situaciones, tomando en cuenta una aplicación inicial.

A continuación, se presentan las particularidades de dichas fases en el *experimento de enseñanza* que se trazó en este trabajo de investigación y la relación entre los elementos que las componen según las propuestas de Cobb (2000), Steffe & Thompson (2000).

Diseño y preparación del experimento

Específicamente en el diseño se involucran todos los elementos que forman parte de la situación de enseñanza, desde la teoría que sustenta los análisis y la elaboración de las situaciones, hasta las metas, trayectoria de aprendizaje y conjetura, que hacen parte de esas condiciones iniciales que se establecen para poder describir el quehacer de los estudiantes.

Al respecto, este trabajo investigativo presenta una propuesta de enseñanza para la introducción al álgebra por medio de la generalización, en el que, de manera particular, se busca analizar el discurso utilizado por los estudiantes para identificar cómo se refieren a los aspectos relacionados con los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico según Radford (2006). Se considera también la forma como el contexto de comunicación influye en sus expresiones, situados en una interacción guiada hacia construcción de expresiones algebraicas a través de la identificación y formulación de patrones.

Cabe señalar que los propósitos de un *Experimento de enseñanza* no solo están relacionados con la investigación, sino que también persiguen unas *metas de aprendizaje* con respecto a lo que se quiere lograr con los estudiantes al aplicar las situaciones de enseñanza. Para el presente trabajo, la meta establecida es: *propiciar el desarrollo del pensamiento algebraico, en tanto al reconocimiento de los elementos constitutivos que ha propuesto Radford (2006), para la introducción al álgebra a través de la identificación de cantidades y relaciones entre estas, en el análisis de las figuras que componen una mandala.*

Una vez establecida la meta de aprendizaje, esta viene a hacer parte de lo que se conoce como Trayectoria de aprendizaje, por cuanto se refiere a los posibles procesos de los estudiantes que se llevan a cabo según las situaciones y las conjeturas planteadas. En este sentido, durante la investigación las conjeturas se pueden ajustar según los análisis locales, que tienen en consideración los hallazgos experimentales de las actividades y las propuestas teóricas que fundamentan la trayectoria.

La conjetura, como parte fundamental de los *Experimentos de enseñanza*, es la guía en el diseño y la aplicación de las situaciones. Se presenta como una proposición que incorpora dos dimensiones, una referente al contenido y otra de carácter pedagógico. Esto hace alusión a qué se quiere enseñar y cómo se quiere enseñar. Teniendo en cuenta que estas relaciones están establecidas desde la teoría y que vienen a ser la estructura del diseño.

En este trabajo se presentan tres situaciones guiadas, en orden, por las siguientes conjeturas:

- **Conjetura situación 1:** *El reconocimiento de la variación de la cantidad en las figuras que componen una mandala y la relación de estas con cada una de sus capas, permiten un acercamiento a la descripción y explicación del comportamiento de un patrón.*

Dimensión pedagógica: La identificación de cantidades que cambian con un orden establecido por las capas de una mandala puede favorecer el reconocimiento de las características de un patrón.

Dimensión de contenido: Los patrones presentan un cambio constante al avanzar en cada uno de sus términos el cual puede describirse analizando la secuencia numérica en orden.

- **Conjetura situación 2:** *Encontrar la cantidad de figuras para una capa determinada o el número de capa para una cantidad de figuras dada, promueve una reflexión sobre posibles operaciones con cantidades desconocidas.*

Dimensión pedagógica: Los ejercicios que involucran la determinación de una cantidad desconocida, sea en el número capa o en la cantidad de figuras de una mandala con patrón, dirigen la atención al análisis de los datos iniciales para buscar un comportamiento que pueda extenderse a las incógnitas.

Dimensión de contenido: Analizar los términos de una secuencia numérica y su relación con el orden o posición dentro de esta, da lugar a la identificación del comportamiento o regla que sigue el patrón.

- **Conjetura situación 3:** *Descomponer con ciertas condiciones la cantidad de figuras de cada capa facilita la identificación de las operaciones y las cantidades constantes que hacen parte de la regla del patrón, dando lugar a la representación de dichas relaciones por medio de símbolos alfanuméricos o expresiones verbales.*

Dimensión pedagógica: Descomponer en sumas la cantidad de figuras de cada capa teniendo en cuenta la cantidad inicial y el aumento al avanzar en estas, puede dar paso a la identificación de las operaciones entre los números que hacen parte de la regla del patrón (sea como términos de las operaciones o como constantes) y las cantidades variables.

Dimensión de contenido: El reconocimiento de la relación entre cantidades variables y constantes en la regla de un patrón, es fundamental para llegar a la representación de estas de forma general, sea por medio de expresiones algebraicas o indicaciones específicas.

Descripción de las situaciones

El diseño de la situación de enseñanza se compone de tres secciones de actividades que, en conjunto, tienen la finalidad de generar reflexión con respecto a los tres elementos caracterizadores del pensamiento algebraico según Radford (2006): la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. Lo anterior, por medio del análisis de unas figuras llamadas mandalas, las cuales se caracterizan por poseer varios elementos con diferentes formas distribuidas concéntricamente.

Existe una amplia gama de este tipo de figuras en las que se presentan diversos elementos que pueden tener o no un orden y una secuencia numérica; por tal motivo, las mandalas utilizadas en este diseño fueron elaboradas con capas o secciones bien definidas, en las que se organizan cierta cantidad de elementos, que cumplen con una regularidad en su crecimiento o decrecimiento; creando la posibilidad de describir y representar simbólicamente un patrón al establecer la relación entre las secciones y la cantidad de elementos.

Así, la primera situación funciona como una introducción al análisis y reconocimiento de estas mandalas, dicha situación está dividida en cuatro actividades con el objetivo de brindar un espacio para que los estudiantes expresen sus ideas sobre lo que es un patrón y, a su vez, vayan identificando cantidades variables y sus relaciones. La actividad 1 inicia con la indagación sobre qué es un patrón y sobre la forma cómo los estudiantes lo explican sus características. Luego, a partir de la elaboración de una descripción escrita, se espera que los estudiantes puedan expresar en su lenguaje habitual la variación que genera un patrón y que realicen el ejercicio de representar y organizar gráficamente una mandala a partir de una descripción dada.

En la actividad 2 se presentan dos mandalas, con las cuales se espera realizar la identificación de las secciones circulares de estas y de los elementos internos y la relación entre ellos. Siguiendo esta idea, la actividad 3 propone el uso de tablas con el fin de organizar mejor la información de las cantidades, de forma tal que los estudiantes puedan apreciar con más facilidad los cambios que presenta cada sección y la relación entre ellas. Para la última actividad de esta situación, las preguntas giran en torno al establecimiento de una relación entre la cantidad de elementos internos y las secciones circulares o capas de la mandala. Todo esto, con la intención de que los estudiantes tengan una guía sobre los aspectos involucrados en la descripción y posterior designación de un patrón

Con el desarrollo de esta primera situación se abordan varios aspectos que permiten un acercamiento a los objetivos de este trabajo. Desde la parte discursiva se tienen las actividades que involucran descripciones y puntos de vista de los estudiantes, y con respecto a la caracterización del pensamiento algebraico, se hace énfasis en el reconocimiento del cambio en la cantidad de algunas figuras, así como en la relación de estas con cada sección, para referirse a lo que Radford

(2006) llama indeterminancia, que está relacionado con una sensación de indeterminación propia de incógnitas y variables.

La situación 2 retoma el uso de tablas y plantea interrogantes sobre el comportamiento de crecimiento de los elementos observados en una mandala, con esto se llega a la identificación y descripción de los patrones que rigen las dos secuencias involucradas. Pasando después a hacer uso del patrón para encontrar la cantidad de elementos en otras capas no representadas por el dibujo. Lo anterior tiene como objetivo generar reflexión sobre las operaciones que se realizan para encontrar los elementos de las capas mencionadas; esto en relación con la analiticidad, al involucrar operaciones con cantidades variables e indeterminadas, en este caso el número de capa y la cantidad de pétalos.

Por último, y siguiendo con el orden de enunciación de los elementos constitutivos del pensamiento algebraico según Radford (2006), la situación 3 hace énfasis en la analiticidad y la designación simbólica. Para esto, la primera actividad propone la descomposición de una de las variables con el fin de identificar las operaciones, los números que se repiten en ella y los que permanecen constantes; de esta forma, se espera facilitar el paso a la expresión algebraica.

Posteriormente, y como cierre, en la última actividad se solicita escribir la expresión algebraica que representa la situación, teniendo en cuenta que la designación simbólica puede estar relacionada con el uso de algunas palabras o gestos que hacen parte de la construcción de una expresión algebraica. Las situaciones descritas en este apartado se encuentran en la parte final del documento como anexos.

Experimentación

Las actividades diseñadas se aplicaron parcialmente como una primera experiencia en la institución educativa Liceo Nueva Floresta, con estudiantes de grado séptimo y grado octavo, se realizaron dos aplicaciones de la situación 1. Para esto, se dispuso un tiempo de dos horas en cada grupo, a través de la plataforma Zoom. En general, los estudiantes tomaron mucho tiempo para realizar los dibujos solicitados y no avanzaban en las preguntas sin tener una explicación previa de estas.

El medio virtual pudo ser una dificultad en cuanto a la verificación del trabajo de los estudiantes, dado que la mayoría tenía la cámara apagada y no se podía comprobar el desarrollo en tiempo real. Inicialmente se intentó organizar a los estudiantes por grupos de trabajo, pero se gastó bastante tiempo en la distribución y una vez terminada la reunión, era necesario realizar el mismo proceso, lo cual, resultó dispendioso.

Por lo anterior, se optó por la estrategia de estar todos en una sola reunión, leer, explicar las preguntas y darles un tiempo para que contestaran; luego, se les preguntaba a algunos sobre sus respuestas y el porqué de estas. De esta manera se logró avanzar más en las actividades, sin embargo, el tiempo en ambos casos no alcanzó para terminar la situación 1.

En la interacción con los estudiantes, estos se refirieron al patrón como algo que establecía un aumento en la cantidad de figuras, pero en algunos casos ese aumento no era constante, mientras que otros estudiantes se enfocaron en los colores o el tipo de formas como variables.

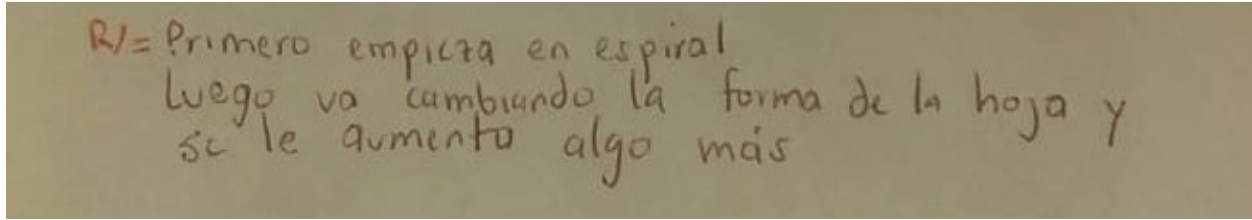


Ilustración 1. Descripción mandala.

Esta primera experiencia permitió hacer una aproximación un poco más real del tiempo necesario para resolver las actividades y la selección de una estrategia eficaz para llevar a cabo la implementación de las situaciones. Además de esto, permitió identificar que una de las actividades que componían la situación 2 no era favorable implementarla en el momento por su extensión y requerimientos.

Dado lo anterior, para la aplicación final de las tres situaciones se estableció un tiempo total de cuatro horas. Esta se llevó a cabo con 14 estudiantes del grado 8-2 de la Institución Educativa Evaristo García, por medio de la plataforma Teams. Se dispuso el horario de 8 am a 12 pm con un descanso de 30 minutos, pero se inició a la actividad media hora después por problemas de conectividad.

Por consiguiente y teniendo en cuenta que, al ir desarrollando las actividades se tomó más tiempo del esperado en las dos primeras situaciones, fue necesaria la omisión de varios puntos de la situación 3, los cuales, planteaban la misma tarea, pero con diferentes mandalas. La secuencia de tareas realizadas fue seleccionada de tal forma que permitiera darle continuidad al análisis de una sola mandala, hasta llegar a la representación simbólica del patrón de crecimiento de sus figuras.

Una vez terminada la aplicación se seleccionaron varias intervenciones de los estudiantes, teniendo en cuenta que en ellas se hiciera referencia o se aludiera a alguno de los elementos característicos del pensamiento algebraico de Radford (2006); en correspondencia con lo previsto desde el diseño, al interactuar con los estudiantes se encuentran expresiones desde la construcción que tienen o han desarrollado sobre los patrones y su forma de calcular cantidades, en las cuales, pueden referirse a más de un elemento, aunque en su intención comunicativa haya uno que sea principal.

De esta manera, además del criterio de selección mencionado, se consideraron las interacciones con intervenciones mínimas del entrevistador. Estas expresiones, se nombran y organizan como Secuencias de actos de habla, las cuales se analizan en el siguiente apartado.

Análisis Local

En el siguiente análisis se toman las expresiones de los estudiantes como Secuencias de actos de habla, recordando que estos se constituyen como la unidad mínima de la comunicación y que no ocurren de manera aislada; sino que hacen parte de una secuencia de actos, cumpliendo con una función específica que contribuye a la expresión de una idea general.

Según lo anterior, para este primer análisis se construyeron varias tablas que presentaban las Secuencias de actos de habla utilizadas por los estudiantes en el desarrollo de cada una de las situaciones propuestas; así, cada acto de habla enunciado por los estudiantes se iba enumerando en la primera columna de la tabla con un subíndice al lado de la etiqueta correspondiente (E1, E2, E3, E4, E5, E6 y E7) y de igual forma se hizo con las intervenciones del entrevistador quien se denominó E y es el docente investigador.

En la segunda columna se identifican las funciones de los actos de habla mencionados, dando lugar así, a la asociación de Macroactos de habla tomados como las estructuras de actos globales en una secuencia, los cuales se muestran en la parte inferior de la tabla.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E3₍₁₎: el patrón está prácticamente en los pétalos	La primera intervención E3₍₁₎ es una conclusión, establecida luego de describir la mandala.
E3₍₂₎: porque va aumentando de dos en dos hasta llegar a ocho	E3₍₂₎ es la condición de aumentar una misma cantidad.
E3₍₃₎: y las figuras pues van cambiando, pero también aumentan de la misma manera	E3₍₃₎ es una especificación sobre las otras figuras de la mandala.
Macroacto de habla: Según lo mencionado por la estudiante, se considera que un patrón representa un cambio en la cantidad de figuras en cada capa, teniendo en cuenta que dichas figuras aumentan en una misma cantidad.	

Tabla 1. Identificación de un patrón como el cambio generado por el aumento de una misma cantidad. Fuente: elaboración propia.

Análisis situación 1

Luego de analizar las Secuencias de actos de habla, en las que se discutía sobre la situación 1, reconocieron tres grupos caracterizados a continuación:

Grupo 1: se tienen las intervenciones de tres estudiantes diferentes, los cuales, de forma inicial describen los atributos que tiene una mandala en la que hay un patrón. Dicha mandala, fue creada por ellos mismos siguiendo una plantilla y, en este caso, al decir que es de forma inicial, se hace referencia a que es una actividad introductoria, en la que hasta el momento no se habían analizado otras mandalas.

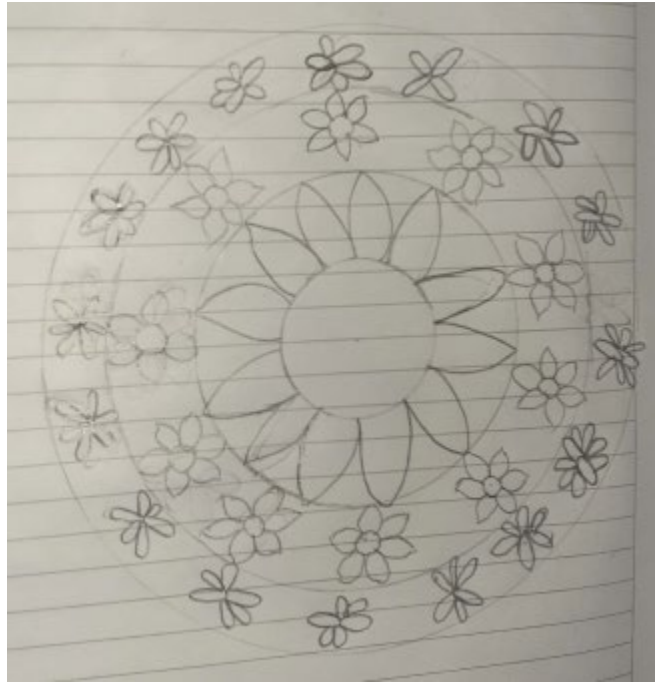


Ilustración 2. Dibujo de una mandala realizada por una estudiante.

Por lo tanto, este grupo se caracteriza por presentar la definición de lo que es un patrón, la cual, según ellos, está relacionada con el cumplimiento de tres condiciones; la primera de ellas es que la cantidad de figuras debe seguir un orden de menor a mayor; la segunda, es que siempre hablan sobre un aumento en la cantidad, aunque uno de los estudiantes también se refiere a un aumento de tamaño; la tercera, especifica que el aumento en la cantidad de figuras siempre debe ser el mismo, aunque uno de los estudiantes no lo menciona.

Grupo 2: en este grupo, se presentan las intervenciones de dos estudiantes que, a través de operaciones matemáticas con la cantidad de figuras en cada capa, identifican la existencia y el comportamiento de un patrón. En estos casos, los estudiantes tomaron los datos proporcionados por los dibujos de las mandalas para realizar las operaciones que ellos creyeron pertinentes en la tarea de describir patrones. Una estudiante realizó restas entre las cantidades existentes, para verificar que la diferencia entre estas siempre fuera la misma, determinando que no existía patrón

por encontrar un resultado diferente, siendo esto, análogo a decir que el aumento de figuras entre una capa y otra debe ser el mismo. El otro estudiante, reconoció que la cantidad de figuras de las capas siguientes estaba determinada por la suma de una cantidad establecida.

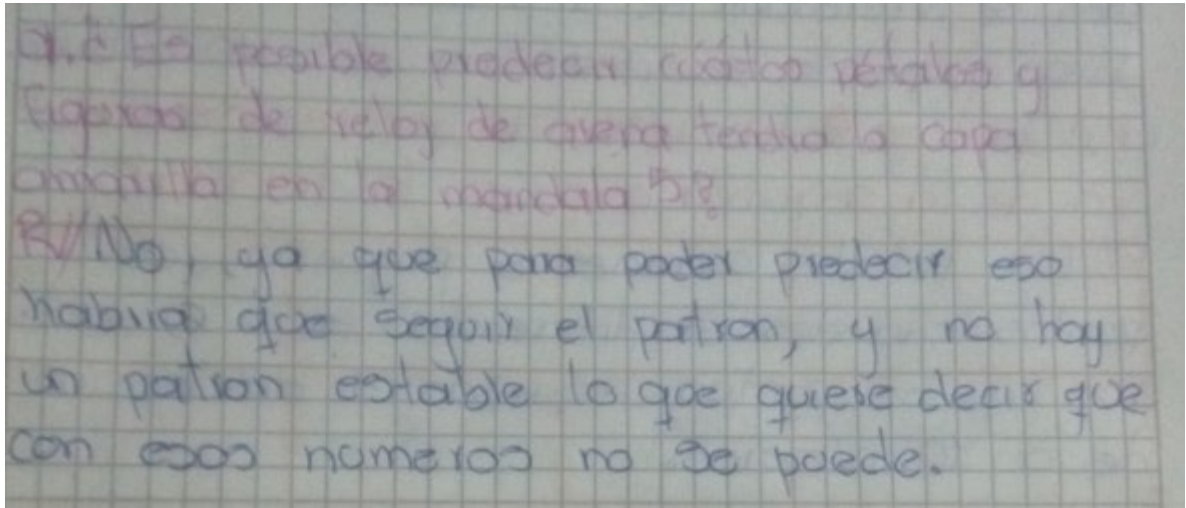


Ilustración 3. Identificación de la existencia de un patrón asociado a una regularidad.

En lo anterior, se puede observar que ambas intervenciones se encuentran relacionadas con una de las condiciones mencionadas en el grupo 1, el aumento en la cantidad de figuras al ir avanzando en las capas debe ser igual.

Grupo 3: se compone de una sola intervención, que tiene como característica principal el reconocimiento de la relación entre dos cantidades diferentes, las cuales corresponden a dos tipos de figuras en una capa. En esta intervención, se retoma la comparación de cantidades en dos capas, que realiza el entrevistador, para identificar que una de las cantidades proviene de multiplicar por 2 a la otra y que, además, esta relación se cumple en las dos capas mencionadas.

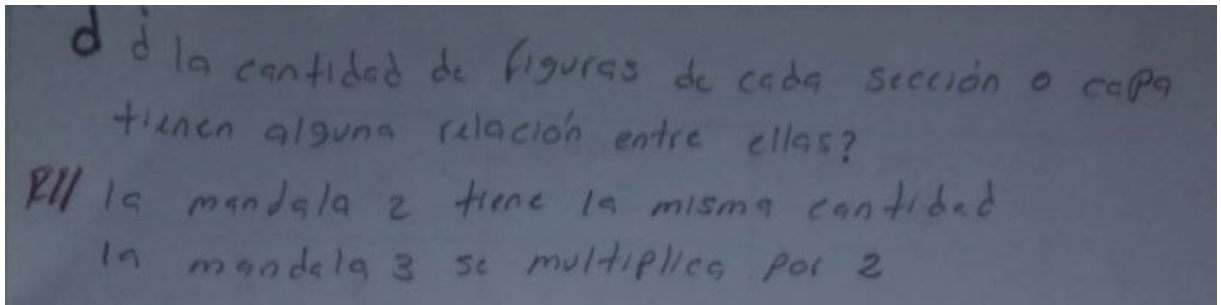


Ilustración 4. Identificación de las relaciones entre cantidades.

Lo anterior, muestra una síntesis de todas las secuencias de actos de habla analizadas para esta situación. A continuación, se presenta el análisis detallado de cada una de ellas y las funciones identificadas como parte del macroacto de habla, esto es, la idea general construida a partir de las expresiones de los estudiantes.

En la situación 1, inicialmente se realizó una discusión sobre las características que tiene un patrón según cada uno de los estudiantes y cómo ese patrón se refleja en la construcción de una mandala. El estudiante 1 (E1), en su intervención describe qué es un patrón y qué figuras permiten identificarlo.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E1₍₁₎: pues porque voy de menor a mayor E1₍₂₎: siguiendo la misma rutina E1₍₃₎: voy digamos hago un circuito E1₍₄₎: lo voy agrandando a medida que pasa la mandala. E1₍₅₎: rayas, círculos, triángulos y ya E1₍₆₎: el tamaño	Las intervenciones E1₍₁₎ y E1₍₂₎ tienen la función de ser condiciones que el estudiante indica para referirse a qué es un patrón. En E1₍₃₎ el estudiante especifica la forma cómo se dan esas condiciones, para luego, concluir en E1₍₄₎ que todo esto sucede mientras se agranda la mandala. La intervención E1₍₅₎ se expresa para indicar los elementos que permiten concluir en E1₍₆₎ que el patrón modifica el tamaño de estos.

Macroacto de habla: El estudiante considera que un patrón cumple con la característica de ir de menor a mayor, en un ciclo que se repite y este puede evidenciarse por medio del aumento en el tamaño de sus figuras.

Tabla 2. Identificación de un patrón como un ciclo en el que aumenta el tamaño de las figuras. Fuente: elaboración propia.

La estudiante 2 (E2) describe el mandala que creó, expresando con esto las características que tiene para ella un patrón.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E2₍₁₎: pues la verdad es que en el centro del mandala, la cantidad es pues poca E2₍₂₎: a medida que va avanzando por ejemplo en el segundo círculo ya hay más E2₍₃₎: en el tercero aumentan de tamaño y pues de cantidad y en el cuarto pues también. E2₍₄₎: o sea, a medida que van avanzando en la plantilla aumentan dos triángulos más	E1₍₁₎ se refiere a la condición de iniciar en un número pequeño o menor que los demás. Lo anterior, se especifica en E2₍₂₎ al decir que se aumenta la cantidad. En E2₍₃₎ se introduce como segunda condición el tamaño de las figuras utilizadas. Por último, se concluye en E2₍₄₎ que al avanzar en las capas se aumentan siempre dos triángulos.
Macroacto de habla: La estudiante describe un patrón mencionando la característica de expresar las cantidades de las figuras que componen cada capa de menor a mayor, con un aumento igual al avanzar en ellas.	

Tabla 3. Identificación de un patrón como generador de cantidades ordenadas con un cambio constante. Fuente: elaboración propia.

La estudiante 3 (E3) luego de describir su mandala, fue explícita para indicar que el patrón en este caso estaba relacionado con el aumento de una misma cantidad. Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
--	---

E3₍₁₎: el patrón está prácticamente en los pétalos E3₍₂₎: porque va aumentando de dos en dos hasta llegar a ocho E3₍₃₎: y las figuras pues van cambiando, pero también aumentan de la misma manera	La primera intervención E3₍₁₎ es una conclusión, establecida luego de describir la mandala. E3₍₂₎ es la condición de aumentar una misma cantidad. E3₍₃₎ es una especificación sobre las otras figuras de la mandala.
Macroacto de habla: Según lo mencionado por la estudiante, se considera que un patrón representa un cambio en la cantidad de figuras en cada capa, teniendo en cuenta que dichas figuras aumentan en una misma cantidad.	

Tabla 4. Identificación de un patrón como el cambio generado por el aumento de una misma cantidad. Fuente: elaboración propia.

Las siguientes actividades hacen parte de la situación 1 y se enfocan en la identificación de las figuras en algunas mandalas y las relaciones entre ellas. Luego de identificar la cantidad de figuras en la mandala, se indaga sobre la relación entre algunas cantidades. El entrevistador (E) interviene para resumir la información y la estudiante 6 (E6) expresa esta relación de la siguiente forma.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E: por ejemplo, en la anterior, la mandala 2 era la misma cantidad, entonces la relación es decir es una misma cantidad, pero en esta mandala tenemos 6 y 12 y luego en la otra tenemos 9 y 18. E6₍₁₎: porque se multiplica 6 por 2 doce y 9 por 2 dieciocho.	E6₍₁₎ es una conclusión que el estudiante extrae luego del comentario del entrevistador, que menciona las cantidades de dos figuras presentes en cada capa de la mandala.
Macroacto de habla: El estudiante concluye que la multiplicación por 2 es una relación común entre las cantidades mencionadas, que corresponden a dos tipos de figuras en cada una de las capas.	

Tabla 5. La multiplicación como relación entre cantidades. Fuente: elaboración propia.

Después de esto, se presenta una actividad, que además de referirse a las relaciones entre las diferentes figuras que componen cada capa, incluye la relación entre la cantidad de figuras y el número de capa, presentando una mandala con una capa vacía. La estudiante 7 (E7) explica por qué en la mandala indicada no hay un patrón.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E7₍₁₎: pues yo creo que no, porque yo estuve haciendo cuentas con ese número de 13 E7₍₂₎: pues de 8 a 13 vendrían siendo 5 y de 13 a 15 vendrían siendo 2 E7₍₃₎: pero ese no puede ser el patrón E7₍₄₎: porque se supone que son números diferentes E7₍₅₎: y digamos que la cantidad que yo conté entre ocho y quince es siete, pero de siete no se puede sacar la mitad para saber cuánto hay en el amarillo	E7₍₁₎ y E7₍₂₎ son condiciones que permiten concluir E7₍₃₎. E7₍₄₎ es la especificación de la condición E7₍₂₎. En E7₍₅₎ se certifica la conclusión E7₍₃₎.
Macroacto de habla: En la secuencia se reconoce que la estudiante considera que solo hay patrón cuando la diferencia entre las cantidades de cada capa es igual.	

Tabla 6. Diferencia igual entre cantidades como una característica necesaria en un patrón. Fuente: elaboración propia.

A continuación, el estudiante 5 (E5) da cuenta de la relación entre la cantidad de figuras, el patrón y la capa.	Funciones de los actos de habla
Secuencia de actos de habla E: sí, que alrededor de esto yo voy a hacer otra capa y voy a volver a dibujar hojitas puedo saber cuántas.. E5₍₁₎: dieciséis E5₍₂₎: ahh no, es depende cuánto le quiera sumar E5₍₃₎: sino que yo le coloqué más ocho	E5₍₁₎ es una conclusión obtenida al establecer la condición E5₍₃₎. E5₍₂₎ es una corrección a la conclusión anterior, al identificar que la cantidad depende del patrón.
Macroacto de habla: El estudiante reconoce que la cantidad de figuras en las capas está determinada por una operación de suma.	

Tabla 7. Identificación del funcionamiento de un patrón. Fuente: elaboración propia.

De forma general en esta situación, los estudiantes lograron identificar características importantes de un patrón y de la secuencia de números que generan, partiendo de las cantidades de figuras analizadas en los mandalas; de igual forma, llegaron a conclusiones respecto a las relaciones entre las cantidades de figuras y el reconocimiento de una operación matemática como una de estas.

Debido a la cantidad de estudiantes que hicieron referencia a los patrones y las relaciones entre las cantidades, en la síntesis de esta situación se agruparon según las características mencionadas. Sin embargo, de aquí en adelante, se presentan los análisis de cada secuencia en particular, teniendo en cuenta que a medida que se avanza en las situaciones los estudiantes tienden a ser más específicos en sus respuestas y el tiempo más reducido, por lo que se aborda una pregunta con uno o máximo dos estudiantes.

Análisis situación 2

En la situación 2 se realizó el análisis de tres intervenciones, caracterizadas por involucrar el cálculo de cantidades específicas haciendo uso del comportamiento del patrón, el cual debía ser identificado por los estudiantes según las cantidades presentadas en los mandalas.

Una de las estudiantes reconoce el comportamiento del patrón haciendo uso de la diferencia entre la cantidad de figuras de cada capa, concluyendo que a partir de esta característica se puede diferenciar un comportamiento de otro en las secuencias analizadas y que, a su vez, dicho comportamiento se extiende para encontrar cantidades en capas no ilustradas según la siguiente secuencia de actos de habla.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E: ¿siguen el mismo comportamiento o no? E2₍₁₎: pues el patrón de 6 profe, pues ya el total sería seis E: Daniela...ehh... ¿me dices que el patrón es seis? E2₍₂₎: sí profe...porque de ocho a catorce hay seis ¿verdad? E2₍₃₎: entonces de catorce a veinte también hay seis y de veinte a veintiséis pues también hay seis E: eso, muy bien. Entonces, a la pregunta ¿si cambia el comportamiento o no cambia? Estamos comparándolo con el otro E2₍₄₎: yo diría que sí E2₍₅₎: porque ahora es diferente la distancia entre pues ehh los números	La intervención E2₍₁₎ funciona como conclusión. E2₍₂₎ y E2₍₃₎ son las condiciones de la conclusión E2₍₁₎. De igual forma, E2₍₄₎ es otra conclusión obtenida por la condición E2₍₅₎.
Macroacto de habla: Según lo expresado por la estudiante, el comportamiento del patrón se identifica encontrando la diferencia entre las cantidades de cada capa, la cual debe ser igual y, además, si la diferencia entre las figuras de cada capa es distinta, quiere decir que cambia el comportamiento del patrón.	

Tabla 8. Diferencia entre el comportamiento de dos patrones. Fuente: elaboración propia.

Ahora, se considera el ejercicio de encontrar la cantidad de figuras en una capa determinada. Nuevamente la estudiante 2 (E2) interviene explicando las operaciones realizadas para encontrar la respuesta. Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
---	---

E2₍₁₎: en la capa ocho darían veinticinco E2₍₂₎: porque de tres en tres...en la ocho, o sea usted dice en qué capa daría veinticinco E2₍₃₎: o sea, ahí sumáramos, ahí pondríamos más capas ¿verdad? E2₍₄₎: si en la cinco dan dieciséis, en la seis darían diecinueve, en la siete veintidós y en la ocho veinticinco.	E2₍₁₎ es una conclusión que proviene de la condición E2₍₄₎. E2₍₄₎ es una condición que recoge los contenidos proposicionales de E2₍₂₎ y E2₍₃₎.
Macroacto de habla: De las expresiones usadas por la estudiante se puede inferir que para encontrar la cantidad de figuras en una capa desconocida se va sumando según el crecimiento que llevan las figuras, teniendo en cuenta el número de capa hasta llegar a la cantidad solicitada.	

Tabla 9. Suma iterada para encontrar una cantidad desconocida de la secuencia. Fuente: elaboración propia.

La siguiente pregunta en discusión, tiene en cuenta que el procedimiento anterior puede resultar útil cuando se requieren capas cercanas, sin embargo, al solicitarse la cantidad de figuras en una capa mucho más externa, los estudiantes buscan otras alternativas de solución que involucren menos operaciones; tal es el caso de la estudiante 7 (E7) que explica su forma de llegar a la cantidad solicitada, pero en su procedimiento no tiene en cuenta que al final debe sumar la cantidad de pétalos en las primeras 7 capas. Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
---	---

E7₍₁₎: mm pues aquí estaba viendo y estaba pensando en multiplicar 93 por 6 E7₍₂₎: porque dicen que había que llegar a la capa 100 ¿cierto?... E7₍₃₎: vamos por la capa séptima cierto E7₍₄₎: entonces pues digamos que habría que restarle siete y quedaría 93 E7₍₅₎: y ahorita se multiplica por 6 porque la secuencia es de 6 no?... E7₍₆₎: entonces estaba pensando multiplicar 93 por 6 y da 558... pero no sé si este bien	En E7₍₁₎ la estudiante expresa una conclusión justificada a continuación. Las intervenciones E7₍₂₎ y E7₍₃₎ son condiciones que permiten establecer una conclusión intermedia indicada en E7₍₄₎. A su vez E7₍₄₎ y E7₍₅₎ son las condiciones que dan lugar a E7₍₆₎ que es la misma conclusión expresada al inicio, pero en este caso tiene la función de confirmación.
Macroacto de habla: La estudiante indica por medio de sus expresiones, que para encontrar la cantidad de pétalos en una capa lejana se deben restar las capas que ya se tienen, y multiplicar las que hacen falta por el incremento de la secuencia.	

Tabla 10. Reducción de operaciones en la aplicación de un patrón. Fuente: elaboración propia.

La última expresión analizada indica el procedimiento que realiza la estudiante 7 (E7) para encontrar la cantidad de pétalos en una capa lejana, en el que se encuentra una operación más reducida que la mencionada en la secuencia anterior, identificando varios aspectos en ello: el comportamiento de crecimiento del patrón, esto es, la cantidad que se agrega en cada capa de la mandala, la cantidad de capas a recorrer haciendo la misma operación y la expresión de la relación de suma, entre dichas cantidades de forma más reducida como una multiplicación. Sin embargo, al final de esta operación, la estudiante omite la suma de la cantidad inicial de figuras, lo cual conlleva a obtener un resultado erróneo.

Así, esta intervención cierra y concluye la situación 2, en la cual, los estudiantes identificaron el comportamiento de un patrón, compararon el comportamiento de dos patrones y

por último expresaron de forma reducida el procedimiento de sumar una misma cantidad varias veces.

Análisis situación 3

Los análisis correspondientes a la situación 3 contienen tres intervenciones de dos estudiantes, que fueron las únicas que lograron concluir todo el proceso. De manera general, las estudiantes expresan las operaciones realizadas para encontrar la cantidad de pétalos en una capa determinada, reconociendo también los números involucrados en la relación entre la capa y la cantidad de pétalos. En la última secuencia y, luego de que el entrevistador (E) realizara una introducción sobre el uso de las variables para referirse a las cantidades que cambian de alguna forma; una de las estudiantes acepta la letra c como una manera de referirse al número de capas y expresa en términos de esta variable, la relación matemática que permite obtener el número de pétalos. A continuación, la secuencia mencionada.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E₍₁₎: si tú vas a escribir la operación, así como tu escribes tres por ocho más cuatro, así...tres por nueve más veintisiete, así...pero, no vamos a colocar el número de capa, sino que ese número de capa lo vamos a cambiar por una variable, por ejemplo, decir que la capa la vamos a representar con la letra c, ya no vamos a escribir ah la capa 5, sino que la capa es la letra c, entonces, si yo tengo c ¿qué le hago a c para obtener la cantidad de pétalos? E7₍₁₎: ¿no sería por tres?... sería igual, sino que en lugar de escribir 25 ...c por tres más uno	La intervención E7₍₁₎ es una conclusión que toma por condición la información que proporciona E₍₁₎. Es decir, que la conclusión de la estudiante se construye partiendo de la premisa que la capa debe cambiarse por c, lo cual es fundamental para llegar a la expresión “c por tres más uno”.

Macroacto de habla: La estudiante expresa de manera verbal, haciendo uso de alguna notación matemática al reconocer (aceptar) a c como una forma de referirse al número de capas, y llegando así a una expresión matemática para obtener la cantidad de pétalos tomando como variable el número de capa.

Tabla 11. Expresión simbólica del patrón. Fuente: elaboración propia.

Antes de esto, los estudiantes completaron un cuadro, en el cual debían descomponer la cantidad de pétalos en sumas de dos números, identificando la relación entre la capa y la cantidad de veces que se repite uno de los números en la suma. La estudiante 2 (E2) comenta sobre su resultado al completar la tabla. Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E₍₁₎: ¿ya completaste la tabla? E2₍₁₎: mmm no, estoy en eso...es que en la capa 12 da 36 ¿verdad? ... ¿o 37? ... es que no sé, estoy confundida en esa parte E₍₂₎: ¿de dónde sacas el 37? E2₍₂₎: o sea...no, yo estoy preguntado...cuando uno suma el tres, tres, tres da 36 o 37 ... ¿36verdad? E₍₃₎: si estas sumando de tres en tres depende de la cantidad en la que tu empieces...vale...tu ¿cómo encontraste ese 36 o 37?¿cómo lo encontraste? E2₍₃₎: pues el 37, desde 16 comencé a sumar de tres en tres hasta que llegué a la capa 12 y me dio 37... ¿si está bien? E₍₄₎: Bueno, te pregunto yo ¿cuántas veces se repite el tres en esa capa 12? ¿en la capa 12 cuántas veces se repite el tres? E2₍₄₎: pues según yo se repetiría 12...pero me daría 36	E2₍₁₎ es una conclusión con dos preguntas certificadoras. En E2₍₂₎ se continúa buscando una certificación a través de la pregunta. E2₍₃₎ es una condición con especificación. E2₍₄₎ es una segunda condición que unida a la intervención del entrevistador E₍₅₎ da lugar a la corrección E2₍₅₎.

E₍₅₎: ajá y estas contando...y ¿cuántas veces se repite el uno? E₂₍₅₎: ahí sí, uno...si, si, ya me dio	
Macroacto de habla: La estudiante considera resultados diferentes, al encontrar los pétalos de una de las capas con la información de la tabla y realizando el procedimiento de sumar a partir del gráfico; corrigiendo su respuesta al tener en cuenta todos los números involucrados en la relación.	

Tabla 12. Verificación de cálculos con otro procedimiento. Fuente: elaboración propia.

Una vez terminado el cuadro, los estudiantes debían escribir las operaciones que se realizan para pasar del número de capa al número de pétalos. La estudiante 7 (E7) permite ilustrar cómo los estudiantes construyeron expresiones para referirse a las operaciones requeridas para establecer la relación entre número de capas y número de pétalos.

Secuencia de actos de habla	Funciones de los actos de habla
E₍₁₎: entonces las paradas que están aquí, estos dos espacios, son por así decirlo los espacios para colocar las operaciones que se están realizando...entonces por ejemplo, si yo te digo, capa tres... ¿qué es lo primero que tú haces para decirme el número de pétalos totales? E₇₍₁₎: ehh se multiplica por tres E₍₂₎: eso, entonces aquí en esta parada...la primera parada es multiplicar por tres y luego ¿qué haces? E₇₍₂₎: se suma uno	En E₇₍₁₎ la estudiante expresa una conclusión que toma como condición el contenido proposicional de E₍₁₎, es decir, que la estudiante utiliza la información que expresa E sobre las operaciones que se solicitan y el ejemplo mencionado, para poder concluir que la operación inicial es multiplicar por tres. E₇₍₂₎ es una conclusión que toma como condición E₇₍₁₎.

Macroacto de habla: La estudiante se refiere a cada una de las operaciones que realiza para obtener la cantidad de pétalos partiendo de un número de capa específico.

Tabla 13. Operaciones del patrón. Fuente: elaboración propia.

Por último, se llega a la expresión algebraica del patrón que se presentó al inicio de este apartado, considerando que primero se realizaron las actividades mencionadas; la descomposición de las cantidades en sumas, en la que debían utilizar un cuadro para resumir la información y encontrar las relaciones entre las cantidades y la identificación de las operaciones matemáticas utilizadas para encontrar la cantidad de figuras en cualquier capa.

El análisis anterior permitió reconocer las intenciones comunicativas de los estudiantes y la estructura de sus decisiones discursivas, esto se refiere a la forma como cada uno organiza sus expresiones dentro del discurso con el fin de comunicar una idea general. Para esto, la identificación de las funciones de cada Acto de habla fue fundamental, obteniéndose conclusiones importantes sobre las características de los patrones, las cantidades variables y las relaciones entre estas; las cuales, provenían de estructuras comunes en algunos casos, como, por ejemplo, la expresión de condiciones previas o el uso de preguntas certificadoras, entre otras.

De esta manera, en el siguiente capítulo se señala la relación que hay entre las ideas enunciadas por los estudiantes y las características propias del pensamiento algebraico según Radford (2006), además de algunas consideraciones acerca de la influencia del contexto en las decisiones mencionadas, con el objetivo de identificar la construcción de significado relacionada con las expresiones algebraicas.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS RETROSPECTIVO

Desde el pensamiento algebraico

La propuesta de Radford (2006) menciona tres elementos constitutivos o caracterizadores del pensamiento algebraico, los cuales se encuentran relacionados entre sí; la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica. Estos elementos se refieren específicamente en su orden a: la sensación de indeterminación, que quiere decir el hecho de comprender que ciertas cantidades pueden cambiar en determinados momentos y bajo unas condiciones estipuladas; la posibilidad de realizar operaciones con los objetos indeterminados haciendo uso de cantidades conocidas o valores constantes; el reconocimiento y la representación de las variables e incógnitas diferentes tipos de expresiones como la lengua natural o el lenguaje alfanumérico.

Partiendo de lo anterior, se presenta la relación entre algunos de los Macroactos de habla contruidos en el primer análisis y los elementos característicos del pensamiento algebraico, haciendo énfasis en algunas expresiones que se pueden asociar a estos elementos, de manera que se reconozca la construcción que los estudiantes hacen de las expresiones algebraicas.

Así, se tiene que los primeros tres Macroactos extraídos de las Secuencias de actos de habla de los estudiantes se relacionan inicialmente con la indeterminancia, por cuanto se expresa la existencia de cierta cantidad de figuras que van cambiando conforme se avanza en las capas y no solo esto, sino que también se logra reconocer que el cambio mencionado no se produce de cualquier forma. En la siguiente tabla se presentan los Macroactos mencionados.

Macroacto 1 (M1)	Macroacto 2 (M2)	Macroacto 3 (M3)
-------------------------	-------------------------	-------------------------

El estudiante considera que un patrón cumple con la característica de ir de menor a mayor, en un ciclo que se repite y este puede evidenciarse por medio del aumento en el tamaño de sus figuras.	La estudiante describe un patrón mencionando la característica de expresar las cantidades de las figuras que componen cada capa de menor a mayor, con un aumento igual al avanzar en ellas.	Según lo mencionado por la estudiante, se considera que un patrón representa un cambio en la cantidad de figuras en cada capa, teniendo en cuenta que dichas figuras aumentan en una misma cantidad.
---	---	--

Tabla 14. Macroactos asociados a la indeterminancia. Fuente: Elaboración propia.

Los estudiantes en M2 y M3 se refieren a un cambio en la cantidad de figuras de cada capa, mientras que M1 habla de un cambio en el tamaño de las figuras y esto, unido a la condición de ir de menor a mayor que se expresa en M1 y M2 indican que no es una cantidad determinada, sino que por el contrario varía en un orden determinado.

Luego de lo mencionado, en M3 se identifica un segundo momento en el cual se habla del aumento de una misma cantidad en las figuras de cada capa, siendo esto relacionado con la analiticidad por cuanto toma la cantidad variable y le aumenta una cantidad determinada para obtener un nuevo resultado.

Reconociendo que los elementos que propone Radford (2006) para caracterizar el pensamiento algebraico no son independientes, sino que para efectos de análisis se hace esta discriminación. En los siguientes Macroactos, aunque se alude principalmente a la analiticidad, los estudiantes deben reconocer las cantidades variables para poder realizar operaciones con ellas, por esto, implícitamente y de manera secundaria se encuentra la indeterminancia en estos casos.

Las operaciones que expresan los estudiantes en el recorrido de todos los Macroactos de habla, inician con expresiones generales como la mencionada en M3, para luego pasar a establecer

relaciones numéricas entre cantidades variables. A continuación, los Macroactos relacionados con la analiticidad.

Macroacto 4 (M4)	Macroacto 5 (M5)	Macroacto 6 (M6)
El estudiante concluye que la multiplicación por 2 es una relación común entre las cantidades mencionadas, que corresponden a dos tipos de figuras en cada una de las capas.	De las expresiones usadas por la estudiante se puede inferir que para encontrar la cantidad de figuras en una capa desconocida se va sumando según el crecimiento que llevan las figuras, teniendo en cuenta el número de capa hasta llegar a la cantidad solicitada.	La estudiante considera resultados diferentes, al encontrar los pétalos de una de las capas con la información de la tabla y realizando el procedimiento de sumar a partir del gráfico; corrigiendo su respuesta al tener en cuenta todos los números involucrados en la relación.

Tabla 15. Macroactos asociados a la analiticidad. Fuente: Elaboración propia.

En M4 el estudiante identificó la multiplicación por 2 como una relación común entre las cantidades de dos figuras diferentes en cada capa, lo cual implica una operación determinada entre cantidades que varían. Por su parte, en M5 la estudiante realiza sumas sucesivas de tres en tres para poder encontrar la cantidad de figuras de una capa determinada, operando en este caso con una cantidad variable y una cantidad constante.

De esta manera, la analiticidad avanza según el diseño de las situaciones y las secuencias seleccionadas, hacia la identificación de los factores involucrados en las operaciones y las cantidades constantes. Al respecto, en M6 se presenta una diferencia entre el procedimiento de las sumas sucesivas y las operaciones con factores y constantes determinados, que fue solucionada al considerar todos los números involucrados en la relación, con esto, la estudiante confrontó su

forma intuitiva de calcular la cantidad de pétalos, con la utilización de una relación matemática. Siendo esta, una actividad preliminar para dar paso al macroacto 7 (M7), en el que tiene lugar la construcción de la expresión algebraica que permite encontrar la cantidad de pétalos en cada capa.

Macroacto 7 (M7): La estudiante expresa de manera verbal, haciendo uso de alguna notación matemática al reconocer (aceptar) a c como una forma de referirse al número de capas, y llegando así a una expresión matemática para obtener la cantidad de pétalos tomando como variable el número de capa.

Luego de escuchar una pequeña introducción sobre el uso de letras para representar variables en matemáticas, en M7 la estudiante acepta la condición de representar el número de capa con la letra “ c ” para decir finalmente que la expresión es “ c por tres más uno”. Llegando a una forma de representación simbólica de la variable, que en este caso es el número de capa y la relación matemática entre esta y la cantidad de pétalos, lo cual se refiere a las operaciones y números involucrados en la expresión.

Cabe señalar, que la estudiante (E7) que hizo esta construcción participó activamente en todas las situaciones. En el siguiente cuadro se presentan los Macroactos construidos a partir de sus intervenciones.

Macroactos de habla de la estudiante 7 (E7)			
1. En la secuencia se reconoce que la estudiante considera que solo hay patrón cuando la	2. La estudiante indica por medio de sus expresiones, que para encontrar la cantidad de pétalos en una capa lejana se deben restar las capas	3. La estudiante se refiere a cada una de las operaciones que realiza para obtener la cantidad de pétalos	4. La estudiante expresa de manera verbal, haciendo uso de alguna notación matemática al reconocer (aceptar) a c como una forma de referirse al número de capas, y llegando así a una

diferencia entre las cantidades de cada capa es igual.	que ya se tienen, y multiplicar las que hacen falta por el incremento de la secuencia.	partiendo de un número de capa específico.	expresión matemática para obtener la cantidad de pétalos tomando como variable el número de capa.
--	--	--	---

Tabla 16. Macroactos de la estudiante 7 (E7)

En su primera intervención reconoció las cantidades variables (número de capa y cantidad de figuras) y las relacionó mediante una operación de resta. Luego, propone un método para encontrar los pétalos de una capa lejana y expresa las operaciones que hacen parte de la relación entre el número de capa y la cantidad de pétalos en una capa específica, para finalmente llegar a la expresión matemática con la orientación del entrevistador.

De esta forma, se mencionan todas las relaciones encontradas entre los macroactos de habla de los estudiantes y los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico según Radford (2006). Con intervenciones de varios estudiantes que aluden a uno o varios de estos y la forma como una sola estudiante interviene en todas las situaciones para finalizar en la expresión algebraica que representa el patrón de una mandala, resaltando que la orientación del entrevistador tiene un papel determinante en el desarrollo de las actividades.

Desde el contexto de comunicación

En el contexto de comunicación, que se entiende como la realidad que se va creando con las condiciones particulares de la implementación, se incluye la forma como el entrevistador

abordaba las preguntas de los estudiantes y también cómo los estudiantes iban organizando su discurso conforme a las interacciones del entrevistador.

En este sentido, es fundamental la propuesta de Sfard (2008) respecto al aprendizaje, en la cual se sugiere que este es una interacción social usada para modificar otras interacciones sociales. Específicamente se sitúa el discurso como una interacción social, asumiendo que, para aprender, los estudiantes deben pasar por el proceso de cambiar sus formas discursivas propias. Los cambios mencionados tienen lugar en un medio social y con la participación de un experto que regule de alguna forma el discurso específico de la disciplina, en este caso de las matemáticas escolares.

Para este proceso se cuenta con dos etapas, la primera de ellas es el uso de *plantillas*, lo cual sugiere que los estudiantes en un inicio toman partes del discurso que ellos conocen y a partir de ahí empiezan a introducir palabras nuevas a las que le dan significado posteriormente, en la segunda etapa que es la *objetificación* que conlleva el uso de nuevos términos como una representación de un objeto independiente.

Al respecto, desde el inicio de las intervenciones el entrevistador fue enfático en pedir especificaciones y justificaciones sobre las respuestas de los estudiantes, por eso, a medida que fueron avanzando en las actividades, los estudiantes empezaron a argumentar sus planteamientos, en algunos casos a través de operaciones, aunque siempre pedían una validación de estas. En el siguiente cuadro se presentan las intervenciones de una estudiante (E2) y el entrevistador (E), al inicio de la actividad y en un momento posterior cuando ya se llevaban dos horas de trabajo.

Intervención inicial	Intervención posterior
----------------------	------------------------

E: bueno, al tú dibujar lo que dibujaste ehh..¿qué pensabas sobre lo que te dije del patrón? ¿cómo lo relacionas con el patrón? E2: pues la verdad, la mayoría de lo que dibuje son triángulos, pues entonces yo diría que ese sería el patrón E: ¿que haya triángulos seria el patrón? E2: pues algo así...sí, yo creo E: bueno, pregunta...¿esos triángulos siempre es la misma cantidad, aumentan, disminuyen, cambian de tamaño? E2: pues la verdad es que en el centro del mandala, la cantidad es pues poca, a medida que va avanzando por ejemplo en el segundo circulo ya hay más, en el tercero aumentan de tamaño y pues de cantidad y en el cuarto pues también.	E: ah ok...ahorita la siguiente pregunta, si me dicen que la tercera capa tiene 15 hojas, o sea, tenemos este centro, hay una segunda capa que está vacía y esta la tercera que tiene 15, ¿es posible saber cuántos tiene la segunda? E2: trece profe, porque de nueve a quince hay seis no, entonces pues ahí seria de nueve a trece...ah no profe, no.. E: aquí hay nueve, la tercera capa tiene quince.. E2: a doce E: eso E2: a doce porque de nueve a doce hay tres y de doce a quince hay tres
---	--

Tabla 17. Contraste de intervenciones. Fuente: Elaboración propia.

Según las secuencias que se observan en el cuadro, en la primera intervención de la estudiante se tiene una respuesta sin fundamentación y un poco insegura al utilizar la expresión “pues algo así”, aunque luego, por la intervención del entrevistador logra explicar mejor la relación entre su dibujo y un patrón. De esta manera, los estudiantes se fueron habituando a entregar respuestas justificadas, como en la segunda intervención de la misma estudiante, en la que explica su respuesta sin ser requerido por el entrevistador e incluso en esos momentos se percata de un error y logra corregir su resultado.

Este ambiente, también generó un poco de inseguridad en los estudiantes, por el hecho de la justificación, encontrando ocasiones en las que no comprendían algunas palabras utilizadas en las preguntas y no se atrevían a dar una respuesta desde lo que ellos comprendían o conocían; por tanto, el entrevistador se valía de casos específicos para darles a entender la solicitud de la actividad y de esta manera ya era posible emitir una respuesta. A continuación, algunas secuencias que ejemplifican lo mencionado.

Secuencia 1	Secuencia 2	Secuencia 3
E: ¿la cantidad de figuras de cada sección o capa tienen alguna relación entre ellas?..es decir, ¿qué relación hay entre la cantidad de puntos corazones y diamantes? E4: mmm no sé E: ¿qué cantidades hay en el centro? Por ejemplo..¿qué cantidad de corazones? E4: tres E: ¿qué cantidad de diamantes? E4: tres E: ¿qué cantidad de puntos?	E: entonces ahorita vamos a preguntarnos cuál es la relación entre esas dos cantidades. Miremos la primera capa, en la primera capa son 6 triángulos y 12 puntos y en la otra son 9 triángulos y 18 puntos ¿qué relación hay entre esas cantidades? Entre 6 y 12 y 9 y 18, ¿ves alguna relación ahí? E5: no E: por ejemplo, en la anterior, la mandala 2 era la misma cantidad, entonces la relación es decir es una misma cantidad, pero en esta mandala tenemos 6 y 12 y luego en la otra tenemos 9 y 18.	E: eso, hay siete...en la capa amarilla, capa dos, hay siete y me preguntan ¿cuál es la diferencia con respecto a la anterior es decir con respecto al centro? ¿cuántos hay en el centro? E8: cuatro E5: cuatro E: cuatro, entonces ¿cuál es la diferencia entre siete y cuatro? E5: tres E: tres y luego ¿cuál es la diferencia entre siete y la otra? ¿la otra cuántos tiene, la verde?

E4: tres E: entonces ¿cuál sería la relación entre esas tres cantidades? E4: la misma cantidad	E6: profe, yo sé por qué..porque se multiplica 6 por 2 doce y 9 por 2 dieciocho.	E5: diez, que es de tres...la otra tiene trece que es de tres también
--	--	---

Tabla 18. Secuencias con respuestas inseguras. Fuente: Elaboración propia.

En las secuencias 1 y 2 al preguntar por la “relación” entre algunas cantidades los estudiantes no entregan una respuesta inicial. En la secuencia 1, el estudiante dice “no sé” pero luego de que el entrevistador le hace otras preguntas orientadas a confrontar las cantidades, llega a encontrar la relación de ser una misma cantidad. En este caso el estudiante ya tenía conocimiento de que esas cantidades eran iguales, pues era parte de su respuesta, lo que no había logrado era identificar como una relación el hecho de ser una misma cantidad.

Para la secuencia 2, se presenta otro tipo de relación, que el estudiante no identifica tampoco en el inicio, sin embargo, luego de la intervención del entrevistador, es otro estudiante quien termina por decir que se multiplica por dos. La secuencia 3 aborda la diferencia entre cantidades, el entrevistador es muy específico y lleva las preguntas paso por paso, así los estudiantes logran responder sin mayor dificultad haciendo uso de este término.

Lo anterior, muestra como los estudiantes empezaron a hacer uso de conceptos que no eran muy claros para ellos, pero que fueron tomando sentido dentro de la conversación con el entrevistador; es decir, se fueron apropiando de la especificidad del lenguaje matemático en medio de un discurso donde se usaban términos como patrón, relación, diferencia, operaciones, etc.,

cuando al iniciar la actividad, la explicación de algunos estudiantes solo contaba con palabras propias de su lenguaje cotidiano como rutina, circuito, agrandar, distancia, cuentas.

Por consiguiente, desde la propuesta de Sfard (2008) se puede decir que tuvo lugar un aprendizaje, por cuanto los estudiantes logran modificar de alguna forma su discurso para hacer parte de la conversación que guiaba la clase, aun cuando no manejan muy bien los términos, ellos participaron tomando como referencia el discurso del entrevistador y al no estar seguros validan sus expresiones.

Desde el diseño implementado

De las relaciones encontradas se tiene que siguen lo esperado según el diseño: en la situación 1 o de introducción se encuentra que los estudiantes logran la identificación de la cantidad de figuras como una cantidad indeterminada, así como algunas expresiones que indican operaciones con esta; el diseño de la situación, dio lugar a una reflexión inicial sobre la idea de patrón que tenía cada estudiante, pero condicionado por la plantilla, esto permitió guiarlos hacia el reconocimiento de un cambio en las figuras.

Posterior a esta actividad, se presentaron mandalas diseñadas con secciones definidas y un cambio constante en la cantidad de figuras, estas características se fueron identificando por medio de las preguntas propuestas, en las que se encontraron dificultades para comprender el significado de algunos términos como el de “relación”; siendo de suma importancia la orientación del entrevistador, para guiarlos en la solicitud de cada punto.

La situación 2, presenta énfasis en la analiticidad, con el reconocimiento de las relaciones entre cantidades, expresadas mediante operaciones matemáticas. Para esta situación se plantearon

actividades de análisis de cantidades con una sola mandala, las preguntas sobre la cantidad de figuras en capas lejanas, llevaron a los estudiantes a identificar las operaciones que debían realizar repetidamente y cómo estas también se podían sintetizar de alguna forma.

Por su parte, la situación 3 permitió hacer el cierre del trabajo anterior al obtener una expresión algebraica en la cual se involucró como variable el número de capa. Para esto, en el diseño se planteó llenar un cuadro con la descomposición en suma de la cantidad de figuras en varias capas, aunque tuvo que explicarse muy bien la forma de llenarlo, esta actividad dio lugar a que una estudiante confrontara los métodos intuitivos con los analíticos, de manera que los estudiantes tuvieron la posibilidad de comprobar la validez de los últimos.

Después de lo anterior, los estudiantes respondieron fácilmente la siguiente actividad, un camino en la cual debían especificar las operaciones necesarias para pasar del número de capa a la cantidad de figuras y así, luego de una corta introducción al uso de variables, concluir enunciando la expresión algebraica que relacionaba el número de capa con la cantidad de figuras.

CONCLUSIONES

El presente trabajo investigativo, planteó como objetivo general caracterizar el discurso desde la perspectiva de los actos de habla para reconocer la construcción de significado, que realiza un grupo de estudiantes, de las expresiones algebraicas a partir de una situación de generalización. La situación mencionada se relacionó con la introducción al álgebra, por medio de la identificación y formulación de patrones en secuencias numéricas.

Así, en el desarrollo del mismo se integró la metodología de los *Experimentos de enseñanza* con las posturas teóricas sobre los actos de habla y la pragmática del discurso, para estudiar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes partiendo de sus formas de comunicación. Lo anterior se logró en consideración de objetivos que abordaron tareas más específicas y que brindaron elementos puntuales para medir el avance en el objetivo general.

Entre los objetivos planteados para este trabajo de grado, se encuentran algunas aproximaciones desde la experiencia que proporcionó el diseño, la implementación y el análisis de las actividades. Los objetivos específicos en su orden se relacionaron con: el diseño de las actividades, el reconocimiento de actos de habla y la identificación de las características propias del pensamiento algebraico.

En cuanto al diseño, las situaciones planteadas permitieron que los estudiantes se involucraran paso por paso en la identificación y construcción de una expresión algebraica, teniendo en cuenta los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico según Radford (2006) los cuales fundamentaron el énfasis y la organización de las actividades, que, efectivamente se relacionaron en su orden con las intenciones comunicativas de los estudiantes.

Por su parte, el análisis local permitió identificar las Secuencias de actos de habla y los Macroactos de habla, esto es, llegar al reconocimiento de las intenciones comunicativas y de la forma como los estudiantes organizan sus intervenciones dentro del discurso. Al respecto, los estudiantes logran concluir sobre los patrones y sus características, identificar cantidades variables y establecer relaciones entre estas.

El reconocimiento anterior, dio lugar a la identificación de las expresiones relacionadas con los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico de Radford (2006) que siguieron el orden establecido desde el diseño y permitieron concluir con la construcción de una expresión algebraica, luego de pasar por la identificación de variables y de las relaciones entre estas, todo esto por medio de una situación de generalización en la cual se usaron patrones con secuencias numéricas.

Estos tres aspectos conllevan de forma general a proporcionar características sobre el discurso de los estudiantes con el fin de responder a la siguiente pregunta: *¿Cómo a partir de un análisis pragmático del discurso centrado en la perspectiva de los actos de habla se puede reconocer la construcción de significado, que realiza un grupo de estudiantes, de las expresiones algebraicas a partir de una situación de generalización?*

Desde lo mencionado anteriormente, el análisis de las expresiones de los estudiantes, permitió identificar las intenciones comunicativas y establecer que guardan una relación con los elementos caracterizadores del pensamiento algebraico, esto quiere decir que este tipo de pensamiento hace parte de las decisiones discursivas de los estudiantes, demostrando con sus expresiones cierto dominio en la descripción de patrones y la identificación de variables y sus relaciones, que permiten construir significado sobre las expresiones algebraicas.

Además de esto, cuando se habla de un análisis pragmático del discurso, es fundamental tomar en consideración el contexto en el que se desarrollan las actividades y para efectos de la pregunta central, cómo ese contexto también nos muestra algunos indicios de la construcción de conocimiento que tuvo lugar. La respuesta viene del mismo discurso, tomando en consideración a Sfard (2008) se pueden observar cambios en las formas de comunicarse e interactuar en los estudiantes, cambios que se dieron a partir de la implementación de las actividades, lo cual es sinónimo de aprendizaje desde esta perspectiva.

BIBLIOGRAFÍA

- Castro, E. (1999). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En: Handbook of research Design in mathematics and science education, Cap. 12 (pp. 307 – 326). New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Cubero, R., Cubero, M., Santamaría, A., De la Mata Benítez, M. L., Ignacio–Carmona, M. y Prados, M. (2008). La Educación a través de su discurso. Prácticas educativas y construcción discursiva del conocimiento en el aula. Revista de Educación 364, 71–104.
- Correa, M. (2017). *Un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra. Análisis del discurso para la comprensión de la construcción de significado de las expresiones algebraicas*. [Tesis de maestría no publicada]. Universidad del Valle.
- Díaz, José Luis y Lina Morales (2005), "El concepto de variable en los libros de texto", en H. Leyva, H. Carrillo y L. Díaz (eds.), Publicación de la XV Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas (I), México, Universidad de Sonora, pp. 39-45.
- Erickson, D. B. (1991). Students Ability to Recognize Patterns. School Science and Mathematics, 91(6), 255-58.
- Godino, J., Batanero, C., Estepa, A., Lacasta, E. & Wilhelmi, M. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra (pp. 145-168). Routledge.
- Kieran, C. (1989) A perspective on algebraic thinking. Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Vol. 2, (pp. 163-171). París.

Kieran, C., & Yagüe, E. F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 229-240.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419). New York: Macmillan

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*, 271-290. Sevilla, España: S.A.E.M. ThalesHodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures*, 271-290. Sevilla, España: S.A.E.M.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En: *The handbook of research on mathematics education*. (Vol. 2,707-762). Greenwich, Conn: Information Age.

Kieran, C. (2014). Algebra teaching and learning. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 27-32). Springer Netherlands.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Serie Lineamientos. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Recuperado de http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas V2*. Colombia. Santafé de Bogotá, D. C.

Medina Becerra, G. A. (2018). *Patrones y secuencias*. Introducción al pensamiento variacional en el curso 205 de la Institución Educativa Distrital Ciudadela Educativa de Bosa. Recuperado de <http://repository.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/9458>

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75-88.

Murcia, M. E., & Henao, J. C. (2015). Educación matemática en Colombia, una perspectiva evolucionaria. *Entre Ciencia e Ingeniería*, 9(18), 23-30.

Polya, G., & Abellan, J. L. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Colección Estructura y Función.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Universidad de Laurentienne. PME-NA 2006 Proceedings, vol. 1-2.

Rojas, P. J., & Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico.

Studies in Mathematics, 26(2), 191-228.

Searle (2005). Una taxonomía de los actos ilocucionarios. En: *La búsqueda del significado: Lecturas de filosofía del lenguaje* (pp. 415- 430). Madrid, España. Tecnos.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: orígenes y perspectivas* (Vol. 2). Libros del Zorzal.

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Programa Editorial UNIVALLE.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *NUMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, 240(4852), 611-616.

Steff, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research Design in mathematics and science education*, Cap. 11 (pp. 267 – 306). N jersey: Lawrence Erlbaum.

van Dijk, T. A. (1996). Estructuras y funciones del discurso: Una introducción interdisciplinaria a la lingüística del texto y a los estudios del discurso. México, D.F: Siglo XXI editores.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 9(3), 193-215.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/12877/>

ANEXOS

Situación 1

Actividad 1.

1. Sobre la siguiente plantilla dibuja una mandala en la que haya un patrón.



Mandala 1

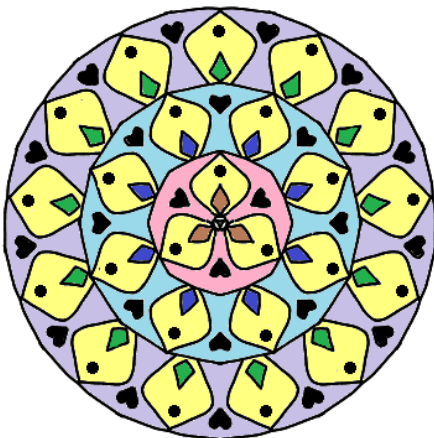
- a. ¿Por qué crees que hay un patrón en tu mandala?
- b. ¿Los elementos que componen tu mandala aumentan, disminuyen o permanecen igual en todas las secciones circulares o capas?
- c. Escribe los cambios que hay entre cada capa de tu mandala.

2. Realiza la descripción de tu mandala para que un compañero pueda dibujar una exacta a la tuya.
3. A continuación, encontraras la descripción de una mandala por secciones no consecutivas, por tanto, deberás asignarle un orden y dibujarla en una hoja extra según el orden que has elegido.

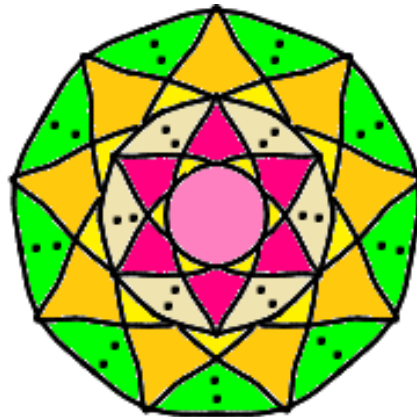
Esta mandala tiene cuatro secciones o capas contando el centro. Está compuesta por dos figuras: diamantes y gotas. En todas las capas los diamantes se encuentran distribuidos a igual distancia entre sí. En medio de los diamantes siempre debe haber una gota. Una de las capas es de color verde y tiene en su interior seis diamantes de color rosado. Se cuentan dos gotas de color azul en una capa de color amarillo. Ocho diamantes color naranja con gotas de color café en otra capa. Y, por último, en una capa de color lila hay cuatro gotas de color rojo.

Actividad 2.

1. Responde las siguientes preguntas con base en cada uno de los siguientes mandalas.



Mandala 3



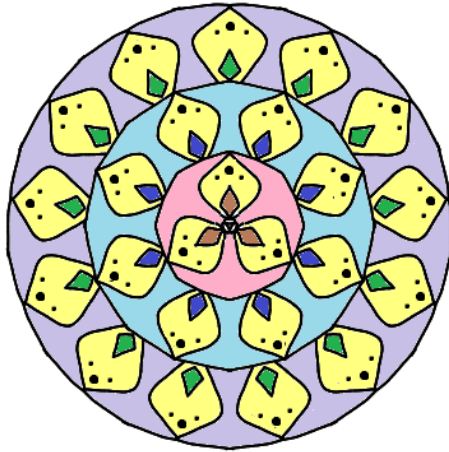
Mandala 2

- a. ¿Qué formas identificas en el centro de cada mandala?
- b. ¿Cuántas capas o secciones circulares tiene cada mandala?

- c. ¿Cuántas veces se repiten las formas que componen cada una de las capas?
- d. ¿La cantidad de figuras de cada sección o capa tienen alguna relación entre ellas?

Actividad 3.

Relaciona cada capa con la cantidad de figuras que tiene y luego responde las preguntas



Mandala 4

Capa 1 (área rosada)

8 pétalos grandes
13 pétalos pequeños
3 puntos grandes
26 puntos pequeños

Capa 2 (área azul)

3 pétalos grandes
8 pétalos pequeños
13 pétalos grandes
16 puntos pequeños
3 pétalos pequeños
8 puntos grandes
13 puntos grandes

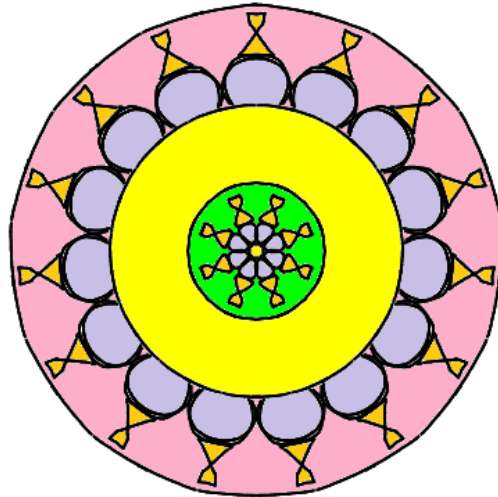
Capa 3 (área morada)

6 puntos pequeños

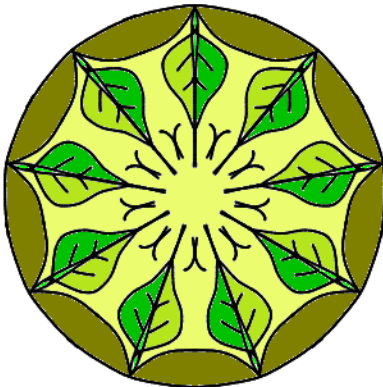
Actividad 4

Responde las siguientes preguntas luego de observar y analizar cada mandala.

- ¿Es posible predecir cuántos pétalos y figuras de reloj de arena tendría la capa amarilla en la mandala 4? ¿Por qué?
- ¿Crees que en esta mandala hay un patrón? Si la respuesta anterior es sí, descríbelo; si la respuesta anterior es no ¿qué cambio le harías a la mandala para que haya un patrón?



Mandala 5



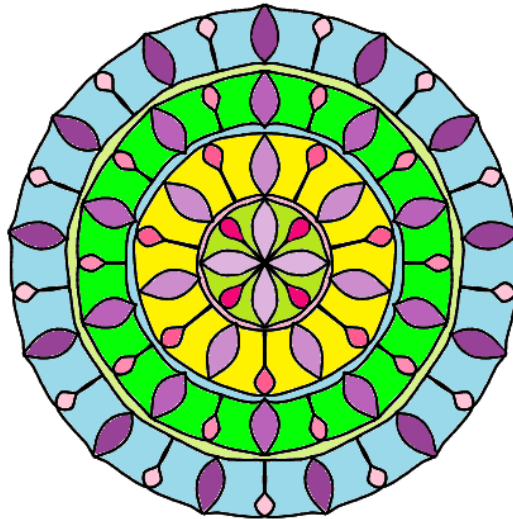
Mandala 6

- Esta figura es el centro o primera capa de una mandala ¿Es posible predecir cuántas hojas tendría una siguiente capa? ¿Por qué?
- Si me dicen que la tercera capa tiene 15 hojas ¿es posible saber cuántas hojas tiene la segunda?
- ¿Qué información necesito para poder completar una mandala con patrones que tenga capas vacías?

Situación 2

Actividad 1.

Observa la siguiente mandala y responde:



Mandala 7

1. Utiliza la siguiente tabla para registrar la relación entre el número de capa y la cantidad de figuras que hay en cada una de estas.

Capas Figuras	Capa 1 (centro)	Capa 2	Capa 3	Capa 4

- a. Según aumentan las capas en la mandala ¿qué sucede con el número de pétalos grandes? ¿cuál es el cambio en la cantidad de pétalos grandes en la capa 2 con respecto a la anterior y con respecto a la siguiente capa?
 - b. Describe el patrón de comportamiento de los pétalos grandes
 - c. ¿Qué relación hay entre los pétalos grandes y pequeños de la mandala? ¿Siguen el mismo comportamiento de crecimiento?
 - d. Realiza una nueva tabla en la que relaciones la cantidad de todos los pétalos (grandes y pequeños) con el número de capa. ¿Cambia el comportamiento? Justifica tu respuesta.
2. Utiliza la tabla que has construido para expandir la mandala con más capas de la siguiente manera:

- a. ¿Cuántos pétalos grandes tendría la capa 5 de la mandala? ¿Por qué?
- b. ¿En qué capa habría 25 pétalos grandes? Explica tu respuesta.
- c. ¿Cuántos pétalos totales tendría la capa 7 de la mandala?
- d. ¿En qué capa habría 32 pétalos en total?
- e. ¿Es posible saber la cantidad de pétalos grandes en la capa 100? Explica cómo encontrarías el resultado.

Situación 3

Actividad 1

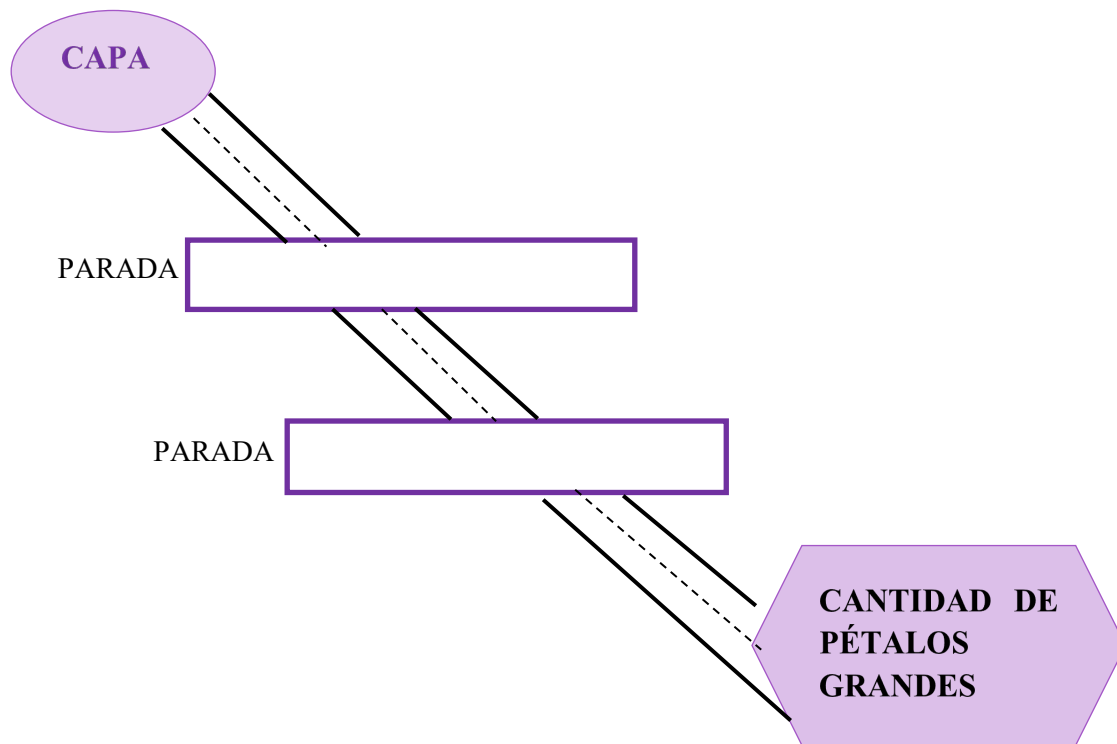
- Asígnale un patrón a la mandala 5 y describe con detalle la construcción de las siguientes dos capas. Además de esto, escribe las indicaciones que se deben seguir para poder saber la cantidad de elementos de cualquier capa.
- Observa de nuevo la mandala 7 y responde:
 - ¿Con qué cantidad de pétalos grandes inicia la mandala (centro)?
 - Escribe una lista de todas las agrupaciones que se pueden realizar con los pétalos grandes de la capa 1.
 - Forma grupos de igual cantidad con los pétalos grandes de la capa 2 y escribe todas las opciones posibles en orden e indicando si sobran pétalos.
 - Repite el procedimiento anterior con los pétalos grandes de la capa 3.
 - Comparando las opciones de grupos que formaste ¿Existe alguna que se cumpla en todas las capas? si existe alguna, indícala.
- Observa de nuevo la mandala 2 y responde:
 - ¿Cuántos corazones hay en el centro o primera capa?
 - Forma grupos de igual cantidad con los corazones de la capa 2 y escribe todas las opciones posibles en orden e indicando si sobran pétalos.
 - Repite el procedimiento anterior con los corazones de la capa 3.
 - Comparando las opciones de grupos que formaste ¿Existe alguna que se cumpla en las dos capas mencionadas? si existe alguna, indícala.

Actividad 2

- La siguiente tabla tiene información relacionada con la mandala 7. Completa los espacios en blanco y luego responde:

Cantidad de pétalos grandes	Descomposición en suma usando solo dos números en todos los casos.	Capa	Cantidad de veces que se repite un número ()	Cantidad de veces que se repite un número ()
4	$\square + \square$			
7	$\square + \square + \square$			
10	$\square + \square + \square + \square$			
...	...	...	...	...
16				
...	...	...	...	...
		12		
...	...	...	...	...
		25		

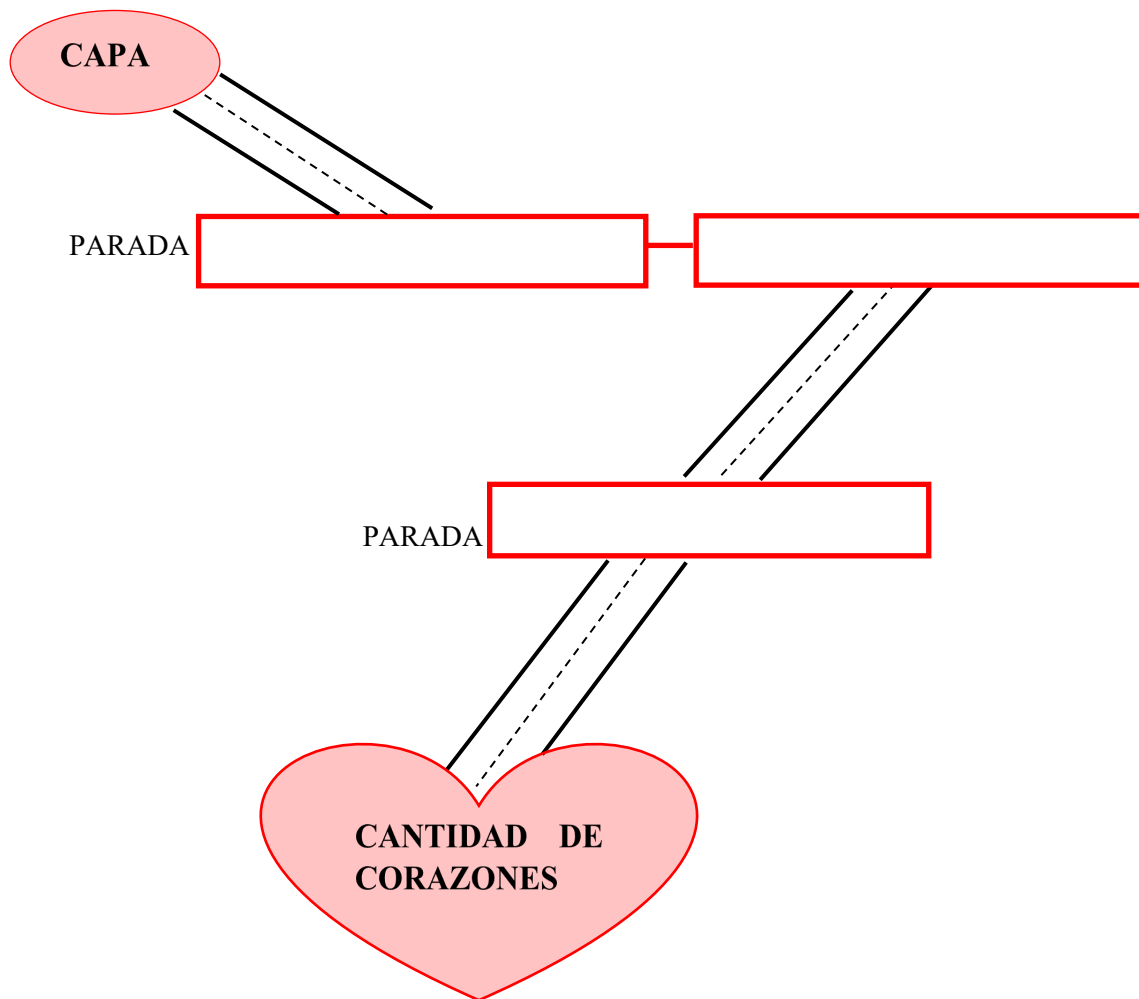
- a. ¿Cuál es el número que solo aparece una vez en todas las sumas?
- b. ¿Cuál es el número que se repite en las sumas?
- c. ¿Qué relación hay entre las veces que se repite el número elegido en la **pregunta b** y el número de capa?
- d. Si te piden calcular la cantidad de pétalos grandes en la capa 1000 ¿cómo lo harías sin necesidad de realizar una suma tan larga?
- e. Vamos a representar el patrón de la mandala 7 como un camino a recorrer. En este camino, el punto de partida es el número de capa y el punto de llegada es la cantidad de pétalos en dicha capa. En cada parada se debe realizar una operación matemática (suma, resta, multiplicación o división) que permita completar el camino obteniendo los resultados correctos para cualquier capa.



4. La siguiente tabla tiene información relacionada con la mandala 2. Completa los espacios en blanco y luego responde:

Cantidad de corazones	Descomposición en suma usando solo dos números en todos los casos.	Capa	Cantidad de veces que se repite un número ()	Cantidad de veces que se repite un número ()
3	3			
8	$\square + \square$			
13	$\square + \square + \square$			
18	$\square + \square + \square + \square$			
...	...	...	...	...
		10		
...	...	...	...	...
		15		

- ¿Cuál es el número que solo aparece una vez en todas las sumas?
- ¿Cuál es el número que se repite en las sumas?
- ¿Cuántas veces debo sumar el número elegido en la **pregunta b** en la capa 1?
- ¿Qué relación hay entre las veces que se repite el número elegido en la **pregunta b** y el número de capa?
- Si te piden calcular la cantidad de corazones en la capa 600 ¿cómo lo harías sin necesidad de realizar una suma tan larga?
- Vamos a representar el patrón de la mandala 2 como un camino a recorrer. En este camino, el punto de partida es el número de capa y el punto de llegada es la cantidad de pétalos en dicha capa. En cada parada se debe realizar una operación matemática (suma, resta, multiplicación o división) que permita completar el camino obteniendo los resultados correctos para cualquier capa.



Actividad 3

1. Escribe una expresión algebraica que te permita calcular el número de pétalos grandes de la mandala 7 en cualquier capa.
2. Verifica que tu expresión es válida usándola en al menos tres capas y comparando tus respuestas con los resultados ya obtenidos.
3. Repite lo anterior para calcular los corazones de la mandala 2 y los pétalos triangulares de la mandala 3.