



**CONSTRUYENDO ALGUNOS FUNDAMENTOS DEL CONCEPTO DE NÚMERO Y
EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL, EN ESTUDIANTES DE TRANSICIÓN,
A TRAVÉS DE UNA PROPUESTA DE AULA QUE INVOLUCRA LOS CONCEPTOS
DE CARDINAL, ORDEN Y AGRUPACIÓN**

LINA VANESSA GUTIÉRREZ VECCA

Código: 1402418

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Santiago de Cali, enero de 2017



**CONSTRUYENDO ALGUNOS FUNDAMENTOS DEL CONCEPTO DE NÚMERO Y
EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL, EN ESTUDIANTES DE TRANSICIÓN,
A TRAVÉS DE UNA PROPUESTA DE AULA QUE INVOLUCRA LOS CONCEPTOS
DE CARDINAL, ORDEN Y AGRUPACIÓN**

LINA VANESSA GUTIÉRREZ VECCA

Código: 1402418

Informe final de investigación presentado como requisito para optar al título de Magister en
Educación, Énfasis Educación Matemática

Tutora de Trabajo de Grado:

MG. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

Cotutor de Trabajo de Grado:

MG: DIEGO FERNANDO GUERRERO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Santiago de Cali, enero de 2017



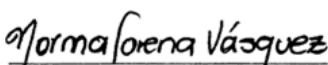
UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

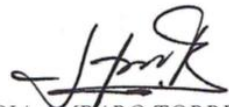
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÁREA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

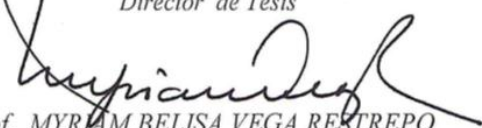
ACTA DE SUSTENTACIÓN

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 16 de Marzo de 2017
ESTUDIANTE: LINA VANESSA GUTIÉRREZ VECCA - CÓDIGO: 1402418
TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: "UNA APROXIMACIÓN AL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN TRANSICIÓN: UNA PROPUESTA DE AULA QUE INVOLUCRÁ LOS CONCEPTOS DE ORDEN, CARDINAL Y AGRUPACIÓN"
DIRECTOR DE TESIS: Profesora LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO
EVALUADORES: Profesora NORMA LORENA VÁSQUEZ ASPRILLA Profesora: MYRIAM BELISA VEGA RESTREPO
COMENTARIOS DE LOS JURADOS EL JURADO RECOMIENDA ATEMPERAR EL TÍTULO DEL TRABAJO ACORDE A LOS RESULTADOS ALCANZADOS. TAMBIEN PONERLO EN FUNCION DEL CONTEO Y SU APORTE A LA FUNDAMENTACIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL. ESTE ASPECTO LO VERIFICARÁ LA DIRECTORA DEL TRABAJO DE GRADO
APROBADO ☒ APLAZADO ☐ RECHAZADO ☐


Prof. SANTIAGO A. ARBOLEDA FRANCO
Subdirector de Investigaciones y Posgrados


Prof. NORMA LORENA VÁSQUEZ A.
Jurado Evaluador


Prof. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO
Directora de Tesis


Prof. MYRIAM BELISA VEGA RESTREPO
Jurado Evaluador

AGRADECIMIENTOS

A Dios por escucharme y por estar conmigo siempre

A la Universidad del Valle por su apoyo económico y por formarme académica, personal y profesionalmente

A mis directores de tesis

A Ligia Amparo Torres Rengifo y a Diego Fernando Guerrero por todos los conocimientos impartidos.

A mis profesores por su entrega y participación en el proceso de formación profesional

A Eugenio Filloy por sus recomendaciones y por estar siempre pendiente del desarrollo del trabajo

A mi familia Carmen Vecca, Reinel Gutierrez, Diego Gutiérrez a todos gracias por ser mi motor, por su amor y apoyo incondicional.

A mi novio Gustavo Moreno, por ser mi compañero académico, por su apoyo incondicional, por no dejarme caer, por soportar tantas cosas, por creer en mi cuando ni yo misma creía, y por darme ánimos para continuar en este proceso, gracias a ti he terminado este proceso.

Y por último, a todas las personas que de una manera u otra estuvieron a mi lado en los diferentes momentos de esta etapa.

Dedicado a Diego Gutiérrez

No te rindas nunca, alcanza tus sueños

Si lo puedes creer, lo puedes lograr

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN.....	XIII
CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	1
1.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	2
1.2 OBJETIVOS	6
1.2.1 Objetivo general	6
1.2.2 Objetivos específicos.....	6
1.3 JUSTIFICACIÓN.....	6
1.4 ANTECEDENTES	9
1.4.1 Algunas investigaciones sobre el CNN.	9
1.4.2 Algunas investigaciones sobre el SND.	13
1.4.3 Algunas investigaciones desde la perspectiva cognitiva.	18
1.4.4 Balances y aportes al proyecto.	18
1.5 METODOLOGÍA	19
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO DE REFERENCIA	21
2.1 SOBRE LOS MTL.....	22
2.1.1 Sobre los componentes de los MTL.	23
2.1.2 Sobre el diseño y desarrollo de la experimentación.	25
2.1.3 Sobre la recursividad en los MTL.	27
2.2 EL MTL SOBRE EL CNN Y EL SND	28
2.2.1 Esquema del diseño de la experimentación sobre el CNN y el SND.	28
2.2.2 Esquema del desarrollo de la experimentación sobre el CNN y el SND.....	30
2.2.3 Modelo para los procesos cognitivos y modelo de comunicación.	31
2.2.4 Modelo de competencia formal.	53
2.2.5 Modelo de Enseñanza.....	74
CAPÍTULO 3: EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN TRANSICIÓN.....	95
3.1 ETAPAS DEL DISEÑO Y DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN	96
3.1.1 Sobre el diseño del desarrollo de la experimentación.	96
3.1.2 Desarrollo de la experimentación.....	97
3.1.3 Sobre la propuesta de aula.....	100
3.1.4 Sobre la implementación de la propuesta de aula.	118
3.2 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	121
3.2.1 Resultados y análisis de resultados de la Situación 1 (S1): El juego cincuenta fichas, el conteo y la correspondencia uno a uno.	121
3.2.2 Resultados y análisis de resultados de la Situación 2 (S2): Pepa y la Ordinalidad.	146

3.2.3 Resultados y análisis de resultados de la Situación 3 (S3): La tienda y la agrupación.	165
3.2.4 Resultados globales de la implementación de la propuesta de aula.	184
3.3 SOBRE LA ENTREVISTA Y EL ESTUDIO DE CASOS	187
3.3.1 Sobre los perfiles de los estudiantes.....	187
3.3.2 Sobre el diseño de la entrevista.	188
3.4 SOBRE EL ESTUDIO DE CASOS	197
CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS.....	224
4.1 CONCLUSIONES GENERALES	225
4.2 ALGUNAS REFLEXIONES TEÓRICAS Y METODOLÓGICAS SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CNN Y EL SND EN TRANSICIÓN.	237
4.3 SOBRE EL MTL Y FUTUROS ESTUDIOS	241
4.4 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	224
ANEXOS	248

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Metodología del trabajo de investigación.	20
Ilustración 2. Interrelación de los componentes del MTL.....	25
Ilustración 3. Esquema del diseño de la experimentación (Filloy, 1999).	26
Ilustración 4. Esquema del desarrollo de la experimentación (Filloy, 1999).	27
Ilustración 5. Esquema del Diseño y Desarrollo de la Experimentación del CNN y el SND	29
Ilustración 6. Esquema del desarrollo de la experimentación sobre el CNN y el SND	30
Ilustración 7. Notaciones múltiples (Scheuer et al., 2000).....	45
Ilustración 8. Palabra número y su carácter operatorio	46
Ilustración 9. Cubos de Dienes, Unidad, Decena, Centena y Unidad de Mil.....	47
Ilustración 10. Ábaco, representación de 1 unidad, 1 decena, 1 centena y 1 unidad de mil	48
Ilustración 11. Dinero, Unidad, Decena, Centena y Unidad de Mil.....	49
Ilustración 12. Técnica corporal utilizada por los Papúes en Nueva Guinea	55
Ilustración 13. Representación del número 3577 en el sistema de numeración hierático y jeroglífico egipcio (Ifrah, 1987).....	58
Ilustración 14. Representación del número 20 y 23 en el sistema de numeración Chino (Ifrah, 1987) ..	59
Ilustración 15. Representación del número 20.064 usando el sistema de numeración Chino.....	60
Ilustración 16. Sistema de numeración Maya	60
Ilustración 17. Cambios de los numerales desde el siglo III a.C. hasta la época actual.....	61
Ilustración 18. Pensamiento matemático (Obando y Vázquez, 2010).....	71
Ilustración 19. Relaciones entre competencias, funcionamientos cognitivos y descriptores.	77
Ilustración 20. Representaciones del CNN y el SND involucradas en las tareas del texto 1 y del texto 2	86
Ilustración 21. Texto 1, actividad Adición	86
Ilustración 22. Implicaciones generales de cada componente y su aporte a la construcción del MTL inicial.....	94
Ilustración 23. Esquema del desarrollo de la experimentación sobre el CNN y el SND.	99
Ilustración 24. Tren de pepa.....	109
Ilustración 25. Tren S2, T1, P3	109
Ilustración 26. Rieles del tren.....	110
Ilustración 27. Rieles descompuestos.....	110
Ilustración 28. Carta que indica la cantidad 10.	111
Ilustración 29. Tren S2, T3.....	112
Ilustración 30. Separata de ofertas	115
Ilustración 31. Organización de fichas en los tableros. A la izquierda una organización al azar y a la derecha una organización lineal (horizontal y vertical).	122
Ilustración 32. Explicación S2, T1	146
Ilustración 33. Respuestas de la S2, T1, P2	149
Ilustración 34. Respuestas de algunos estudiantes S2, T3, P2	161
Ilustración 35. Respuestas S3, T1, P1, La.....	166

Ilustración 36. Respuestas S3, T1, Lb.....	167
Ilustración 37. Respuestas S3, T1, P1, Lc.....	167
Ilustración 38. Respuestas S3, T2, P3.....	176
Ilustración 39. Clasificación de los perfiles de los estudiantes	188
Ilustración 40. Entrevista E7, Pregunta 2.....	198
Ilustración 41. Entrevista E7, Pregunta 4.....	199
Ilustración 42. Entrevista E10, Pregunta 2.....	201
Ilustración 43. Entrevista E10, Pregunta 4.....	202
Ilustración 44. Entrevista E7, Pregunta 6.....	205
Ilustración 45. Entrevista E7, Pregunta 8.....	206
Ilustración 46. Entrevista E10, Pregunta 6.....	207
Ilustración 47. Entrevista E7, Pregunta 9, literal a.....	211
Ilustración 48. Entrevista E7, Pregunta 9, literal b.....	212
Ilustración 49. Entrevista E10, Pregunta 9, Literal a.....	216
Ilustración 50. Entrevista E10, Pregunta 9, Literal b	217

Índice de tablas

Tabla 1.....	44
Tabla 2.....	44
Tabla 3.....	48
Tabla 4.....	49
Tabla 5.....	59
Tabla 6.....	80
Tabla 7.....	87
Tabla 8.....	91
Tabla 9.....	101
Tabla 10.....	102
Tabla 11.....	102
Tabla 12.....	119
Tabla 13.....	122
Tabla 14.....	124
Tabla 15.....	126
Tabla 16.....	128
Tabla 17.....	130
Tabla 18.....	134
Tabla 19.....	136
Tabla 20.....	147
Tabla 21.....	149
Tabla 22.....	150
Tabla 23.....	154
Tabla 24.....	155
Tabla 25.....	157
Tabla 26.....	158
Tabla 27.....	165
Tabla 28.....	166
Tabla 29.....	167
Tabla 30.....	171
Tabla 31.....	172
Tabla 32.....	174
Tabla 33.....	177
Tabla 34.....	179
Tabla 35.....	189
Tabla 36.....	194

Índice de organigramas

Organigrama. 1 Situación 1, cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno.....	101
Organigrama. 2. Situación 2 Pepa y la ordinalidad.....	102
Organigrama. 3. Situación 3, la tienda y la agrupación.	103

Resumen

En este trabajo se identifican y caracterizan algunos aspectos conceptuales y procedimentales relacionados con el Sistema de Numeración Decimal en estudiantes de Transición a través de una propuesta de aula que involucra los conceptos de orden, cardinal y agrupación. Para ello, este trabajo se fundamenta en el marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (Fillooy, 1999), lo cual hizo necesario constituir un Modelo Teórico Local relacionado con la enseñanza y el aprendizaje del Concepto de Número Natural y el Sistema de Numeración Decimal que sirvió como marco teórico para el diseño de la experimentación.

El desarrollo de la experimentación se realizó con un grupo de estudiantes de Transición por medio de la implementación de una propuesta de aula dentro de un sistema de enseñanza controlada, la cual clasifica la población atendiendo a los desempeños de los estudiantes. Esta clasificación permite escoger dos estudiantes de Transición para realizar con ellos el estudio de casos.

Los resultados obtenidos muestran que los estudiantes de Transición avanzan en la comprensión del Sistema de Numeración Decimal. En el desarrollo de las tareas, la comprensión del cardinal 10, la composición y descomposición de cantidades, el uso de cantidades superiores a 10, el conteo, el establecimiento de relaciones de orden, entre otros, potencian la realización de agrupamientos de 10. Además, los estudiantes avanzan en sus procesos de representación simbólica y en los procesos de adquisición de la secuencia numérica convencional, en la comprensión del valor posicional, el conteo y los cambios.

Palabras clave: Sistema de Numeración Decimal, Número Natural, Modelo Teórico Local, Cardinal, Orden, Agrupación, Transición,

Introducción

Desde 1991 con la Constitución Política de Colombia se establece que la educación sería obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprendería como mínimo, un año de preescolar, desde ese momento el gobierno colombiano ha realizado aportes legales y curriculares para contribuir a la enseñanza de los estudiantes en los primeros años, hasta constituirse hoy por hoy, como Educación Inicial. Por lo cual se considera necesario realizar investigación en Educación Matemática en este primer año de la escolaridad.

Teniendo en cuenta el contexto colombiano, surge en interés dentro del marco de la Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática, por investigar sobre la manera como se enseña el Sistema de Numeración Decimal (SND) en los primeros grados de la escolaridad. Al documentar la problemática se pudo constatar que existen múltiples dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del SND, entre ellos la importancia que se le atribuye a la grafía de los símbolos numéricos por encima de la comprensión del número en sus diferentes formas, las actividades repetitivas y la prioridad al aprendizaje de las reglas sintácticas de los números por encima de la comprensión del mismo dentro el SND.

Partiendo de la problemática, este trabajo de investigación es un estudio que se realiza con estudiantes de Transición de la I.E.D. Ciudad de Bogotá, en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje del SND, en cual se estructura en el marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales –MTL- (Fillooy, 1999). El contenido del trabajo se organiza por capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo I se aborda la problemática sobre el SND en Transición, a partir de la documentación de algunas dificultades alrededor de la enseñanza y aprendizaje de este concepto en los primeros años de la escolaridad. Se presenta además, la justificación, los objetivos, los antecedentes de la investigación y la metodología adoptada para el desarrollo de este trabajo.

En el capítulo II se presenta el marco teórico y metodológico de los MTL que se organiza alrededor de cuatro componentes interrelacionados: cognitivo, comunicativo, enseñanza y formal. El modelo para procesos cognitivos y el modelo de comunicación, presenta los principios de conteo y las actuaciones de los niños, el aprendizaje del Concepto de Número Natural (CNN), el

SND, las operaciones y las representaciones simbólicas, verbales, los materiales manipulativos y los estratos de los Sistemas Matemáticos de Signos (SMS). Por otra parte, el modelo de competencia formal centra la atención en dos aspectos uno histórico y otro matemático formal; y en el modelo de enseñanza se exponen elementos de orden legal y curricular desde la Educación Matemática, también se presenta la propuesta de enseñanza del CNN y el SND desde la revisión de la literatura, desde los textos escolares y desde la resolución de problemas, por último se presenta la propuesta curricular de la Institución en la que se implementa el trabajo de investigación. La fundamentación de cada componente consolida el MTL y aporta al diseño de la experimentación

En el capítulo III se expone el diseño de la experimentación en el cual se encuentran el desarrollo de la experimentación para dar a conocer las actuaciones de los estudiantes en la propuesta de aula y en el estudio de casos (entrevista). La propuesta de aula consta de tres situaciones que abordan los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación, las cuales involucran juegos y materiales manipulativos. En este capítulo, se presentan los resultados y análisis de resultados de la implementación de la propuesta de aula en Transición, los cuales permiten realizar la clasificación de las actuaciones de los estudiantes al resolver las tareas, y a partir de ello escoger con quienes se realiza el estudio de casos. Más adelante, se incluye la planeación y elaboración de la entrevista para realizar el estudio de casos; dicha entrevista se realiza con base a la propuesta de aula y solo se realiza a dos estudiantes. Al finalizar el capítulo, se incluye el análisis y la interpretación de la entrevista realizada a los estudiantes.

En el capítulo IV, se presenta las conclusiones generales, las reflexiones teóricas y etodológicas, además de una reflexión acerca de futuros estudios en este campo. Por último se presenta la bibliografía, en donde se encuentran los referentes teóricos que se tomaron en cuenta para la elaboración de este trabajo y los anexos.

CAPÍTULO 1:

Aspectos Generales de la Investigación

En este capítulo se presenta el planteamiento del problema del trabajo, teniendo en cuenta algunas investigaciones que se han realizado en torno a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de escolaridad, en las cuales se reconocen algunas dificultades que afectan el aprendizaje del CNN y el SND. La identificación de tales dificultades junto con la experiencia pedagógica de la autora permite consolidar el problema de investigación

A partir de la consolidación de la problemática se expone la justificación de la misma y los objetivos del trabajo. Luego, se presentan los antecedentes, en los cuales se exponen investigaciones sobre el concepto de número natural, el SND, considerando algunos referentes teóricos, los cuales convergen en la importancia de involucrar los conceptos de cardinal, orden y agrupación en la construcción de elementos fundamentales del SND en los primeros grados de la escolaridad. Por último se presenta la metodología utilizada en el trabajo.

1.1 Presentación del problema

Respecto a la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración decimal (SND) en los primeros años de la escolaridad, diversas investigaciones a nivel nacional (Cerón y Gutierrez, 2013; y Vásquez, 2010) e internacional (Castro, Rico y Castro, 1988; Fuson, 1990; Lerner y Sadovsky, 1994; y Castaño, 1997) muestran que existen algunas dificultades relacionadas con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de este saber matemático, entre ellas, la enseñanza del SND desvinculada de los conocimientos previos del estudiante, la práctica de enseñanza que privilegia la escritura de los símbolos numéricos por encima de la comprensión de los diferentes significados del número (cardinal, ordinal, medida, entre otros), las actividades que se reducen al uso de las reglas sintácticas para escribir números de dos o más dígitos, la enseñanza que deja de lado el aprendizaje del CNN para dar lugar a la enseñanza del algoritmo de las operaciones básicas, y el hecho de que la numeración hablada no refleja de manera transparente la numeración escrita. Estas dificultades dejan ver que existe una problemática relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje del SND en la escuela.

En relación a la dificultad sobre la práctica educativa en la que pocas veces se tienen en cuenta las experiencias de los estudiantes en la enseñanza del SND, Castro et al. (1988) y Lerner y Sadovsky (1994) proponen que las actividades realizadas en el medio escolar deben integrar la gran riqueza de experiencias numéricas que poseen los estudiantes, procedentes del entorno, la cultura y la vida social. Las experiencias numéricas le permite a algunos estudiantes reconocer símbolos numéricos presentes en las camisetas de los jugadores de fútbol, en los números de los apartamentos de un edificio, en el dinero, en la calculadora o en el teclado; incluso posibilita el uso de la denominación verbal del número para jugar (por ejemplo, escondite), para decir la edad, el número de teléfono, la dirección, la fecha del cumpleaños, entre otros.

De modo que, al ingresar a la escuela el estudiante tiene experiencias numéricas valiosas que pueden ser integradas al medio escolar, para contribuir a la comprensión de los significados que adquiere el concepto de número natural (CNN) de acuerdo al contexto - secuencia verbal, conteo, cardinal, medida, ordinal y código- en el cual se usa (Castro et al., 1988). Y no solo esto, los estudiantes tienen la oportunidad de elaborar conocimiento respecto al SND, sus conocimientos previos les permiten elaborar hipótesis sobre la cantidad que

representan los números (“cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número” y “el primero es el que manda”), con lo cual pueden establecer relaciones de orden (Lerner y Sadosky, 1994) e incluso relaciones de equivalencia (por ejemplo, dos monedas de quinientos tienen el mismo valor que un billete de mil).

Ahora bien, respecto a la dificultad relacionada con la práctica de enseñanza que privilegia la escritura de la notación simbólica de los dígitos sobre lo conceptual, algunos autores como Balbuena, Block, Fuenlabrada, Ortega y Valencia (1991) afirman que en los libros de texto los ejercicios dan prioridad a la notación simbólica por medio de actividades repetitivas y mecánicas como las planas. Esta práctica mejora la escritura de los símbolos numéricos, lo cual es parte importante del SND; sin embargo, al realizar las planas la atención está puesta en la escritura del símbolo y no en la comprensión del número. De manera que, el hecho de privilegiar esta práctica sobre otras en las que se trabajen la cardinalidad, la ordinalidad, la medida, la agrupación, entre otras; repercute en la comprensión del CNN y del SND.

Según, Cerón y Gutiérrez (2013) el proceso de aprendizaje de la escritura de los símbolos numéricos de los estudiantes de Transición es complejo y requiere de periodos largos tiempo para irse construyendo. Al privilegiar la realización de actividades mecánicas y repetitivas para mejorar la escritura de la notación simbólica, se le niega la posibilidad al estudiante de realizar procedimientos y representaciones que van surgiendo en la medida en que se construye algunos elementos fundamentales del CNN y del SND. Es preciso que en la práctica de aula se realicen actividades en las que se trabajen los diferentes significados del número y que los estudiantes puedan explorar diferentes maneras de representarlo (segmentos verticales, puntos, notaciones en espejo, notaciones convencionales, no convencionales, entre otros). Así, a la representación simbólica se le otorga un sentido y significado propio.

Por otro lado, la enseñanza de los números en ocasiones se reduce a la realización actividades mecánicas y repetitivas en las cuales los estudiantes deben usar las reglas sintácticas para escribir los números de dos dígitos o más. Entre esas actividades se encuentra continuar la serie numérica convencional; por ejemplo, se le enseña a los estudiantes que los números posteriores a 20 deben ir precedidos de 2 y seguir después la serie numérica elemental: 21, 22, 23, 24, 25... (Chamorro, 2005); también se les propone a los estudiantes actividades en las cuales deben escribir la notación simbólica que representa una cantidad o

se realizan dictados en los que deben escribir la notación simbólica que represente la palabra número. Las actividades propuestas no deben reducirse a la sintaxis de la escritura de los números, sino que deben potenciar otras características y reglas del sistema (valor posicional, base 10, entre otros).

Puede darse el caso, por ejemplo, de que el estudiante escriba correctamente la notación simbólica siguiendo las reglas sintácticas y no reconozca el valor posicional. Así lo presenta Kamii (1985) en una entrevista en la que se le pide a un estudiante que dibuje diecisiete rayas y luego que escriba el número que representa esa cantidad, en este caso el estudiante escribe correctamente el 17, pero no reconoce la cantidad de rayas que representa el número 1 (en el 17). En este sentido, Castaño (1997) da a conocer que comprender el SND implica no solo conocer la sintaxis; es un proceso más global que está ligado a la ampliación del concepto de número, a las relaciones de orden, a la base 10, al valor posicional y a los pensamientos aditivo y multiplicativo.

Además, se presenta una dificultad relacionada con la enseñanza en la que se deja de lado aspectos relevantes del concepto del número natural (la cardinalidad, la ordinalidad, el conteo, la composición de cantidades, entre otros) y se aborda de manera directa la realización de los algoritmos de las operaciones (Vasquez, 2010). Es decir, falta comprensión sobre el hecho de que en la medida que se construye el CNN se amplía el campo del significado del número, se establecen relaciones de orden, se realiza composición y descomposición numérica (Por ejemplo, $3=1+1+1$, $2+1=3$), con lo cual se va construyendo el significado del algoritmo de las operaciones.

En ocasiones, debido a que no se construye el CNN la enseñanza de los algoritmos de las operaciones no tiene significado propio y su ejecución se vuelve mecánica y memorística. Así lo menciona Balbuena et al. (1991), en la enseñanza de los algoritmos de las operaciones básicas los alumnos deben ejecutar una serie de instrucciones que le da el maestro, de modo que los estudiantes aprenden a seguir los pasos y obtienen resultados, pero no comprenden su significado. Incluso, al enseñar el algoritmo muchas veces se usan frases como “llevar” o “prestar”, las cuales conllevan a una conceptualización errónea frente a este proceso; en realidad, no se “presta” o “lleva” una unidad, sino que se opera con unidades de diferente orden (Fuson, 1990). También se usan frases “me llevo” y “le pido al compañero” que son inherentes a la actividad propia de la operación, estas frases asociadas a los

procedimientos mecánicos obstaculizan la comprensión de las operaciones (Lerner y Sadovsky, 1994). La enseñanza memorística de algoritmos no sólo es innecesaria sino también perjudicial, cuando los estudiantes han construido el CNN y el SND se les facilita el proceso constructivo del algoritmo de las operaciones (Kamii, 1995)

Finalmente, desde una perspectiva epistemológica se encuentra la falta de relación entre la numeración hablada (palabras número) y la numeración escrita, es decir en ocasiones las palabras número no reflejan de manera transparente los símbolos numéricos implicados en la escritura del número (Fuson, 1990); por ejemplo, las palabras “treinta y uno”, “treinta y dos” designan unidades fáciles de distinguir al realizar la notación simbólica correspondiente (31, 32), pero “once” o “doce” son palabras número que no reflejan de manera directa los dígitos involucrados en la numeración escrita (11, 12) . A esto se le suma, que la numeración escrita es posicional, pero la numeración hablada no lo es. Es decir, si la organización de la numeración hablada fuera posicional, las palabras número correspondiente a 201, por ejemplo, sería “dos, cero, uno”; pero, la numeración hablada además de las cifras dos y uno, usa las potencias de diez correspondientes a esas cifras “doscientos uno” (Lerner y Sadovsky 1994).

Teniendo en cuenta lo anterior en este trabajo se dar respuesta a la siguiente pregunta

¿Qué aspectos conceptuales y procedimentales relacionados con el SND se pueden identificar y caracterizar en estudiantes de Transición a través de una propuesta de aula con situaciones problema sobre los conceptos de orden, cardinal y agrupación?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Caracterizar algunos aspectos conceptuales y procedimentales relacionados con el SND que se puedan identificar en estudiantes de Transición a través de una propuesta de aula con situaciones problema sobre los conceptos de orden, cardinal y agrupación.

1.2.2 Objetivos específicos

- Determinar un MTL sobre el CNN y el SND como marco de referencia para el diseño y experimentación de situaciones problema sobre los conceptos de orden, cardinal y agrupación.
- Determinar una propuesta de aula para su implementación en un sistema de enseñanza controlada, atendiendo al MTL sobre el CNN y el SND.
- Identificar y caracterizar, según el análisis de las actuaciones de los estudiantes, algunos aspectos conceptuales (cardinalidad, ordinalidad, etc.) y procedimentales (técnicas de conteo, agrupamientos, etc.) del CNN y el SND en estudiantes de Transición al desarrollar la propuesta de aula.
- Reconocer algunas implicaciones de orden teórico y metodológico, según el análisis de la problemática sobre la construcción de elementos fundamentales del SND en el grado de Transición que aporten a maestros en formación y en ejercicio interesados en este problema.

1.3 Justificación

Este trabajo de investigación reconoce el grado Transición como un grado fundamental en la educación de todos los estudiantes colombianos, una de las razones tiene que ver con el hecho de que en él se inicia la construcción y desarrollo de los cuatro pilares del conocimiento: *Aprender a ser, Aprender a hacer, Aprender a vivir juntos y Aprender a conocer* (MEN, 1998b).

Por una parte, este trabajo es importante en tanto realiza una investigación en el grado Transición en torno a la enseñanza y aprendizaje del SND; grado en el cual -

posiblemente debido a su aparición tardía en Colombia- se ha realizado escasa investigación frente al tema en el país¹.

Mientras que en Alemania en 1840 se establece el primer Kindergarten, constituyéndose en un hito de la educación infantil en el mundo occidental, en Colombia solo hasta 1976 con el decreto 088 se incorpora a la educación preescolar por primera vez al sistema formal; más aún, solo en 1991 con la Constitución Política de Colombia se establece que la educación sería obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprendería, como mínimo, un año de preescolar. En 1994, el Decreto 1860 fundamenta la educación formal en los aspectos pedagógicos y organizativos generales; reglamentación en la cual se establece el nivel preescolar como obligatorio dentro del sistema educativo. En este contexto, el Ministerio de Educación Nacional empieza a elaborar los Lineamientos para cada asignatura y para el nivel de Preescolar, en donde se explicitan estrategias, métodos y demás elementos con miras a contribuir al mejor desarrollo cognitivo y formación integral de estos estudiantes.

En cumplimiento con las disposiciones legales, el marco curricular aparece como punto de apoyo y orientación en la educación formal; siete años después de la promulgación de la obligatoriedad del grado preescolar, el currículo se complementa con una serie de disposiciones mediante las cuales el Ministerio de Educación Nacional formula los lineamientos curriculares entre ellos los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998b), y luego el *Documento No 13: Elementos conceptuales aprender y jugar. Instrumento diagnóstico de competencia* (MEN, 2009b) en el cual se exponen algunos elementos conceptuales sobre la competencia matemática en el Preescolar.

Como se expuso en los párrafos anteriores, el interés por integrar en el currículo el desarrollo pensamiento matemático en el preescolar en el país es relativamente joven -7 años- este trabajo, es importante porque se realiza con el ánimo de contribuir a la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de algunos aspectos fundamentales del SND en estudiantes de Transición en el país.

¹ Entre los trabajos de investigación realizados en el campo de la enseñanza y el aprendizaje del CNN se encuentra el trabajo de pregrado titulado *La Comunicación en el Aula de Primero de Primaria Sobre los Números Naturales* (Benito y Sánchez, 2011) y el trabajo de pregrado titulado *Algunas Concepciones Sobre el Número Natural que Privilegian Docentes de Preescolar y Primero de Primaria* (Collazos y Girón, 2014)

Por otro lado, este trabajo es importante en tanto muestra que en el primer grado de escolaridad (Transición) se puede desarrollar pensamiento matemático. De manera particular, investigaciones como la de Chamorro (2005) evidencian en parte, que la mayoría de los padres y docentes creen que en el preescolar no se puede hacer un trabajo matemático de calidad, y de otra, que aún se nota la resistencia hacia la formación matemática en este grado. En este trabajo se reconoce al estudiante como un sujeto que piensa, que aprende y construye conceptos matemáticos involucrados con el SND como el concepto de cardinalidad, ordinalidad y la noción de agrupación.

Además, la elaboración de este trabajo es importante puesto que hay un antecedente en el trabajo de pregrado de Cerón y Gutierrez (2013) en el cual se aborda el CNN en preescolar a partir de una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos. Este trabajo se fundamenta en aspectos curriculares, didácticos y matemáticos, los cuales se articulan en la elaboración de la secuencia didáctica y posibilitan el análisis de los resultados. La secuencia didáctica está conformada por cuatro situaciones que parten del conteo hasta la composición y descomposición de cantidades. La implementación y análisis de los resultados de la propuesta muestran que el aprendizaje de los números naturales debe involucrar tareas relacionadas con el conteo, la comparación, composición y descomposición de cantidades, en tanto se potencian aspectos de tipo conceptual y procedimental relacionados con este concepto, donde emergen operaciones básicas aritméticas que hacen parte del CNN. Así mismo, se muestra que los estudiantes de preescolar usan y fortalecen conceptos elementales de las matemáticas escolares como el principio de correspondencia uno a uno, el principio de cardinalidad y el principio de orden estable; también emplean estrategias de conteo tales como, agregación sucesiva, reunión y conteo, a la vez que amplían los dominios de secuencia numérica verbal. Con este trabajo de investigación se muestra que a los estudiantes desde temprana edad se les facilita hacer agrupaciones de 10 lo cual aporta a la construcción del concepto de base propia del SND, si se tienen en cuenta las experiencias previas y se potencian contextos significativos para su uso. Esto último, sugiere que se puede ir más allá de la enseñanza del CNN en Transición, se podría hacer investigación sobre la aproximación al SND en transición.

Finalmente, este trabajo de investigación que se realiza en el marco de la Maestría en Educación es importante en tanto aporta a la reflexión sobre el desarrollo de pensamiento

matemático en el primer año de la escolaridad y sobre las tareas que se proponen en el Preescolar, en las cuales, el docente tiene un rol fundamental al momento de proponer retos al estudiante y crear ambientes de enseñanza y aprendizaje que aporten a la construcción de aspectos relevantes del SND.

1.4 Antecedentes

Como antecedentes en el marco de la problemática, se presentan algunos trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje del CNN, del SND y del conteo desde la perspectiva psicológica. Estas investigaciones dan a conocer que hay un interés por comprender el desarrollo de pensamiento matemático en los primeros años de la escolaridad

1.4.1 Algunas investigaciones sobre el CNN. En este apartado se presentan algunas investigaciones sobre los contextos en los que se inscribe el CNN y sobre la consolidación del concepto de número a partir de los conceptos de cardinalidad y ordinalidad, aspectos que se consideran claves en la construcción de pensamiento matemático en los primeros grados de la escolaridad.

1.4.1.1 Sobre los contextos en los que se inscribe el CNN. Entre los autores que se han interesado por reconocer los contextos en los que se inscribe el concepto número natural se encuentran Castro, et al. (1988), Fuson, (1988), García y Pérez (2012), y Puig (1997) y sus posturas frente al tema se explican en este apartado.

Según, Castro et al. (1988) el estudiante usa el número en diferentes contextos: secuencia verbal, conteo, cardinal, ordinal, medida, código y como tecla (calculadora, teclado). En las situaciones o problemas cotidianos, los números adquieren distintos significados en función de los contextos particulares en los que se estén empleando

Por su parte, Fuson (1988) considera que los números son usados en diferentes contextos y su significado depende de referentes internos (estudiante) y el contexto en el que se use. Los tres primeros usos del número son: la cardinalidad, la ordinalidad y la medida. Los dos usos siguientes requieren de la pronunciación de la lista de las palabras número, estos son: secuencia y conteo. Otro uso hace referencia a la lectura de símbolos, y el último es para etiquetar situaciones no numéricas (ej. el número de teléfono, los números en las camisetas de los futbolistas). Comprender estos contextos le permite al estudiante desempeñarse mejor en tareas de adición, sustracción y comparación.

De otro lado, García y Pérez (2012) realizan una tesis de pregrado titulada *Secuencia didáctica: los contextos numéricos como forma de fortalecer el concepto de número en grado transición*, en la cual los estudiantes inician su proceso de aprendizaje del CNN cuando se les brindan tareas que le permitan movilizar y comprender los diferentes significados del número.

Por último, Puig (1997) distingue diversos contextos del número, entre ellos: secuencia, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, guarismo escrito, cálculo entre otros. Aunque el autor no describe de manera explícita cada uno de ellos, es consciente que su significado está determinado por el contexto en el que se utilice y la unión de todos ellos; contextos y significados, conforman el campo semántico del número.

Para estos autores comprender el CNN requiere que desde los primeros grados de la escolaridad se diseñen tareas que le permitan al estudiante reconocer los diferentes significados del número atendiendo a contextos particulares en los que se utilicen.

1.4.1.2 Sobre la consolidación del concepto de número desde la cardinalidad y ordinalidad. Los conceptos de cardinalidad y ordinalidad han sido objeto de investigación de diversos autores (Castro et al., 1988; Collado, 2014, Chamorro 2005; y Cerón y Gutiérrez, 2013, Fernández, 2010, Maravilla, 2011) quienes los consideran muy importantes en la construcción del concepto de número.

Debido a que las nociones asociadas al concepto de número no tienen sus primeros inicios en la escuela, sino en la experiencia numérica del estudiante, es necesario que las tareas que se propician en el aula contribuyan al aprendizaje y le ayuden al estudiante a organizar su conocimiento. En este sentido Castro et al. (1988) presentan una visión de los problemas conexos con la enseñanza/aprendizaje de la aritmética; además intentan llenar un vacío que existe en castellano sobre las investigaciones y publicaciones en Educación Matemática.

Así que, Castro et al. (1988) tienen en cuenta los contextos particulares en los que se usan los números (secuencia verbal, contar, cardinal, medida, ordinal, código y tecla) y los aportes del número a la formación integral del individuo. Castro et al. (1988), también presentan las primeras experiencias numéricas de los estudiantes, las cuales están relacionadas con la sucesión de términos numéricos, los niveles de dominio de secuencia numérica y los principios de conteo. Para los autores es importante dar a conocer materiales y tareas para

clasificar, seriar, para realizar patrones, para comprender el número como cardinal, como ordinal y para aprender símbolos. En su trabajo también destacan el papel del cero, de la resolución de problemas y de las operaciones al momento de desarrollar pensamiento matemático. De las operaciones se presentan los modelos, estrategias y tareas para llegar al resultado.

De manera que, Castro et al. (1988) consideran el conteo, la clasificación, la seriación, los patrones y la simbolización como tareas claves para consolidar los conceptos de cardinalidad y ordinalidad en la construcción del CNN. Los autores resaltan el hecho de que aprender y comprender estos conceptos es un proceso complejo en el que intervienen diferentes percepciones, modos de actuar y experiencias anteriores, por eso no se puede establecer una determinada edad para su adquisición.

Por otro lado, Maravilla (2011) realiza una propuesta de enseñanza sobre la construcción de los números naturales teniendo en cuenta las nociones de cardinalidad y ordinalidad con alumnos de preescolar a partir del modelo de John von Neumann. En los resultados se obtiene que las tareas realizadas en el programa computacional Clic 3.0 y otras tareas que involucran material concreto permitieron la construcción del concepto de ordinalidad y cardinalidad.

Siguiendo con el planteamiento anterior, el autor realiza su trabajo basado en los MTL el cual está fundamentado en cuatro componentes a saber: El modelo de enseñanza, que permite determinar la manera en que la docencia desarrolla el concepto de número en el nivel preescolar a través de sus conocimientos y guiándose por lo que dicta el programa oficial; el modelo de competencia formal que permite revisar el CNN desde el modelo de John von Neumann; el modelo de comunicación que permite observar el SMS que se utiliza en la enseñanza del concepto en cuestión y para hacer uso de un SMS adecuado para acceder a otro nivel de SMS en la propuesta de modelo de competencia formal; y por último el modelo para procesos cognitivos que permite observar las deducciones que hacen los alumnos con el modelo tradicional de enseñanza y los razonamientos a los que llegan los alumnos con la propuesta de modelo de competencia formal.

Además, Maravilla (2011) muestra cómo los alumnos aprenden primero los ordinales y luego los cardinales, en contraposición a la enseñanza tradicional que insiste en enseñar la cardinalidad primero que la ordinalidad. Este hallazgo permite guiar las tareas que

buscan consolidar el concepto de número en las que se debe propiciar una construcción natural; es decir, sin romper o forzar el aprendizaje de conceptos a partir de tareas carentes de sentido para el estudiante. En esta investigación también se tiene como resultado que el uso de los términos que los alumnos ya conocen y escuchan constantemente en casa permite identificar rápidamente los objetos mentales a los que hacen referencia,

Por otra parte, con relación al aprendizaje de la cardinalidad y ordinalidad, Fernández (2010) da a conocer que existen diferentes interpretaciones sobre la secuencia numérica y las relaciones lógicas ordinales en el origen del número natural, de modo que hay teorías que exponen que primero se deben aprender el orden y luego la cardinalidad, mientras que otras dicen lo contrario; la concepción que se tenga sobre ello influye en la enseñanza del concepto de número. Para la autora siempre es posible encontrar un contexto ordinal adecuado para explorar la secuencia numérica, por tanto es necesario encontrar situaciones en las que se permita observar el empleo ordinal de la acción de contar de los estudiantes, para exponer que paralelamente a la construcción cardinal hay una construcción ordinal del número natural. Se trata de hacer un uso ordinal de la secuencia. En definitiva, en esta investigación es necesario propiciar tareas que desarrollen las competencias básicas en función de las relaciones lógico-ordinales que se dan entre los términos numéricos, por ejemplo: Determinar todos los posteriores de **a** hasta llegar a **b** (primer y último elemento).

Según, Collado (2014) considera que el número natural posee principalmente dos significados: cardinal cuando responde a la necesidad de saber cuántos hay y ordinal cuando manifiesta qué lugar ocupa un elemento dentro de una colección ordenada. El autor realiza un análisis sobre la manera en que se trabaja la cardinalidad y ordinalidad en los libros de textos. En esta investigación se da a conocer que aunque se pretenden trabajar de una manera funcional la cardinalidad y ordinalidad, estos conceptos están ausentes en las propuestas de las editoriales de los libros de texto.

Por otro lado, Chamorro (2005) toma en cuenta la Didáctica de las matemáticas, de manera específica las propuestas didácticas realistas. La autora considera que las tareas propuestas deben estar en correspondencia con las capacidades del estudiante. En su trabajo, Chamorro (2005) expone diferentes acciones didácticas que se han practicado en estudiantes para desarrollar pensamiento matemático para trabajar la matemática en Preescolar.

La autora tiene en cuenta el desarrollo del pensamiento simbólico del estudiante, ante los cual expone consideraciones de tipo metodológico y psicopedagógico que se integran en una propuesta de desarrollo del ejercicio de la simbolización en la escuela infantil. En este libro se retoma la construcción del número natural desde la perspectiva histórica, el papel del conteo en la construcción de número, la estructuración de la cadena numérica verbal, la subitización, los contextos del número, el número en su concepción ordinal y el número en su concepción cardinal. De estos dos últimos aspectos, se presentan consideraciones didácticas y procedimientos que pueden emplear los estudiantes además de situaciones didácticas que se pueden implementar para abordar estas temáticas.

Por último, el trabajo de pregrado de Cerón y Gutiérrez (2013) aporta elementos conceptuales y procedimentales sobre la construcción del CNN en preescolar, mediante una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos. En la elaboración de este trabajo se tienen en cuenta aspectos curriculares, didácticos y matemáticos, los cuales, se articulan en la elaboración de la secuencia didáctica y posibilitan el análisis de los resultados. Con el trabajo se muestran que el estudiante de preescolar se apropia de diferentes conceptos relacionados con el concepto de número como la cardinalidad, la ordinalidad, la cuantificación y principios de conteo, la comunicación de cantidades, la resolución de problemas aditivos, y el dominio de secuencia numérica verbal.

Los trabajos anteriores aunque proponen diferentes puntos de vista sobre el desarrollo y consolidación del concepto de número, todos ellos reconocen la importancia de la cardinalidad y ordinalidad dentro del proceso de construcción del objeto matemático, por tanto, se deberían tener en cuenta al momento de realizar tareas que pretendan desarrollar conocimiento matemático.

1.4.2 Algunas investigaciones sobre el SND. En este apartado se dan a conocer algunas investigaciones sobre el SND y la enseñanza y aprendizaje de las operaciones aditivas, precisamente porque para poder comprender los principios que soportan el sistema es necesario desarrollar al menos en un nivel elemental el pensamiento aditivo y multiplicativo (Castaño, 1997).

1.4.2.1 Sobre el SND. Como antecedentes sobre la enseñanza y el aprendizaje del SND, se van a citar brevemente los estudios realizados por Castaño (1997), Fuson (1990), Kamii (1995), Lerner y Sadovsky (1994), Saxton y Cakir (2006), y Terigi y Wolman (2007), quienes aportan aspectos relevantes que se deben tener en cuenta a la hora de enseñar el SND en la escuela.

Por un lado, Castaño (1997) investiga sobre la comprensión del SND en los estudiantes. El hecho de que el estudiante pueda ubicar los números de manera adecuada en las casillas de Unidades, Decenas y Centenas, no significa que comprenda las características del sistema; por ello, en diferentes ocasiones los estudiantes fracasan al enfrentarse con problemas que requieren manejar el SND. Según este autor, para enseñar el sistema es necesario apoyarse en dos principios: el decimal y el posicional; sin embargo, entenderlo requiere que el estudiante también comprenda operaciones aditivas y multiplicativas. Adicional a esto, resulta necesario que el estudiante pueda establecer en un nivel elemental las relaciones entre los números: mayor que, menor que, etc.

Por otro lado, Fuson (1990) parte del reconocimiento de una serie de problemas que se presentan en la comprensión del sistema base 10, uno de ellos es la dificultad de asociar a una palabra número la representación simbólica correspondiente, y otro es asociado al sistema de representación simbólica que posee valores implícitos indicados solamente por la posición relativa de los dígitos. Para tratar estos problemas la autora propone que las tareas deben permitir que el estudiante comprenda el vínculo entre las palabras número y los signos escritos. De manera particular, realizar tareas con bloques base 10 y cartas con números, permiten que el estudiante sea más consciente de este vínculo y sea capaz de representar los números en diferentes contextos de manera simbólica, escrita y hablada.

A su vez, Kamii (1995) se interesa por la reinención aritmética de los estudiantes de los primeros años, y se preocupa por la enseñanza tradicional del sistema base diez, que en vez de permitirle al estudiante construir conocimiento lógico-matemático presenta la aritmética como si fuera un conocimiento social y físico. En su libro *Reinventando la aritmética II* (Kamii, 1995) propone el SND como una construcción que realiza el estudiante a partir de unidades de orden inferior y poco a poco coordina relaciones de orden e inclusión jerárquica para construir unidades de orden superior, por ejemplo: dos centenas, dos decenas y cinco unidades, pueden ser vistas como veintidós decenas y cinco unidades o como doscientos

veinticinco unidades, lo mismo sucede con las demás unidades de orden superior. La autora da a entender un hecho que es frecuentemente olvidado en las clases, las estructuras de orden inferior no terminan cuando una de orden superior aparece, sino que se integran unas con otras para crear un sistema base diez.

De otro lado, Lerner y Sadovsky (1994) son conscientes de que los estudiantes pueden hacer su propia conceptualización sobre la escritura de los números partiendo de la experiencia de donde extraen información sobre la numeración hablada y la escritura simbólica convencional. Teniendo en cuenta que la numeración hablada es esencialmente aditiva y multiplicativa, mientras que la numeración escrita atiende a reglas específicas como el valor posicional de las cifras, la base diez, el carácter aditivo y multiplicativo y la descomposición polinómica. En sus investigaciones las autoras dan a conocer que el estudiante es capaz de realizar hipótesis sobre el código escrito como “el primero es el que manda” y el número más grande es el que tiene más cifras; estas hipótesis deben ser aprovechadas en la escuela para acercar al estudiante a la conceptualización del SND.

Además, Saxton y Cakir (2006) realizan su investigación acerca del sistema base 10, para estos autores la habilidad de los estudiantes al representar los números depende de su comprensión de las colecciones de diferente orden (unidades, decenas, etc.) además, de su conocimiento sobre el conteo, los cambios de unidades de diferentes orden y las particiones, todas ellas proporcionan un puente que permite un acceso a la complejidad del sistema base 10.

Por último, Terigi y Wolman (2007) opinan que en la enseñanza de las matemáticas el SND es un elemento clave en los primeros años, uno de los aspectos por los que se considera importante es porque se considera un instrumento de mediación hacia otros aprendizajes por ejemplo, el álgebra. Los autores, toman el SND desde dos perspectivas, como objeto matemático (representa cantidades) y como instrumento cultural (prácticas sociales, intercambios que tienen lugar en ella).

Teniendo en cuenta las investigaciones anteriores, se puede decir que el aprendizaje del SND desde sus características decimal y posicional es complejo. El estudiante debe consolidar elementos de la estructura aditiva y multiplicativa, establecer relaciones de orden, tener en cuenta que las unidades de orden inferior componen unidades de orden superior,

saber representar las cantidades de manera simbólica, tener en cuenta el valor posicional de las cifras, entre otros.

1.4.2.2 Sobre la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas. En este apartado se mencionan algunos autores cuyas investigaciones han contribuido a la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas como parte del desarrollo del pensamiento numérico en los primeros grados de la escolaridad, entre ellos Castaño (1995), Fuson (1990), Fuson y Briars (1990), Lerner y Sadovsky (1994), y Vergnaud (1991).

Para empezar, Vergnaud (1991) reconoce que el concepto de número admite diferentes representaciones atendiendo a la base y que el sistema base 10 es uno de ellos. Para el autor las operaciones se pueden realizar en diferentes planos: el plano de los objetos, el plano de los conjuntos de objetos, el plano de los cardinales de conjuntos y el plano de las representaciones escritas. En el plano de los cardinales se realiza la suma, en el plano de los conjuntos se realiza la unión, y entre las representaciones escritas se realiza la regla de la adición; sin embargo, en la práctica, las operaciones tienen un problema principal que reside en la relación entre el número escrito y la cantidad que representa, adicional a esto se involucran los niveles de dificultad de las operaciones: sin llevar, llevar en una columna aislada, llevar en dos columnas sucesivas, llevar con cero o prestando en caso de la resta. Para superar las dificultades de aprendizaje del SND el autor propone material multibase que podría ser de gran ayuda al representar las colecciones.

Así mismo, Fuson (1990) parte de que las operaciones de la estructura aditiva son enseñadas mecánicamente y en ella se opera con dígitos de manera individual, lo que provoca errores en los resultados de las operaciones, por ejemplo: escribir dos dígitos en una columna al sumar, llevar o quitar cantidades en columnas equivocadas, olvidar agregar o quitar la cantidad en la columna, entre otros. Muchas veces se subestima la capacidad del estudiante y por eso la enseñanza de la adición y sustracción es tardía en comparación con otros países como China, Japón y Taiwan (Fuson y Briars, 1990). Para contrarrestar estos problema la autora propone realizar tareas con operaciones de 4 dígitos en adelante que involucren bloques base 10 como material manipulativo para representar los números involucrados en las operaciones, y cartas con símbolos para representar la cantidad expresada con el material, de esta manera el estudiante comprende el vínculo entre palabra número y símbolo. La tarea y el material permite además, que el estudiante se dé cuenta que al operar existen cambios en

unidades de diferente orden (que no es igual a “llevar uno” o “prestar uno”), que se pueden realizar operaciones de adición y sustracción con números de 4 dígitos o más, que se puede reconocer el valor de la posición e incluso se posibilita la autocorrección. Al finalizar la investigación el rendimiento de los estudiantes de primero y segundo fue alto en comparación con los estudiantes de tercero.

Debido a que en la escuela se le enseña a los estudiantes a aplicar un procedimiento para resolver problemas aditivos, Castaño (1995) expone que con frecuencia los estudiantes olvidan estos procedimientos mecánicos y esto les dificulta el aprendizaje de conocimientos posteriores. Es necesario que el maestro sea consciente de que la comprensión de problemas aditivos implica demandas lógicas, entre ellas: las posibilidades lógicas del pensamiento de quien trata de resolverlo (capacidad de coordinar la composición de las partes para obtener la totalidad y la descomposición de la totalidad de las partes); el sentido de resolver el problema y el significado del contenido del problema; y por último la creatividad y el ingenio del estudiante. Por ello es necesario crear algunas formas de intervención en una situación significativa en las que se pongan en práctica operaciones como la suma o la resta, entre ellas: el dramatizado de problemas, el establecimiento de conexiones con otras situaciones, la recuperación de experiencias vividas, la estimulación del contraste, la exigencia de la participación, la posibilidad de inventar el problema. En este caso, la situación significativa propicia el espacio y la necesidad de realizar procedimientos para resolver problemas aditivos y construir el pensamiento aditivo.

Por último, Lerner y Sadovsky (1994) dan cuenta de que los estudiantes al enfrentarse con situaciones problemáticas elaboran diversos procedimientos, explicitan argumentos para justificarlos, y descubren conceptos que les permite a encontrar los resultados de las operaciones involucradas y comprender la organización del SND. En el desarrollo de la investigación las autoras dan cuenta, de que los estudiantes al enfrentarse con situaciones problemáticas explicitan las propiedades involucradas en las operaciones; además, integran diferentes estrategias como: la descomposición decimal de los términos, el conteo con los dedos de la mano, el trazo de grafos personales (puntos, segmentos verticales), entre otros. Es más, en el desarrollo de las tareas es importante que los estudiantes expliciten el procedimiento realizado para resolver la operación y lo compartan entre ellos, pues a través de

esta tarea se establecen relación entre diferentes procedimientos y se hace posible una mayor comprensión de la naturaleza del SND por parte de todos los estudiantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede asegurar que la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones básicas han sido objeto de estudio de algunos autores, quienes son conscientes de su rol fundamental en el SND y de las dificultades que implican la enseñanza y aprendizaje de las mismas.

1.4.3 Algunas investigaciones desde la perspectiva cognitiva. En la perspectiva de la psicología cognitiva se destacan algunos autores que se interesan por el conteo en los niños, entre ellos Gelman y Gallistel (1992) y Wynn (1992), quienes están de acuerdo con la teoría de los principios de conteo.

El conteo es una de las tareas que los niños de preescolar utilizan en múltiples contextos. Gelman (1978) da a conocer que el conteo es gobernado por varios principios: correspondencia uno a uno, orden estable, cardinalidad, abstracción e irrelevancia de orden, los tres primeros hacen referencia a “¿cómo contar?” y los dos últimos a “¿qué contar?” la aplicación de un conteo exitoso debe involucrar la aplicación coordinada de todos los principios.

Wynn (1992) por su parte, obtiene en sus investigaciones que para aprender el conteo, el niño implícitamente debe relacionar las representaciones de las cantidades con las palabras número. En contraposición a la hipótesis de Gelman, esta autora da a conocer que el niño puede recitar la lista numérica verbal en el orden convencional y aun así aplicar de manera inadecuada los principios de conteo; por tanto el principio cardinal es complejo.

Estas investigaciones permiten reconocer las nociones de cardinalidad, orden, sucesor y correspondencia uno a uno son importantes para comprender el CNN.

1.4.4 Balances y aportes al proyecto. Las investigaciones y trabajos señalados anteriormente sobre el SND en los primeros grados de escolaridad destacan algunos aspectos claves que se deben tener en cuenta en el desarrollo del trabajo.

En primer lugar, se reconoce que existen varias investigaciones en las que se muestra que en los primeros grados de escolaridad se puede realizar un trabajo matemático de calidad. En segundo lugar, se reconoce que existen diversas investigaciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje del SND y el CNN con relación a los diferentes aspectos señalados anteriormente, entre ellos, los contextos en los que se inscribe el número natural, la

cardinalidad y la ordinalidad, las operaciones básicas, los principios de conteo. Investigaciones que de una u otra forma influyen de manera indiscutible en la enseñanza y aprendizaje del SND en Transición.

Po último, se reconoce la importancia de la gestión del maestro en las propuestas de aula que se realizan en los primeros grados de la escolaridad. El docente posibilita el espacio para que los estudiantes resuelvan sus dudas y orientan la tarea. La propuesta de aula por sí sola no tendría sentido si se desconoce la labor del docente.

De este modo, las investigaciones reportadas aquí develan que la enseñanza y el aprendizaje del SND es tema actual de debate, mostrando que los conceptos de cardinalidad orden y agrupación han sido documentados por diversos autores y tenerlos en cuenta influye en las propuestas de aula que se diseñan para los estudiantes de grado Transición.

1.5 Metodología

El desarrollo de este trabajo de investigación se diseña y estructura en el marco metodológico de los MTL propuestos por Filloy (1999). Al indagar sobre la enseñanza y el aprendizaje de SND en el grado Transición a partir de una secuencia de tareas que tiene en cuenta los componentes del MTL, esta investigación toma datos cualitativos y cuantitativos dentro de un enfoque descriptivo, lo que permite detallar procesos, conceptos y actitudes de los estudiantes al desarrollar las tareas propuestas.

La primera fase se inicia con la revisión y análisis del enfoque teórico y metodológico de los MTL y posteriormente se fundamentan los modelos que componen este enfoque: el modelo de enseñanza, el modelo de competencia formal, el modelo para procesos cognitivos y el modelo comunicativo. El modelo de enseñanza se fundamenta desde la perspectiva legal, curricular de la educación matemática en los primeros años de la escolaridad, también se realiza un análisis de textos y se presenta la propuesta curricular de la institución en la que se va aplicar la propuesta de aula. El modelo de competencia formal, por su parte, tiene en cuenta aspectos de carácter formal e histórico; mientras que el modelo para procesos cognitivos y el modelo de comunicación se fundamentan desde los principios de conteo, las actuaciones de los estudiantes, y los sistemas de representación externa del número como los numerales indo-arábigos, los bloques de Dienes, el dinero, entre otros.

En la segunda fase se articulan los aspectos antes mencionados por medio del diseño de la propuesta de aula que consta de tres situaciones problema, dichas situaciones se enfocan

en los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación. En esta fase se implementa la propuesta de aula con algunos estudiantes de Transición de la I.E.D. Ciudad de Bogotá, con el propósito de identificar conceptos y procedimientos, mediante la tipificación de las respuestas y su análisis e interpretación posterior. A partir de los resultados obtenidos se realiza la categorización de las actuaciones de los estudiantes y se escoge un subgrupo de ellos para realizar el estudio de casos implementando una entrevista. La propuesta de aula es la base para realizar la entrevista, su implementación y análisis permite observar de manera más detallada las actuaciones de los estudiantes al resolver las tareas.

En la fase final, se concretan las conclusiones generales y reflexiones didácticas con base a la problemática, los referentes teóricos y los resultados obtenidos de la implementación de la propuesta de aula y la entrevista. Las conclusiones y reflexiones atienden a aspectos conceptuales y procedimentales sobre la enseñanza y el aprendizaje del SND.

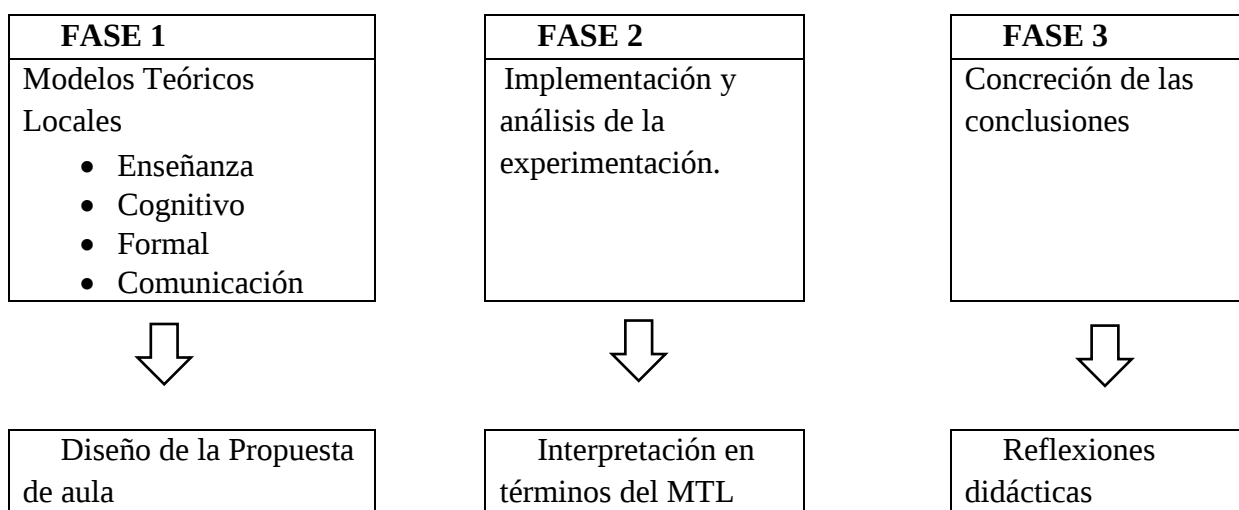


Ilustración 1. Metodología del trabajo de investigación.

CAPÍTULO 2

Marco Teórico y Metodológico de Referencia

En este capítulo se presentan algunos referentes del marco teórico y metodológico que Filloy (1999) denomina MTL; de acuerdo a este marco, se fundamenta la problemática de estudio atendiendo a cuatro componentes interrelacionados: modelo para los procesos cognitivos, modelo de comunicación, modelo de enseñanza y modelo de competencia formal. En este sentido, el modelo para procesos cognitivos y el modelo de comunicación se fundamenta desde los SMS, las representaciones, los principios de conteo, las actuaciones de los niños, el aprendizaje del CNN y el SND, las operaciones aditivas, las representaciones simbólicas, las palabras número y los materiales concretos; también, se presentan algunas investigaciones que estudian los diferentes tipos de notaciones que utilizan los estudiantes en los primeros grados de escolaridad para expresar cantidades numéricas. Por otro lado, el modelo de competencia formal se sustenta desde aspectos históricos y desde las matemáticas mismas. Y finalmente, el modelo de enseñanza tiene en cuenta algunas consideraciones en lo concerniente a la educación matemática en Transición desde una perspectiva legal y curricular, la enseñanza del CNN y el SND en la revisión de la literatura, la enseñanza de la cardinalidad, la ordinalidad y la agrupación desde los textos escolares de Transición y la propuesta curricular de la Institución Educativa Distrital Ciudad de Bogotá.

2.1 Sobre los MTL

Los MTL son denominados por Filloy (1999) como un marco teórico y metodológico para la observación experimental en matemática educativa. De acuerdo al autor para poder observar experimentalmente los fenómenos que se dan alrededor de un objeto de estudio, es necesario consolidar un marco teórico de referencia que permita interpretar todos estos fenómenos y poder plantear nuevas observaciones que demuestren las relaciones entre distintos componentes teóricos que entran en juego.

Para presentar la conceptualización de MTL se hace necesario aclarar las palabras modelo y local. Con relación a la palabra modelo se tiene en cuenta la definición de Freudenthal (1991), en la cual afirma que “El modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal” (p. 34). En esta noción los modelos están ligados a una situación de un contexto particular, pero poco a poco se desprenden de ella para adoptar un carácter propio del modelo de competencia formal. Lo anterior hace alusión al paso de un “modelo de” una situación particular a un “modelo para” razonar matemáticamente otro tipo de situaciones. Así mismo, Achistein (1967) afirma que “Un modelo teórico consiste en un conjunto de supuestos acerca de algún objeto o sistema” (Achistein, 1967, p.6), además que “... Un modelo teórico analiza el objeto que exhibe ciertas regularidades conocidas reduciéndolo a componentes más básicas” (Achistein, 1967, p.7). Además se usa la palabra local para referirse a un acercamiento local al objeto de estudio y no general; los MTL son elaborados para reconocer los procesos que se desarrollan en la enseñanza de un objeto de estudio concreto, con alumnos concretos en situaciones específicas.

Teniendo en cuenta lo anterior, los MTL (Filloy, 1999) son una herramienta para la realización de investigación, en la cual desde la práctica docente se determina una problemática, se ubica el problema objeto de observación desde el objeto mismo (modelo de competencia formal) para la elaboración de una clase (modelos de enseñanza), en la cual el observador que se ha apropiado de los componentes teóricos, reconoce el modelo de comunicación y de cognición inmersos en el desarrollo de la clase. Lo anterior, permite

reconocer algunas posturas relacionadas con el proceso de aprendizaje del estudiante y con los SMS usados por el estudiante y el maestro.

2.1.1 Sobre los componentes de los MTL. Los MTL planteados por Filloy (1999) permiten tener una observación experimental del objeto de estudio, a través de cuatro componentes que se interrelacionan entre ellos:

- Componente de enseñanza del MTL, o de forma abreviada, Modelo de enseñanza.
- Componente de cognición del MTL o Modelo para los procesos cognitivos.
- Componente de competencia formal del MTL o Modelo de competencia formal.
- Componente de comunicación del MTL o Modelo de comunicación.

En el modelo para los procesos cognitivos se tienen en cuenta los procesos para desarrollar el pensamiento matemático. En este componente tienen lugar las posibles estrategias y métodos para resolver un problema. El uso competente del concepto podría evitar que el estudiante caiga en tendencias cognitivas que dificultan la resolución de un problema (como el desencadenamiento de procesos erróneos para la solución) y permite el desarrollo de tendencias cognitivas positivas (como presentar procesos de abreviación de una situación concreta para producir reglas sintácticas nuevas, etc.). En este componente se reconoce que los estudiantes competentes hacen uso de esquemas mentales y de la memoria de trabajo para identificar la estrategia, aplicarla y encontrar la solución del problema.

Por otro lado, el modelo de comunicación se representa por medio de los SMS usados para comprender y expresar el objeto matemático. Al interior de este modelo, la gramática (la semántica, la sintaxis) y la pragmática tienen un papel relevante, pues posibilitan la interpretación del significado de los mensajes matemáticos durante los procesos de enseñanza y aprendizaje que se llevan a cabo en el aula de clase; más aún, gramática y pragmática se complementan en el modelo de enseñanza para lograr que el estudiante sea competente en el uso de los SMS, es decir, los estudiantes deben ser competentes tanto en producir como descodificar mensajes matemáticos.

En cuanto al modelo de enseñanza éste se concibe como una sucesión de textos² matemáticos que son intercambiados entre profesor y estudiante; en el proceso, los aprendices

², Un texto se define como “el resultado de un trabajo de lectura/transformación hecho sobre un espacio textual” (Talens y Company, 1984, p.32) y el espacio textual es un sistema en el que la persona identifica el significado y sentido del texto, mientras que el texto es una nueva articulación resultado de ese acto de lectura. Desde el

le atribuyen sentido y significado a las lecturas que realizan de los textos elaborados por el docente. El modelo de enseñanza es también una secuencia de situaciones problemas, una secuencia de textos matemáticos, cuya producción y descodificación permiten al aprendiz interpretar todos los textos para avanzar en la comprensión del SMS abstracto.

En este modelo se asumen dos estrategias para el aprendizaje del objeto matemático. En la primera estrategia, se parte de las situaciones y operaciones concretas para dar significado a expresiones y operaciones nuevas, a esta estrategia se le denomina Modelaje de situaciones más abstractas en situaciones más concretas para desarrollar habilidades sintácticas; y en la segunda estrategia, se le da sentido a esas expresiones y operaciones nuevas que junto con la utilización de las habilidades sintácticas permiten desarrollar estrategias de resolución de problemas. En estas estrategias el modelaje concreto³ y el modelaje sintáctico⁴ hacen parte del aprendizaje del objeto matemático

Por último, el modelo de competencia formal posibilita la descripción de situaciones utilizando un SMS abstracto. Es necesario partir del hecho de que en las clases regulares se encuentran estudiantes con diferentes niveles de competencias y se producen intercambios de textos matemáticos, este modelo permite descodificar todos los textos y agruparlos en un SMS abstracto. El observador y el maestro desempeñan un rol fundamental, pues deben tener el conocimiento abstracto del objeto de estudio y transmitirlo de manera efectiva a los alumnos comprender los textos matemáticos que producen los alumnos; lo anterior, permite que el educando sea competente y continúe en la comprensión de SMS más abstractos. En este componente, también, se estudian los fenómenos que están organizados en las matemáticas

modelo de enseñanza los textos matemáticos son una secuencia de textos tomados como espacios textuales para ser leídos/transformados dentro de otros espacios textuales.

³ En el modelo concreto, el modelaje tiene dos componentes principales la traducción y la separación. En la traducción, a partir de los contextos concretos se dota a los objetos matemáticos de sentido y significado para relacionarlos en una situación más abstracta; es importante que se produzca de un contexto a otro para que se pueda identificar el objeto matemático en los distintos niveles, de un nivel concreto a un nivel abstracto y del nivel abstracto al nivel concreto. Con relación al segundo componente, se produce la separación de los objetos matemáticos de los significados más concretos, para consolidar significados más abstractos en vía de la construcción del modelo sintáctico. Es importante dominar ambos componentes y que haya un periodo de Transición entre uno y el otro para que se produzca el modelaje.

⁴ El modelo sintáctico por su parte, se enfatiza en el trabajo con la carga semántica de los signos y operaciones. El modelo se enfoca en la regla general utilizada para realizar las operaciones. Es necesario tener en cuenta que los sujetos generan semánticas privadas sobre el SMS, lo cual se evidencia en el fenómeno de lectura de las situaciones para ejecutar las tareas sintácticas; sin embargo, muchas veces las semánticas privadas resultan erróneas; de ahí la importancia de realizar ejercicios prácticos, para rectificar las lecturas espontáneas de los sujetos generados por la sintaxis.

tomados en el momento actual y su uso actual. En este sentido, se dan a conocer las reglas lógicas y los SMS que se usan para pensar el objeto matemático.

De acuerdo con Filloy (1999) los componentes del MTL antes presentados se encuentran interrelacionados (Ver ilustración 2), de manera que al realizar una investigación en este marco se deben tener en cuenta el modelo de enseñanza, junto con el modelo para procesos cognitivos, estos dos relacionados con el modelo de comunicación para describir el uso del SMS empleado para crear textos matemáticos y el modelo de competencia formal que da a entender la actuación de un sujeto ideal competente en el uso del SMS.

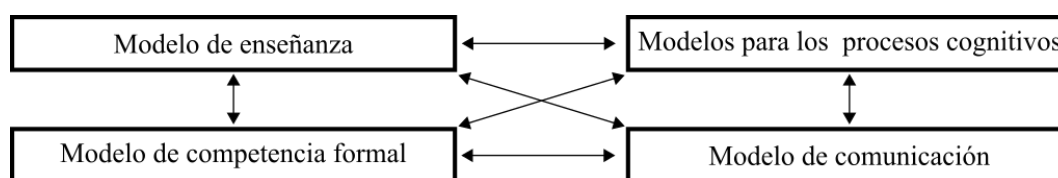


Ilustración 2. Interrelación de los componentes del MTL

Finalmente, los componentes del MTL están ligados al análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1991) en el que se distinguen varios tipos de fenomenología, la fenomenología pura, la fenomenología histórica, la fenomenología didáctica y la fenomenología genética. La fenomenología pura y la fenomenología histórica se relacionan con el modelo de competencia formal, la fenomenología didáctica se relaciona con el modelo de enseñanza; y por último, en la fenomenología genética se relaciona con el modelo para procesos cognitivos y con el modelo de comunicación.

2.1.2 Sobre el diseño y desarrollo de la experimentación. Desde el punto de vista metodológico Filloy (1999) presenta el esquema del diseño de la experimentación para la realización del MTL (Ver ilustración 3). Este diseño parte de la problemática de investigación, continúa con el análisis previo del problema atendiendo a los componentes del MTL, para luego proponer las hipótesis de la investigación; todo lo anterior contribuye al diseño del desarrollo de la experimentación, en el cual se realiza la preparación del trabajo de los aprendices, la preparación de los materiales y la preparación del trabajo con el docente, a fin de establecer el diseño definitivo y el desarrollo de la experimentación, lo cual permite tomar datos, analizarlos y realizar la interpretación de los resultados en términos del MTL.

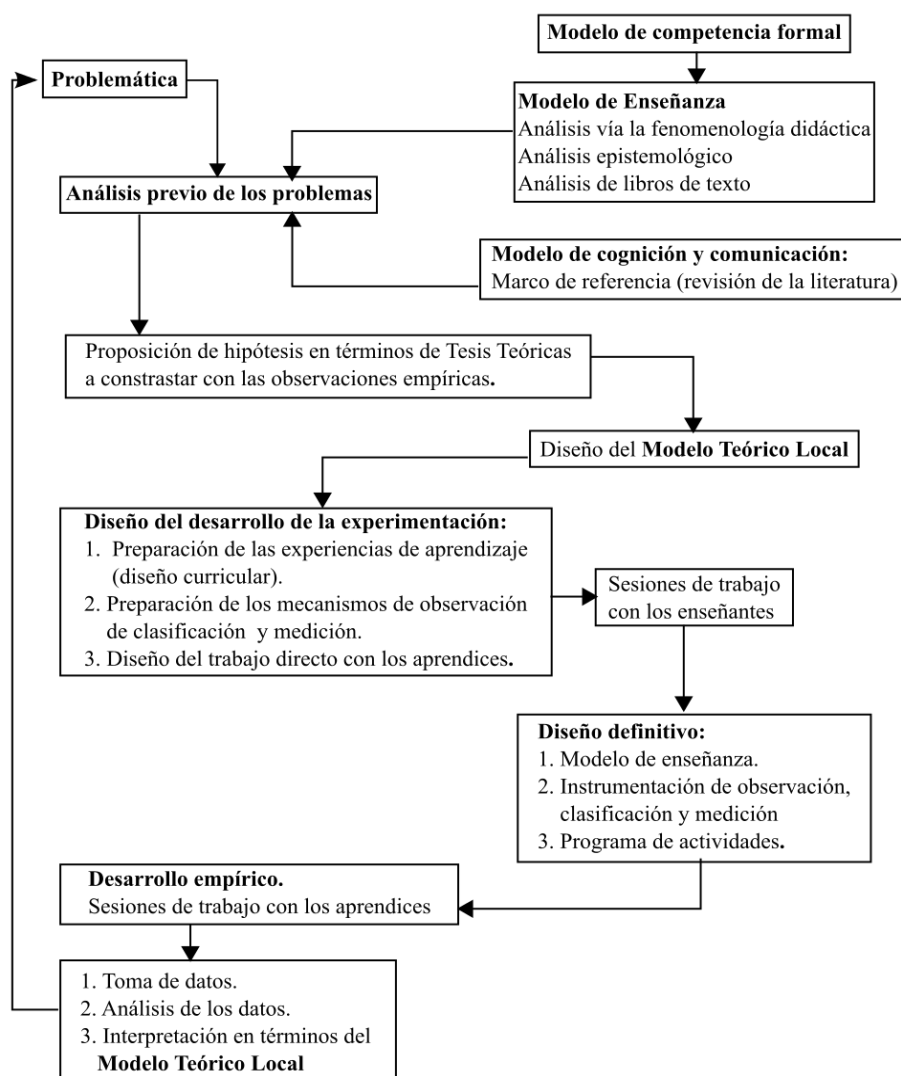


Ilustración 3. Esquema del diseño de la experimentación (Filloy, 1999).

Adicional a esto, Filloy (1999) expone el esquema del desarrollo de la experimentación (Ver ilustración 4), en el cual da a conocer que para la implementación de un sistema para una enseñanza contralada se debe elegir la población a estudiar, aplicar la enseñanza controlada y los instrumentos de observación, lo cual permite clasificar la población por perfiles para así elegir un subgrupo de la población para realizar el estudio de casos. El análisis e interpretación de los resultados obtenidos permite realizar las conclusiones respecto al componente de cognición, el componente de enseñanza y el componente de comunicación, con lo cual se plantea el problema en la perspectiva de un nuevo MTL.

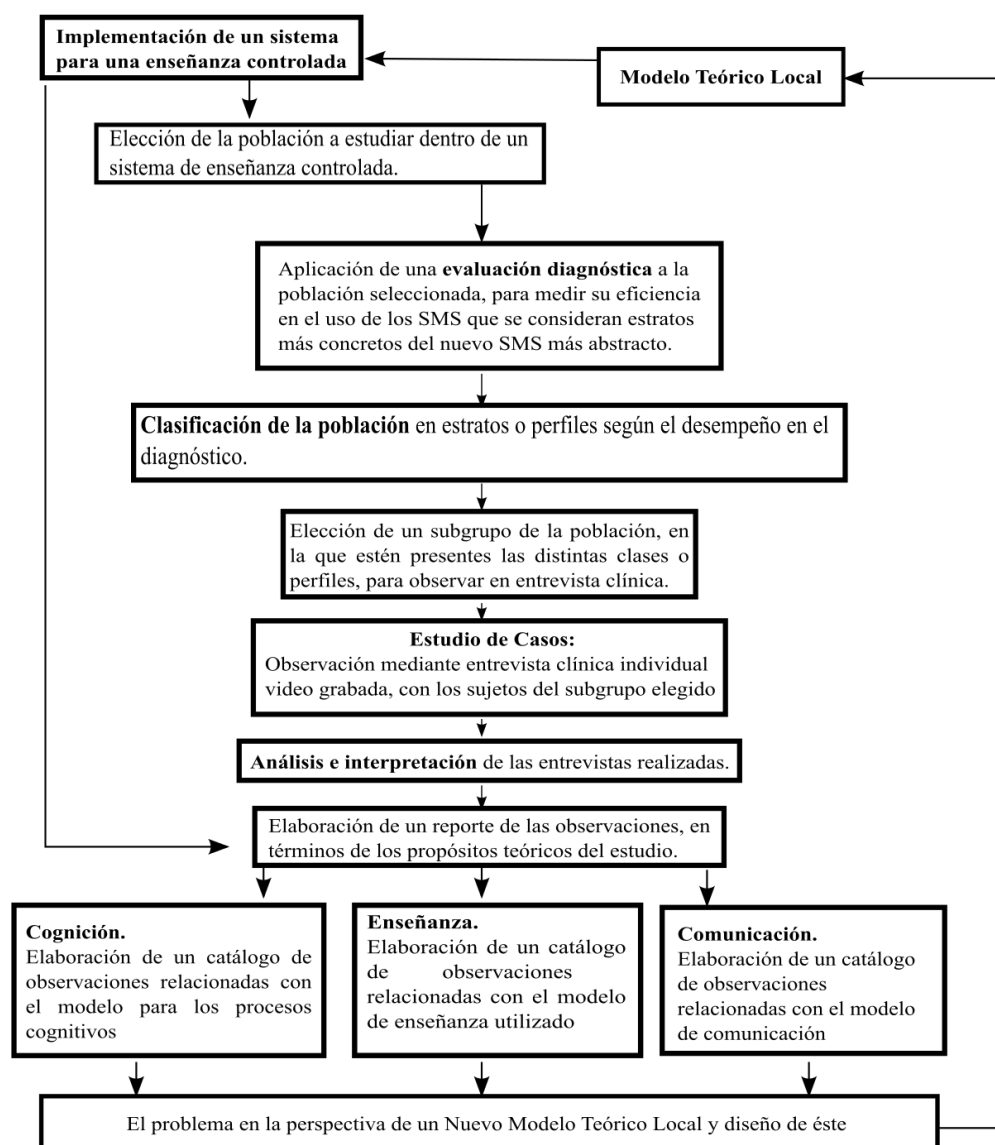


Ilustración 4. Esquema del desarrollo de la experimentación (Filloy, 1999).

2.1.3 Sobre la recursividad en los MTL. En los dos esquemas expuestos anteriormente se nota que hay una recursividad; en el esquema del diseño de la experimentación (Ver ilustración 3) se empieza con la problemática y al final del proceso se vuelve nuevamente al problema, esto mismo sucede en el esquema del desarrollo de la experimentación (Ver ilustración 4), el cual parte del MTL luego de desarrollar la experimentación y su respectivo análisis e interpretación teniendo en cuenta los resultados, la problemática inicial se enmarca en la perspectiva de un nuevo MTL.

En ambos esquemas hay una recursividad que lleva de la última fase del proceso, nuevamente, a la primera fase descrita en el esquema, lo cual implica plantear el objeto de estudio desde la perspectiva de un nuevo MTL. En este marco teórico y metodológico para poder iniciar el diseño del nuevo MTL se vuelve nuevamente a las fases propuestas en el esquema del diseño de la experimentación, y se continúa con el proceso que se expone en el esquema del desarrollo de la experimentación.

2.2 El MTL sobre el CNN y el SND

Atendiendo a los planteamientos de Filloy (1999), en este trabajo de investigación se diseña un MTL para poder observar experimentalmente los fenómenos que aparecen alrededor de la problemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de orden, cardinal y agrupación para la aproximación al SND en Transición, por ello se realiza un análisis previo a través de la fundamentación de los componentes del MTL (componente de enseñanza, componente de cognición, componente de competencia formal, componente de comunicación).

Este trabajo centra la atención en el componente de enseñanza y en el componente de competencia formal, mientras que el componente de cognición y el componente de comunicación aportan a los dos primeros componentes. De esta manera, se consolida un marco teórico de referencia que permite interpretar la problemática objeto de estudio y poner en evidencia la interrelación entre los distintos componentes del MTL.

Atendiendo a este marco se presentan a continuación las distintas etapas del trabajo de investigación mediante los esquemas del diseño y el desarrollo de la experimentación, los cuales son una adaptación de los que utiliza Filloy (1999).

2.2.1 Esquema del diseño de la experimentación sobre el CNN y el SND. El siguiente esquema permite reconocer una manera de organizar la investigación que es coherente con la teoría y está adaptada a esta investigación. Las etapas que se presentan en el esquema dilucidan las etapas que se llevan a cabo en el trabajo de investigación (Ver Ilustración 5).

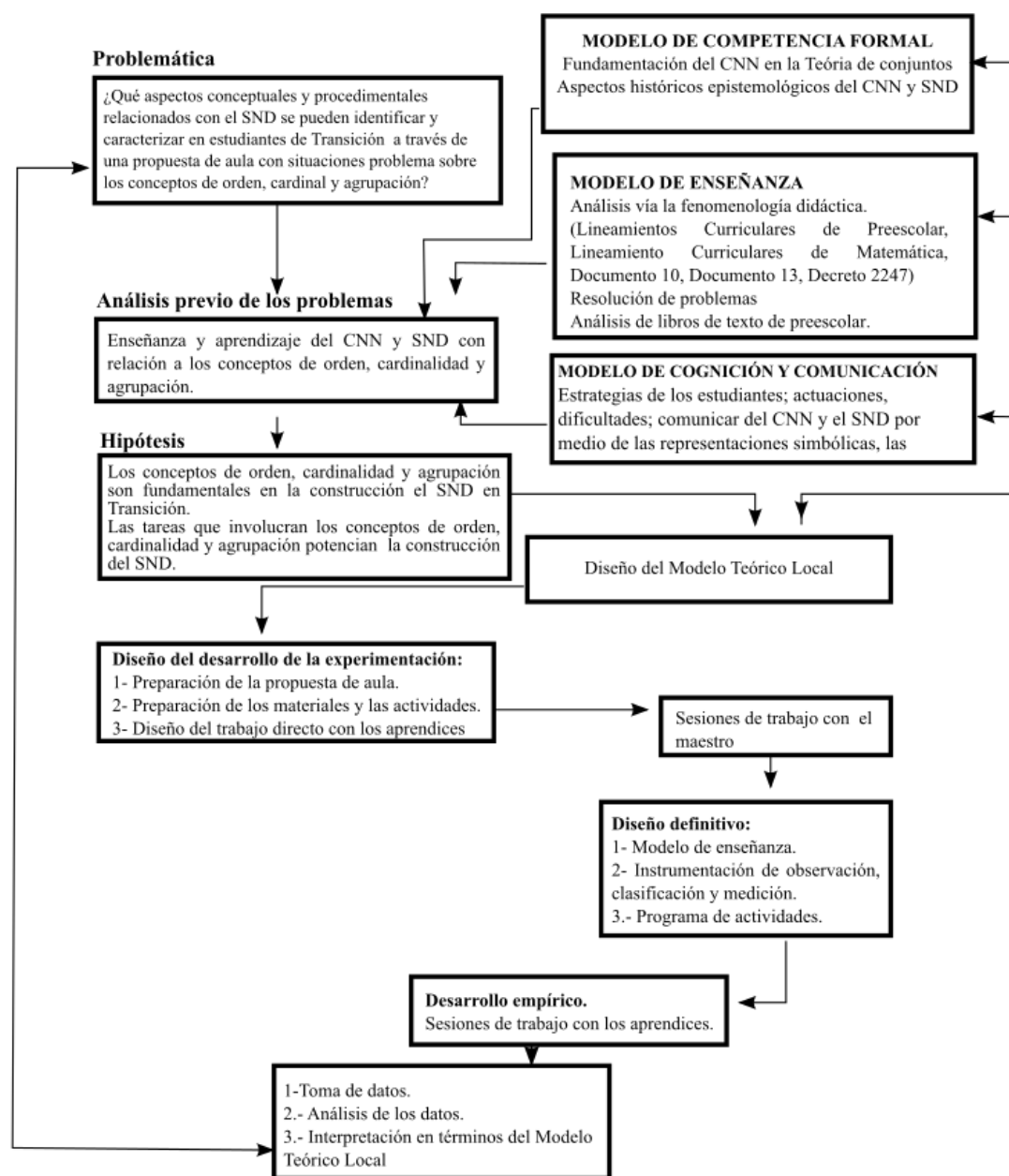


Ilustración 5. Esquema del Diseño y Desarrollo de la Experimentación del CNN y el SND

En la ilustración 5 se presenta la problemática y el análisis previo de la misma, en relación a los componentes de los MTL para realizar el diseño del MTL y el desarrollo de la experimentación. En este esquema se destaca la recurrencia en el cual se parte de un cuadro de la problemática y al final del proceso se vuelve otra vez a ella desde la perspectiva de un nuevo MTL.

2.2.2 Esquema del desarrollo de la experimentación sobre el CNN y el SND

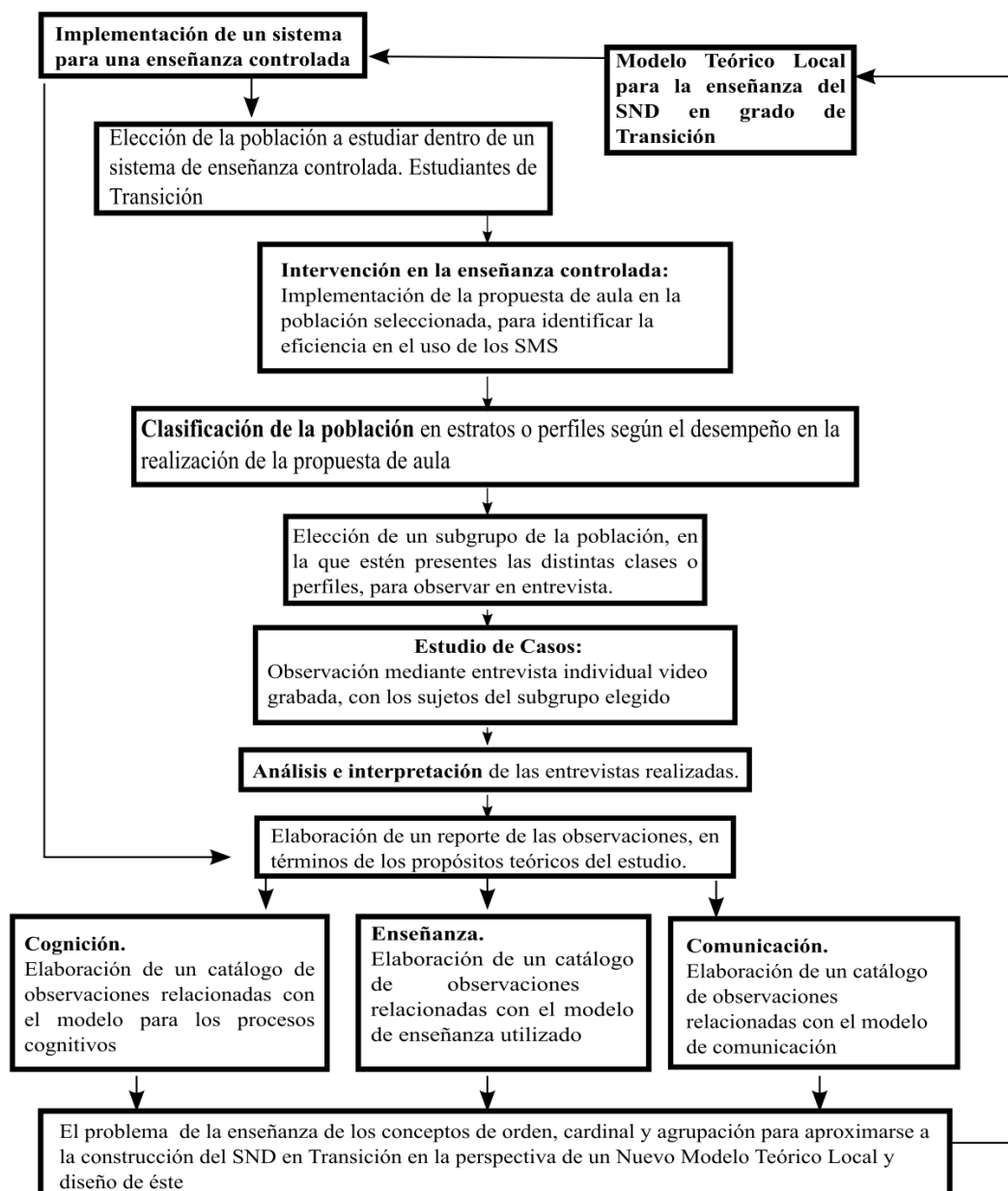


Ilustración 6. Esquema del desarrollo de la experimentación sobre el CNN y el SND

Las dos últimas etapas en el esquema del diseño de la experimentación (Ver ilustración 5) correspondientes al desarrollo empírico de la propuesta de aula y la interpretación y análisis de los datos en términos de los componentes del MTL se expresan de manera más amplia en este esquema (Ver Ilustración 6). En el cual se dilucida las etapas que se deben realizar en la implementación de un sistema para una enseñanza controlada partiendo de la elección de la población, la evaluación diagnóstica, realizando un estudio de

casos, analizando e interpretando los datos, hasta la elaboración de un reporte de las observaciones en términos de los componentes de los MTL.

2.2.3 Modelo para los procesos cognitivos y modelo de comunicación. En el proceso de enseñanza y aprendizaje del SND, tal como se expresa en la teoría aquí adoptada, se reconoce la necesidad de incorporar el modelo para los procesos cognitivos y el modelo de comunicación como componentes indispensables para pensar la problemática en cuestión.

Al ingresar a los primeros años escolares (Transición y Primero) los niños⁵ tienen experiencias numéricas previas resultado de la acción e interacción con objetos y situaciones problemáticas, a partir de estas experiencias numéricas se construyen los significados de los conceptos matemáticos. Precisamente la construcción de significados y el desarrollo de habilidades cobran importancia en la escuela, pues posibilitan la adquisición y desarrollo de procesos cognitivos que permiten alcanzar poco a poco la competencia matemática.

Además, en los procesos de enseñanza y aprendizaje la comunicación tiene un papel indispensable al momento de pensar sobre los funcionamientos cognitivos del estudiante. En particular, el intercambio de mensajes que se producen entre sujetos que tienen diferentes niveles de competencias en los SMS, permite crear diversos textos matemáticos por medio de los cuales se expresa la conceptualización de un objeto matemático determinado, en este caso el SND.

Teniendo en cuenta lo anterior, el componente de cognición y el componente de comunicación del MTL están fundamentados en un marco que presenta diversas investigaciones sobre los SMS, las representaciones, los principios de conteo, el aprendizaje del CNN y del SND y las operaciones aditivas; también se presentan las palabras números, las representaciones simbólicas, los estratos de los SMS, y los materiales manipulativos.

2.2.3.1 Sobre los SMS Para definir SMS es necesario aclarar que desde la teoría de los MTL se asume el signo como “cualquier cosa que determina alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual él mismo se refiere (su objeto)” (Peirce, 1987, p. 274).

⁵ En este componente se utiliza la designación “niño” para denotar a los sujetos entre edades de 2 a 6 años y se diferencian de “estudiantes”, porque los primeros no necesariamente asisten a un curso dentro de un sistema educativo.

En la definición anterior se subraya el hecho de que el signo está en una relación triádica entre el representante (lo que de ordinario denominaríamos el signo), un objeto semiótico (con el cual está interrelacionado el signo), y un intérprete (el significado o interpretación del signo a través de su correlación con el objeto semiótico).

A partir de esa relación triádica, se pueden distinguir tres tipos de signos: los iconos, los índices y los símbolos. Los iconos tienen semejanza con el objeto representado y permiten significar incluso si el objeto no existe; por otra parte, los índices no se parecen a los objetos que representan, sino que lo señalan; y los símbolos, dejan de significar sin intérprete (Peirce, 1987).

Atendiendo a esta concepción de signo, Puig (2003) da a conocer que a través de la historia se pueden apreciar distintos signos en los sistemas de numeración escrita; un ejemplo, son los signos matemáticos representados en tablillas de arcilla que representa la escritura de los elamitas (2.000 a. C.) o los signos presentes en el sistema de numeración Romano.

Los signos se pueden tomar dentro de un sistema –matemático- como un todo y de ahí su denominación SMS, según Puig (2003)

“Se califica de matemático es el sistema y no los signos, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. En este sentido, se debe de hablar de SMS y no de sistemas de signos matemáticos, porque se le coloca el adjetivo ‘matemáticos’ al sistema y no meramente los signos individuales” (p. 8).

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, es necesario acercar estos planteamientos al trabajo de investigación aquí desarrollado. En el cual es importante el sujeto porque interpreta el signo en relación con el objeto matemático. En los procesos de enseñanza y aprendizaje lo importante no es que el estudiante reconozca los signos (por ejemplo: símbolos indo-arábigos), lo importante es que interprete el signo en relación con el concepto correspondiente (cardinal, ordinal, agrupación), dentro de un sistema de numeración (SND).

En la enseñanza de las matemáticas los estudiantes pueden darle a un signo una interpretación determinada; sin embargo, esa interpretación puede ser replanteada o sustituida por otra en la medida en que se produce una mayor abstracción de objeto matemático, a esto Filloy (1999) le denomina estratos del SMS. Durante los procesos de enseñanza y aprendizaje, el estudiante debe rectificar el uso de esos SMS intermedios, para que al final sea competente

en el SMS deseado. Un ejemplo del SMS intermedio en el aprendizaje del SND podría ser el siguiente, cuando un estudiante representa simbólicamente una colección de siete elementos usando segmentos verticales (|||||||), y más adelante entiende que puede representar esa cantidad utilizando la notación indo-arábiga (7).

La noción de SMS en esta teoría debe ser lo suficientemente amplia para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les enseña matemáticas en la escuela. Esto debido a que se está tratando con procesos de pensamiento matemático y hay que estar dispuesto a estudiar los estratos de los SMS, que muchas veces pueden hacer alusión a códigos inventados por el aprendiz mientras que trata de ser competente en el uso de un nuevo SMS.

Debido a esta conceptualización de SMS, en la cual un signo es una representación a través de la cual los estudiantes pueden conocer los objetos matemáticos, se hace necesario hablar de la idea de representación.

2.2.3.2 Sobre las representaciones Desde hace algunas décadas se ha usado la noción de representación en educación matemática; a partir de ello, han surgido varias alternativas conceptuales similares pero no equivalentes a lo que este término se refiere. En este trabajo de investigación se aborda la representación en un sentido amplio “como todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (Rico, 2009).

En la definición anterior se da a conocer una dualidad ya estudiada por Kaput (1987) en la cual hay dos entidades relacionadas, el objeto representante (signo, representación) y el objeto conceptual representado. Desde esta concepción se reconocen dos tipos de representaciones: las internas y las externas (Goldin y Kaput, 1996)

Por un lado, se usa el término de representación interna para referirse a configuraciones mentales de los estudiantes, al ser internas tales configuraciones no son directamente observables. El estudio que se hace sobre dichas representaciones debe guardar cierto parecido con las descripciones de los individuos de su propia conciencia subjetiva.

Por otro lado, se usa la representación externa para referirse a las configuraciones observables o perceptibles tales como, palabras, gráficos, dibujos, ecuaciones, etc. Estas representaciones son accesibles a la observación y su interpretación depende de las representaciones internas de los individuos.

Teniendo en cuenta los dos tipos de representación, es importante reconocer la interacción entre ambas es bidireccional. En ocasiones, los estudiantes pueden exteriorizar de forma física sus concepciones internas, dicho de otro modo, pueden dar a conocer sus concepciones por medio de actos de habla, de escritura, de manipulación de objetos, etc. Y viceversa, puede internalizar conceptos por medio de estructuras físicas externas, manipulando objetos, interpretando textos, etc. Las interacciones bidireccionales entre las representaciones internas y las representaciones externas pueden ocurrir simultáneamente (Goldin y Kaput, 1996)

Las representaciones no ocurren aisladamente, por lo general pertenecen a sistemas estructurados que pueden ser personales, culturales y convencionales; por lo tanto, se denominan "sistemas de representación" (Goldin, 1987, Lesh, Landau, & Hamilton, 1983). Entre los sistemas de representación del número natural se destacan cuatro modalidades: simbólico, verbal, gráfico y de materiales manipulativos (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008).

- Sistema de representación simbólico: abarca las notaciones del sistema simple (ej.: puntos o segmentos verticales), las notaciones del sistema aditivo (ej. símbolos del sistema de numeración egipcio) y las notaciones del SND (ej. Notaciones indo-arábigas), también incluye los símbolos de suma, resta, entre otros.
- Sistema de representación verbal: vinculado a las reglas del lenguaje que organizan y condicionan la representación de los números naturales (ej. “uno”, “dos”, “primero”), esta representación puede ser oral o escrita.
- Sistema de representación gráfico: vinculada a la representación del número en la recta numérica, en las configuraciones puntuales (ej. números triangulares) y en los gráficos (ej. Se realizan dos dibujos para representar el cardinal “dos”).
- Sistema de representación de materiales manipulativos: vinculada al uso de materiales físicos como el ábaco, los bloques de Dienes, el Dinero, etc.

Teniendo en cuenta la concepción antes expuesta sobre SMS y representación, el significado que le atribuyen los estudiantes al objeto matemático muchas veces se representan de manera externa por medio de las actuaciones. Teniendo en cuenta lo anterior, el componente de cognición y comunicación se centra en las actuaciones de los estudiantes usuarios de los SMS, actuaciones relacionadas con los principios de conteo, el aprendizaje del CNN y el SND y el aprendizaje de las operaciones aditivas; además, tiene en cuenta los sistemas de representación simbólica, verbal (palabras número) y los materiales manipulativos, por medio de los cuales el estudiante puede comunicar el conocimiento que posee sobre el CNN y el SND.

A continuación se presentan los principios de conteo y las actuaciones de los niños que representan externamente el conocimiento que poseen sobre el conteo.

2.2.3.3 Principios de conteo y las actuaciones de los niños con relación a estos principios. Gelman (1978) propone que la habilidad de contar de los niños en edades tempranas está vinculada con cinco principios a saber: correspondencia uno a uno, orden estable, cardinal, abstracción e irrelevancia de orden. Los niños pueden poseer algunos principios pero no otros y algunos de ellos pueden operar de manera aislada en el conteo. A continuación se explican los cinco principios de conteo según Gelman (1978).

En cuanto al principio de correspondencia uno a uno, se puede afirmar que éste consiste en seleccionar una cantidad de elementos y asignarle a cada uno marcas distintas, de esta manera una y solamente una marca es usada para cada elemento que se va a contar. Los niños y niñas deben de coordinar este principio por medio de dos componentes, las particiones y las etiquetas.

Respecto al componente de las particiones, este involucra dos subgrupos de elementos que se mantienen en la medida que se produce el conteo, un subgrupo correspondiente a los elementos que no han sido contados y el otro referido a los elementos que fueron contados, de modo que cada uno de los elementos puede ser transferido uno por uno de un subgrupo a otro, es decir, desde el conjunto de los elementos que no han sido contados hasta los elementos que fueron contados. Así mismo, en relación con el componente de las etiquetas, se le asigna a cada elemento del conjunto una etiqueta distinta. El éxito del principio de correspondencia uno a uno radica en el hecho de que etiquetas y particiones se

presenten a la vez en el conteo. Los niños que no manejan este principio pueden cometer errores de tres maneras distintas: en las particiones, en las etiquetas y en la coordinación entre particiones y etiquetas.

En lo concerniente a los componentes del principio de correspondencia uno a uno, Gelman (1978) evidencia que los niños cometen errores de particiones y coordinación. Por una parte, los errores de partición son más notables en las colecciones grandes, y por otra parte con relación a la coordinación se presentan cuatro errores a saber: inicio (empiezan a etiquetar mientras señalan el segundo elemento en lugar del primero), final (terminan de etiquetar mientras señalan otro elementos en vez del último), exceso (se continua etiquetando aunque no hay más elementos) y disincronía (se etiqueta de cualquier manera, recitando los números).

Por otro lado, se puede asegurar que el principio de orden estable requiere necesariamente del principio de correspondencia uno a uno, y se evidencia con las etiquetas implementadas en el conteo, las cuales son asignadas en un orden estable y repetible. Este principio demanda el uso de una lista ordenada de etiquetas que sea tan larga como número de elementos posea un conjunto. Las dificultades que puede presentar el niño en este principio podrían ser dos, una correspondiente al hecho de que el conjunto de elementos supere la lista de conteo que ha aprendido el niño y la otra en el hecho de no aprender la secuencia en el orden establecido para realizar el conteo. Los resultados de los estudios de Gelman (1987) indican que los niños utilizan diferentes tipos de listas para realizar el conteo de las colecciones, la lista numérica idiosincrática (1, 13, 19...), la lista de letras (A, B, C...) y la lista convencional (1, 2, 3, 4...) las cuales conservan un orden estable y repetible. Hay que tener en cuenta que el aprendizaje de la cadena numérica en el orden estable no indica necesariamente conocimiento de cardinalidad, en un estudio realizado por Wynn (1992) se obtiene que casi todos los niños recitaron y señalaron los elementos hasta el 10; sin embargo, no fueron capaces de construir colecciones de 5 elementos; aunque sabían la lista de conteo.

Con relación al principio de cardinalidad se puede decir que éste da cuenta de que la etiqueta usada al final representa la propiedad del conjunto como un todo. El niño no solo debería ser capaz de asignar una etiqueta en un orden establecido, sino que también debe ser capaz de extraer el último elemento asignado y reconocer que la etiqueta de ese elemento

representa el número de elementos de la colección; sin embargo, tal como lo establece Fuson (1988) los niños pueden tener la regla de la última palabra, en la cual el niño dice el último número en la serie numérica sin tener conciencia de que ese último número representa la cantidad de la colección.

La adquisición y desarrollo de este principio es algo complejo, el hecho de adquirir el principio de correspondencia uno a uno y el de orden estable resulta fundamental, pero no garantizan la adquisición de este principio. Wynn (1992) analiza los resultados de la tarea “dar n número” (en la que se les pide a los niños dar una determinada cantidad de elementos) y de la tarea “¿cuántos hay?” (En la cual los niños cuentan colecciones entre dos y seis elementos y responden a la pregunta). En los resultados los niños realizan un conteo y repiten la última palabra, los niños podrían aprender a responder a la pregunta de ¿Cuántos hay? Repitiendo la última palabra número sin saber qué indica la numerosidad de la colección contada. Esto coincide con hallazgos previos (Fuson, 1988; Frye et al.1989; Wynn, 1990 citados por Fuson 1998) en los que algunos niños aprendieron la “regla de la última palabra” antes de adquirir una comprensión del principio de la palabra cardinal.

Hasta aquí, los tres principios expuestos, correspondencia uno a uno, orden estable y cardinalidad son los principios de ¿Cómo contar?, en adelante se exponen los principios de abstracción y de irrelevancia de orden que hacen referencia al ¿Qué contar?

El principio de abstracción, por su parte, hace alusión a los objetos que se constituyen como contables para los niños. De acuerdo a algunas investigaciones se podría llegar a pensar que los niños tienen algunas restricciones sobre la naturaleza de lo que se constituye como una colección contable, Ginsburg (como se citó en Gelman, 1978) considera que para los niños el CNN está ligado a un contexto concreto. Más aún, Gast (como se citó en Gelman, 1978) sugiere que los niños se comportan como si las colecciones heterogéneas de elementos no fueran una colección de objetos contables.

Mientras que el principio de irrelevancia de orden consiste en reconocer que es irrelevante el orden en el cual los elementos de un conjunto son etiquetados. Se puede empezar por la derecha, la izquierda o la mitad al contar, puesto que al final el resultado del proceso de conteo conservará el cardinal independientemente del orden en que se cuenta.

Según Gelman (1978), al parecer los niños adquieren el principio de orden estable y correspondencia uno a uno antes del principio de cardinalidad, y después se adquieren los principios de abstracción y orden irrelevante que demandan una mayor exigencia.

Por último, los niños conocedores de los principios manejan el conteo para reconocer la cantidad de una colección incluso con numerales grandes y poco a poco reconocen que cada numeral de la lista se refiere a un conjunto de una cardinalidad n y el siguiente numeral de la lista se refiere a un conjunto con cardinalidad $n + 1$, (Le Corre y Carey, 2007).

Además de las actuaciones de los niños relacionadas con el conteo, también se presentan a continuación algunas investigaciones relacionadas con el aprendizaje del CNN y el SND las cuales explicitan las actuaciones de los estudiantes al resolver tareas que involucran los conceptos cardinal, orden y agrupación.

2.2.3.4 Algunas consideraciones sobre el aprendizaje del CNN y el SND.

Continuando con lo anterior se presentan en esta parte algunas investigaciones que se han realizado en torno al CNN y el SND en los primeros grados de la escolaridad, las cuales dan a conocer algunas estrategias que utilizan los estudiantes para realizar el conteo, los niveles de dominio de la secuencia numérica, las dificultades al adquirir la secuencia numérica, las hipótesis sobre la manera en que funciona el SND, entre otras.

Sobre el CNN. Diferentes autores como Chamorro (2005), Castro, et al. (1999), y Gonzales y Weinstein (2008) se han interesado por realizar investigaciones relacionadas con el aprendizaje del CNN en los primeros grados de la escolaridad, algunas de sus posturas se presentan a continuación.

Chamorro (2005) expone algunas ideas sobre las estrategias que utilizan los estudiantes para determinar el cardinal de una colección, también habla sobre las expresiones que utilizan los estudiantes para establecer relaciones de orden y finalmente da a conocer algunos niveles en el proceso de adquisición de la secuencia numérica verbal.

La autora da a conocer que para determinar el número de elementos de una colección los estudiantes usan el conteo súbito (subitización), la estimación y el conteo. El conteo súbito tiene que ver con la operación que permite, en un golpe de vista y sin realizar un conteo,

establecer con exactitud la cantidad de objetos de una colección, en un tiempo corto (esta estrategia se usa en colecciones menores o iguales a 3 en niños). La estimación, por su parte, permite una aproximación numérica en diferentes colecciones y el conteo se utiliza en colecciones en las que falla la subitización.

Con relación al concepto de ordinalidad, Chamorro (2005) expone que los estudiantes pocas veces utiliza expresiones como “mayor que” o “menor que” para dar a conocer relaciones de orden entre cardinales, más bien utilizan términos comparativos “más que” o “menos que”.

La autora expone además, que el estudiante al adquirir la cantinela enfrenta diferentes niveles de aprendizaje:

- Adquisición término a término: adquisición de términos uno a uno hasta 20.
- Control a través de la serie elemental: sabe que 25 va después de 24 porque 5 va después de 4.
- Conocimiento de un esquema con dos posiciones: los números posteriores a 20 deben ir precedidos de 2 y seguir después con la serie numérica elemental: 21, 22, 23, 24
- Adquisición de la sucesión de las decenas: adquisición del léxico de las decenas
- Sistematización de la sucesión de las decenas

Respecto a esto último, es decir con el proceso de adquisición de la cantinela, Castro, et al. (1999) dan a conocer que los estudiantes presentan varios niveles de dominio de la secuencia numérica (Fuson y Hall como se citó en Castro, et al. 1999)

- *Nivel cuerda*: la sucesión de términos comienza en uno y los términos no están diferenciados;
- *Nivel cadena irrompible*: la sucesión de términos comienza en uno y los términos están diferenciados,
- *Nivel cadena rompible*: la sucesión de términos puede comenzar a partir del término a ,
- *Nivel de cadena numerable*: la sucesión consiste en contar n términos a partir de a para dar otro número b como respuesta.

- *Nivel cadena bidireccional*: la sucesión de números se puede recorrer hacia adelante o hacia atrás, rápidamente desde un término cualquiera.

En el proceso de adquisición de la secuencia numérica los estudiantes presentan algunas dificultades, entre ellas se reconocen las siguientes (Gonzales y Weinstein, 2008)

- Dicen la secuencia numérica estableciendo un orden propio de las palabras número
- Dicen la serie numérica atendiendo a su hipótesis sobre el orden de la serie numérica “diez y uno”, “diez y dos”, “diez y tres”... etc.
- Desconocimiento del nombre del cambio de decena (veinte, treinta)

Sobre el SND. A continuación se presentan algunos planteamientos de autores que han realizado sus investigaciones con relación a la enseñanza y el aprendizaje del SND tales como Gonzales y Weinstein (2008), Kamii (2000), Lerner y Sadovsky (1994), Castaño (1997), y Saxton y Cakir (2006).

Gonzales y Weinstein (2008) presentan como características del SND, la base diez, el valor de cada signo (en el cual cada signo posee un valor absoluto y un valor relativo), los agrupamientos de diez y el cero (que representa ausencia de agrupamiento en un determinado orden). Las autoras además de las características del sistema también reconocen que el primer contacto de los niños al SND se realiza desde el contexto en el cual los niños escuchan y repiten las palabras números, primero de forma aislada y luego en forma ordenada.

Teniendo en cuenta lo anterior, se reconoce la idea de que los estudiantes tienen experiencias numéricas previas que pueden ser aprovechados en la escuela. Tales conocimientos permiten la elaborar hipótesis propias sobre la manera en que funciona el SND. Por un lado, se puede afirmar que los niños de los primeros cursos piensan aditivamente $30 = 10 + 10 + 10$ y para ellos es fácil hacer grupos de diez objetos empíricamente (Kamii, 2000). Por otro lado, en el proceso de construcción de la escritura de los números los estudiantes pueden establecer relaciones de orden; por ejemplo, entre los números de diferente cantidad de cifras, el mayor es el que tiene mayor cantidad de cifras; y entre dos números de igual cantidad de cifras, se reconoce que la posición de las cifras determina cual es el mayor, dicho de otra manera “el primero es el que manda” (Lerner y Sadovsky, 1994).

Generalmente en la escuela se considera que cuando el niño cuenta, lee y escribe los números, y además maneja las casillas que representan las unidades las decenas y las centenas, entonces comprende el sistema decimal de numeración; sin embargo, estos conocimientos no son suficientes al resolver problemas. Al comprender este concepto el estudiante podría cuantificar objetos formando grupos de diez, utilizar el concepto de valor relativo, descomponer cantidades usando sucesión de unos en dieces, de cien y mil, comprender la adición y la multiplicación (Castaño, 1997), además usar ciertas habilidades que tienen una función potente en la adquisición del conocimiento del SND como el conteo, los cambios (un elemento puede ser equivalente en valor a una colección de diez unidades) y las particiones o descomposición numérica (Saxton y Cakir, 2006).

Finalmente, en el aprendizaje del SND es muy importante el significado que le asignan los estudiantes a las representaciones simbólicas; en este sentido, Castaño (1997) reconoce las etapas por las que pasa el niño en la asignación de significado a las representaciones simbólicas

- Significación global, no hay comprensión del valor relativo de las cifras.
- Significación aditiva: $87 = 80 + 7$
- Significación aditiva multiplicativa: $87 = (8 \times 10) + 7$
- Significación polinomial : $87 = 8 \times 10^1 + 7 \times 10^0$

De manera que, las operaciones tienen un papel importante en el significado que se le asigna a las representaciones simbólicas pues aportan a la comprensión de dos principios del SND: el decimal y el posicional. Así, a continuación se presentan algunas actuaciones de los estudiantes al resolver tareas que involucran la adición, tanto si se trata de estrategias correctas como erróneas.

2.2.3.5 Sobre las operaciones aditivas. En la medida en que se construye el CNN y el SND también se construye el concepto de las operaciones, de ahí su importancia en el desarrollo de pensamiento matemáticos en los primeros años. En esta parte se dan a conocer los planteamientos de algunos autores (Chamorro, 2005; Fuson, 1990; Kamii, 2000) que exponen sus posturas sobre el aprendizaje de las operaciones que involucran la adición en los primeros años.

Atendiendo a la realización de operaciones en los primeros años Chamorro (2005) propone realizar cálculos aditivos para que los estudiantes empiecen a familiarizarse con los números y las propiedades de las operaciones para mejorar la comprensión del SND. Algunas tareas para el desarrollo de cálculo aditivos son: aprendizajes dobles ($2+2$), descomposición del 10, descomposición con ayuda de un número (ej. $6=5+1$) y el paso de la decena anterior a la posterior ($10-20$), etc.

Siguiendo con la idea anterior Fuson (1990) muestra que al momento de realizar problemas aditivos los estudiantes presentan algunas dificultades asociadas a la falta de comprensión de la estructura conceptual de los numerales multidígito lo cual incide en el aprendizaje de la estructura aditiva. Los numerales multidígito son las representaciones de los números compuestos de uno o más tipos de multiunidades (unidades, decenas, centenas, etc.); estos números pueden expresarse por medio de palabras número o símbolos escritos. Desde esta perspectiva, realizar operaciones aditivas es complejo pues el niño debe ir desarrollando una estructura conceptual multidígito para comprender la operación.

Cuando el niño resuelve la adición de un solo dígito por ejemplo: $5+7$ utiliza diferentes estrategias, entre ellas:

- Sumar dos números realizando el conteo completo: se cuenta y representa el cinco y el siete por medio de objetos, y por último se cuenta la totalidad de todos los objetos.
- El conteo desde el primer número: partir del número 5 y seguir el conteo de las siete palabras número siguientes hasta llegar a doce.
- El conteo a partir del número más alto: partir del número 7 y seguir el conteo de las cinco palabras número siguientes hasta llegar a doce.
- Derivación de los datos: “dobles” para resolver $5 + 7$ se usan los dobles $5+5 = 10$ se agrega 2 y da como resultado doce.
- Método de 10: para resolver $7 + 5$ se utiliza siete más tres es diez, luego se añade 2 para un total de doce.

Para realizar la suma con dos dígitos o más primero el niño debe identificar las unidades que se representan en los numerales, luego debe reconocer que la adición se realiza con las unidades del mismo tipo, y por último operar con las unidades del mismo tipo, teniendo en cuenta que cuando las unidades son mayores a 9 se representa en una unidad de

orden superior. Cuando el niño no tiene en cuenta estos componentes se pueden presentar estrategias erróneas que imposibilitan la resolución de un problema que involucran la adición error al alinear un algoritmo, llevar en la columna equivocada, desaparecer el uno que llevaba, escribir la suma total en cada columna, etc.

En esta línea, Kamii (2000) reconoce el objetivo de la adición de números de una cifra es que “los niños trabajen sumando números y que construyan un entramado de relaciones numéricas” (p. 85) atendiendo a la comprensión del concepto del número natural. Para la autora, el objetivo para la adición de números de dos cifras es “que los niños inventen sus procedimientos para sumar números de dos cifras y que aprendan en este proceso el valor de la posición” (p. 87). Para los niños es más sencillo entender los procedimientos que han inventado en lugar de memorizar procedimientos mecánicos. Cuando a los niños no se les dice cómo sumar o cómo restar, los procedimientos que inventan son creativos y útiles. Por ejemplo: para resolver la adición $13 + 13$ los estudiantes utilizan los siguientes procedimientos

$10 + 10 = 20$	$10 + 10 = 20$
$3 + 3 = 6$	$20 + 3 = 23$
$20 + 6 = 26$	$23 + 3 = 26$

Se puede notar que los niños empiezan a pensar en las decenas, y a comprender de manera natural la función del valor posicional. Así mismo, en una investigación realizada por Hall-Kent (como se citó en Kamii, 2000) el 34 % de los niños que reinventaron el procedimiento de la sustracción, llegaron a la respuesta correcta. El hecho de que haya poca reinención muestra también que el procedimiento de la resta es complejo para niño.

Anteriormente se presentaron las actuaciones de los estudiantes en lo referente a los principios de conteo, el aprendizaje del CNN y el SND y las operaciones aditivas, con los cuales, el estudiante puede comunicar su conocimiento sobre el objeto matemático. Ahora se presentan algunos sistemas de representación del CNN y el SND tales como las representaciones simbólicas, los estratos de los SMS, las representaciones verbales (palabras número) y las representaciones de los materiales manipulativos, los cuales hacen parte del SMS que utilizan los estudiantes para comunicar su conocimiento sobre CNN y el SND.

2.2.3.6 Algunas representaciones simbólicas de los sistemas de numeración.

Zhang y Norman (1993) estudian la representación de los sistemas de numeración y concluyen que estos presentan dos dimensiones diferentes, el sistema de dimensión 1 y el sistema de dimensión 1x1.

Los sistemas de dimensión 1 (ver tabla 1) son simples, permiten representar los números por medio de objetos físicos, por ejemplo, el sistema de conteo con piedras (una piedra para “uno”, dos piedras para “dos”...) y el sistema de conteo por medio de las partes del cuerpo (dedos, muñeca, codo, hombro). Las propiedades de este sistema permiten hacer comparaciones y operaciones simples, con las cantidades pequeñas, pues el tamaño de la representación del número es proporcional al valor numérico; sin embargo, por este motivo, la representación y las operaciones con cantidades grandes se tornan más difíciles.

Tabla 1.

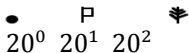
Ejemplos de sistemas de numeración de dimensión 1 (Zhang y Norman, 1993, p. 3).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	100	200
Egipto										∩	∩∩	∩∩∩	∩∩∩∩
Azteca	•	••	•••	••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	•••••	••	•••••	•••••

Los sistemas de dimensión 1x1 (Ver tabla 2) permiten descomponer un número en agrupaciones iguales denominados base, estas bases se pueden elevar en diferentes potencias, posibilitando la representación simbólica de los números por medio del polinomio de la forma $\sum a_i X^i$. Por ejemplo, al tomar como referencia el sistema de representación indo-arábigo, el primer dígito del número 352 tiene un valor de 3 en la dimensión de la base, y 2 en la dimensión de la potencia (3×10^2), el valor real que representa el dígito es 300.

Tabla 2.

Ejemplos de sistemas de numeración de dimensión 1 x 1 (Zhang y Norman, 1993, p.3).

Sistemas	Ejemplo (447)	Base	Dimensión de Base	Potencia
Abstracto	$\sum a_i x^i$	x	a_i	x^i
Indo-Arábigo	447 $4 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$	10	0, 1, 2 ..., 9	$10^2, 10^1, 10^0$
Azteca	 $1 \times 20^2 + 2 \times 20^1 + 7 \times 20^0$	20	La cantidad de 	 $20^0 \ 20^1 \ 20^2$

Teniendo en cuenta lo anterior, aunque Zhang y Norman (1993) muestran diferentes sistemas de numeración afirman que las notaciones indo-arábigas son más utilizadas porque “integra la representación y el cálculo en un solo sistema, además de sus otras características agradables de codificación de información eficiente, compacto, extensibilidad, representación

espacial, base pequeña, la eficacia de cálculo, y especialmente importante, la facilidad de su escritura” (p.21).

2.2.3.7 Algunas Investigaciones con relación a los estratos de los SMS. Scheuer et al. (2000) afirman que el sistema de representaciones simbólicas es conceptual e implica el dominio de lo numérico en su sentido más amplio. Para evidenciar la complejidad del sistema, los autores realizan una investigación que permite comprender las notaciones de los niños al involucrar cantidades diferentes.

En la investigación los participantes realizaron una tarea en la que se debían anotar las cantidades que se les proponían y se obtiene que los niños utilizan diferentes notaciones para representar las cantidades, las cuales se pueden agrupar en siete categorías:

- 1) *Notaciones numéricas convencionales*: fueron implementadas en el 62,5 % de la totalidad de las respuestas, las notaciones pueden ser estables o tener inversiones en la orientación de las cifras. Es necesario destacar que todos los niños utilizaron al menos una notación convencional y en los niños mayores la presencia de esta categoría fue cada vez más frecuente.
- 2) *Notaciones múltiples*: esta categoría corresponde al 28,5 % de las notaciones no convencionales. Se expresa el número de manera gráfica, basando la notación en el número de elementos de una colección, usando la correspondencia uno a uno. Pueden ser de carácter pictográficos, transicional o pseudocifras (ver ilustración 7).

Pictográficos



Transicionales

AMX1800

Pseudocifras

5112498

Ilustración 7. Notaciones múltiples (Scheuer et al., 2000)

El otro 71, 5 % de las notaciones no convencionales se presentan en:

- 3) *Formas para números*: producción de una única grafía arbitraria que no refleja ninguna de las características de la cantidad representada, son producciones inespecíficas y no brindan información sobre el número o la colección
- 4) *Formas para clases de números*: se registran características particulares de los números a través de índices diversos. La notación captura algunos rasgos del número. Por ejemplo: si es grande se producen notaciones de gran tamaño o se regula

la cantidad de acuerdo a la posición en la serie numérica del número representado, teniendo en cuenta el número de cifras y la posición del número.

- 5) Números logográficos: El niño interpreta cada palabra como una representación digital, ignorando la posicionalidad, al parecer busca una correspondencia estricta entre lo oral y lo simbólico.
- 6) Notaciones compactas: es parecido al anterior, pero en este caso se empieza a tener más conciencia de la notación posicional transcribiendo solo algunas o todas las palabras numéricas de forma abreviada.
- 7) Otras: que corresponden al 3%, no encajan en las categorías anteriores se incluyen las que contienen errores y tienen escasas producciones sobre el registro de la naturaleza de los objetos que la conforman.

En esta investigación se da a conocer que la adquisición de las representaciones simbólicas es un proceso lento y complejo en el que conviven formas convencionales y no convencionales de escritura. El aprendizaje del SND está ligado al conocimiento de los números en el modo oral y en la aprehensión del mismo.

2.2.3.8 Palabras número. De acuerdo a Orozco y

Hederich (2002) la expresión numérica verbal está compuesta por una partícula que marca cantidad, como por ejemplo uno, ocho y una partícula que expresa potencia de diez, como por ejemplo enta, ce, cien.

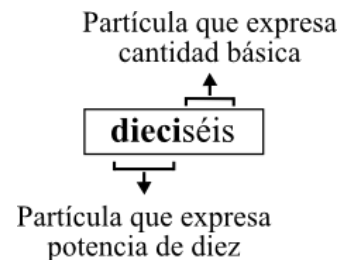


Ilustración 8. Palabra número y su carácter operatorio

A su vez, las expresiones numéricas verbales, tienen un

carácter operatorio en el que interviene la suma y la multiplicación (Ver ilustración 8), aunque en ocasiones estas operaciones no se marcan de manera específica en las palabras número, por ejemplo:

Treinta y dos → Denota explícitamente la composición aditiva con la conjunción (y)

Cator/ce → Denota implícitamente la composición aditiva marcada con slash (/)

Ve[inte] → Denota la composición multiplicativa marcada con paréntesis cuadrados

Para pasar de la representación verbal a la representación escrita, el niño debe tener en cuenta que el sistema de representación indo-arábigo exige abstenerse de codificar todas las partículas sintácticas de las palabras número, pues reclama el dominio del principio de la

composición aditiva y multiplicativa para poder asignar el valor posicional a cada partícula. Al ignorar este hecho se podrían presentar dificultades en el paso de un formato a otro y ocasionar errores de escritura.

De acuerdo a los resultados de la investigación de Orozco y Hederich (2002) estas dificultades se pueden ocasionar por dos razones

“1) en el proceso de transcodificación establecen correspondencias entre las expresiones verbales que fragmentan los numerales que escriben ignorando o codificando las partículas sintácticas que expresan potencias de diez; 2) la utilización inicial y defectuosa de las reglas de composición o de valor posición, propias de la notación arábica interfiere con la codificación.” (p.22)

2.2.3.9 Sobre los materiales manipulativos. En los procesos de enseñanza y aprendizaje se utilizan diferentes materiales manipulativos que comunican el SND, entre ellos se encuentran los bloques de Dienes, las fichas de colores, el ábaco y el dinero.

En primer momento se presentan los bloques de Dienes y las fichas de colores. Los bloques de Dienes consisten de varios cubos y prismas cuadrangulares regulares; mientras que las fichas de colores son cuadrados que se pintan con colores diferentes, en este material se usan tantos colores como unidades de diferente orden se quieran representar.

Las agrupaciones de diez en los bloques de Dienes se presentan de manera física (Ver ilustración 9) por medio de barras (decena), tablas (centena) y cubos (unidad de mil). Mientras que en las fichas de colores la noción de agrupación de 10 unidades se ve representadas en el color de cada ficha, amarillo (unidad), azul (decena), rojo (centena), unidad de mil (verde).

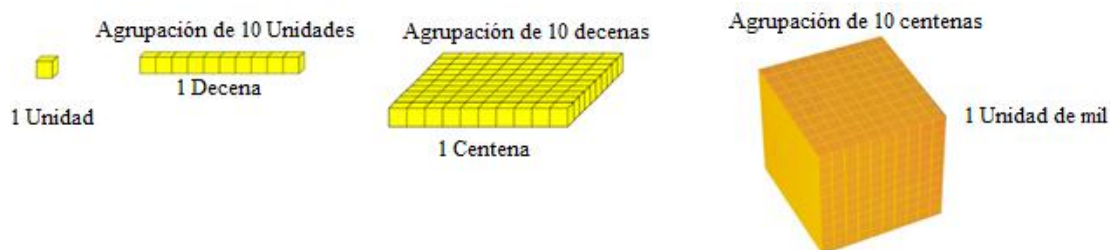


Ilustración 9. Cubos de Dienes, Unidad, Decena, Centena y Unidad de Mil.

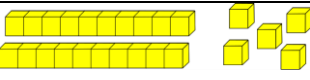
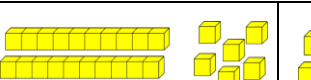
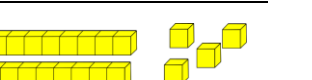
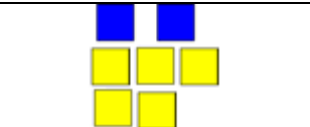
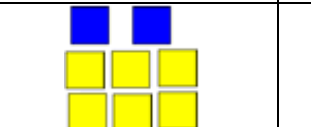
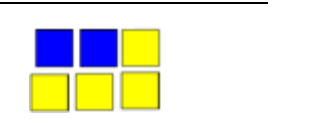
La cardinalidad se obtiene al determinar la cantidad que representa cada colección de objetos atendiendo a la estructura física (cubos, barras, tablas) o al color. Cabe resaltar el

carácter operatorio (aditivo y multiplicativo) propio del SND también puede ser representado con los objetos concretos.

La noción de orden constituida desde el concepto de sucesor y antecesor (Ver tabla 3), se puede apreciar en el material a medida que se agrega una unidad ($n + 1$) o se quita ($n - 1$).

Tabla 3.

Cubos de Dienes y fichas de colores, representación del número 25, su sucesor y antecesor

	Representación del número 25	Sucesor 26	Antecesor 24
$2 \times 10 = 20$ $5 \times 1 = 5$ $20 + 5 = 25$			
			

Broitman, Grimaldi y Ponce (2011) dan a conocer que a través del tiempo se ha intentado materializar los agrupamientos por medio de diferentes materiales (Cubos de Dienes, atados de palitos) para representar las unidades de diferente orden (unidades, decenas, centenas); sin embargo estas representaciones son parecidas a los sistemas de representación no posicional. Por tal motivo Broitman et al. (2011), proponen otros tipos de materiales entre ellos el ábaco y el dinero.

Por un lado, Castellanos, González, Murcia (2008) describen el ábaco como una de las primeras herramientas de cálculo de la humanidad. El ábaco posee una base rectangular, que sostiene barras en madera a igual distancia una de la otra, cada una de las barras está acompañada por nueve fichas, cada ficha tiene un valor de acuerdo a su posición (Ver ilustración 10). En caso de que se deba representar la cantidad 10 en una misma barra, las fichas son retiradas y remplazadas por una ficha en la barra de orden superior, esto es lo que se llama “principio de sustitución”. La noción de agrupación en este material no se ve de manera explícita.

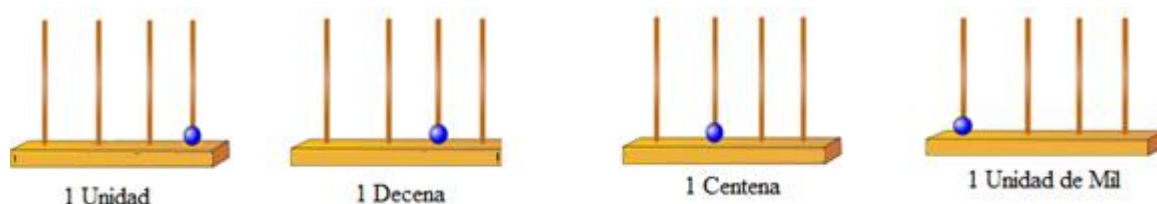


Ilustración 10. Ábaco, representación de 1 unidad, 1 decena, 1 centena y 1 unidad de mil

Por otro lado, Broitman et al. (2011) dan a conocer que las tareas que trabajan la composición de descomposición de cantidades son más útiles cuando se interpreta directamente en la escritura del número. El contexto del dinero tiene la ventaja de relacionar el trabajo con las prácticas sociales, además este contexto puede resultar familiar para los alumnos. La noción de agrupación se ve representada en el valor que aparece en cada moneda (ver ilustración 11).



Ilustración 11. Dinero, Unidad, Decena, Centena y Unidad de Mil

La cardinalidad se obtiene al determinar la cantidad que representan cada moneda dependiendo de la representación simbólica representada en ella, cabe resaltar el carácter operatorio (aditivo y multiplicativo) propio del SND que permite representar la cantidad. La noción de orden constituida desde el concepto de sucesor y antecesor (Ver tabla 4), se puede apreciar en el material a medida que se agrega una unidad ($n + 1$) o se quita ($n - 1$). Por ejemplo:

Tabla 4.

Monedas, representación del número 22, su sucesor y antecesor

Representación del número 22	Sucesor 23	Antecesor 21
$10 \times 2 = 20$ $2 \times 1 = 2$ $20 + 2 = 22$		
		

En la investigación que realizan los autores en la que involucran el dinero como material manipulativo para resolver diferentes problemas dan a conocer una mejor comprensión del SND. En los problemas en los que se le exige a los estudiantes componer una cantidad propicia la aparición de agrupamientos. Por ejemplo: para componer 1.345 teniendo solamente monedas de 100 de 10 y de 1 propicia la aparición de agrupamientos de a 100 para conformar el 1000. Las tareas con el dinero evidencian que los estudiantes también pueden llegar a memorizar diferentes tipos de agrupamientos de a diez 10 (de 100) son 1.000; 3 (de 100) son 300; 4 (de 10) son 40. Y poco a poco van comprendiendo la posicionalidad propio

del SND. El uso del dinero permite además que los estudiantes reconozcan el uso del número en un contexto social, avancen en la comprensión de la escritura convencional y el acercamiento a tareas de cálculo (González y Weinstein, 2008).

Teniendo en cuenta los planteamientos hasta aquí expuestos sobre el componente de cognición y de comunicación, se puede decir inferir que el modelo para procesos cognitivos tiene una relación directa con el modelo de comunicación, dado que es a través de la comunicación de los SMS que se dilucidan algunos procesos cognitivos de los estudiantes. Sería muy ambicioso pretender mostrar todos los procesos cognitivos o todas las posibles maneras de comunicar el SND debido a lo complejo y extenso del tema; más bien, se presenta un horizonte sobre los principios del conteo, el aprendizaje del CNN y el SND, las operaciones aditivas, las palabras número, las representaciones simbólicas y los materiales manipulativos.

A continuación, se exponen a manera de síntesis algunas reflexiones que albergan aspectos claves en torno a los procesos cognitivos y la comunicación los cuales fundamentan el MTL inicial:

- Teniendo en cuenta lo expuesto sobre el principio de correspondencia uno a uno, el principio de orden estable y el principio cardinal, desde un enfoque didáctico es necesario que el docente no solo conozca en qué consisten estos principios, sino también que estén atentos a las actuaciones de los niños en términos de las posibles dificultades que se podrían manifestar en la adquisición del mismo. Dificultades que se pueden manifestar a través de diferentes tipos de errores, entre ellos, errores de particiones, de etiqueta, de coordinación (inicio, final, exceso y desincronía), de orden, etc. Identificar los errores podría permitir comprender los procesos cognitivos del niño y poder propiciar la ejecución de estrategias de tratamiento para favorecer el desarrollo de los principios de conteo.
- Con relación al principio de cardinalidad es necesario tener presente que la adquisición del principio de correspondencia uno a uno y de orden estable son parte fundamental para el desarrollo de este principio, pero no son suficientes. Aunque el niño diga el último número de la serie numérica, esto no indica necesariamente que se ha apropiado del principio de cardinalidad. Este principio es complejo y su

adquisición hace parte de un proceso lento. Por lo tanto, no toda tarea desarrollada evidencia comprensión del principio de cardinalidad. En este sentido se destacan las tareas “dar un número” y “señalar a x” propuestas por Wynn (1992), en las cuales, los niños muestran comprensión de este principio.

- El principio de abstracción y de irrelevancia de orden demandan una mayor exigencia para el niño. Respecto al principio de abstracción, en la propuesta de aula se debe tener presente el tipo de objetos que va a utilizar para realizar el conteo; pues en algunas ocasiones para los niños las colecciones heterogéneas no se constituyen como objetos contables. Por otro lado, el principio de irrelevancia de orden requiere del desarrollo de características y habilidades más complejas, de ahí la importancia de realizar tareas que promuevan la reflexión, por parte del estudiante, de que el número cardinal resulta independientemente del orden en el cual un objeto particular es contado.
- Los principios de conteo pueden ser aprovechados ampliamente por los docentes, quienes podrían diseñar tareas direccionadas al dominio de las habilidades necesarias para adquirir cada uno de los principios y la capacidad de aplicar de manera coordinada cada uno de ellos; en contraposición a las tareas repetitivas (planas) y sin sentido que regularmente se ponen en juego en el aula de clase.
- Se pueden realizar algunas anotaciones respecto al aprendizaje de la cardinalidad y el orden en la secuencia numérica. En primer lugar, para determinar el cardinal de una colección, los estudiantes pueden usar la subitización, la estimación y el conteo, el uso de una u otra está asociada a la naturaleza de la colección y a la adquisición de la habilidad para ejecutarla. En segundo lugar, en el aprendizaje de la secuencia numérica se pueden identificar distintos niveles de dominio de la secuencia, en este proceso los estudiantes se enfrentan con algunas dificultades las cuales han de superarse para poder adquirir la secuencia numérica convencional.
- Los estudiantes tienen contacto con el SND a través de la cultura y el contexto en el que se encuentran, muchos de ellos al ingresar a la escuela dicen algunos números y pueden escribirlos; más aún, los estudiantes en los primeros grados de la escolaridad elaboran hipótesis propias sobre la manera en que funciona el SND. Sin embargo,

hay que tener presente que el hecho de que los estudiantes mencionen, lean o escriban los números no indica necesariamente comprensión del SND, puesto que éste refiere a un proceso global ligado a la ampliación del CNN. Para promover el aprendizaje del SND el estudiante debe realizar un acercamiento al concepto de valor relativo, a los agrupamientos de diez, y a la composición y descomposiciones de cantidades utilizando grupos de diez, a la adición, etc.

- Los cálculos aditivos permiten que el estudiante se familiarice con los números, sus propiedades y el SND. Al realizar operaciones que involucren la adición el estudiante debe comprender la estructura conceptual de los numerales multidígito; es decir, debe comprender que los números poseen unidades de diferente orden. En el aprendizaje de la adición el concepto de agrupación es muy importante, frases como “llevar” o “prestar” solo cobran sentido cuando el estudiante comprende las agrupaciones de diferente orden que están inmersas en el número y su desconocimiento podría desencadenar el uso de estrategias erróneas al resolver operaciones aditivas.
- Existen diferentes métodos que el estudiante puede usar para resolver problemas aditivos. Es importante que el alumno los conozca e incluso invente sus propios métodos para resolverlos; a través de este ejercicio el estudiante podría dar a conocer su conocimiento sobre cómo funciona el SND y podría abrir un abanico de estrategias para resolver operaciones aditivas.
- En este trabajo de investigación se tendrán en cuenta dos sistemas de numeración, el de dimensión 1 que es el más simple y hace referencia en gran medida a la correspondencia uno a uno entre la cantidad de objetos y la representación simbólica; y en el sistema de dimensión 2 se tendrán en cuenta las notaciones indo-arábigas que son usadas convencionalmente. Los niños utilizan estas representaciones simbólicas (segmentos verticales, puntos o notaciones indo-arábigas).
- El SND tiene múltiples ventajas, entre ellas la escritura, el cálculo, la base pequeña que facilita el trabajo con las operaciones, entre otras. Debido a su uso casi universal el aula se constituye como un escenario propicio para enseñar las particularidades y características de este sistema de numeración.

- Existen diferentes materiales manipulativos que permiten representar algunas características del SND, tales como los bloques de Dienes, el ábaco, las fichas de colores y el dinero. En este trabajo se reconocen las potencialidades y desventajas de cada uno de los materiales antes mencionados, y se concluye que para la propuesta de aula se van a utilizar las monedas, porque representan las agrupaciones de manera simbólica, manejan el valor relativo, se pueden hacer cambios con monedas, se puede realizar conteo de monedas y los niños están relacionados en su contexto con el dinero.
- En el proceso de escritura de las notaciones indo-arábigas los estudiantes presentan diferentes SMS intermedios. Así, en el desarrollo de la propuesta de aula se pueden encontrar notaciones convencionales (notaciones indo-arábigas) y no convencionales (notaciones múltiples, las formas para números, las formas para clases de números, los números logográficos, las notaciones compactas, notaciones yuxtapuestas, notaciones concatenadas y nudos impropios), es necesario que el docente éste preparado para estudiar los SMS del aprendiz (intermedios) y tratar de que estos sistemas evolucionen hacia un SMS más abstracto.
- Se reconoce que el paso de las palabras número a la notación indo-arábiga y viceversa hacen parte de un proceso de transcodificación numérica que es difícil, este proceso da cuenta del carácter aditivo (sobreescritura) y multiplicativo (concatenación) de las palabras número en relación con la notación indo-arábiga. Por ello, se requiere de tareas que atenúen el paso del uno al otro.

2.2.4 Modelo de competencia formal. El modelo de competencia formal basado en el CNN y el SND se sustenta desde los planteamientos de Freudenthal (1991) en el análisis de fenomenología histórica y en el análisis de fenomenología pura.

El análisis de fenomenología histórica, determina cuáles son los fenómenos que el objeto organiza en momentos fundamentales de su desarrollo histórico; por lo tanto, se presentan los aportes que han realizado diferentes comunidades y civilizaciones como la Maya, la Inca, la Egipcia, la Romana, la Azteca, la China, la Babilónica, la India entre otras; con relación a los conceptos de correspondencia uno a uno, ordinalidad, cardinalidad, agrupación, el cero, el principio de posicionalidad, y el SND. Mientras que el análisis de la fenomenología pura es el

proceso mediante el cual se describen los fenómenos que están organizados en las matemáticas en su momento actual y sus usos; por lo tanto, se toma como referencia la teoría de conjuntos, con relación a la axiomática, los números naturales y el sistema de numeración.

2.2.4.1 El número en la prehistoria: cardinalidad, ordinalidad y conteo.

Inicialmente los hombres carecían de una concepción explícita de número; sin embargo, aprendieron a tomar ciertas conclusiones importantes para su vida, conclusiones que podrían denotarse de tipo cuantitativo. El hombre se basaba en la apreciación global del espacio ocupado por los objetos, desde una perspectiva sensitiva. A partir del reconocimiento de fenómenos cuantitativos algunas tribus podían establecer la distinción entre la unidad y el par, y algunas otras podían establecer la distinción entre la unidad, el par y la pluralidad (Conant, 1994; Gerdes, 2008).

Sin embargo, los números van más allá de la percepción. Las necesidades del hombre en tareas relacionadas con el comercio, la riqueza, el trabajo, los terrenos, las pertenencias, etc. en las que se demanda el uso de cantidades mayores a las que la percepción admite, permitieron la invención del primer procedimiento aritmético utilizado para llevar a cabo el conteo y la correspondencia uno a uno. El hombre empieza a utilizar algunas expresiones como por ejemplo: "Vi tantas gacelas como dedos tiene mi mano" en las que se usa la correspondencia uno a uno (Gerdes, 2008).

Al realizar la correspondencia uno a uno entre los objetos de una colección con los objetos de otra colección, se desprende una noción abstracta, que corresponde a lo que es común a las dos colecciones independiente de su naturaleza, el cardinal. Más aún, por medio de la correspondencia el hombre puede reconocer diferencias cuantitativas entre conjuntos y establecer relaciones de orden y de equivalencia entre cantidades (Anaconda, Arbeláez y Recalde, 1998).

El surgimiento de la noción de orden se evidencia en las culturas primitivas de diferentes maneras, algunas refieren a la técnica de conteo corporal como precursora del orden, otras hacen referencia al carácter religioso de los números y otras al carácter naturalista del concepto.

Con relación a la "técnica de conteo corporal" (Ifrah, 1987) se puede afirmar que consiste en tocar diferentes partes del cuerpo en un orden determinado hasta llegar a la parte

del cuerpo que se desea, de esta manera el hombre obtienen tantos objetos como partes del cuerpo ha tocado (Ver ilustración 12).

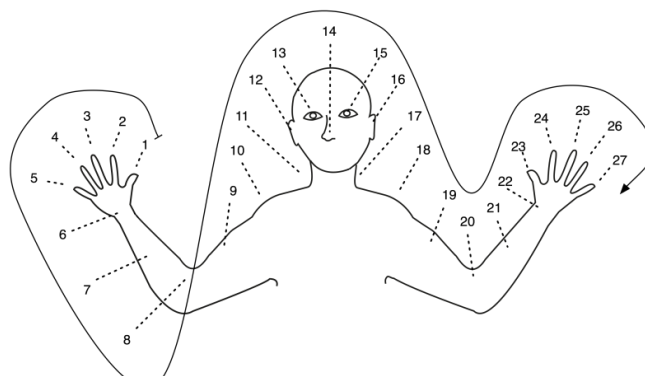


Ilustración 12. Técnica corporal utilizada por los Papúes en Nueva

Por otra parte, el carácter religioso que se le atribuía en su tiempo a los números posibilita la construcción de la noción de orden usando otras técnicas diferentes al conteo corporal. Según Ifrah (1987), un pastor musulmán de cierto país del Cercano Oriente por el temor ancestral del “pecado de la numeración” cuenta las ovejas recitando una letanía, de manera que pronuncia las sucesivas palabras del recitado cada vez que pasa una oveja ante él, cuando el último animal pasa, retiene la palabra correspondiente, palabra que simboliza la cantidad del rebaño. Del mismo modo, el hombre ha usado las canciones, las narraciones, la lista de nombres, los meses del año o las letras, en un orden establecido para determinar la cantidad de una colección.

De otro lado, Urton (como se citó en Blanco, 2009) exhibe la manera en que otras culturas (los Yoruba de África, los Mayas y los Incas) presentan la noción de orden desde la ontogénesis naturalista a partir de dos explicaciones antropológicas una con relación al tiempo y otra con relación a la reproducción. La primera explicación tiene que ver con la manera en que los Yoruba de África y los Mayas ordenaron el tiempo haciendo uso de los calendarios, en ellos se aprecia una relación biunívoca entre un evento natural y la posición en una secuencia ordenada en el tiempo. Y la segunda explicación tiene que ver con las sucesiones ordenadas que se dan en la reproducción. Los Incas usan los nombres mama, apaña, iskay apaña y kinsa apaña para designar, respectivamente, la primera, segunda, tercera y cuarta mazorca de la

planta. Incluso establecen relaciones de orden entre las mazorcas usando la propiedad transitiva⁶.

Teniendo en cuenta lo anterior, la noción de orden es indispensable en el conteo. Al respecto, Anacona *et al.* (1998) mencionan que el número asignado al último elemento de la colección es denominado número ordinal de la colección, un sistema ordinal debe cumplir con dos características: sus términos deben encontrarse en secuencia y ser inagotables (encontrarse en sucesión, 1, 2, 3, 4...).

Aunque se reconoce la noción de cardinalidad y la noción de orden en el conteo, no se deben tomar de manera independiente en el conteo y en la comprensión del CNN. Ambos conceptos están estrechamente ligados, el hombre comprende el número en la medida en que comprende el número como cardinal y ordinal. En el conteo el número cardinal determina la pluralidad de una colección, mientras el número ordinal es el elemento de un conjunto modelo que se hace corresponder al último componente de la colección, es decir al último elemento en el proceso de contar (Anacona *et al.*, 1998).

Respecto a la noción de sucesor, el hombre puede construir la serie numérica agregando cada vez un elemento al conjunto. Teniendo en cuenta el orden de la sucesión aparecen los números naturales, los cuales se obtienen sucesivamente, a partir de “uno”, y añadiendo la unidad al número que le antecede, a esto se le llama principio de recurrencia o noción de sucesor.

Todo lo anterior, pone en relieve varios elementos importantes en términos históricos para llegar a la espléndida facultad de contar. De un lado, el hombre primitivo en un comienzo basaba su pensamiento numérico en la apreciación global del espacio ocupado por los objetos desde el aspecto perceptivo. Fueron las necesidades del hombre, las que lo impulsaron al descubrimiento del primer principio aritmético para llevar a cabo el conteo, la correspondencia uno a uno, principio que permite un acercamiento a la comprensión de la noción de cantidad; dicho principio junto con la propiedad transitiva y el principio de recurrencia (noción de sucesor) son conceptos fundamentales en la comprensión del número como cardinal y como ordinal. En síntesis, cuando el hombre comprende el número como

⁶ Propiedad transitiva, es decir: sean a , b y c elementos del conjunto A , entonces se cumple que: si aRb y bRc entonces aRc . Sea R : cronológicamente mayor, a : *mama*, b : *apaña* y c : *iskay apaña*, entonces si aRb (*mama* es cronológicamente mayor que *apaña*) y bRc (*apaña* es cronológicamente mayor que *iskay apaña*) entonces aRc (*mama* es cronológicamente mayor que *iskay apaña*)

cardinal y como ordinal tiene las herramientas necesarias para poder llevar a cabo el conteo de los elementos de la colección.

2.2.4.2 Edad antigua: La agrupación y la representación simbólica del número.

Cuando el hombre reconoce y diferencia el aspecto cardinal y ordinal del número, y además de ello empieza a contar colecciones cada vez más amplias, es ahí donde se encuentra con el problema de ¿Cómo contar colecciones cada vez más amplias?

Bishop (1999) da a conocer que el aumento de la cantidad de las colecciones propicia el espacio para desarrollar sistemas numéricos acordes a las necesidades de la sociedad. Para resolver la cuestión antes expuesta el hombre tuvo que recurrir a la agrupación, también conocida como la base del sistema de numeración. Blanco (2009) explica que para que el hombre tomara en consideración el concepto de base, primero tuvo que ser capaz de reconocer la multiplicidad como una nueva unidad. El hombre resuelve el problema antes expuesto, cuando reconoce que agrupando multiplicidades se crean nuevas unidades de orden superior. Al usar el concepto de agrupación, el hombre apela de manera indiscutible a las operaciones de la multiplicación y la adición.

En el transcurrir de los tiempos el hombre ha utilizado diferentes maneras de agrupar las colecciones obteniendo así distintos sistemas de conteo. Lancy (como se citó en Bishop, 1999) agrupa 225 diferentes sistemas de conteo en cuatro tipos: 1) Sistema de marcas referidas a las partes del cuerpo; 2) Sistemas de marcas usando contadores, como palitos, la base numérica esta usualmente entre 2 y 5; 3) Sistema numérico mixto de bases 5 y 20. 4) Sistema base 10.

Teniendo en cuenta lo anterior, cuando el hombre reconoce la multiplicidad como una nueva unidad, admite la noción de agrupamiento o de base para llevar a cabo el conteo. Sin embargo, para las tribus no era suficiente determinar una base para realizar el conteo, hace aproximadamente cinco mil años⁷, las sociedades avanzadas se vieron en la necesidad de representar de manera simbólica la cantidad dependiendo del sistema de numeración, el cual podría ser aditivo, multiplicativo y/o posicional.

Entre los sistemas de numeración aditivos se reconoce el sistema de numeración egipcio, el griego y el Romano. Alrededor del año 3000 a. C. aparece la numeración

⁷ Hacía al año 3300 a.C. los elamitas realizaron las primeras simbolizaciones de la cantidad en la superficie de esferas hechas con barro, estas simbolizaciones se denominaron las primeras cifras (Ifrah, 1987).

jeroglífica de los egipcios. Collette (1985) da a conocer que los egipcios utilizaban dos sistemas de numeración el sistema jeroglífico y el sistema hierático. El sistema jeroglífico es de base decimal, no posicional y con principio aditivo. Este sistema de numeración presentaba una limitación relacionada con la cantidad de repeticiones que deben hacerse para representar algunos números. Mientras que el sistema de numeración hierático es decimal, aditivo y el principio de repetición es sustituido por la realización de signos especiales. Es decir, hay signos para representar los números del 1 al 10 y los nudos (10, 20, 30...; 100, 200, 300...etc.). Por ejemplo, para representar el número 3577 se utilizan solo 4 símbolos en la notación hierática, mientras que en la notación jeroglífica se necesitaron 22 (Ver ilustración 13).

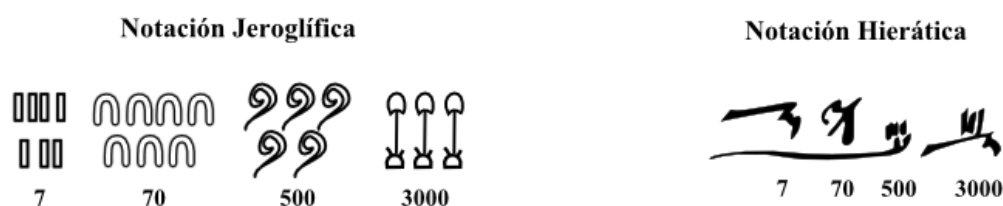


Ilustración 13. Representación del número 3577 en el sistema de numeración hierático y jeroglífico egipcio (Ifrah, 1987)

Así mismo, los griegos y los romanos, tenían un sistema de numeración aditivo. Las comunidades utilizaron las letras del alfabeto para representar los números. Estos sistemas en contraposición a los anteriores, tienen un carácter abstracto, diferente al carácter empírico de la matemática egipcia, al tratar de adoptar la letra como medida de pluralidad (Anaconda *et al.*, 1998); sin embargo, presentan una desventaja, es necesario crear un nuevo signo cada vez que se quiere representar una potencia de orden superior.

El hombre siguió buscando otras estrategias para representar el número de una manera más práctica y económica. Al respecto, los Chinos, los Babilonios y los Mayas dieron grandes aportes al sistema de numeración relacionados con la multiplicación, la posicionalidad y el cero.

La civilización China usó dos sistemas de numeración. uno de ellos, fundamentado en el principio multiplicativo y otro en el de posicionalidad. El sistema de numeración multiplicativo, es base 10, comprende trece signos fundamentales correspondientes a las nueve unidades y las cuatro primeras potencias de diez, usando el principio aditivo y multiplicativo se representan los números (Ver ilustración 14).

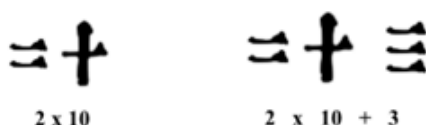


Ilustración 14. Representación del número 20 y 23 en el sistema de numeración Chino (Ifrah, 1987)

A pesar de este avance, no se pueden representar todos los naturales, cada vez que el hombre se encontraba con una potencia mayor era necesario crear otro símbolo, además era muy difícil realizar operaciones aritméticas con estas representaciones. El descubrimiento del principio de posición y el cero permitió eliminar este problema.

El principio de posicionalidad, fue descubierto a comienzos del segundo milenio a. C. en Mesopotamia. Para la comunidad babilónica, el valor de las cifras depende de la posición en la que se encuentren, el sistema era mixto (base 10 y base 60) y tenían sólo dos signos para representar todos los números el 1 (clavo) y el 10 (espiga). En el siglo III a. C. se crea el cero babilónico, pero el cero en esta época no era concebido como una cantidad, sino como un lugar vacío en el orden posicional. Por ejemplo: para escribir 7424(60) se utiliza el cero de la siguiente forma (ver tabla 5)

Tabla 5.

Representación del número 7424 en el sistema de numeración babilónico.

Cifras	Número 7424 en Base 60	Notación	Empleando el cero
 1 Clave  10 Espiga  0 Cero	$2(60)^2 + 3(60) + 44$		

Dos mil años más tarde, los chinos redescubrieron el sistema de numeración posicional, utilizando los símbolos numéricos del uno al nueve y los nueve primeros múltiplos de diez, alternando cada símbolo de derecha a izquierda (Collette, 1985). Para representar la nada en un orden determinado (ver ilustración 15), los chinos introducen casillas vacías en la representación del número (Ifrah, 1987) y solo a partir del siglo VIII d. C se crea la representación del cero, resolviendo la dificultad de representar la cantidad nula.



Ilustración 15. Representación del número 20.064 usando el sistema de numeración Chino.

Sin embargo, es a la civilización Maya a la que se le atribuye la elaboración de una numeración posicional y la invención del cero. Esta civilización usa un sistema de numeración vigesimal en el cual se utiliza símbolos como el punto (1), la raya (5) y la concha (0) (Ver ilustración 16).

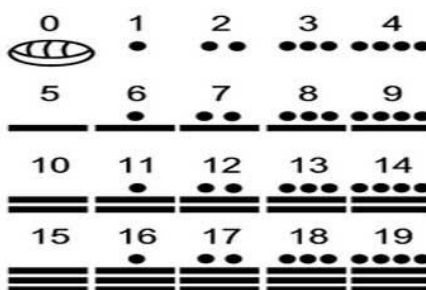


Ilustración 16. Sistema de numeración Maya

El uso de 19 cifras; la invención del cero y la posicionalidad les permitió simplificar sus expresiones. Para esta civilización el cero era considerado como ausencia de unidades de determinado orden; sin embargo, la elección de las potencias hace que el cero maya carezca de cualquier posibilidad operacional (Ifrah, 1987).

En conclusión, emplear agrupaciones en el conteo implica una relación clara, directa y fundamentada en operaciones de carácter aditivo y/o multiplicativo. En los sistemas antes expuestos, se reconoce la influencia de la noción de base en la representación notacional de las cifras, lo que parece común en ellos es la elaboración de símbolos para representar los números que comprenden la base⁸ (símbolos del 1 al 9), algunos de ellos incluyeron símbolos para representar los nudos (10, 20, 30... etc.) o para representar las potencias de las base (10^1 , 10^2 , 10^3 ... etc.). En este sumario, se pueden apreciar diferentes elementos que influyeron en la consolidación del SND, como la noción de base, la estructura aditiva, la estructura multiplicativa, la posicionalidad y la conceptualización del cero como un número, elementos

⁸ A excepción del sistema de numeración babilónico que solo utilizó tres símbolos: el 1, el 10 y el 0.

que influyeron de manera directa en los desarrollos matemáticos realizados en cada civilización.

2.2.4.3 La representación simbólica del SND actual: los árabes y los hindúes.

Aunque las civilizaciones hicieron grandes descubrimientos no construyeron la representación simbólica actual del SND. Esto se dio al norte de la India, alrededor del siglo III a C. donde nació el antecesor del SND también conocido como notación Brahmi y donde se establecieron las bases del cálculo escrito (Ifrah, 1987).

Los árabes tomaron el sistema decimal de la India desde el siglo VII d. C. a partir de una traducción al latín del libro Muhammad abn Musa al Khuwatizmi, sobre los números Hindúes. Con el libro traducido se pensó que los árabes eran los que habían utilizado esta escritura (Smith y Ginsburg, 1994).

-	=	≡	𐤀	𐤁	𐤂	𐤃	𐤄	𐤅		Brahmi (siglo III a. C.)
𐤆	𐤇	𐤈	𐤉	𐤊	𐤋	𐤌	𐤍	𐤎		Hindú (siglo V d. C.)
𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘	𑀙	𑀚	𑀛	𑀜	Sánscrito-devanagari (India)
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠	Árabe occidental (siglo X)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1294 d. J.C. Europa
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1442 d. J.C. Europa
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Siglo XV Europa
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Hacia 1524 Europa
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Actual

Ilustración 17. Cambios de los numerales desde el siglo III a.C. hasta la época actual

Estas dos culturas la hindú y la árabe, refinaron los sistemas antes descritos, de esta manera, la escritura del SND se hereda de oriente, construida a través de muchos siglos de historia (ver ilustración 17). A finales del siglo VI los sabios hindúes, pulieron el concepto de cero, fue concebido como un número que significa “vacío” o “nada”, este hecho constituyó un gran avance en la búsqueda de la representación adecuada y de fácil manipulación. (Ifrah, 1987).

El SND tiene como idea fundamental el predominio de la agrupación en paquetes de diez (unidades, decenas, centenas, etc.) y es posicional. Este sistema es base diez, utiliza diez notaciones (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0), los nueve primeros números representan las unidades de

primer orden y la cifra 0 representa el concepto de “cero”. La base diez, se escribe como 10 y representa una decena y cero unidades.

2.2.4.4 El número en la antigüedad griega, la edad media y el renacimiento. En la antigüedad griega se resalta la conceptualización del número desde los planteamientos de Pitágoras, Platón, Aristóteles, y Euclides (Anacona *et al.*, 1998).

Para los pitagóricos los números son en sí mismos “el elemento material, el elemento formal, las causas; son los principios que se encuentran en todos los seres de la naturaleza... En consecuencia, los números son cosas porque las cosas son números” (Brun, 1992). Los pitagóricos estudiaron los números según sus propiedades y los clasificaron en pares, impares, amistosos, perfectos, abundantes, deficientes e iniciaron el camino para el estudio de los números figurados (Anacona *et al.*, 1998).

Por otro lado, Platón reconoce el número desde dos perspectivas: “el número aritmético”, que es un ente ideal, que pertenece al reino de la matemática, concebido como un ente de naturaleza abstracta que se forma por la agrupación de unidades totalmente iguales; y “el número numerado” que sirve para “contar” los objetos de la realidad empírica.

De acuerdo a los planteamientos de Aristóteles al igual que para Euclides, el número es una pluralidad de unidades, pero en esta definición no parece ser aceptado el uno y el cero como números. Euclides expone que “número es una multitud de unidades”.

Los primeros autores latinos del Renacimiento se basaron en autores griegos, sus obras influyeron de manera directa en la enseñanza de las matemáticas de las escuelas hasta el siglo X (Collete, 2006). Además, debido al descubrimiento de los números indo-arábigos que permiten realizar operaciones de manera más sencilla, el siglo XVI es conocido como el siglo de la aritmética (Collette, 1985), en esta época se destacan autores como Stifel, Maurolico y Stevin.

Maurolico y Commandino fueron los precursores del uso del principio de inducción matemática (Collette, 1985) y en este siglo las obras de Aritmética Integra (1544), de Stifel y Aritmeticorum Libri Duo (1575) de Maurolyco, emplean el método de inducción completa o razonamiento por recurrencia, este método es importante en la conceptualización de número natural y en las demostraciones que se hacen para este conjunto numérico (Castro, *et al.*, 1999).

Para Stevin (1634) el número no sólo es el resultado del conteo de cantidades discretas, también es el resultado de la medición de las magnitudes. Más aún, establece que el número puede ser dividido infinitamente y cada fracción de la unidad debe ser considerada como número.

Lo anterior, da a conocer que en la edad Griega, Media y el Renacimiento se realizan aportes al CNN. En las matemáticas de la antigua Grecia se reconoce un grado de abstracción de los números, el surgimiento de la teoría de números, la conceptualización del número teniendo en cuenta sus propiedades. En la Edad media y el Renacimiento se difunde el uso del método inductivo en los números naturales, además se unifica el concepto de unidad, diferente a cómo lo concebían los griegos, no se trata de unidades de naturaleza geométrica o numérica, sino que la unidad se convierte en punto fundamental en todo proceso de conteo o de medición (discreto o continuo). De esta manera, se presenta un vínculo entre número y magnitud, y se establece la unidad como número. Stevin (como se citó en Vásquez, 2010) “concilia los aspectos de lo continuo y lo discreto de la cantidad, mediante su definición de número natural. El número actúa con carácter continuo ya que puede ser dividido infinitamente, pero a la vez con carácter discreto puesto que cuantifica”.

2.2.4.5 El número natural en el siglo XIX y en el siglo XX. En estos siglos se destaca el trabajo de Grassman, Cantor, Dedekind y Peano, quienes se preocupan por fundamentar el CNN y el SND desde una teoría axiomática.

Grassman es uno de los primeros en plantearse la clarificación de los fundamentos de la aritmética, por eso en 1861 expuso la primera formulación axiomática de la aritmética, usando el principio de inducción, en su libro define la suma, el producto de los naturales, usa el concepto de sucesor, demuestra las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. Su trabajo influye en Peano, quien reconoce públicamente los aportes de Grassmann en su obra.

Por otro lado, Cantor, realiza un avance fundamental en torno a la teoría aritmética de los conjuntos infinitos y finitos. En su trabajo da a conocer que un conjunto constituido por objetos distintos se podría considerar un algo que al ser mencionado traiga a colación los elementos constitutivos del conjunto, se presenta entonces el número cardinal o “power” (denominado por Cantor) de la totalidad del conjunto, este es un concepto general por el cual los elementos son denominados. Por otra parte el número ordinal se denomina a partir del

“Type ordinal” en el que se enuncia una la organización de las totalidades partiendo de los elementos que contienen los conjuntos. (Cerón y Gutierrez, 2013).

Más adelante, Dedekind (1998) da a conocer que la aritmética es una parte de la lógica, por lo cual el CNN debe ser completamente independiente de las representaciones o intuiciones del espacio y el tiempo, por tanto, se plantea la necesidad de demostrar todo lo que es susceptible de ser demostrado, en este sentido, la intuición no debe validar un resultado,

Al definir los números naturales, Dedekind (1998) realiza la distinción entre lo finito y lo infinito de la siguiente manera, “Un sistema S se llama infinito, cuando es semejante a una parte propia de sí mismo” es decir, un conjunto S es infinito si existe una aplicación biyectiva f de S en S tal que $f(S) \neq S$; en caso contrario S se llama un sistema finito, es decir, un conjunto es finito si no es infinito.

Dedekind (1998) reconoce la relación estrecha que hay entre cardinales y ordinales en los números naturales. Cada nuevo número natural es el siguiente de su predecesor pues se construye sobre la base de este, incluso el número cardinal se obtiene por una aplicación del número ordinal, por ejemplo el concepto de tres solo se alcanza a través del concepto de dos.

Por último, Peano (1889) es uno de los matemáticos más reconocidos de los años 80's y fundamentó la más conocida axiomatización de los números naturales a través de su obra *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, la cual sin duda alguna ha sido una de las más reconocidas en la fundamentación de los números naturales. Este libro no solo fundamenta los conceptos principales de la aritmética, entre ellos la noción de sucesor y antecesor, sino que realiza una introducción a la lógica en la cual se presentan los símbolos actuales de pertenencia, existencia, unión e intersección.

Todo lo anterior, da a entender que en los siglos XIX y XX se presentan grandes esfuerzos para fundamentar axiomáticamente los números naturales de manera formal. Así, Cantor fundamenta la correspondencia biunívoca, la cardinalidad, la ordinalidad, aporta a la construcción de la teoría del infinito actual y el desarrollo de los números ordinales transfinitos. Por otra parte, Dedekind (1998) define los números Naturales como un sistema simplemente infinito, establece las relaciones de orden que se pueden establecer entre los elementos de este conjunto, define los cardinales de los números finitos y reconoce el vínculo estrecho entre número cardinal y número ordinal. Finalmente, la axiomática de Peano (1989)

reconoce la unidad y la noción de sucesor como punto de partida y el principio de inducción para garantizar la formación de los números naturales.

2.2.4.6 La formalización del CNN y el SND en la actualidad. Los desarrollos teóricos que tuvieron lugar en la historia dan cuenta de los avances conceptuales y procedimentales del CNN y el SND. Tales desarrollos teóricos requieren ser constituidos desde una teoría fundamentada formalmente sobre el CNN y el SND.

Al respecto, Ortiz (2014) da a conocer que existen diferentes maneras de acercarse a la fundamentación teórica de los números naturales desde la perspectiva formal. Puede ser desde el enfoque logicista (Frege, Dedekind y Peano) o desde el enfoque constructivista (Hermann Weyl y Lorenzen) aunque cualquiera de los dos enfoques han recibido críticas; al hablar del CNN “En la actualidad se acepta como conveniente partir del concepto intuitivo y realizar una formalización atendiendo a los axiomas básicos de teorías como ZF” (Ortiz, 2014, p.2) en la cual se retoman elementos de los fundamentos teóricos propuestos por Frege, Dedekind, Peano.

Teniendo en cuenta lo anterior y ateniendo a los planeamientos de la fenomenología pura (Freudenthal, 1991) como proceso mediante el cual se describen los fenómenos que están organizados en las matemáticas en su momento actual y sus usos, se presentan a continuación algunos referentes de la teoría de conjuntos, con relación a su axiomática, los números naturales y el sistema de numeración. Los cuales hacen parte de la fundamentación teórica formal del CNN y el SND en la actualidad.

Los números Naturales. Intuitivamente tenemos que 0 representa la cantidad de elementos del conjunto $\emptyset$, pero, de su definición, el conjunto vacío tiene 0 elementos. A pesar del aparente círculo vicioso en definir conjunto vacío como un conjunto con cero elementos, y el cero como el conjunto vacío, es usual la presentación formal del concepto de sucesor

El Sucesor: Si x es un conjunto, se define el sucesor de x , designado por:

$$s(x), \text{ como } s(x) = x \cup \{x\}.$$

Por tanto, Si x es un conjunto, entonces $s(x)$ es conjunto. Del apartado anterior se tiene que $s(n) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Se definen los números naturales a través de las siguientes igualdades:

$$0 = \phi$$

$$1 = s(0) = \{\phi\}$$

$$2 = s(1) = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$3 = s(2) = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

Es importante resaltar que:

- Cada una de las colecciones constituidas en la definición anterior es un conjunto.
- Todo número natural o es 0 o es el sucesor de algún otro número natural.
- La sucesión de números naturales se puede escribir como:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\}$$

$$2 = \{0, 1\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\}$$

$$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\}$$

$$4 = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\}$$

Se puede resumir la comprensión intuitiva de los números naturales como sigue:

- 0 es un número natural.
- Si n es un número natural, entonces su sucesor $n+1$ es también un número natural.
- Todos los números naturales se obtienen de aplicar (a) y (b). Ej.: 0, $0+1=1$.

Infinito: Es importante resaltar que esta definición nos asegura la pertenencia de cada número natural en nuestra teoría de conjuntos; sin embargo si queremos el conjunto de todos los números naturales necesitaremos hacer uso del axioma de infinito.

Definición: Un conjunto I es inductivo siempre que:

- $0 \in I$, y
- si $x \in I$, entonces $s(x) \in I$

De la definición anterior se sigue que si I es inductivo, entonces tiene el cero como elemento, así como también a todo sucesor.

Axioma del Infinito: Existe un conjunto inductivo.

Cada número natural debe pertenecer, obligatoriamente, a todo conjunto inductivo. Así es entendible, por lo menos intuitivamente, que los números naturales están contenidos en todo conjunto inductivo. Para obtener una definición formal, buscamos el más pequeño con

respecto al orden dado por la inclusión, la respuesta está dada por la intersección de todos los conjuntos inductivos. Pero para que ésta intersección exista, debe haber por lo menos uno de los conjuntos inductivos, que es justo lo que nos garantiza el axioma de infinito.

Definición: El conjunto de los números naturales, designado por N , es el conjunto:

$$N = \bigcap \{I : I \text{ es inductivo}\} = \{x : x \in I, \text{ para todo conjunto inductivo } I\}.$$

De la definición se sigue de inmediato el siguiente resultado.

Lema: N es el más pequeño de los conjuntos inductivos; es decir N es inductivo y para cualquier otro conjunto I , se tiene que $N \subseteq I$.

Así, un conjunto x es un número natural si y solo si pertenece a todos los conjuntos inductivos.

El Principio de Inducción Matemática. El principio de Inducción es uno de los teoremas claves en la estructuración de los números naturales por cuanto muchas de las propiedades lo tienen como sustento.

Teorema: Sea $\varphi(x)$ una fórmula de variable x . Si se cumple que:

(i) $\varphi(0)$ se verifica, y

(ii) para todo $n \in N$, $\varphi(n)$ se verifica implica que $\varphi(n + 1)$ se verifica.

Entonces, $\varphi(n)$ se verifica para todo $n \in N$.

Lo que quiere decir que siendo φ una propiedad definida en los números naturales enteros positivos. Si 1 satisface esa propiedad y además si a partir de cualquier natural n que satisface esa propiedad se llega a que $n + 1$, también la satisface, entonces cada número natural la satisface.

El Orden en los naturales: Ahora ordenaremos los números por su tamaño, recordemos que cada número natural es el conjunto de los naturales más pequeños que él. Particularmente tenemos la cadena $0 \in 1 \in 2 \in \dots$. Este hecho nos permite definir, de manera natural, una relación de orden entre los elementos de N .

Definición: Si $n, m \in N$ diremos que m es menor que n , que escribimos abreviadamente por $m < n$ si y sólo si $m \in n$.

De acuerdo a la anterior definición se tiene que:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

Definición: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ decimos que: $m \leq n$ si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

Además usaremos las expresiones $m \leq n$, para significar que $m < n$ ó $m = n$, y $m \leq n$ para indicar $n \geq m$.

Teorema: Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

- $0 \leq n$.
- Si $s(n) = s(m)$, entonces $n = m$.
- Si $m \in n$, entonces $m \in \mathbb{N}$.
- $m < s(n)$ si y solo si $m \leq n$.
- Si $m < n$, entonces $s(m) \leq n$.
- Si $m \leq n$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$

Teorema: $\leq$ es un orden total discreto sobre $\mathbb{N}$.

Veamos primero que $\leq$ es un orden, es decir, que cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. $\leq$ es reflexiva, pues para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \leq n$.
2. $\leq$ es antisimétrica, pues si $n \leq m$ y $m \leq n$ y $n \neq m$, se tendría que $m \in n$ y $n \in m$, que es una contradicción.
3. $\leq$ es transitiva, pues para todo y y z , si $y \leq z$ y $z \leq x$, entonces $y \leq x$.

El principio de Recursión: A fin de dar definiciones de las operaciones en los números naturales, es decir, la aritmética de los números naturales se integra el teorema de recursión de Dedekind.

Teorema: Para todo conjunto no vacío A , para todo elemento $a_0 \in A$, Y para toda función $g : A \times \mathbb{N} \rightarrow A$, existe una única $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que $h(0) = a_0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $h(s(n)) = g(h(n), n)$.

Teorema: Dadas las funciones $a : P \rightarrow A$, y $g : A \times \mathbb{N} \times P \rightarrow A$, existe una única $h : \mathbb{N} \times P \rightarrow A$ tal que $h(0, p) = a(p)$ para todo $p \in P$ y para todos $n \in \mathbb{N}$, $p \in P$ se cumple que $h(s(n), p) = g(h(n, p), n, p)$.

Operaciones de números naturales

Adición: Se le llama suma de varios números $a, b, \dots, l$ al número de objetos del conjunto obtenido agregando los objetos de un conjunto cualquiera de a elementos, a los de

otros de b elementos, etc., finalmente con los objetos de un conjunto l elementos, cuya operación se expresa así:

$$S = a + b + \dots + l$$

Cada uno de los datos de esta operación se llama sumando y el resultado suma o total

Para todo número natural n definimos, la suma de la siguiente manera:

- $a + 0 = a, \forall a \in N$
- $a + 1 = S(a), \forall a \in N$
- $+s(b) = S(a + b), \forall a, b \in N$

Multiplicación: Llamamos producto de dos números de a y b , al número de pares que se pueden formar componiendo de todos los modos posibles cada elemento de un conjunto de a objetos con cada elemento de un conjunto de b objetos.

Así mismo el producto $a.b$ es igual a la suma de a sumandos todos iguales a b , y también a la suma de b sumandos todos iguales a a . Es decir, la multiplicación es un caso particular de la suma

$$a.b = \underbrace{b + b + b \dots}_{a \text{ veces}} = \underbrace{a + a + a \dots}_{b \text{ veces}} = b.a$$

Para todo número natural n definimos, la multiplicación de la siguiente manera:

- $a.0 = 0$
- $a.s(b) = a.b + b$

Sistema de numeración. Llamaremos sistema de numeración a aquel conjunto de reglas y convenios que permiten expresar y representar todos los números mediante un número limitado de palabras y de signos. La numeración es un algoritmo, derivado de los fundamentales, por el cual pueden formarse de un modo convencional y sistemático, todos los números naturales, partiendo solamente de la unidad fundamental.

Teorema fundamental de la numeración. Conocida una base mayor que la unidad, $n > 1$, todo número puede descomponerse de modo único en su forma polinomia

$$m = a + bn + cn^2 + \dots + fn^{k-1} + gn^k$$

Donde $a, b, c, \dots, g$ son números menores que la base n

Si se divide un número m por la base n , los sucesivos cocientes enteros $q_1, q_2, \dots$, que se van obteniendo, los cuales tendrán que disminuir por ser $n > 1$, hasta llegar al último cociente $q_k = h < n$, obteniéndose por la fórmula de la división entera

$$m = nq_1 + a$$

$$q_1 = nq_2 + b$$

$$q_2 = nq_3 + c$$

$$\vdots$$

Por sucesivas sustituciones, se llega a obtener la forma polinómica del número m

$$m = a + (b + [c + \dots + (f + [g + hn]n)n \dots]n)n$$

Sobre el CNN y el SND. Comprender el CNN abarca diferentes conceptos; entre ellos, la cardinalidad, la ordinalidad, las operaciones y las propiedades que lo caracterizan como conjunto numérico (Castaño, 1997). Sin embargo, la serie de números naturales es infinita, y por tanto, no se puede utilizar un símbolo particular para cada uno. Por tanto, es necesario utilizar un sistema de numeración que permita representar cualquier número natural.

Surge entonces el sistema de numeración, definido como un conjunto de normas y convenios que son utilizados para representar los números naturales mediante una adecuada combinación de un grupo reducido de signos y la determinación de la base (Prieto, 2012). En la actualidad el SND es el más difundido a nivel universal para representar el CNN, este, es un sistema simbólico para la representación de los números y atiende a dos principios: el decimal y el posicional (Castaño, 1997).

Sin embargo, hay que tener en cuenta que el aprendizaje del SND no se reduce a conocer la sintaxis del mismo, este es un proceso más global ligado a la ampliación de CNN (Castaño, 1997). En este sentido, Obando y Vásquez (2008) presentan el siguiente esquema (Ver ilustración 18) en el que se expone la relación entre el CNN y SND visto como sistema de representaciones simbólicas:



Teniendo en cuenta los fundamentos expuestos en el modelo de competencia formal se puede inferir que este modelo permite aportar a la reflexión didáctica del docente, en los diferentes aspectos relacionados con la perspectiva histórica y con la matemática formal. Desde el componente de competencia formal los siguientes aspectos fundamentan el MTL inicial:

- El CNN parte de una conceptualización meramente perceptiva y se va desarrollando, perfeccionando y completando a través de los avances y descubrimientos que hace la humanidad, hasta consolidar la fundamentación axiomática del número natural. Desde una perspectiva didáctica es necesario reconocer que en los procesos de enseñanza y aprendizaje, la reflexión no debe quedarse en la perspectiva sensitiva, es

preciso insistir en la construcción de conceptos matemáticos, la noción de cantidad, el principio de correspondencia uno a uno, la noción de sucesor, la base 10 entre otros, para comprender la cardinalidad, la ordinalidad y la agrupación.

- El cero fue difícil de aceptar como número natural. La historia muestra que pese a los avances de las civilizaciones, solo hasta el siglo II d. C. los Mayas realizan la conceptualización del cero como número, cuatro siglos más tarde lo descubren los Hindúes y un siglo después lo hacen los Chinos. En la escuela se debería tener en cuenta el cero con toda la riqueza de significaciones que abarca, los contextos que mejor facilitan su comprensión y su incorporación al resto de números (1, 2, 3...).
- En la conceptualización del número natural es necesario tener en cuenta el número como ordinal y el número como cardinal. En la escuela se deben tener en cuenta tareas que apunten a desarrollar el principio de correspondencia uno a uno el cual es fundamental en tanto aporta al reconocimiento del cardinal de una colección y a las relaciones de orden entre cardinales. Así mismo, se deben proponer tareas que desarrollen las dos propiedades que hacen posible la conceptualización del número como ordinal: la sucesión y ser inagotable.
- Las necesidades del hombre relacionadas con el comercio, la riqueza, el trabajo, los terrenos, el estatus, las pertenencias, entre otras, propiciaron el escenario indicado para que el hombre desarrollara pensamiento numérico. Las matemáticas surgen entonces, como respuesta a múltiples preguntas que el hombre se ha formulado a lo largo de los años, como una forma de explicar diferentes fenómenos del mundo real. Desde esta posición, se podría dar otro énfasis a la enseñanza de las matemáticas, más allá de exigir perfección en las representaciones notacionales de los números, se podría conectar las diferentes ideas matemáticas referentes al CNN y el SND con los conocimientos previos que tiene el estudiante y con situaciones problema. Proponer en el aula de clase algunas problemáticas que generen en el estudiante la necesidad de resolverlas, podría ser una vía efectiva para acercarse a la conceptualización de cardinalidad, ordinalidad y agrupación.
- Agregando a lo anterior, se percibe en la historia que solo en el año 3300 a.C. el hombre crea la primera representación de las cifras, no sin antes haberlas dotado de

sentido propio. Cifras ligadas por excelencia a la conceptualización de cardinalidad, ordinalidad y agrupación. De acuerdo a esto, es posible afirmar que si los desarrollos matemáticos que tuvieron lugar en la historia son guías confiables para la enseñanza de las matemáticas, la aritmética escolar debería seguir esos pasos, primero darle importancia a la comprensión del CNN y la noción de agrupación, y luego insistir en la escritura de las representaciones simbólicas.

- Para la consolidación del SND se tienen en cuenta los sistemas de numeración aditivos, multiplicativos, posicionales, el cero y las representaciones simbólicas. Cada uno de estos elementos fueron necesarios para que el hombre pudiera realizar cálculos y avanzar en el desarrollo de la aritmética. En el aula, el docente y el estudiante debe tener en cuenta las características de este sistema base 10, posicional, aditivo y multiplicativo, también deben darse cuenta que la construcción de tal conocimiento lleva tiempo y que no se construye fácilmente, requiere tiempo construir y comprender algunos elementos fundamentales del SND teniendo en cuenta todas sus características.
- Se destaca el papel de la técnica de conteo corporal, por su influencia en el desarrollo de diferentes conceptos matemáticos, el de correspondencia uno a uno y la noción de sucesión y por tanto en la comprensión del número como cardinal, el número como ordinal y la noción de agrupación. Desde este punto de vista se podrían favorecer tareas que propicien el uso de la técnica de conteo corporal en los estudiantes de los primeros años, tareas que de manera paulatina y graduada orienten al estudiante a la construcción de dichos conceptos matemáticos los cuales son fundamentales en el aprendizaje del CNN y el SND.
- La teoría de conjuntos presenta una visión formal actual para comprender el CNN. En la realización de la propuesta de aula se considera fundamental la noción de equipotencia, el sucesor del número, el principio de inducción matemática, el principio de recurrencia, las relaciones de orden entre cardinales, las operaciones entre los números (adición, multiplicación), la definición del número como cardinal y como ordinal, y la definición del sistema de numeración.

2.2.5 Modelo de Enseñanza. En el modelo de enseñanza se refieren y estudian algunas fuentes documentales sobre las cuales el docente basa sus prácticas, de manera específica en lo referido a la enseñanza del CNN y el SND en Transición.

Se presentan a continuación algunos referentes teóricos en torno a la parte legal de la educación inicial en Colombia. Luego, se da a conocer una mirada del grado Transición relacionado particularmente con el CNN y el SND desde el marco curricular de la educación en Colombia. Después, se expone una visión un poco más amplia de la enseñanza del CNN y el SND en Transición atendiendo a la revisión de la literatura de investigaciones a nivel nacional e internacional. Por último se presenta la enseñanza del CNN y el SND en dos vías una que atiende al análisis de textos escolares y otra a la propuesta curricular de la Institución en la que se realiza la aplicación de la propuesta de aula.

El modelo de enseñanza se presenta en primer momento desde lo legal y curricular en Colombia: luego, desde algunos planteamientos de la enseñanza resultado de investigaciones a nivel nacional e internacional y por último desde la enseñanza que se aplica en el aula a partir de los libros de textos y la propuesta curricular del colegio.

2.2.5.1 La Educación Matemática en Transición desde una perspectiva legal y curricular. En esta sección se presentan tres tópicos que dilucidan aspectos relevantes en lo concerniente a los primeros grados de escolaridad en Colombia, la educación preescolar fundamentada desde el marco legal y curricular, el currículo de matemáticas y las competencias matemáticas en Transición.

*Educación Preescolar*⁹ Durante las últimas décadas la educación preescolar ha sido objeto de diversos y muy variados debates, ahora integrada a la educación inicial, mostrando con ello que la consolidación de este nivel desde una perspectiva legal y curricular es de gran interés para la población colombiana.

Se asume el preescolar tomando como referente, la Constitución Política de Colombia (1991), en la que se establece la educación como un derecho obligatorio para los niños desde los 5 a los 15 años; la Ley 115 de la Educación (1994), en la que se presenta el grado Transición como obligatorio para todos los niños y niñas de Colombia; y el Decreto 2247 de 1997 en el cual se establece la normatividad del servicio educativo del nivel de

⁹ Este apartado se amplía en el capítulo 2 del trabajo de pregrado (Cerón y Gutiérrez, 2013). La educación Preescolar está integrada hoy en día con la educación inicial en Colombia.

preescolar y se establecen como principios de la educación preescolar, la integralidad, la participación y la lúdica.

Los documentos legales anteriores ordenan la construcción de lineamientos que orienten los procesos curriculares en la Educación Preescolar. Por tanto, en 1998 se crean los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998b), en este documento se da a conocer que la educación debe estructurarse de acuerdo a los cuatro aprendizajes fundamentales, también conocidos como los pilares del conocimiento *aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser*.

Para lograr cada uno de estos aprendizajes, el estudiante tiene un papel protagónico y se concibe la educación del infante desde la integralidad de las dimensiones del desarrollo socio-afectiva, corporal, cognitiva, comunicativa, estética, espiritual y ética. Se evidencia claramente que el aprendizaje en estos primeros años no atiende solamente a lo cognitivo, sino que incluye otras dimensiones.

Más adelante se concreta en la Ley 1098 del 2006 “Código de la Infancia y Adolescencia”, la política de la Primera Infancia, y el programa de “Cero a Siempre” por medio de las cuales, se retoma con fuerza el tema de la educación inicial teniendo en cuenta una atención integral para los niños de cero a cinco años de edad. De manera paralela se formula en el 2006 el Programa de Apoyo para la Construcción de la Primera Infancia, este documento intenta definir un marco institucional y un sistema de gestión local, regional y nacional para garantizar los derechos de los niños menores de 6 años. Como estrategia para mejorar la atención integral de los infantes se crea el programa “De Cero a Siempre” el cual está destinado a promover y garantizar el desarrollo infantil de los niños y niñas desde la gestación hasta los 5 años. Esta estrategia toma como base los derechos de los niños para promover el desarrollo de planes, programas, proyectos y acciones para la atención integral de los niños desde tres elementos la concepción de la niña y el niño y sus derechos, la atención, y la gestión.

Así pues, se percibe que en Colombia en los últimos años se le ha dado relevancia a la primera infancia en materia educativa, de ahí las disposiciones legales, curriculares y estrategias que según el gobierno podrían asegurar la atención integral de los educandos.

Las competencias matemáticas en Transición. Atendiendo a los planteamientos de Filloy (1999), el modelo de enseñanza se usa para conseguir el objetivo de guiar a los estudiantes a que se convierten en usuarios competentes, por eso resulta necesario estudiar las competencias matemáticas en los primeros años de la escolaridad.

Con el ánimo de brindar orientaciones para desarrollar las competencias matemáticas en la primera infancia se han formulado los Documentos 10 y 13, Desarrollo infantil y competencias en la primera infancia (MEN, 2009a) y Aprender y Jugar, Instrumento diagnóstico de competencias básicas en Transición (MEN, 2009b).

En los documentos anteriores (MEN, 2009a, 2009b) las competencias son asumidas como el conjunto de recursos de funcionamientos cognitivos que los estudiantes poseen para enfrentar las situaciones que se les presentan en el diario vivir. Los funcionamientos cognitivos se refieren a los procesos mentales que los estudiantes usan para manipular y relacionar la información que recibe del medio, organizándola en modalidades diferentes. Lo anterior, se pone en juego cuando el estudiante utiliza el saber y el hacer como una vía efectiva para enfrentar el conglomerado de situaciones que se pueden presentar en la vida diaria.

Los funcionamientos cognitivos desde lo numérico apuntan al desarrollo de cuatro funcionamientos cognitivos a saber: cuantificación y principios de conteo, comunicación de cantidades, establecimiento de relaciones de orden y resolución de problemas aditivos. Con relación a la cuantificación y principios de conteo, apunta a la comprensión de la cardinalidad y la ordinalidad; respecto a la comunicación de cantidades, este hace referencia a expresar correctamente una cantidad por medio del uso de las palabras número y las representaciones simbólicas. Por otro lado, al establecimiento de relaciones de orden los estudiantes deben poner en práctica el conocimiento cardinal y ordinal del número, y finalmente, la resolución de problemas le exige al estudiante operar mentalmente números sin tener que recurrir a la cantidad. (Ver Ilustración 19, MEN, 2009b, p. 27).

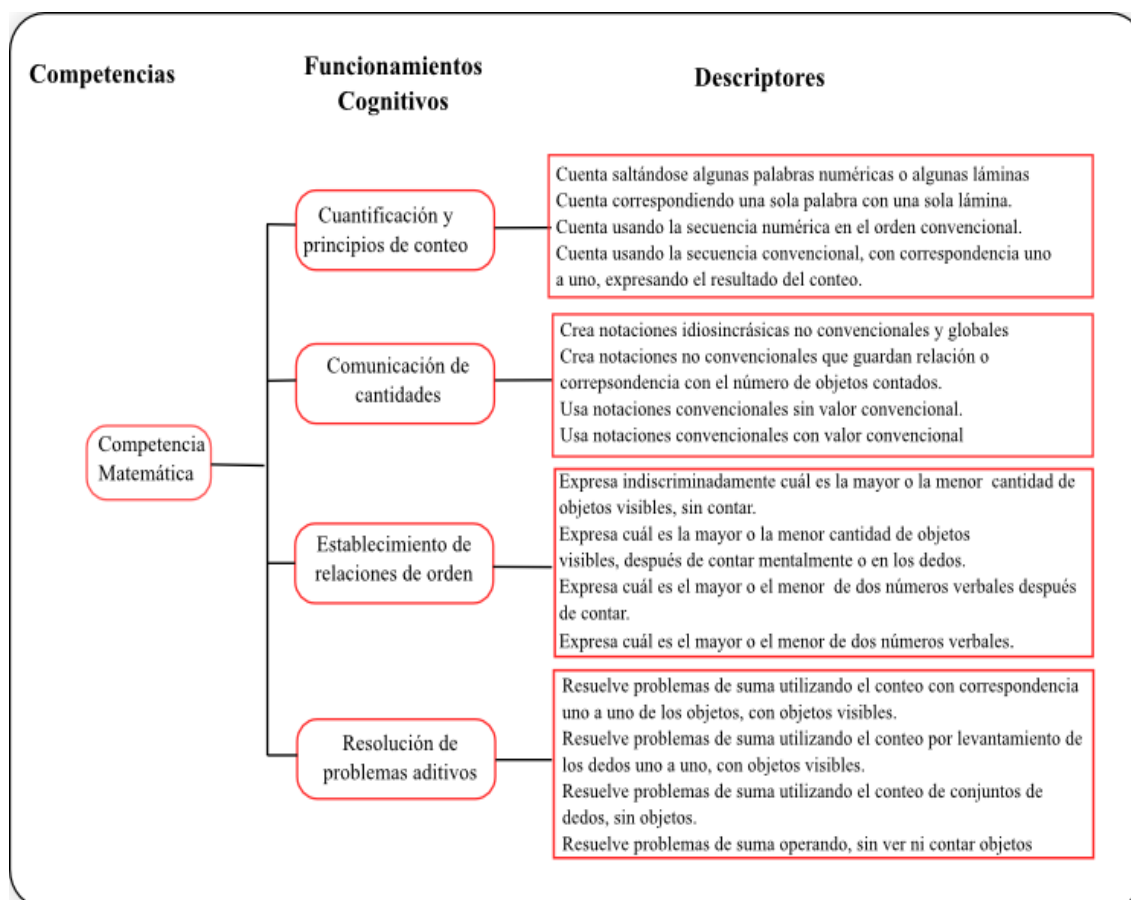


Ilustración 19. Relaciones entre competencias, funcionamientos cognitivos y descriptorios.

El currículo de matemáticas. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998a) y los Estándares Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se retoman en esta parte, pese a no estar dirigidos de manera específica a la enseñanza de las matemáticas en los primeros grados de la escolaridad (Preescolar), estos han impulsado la necesidad de pensar la construcción de pensamiento matemático en la educación inicial y la necesidad de pensar la formación integral de los educandos. En los lineamientos se propone considerar tres grandes ejes conocimientos básicos, procesos generales y Contextos.

Con relación a los conocimientos básicos, este trabajo se enfatiza en el desarrollo de pensamiento numérico y en los números Naturales como sistema numérico; en el cual se incluye el sentido operacional, las comparaciones, las estimaciones, entre otros; atendiendo específicamente a la comprensión de los números y de la numeración. Ahora bien, con relación a los procesos generales, la resolución de problemas y la comunicación, son protagonistas en la propuesta de aula. Por un lado, la resolución de problemas es un proceso

importante puesto que los estudiantes en la medida que van resolviendo problemas “van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel” (MEN, 1998a, p. 103) y por otro lado, la comunicación “es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas” (MEN, 1998a, p. 75). Y finalmente, los contextos se relacionan con los ambientes que rodean al estudiante, los cuales le dan sentido a las matemáticas que aprende. Los contextos pueden ser cotidianos, de las mismas matemáticas o de otras disciplinas. En este trabajo se retoman juegos como contexto matemático.

Pese a toda la riqueza de los documentos, en cuanto a las diferentes reflexiones que se generan para comprender el CNN y el SND, los Lineamientos Curriculares de Matemática (MEN, 1998a) y los Estándares Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) solo presentan propuestas para empezar este proceso a partir del grado primero de primaria.

La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. La resolución de problemas es un proceso general que se ha mantenido en el programa de educación matemática; sin embargo, en la actualidad se le ha dado una importancia particular en el plan de estudios de matemáticas debido a su relevancia en el desarrollo del pensamiento matemático (Filloy, Puig y Rojano, 2007). No solo en la educación primaria y secundaria sino también en la educación preescolar, este hecho se concreta en el documento 13 sobre competencias básicas en Transición (MEN, 2009b).

La relevancia de abordar la resolución de problemas desde los primeros años ha tocado a varios autores, entre ellos González y Weinstein (2008). Para las autoras, un problema implica un obstáculo cognitivo a resolver, de tal manera que su resolución implica el uso de saberes más allá de los que el alumno posee, pero que puede apelar a resolverlo. El maestro plantea situaciones problemas para enseñar matemáticas y el alumno construye el sentido de los conocimientos matemáticos a medida que los resuelve.

“Hacer matemáticas significa, entonces, acceder a los significados de los conocimientos a través de un trabajo compartido en el que los niños deberán adaptarse a las restricciones que les presenta una determinada situación, confrontar sus ideas, aceptar errores y recomenzar la

búsqueda en función de los aportes grupales e individuales, valorar el trabajo propio y ajeno” (González y Weinstein, 2008, p.19)

Además, de acuerdo a Filloy et al. (2007) se podría decir que la primera tarea de simbolización matemática con la que el aprendiz se enfrenta es cuando trata de resolver problemas, ahí comienza un proceso de evolución de la simbolización. En este sentido la simbolización juega un rol importante en la resolución de problemas, de ahí su importancia en la comprensión del SMS.

Los documentos anteriormente mencionados, generan un panorama sobre el marco legal y curricular de la educación matemática en los primeros grados de la escolaridad; respecto a los cuales, se pretende direccionar la enseñanza del CNN y el SND. Para ampliar el panorama, se presentan a continuación algunos investigadores también interesados en el tema.

2.2.5.2 La enseñanza del CNN y el SND en la revisión de la literatura. La enseñanza del CNN y el SND han sido investigados por diversos autores en los últimos años, algunos de ellos lo consideran la base del pensamiento matemático. La importancia curricular del tema se puede constatar en los Lineamientos Curriculares de Matemática (1998a), en los cuales se afirma que uno de los aspectos fundamentales en el desarrollo de pensamiento matemático está constituido por el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del SND. No sólo para tener una idea de cardinalidad, ordinalidad y agrupación sino para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas aditivos.

Esta sección no pretende ser un estudio exhaustivo de todas las investigaciones llevadas a cabo hasta el momento con relación al SND, sino que categoriza aquellos trabajos que se consideran relevantes, teniendo en cuenta especialmente, las tareas o situaciones que proponen los autores para enseñar el CNN y el SND.

Por tanto, a partir de la revisión de algunos autores se organizan en la siguiente tabla las investigaciones atendiendo a cuatro aspectos el SND, el CNN, los principios de conteo y las operaciones (Ver tabla 6).

Tabla 6.

Síntesis de los trabajos referentes a la enseñanza y el aprendizaje del SND y el CNN desde 1987 hasta el 2013.

PERIODO DE TIEMPO: 1987-2013		
<i>Unidades de presentación</i>	<i>Autores de referencia</i>	<i>Descripción general de trabajos desarrollados</i>
SND	Balbuena et al. (1991), Castaño (1997), Fuson (1990), Fuson y Briars (1990), González y Weinstein (2008), Lerner y Sadovsky (1994), Saxton y Cakir (2006).	Los autores investigan sobre la enseñanza del SND teniendo en cuenta la agrupación, la comprensión del cero, la composición y descomposición de cantidades, el valor posicional, la estructura aditiva y multiplicativa. Algunas tareas propuestas tienen en cuenta el uso de materiales manipulativos tales como, los bloques de Dienes, el ábaco, las fichas de colores, los bloques, entre otros.
Principios de Conteo	Sarnecka y Carey (2008), Gelman (1978), Le corre, Van de Walle, Brannon, Carey (2006), Wynn (1992),	Los autores proponen diferentes tareas para identificar la comprensión de los niños y niñas con relación a los principios de conteo, la cardinalidad, la ordinalidad y la correspondencia uno a uno. Gelman (1978), por su parte, incluye el estudio de otros dos principios el de abstracción e irrelevancia de orden.
CNN	Balbuena et. al (1991), Cabanne y Ribaya (2009), Castro, Rico y Castro (1999), Cerón y Gutierrez (2013), Chamorro (2005), González y Weinstein (2008), Maravilla (2011)	Los autores dan a conocer algunas tareas que se pueden llevar a cabo con los estudiantes de los primeros años de la escolaridad. Dichas tareas van ligadas al descubrimiento de procedimientos, además de estar fuertemente contextualizados. En este aspecto las tareas están direccionadas a construir los conceptos de cardinalidad, ordinalidad, comparación de cantidades, relaciones de orden, agrupación, composición y descomposición de cantidades.
Representación simbólica	Lerner y Sadovsky (1994), Orozco, et al. (2007) Scheuer, et al. (2000).	Los autores investigan sobre la comprensión de los niños con relación al SND y el proceso de transcodificación numérica del formato verbal hablado al formato arábigo. Se investiga además, sobre las reglas intuitivas que siguen los niños para escribir los conceptos numéricos que han adquirido. Estos autores investigan las diferentes representaciones que utilizan los niños del SND.
Operaciones	Castaño (1997), Gilmore y Spelke (2008)	Las tareas propuestas dan a conocer que los estudiantes en los primeros años pueden enfrentarse con situaciones problema que involucran operaciones aditivas. Estos autores encuentran que la comprensión mecánica de los algoritmos de las operaciones no incide en la comprensión de la estructura aditiva.

Los autores antes mencionados, presentan diferentes tareas y tareas que permitieron llevar a cabo las investigaciones relacionadas con el CNN, el SND, los principios de conteo, la representación notacional del número y las operaciones. Algunas de las propuestas que sugieren los autores atienden a la resolución de problemas y al uso de materiales manipulativos. Estas investigaciones ofrecen una variedad de tareas que se pueden tener en cuenta al momento de diseñar la propuesta de aula relacionada con la cardinalidad, la ordinalidad y la agrupación.

2.2.5.3 La enseñanza de la cardinalidad, la ordinalidad y la agrupación desde los textos escolares de Transición. Teniendo en cuenta que el modelo de enseñanza propone como punto de partida modelar en contextos concretos el SND para dotarlo de significado y construir los primeros elementos sintácticos, se hace necesario conocer a través de los libros de texto algunas tareas que se le proponen al estudiante en el proceso de enseñanza, para percibir los contextos concretos a los que recurren, algunas veces, los docentes para dotar de sentido y significado el SND.

Además, debido a que el modelo de enseñanza reconoce la importancia del SMS (desde lo semántico y sintáctico) en la comprensión de los objetos matemáticos, es necesario identificar en los libros de textos los SMS. Por tanto, en el modelo de enseñanza se considera necesario tener en cuenta los libros de texto, por medio de los cuales se puede percibir el modelo de enseñanza y el SMS implementado para comprender el SND.

Criterios de Selección de los Textos. Para realizar la selección de los textos escolares se tomaron en cuenta 24 instituciones que ofrecen sus servicios educativos a estudiantes de grado Transición. De dichas instituciones, 14 son de carácter público y 10 son de carácter privado en el departamento del Valle del Cauca. En cada una de las instituciones se realizó una encuesta a las profesoras de Transición (ver Anexo 1: Encuesta), el objetivo de la misma era identificar los libros de textos, documentos y materiales que utilizan los docentes en la actualidad para enseñar el CNN y el SND en este primer grado obligatorio de la escolaridad.

Con relación a los documentos que utilizan los docentes para preparar su trabajo en matemáticas, se destacan los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998b), los Lineamientos Curriculares de Matemática (1998a) y el Documento No 13 (2009b); los docentes también utilizan documentos institucionales (PEI y la malla curricular del área) y de

capacitaciones que recibieron en el colegio y diferentes documentos que consiguen en internet (ver Anexo 2: resultados de encuesta pregunta 1).

De la encuesta también se destacan los diferentes materiales que utilizan los maestros para la iniciación al CNN como el conteo con palos, objetos en el ambiente, botones, entre otros. Respecto a los materiales que usan para la enseñanza del SND predomina el uso de las regletas de Cuisenaire, los bloques de Dienes, el domino y el ábaco (ver Anexo 3: Resultados de Encuesta pregunta 2). Se destaca además, que ningún texto escolar tiene material complementario para facilitar el aprendizaje del CNN y el SND (Ver anexo 6: Resultados de encuesta pregunta 5).

Finalmente, con relación a los libros de texto que utilizan los docentes se puede asegurar que son muy variados y de diversas editoriales, el año de publicación de los libros oscila desde 1986 hasta 2015. Ninguno de los libros usados por los maestros tuvo frecuencia mayor a dos (ver Anexo 4: resultados de Encuesta pregunta 3) y no hay una tendencia en la actualidad por escoger determinado libro de texto para la enseñanza de las matemáticas (Ver Anexo 5 Resultados de encuesta pregunta 4). Por tanto, se decide tomar dos libros de manera aleatoria para realizar el análisis de textos¹⁰, el libro Expedicionarios Editorial MEN y el libro Juego y Aprendo C, usado en dos instituciones de carácter público, de Editorial Santillana.

Sobre las categorías y variables de análisis. Para poder identificar la propuesta de enseñanza se pretende investigar sobre ¿Qué tareas se proponen para desarrollar la cardinalidad, la ordinalidad y la agrupación? Y sobre ¿Cómo se introduce el SND en el texto, relacionado con los otros contenidos matemáticos que se abordan en el texto? A partir de estas cuestiones, se opta por seleccionar cuatro categorías de análisis:

- Conceptos previos
- Tareas propuestas que abordan el conteo y la cardinalidad
- Tareas propuestas que abordan el principio de sucesión y la ordinalidad
- Tareas propuestas que desarrollen el concepto de agrupación
- Los sistemas de representaciones usados en el texto escolar (simbólico, verbal, gráfico)

¹⁰ La información sobre los textos usados en las instituciones, la presentación de las características del texto 1 (Expedicionarios Editorial MEN) y el texto 2 (Juego y Aprendo C), los contenidos matemáticos y la rejilla de análisis de dichos textos se pueden ver en el Anexo 28

En la primera categoría se pretende verificar los temas o contenidos que anteceden y al concepto de SND. Esto, con el propósito de poder identificar la estructura que presenta el texto, los contenidos y el lugar que se le asigna al SND. Las siguientes tres categorías de análisis buscan identificar las tareas propuestas para trabajar el SND con relación a los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación, teniendo en cuenta el SMS empleado. Finalmente, la última categoría referente a los sistemas de representación usados en el texto escolar, permite estudiar tales representaciones clasificándolas en representación simbólica (RS), representación verbal (RV) o representación gráfica (RG).

Análisis de textos. Al analizar la propuesta curricular que plantean los dos textos, se pueden realizar algunas apreciaciones. Por un lado, el texto 1 organiza los contenidos por proyectos y trabaja tres ámbitos a saber: el técnico científico, el comunicativo y el personal (sí mismo); sin embargo, en este libro no aparece de manera explícita las dimensiones que se trabajan ni las competencias que se desarrollan en cada uno de los proyectos. Queda a disposición del docente realizar los ajustes necesarios, para trabajar las dimensiones y las competencias que considere se pueden abordar en las tareas propuestas. Por otro lado, el texto 2 organiza los contenidos por medio de unidades y explícita en cada tarea las dimensiones y las competencias que pretende desarrollar; sin embargo, al analizar las tareas propuestas hay algunos aspectos relacionados con las competencias en matemáticas que se quedan por fuera. Ejemplo de ello, es la resolución de problemas aditivos que no se trabaja en el texto 2 y es importante en el desarrollo de competencias matemáticas (MEN, 2009b).

Ahora bien, al determinar los conceptos previos que plantea el libro de texto antes de introducir el SND, y las tareas relacionadas con los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación, se pudieron reconocer algunos descriptores para analizar cada una de las categorías.

Así, en el texto 1 se percibe una propuesta de enseñanza que apunta a la comprensión de la correspondencia uno a uno y la noción de pertenencia. Mientras que en el texto 2 para introducir el CNN se plantean algunos ejercicios relacionados con la correspondencia uno a uno. Las propuestas de ambos textos trabajan uno de los principios de conteo denominado correspondencia uno a uno atendiendo a la propuesta curricular del MEN (2009b) y aunque el concepto de pertenencia no se aborda en la propuesta curricular, si se considera una noción

principal en la teoría de conjuntos, lo cual evidencia la influencia de esta teoría matemática formal en la propuesta curricular de enseñanza.

Por otro lado, con relación a las tareas que trabajan la cardinalidad, en el texto 1 los ejercicios se destinan al conteo de objetos y la escritura del símbolo numérico, también se presenta un ejercicio contextualizado, en el cual el estudiante debe interpretar las indicaciones sobre la cantidad de ingredientes para preparar una receta. Así mismo, en el texto 2 se presentan ejercicios direccionados al conteo de objetos y a la escritura de símbolos numéricos.

Teniendo en cuenta la propuesta curricular, los textos tienen en cuenta el principio de cardinalidad, promueven el conteo de objetos y la comunicación de cantidades por medio de representaciones simbólicas; sin embargo, con relación a la pregunta formulada en algunas tareas del texto 2 ¿Cuántos hay? Se debe resaltar que de acuerdo a los planteamientos de Fuson (1988) tal cuestión no evidencia de manera certera conocimiento del principio de cardinalidad, el estudiante puede expresar un último número dicho en la cadena numérica, pero esto no implica que comprenda su significado cardinal.

Con relación a los conceptos de sucesión y ordinalidad, en ambos textos se trabaja el reconocimiento del orden de los números en la secuencia numérica, el establecimiento de las relaciones de orden entre números (mayor que, menor que), y también se presentan tareas en las que aparece el número como ordenador de una serie de acontecimientos o de pasos.

En este análisis, se destaca la relevancia que le atribuye el texto 2 al orden de los números en la secuencia numérica convencional, texto en el que se plantean 14 tareas. Mientras que el texto 1 solo plantea una tarea para este concepto. Las tareas que propone el texto 2 aunque aparentemente trabajan la noción de sucesor, muchas veces se presentan desligadas de la noción de cardinalidad. Las tareas van direccionadas a completar la secuencia numérica de manera simbólica, pero no se evidencian preguntas que apunten a la reflexión de la cantidad que representa el símbolo. Por otro lado, en el texto 1 se le pide al estudiante que organice la secuencia de números después de haber realizado el conteo de las cantidades, en este ejercicio hay una relación entre la representación simbólica, la cantidad que representa y el orden que se le atribuye al número en la secuencia numérica; sin embargo, el texto se queda corto pues solo propone una tarea para trabajar este tema. Las tareas que plantean ambos textos aluden al principio de orden que hace parte de la cuantificación y los principios de conteo que se presenta en la propuesta curricular del MEN (2009b), de manera particular uno

de los descriptores apuntan a realizar el conteo utilizando la secuencia numérica en el orden convencional.

Se puede apreciar también, que en el texto 2 la tarea sobre relaciones de orden, atendiendo a los planteamientos curriculares, corresponde a un desempeño básico, puesto que el estudiante expresa indiscriminadamente cuál es la mayor o la menor cantidad de objetos entre dos colecciones de diferente tamaño, que están visibles, sin realizar conteo. A su vez, el texto 1 solo presenta una tarea que requiere de un desempeño más avanzado, puesto que el estudiante expresa cuál es el mayor o el menor de dos números, referentes a dos colecciones ocultas de diferente tamaño, a partir de conteos mentales.

Además, en las tareas propuestas se destaca el uso del número ordinal para establecer el orden de los acontecimientos en un cuento y el orden en los pasos que se deben seguir para realizar una preparación. Estos ejercicios trabajan el número como ordinal; sin embargo, en el libro de texto 1 y en el libro de texto 2 no tienen en cuenta la tarea para desarrollar la competencia matemática.

Ahora bien, con relación a las tareas propuestas que desarrollan el concepto de agrupación se encuentran pocos ejercicios direccionados a la comprensión de este concepto. Solamente se trabaja la pertenencia y las operaciones aditivas. Así, como se mencionó anteriormente, se puede notar la influencia de la teoría de conjuntos en las propuestas de enseñanza en la actualidad; sin embargo, no hay tareas que abarquen la composición y descomposición de cantidades, las agrupaciones de objetos, la elaboración de agrupaciones de 10, la comprensión de símbolos numéricos como representaciones de multiplicidad de unidades de diferente orden, entre otras tareas que permiten comprender el concepto de agrupación en el SND.

Por otro lado, con relación a las representaciones utilizadas en los texto se presenta en la siguiente ilustración, al respecto se reconoce las representaciones verbales escritas (RV), las gráficas (RG) y las simbólica (RS), (Ver ilustración 20).

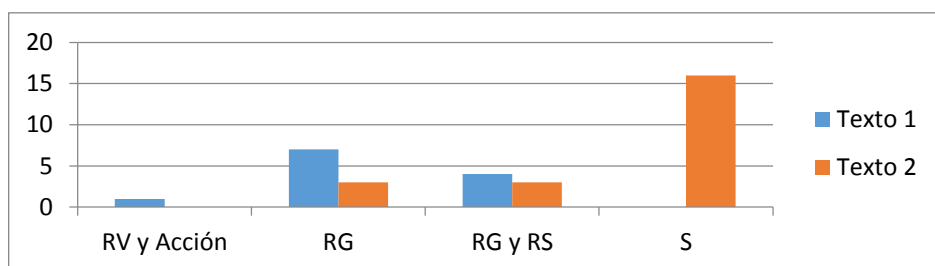


Ilustración 20. Representaciones del CNN y el SND involucradas en las tareas del texto 1 y del texto 2

De modo que, el texto 1, con mayor frecuencia, parte de las representaciones gráficas para trabajar conceptos matemáticos y en solo cuatro ocasiones se usan las representaciones simbólicas. Mientras que en el texto 2 trabaja con mayor frecuencia las representaciones simbólicas, algunas veces cuando se trabaja con representaciones gráficas también se explicita la necesidad de representar el resultado por medio de una representación simbólica.

El SMS implementado en el texto 1 se evidencia en las representaciones simbólicas de los números del 1 al 6 y en el uso de los signos igual (=) y más (+). Los números del 1 al 6 son utilizados de manera particular para representar la cardinalidad de una colección de objetos o para indicar la cantidad o el orden para llevar a cabo una acción.

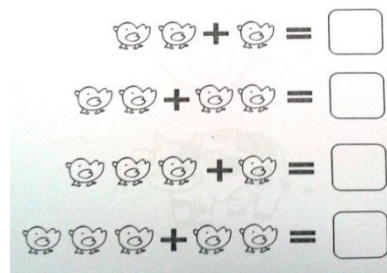


Ilustración 21. Texto 1, actividad Adición

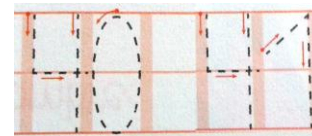
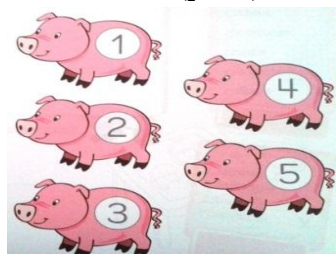
Cabe resaltar, que en una de las tareas propuestas en el texto 1 se combinan dos tipos de representación diferentes (ver ilustración 21) las representaciones simbólicas y las representaciones gráficas, lo cual podría ocasionar que el estudiante presente dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos implicados (la adición, la igualdad y el CNN). Proponer ejercicios de este tipo podría implicar una interpretación inadecuada del significado formal de los símbolos, puesto que no se pueden sumar objetos, lo que se suma, en este caso, es el cardinal que representa la colección de objetos; así mismo, no se puede igualar objetos con representaciones simbólicas.

A su vez, en el texto 2 el SMS se evidencia en las representaciones simbólicas de los números del 1 al 50 muchas veces relacionadas con el orden en la secuencia numérica y pocas veces relacionada con la cantidad que representa el símbolo (Ver tabla 7).

Tabla 7.

Texto 2, ejercicios sobre escritura numérica

Retiñe el número que corresponde a cada cerdito (p. 29)	Retiñe los números para completar la serie (p.41)	Retiñe y escribe los números (p.197)
---	---	--------------------------------------



Al respecto, se debe tener en cuenta que los SMS representan un medio de tratar conceptos matemáticos, los cuales poco a poco deben representar procesos de abstracción y generalización que dan cuenta que el estudiante comprende el concepto matemático; sin embargo, en este caso aunque se proponen tareas para que el estudiante realice de la manera correcta el símbolo, la tarea no presenta preguntas que apunten al desarrollo de procesos de abstracción para comprobar la comprensión del estudiante de lo que indica el símbolo.

Todo lo anterior, permite reflexionar sobre la importancia de trabajar con SMS intermedios, los cuales conlleven a procesos de abstracción de los conceptos matemáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje, durante los cuales el estudiante tendrá que rectificar el uso de esos SMS para que el final sea competente en el SMS deseado. Es importante entonces proponer diferentes tareas en las cuales el estudiante pueda moverse en diferentes niveles de SMS y no quedarse en un solo nivel.

En este análisis también se reconoce que algunas tareas aunque parten de contextos concretos se pierden al momento de dotar de significado los símbolos y por tanto se vuelve difícil construir los primeros elementos de la sintaxis. Incluso en algunas tareas lo importante no es dotar de significado el símbolo para que el estudiante se vuelva competente de un SMS sino que sea capaz de realizar el símbolo convencional. También se observa que muchas tareas propuestas están direccionadas a que el estudiante pase de lo concreto a lo simbólico y pocas veces de lo simbólico a lo concreto, paso fundamental en la construcción de sentido y significado del número.

2.2.5.4 Propuesta curricular en la Institución Educativa Distrital Ciudad de Bogotá. Inicialmente, se parte del hecho de que la Institución Educativa Distrital (IED) Ciudad de Bogotá, ha hecho su construcción de currículo a partir de los documentos curriculares propuestos por el MEN. De manera general se presenta la propuesta curricular de la institución, en lo relacionado al área de matemática, teniendo en cuenta la metodología y los procesos de aula en los cuales se enseña el SND en Transición.

La IED Ciudad de Bogotá brinda educación a estudiantes de preescolar, primaria y bachillerato. De manera específica en preescolar, el colegio atiende a los grados, Prejardín, Jardín y Transición. Este trabajo centra su mirada en el grado Transición por lo cual se presenta a continuación la manera en que se desarrolla el área de matemáticas en la institución.

Este colegio contempla en su plan de estudios de preescolar las dimensiones correspondientes a este nivel, las cuales se ven inmersas dentro de diferentes asignaturas que están orientadas para formar al estudiante de manera íntegra. La metodología implementada es constructivista, el desarrollo de los estudiantes se evalúa por medio de cuatro períodos, y se utiliza una rúbrica de evaluación cualitativa distribuida en cuatro niveles, superior, alto, básico o bajo para calificar.

Una de las áreas que se enseñan son las matemáticas, entre sus contenidos se encuentran, colores primarios y secundarios, figuras geométricas básicas, números cardinales del 0 al 20, la ubicación espacial, características de objetos, ubicación temporal, noción de causa-efecto, representación de colecciones de objetos, clasificación, series, patrones, equivalencias, resolución de problemas y los contextos del número (contar, medir y ordenar)

El modelo pedagógico de este colegio, está fundamentado en el constructivismo, donde se ve al estudiante como constructor de sus propias ideas por medio de diferentes procesos como, la percepción, la atención voluntaria, la memoria voluntaria, afectos, pensamiento y resolución de conflictos, los cuales se desarrollan en el aula con ayuda del docente. Tanto el estudiante como el maestro construyen conocimientos por medio de prácticas sociales que van mucho más allá del aula.

De acuerdo a lo que se ha mencionado en el modelo de enseñanza se exponen a continuación algunas reflexiones las cuales albergan aspectos claves en torno al proceso de enseñanza del CNN y el SND, las cuales se tienen en cuenta en la consolidación del MTL inicial:

-
- Desde hace aproximadamente dos décadas atrás, el grado Transición se ha constituido como obligatorio en la educación formal del país. En este sentido, el campo de investigación es relativamente nuevo, el desarrollo de investigaciones en torno al tópico de investigación aquí adoptado podría aportar a la comprensión del SND en Transición.
 - Las diversas leyes o documentos aquí expuestos, están de acuerdo en que por derecho los estudiantes deben recibir una educación integral. Las tareas propuestas deben apuntar a fortalecer los cuatro aprendizajes fundamentales de la educación (*aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser*), al desarrollo de las dimensiones del preescolar (cognitiva, corporal, comunicativa, socioafectiva, ética, estética y espiritual) y los principios de la educación preescolar. Para la realización de la propuesta de enseñanza se tendrán en cuenta los cuatro aprendizajes básicos; con relación a los principios aunque se tienen en cuenta todos ellos, se le dará mayor énfasis a la participación y la lúdica; y respecto a las dimensiones, solo se va a tener en cuenta la dimensión cognitiva, la comunicativa y la ética.
 - En lo referente al currículo de matemáticas en Transición aunque se promulgaron el Documento 10 (MEN, 2009a) y el Documento 13 (MEN, 2009b), tales documentos no brindan unas directrices claras para promover el desarrollo de pensamiento matemático, en busca de obtener tales directrices algunos docentes basan sus enseñanzas en los Lineamientos Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 1998a) y los Estándares Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) los cuales brindan algunos elementos claves a la hora de trabajar matemáticas en los primeros años aunque no están destinados a ello. Así pues, estos documentos han impulsado la necesidad de pensar la construcción de pensamiento matemático en la educación inicial y la necesidad de pensar la formación integral de los educandos. De manera que, para desarrollar pensamiento matemático de acuerdo al Documento 10 (MEN, 2009a) y al Documento 13 (MEN, 2009b) se enfatiza en los funcionamientos cognitivos que ahí se proponen: La cuantificación y principios de conteo, la comunicación de cantidades, el establecimiento de relaciones de orden y la resolución de problemas matemáticos. Así mismo, de acuerdo a los Lineamientos

Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 1998a) y los Estándares Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se propone considerar los tres grandes ejes, con relación a los conocimientos básicos, este trabajo se centra en el pensamiento numérico y sistemas numéricos para la enseñanza del CNN y el SND. También, la resolución de problemas y la comunicación con procesos generales fundamentales para el diseño de la propuesta de aula.

- Con relación a la Enseñanza de la Cardinalidad, la Ordinalidad y la Agrupación desde los Textos Escolares de Transición, se pueden apreciar diferentes elementos, entre ellos que no se dilucida una congruencia entre las disposiciones legales y curriculares del país y la propuesta que realizan los textos escolares. Con relación a la parte conceptual, se le da importancia al principio de correspondencia uno a uno, al momento de trabajar matemáticas en el aula. La cardinalidad se tiene en cuenta en los textos escolares, pero a veces se formula la pregunta, ¿Cuántos hay? la cual no evidencia de manera certera conocimiento del principio de cardinalidad. Con relación a los conceptos de sucesión y ordinalidad, en ambos textos se trabaja el reconocimiento del orden de los números en la secuencia numérica, el establecimiento de las relaciones de orden entre números (mayor que, menor que). Y con relación al concepto de agrupación este realmente no se trabaja de manera directa. Respecto a las representaciones del CNN y el SND, se presentan dos extremos, un libro más ligado a las representaciones gráficas y otro libro más ligado a las representaciones simbólicas, lo cual permite reflexionar sobre la importancia de que haya un equilibrio entre estas dos representaciones, que se permita trabajar con SMS intermedios, que se dé la posibilidad de trabajar procesos de abstracción de los conceptos matemáticos y que se permita un paso de lo concreto a lo simbólico y viceversa.
- En los Lineamientos Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 1998a), los Estándares Curriculares de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) y en la revisión de la literatura, se le da gran importancia a la resolución de problemas, no solo como proceso general sino como estrategia metodológica. Por tanto en la propuesta de aula la resolución de problemas debe ser un tópico que permee las tareas propuestas, hecho

que podría permitir al estudiante construir elementos fundamentales del CNN y el SND.

- De acuerdo a la revisión de la literatura, se puede constatar que hay diferentes autores a nivel nacional e internacional que se han preocupado por el aprendizaje del SND y el CNN en los primeros años. Así, se destacan cuatro tópicos de investigación el SND, el CNN, los principios de conteo y las operaciones aditivas. Los autores ahí mencionados, proponen una serie de tareas o situaciones sobre cada uno de los tópicos. Esta revisión bibliográfica es muy importante, pues permite tomar en cuenta lo que han hecho los otros autores, los resultados que han obtenido al formular ciertos tipos de preguntas y tareas. En ese sentido, la recopilación de tareas permite compilar un abanico de tareas a la hora de formular preguntas, tareas o situaciones, las cuales se pueden tener en cuenta a la hora de realizar una propuesta de aula (Ver tabla 8)

Tabla 8.

<i>Algunos Autores que han investigado sobre la cardinalidad, ordinalidad y agrupación.</i>			
	Cardinalidad	Ordinalidad	Agrupación
Autores	Canbanne y Ribaya (2009), Sarnecka y Carey (2008), Castro, Rico y Castro (1999), (2008), Chamorro (2005), González y Weinstein (2008), Kamii (1995), Lerner y Sadovsky (1994), Saxton y Cakir (2006), Wynn (1992).	Cabanne y Ribaya (2009), Sarnecka y Carey (2008), Castaño (1997), Castro, Rico y Castro (1999), Chamorro (2005), González y Weinstein (2008), Le corre, et al. (2006), Lerner y Sadovsky (1994), Saxton y Cakir (2006).	Canbanne y Ribaya (2009), Castaño (1997), Chamorro (2005), Fuson (1990), Lerner y Sadovsky (1994), Saxton y Cakir (2006).
Ejemplos de Tareas	Tapas, Fichas, Tareas Give a number, Señala X elementos, cartas, dóminos, tableros	Banda numérica, casilleros, el tren, canciones, el avión, el almanaque, el diario.	Cuantificación formando agrupaciones de diez, interpretar valores de billetes,

- Finalmente, la propuesta de enseñanza que realiza la IED Ciudad de Bogotá, trabaja las dimensiones, la resolución de problemas, los cardinales de los números de 0 a 20 y los contextos del número; aunque se queda corto en los conceptos de orden y agrupación. Incluir estos conceptos en la propuesta de aula podrían permitir una

aproximación a la construcción de elementos fundamentales del SND en los primeros años de la escolaridad.

Implicaciones generales de cada componente y su aporte a la construcción del MTL inicial. En relación al primer objetivo específico, se pudo determinar un MTL sobre el CNN y el SND acerca de los conceptos de orden, cardinal y agrupación en el grado de Transición, el cual se fundamenta en la documentación de cuatro componentes a saber: cognición, comunicación, enseñanza y competencia formal.

El componente cognitivo sobre los conceptos de cardinal, orden y agrupación, se encuentran fundamentados desde las actuaciones de los niños con relación a los principios de conteo, el aprendizaje del CNN y el SND, las operaciones aditivas y las dificultades que presentan los niños en la comprensión de estos conceptos. Algunos aspectos de los procesos cognitivos se evidencian por medio de la comunicación a través de las representaciones verbales (ej. palabras número), las representaciones simbólicas (ej. notaciones indo-arábigas), los estratos del SMS (ej. notaciones múltiples) y los materiales manipulativos (ej. el dinero).

El componente de comunicación tiene entonces un papel indispensable para pensar sobre la comprensión del CNN y el SND del estudiante (cognitiva); es ahí donde el modelo enseñanza interviene y da la posibilidad avanzar en el aprendizaje del objeto matemático y acercarse a un SMS más abstracto.

En este sentido, el componente de enseñanza aquí expuesto, parte de las disposiciones legales y curriculares dentro del contexto colombiano en el cual se explicita que la formación de los estudiantes de Transición se debe basar en los principios (la integralidad, la participación y la lúdica), las dimensiones y los pilares del conocimiento. Debido a que el objeto de enseñanza es el CNN y el SND se toman de referente el pensamiento numérico (MEN, 1998a), los procesos generales (resolución de problemas, comunicación), las competencias matemáticas en Transición (MEN, 2009a) y las propuestas de enseñanza de algunos autores a nivel nacional e internacional, los cuales brindan orientaciones para desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes que cursan los primeros años de la escolaridad, especialmente en lo relacionado con los conceptos de cardinal, ordinal y agrupación. Sin embargo, los textos escolares y el currículo de la Institución Educativa en la que se realiza la implementación que se supone deben reflejar la propuesta que realiza el MEN, presenta incongruencias con relación a las disposiciones legales y curriculares a nivel

nacional, dejando de lado aspectos relevantes del CNN y el SND como el concepto de agrupación y los números ordinales.

De modo que, el docente tiene un papel fundamental, pues debe proponer situaciones que permitan comunicar aspectos claves sobre los conceptos de cardinalidad, ordinal y agrupación, para lograr que el estudiante avance en la comprensión del SMS abstracto, es decir, se aproxime a la comprensión del CNN y el SND, lo cual influye directamente en el desarrollo de procesos cognitivos en el estudiante.

Por otro lado, el componente formal presenta desde un análisis histórico, que los fundamentos para la comprensión del CNN y el SND obedecen a la construcción de los conceptos de cardinal, ordinal y agrupación; estos conceptos están estrechamente relacionados con el principio de correspondencia uno a uno, la función biyectiva, la noción de base (10), las operaciones (aditivas y multiplicativas), la posicionalidad, el concepto de cero y las representaciones simbólicas. Sin embargo, en el aula de clases se le da mayor importancia a las representaciones simbólicas de los estudiantes, desconociendo la comprensión de los conceptos que constituyen dichas representaciones. En este componente también se presenta un análisis de la fenomenología pura sobre el CNN y el SND, en el cual se expone el teorema fundamental de la numeración, la definición de sucesor, de orden, de operaciones, de números naturales, entre otros. El docente debe tener en cuenta las características del objeto matemático para poder comunicarlas de manera efectiva a los estudiantes en el proceso de enseñanza, para descodificar los textos que producen los estudiantes, y para diseñar propuestas de aula que promuevan la comprensión del objeto matemático y de SMS más abstractos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se consolida así el análisis previo sobre la problemática abordada en este trabajo de investigación, lo cual implica un MTL inicial el cual se constituye como marco de referencia para el diseño y experimentación de situaciones sobre los conceptos de orden, cardinal y agrupación para aproximarse al CNN y el SND.

A continuación se muestra, a manera de resumen, un esquema (ver ilustración 22) que representa los aportes al proceso de experimentación de los componentes de enseñanza, competencia formal, cognición y comunicación, expuestas a lo largo de este capítulo que determinar el MTL inicial:

MODELO PARA LOS PROCESOS COGNITIVOS Y DE COMUNICACIÓN

- Desde el punto de vista cognitivo, la comprensión del conteo está vinculado con cinco principios a saber: correspondencia uno a uno, orden estable, cardinal, abstracción e irrelevancia de orden. Algunas dificultades que se presentan en el conteo están asociadas a la adquisición de la lista de conteo estable y repetible, las particiones, la coordinación y la complejidad del principio cardinal.
- Los estudiantes al llegar a la escuela tienen experiencias numéricas previas con los elaboran hipótesis sobre la manera en que funciona el SND.
- En la medida en que se construye el CNN y el SND se construye también el concepto de las operaciones. Las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las operaciones están asociadas a la falta de comprensión de la estructura conceptual de los numerales multidígito
- Los niños en los primeros años de la escolaridad usan las representaciones verbales, las representaciones simbólicas (dimensión 1 y notaciones indo-arábigas) y los estratos de los SMS, en los cuales se evidencia su conocimiento sobre CNN y el SND.
- Se reconoce el dinero sobre otras representaciones de materiales manipulativos porque con él se pueden realizar agrupaciones, cambios, conteo, entre otros.

**MODELO TEÓRICO
LOCAL**
Experimentación
Actividades

MODELO DE COMPETENCIA FORMAL

- Desde la perspectiva histórica, el CNN se fundamenta desde los conceptos de cardinalidad y ordinalidad, los cuales a su vez, se relacionan con la correspondencia uno a uno, la secuencia, y el principio de recurrencia (sucesor).
- El uso de la agrupación en el conteo es impulsado por la necesidad del hombre de contar colecciones cada vez más grandes. Al aceptar la multiplicidad como nueva unidad de orden superior, el hombre admite el concepto de base en los sistemas de numeración.
- La consolidación del SND es el resultado de las construcciones matemáticas que han tenido lugar en diferentes civilizaciones (Egipcia, china, babilónica, Maya, etc.), sobre la noción de base (10), la posicionalidad, el cero, la estructura aditiva y multiplicativa.
- La definición actual del CNN y el SND se fundamenta desde la teoría de conjuntos (axiomas de ZF) y el teorema fundamental de la numeración.

MODELO DE ENSEÑANZA

- La enseñanza en Transición de acuerdo a los planteamientos del MEN debe atender a los principios, las dimensiones (cognitiva) y los pilares del conocimiento.
- El MEN propone la enseñanza del CNN y el SND atendiendo a las competencias matemáticas en Transición; sin embargo, estas directrices no son suficientes, se hace necesario tener en cuenta las directrices sobre pensamiento numérico (conocimiento básico), la comunicación y la resolución de problemas (procesos generales) y los contextos (juegos).
- La resolución de problemas se puede integrar a la propuesta de aula pues le permite al estudiante darle sentido y significado a los conceptos matemáticos y lo acerca a la actividad de simbolización.
- Los autores a nivel nacional e internacional que se han interesado en la enseñanza del CNN y el SND ofrecen una variedad de actividades que se pueden tener en cuenta al momento de diseñar la propuesta de aula.
- Los textos escolares y la propuesta curricular de la institución educativa prestan mayor atención a la secuencia numérica y las representaciones simbólicas en vez de anuntar a la comprensión del SND y el CNN.

Ilustración 22. Implicaciones generales de cada componente y su aporte a la construcción del MTL inicial.

CAPÍTULO 3:

El Sistema de Numeración Decimal en Transición

En este capítulo, se presentan los aspectos relacionados con el diseño e implementación de la experimentación, los cuales se realizan para la enseñanza y el aprendizaje del SND en Transición involucrando los conceptos cardinal, ordinal y agrupación. La experimentación se consolida en una propuesta de aula que involucra tres situaciones; la situación 1 se denomina el juego cincuenta fichas, el conteo y la correspondencia uno a uno; la situación 2 se denomina Pepa y la ordinalidad; y la situación 3 se denomina la tienda y la agrupación. En este capítulo, se exponen los resultados y análisis de los resultados de la propuesta de aula implementada tomando como referencia la rejilla de análisis como instrumento eminentemente analítico, lo cual permite categorizar las actuaciones de los estudiantes para caracterizar algunos aspectos conceptuales y procedimentales relacionados con el CNN y el SND, teniendo en cuenta la representaciones del número, los SMS, la resolución de problemas y los usos intuitivos y espontáneos de los estratos de SMS (Filloy, 1999). La implementación de la experimentación, permite observar diferentes perfiles de los estudiantes, a partir de los cuales se escoge un subgrupo para realizar un estudio de casos. Finalmente, se diseña la entrevista basada en la propuesta de aula, se implementa con el subgrupo de estudiantes escogido y se analiza.

3.1 Etapas del diseño y desarrollo de la experimentación

En el capítulo anterior se expone la primera parte del diseño de la en la cual a partir de la problemática sobre la aproximación al SND en Transición se realiza un análisis previo del problema a la luz de los componentes que conforman el MTL inicial. Partiendo de esto, se muestra a continuación las etapas de la parte final del esquema (ver ilustración 5) sobre el diseño del desarrollo de la experimentación y su desarrollo.

3.1.1 Sobre el diseño del desarrollo de la experimentación. En esta sección se presenta la manera en que influyen los componentes del MTL inicial en el diseño de la propuesta de aula.

Desde el modelo de enseñanza, como ya se expuso anteriormente, se tienen en cuenta disposiciones legales, curriculares e investigaciones de algunos autores a nivel nacional e internacional, las cuales si bien brindan orientaciones sobre la enseñanza del CNN y el SND en los primeros grados de la escolaridad, no se ven reflejadas de manera directa en los textos escolares o en el currículo de la institución donde se va a realizar la implementación. Se pone de manifiesto la necesidad de proponer situaciones problema fuera de lo convencional, que atiendan a las disposiciones legales y curriculares, que tengan en cuenta la resolución de problemas y que se nutran de las investigaciones realizadas en el campo de la enseñanza del CNN y el SND.

En cuanto al modelo de competencia formal, la fenomenología histórica deja ver que los fundamentos para la construcción del CNN y el SND obedecen a la comprensión de la correspondencia uno a uno, la función biyectiva, la secuencia, la agrupación, la posicionalidad y la conceptualización de cero como número. Además, la fenomenología pura presenta el CNN y el SND desde las matemáticas mismas, en ella se destaca la noción de sucesor, las relaciones de orden, las operaciones aditivas, las operaciones multiplicativas, y el teorema fundamental de la numeración. Desde este modelo la fenomenología pura y la fenomenología histórica se complementan para que en el diseño de la experimentación se tengan en cuenta estos conceptos para realizar la aproximación al CNN y el SND en Transición.

Debido a que en el modelo cognitivo y de comunicación es importante estudiar la comprensión que tienen los estudiantes sobre ciertos conceptos y la manera en que comunican esos saberes, el docente debe estar atento a las actuaciones de los estudiantes en términos de las estrategias que usan (correctas o incorrectas), las dificultades que presenta y la manera en

que lo comunican. Por tanto, la propuesta de aula permite que el estudiante comunique su conocimiento por medio de representaciones verbales, representaciones simbólicas, SMS intermedios y materiales manipulativos (dinero).

En síntesis, la propuesta de aula en el diseño del desarrollo de la experimentación está fundamentada desde los componentes del MTL, los cuales se articulan en un plan de trabajo coherente y organizado a través de situaciones problemáticas relacionadas con la construcción de unos elementos fundamentales del CNN y el SND en lo concerniente a la cardinalidad, ordinalidad y la agrupación.

Para el diseño de la propuesta de aula, se tienen en cuenta diferentes autores ya mencionados a lo largo de este trabajo, tales como Kamii (2000) y Castro et al. (1988), Cerón & Gutiérrez (2013), Wynn (1992), Lerner y Sadovsky (1994), Chamorro (2005) y otros, de quienes se retoman algunos juegos o tareas que involucran materiales manipulativos, los cuales son la base de las situaciones problemáticas que plantea esta propuesta de aula.

3.1.2 Desarrollo de la experimentación. El desarrollo de la experimentación hace referencia a la implementación de la enseñanza controlada, es decir, la enseñanza que se lleva a cabo con los estudiantes de manera individual y/o grupal para observar sus avances en términos de la comprensión del objeto matemático. El desarrollo de la experimentación se llevó a cabo a través de las siguientes etapas: elección de la población a estudiar, la aplicación de la evaluación diagnóstica, clasificación de la población, elección de un subgrupo de la población (muestra), estudio de casos y análisis e interpretaciones de los resultados.

Elección de la población a estudiar. La población a estudiar es un grupo de estudiantes de grado Transición de la I.E.D. Ciudad de Bogotá, la cual está conformada por 24 estudiantes cuyas edades oscilan entre 5 y 6 años. La propuesta de aula se desarrolla con 12 estudiantes del salón, 6 niños y 6 niñas, tomados aleatoriamente.

La intervención en la enseñanza controlada. En este trabajo de investigación se toma esta etapa como el diseño¹¹ y aplicación de la propuesta de aula. La propuesta de aula está compuesta por tres situaciones a saber: la situación 1 denominada el juego cincuenta fichas, el conteo y la correspondencia uno a uno; la situación 2 denominada Pepa y la ordinalidad; y la situación 3 denominada la tienda y la agrupación. Esta propuesta de aula se implementa en la

¹¹ El diseño de la propuesta de aula se presenta en el apartado 3.1.3

población a estudiar (12 estudiantes de grado Transición) y las situaciones se desarrollan de manera individual o grupal.

*Clasificación de la población*¹²: Esta etapa se lleva a cabo después de aplicar la propuesta de aula atendiendo a los resultados obtenidos por los estudiantes, la cual permite obtener los perfiles de los alumnos participantes. En este caso, los estudiantes que desarrollaron la propuesta de aula se clasifican de acuerdo al desempeño en cada una de las situaciones. Para establecer los perfiles de los estudiantes (perfil alto, perfil medio, perfil bajo) se tiene en cuenta la cantidad de respuestas correctas al resolver cada situación problema.

Elección de un subgrupo de la población (muestra). Después de clasificar la población y obtener los perfiles de los estudiantes se escoge un subgrupo de la población para realizar el estudio de casos. En este trabajo de investigación al clasificar la población de los estudiantes en perfiles (bajo, medio, alto), se toma un subgrupo de la población; es decir se toman dos estudiantes para realizar el estudio de casos, uno de perfil bajo, que haya tenido dificultad al desarrollar las situaciones de la propuesta de aula, y uno de perfil alto, que haya respondido correctamente las situaciones de la propuesta de aula.

Estudio de casos. El estudio de caso permite recoger de forma descriptiva informaciones de tipo cualitativo. En el estudio de caso se usa la entrevista, las notas de campo, las observaciones y las grabaciones de video, con la intención de realizar una descripción detallada de las actuaciones del estudiante al momento de realizar la propuesta de aula.

Para la realización del estudio, en la etapa anterior (elección del subgrupo de la población) se seleccionaron los casos que van a hacer parte de la investigación (dos estudiantes, uno de perfil bajo y uno de perfil alto). Para el estudio de caso en esta etapa se diseña la entrevista teniendo en cuenta las tareas de la propuesta de aula. Esta entrevista la realiza la investigadora en un contexto diferente al aula de clase, esto para tener una observación detallada y realizar un análisis de las actuaciones del estudiante y del proceso de enseñanza. Para la realización de esta entrevista se realiza un protocolo el cual guía el desarrollo de la entrevista; sin embargo, la investigadora puede hacer preguntas espontáneas para profundizar en las actuaciones de los estudiantes. Es importante mencionar que durante la entrevista, en el estudio de casos, se deben realizar preguntas al estudiante que posee un perfil

¹² Esta etapa se explica de manera más amplia en el apartado 3.3.1

bajo que le sirvan para aprender y poderse desempeñar en las situaciones problema que inicialmente no pudo resolver.

Análisis e interpretaciones de los resultados. En esta etapa se realiza el análisis e interpretación de los resultados atendiendo a las observaciones y a los propósitos del estudio.

Las etapas anteriores se exponen en el siguiente esquema (Ver ilustración 23).

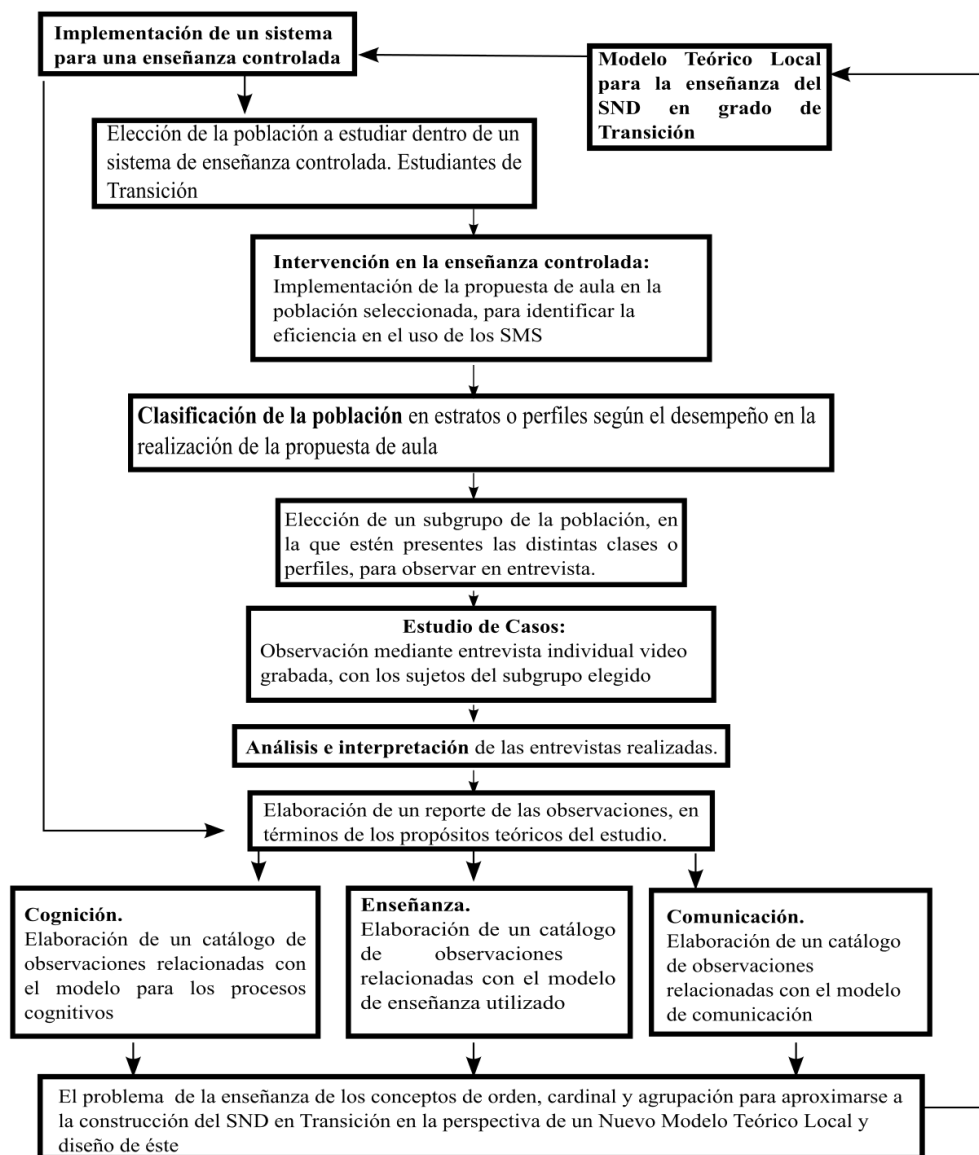


Ilustración 23. Esquema del desarrollo de la experimentación sobre el CNN y el SND.

3.1.3 Sobre la propuesta de aula. A continuación se presenta la manera en que se aborda la resolución de problemas, las situaciones problemas y las tareas, estos conceptos permiten organizar la propuesta de aula.

La resolución de problemas se asume en este trabajo desde los planteamientos del MEN (2006) como un proceso general en el desarrollo de pensamiento matemático. Según las disposiciones del MEN (1998a) la relación que existe entre las situaciones problema y los problemas es la siguiente, las situaciones se entiende como el contexto que permite trabajar un concepto matemático (por ejemplo, el juego cincuenta fichas) y los problemas surgen en estas situaciones a través de las tareas que se le proponen a los estudiantes, lo cual permite que los estudiantes creen estrategias de resolución y se acerquen a la construcción de algunos elementos fundamentales del concepto matemático.

Además, las situaciones se toman en este trabajo en el sentido de “situaciones problemáticas” o “situaciones problema” atendiendo a las disposiciones del MEN (1998a); así, las situaciones problema se toman como un contexto para acercarse al conocimiento matemático en la escuela, para poner en práctica el aprendizaje de los estudiantes y para desarrollar procesos de pensamiento. Las situaciones problema provienen de la vida diaria, de las matemáticas, de otras ciencias y permiten otorgarles sentido y utilidad a las matemáticas. Esta visión exige que el docente en el aula cree situaciones problema en las que los alumnos puedan plantear preguntas, explorar problemas, reflexionar y aprender.

En el contexto de las situaciones problema se presentan tareas, las cuales se refieren al trabajo intelectual, personal y grupal de los estudiantes, para interpretar, analizar, modelar y reformular la situación, formular preguntas, conjeturas, utilizar materiales manipulativos, producir, interpretar y transformar representaciones (verbales, gráficas, simbólicas, etc.). En este sentido, la tarea estimulada por la situación permite avanzar y profundizar en la comprensión del concepto matemático.

A continuación se presentan aspectos correspondientes a la experimentación que se consolida en el diseño y descripción de la propuesta de aula.

3.1.3.1 Diseño y descripción de la propuesta de aula. Esta propuesta está conformada por tres situaciones problema, la situación 1 se denomina el juego cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno; la situación 2 se denomina el juego pepa y la ordinalidad; y la situación 3 se denomina el juego la tienda y la agrupación; cada situación consta de 3 tareas. A continuación se presentan los aspectos generales de cada situación.

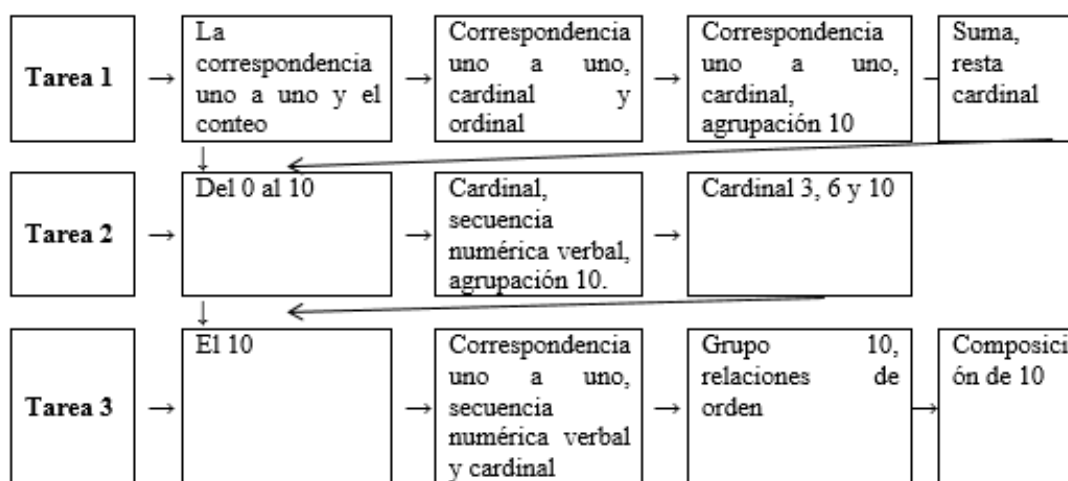
Tabla 9

Situación 1: Juego cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno.

Tareas	Tarea	Tarea 2	Tarea
Cantidad de preguntas por tarea	3	2	3

El propósito de esta situación es movilizar la noción de cardinalidad a partir de la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y la noción de cantidad.

Esta situación comienza con la presentación y desarrollo del juego cincuenta fichas. En la tarea 1, se realizan diferentes preguntas consignadas en las tareas, para evidenciar la manera en que los estudiantes utilizan la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal¹³ en el orden convencional y la representación del cardinal. También se realizan algunas preguntas que involucran la comprensión de las relaciones de orden entre cantidades. Posteriormente, se desarrollan las tareas 2 y 3 en las cuales se trabajan los números del 1 al 10, se registran cantidades, se hacen comparaciones, se establecen relaciones de orden y se realiza la composición de diez. La estructura de la situación 1 junto con los conceptos matemáticos involucrados se ve reflejada en el siguiente organigrama:



Organigrama. 1 Situación 1, cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno

¹³ Hace referencia a la organización de los números en secuencia ordenada y repetible.

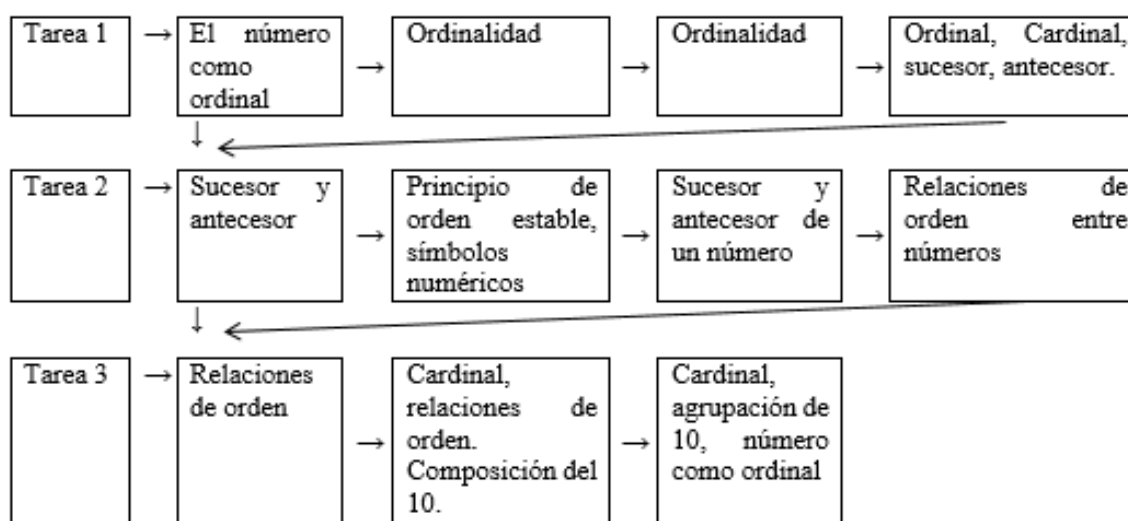
Tabla 10

Situación 2: El juego Pepa y la ordinalidad

Tareas	Tarea 1	Tarea	Tarea
Cantidad de preguntas por tarea	3	3	2

El propósito de esta situación es movilizar la noción de número ordinal a través de la secuencia numérica verbal convencional, la posición de un objeto en una secuencia ordenada, la noción de sucesor, antecesor, y las relaciones de orden.

En la primera tarea se les presenta a los estudiantes un video *Pepa y el tren* y deben reconocer la posición en que están ubicados los personajes en el tren. En la segunda tarea se utilizan los rieles del tren con la secuencia numérica convencional desde el 1 hasta el 30 con algunos espacios en blanco, los estudiantes deben de completar los espacios vacíos, reconocer el sucesor y el antecesor de un número y establecer relaciones de orden (mayor que, menor que). Finalmente en la tarea 3, se utilizan un mazo de cartas, los estudiantes deben hacer composiciones del número 10 e identificar las colecciones mayores o menores a 10; en esta última tarea los estudiantes deben reconocer además, la cantidad de grupos de diez que hay y el orden en que son ubicados los jugadores (primer, segundo o tercer lugar). La estructura de la situación 2 junto con los conceptos matemáticos involucrados se ve reflejada en el siguiente organigrama:



Organigrama. 2. Situación 2 Pepa y la ordinalidad

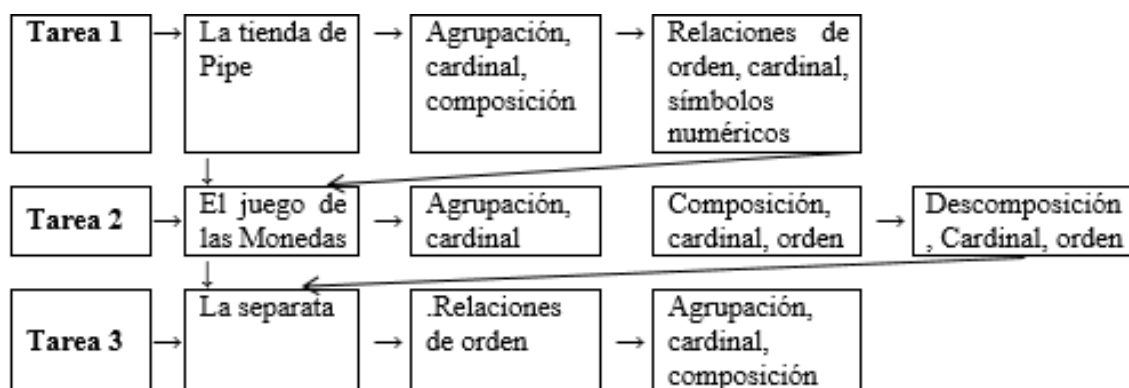
Tabla 11

Situación 3: Juego la tienda y la agrupación

Tareas	Tarea 1	Tarea	Tarea
Cantidad de preguntas por tarea	2	3	2

El propósito de esta situación es movilizar la noción a agrupación de 10, involucrando representaciones simbólicas, los cambios, y la composición y descomposición de cantidades.

En la primera tarea los estudiantes deben hacer la composición de cantidades 12, 26 y 42 usando los números de 1 al 10, los estudiantes también deben reconocer las representaciones simbólicas notacionales 600, 1.300 y 2.100 y establecer relaciones de orden entre ellos. En la segunda tarea, los estudiantes deben manejar monedas de diferentes valores \$ 1, \$ 10, \$ 100 y \$ 1000, con las cuales deben hacer cambios de unidades de orden inferior a unidades de orden superior, los estudiantes también deben de hacer descomposición de cantidades y calcular la totalidad de dinero que obtuvieron durante el juego. Finalmente en la tarea 3 los estudiantes interpretan una separata de ofertas, establecen relaciones de orden entre los precios de los productos que se ofrecen la separata, y seleccionan las monedas correctas para completar el precio de cada producto. La estructura de la situación 3 junto con los conceptos matemáticos involucrados se ve reflejada en el siguiente organigrama:



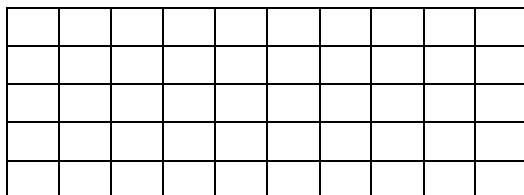
Organigrama. 3. Situación 3, la tienda y la agrupación.

3.1.3.2 La propuesta de aula.

A continuación se presenta la propuesta de aula.

Situación 1: Cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno¹⁴**Descripción de la Tarea:**

Para realizar el juego se requieren de 100 fichas circulares; dos dados modificados de la siguiente manera, un dado con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5 (en cada cara del dado un número) y el otro dado con los números 0, 4, 5, 6, 7, 8 (en cada cara del dado un número); dos tableros divididos en cuadrículas organizadas en 5 filas y 10 columnas. En la siguiente imagen se muestra el ejemplo del tablero



Se juega en parejas de estudiantes (cada estudiante tiene un tablero) y por turnos lanzan los dados. Cada estudiante va llenando su tablero con las fichas circulares de acuerdo a la cantidad de puntos obtenidos al lanzar los dados en cada turno. Sólo se puede colocar una ficha por cada cuadrícula. Gana el estudiante que llene completamente las cuadrículas de su tablero.

¹⁴ La siguiente tarea es un rediseño de la situación 1 propuesta en la trabajo de pregrado titulado “*La construcción del concepto de número natural: Una propuesta de aula que involucra juegos con materiales manipulativos*” (Cerón y Gutiérrez, 2013)

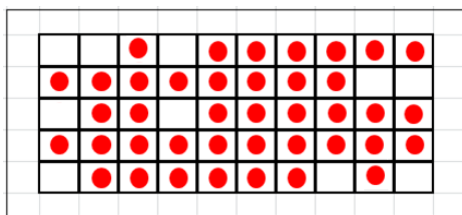
Tarea 1: La correspondencia uno a uno y el conteo

1. Cada pareja de estudiantes juega cincuenta fichas. Durante el juego a los estudiantes se les pregunta:

- a) ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados?
- b) ¿Quién ha colocado menos fichas en la tabla?
- c) ¿Cuántas fichas te faltan para tener la misma cantidad que tu compañero?
- d) ¿Cuánto te falta para ganar?

El literal *a* se realiza en cualquier momento del juego, el literal *b* se realiza cuando la diferencia entre las cantidades es menor o igual a cuatro. El literal *c* se realiza al principio del juego cuando las cantidades no exceden a 20 fichas y el literal *d* al finalizar el juego, cuando falten 10 fichas o menos.

2. Teniendo en cuenta las fichas en el tablero que se muestra a continuación:



¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para **llenar** todas las casillas?

3. Lucía tiene seis fichas como se muestra a continuación:



a) Pedro tiene una ficha más que Lucía. Dibuja las fichas que tiene Pedro



b) Mariana tiene 2 fichas menos que Lucía. Dibuja las fichas que tiene Mariana



Tarea 2: Del 0 al 10

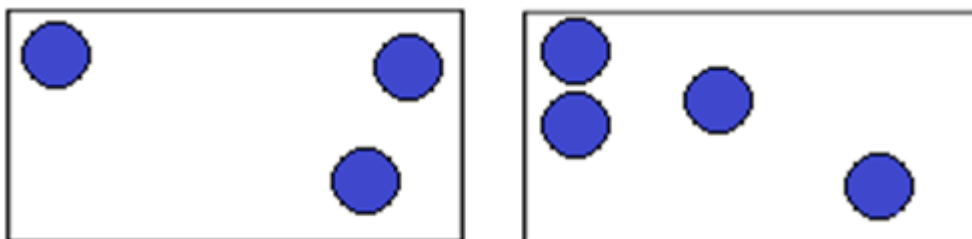
Los estudiantes juegan cincuenta fichas y luego realizan la siguiente tarea.

1. Usando las fichas del juego realiza una colección que tenga

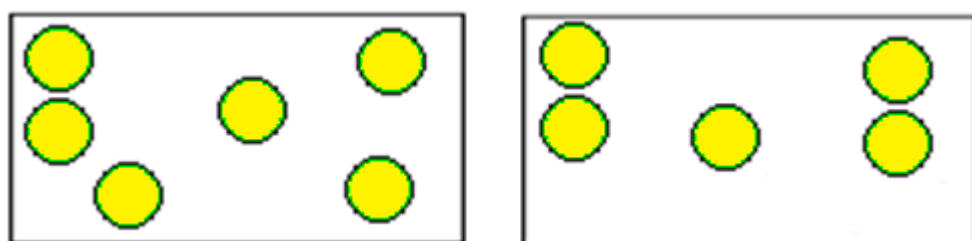
a) 0 fichas b) 3 fichas c) 4 fichas d) 6 fichas e) 8 fichas f) 10 fichas

2. Observa las parejas de cartas y señala con una X la carta que tiene:

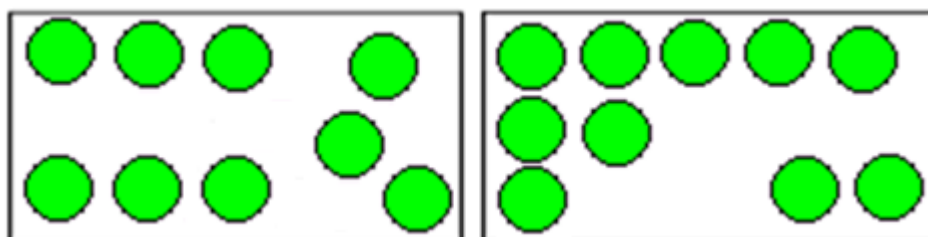
3 fichas



6 fichas



10 fichas



Se realizan las dos preguntas dirigidas por la docente y el punto 2 se registra de manera individual.

Tarea 3: El 10

1. Cada pareja de estudiantes juega cincuenta fichas. De manera individual se registra en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados

Estudiante 1

TURNO	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

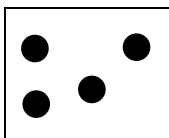
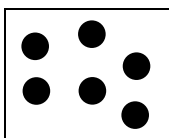
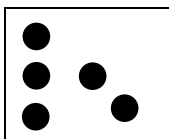
Estudiante 2

TURNO	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

2. Los estudiantes observan los puntajes que han registrado en las tablas y realizan lo siguiente:

- Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla
- Compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo el mayor puntaje?
- Compara con tu compañero los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor cantidad?
- Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos, compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo más veces diez puntos?
- Escribe una X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10?

3. De manera individual, completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.



Situación 2: Pepa y la Ordinalidad

Tarea 1: El Número como ordinal

La docente le muestra a los estudiantes el video *Pepa pig viaje en tren*; luego, les muestra un tren con diez vagones, cada vagón con un personaje de la serie, y hace énfasis sobre la posición de los personajes en el tren.



Ilustración 24. Tren de pepa

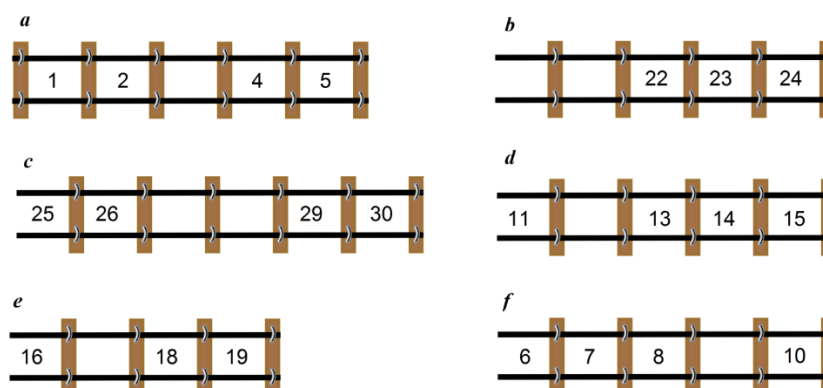
1. De manera individual, los estudiantes responden a las siguientes preguntas:
 - a. Encierra en un círculo el personaje que está ubicado de primero en el tren
 - b. Escribe una X sobre el personaje que está ubicado de último en el tren
 - c. Colorea el personaje con quien debe cambiar el puesto Candy Gata para estar en el cuarto puesto
 - d. ¿En qué posición está Emily la Elefante?
2. Teniendo en cuenta la organización del tren. La docente le indica a los estudiantes que escojan uno de los personajes, el que más les llame la atención y escriban un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren.
3. La docente les presentan un tren con dos vagones a los estudiantes. En el primer vagón hay 5 personajes del video: Pepa cerdita, Wendy loba, Emilia elefanta, Rebeca liebre y Madame gacela y en el segundo vagón están los otros personajes del video: Susy oveja, Pedro pony, Danny perro, Zoe cebra y Candy gata. La profesora cuenta cada grupo de personajes y los pone en los vagones respectivos. Luego, la profesora cuenta que Pepa cerdita quiere pasarse al segundo vagón, así que toma a Pepa cerdita del primer vagón y la desplaza al segundo vagón. Finalmente los estudiantes indican:
 - a. ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?
 - b. ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?



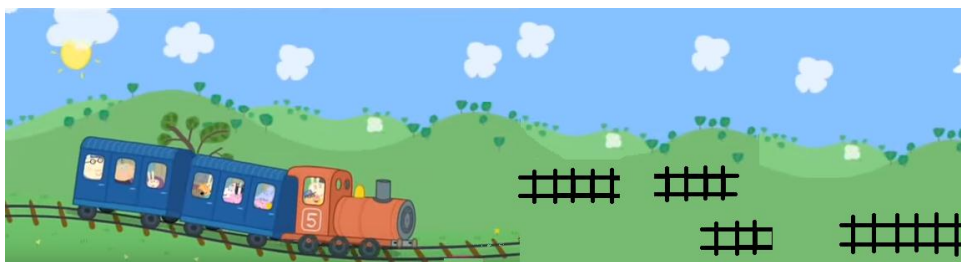
Ilustración 25. Tren S2, T1, P3

Tarea 2: Sucesor y Antecesor

La tarea se realiza en parejas, la profesora le entrega a los estudiantes los rieles del tren cortados en seis trozos como se muestra a continuación y las fichas con los números 3, 2, 9, 12, 14, 17, 20, 21, 27, 28 y 17. Cada ficha tiene un adhesivo para que el estudiante pueda ponerlo en el espacio correspondiente.

**Ilustración 26.** Rieles del tren

La profesora cuenta que mientras Pepa y sus amigos daban un paseo en el tren se percataron de que los rieles se habían descompuesto y por tanto el tren no podía pasar por ese camino. La docente invita a los estudiantes a ayudar a reparar los rieles del tren apoyando su explicación en la ilustración 27.

**Ilustración 27.** Rieles descompuestos

1. Los estudiantes completan los rieles del tren con los números correspondientes.

Mientras tanto la profesora pregunta:

- a. ¿Explica por qué el número 9 va en esa posición?
- b. ¿En qué posición se debe colocar el número 12? ¿Por qué?
- c. ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué?

Luego, la profesora introduce las palabras *sucesor* y *antecesor* de un número haciendo referencia al siguiente o al anterior de un número. Por ejemplo: ¿Qué número es el siguiente de

4? “A ese número lo vamos a llamar sucesor”, ¿Qué número esta antes del 4? “A ese número lo vamos a llamar antecesor”

2. Con los números ubicados en el sitio correspondiente, la docente le indica a los estudiantes que reparen los rieles del tren para que Pepa y sus amigos puedan pasar, para ello deben unir los rieles en el orden correcto. Mientras reparan los rieles los estudiantes responden a las siguientes preguntas:
 - a. ¿Qué número es el sucesor del 5?
 - b. ¿Qué número es el antecesor de 10? ¿Por qué?
3. La docente orienta a los estudiantes con las siguientes instrucciones:
 - a. Encierren en un círculo un número que sea menor que 20
 - b. Señalen con una X un número que sea mayor que 10
 - c. Coloreen el número que es mayor que 10 pero menor que 12

Tarea 3: Relaciones de orden

La tarea se realiza en grupos de tres o cuatro personas. La profesora le entrega a los estudiantes un mazo de cartas españolas modificadas con las imágenes de Pepa Pig, y la imagen del tren (Ver ilustración 29).

Cada estudiante tiene un tren, se ubican las cartas boca abajo y la carta 10 boca arriba en el centro de la mesa (ver ilustración 28). La cantidad en la carta indica los personajes. Los estudiantes deben ubicar en cada vagón del tren 10 personajes y solamente diez personajes.

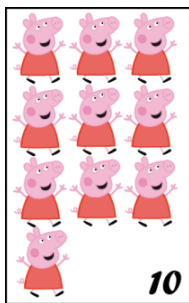


Ilustración 28. Carta que indica la cantidad 10.

Cada estudiante da la vuelta a una carta, si esa carta contiene la cantidad 10 se la lleva y la pone como vagón en el tren, si no la deja boca arriba sobre la mesa. Los estudiantes pueden sumar el número que obtuvieron en la carta con otro número de una carta que esté boca arriba

sobre la mesa para obtener la cantidad 10, en ese caso, tomará las dos cartas y las pondrán en un vagón en el tren (ver ilustración 29).

Gana el jugador que haya formado más grupos de diez.

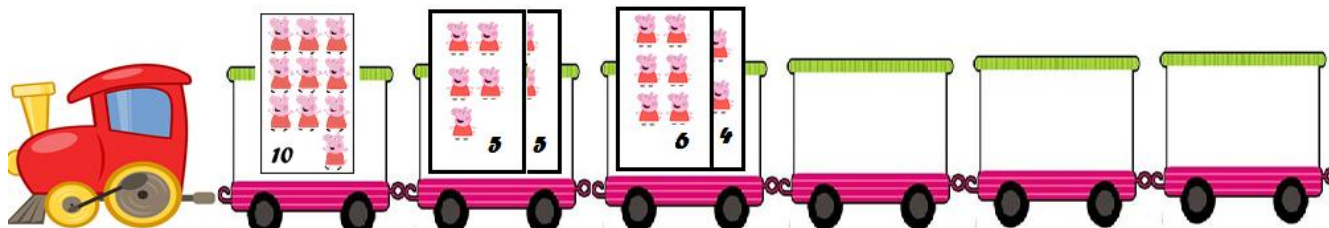


Ilustración 29. Tren S2, T3

1. Durante el juego, la docente le pregunta a uno de los estudiantes lo siguiente:
 - a. ¿Qué número sacaste en la carta?
 - b. ¿Ese número es mayor que diez? ¿Por qué?
 - c. ¿Ese número es menor que diez? ¿Por qué?
 - d. ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez?

El literal *a*, *b* y *c* se pueden realizar en cualquier momento del juego, y el literal *d* cuando el puntaje obtenido en la carta sea menor a diez.

2. Al terminar el juego, la docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de grupos de diez que formaron en la siguiente tabla y que determinen las posiciones en que quedaron, teniendo en cuenta que el jugador que haya obtenido la mayor cantidad de grupos de diez es el primero.

Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden
1		
2		
3		
4		

- a. ¿Quién quedó de primero?
- b. ¿Quién quedó de tercero?
- c. ¿Cuántas Peppa Pigs tiene el tren del jugador 1 en total?

SITUACIÓN 3: La Tienda y la Agrupación**Tarea 1: La tienda de Pipe**

Para realizar esta tarea se requiere de 400 bananas, 24 bolsas y un títere. Los estudiantes se organizan en grupos de 3 o 4. La docente da a conocer la siguiente la siguiente situación: Pipe el títere tiene una tienda de bananas, a él le puedes pedir las bananas que quieras. Pero Pipe tiene un problema, solo puede contar hasta 10, así que cuando alguien va a la tienda de Pipe a pedir bananas solo pueden utilizar los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, porque son los números que Pipe conoce.

1. La docente le entrega a cada grupo un número. El grupo debe escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número. El mensaje sólo puede tener los números que Pipe el títere entiende. Al final los estudiantes deben meter todos los dulces en la bolsa. Este ejercicio se realiza con los siguientes números:
 - a. 12
 - b. 26
 - c. 42
2. La docente da a conocer la siguiente situación: Pipe el títere debe ponerle un precio a las bolsas de dulces que se han formado: 12 dulces, 26 dulces, 42 dulces. Pero los precios son muy altos y Pipe no los entiende, porque solo puede contar hasta 10. Ayúdale a Pipe a ponerle los precios a las bolsas de bananas. Los precios son los siguientes

1.300

600

2.100

Mientras realizan la tarea, la profesora pregunta:

- a. ¿Cuál es el mayor precio? ¿Por qué?
- b. ¿Cuál es el menor precio? ¿Por qué?
- c. Indica la razón por la que el precio corresponde a la bolsa de bananas

Tarea 2: Juego de las Monedas

Se juega en equipos de 3 o 4 personas. Para realizar el juego se requiere que cada equipo tenga dos dados convencionales, 80 monedas de \$ 1, 90 monedas de \$ 10, 90 monedas de \$100 y 10 monedas de \$1.000 cada grupo de monedas deben estar organizadas en una bolsa aparte.

Cada grupo escoge un integrante de su equipo para que sea el banquero, es decir, la persona encargada de hacer los cambios de monedas, el banquero va a tener solamente 10 monedas de \$10, 10 monedas de \$100 y 10 monedas de \$1.000. El resto de monedas (80 monedas de \$ 1, 80 monedas de \$ 10 y 80 monedas de \$100) se ubican en la mitad de la mesa para empezar el juego.

Cada estudiante del grupo (excepto el banquero) tira los dados y toma la cantidad de monedas que se le indican. En las dos primeras rondas van a tomar monedas de un peso, en la tercera y cuarta ronda van a tomar monedas de \$ 10, y en la quinta y sexta ronda van a tomar monedas de \$ 100, según la cantidad que aparece en el dado.

Después de obtener las monedas, cada grupo puede hacer cambios con el banquero, siguiendo las siguientes reglas:

- 10 monedas de 1 peso se pueden cambiar por una moneda de 10 pesos.
- 10 monedas de 10 pesos se pueden cambiar por una moneda de 100 pesos.
- 10 monedas de 100 pesos se pueden cambiar por una moneda de 1.000 pesos.

1. Mientras se realiza el juego, la investigadora le pregunta a por lo menos dos de los estudiantes del grupo:

- a. ¿Cuántas monedas de un peso tienes?
- b. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué?
- c. ¿Cuántas monedas de 10 pesos tienes?
- d. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué?
- e. ¿Cuántas monedas de 100 pesos tienes?
- f. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué?

2. La docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de monedas de cada integrante del grupo en la siguiente tabla:

Cantidad Estudiante	Monedas de 1.000 pesos	Monedas de 100 pesos	Monedas de 10 pesos	Monedas de 1 peso
1				
2				
3				
4				

3. La docente le dice a los estudiantes que observen los puntajes que han registrado en la tabla y respondan las siguientes preguntas:
- Si en una casilla hace falta realizar una conversión de monedas, se plantea la siguiente pregunta ¿Esta cantidad de monedas no la podrías haber cambiado por otra moneda?
 - Teniendo en cuenta la cantidad de monedas de 1.000 pesos que tiene el estudiante 2 indica ¿Cuántas monedas de 100 pesos necesitas para cambiar esa cantidad?
 - Indica el dinero que tienes en total.

Tarea 3: La Separata de ofertas

La docente le entrega a cada estudiante un catálogo de ventas con los siguientes productos y sus precios respectivos:



Ilustración 30. Separata de ofertas

1. La docente le plantea a los estudiantes organizados en parejas las siguientes situaciones:

a. Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso. ¿Por qué es el más costoso?



2.500



1.800

b. Entre la chocolatina y la Pony malta, encierra en un círculo el producto más costoso ¿Por qué es el más costoso?



1.100



1.800

2. La docente entrega a las parejas algunas monedas y los estudiantes deben escoger las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el producto que se le indica

Productos	Monedas que entrega la profesora
 100	9 de 10 pesos 15 de 1 peso
 700	6 de 100 pesos 13 de 10 pesos
 1.100	13 de 100 pesos

La docente le indica a los estudiantes que deben pegar frente a cada producto las monedas necesarias y sólo las necesarias, ni más ni menos, para comprar el producto

Productos	Monedas
 100	
 700	
 1.100	

3.1.4 Sobre la implementación de la propuesta de aula. Para la realización de esta propuesta de aula se cuenta con 9 sesiones, cada una tiene una duración aproximada de 30 a 45 minutos, las situaciones se realizan en la jornada de la mañana en la I.E.D. Ciudad de Bogotá durante los meses de febrero, marzo y abril

Para realizar la propuesta de aula con los estudiantes fue necesario realizar un protocolo por cada situación. En cada protocolo se especifica el rol de la docente y de la investigadora (Ver anexo 7: Protocolo de la propuesta de aula). Durante el desarrollo de la implementación de la propuesta se realizan las preguntas consignadas en cada tarea, siguiendo dentro de lo posible los protocolos diseñados y permitiendo que los estudiantes participen de manera activa en el desarrollo de las tareas y muestren sus concepciones frente a la multiplicidad de aspectos en torno al CNN y el SND.

Los registros fueron de dos tipos, el audiovisual y el escrito. En el audiovisual se implementa una cámara digital para realizar filmaciones, los registros fotográficos. En el registro escrito la investigadora toma notas sobre las respuestas de los estudiantes y la persona es quien dirige las tareas.

Como instrumento de observación, clasificación y medición se utiliza la siguiente rejilla de observación (Ver tabla 12). Se trata de una variedad de respuestas esperadas por los estudiantes al momento de resolver tareas de cardinalidad, ordinalidad o agrupación. Se categorizan las actuaciones de los estudiantes teniendo en cuenta las representaciones que utilizan, los significados del SMS en la resolución de problemas y los usos intuitivos y espontáneos de los estratos de SMS (Filloy, 1999).

En las representaciones se tienen en cuenta los diferentes SMS que utilizan los estudiantes para representar su conocimiento. La segunda categoría hace referencia al significado o interpretación que los estudiantes le atribuyen a los signos al momento de resolver los problemas propuestos. Finalmente, la última categoría reconoce que los SMS son el producto de un proceso de abstracción progresiva; los SMS que se usan están formados por estratos provenientes de distintos momentos del proceso.

Esta rejilla se utiliza para organizar los datos pero no supone una jerarquía de los mismos. Este es un modelo dinámico, en el que algunas actuaciones se incorporan, según van surgiendo nuevas modalidades de comportamiento. Hay que señalar que los comportamientos que en la rejilla se hacen explícitos hacen parte de investigaciones ya citadas en el capítulo 2.

Tabla 12

Rejilla de análisis

	Representaciones	Significado de las representaciones del SMS en la resolución de problemas	Usos intuitivos y espontáneos de los estratos de SMS
CARDINALIDAD	- Representaciones de dimensión 1 (Por ejemplo: segmentos verticales: , , ... o puntos: •, ••, •••, ...) - Uso de las palabras número: “uno”, “dos”, “tres”... - Uso de notaciones indo-arábigas: 1,2,3,4... - Uso de los dedos de la mano para representar una cantidad	Comprensión del problema: el número cardinal visto como: - Cantidad total de elementos de una colección. - Última palabra dicha en la lista numérica. Concepción y ejecución de un plan (estrategia) - Conteo - Estimación - Subitización.	- Uso de caracteres pictográficos. - Uso de Pseudocifras (Se escriben tantas cifras como cantidad tiene la colección) - Uso de la secuencia numérica verbal y se repite la última palabra. - Uso de la secuencia numérica verbal - Uso de escritura sucesiva de dígitos hasta llegar al número deseado. - Uso de notaciones en espejo - Formas para números: producción de una única grafía que no refleja ninguna de las características de la cantidad.
ORDINALIDAD	- Uso de números ordinales 1°, 2°, 3°... - Uso de adjetivos ordinales de manera verbal o escrita: “primero”, “segundo”, “tercero”, “cuarto”... “último”.	Comprensión del problema: el número ordinal visto como: - Posición de un objeto en una secuencia ordenada. - Un número a es menor que b, si al comparar las cantidades, a está contenido en b. - El sucesor de un número se obtiene luego de sumarle uno a dicho número. el sucesor es el número inmediatamente siguiente. - El antecesor de un número se obtiene luego de restarle uno a dicho número. El antecesor es el número inmediatamente anterior. Concepción y ejecución de un plan (estrategia): - Señala ordenadamente los objetos en la secuencia mientras usa	- Uso de números 1, 2, 3... - Uso de las palabras “uno” y “dos”... - Dibuja todos los objetos de la secuencia ordenada y marca el objeto con una señal para denotar su posición. - Dibujo del objeto que está antes y el que esta después y señala el que ha escogido. - Uso de frases “más que” o “menos que”

	○ Uso de frases “mayor que” o “menor que” ○ Uso de las palabras “sucesor”, “antecesor”	los adjetivos ordinales: “primero”, “segundo”, “tercero”... ○ Señala los objetos en la secuencia mientras dice los números: “uno”, “dos”, “tres”... ○ <i>Un número es menor que otro</i>, si está colocado a la izquierda de él en la recta numérica; y es mayor, cuando está a su derecha. ○ Comparar a partir del reconocimiento del cardinal de un número y su relación en cantidad respecto a otros números. ○ Comparar dos colecciones a partir del espacio ocupado por los objetos. ○ Entre dos números de igual cantidad de cifras, basta con comparar los dígitos de la potencia mayor (dígitos diferentes) para determinar cuál es el número mayor. ○ Si las primeras cifras de cada número son iguales se comparan las cifras de orden inmediatamente inferior. ○ El número que tiene más cifras es el mayor”. ○ Uso de la recta numérica, dado un número, su sucesor es el número que esta inmediatamente a la derecha, y su antecesor es el número que esta inmediatamente a la izquierda. ○ Uso de la secuencia numérica verbal, dado un número, su sucesor es el número que sigue en la secuencia, y su antecesor es el número que esta antes en la secuencia.	○ Uso de términos “muchos” o “pocos” ○ Uso de la secuencia numérica idiosincrática (1, 13, 19...) de manera verbal o escrita ○ Confusión en la definición de los términos “sucesor” y “antecesor”
AGRUPACIÓN	○ Uso de las notaciones simbólicas 10, 100, 1000 etc. ○ Uso de las palabras número “diez”, “cien”, “mil”	Comprensión del problema: ○ Comprensión de la cantidad 10 ○ La agrupación (10) vista como multiplicidad que da origen a unidades de orden superior. Concepción y ejecución de un plan (estrategia): ○ Conteo. ○ Uso de agrupaciones de diferente orden para componer o descomponer números.	○ Uso de notaciones en espejo. ○ Uso de cifras sin tener en cuenta el valor posicional 01, 001 ○ Uso de la secuencia numérica verbal en la que presenta errores en los nudos. ○ El 10 visto como unidad simple no como unidad de orden superior. ○ Composición o descomposición de números sin utilizar la cantidad 10.

3.2 Resultados y análisis de resultados

En este apartado se presentan los resultados de la implementación de la propuesta de aula, la cual está compuesta por situaciones (S1, S2, S3), tareas (T1, T2, T3), preguntas (P1, P2, P3) y literales (La, Lb, Lc). Los resultados obtenidos se categorizan atendiendo a la tipificación de respuestas y análisis de resultados se realizan teniendo en cuenta los registros escritos, audiovisuales y toma de nota. Los estudiantes que participaron de las tareas aparecen denotados como E1, E2... E12.

Se utilizan las siguientes convenciones para la presentación y organización de los resultados de las situaciones y análisis de los mismos:

S(n): Significa n situaciones, donde $n = 1, 2, 3, 4$. Por ejemplo, S1, significa Situación 1.

T(n): Significa n tareas, donde $n = 1, 2, 3$ por ejemplo: T1, significa Tarea 1.

P(n): Significa n preguntas, donde $n = 1, 2, 3, 4$. Por ejemplo P1 significa Pregunta 1.

L(n): Significa n literales, donde $n = a, b, c, d$. Por ejemplo La significa Literal a.

E(n): Significa estudiante, donde $n = 1, 2, 3, 4$. Por ejemplo E1 significa Estudiante 1.

3.2.1 Resultados y análisis de resultados de la Situación 1 (S1): El juego

cincuenta fichas, el conteo y la correspondencia uno a uno. La situación 1, consta de tres tareas, las cuales fueron aplicadas en tres sesiones los días 18, 19 y 22 de febrero del 2016. Al iniciar cada tarea de esta situación, los estudiantes se organizan en parejas para jugar “cincuenta fichas” (Ver Anexo 7.1: protocolo de la situación 1).

3.2.1.1 Resultados y análisis de la Situación, 1, Tarea 1 (T1). En el desarrollo de esta tarea participan 12 estudiantes.

○ Situación 1: Tarea 1, Pregunta 1 (S1T1P1)

1. Cada pareja de estudiantes juega “cincuenta fichas”

Teniendo en cuenta algunos aspectos generales se puede observar lo siguiente:

- Para completar el tablero, los estudiantes usan dos maneras de organizar las fichas: diez estudiantes completan los tableros de manera lineal (horizontalmente o verticalmente) y dos estudiantes completan el tablero colocando las fichas en cualquier casilla del tablero.

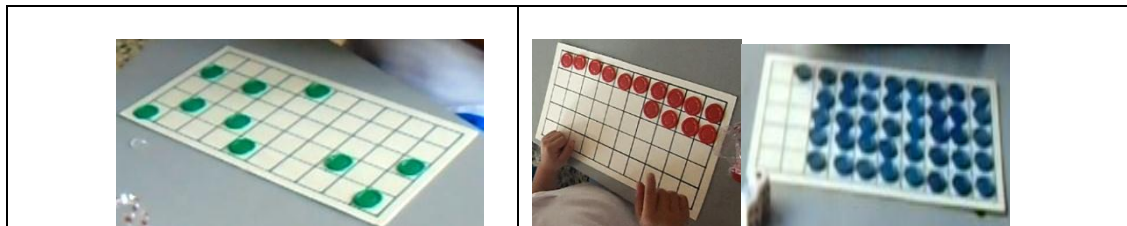


Ilustración 31. Organización de fichas en los tableros. A la izquierda una organización al azar y a la derecha una organización lineal (horizontal y vertical).

- En el desarrollo del juego la docente y los jugadores, tuvieron que intervenir para evitar que se hiciera “trampa”, puesto que en ocasiones pese a que los estudiantes sabían la cantidad de fichas que debían poner en el tablero, ignoraban este hecho y colocaban fichas de más, en el afán de obtener la victoria.

Durante el juego a los estudiantes se les pregunta:

a. ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados?

En la siguiente tabla se muestra la tipificación de las respuestas de los estudiantes al formularles esta pregunta:

Tabla 13

Resultados S1, T1, P1, La

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que totalizan correctamente la cantidad obtenida al lanzar los dados (E1, E2, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E11)	9
R2	Estudiantes que no totalizan la cantidad obtenida al lanzar los dados (E3, E7, E12)	3
TOTAL		12

Teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior se puede observar que nueve estudiantes totalizan correctamente la cantidad obtenida al lanzar los dados. De ellos, siete cuentan los puntos obtenidos en los dados en voz alta y repiten el último número (E1, E2, E4, E6, E8, E10, E11), dos estudiantes mueven los labios y solamente dicen en voz alta el total de las cantidades obtenidas en los dados (E5, E9).

De los 3 estudiantes que no totalizan la cantidad obtenida en los dados, dos estudiantes responden a la pregunta diciendo dos o más números (E3 y E7). Por ejemplo, E3 obtiene en los dados las cantidades 5 y 3; cuando se le realiza esta pregunta el estudiante toma el primer dado (tres puntos) señala con los dedos los puntos mientras dice "dos acá y uno acá"; luego toma el otro dado (cinco puntos) y dice "dos acá, dos acá y uno acá" (ver video 11). Estos estudiantes al realizar el conteo le asignan a dos puntos una misma palabra número, terminan

de realizar conteo aunque faltan puntos por contar y no diferencian los puntos contados de los no contados (ver video 13). Además, los estudiantes presentan errores cuando la secuencia numérica verbal excede al rango de dominio de conteo, un estudiante cuenta hasta 3, otro hasta 7 y otro hasta 10 (Ejemplo, ver video 12).

Cabe resaltar, que cuando las cantidades obtenidas en cada dado son menores a tres los estudiantes (A excepción de E7 y E3) no realizan un señalamiento, solo observan los puntos y dicen el número (Ejemplo: ver video 23). Además, los estudiantes pueden totalizar las cantidades obtenidas en los dados cuando se ve involucrado el dado sin puntos (Ejemplo: Ver video 4) e incluso algunos de ellos lo identifican como “cero” y otros como “nada”. También se percibe la colaboración entre los estudiantes, cuando uno de los estudiantes no logra colocar las fichas en el tablero, el otro jugador trata de ayudarlo a contar (Ver video 24).

Teniendo en cuenta los resultados en el La se pueden realizar las siguientes anotaciones.

Los estudiantes expresan su conocimiento por medio del uso de representaciones verbales. Sin embargo, el significado que le atribuyen a estas representaciones verbales pueden ser diversos atendiendo a sus actuaciones. Los estudiantes que solamente dicen la palabra número y colocan la cantidad correcta de fichas en el tablero, esa palabra número indica la cantidad total de elementos de una colección (cardinal). Sin embargo, también se evidencian estratos de los SMS en el conteo que reflejan significados distintos, por ejemplo, decir la secuencia numérica verbal y repetir el último número, decir solamente la secuencia numérica verbal, o decir dos números o más para totalizar.

Cuando los estudiantes dicen la secuencia de palabras número y repiten el último número algunas veces esa palabra número significa el cardinal de la colección, pero no siempre es así, uno de los estudiantes (E8) al parecer sigue la regla de la última palabra (Fuson, 1990), pese a que realiza el conteo correctamente coloca en el tablero una cantidad diferente a la obtenida en los dados. Por otro lado, los estudiantes que no responden con un solo número sino que dicen la secuencia numérica verbal en el orden convencional, al parecer no tienen conocimiento del cardinal pues colocan en el tablero una cantidad distinta a la obtenida en los dados. Esto mismo sucede con los estudiantes que dicen dos o más números, al parecer le asignan un sentido diferente a la totalización de cantidades, es asumida más bien como fragmentar la colección en otras cuyo cardinal conozcan.

En la implementación de la propuesta de aula se presta atención no solo a las respuestas verbales de los estudiantes sino también a las actuaciones, la asociación entre una y otra reflejan el conocimiento que poseen del cardinal y las dificultades que presentan. Los estudiantes que no totalizan la cantidad obtenida al lanzar los dados reflejan dificultades en la correspondencia uno a uno y en la secuencia numérica. Cuando le asignan a dos puntos una misma palabra número no hay una correspondencia uno a uno entre la palabra número y el objeto contado, lo mismo sucede con los estudiantes que terminan de realizar el conteo aunque faltan puntos por contar, estas actuaciones se presentan debido a que no hay una coordinación entre etiquetas y particiones en conteo (Gelman, 1978). Los estudiantes también presentan dificultades en uso de la secuencia numérica verbal, esto dificulta la realización del conteo de colecciones que exceden a la secuencia numérica verbal adquirida.

Por otro lado, los resultados muestran aportes a la dimensión ética, los estudiantes le colaboran a sus compañeros al realizar el conteo, en este proceso, el estudiante se convierte en un sujeto activo que comparte su conocimiento en los demás.

b. ¿Quién ha colocado menos fichas en la tabla?

En la siguiente tabla se muestra la tipificación de las respuestas de los estudiantes:

Tabla 14

Resultados S1, T1, P1, Lb

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta por parejas
R1	Estudiantes que indican quién ha colocado menos fichas en la tabla sin realizar un conteo (E3, E4, E5, E6, E7, E8)	3
R2	Estudiantes que indican quién ha colocado menos fichas en la tabla usando el conteo (E1, E2, E11, E12)	2
R3	Estudiantes que indican quién ha colocado menos fichas al encontrar la diferencia cuantitativa entre las colecciones (E9, E10)	1
TOTAL		6

Teniendo en cuenta los datos obtenidos en la tabla anterior se puede observar que la totalidad de los estudiantes indican quién ha colocado menos fichas en la tabla.

Los estudiantes usan algunos estratos del SMS lo cual se evidencia en el uso de términos comparativos (Chamorro, 2005) como “muchas” “pocas”, “más que”, “menos que”. El significado que le asignan está ligado al establecimiento de relaciones de orden a partir de la comparación de cantidades observables. En la enseñanza controlada el docente puede

acercar al estudiante a SMS más abstractos con el uso de expresiones como “mayor que” o “menor que”.

Para contestar el Lb los estudiantes adoptan diferentes estrategias:

- Indican quién ha colocado menos fichas en la tabla sin realizar un conteo, solo observando las cantidades, a partir de la percepción del espacio ocupado por los objetos (MEN, 2009b).
- Usan el conteo para identificar quién tiene menor cantidad de fichas (MEN, 2009b).
- Identifican la diferencia en la cantidad de fichas ubicadas en los tableros y a partir de esto dicen quién tiene la menor cantidad; así pues, un estudiante tiene 12 fichas y su compañero 15 fichas. Los estudiantes encuentran la diferencia entre las dos colecciones es 3 y así reconocen quién tiene la menor cantidad

Cantidad de fichas de E1: 12

Cantidad de fichas de E2: $15 = 12 + 3$

Entonces $12 < 15$

Este procedimiento podría ser un acercamiento a una de las definiciones del orden en los naturales: *Dados $m, n \in N$ decimos que: $m \leq n$ si existe $p \in N$ tal que $n = m + p$*

En la implementación de la situación se reconoce la importancia de esta pregunta porque permite que el estudiante exponga su conocimiento sobre el número ordinal y las estrategias que usa para establecer relaciones de orden entre cardinales. Sin embargo, se recomienda formular esta pregunta cuando la diferencia entre las cantidades sea mínima (1-4) para que los estudiantes utilicen el conteo al establecer relaciones de orden.

c. ¿Cuántas fichas te faltan para tener la misma cantidad que tu compañero?

Al responder a esta pregunta tres parejas de estudiantes indican la cantidad de fichas que les faltan para tener la misma cantidad de su compañero (E1, E2, E9, E10, E11, E12) y las otras tres parejas indican una cantidad incorrecta (E3, E4, E5, E6, E7, E8).

Las tres parejas que respondieron acertadamente, usaron dos estrategias: una es la ubicación de un número en la secuencia numérica; es el caso de un estudiante que tiene 11 fichas y su pareja tiene 10 fichas; el estudiante da a conocer que a su pareja le falta 1 ficha para tener la misma cantidad que él y lo justifica porque va en el 10 (señalando la décima ficha en su tablero) y falta el 11 (Señalando la undécima ficha del tablero) y entonces solo

falta 1 ficha (Ver video 3). Otra estrategia es la comparación visual de las fichas en los tableros. Uno de los estudiantes tiene 9 fichas y su compañero tiene 12 fichas, los estudiantes observan que para tener la misma cantidad, al estudiante que tiene 9 fichas le faltan 3 fichas para tener la misma cantidad de fichas que su compañero (Ver video 8).

Con relación a las tres parejas que dan una respuesta incorrecta, una de ellas responde diciendo que son “muchas” las fichas que le hace falta para tener la misma cantidad que su compañero (E5 tiene 8 fichas y E6 tiene 9 fichas), la otra pareja responde con la cantidad de fichas que poseen en el momento (E3 tiene 9 fichas y E4 tiene 12 fichas) y la última pareja responde que no sabe (E7 tiene 12 fichas, E8 tiene 10 fichas).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el Lc se podría afirmar que los estudiantes deben otorgarle un sentido y significado a las frases “fichas que faltan” la cual hace referencia a la estructura aditiva y la frase “misma cantidad” que hace referencia a la equipotencia. En este sentido, responder a esta pregunta implica comprensión de la estructura aditiva, la equipotencia y la relación entre ambos conceptos. El aprendizaje de estos conceptos se debe tener en cuenta en estos primeros años pues aportan en la comprensión del CNN y el SND.

d. ¿Cuánto te falta para ganar?

En la siguiente tabla se muestra la tipificación de las respuestas de los estudiantes al formularles esta pregunta:

Tabla 15

Resultados S1, T1, P1, Ld

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que indican correctamente la cantidad de fichas que les hace falta para ganar (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, 10, E11, E12)	11
R2	Estudiantes que indican una cantidad incorrecta de fichas (E7)	1
TOTAL		12

Teniendo en cuenta los datos de la tabla anterior se puede observar que 11 estudiantes indican la cantidad correcta de fichas que les hace falta para ganar y solo uno responde incorrectamente a la pregunta. Los 11 estudiantes dan una respuesta de tipo R1, cuentan las casillas vacías señalándolas con el dedo índice. Dos de estos estudiantes organizaron las fichas al azar en el tablero (Ver ilustración 31) y tuvieron que volver a contar las casillas vacías, pues les hacía falta contar algunas de ellas. El estudiante que da una respuesta

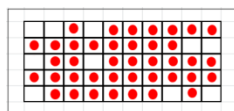
incorrecta, empieza a contar las casillas vacías (3) señalándolas con el dedo mientras dice “uno” señalando la primer casilla, “dos” señalando la segunda, vuelve y señala la segunda casilla dice “dos”, señala la tercera casilla dice “tres” y señala la primera casilla y dice “una”. (Ver video 16).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos se puede decir que los estudiantes usan las representaciones verbales (las palabras número) para responder a la pregunta, aunque el significado que le asignan es distinto, algunos lo usan para comunicar el cardinal que representa la cantidad de fichas vacías, y uno de los estudiantes (E7) lo usa como correspondencia uno a uno, pues a cada casilla vacía le asigna una etiqueta pero al parecer está en el proceso de comprensión del cardinal. Por tanto, en la enseñanza controlada es necesario intervenir para que los estudiantes puedan avanzar en su proceso y utilicen la correspondencia uno a uno para comprender el concepto.

Además, en la enseñanza controlada se debe tener en cuenta que la organización de las fichas en el tablero al azar parece exigirles más a los estudiantes en términos atencionales, pues al realizar el conteo olvidan contar algunas casillas en blanco. Sin embargo, *aprender a conocer* (MEN, 1998b) como pilar de conocimiento implica necesariamente ejercitar la atención, la memoria y el pensamiento, como instrumentos para comprender el cardinal.

○ *Situación 1: Tarea 1, Pregunta 2 (S1T1P2)*

2. Teniendo en cuenta las fichas en el tablero que se muestra a continuación:



○ ¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para **llenar** todas las casillas?

Las respuestas de los estudiantes se organizan en la siguiente tabla:

Tabla 16
Resultados S1, T1, P2

Tipo de respuesta	Respuesta	Representaciones	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que indican correctamente que se deben colocar 10 fichas en el tablero para llenar todas las casillas	○ Uso de representaciones pictóricas (círculos). (E5, E6, E8, E11)	4
		○ Uso de representación simbólica 10 o 01 (E2, E10)	2
		○ Uso de representaciones simbólicas del 1 al 10, algunos números en notación espejo (E4,E12)	2
R2	Estudiantes que indican que se deben colocar 10 fichas en el tablero para llenar todas las casillas, pero tienen errores en el conteo.	○ Uso de representaciones pictóricas (círculos). (E3, E7)	2
		○ Uso de representación simbólica 10 (E9).	1
R3	Estudiantes que indican que se deben colocar 9 fichas en el tablero para llenar todas las casillas.	Uso de representaciones pictóricas (círculos). (E1)	1
TOTAL			12

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la tabla anterior se puede observar que 8 estudiantes indican correctamente que se debe colocar 10 fichas en el tablero, 3 estudiantes indican que se deben colocar 10 fichas en el tablero pero tiene errores en el conteo y 1 estudiante indica una cantidad incorrecta de fichas para llenar todas las casillas.

Los estudiantes que pudieron contar y representar correctamente la cantidad de fichas que hacían falta, usaron dos estrategias: una de ellas es contar señalando con el dedo las casillas vacías (Ver video 29); otra estrategia es contar mientras se dibuja un círculo en cada casilla vacía (Ver anexo 8: S1, T1), por lo general la segunda estrategia permite hacer un conteo correcto aunque no siempre funciona; tal es el caso del estudiante que da una respuesta de tipo R3 pues olvida contar una casilla vacía.

Los estudiantes que dan una respuesta de tipo R2 presentan errores en el conteo: uno dice la secuencia numérica verbal hasta 3 y los otros dos estudiantes no separan las casillas contadas de las no contadas (Ejemplo: Ver video 30). Los estudiantes escriben “10” posiblemente porque le han mirado a algún compañero la respuesta.

Con relación a los registros escritos se puede observar que los estudiantes usan diferentes representaciones. Algunos estudiantes usan la representación simbólica (10) y otros usan estratos de los SMS. El símbolo 10 lo usaron dos estudiantes; sin embargo, el significado que le atribuyen es diferente. Al parecer para uno de ellos representa el cardinal de la cantidad de casillas vacías, pues realiza el conteo siguiendo la correspondencia uno a uno y la secuencia numérica verbal. Pero el otro estudiante al realizar el conteo presenta errores de correspondencia uno a uno y escribe la representación simbólica del número 10. Esto último es importante porque el docente debe tener presente que aunque un estudiante realice la representación simbólica correctamente, no siempre indica que hay una comprensión del número como cardinal.

Los estudiantes también usaron estratos de los SMS: caracteres pictográficos, escritura sucesiva de dígitos hasta llegar al número deseado y la representación invertida del 10 (01). Con relación a los caracteres pictográficos 4 estudiantes los usan para representar el cardinal 10 (dibujan 10 círculos), esta representación está fuertemente ligada con la correspondencia uno a uno. Los dos estudiantes que escriben los números del 1 al 10, algunos en notación espejo (Ver anexo 9: S1, ST1), usan la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y la representación simbólica. El estudiante que realiza correctamente el conteo y usa la representación simbólica 01 aunque usa los dígitos correctos al parecer está en el proceso de aprendizaje del valor posicional, aspecto importante en el SND.

Lo anterior, es importante en la enseñanza controlada puesto que los estratos de los SMS muestran que hay comprensión del cardinal 10, las representaciones de los estratos de los SMS guardan relación con algunos conceptos matemáticos como la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica, la cardinalidad y la simbolización. Desde esta perspectiva, las tareas propuestas apuntan al uso de estratos de los SMS y los direcciona poco a poco a la representación simbólica convencional de los números.

Además, al momento de realizar los registros se observa la colaboración entre los estudiantes; si uno de ellos se encuentra en el proceso de escritura de un número determinado, otro estudiante le explica la manera de hacerlo; por ejemplo, entre ellos se explican la manera de escribir del 10. Lo anterior, al parecer evidencia uno de los aprendizajes fundamentales propuestos por el MEN (1998b) aprender a vivir juntos, en el cual los estudiantes ayudan y cooperan con los demás en el desarrollo del aprendizaje.

○ Situación 1: Tarea 1, Pregunta 3 (S1T1P3)

3. Lucía tiene seis fichas como se muestra a continuación:



a) Pedro tiene una ficha más que Lucía. Dibuja las fichas que tiene Pedro



b) Mariana tiene 2 fichas menos que Lucía. Dibuja las fichas que tiene Mariana



Las respuestas de los estudiantes se organizan en la siguiente tabla:

Tabla 17

Resultados S1, T1, P3

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que indican correctamente que Pedro tiene 7 fichas y que Mariana tiene 4 fichas (E6, E9, E10, E11).	4
R2	Estudiantes que indican correctamente que Pedro tiene 7 fichas pero indican una cantidad incorrecta de fichas que tiene Mariana (E1, E3, E4, E5, E8, E12).	6
R3	Estudiantes que indican una cantidad incorrecta de fichas que tiene Pedro y Mariana (E7, E2).	2
TOTAL		12

De los doce estudiantes, diez contestan correctamente el *La*, y cuatro indican la cantidad correcta de fichas que tiene Mariana (ver anexo10 y anexo 11). Cabe resaltar que de los cuatro estudiantes que respondieron acertadamente, dos de ellos lo hicieron solos (Ejemplo: ver video 33) y los otros dos requirieron de la ayuda de la docente, quien cambia la frase “dos menos” por “quitar dos”.

Para realizar la pregunta los estudiantes necesitaron de la ayuda de la docente, pues en ocasiones dibujaron solamente una ficha para representar la oración “una ficha más”, o dos fichas para representar “dos menos”. Por tanto, fue necesario replantear la pregunta diciéndole a los estudiantes, por ejemplo, “dibújale a Pedro la misma cantidad de fichas que tiene Lucía” y luego “dibújale una más”. Con esta reformulación, tal como se indica en la tabla anterior, diez estudiantes resuelven correctamente el *La*.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la pregunta 3 se pueden hacer algunas anotaciones; entre ellas, que al responder las preguntas los estudiantes usan un estrato del SMS que son las representaciones pictóricas, las cuales representan la cantidad total de elementos de la colección. Estas representaciones de acuerdo a los planteamientos de Filloy (1999) están arraigadas a las acciones concretas más no a acciones abstractas.

Además, los estudiantes que indican una cantidad correcta de fichas al parecer comprenden el cardinal seis e interpretan las frases que hacen referencia a la estructura aditiva “dos menos” o “una fichas más”, este concepto es importante en la enseñanza y el aprendizaje del CNN y el SND. Por su parte, los problemas aditivos son relevantes al adquirir competencias matemáticas en Transición (MEN, 2009b), en la implementación de la propuesta de aula las situaciones problema de este tipo representan un reto para los estudiantes. Los resultados dan a conocer que los estudiantes están más familiarizados con las situaciones que involucran la suma, y no tanto con la resta. Así, se confirma que el procedimiento de la resta es complejo para los estudiantes en estos primeros años (Kamii, 2000). La estructura aditiva se va construyendo en la medida en que se construye el CNN y el SND.

3.2.1.2 Resultados y análisis de la Situación, 1, Tarea 2 (T2). En el desarrollo de esta tarea participan 12 estudiantes.

○ *Situación 1: Tarea 2, Pregunta 1 (S1T2P1)*

1. Usando las fichas del juego realiza una colección que tenga:
 - a. 0 fichas

Los estudiantes reconocen la palabra número “cero” y cuando la docente les pide que realicen una colección que tenga cero fichas, los estudiantes quitan todas las fichas que están sobre la mesa o las ocultan (Ver video 36).

- b. 3 fichas
 - c. 4 fichas

Todos los estudiantes pudieron armar las colecciones con 3 y 4 fichas. Al realizar la colección de tres fichas no hay evidencia de conteo en voz alta (Ver video 35), mientras que al formar la colección de cuatro fichas los estudiantes dicen la secuencia numérica verbal mientras toman las fichas. Solamente un estudiante (E7) observa las fichas de su compañero y forma su propia colección, sin realizar conteo.

- d. 6 fichas

e. 8 fichas

De los 12 estudiantes 11 pudieron formar la colección de 6 y de 8 fichas. Con relación a la colección de 6 fichas, 8 estudiantes forman la colección correctamente al primer intento (E1, E2, E3, E4, E8, E9, E10) y 3 corrigieron la colección cuando la profesora les pidió que realizaran el conteo para estar seguros (E5, E6, E11). En la colección de 8 fichas, 3 estudiantes formaron la colección al primer intento (E4, E6, E9) y 8 estudiantes corrigieron la colección después que la profesora les pidió que realizaran el conteo para estar seguros (E1, E2, E3, E5, E8, E10, E11, E12). Los estudiantes que formaron las colecciones al primer intento, usaron el conteo (ej. ver video 42 y video 20). Cuando la profesora le dice a los estudiantes que cuenten para estar seguros, ellos cuentan las fichas que poseen y si es el caso retiran de la colección las fichas que sobran (Ver video 41) o agregan fichas (ver video 39).

Finalmente uno de los estudiantes (E7) aunque se le ha pedido que forme una colección de 6 fichas, muestra una colección con 7 fichas, cuando la profesora le pide que cuente para estar seguro, el estudiante dice “uno” señalando la primera ficha, “dos” señalando la segunda ficha, “tres” señalando la tercera ficha, “cuatro” señalando la segunda ficha, “cinco” señalando la primera ficha, “seis” señalando la cuarta ficha y sigue “once”, “catorce” (Ver video 22), algo similar sucede con la colección de 8 fichas (Ver video 40).

f. 10 fichas

De los 12 estudiantes 10 lograron hacer la colección de 10 fichas. 8 de ellos hicieron la colección al primer intento realizando conteo (E1, E2, E4, E5, E6, E8, E9, E12) y 2 estudiantes formaron la colección cuando la profesora les pidió que realizaran el conteo para estar seguros (E10, E11).

Con relación a los dos estudiantes que se les dificulta formar la colección de diez fichas (E3, E7) se aprecia que uno de ellos muestra una colección de 21 fichas, al realizar el conteo se salta algunas fichas y dice la secuencia numérica del 1 al 10. El otro estudiante cuando la profesora le pide que cuente las fichas, toca una ficha y dice “uno”, toca otra ficha y dice “dos”; toca dos fichas y dice “tres” (Ver video 45).

Al resolver esta pregunta los estudiantes usan la representación con materiales manipulativos, en este caso el material son fichas circulares; el cual a través de la subitización y el conteo permite representar el cardinal visto como cantidad total de elementos de la

colección. Los resultados dan a conocer que los estudiantes que no representan la cantidad por medio de las fichas están en el proceso de comprensión del cardinal de la colección.

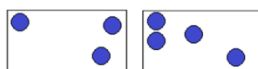
Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, los estudiantes comprenden el concepto de cero como ausencia de una cantidad, lo cual es parte importante en la comprensión del SND, esto podría darse porque en la tarea anterior los estudiantes se relacionaron con la cara del dado que no posee puntos y algunos estudiantes usaban la palabra “cero” para denominar la ausencia de puntos. De manera que, la tarea anterior al parecer aporta al desarrollo de algunos aspectos de la dimensión comunicativa y cognitiva (MEN, 1998b) en las cuales el trabajo en equipo brinda la oportunidad de expresar el conocimiento matemático que poseen los estudiantes, estimula el uso apropiado del concepto de “cero” y potencia la construcción de pensamiento matemático.

Aparentemente los estudiantes realizan un conteo súbito (Chamorro, 2005) al formar la colección de 3 fichas, mientras que para formar la colección de 4 fichas usan el conteo en voz alta. Al proponer las tareas los docentes deben tener en cuenta que las cantidades mayores a tres les exigen más a los estudiantes en términos de conteo. Además el docente tiene un papel importante al resolver esta pregunta. Al realizar las colecciones 6 y 8 la mayoría de los estudiantes se equivocaron, pero cuando la maestra les pidió que realizaran el conteo ellos rectificaron sus respuestas. La intervención de la maestra, en la enseñanza controlada, fue oportuna pues les permitió a los estudiantes corregir las colecciones y comprender el papel del conteo en la realización de colecciones; esto se ve reflejado al momento de formar la colección de 10 fichas en la cual la mayoría de los estudiantes no necesitaron ayuda.

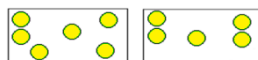
Además, al momento de formar las colecciones se pone en evidencia el uso de la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y la cardinalidad. Por cada palabra número que dicen, los estudiantes ponen una ficha para formar la colección. En el desarrollo de la tarea al parecer los estudiantes reconocen que la palabra número asignada al último elemento contado indica el cardinal de la colección (Collette, 1985), lo cual es importante en la comprensión del CNN y el SND.

○ Situación 1: Tarea 2, Pregunta 2 (S1T2P2)

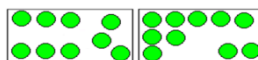
2. Observa las parejas de cartas y señala con una X la carta que tiene:
3 fichas



6 fichas



10 fichas



La tipificación de las respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

Tabla 18

Resultados S1, T2, P2

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que señalan la carta correcta de 3, 6 y 10 fichas (E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12)	11
R2	Estudiantes que señalan la carta correcta de 3 y 6 fichas pero señala la carta incorrecta de 10 fichas (E1)	1
TOTAL		12

Como se puede apreciar en la tabla anterior todos los estudiantes pudieron señalar la carta correcta de 3 y 6 fichas (Ver anexo 12: S1, T2), y un estudiante señala una carta incorrecta (Ver anexo 13: S1, T2).

Al momento de señalar la carta que tiene tres fichas, seis estudiantes (E1, E2, E5, E6, E8, E9, E11 y E12) indican la carta correcta sin realizar conteo (ver video 48). Tres estudiantes (E3, E4 y E10) recurren al conteo mientras señalan cada ficha con el lápiz. Ahora bien, con relación a la carta que tiene seis fichas, nueve estudiantes (E4, E8, E9, E10, E11, E1, E2 y E6y E12) cuentan primero antes de señalar la ficha correcta (Ejemplo: Ver video 50) y tres estudiantes (E3, E5 y E7) se equivocan en el primer intento, cuando la profesora les dice que cuenten la cantidad de fichas corrigen la respuesta (Ejemplo: ver video 26). Con relación a la carta con diez fichas, ocho estudiantes (E2, E3, E6, E8, E9, E10, E11 y E12) cuentan las fichas de las cartas y señalan la correcta. Tres estudiantes (E7, E4 y E5) señalan de manera inmediata la carta izquierda, y cuando la profesora les pide que cuenten corrigen la respuesta

(Ejemplo: ver video 48). El estudiante que se le dificultó marcar la carta correcta; cuenta dos veces una ficha en la carta izquierda, por tanto las dos veces que cuenta obtiene 10 y señala la carta incorrecta.

Al resolver esta pregunta los estudiantes representan el conocimiento a través de las representaciones gráficas; las cuales representan el cardinal visto como cantidad total de elementos de la colección, el estudiante debe escoger la representación correcta del cardinal.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, se puede observar que en la implementación de la propuesta de aula los estudiantes han aprendido que para identificar el cardinal de la colección pueden usar la subitización (en colecciones menores de 3) o el conteo. En el desarrollo de esta tarea los estudiantes señalan una a una las fichas mientras dicen la secuencia numérica verbal del 1 al 10 (a excepción de E7). Además, se observa un progreso en la adquisición de la secuencia numérica verbal y el uso de la correspondencia uno a uno, dichos conceptos son claves en la comprensión del CNN y el SND.

Cabe destacar que al señalar la carta que tiene 10 fichas, 11 de los estudiantes pueden hacerlo, pese a que en los ejercicios anteriores se evidencia que dos estudiantes (E3, E7) tienen problemas de correspondencia, al momento de señalar la carta con 10 fichas lo hacen correctamente. Solamente un estudiante se le dificultó hacerlo y este estudiante en los ejercicios anteriores no muestra dificultades en la correspondencia uno a uno ni en la secuencia numérica verbal, seguramente la organización de los puntos de las cartas le dificulta asignar las etiquetas a cada ficha (cuenta dos veces una ficha) y por eso marca la carta incorrecta. Lo anterior se debe tener en cuenta en la enseñanza controlada, pues la organización de los objetos al realizar el conteo podría provocar una mayor exigencia del conteo para el estudiante.

3.2.1.3 Resultados y análisis de la Situación, 1, Tarea 3 (T3). En esta tarea participaron 10 estudiantes, E3 y E4 no asistieron.

○ *Situación 1: Tarea 3, Pregunta 1 (S1T3P1)*

1. Cada pareja de estudiantes juegan cincuenta fichas. De manera individual se registra en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados

Estudiante 1		Estudiante 2	
TURNO	PUNTAJE	TURNO	PUNTAJE
1		1	
2		2	
3		3	
4		4	
5		5	
6		6	
7		7	
8		8	
9		9	
10		10	
11		11	

Las respuestas obtenidas se pueden tipificar en la siguiente tabla

Tabla 19

Resultados S1, T3, P1

Tipo de respuesta	Descripción de la respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que registran la cantidad obtenida en los dados usando puntos o representaciones simbólicas de dimensión 1 (E1, E7, E8, E12)	4
R2	Estudiantes que registran la cantidad obtenida en los dados por medio de representaciones simbólicas o notaciones indo-arábicas (E5, E9, E10)	3
R3	Estudiantes que registran la cantidad obtenida en los dados por medio representaciones simbólicas de dimensión 1 (puntos) y notaciones indo-arábicas (E2, E6, E11)	3
TOTAL		10

De los cuatro estudiantes que realizaron la representación de tipo R1, dos de ellos (E7, E8) cuando cuentan cantidades mayores a tres, saltan puntos o solo siguen la secuencia numérica verbal hasta 7 o hasta 10, estos mismos errores se presentan al momento de realizar el registro de la cantidad en la tabla (Ejemplo: Ver video 60). Además, uno de los estudiantes (E5) que realiza una respuesta de tipo R2, en el conteo de los puntos de los dados no cuenta un punto; sin embargo, puede realizar el símbolo del último número dicho. Los estudiantes que realizan una respuesta de tipo R3, usan representaciones simbólicas para algunas cantidades, y cuando manifiestan que no se ha apropiado de la representación simbólica usan puntos.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores se puede decir que las representaciones que usan los estudiantes son de dos tipos: representaciones simbólicas de dimensión 1 (puntos) y notaciones indo-arábicas (Ver anexo 14: S1, T3). Estas representaciones aunque son simbólicas atienden a acciones concretas.

Los significados que le atribuyen los estudiantes a estas representaciones son diferentes. Con relación a los estudiantes que usan las representaciones de dimensión 1, dos de ellos las usan para representar el cardinal de la colección; sin embargo, los otros dos estudiantes cuando son cantidades mayores a tres realizan puntos pero reflejan una cantidad distinta a la obtenida en los dados, esto debido a que presentan dificultad en el principio de correspondencia uno a uno (saltan puntos al realizar el conteo) y en el principio de orden (la secuencia numérica verbal no tiene un orden estable y repetible). Además, el significado que le atribuyen dos de los estudiantes a las notaciones indo-arábigas hace referencia al cardinal de la colección. Mientras que otro de los estudiantes usa las notaciones indo-arábigas para representar la última palabra dicha en la secuencia numérica verbal (Fuson 1988). Los estudiantes también usan notaciones en espejo como estrato del SMS, aunque la notación presenta una orientación diferente a la convencional, el significado de la notación es la cantidad de puntos obtenida en los dados.

Lo anterior, se evidencia en las disposiciones del MEN (2009b) en lo correspondiente a comunicación de cantidades, de los cuales sobresalen los siguientes descriptores: uso de notaciones convencionales que no corresponden con el cardinal; uso de notaciones no convencionales (puntos, notaciones en espejo) que guardan relación o correspondencia con el número de objetos contados; y uso de notaciones convencionales que corresponden con el cardinal. A estas disposiciones del MEN hay que aportar el uso de notaciones no convencionales que no guarda relación o correspondencia con el número de objetos contados.

A su vez, el desarrollo de la tarea es potente porque estimula el uso de la representación simbólica de forma comprensiva, aunque no sea convencional, lo cual es parte de la dimensión comunicativa en Transición (MEN, 1998b). Además es necesario que el docente continúe realizando tareas para que el estudiante supere las dificultades, avance a SMS más abstractos y se acerque a la construcción de elementos fundamentales del CNN y el SND.

○ *Situación 1: Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2)*

2. Los estudiantes observan los puntajes que han registrado en las tablas y realizan lo siguiente:

- a. Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla
- b. Compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo el mayor puntaje?
- c. Compara con tu compañero los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor cantidad?

De los 10 estudiantes 8 encierran en un círculo el mayor puntaje de la tabla. Los otros dos estudiantes (E1, E6) señalaron otro puntaje distinto al mayor, uno señala el 8 como mayor puntaje aunque en realidad el mayor puntaje de su tabla era el 10. El otro estudiante encierra el 11 en vez del 13 (ver video 54). Cuando se les formula a los estudiantes el literal *b* todos logran reconocer el jugador que obtuvo el mayor puntaje atendiendo a las respuestas en el literal *a* (ver video 53).

Con relación al literal *c*, a los estudiantes se les dificulta reconocer en la tabla qué puntaje sacaron en el cuarto turno, aunque la docente interviene y les señala los turnos con su respectivo adjetivo ordinal de manera verbal; por tanto, la docente debe señalarles el cuarto turno y cuando lo hace, todos los estudiantes indican correctamente quién obtuvo la menor cantidad.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los literales *a*, *b* y *c* se puede apreciar que los estudiantes reconocen y comprenden las palabras “mayor” o “menor” que se encuentran en las preguntas. Estas palabras aparecen en diferentes contextos: al comparar dos colecciones a partir del espacio ocupado por los objetos (MEN, 2009b), al comparar dos colecciones a partir de su representación simbólica; y al comparar a partir del reconocimiento del cardinal de un número y su relación en cantidad respecto a otros números, esta estrategia la usan los estudiantes cuando aparece combinaciones entre notaciones indo-arábigas y representaciones de dimensión 1 (puntos).

Los estudiantes que utilizan la primera estrategia usan la visualización de las colecciones para contestar a las preguntas; sin embargo los números van más allá de la percepción (Ifrah, 1987). Es el caso de uno de los estudiantes quién al preguntarle por el mayor puntaje, señala el turno en el que ha obtenido 8 en vez del turno en el que ha obtenido 10. Para promover la comprensión del CNN y el SND es importante integrar el conteo de las cantidades para establecer las relaciones de orden. Tal como lo establece el MEN (1998a) la destreza de contar es esencial para la ordenación y comparación de números.

Con relación a la segunda y tercera estrategia se destaca el nivel de abstracción que requiere realizar comparaciones entre representaciones simbólicas, pues exige que los estudiantes le asignen el significado cardinal a la representación simbólica y puedan establecer un orden entre ellos. Más aún, cuando se manejan dos tipos de representación (la notación indo-arábiga y las representaciones de dimensión 1). En el desarrollo de la propuesta de aula

estas actuaciones presentan un nivel mayor de abstracción pues se encuentra íntimamente relacionada con el SND.

Específicamente en el literal *c* se puede observar que aunque la profesora interviene señalando los turnos con su respectivo adjetivo ordinal, esto no es suficiente para que los estudiantes respondan a la pregunta, puede que los estudiantes tengan algún conocimiento sobre el “cuarto turno” pero no comprenden la relación entre el orden y los puntajes registrados en la tabla. En la implementación de la tarea, las tablas aparentemente dificultan la interpretación de los números ordinales.

- d. Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos, compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo más veces diez puntos?
- e. Escribe una X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10?

Al resolver el literal *d* dos estudiantes (E5 y E6) no obtuvieron diez en ninguno de sus lanzamientos. En otra pareja uno de los jugadores (E7) no realiza conteo y no encuentra el turno en el que ha obtenido diez (Ver video 67). Los otros siete estudiantes reconocen las cantidades que representan el diez en la tabla y resuelven correctamente la pregunta. Los estudiantes que han usado representaciones simbólicas de dimensión 1 usan el conteo mientras señalan con el dedo cada punto para encontrar el puntaje en el que han obtenido diez, y los que usan representaciones simbólicas (E2, E9, E10, E11, E6) identifican el símbolo 10 rápidamente (ver video 63). Se nota en este aspecto un avance en términos de simbolización, pues la mitad de los estudiantes usan el símbolo 10 para representar la cantidad; al respecto, la simbolización se reconocer como parte importante del SND.

Con relación al literal *e*, dos de los estudiantes (E1 y E11) no obtuvieron ningún puntaje mayor a 10, aunque todos los estudiantes escriben una X sobre un puntaje mayor a 10, ninguno puede decir por cuánto ese puntaje es mayor a 10 (Ver video 69). Para señalar el puntaje mayor a 10, los estudiantes tienden a observar la notación indo-arábica (E2, E9, E10, E12, E6) o a señalar la colección de puntos luego de realizar conteo (E7, E8, E5). El avance de los estudiantes en la simbolización puede deberse al trabajo en equipo y a la comunicación, puesto que entre los estudiantes comparten su conocimiento sobre la manera en que se escriben los números, tal como lo establece el MEN (1998a) la comunicación como proceso general juega un papel fundamental, pues ayuda a construir un vínculo entre las nociones informales y las representaciones simbólicas en las matemáticas. Por tanto, el trabajo en equipo en el que se promueva la comunicación permite comprender los símbolos del SND.

Teniendo en cuenta estos resultados obtenidos en los literales *d* y *e* se puede apreciar que los estudiantes identifican en las representaciones de dimensión 1, aquellas que representa el cardinal mayor a 10 visualmente; al parecer los estudiantes no sienten la necesidad de realizar un conteo para establecer el cardinal de la colección, la docente tiene que decirles que cuenten. Mientras que los estudiantes que realizan representaciones simbólicas se van dando cuenta de una de las características del SND, es económico, porque no necesita hacer tantos puntos como indica la cantidad y reconocen fácilmente el número mayor de 10 a través de la escritura. Posiblemente estén expresando una de las hipótesis que menciona Lerner y Sadovsky (1994) entre dos números de igual cantidad de cifras (ej. 10 y 13), se reconoce que la posición de las cifras determina cuál es el mayor. Por tanto, el docente podría proponer tareas en las que el estudiante realice comparaciones de cantidades para que exprese sus hipótesis sobre cómo funciona el CNN y el SND.

○ *Situación 1: Tarea 3, Pregunta 3 (S1T3P3)*

- 3. De manera individual, completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.

Para completar los dados, los estudiantes usan diferentes estrategias

- 1) Cuentan los puntos que hay en la cara del dado de la izquierda y dibujan la misma cantidad de puntos en la cara del dado de la derecha. Al contar la cantidad total de puntos en los dados empiezan a borrar o dibujar puntos hasta obtener diez (E7, ver anexo 15: S1, T3, P3, ver video 66).
- 2) Colocan diez puntos en la cara del dado de la derecha. Al contar la cantidad total en los dados empiezan a borrar puntos hasta obtener diez en total (E8 y E11)
- 3) Cuentan los puntos que hay en la cara del dado de la izquierda y continúan la secuencia numérica verbal hasta 10 por cada palabra número que dicen dibujan un punto en la cara del dado de la izquierda (E5, E9 y E12, ver video 55)
- 4) Colocan otra cantidad de puntos en la cara del dado de la derecha. Al contar la cantidad total en los dados empiezan a borrar o dibujar puntos hasta obtener diez. (E1, E2, E6, E10 Ver anexo 16: S1, T3, P3).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en esta pregunta se puede afirmar que las representaciones que usan los estudiantes en esta pregunta son de dimensión 1 (puntos). El sentido que posiblemente le atribuyen los estudiantes a la colección de puntos es el de cantidad que le permita completar el 10. La estrategia que garantiza realizar la composición desde el primer momento es la estrategia 3, usarla requiere que el estudiante maneje la secuencia numérica verbal del 1 al 10, la correspondencia uno a uno y el cardinal de la colección. Más aún, el estudiante debe tener un nivel de cadena rompible para seguir la secuencia numérica verbal a partir de un término a (Fuson y Hall mencionado por Rico, *et. al.*, 1999), por ejemplo, si el primer dado tiene 5 puntos el estudiante debe continuar la secuencia numérica desde el 6 hasta 10, haciendo una correspondencia entre la palabra número y el punto dibujado.

Las otras estrategias podrían hacer referencia a algunos usos intuitivos espontáneos para realizar composición del diez. Evidentemente las otras estrategias fallan al momento de ponerlas en práctica pues se obtiene una cantidad mayor o menor a 10. Corregir la cantidad depende el conocimiento de los estudiantes al usar el conteo y de reconocer cuando agregar o quitar puntos. Por un lado, tal como mencionan Le Corre y Carey (2007) los conocedores de los principios de conteo, usan el conteo para determinar el cardinal de la colección, en el desarrollo de la tarea seis de los estudiantes usan el conteo para determinar la cantidad total de puntos en los dados. En este aspecto se nota un avance por parte de los estudiantes, quienes de manera autónoma usan el conteo para determinar el cardinal de la colección aspecto clave en la comprensión del CNN y el SND.

Por otro lado, reconocer que se deben poner puntos o quitar puntos requiere que el estudiante identifique cuando una cantidad es menor a diez o mayor a diez. Algunos estudiantes cuando han obtenido una cantidad menor usan la secuencia numérica verbal mientras dibujan los puntos hasta completar 10, estos estudiantes posiblemente conocen que cada numeral en la lista numérica verbal se refiere a un conjunto de una cardinalidad n y el siguiente numeral de la lista se refiere a un conjunto con cardinalidad $n + 1$ (Le Corre y Carey, 2007) y otros estudiantes cuando han obtenido una cantidad mayor a diez borran de una vez los puntos necesarios para obtener diez.

Los resultados de la tarea exponen los procedimientos que usan los estudiantes para realizar la composición de la cantidad del diez, lo cual es parte importante en la comprensión

del CNN, el SND y para el desarrollo de pensamiento numérico (MEN, 1998a). Las tareas realizadas anteriormente aportaron en la comprensión de la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica convencional, el conteo, la cardinalidad, el cero, el vínculo entre secuencia numérica y cardinal, y el diez, lo cual permitió que los estudiantes se aproximaran a la composición del diez. Por tanto, en el aula de clase la comprensión de estos conceptos debe ser objeto de enseñanza.

En el desarrollo de las tareas los estudiantes presentan avances significativos en lo que respecta a la cardinalidad, lo cual aporta a la comprensión del CNN y el SND

- En el desarrollo de la tarea se evidencia el avance de los estudiantes con relación al concepto de “cero” el cual es clave en el SND. Inicialmente algunos estudiantes usan la palabra “nada” o “cero” para designar la cantidad de la cara del dado que no tiene puntos; sin embargo, el desarrollo de las tareas propuestas permite que los estudiantes avancen en el proceso de designación de conceptos matemáticos lo cual se ve reflejado en tareas posteriores, cuando la docente le dice a los estudiantes que deben hacer una colección de “cero” fichas, ellos reconocen esa palabra y la asocian con ausencia de cantidad.
- Se reconoce el progreso que tuvieron los estudiantes que inicialmente presentaban dificultades en el conteo, de manera específica en los principios de correspondencia uno a uno (particiones y etiquetas) y la secuencia numérica verbal. Especialmente los estudiantes E3 y E12, al terminar esta situación dicen la secuencia numérica verbal hasta el 7 y el 10 respectivamente, aunque inicialmente solo la decía hasta el 3 o hasta el 7 respectivamente. E7 sigue la correspondencia uno a uno hasta 3 y puede formar colecciones de elementos menores o iguales a 3, lo cual representa un avance puesto que inicialmente presentaba dificultades en la comprensión de estos cardinales. Y E12 comprende el cardinal hasta el 10.
- Sobresale la comprensión de los estudiantes sobre el uso del conteo para determinar el cardinal de la colección, esto debido a que inicialmente los estudiantes tienden a determinar la cantidad de una colección por medio de la estimación; no obstante, la realización de tareas en las que el estudiante compara cantidades, relaciona la palabra con la cantidad y forma colecciones que representen un cardinal, aportaron a la

comprensión de la importancia de usar el conteo para establecer el cardinal de la colección.

- Se reconoce el progreso que tuvieron los estudiantes respecto a las representaciones simbólicas del cardinal diez “10”. En la primera tarea se nota que solamente un estudiante usa el “10” para representar el cardinal de la colección de diez elementos, en el desarrollo de las tareas los estudiantes se encargan de comunicar el conocimiento a los demás y en la última tarea la mitad de los estudiantes usan la representación simbólica 10 o la notación invertida 01 para designar el cardinal. Lo anterior, es parte importante en la comprensión de cardinal, agrupación, CNN y SND. Así mismo, se nota un progreso de los estudiantes al comprender el 10 como cardinal, desde contar diez puntos en los dados, formar la colección de diez fichas, hasta componer la colección de diez. Así, comprender el diez como cardinal, acerca a los estudiantes a las agrupaciones de diez y a la comprensión de la base propia del SND.
- También se reconoce el avance de los estudiantes en torno al uso de los estratos de los SMS (caracteres pictográficos, la escritura sucesiva de dígitos hasta llegar al número deseado) los cuales desaparecen al realizar las tareas propuestas. Los estudiantes tienden a usar SMS más abstractos por medio de representaciones simbólicas de dimensión 1 y las notaciones indo-arábigas para representar el cardinal de las colecciones. La tendencia de los estudiantes de usar representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas) se vuelve cada vez más frecuente.
- También se reconoce el avance de los estudiantes al totalizar las cantidades en las caras de los dados; puesto que no dicen dos números o más o repiten secuencia numérica verbal, con el desarrollo de las tareas los estudiantes en su mayoría dicen la secuencia numérica verbal y repiten el último número o solo dicen la palabra número que indica el cardinal. Lo anterior, da a conocer que los estudiantes se aproximaron al conteo y la comprensión del cardinal.

Se nota entonces diferentes avances de los estudiantes con relación a la correspondencia uno a uno, la adquisición de la secuencia numérica verbal, la comprensión del cero como número, la comprensión del vínculo entre conteo y cardinal, la composición del

diez la simbolización y el cardinal diez. Todo lo anterior aporta a la construcción de elementos fundamentales del CNN y el SND en Transición.

Los resultados también muestran aportes con relación a algunos aspectos legales y curriculares en Transición.

Así pues, la dimensión comunicativa (MEN, 1998b) es una parte fundamental en el aprendizaje de los estudiantes en Transición, las tareas propuestas en esta situación facilitan la comunicación entre pares y entre alumno-docente, lo cual al parecer les permite expresar, afianzar y nutrir los conocimientos. Las tareas propuestas aportan también el desarrollo de la dimensión ética pues se promueven valores como la colaboración y la solidaridad entre los estudiantes. Incluso la realización de “trampa” en el juego propicia el espacio para hablar con los estudiantes sobre la importancia de seguir las normas y de ser honestos. A su vez, se da a conocer que los principios de participación y lúdica (MEN, 1998b) son transversales en la situación propuesta. Por un lado, se evidencia la organización y el trabajo en parejas como espacio para la aceptación del estudiante en sí mismo y de su compañero de trabajo, lo cual propicia el intercambio de experiencias, aportes, conocimientos e ideales, en este aspecto el estudiante se reconoce como un participante en el grupo. Además, la situación problema permite que a través del juego “cincuenta fichas” el estudiante construya conocimientos y se apropie de normas.

De manera paralela, el desarrollo de la propuesta de aula al parecer aporta a la construcción de los pilares de la educación. *Aprender a conocer*, ejercitando la atención, la memoria y el pensamiento para comprender el CNN y el SND, *aprender a hacer* en la medida que los estudiantes participan con otros estudiantes en la realización de tareas en común; *aprender a vivir juntos*, en el cual los estudiantes trabajan en parejas, se motivan, cooperan y son solidarios; y *aprender a ser*, en el cual los estudiantes son autónomos en su formación como seres humanos.

Por otro lado, con relación al modelo de comunicación y cognición, se presentan algunas anotaciones desde el cardinal, la composición del diez y la estructura aditiva.

Respecto a la parte cardinal, se puede decir que los estudiantes realizan el conteo señalando con el dedo o con un objeto los elementos; y para expresar una cantidad obtenida usan las representaciones verbales como las palabras número. Cuando usan las palabras número, sus respuestas pueden ser las siguientes: dicen una palabra número, dicen la

secuencia numérica verbal y repiten el último número o lo dicen en voz alta, dicen solamente la secuencia numérica verbal, dicen dos palabras número o más, dicen la palabra “cero” para denotar el dado sin puntos. Además, los estudiantes también usan diferentes representaciones escritas para indicar el cardinal de la colección: Notaciones indo-arábigas y notaciones en espejo; representaciones de dimensión 1 (puntos), caracteres pictográficos; y secuencia de notaciones indo-arábigas en el orden convencional. Estas representaciones en ocasiones reflejan comprensión del cardinal y otras veces no, por eso el docente debe prestar atención también a las acciones de los estudiantes.

En estos primeros años algunos estudiantes presentan dificultad al realizar el conteo, lo cual se manifiesta en errores de etiqueta (final) y de partición en la correspondencia uno a uno; incluso presentan errores en el principio de orden estable. Estos errores inciden en la representación, composición y reconocimiento del cardinal de una colección. Más aún, aplicar la correspondencia uno a uno y el orden estable, no es suficiente para comprender el número como cardinal; expresar el cardinal implica un proceso de vinculación entre estos dos conceptos.

Las dificultades anteriores inciden en la comprensión de la composición del diez. Se puede decir, que los estudiantes que logran componer el diez aparentemente comprenden que cada numeral en la lista numérica verbal refiera a una colección de cardinalidad n y el siguiente numeral de la lista se refiere a una colección con cardinalidad $n + 1$. Los estudiantes al parecer se basan en este supuesto para componer el diez.

Finalmente, respecto a la resolución de problemas aditivos se puede observar que las operaciones que involucran la adición parecen ser más cercanos al estudiante y los pueden resolver con más facilidad, mientras que los problemas que involucran la sustracción resultan un más complejos para los estudiantes de Transición.

3.2.2 Resultados y análisis de resultados de la Situación 2 (S2): Pepa y la Ordinalidad. La situación 2, consta de tres tareas, las cuales fueron aplicadas en tres sesiones los días 4, 5 y 7 de abril del 2016. Las sesiones desarrolladas se realizan en el salón de clases, los estudiantes participan de las tareas y son direccionados por la maestra (Ver anexo 7.2). La cantidad de estudiantes que participan se especifican en cada Tarea.

3.2.2.1 Resultados y análisis de la Situación 2, Tarea 1 (T1). En el desarrollo de esta tarea participan 11 estudiantes, E1 no asistió este día.

○ *Situación 2: Tarea 1, Pregunta 1 (S2T1P1)*

La docente le muestra a los estudiantes el video Pepa pig “viaje en tren”, el cual se reproduce dos veces, luego les muestra a los estudiantes el tren con diez vagones.



Ilustración 32.Explicación S2, T1

1. De manera individual, los estudiantes responden a las siguientes preguntas:

- a. Encierra en un círculo el personaje que está ubicado de primero en el tren
- b. Escribe una X sobre el personaje que está ubicado de último en el tren
- c. Colorea el personaje con quién debe cambiar el puesto Candy Gata para estar en el cuarto puesto

Con relación al literal a, los 11 estudiantes encierran en un círculo el personaje que está ubicado de primero en el tren (Ver video 2.2). Con relación al literal b, 10 estudiantes señalan la respuesta correcta, el otro estudiante se distrae con su cartuchera (empieza a buscar un lápiz) y escribe una X sobre Pedro Pony. Con relación al literal c, todos los estudiantes colorearon correctamente el personaje ubicado en el cuarto puesto. Algunos estudiantes utilizan el conteo “uno, dos, tres, cuatro” mientras señalan con el dedo los vagones (de izquierda a derecha) para encontrar la cuarta posición, mientras que otros estudiantes observan y señalan el cuarto puesto. Dos estudiantes (E7 y E9) realizaron el conteo de vagones de

manera inversa es decir de derecha a izquierda (empezaron a contar desde el último vagón); en estos casos la profesora les muestra el orden de los personajes señalándolos uno por uno (de izquierda a derecha), mientras dice "primero, segundo, tercero..., décimo", luego les reitera la pregunta inicial y los estudiantes responden correctamente (Ver video 2.32).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en estos literales se puede decir que los estudiantes de Transición usan las palabras número como estrato del SMS para contestar a esta pregunta y al parecer le atribuyen el significado alusivo a la posición relativa de un objeto concreto, dentro de una colección ordenada de objetos. Además se da a conocer que los estudiantes reconocen los términos numéricos ordinales “primero” “cuarto” “último”

En el desarrollo de la tarea se da a conocer que comprender el concepto de número ordinal y encontrar la posición de un elemento en una serie ordenada algunas veces está supeditado al procedimiento de contar, además el estudiante debe tener claro cuál es el elemento inicial y el elemento final para establecer una relación de orden con inicio definido.

Se reconoce que las tareas de la situación anterior (situación 1) fueron beneficiosas para los estudiantes. Los conocimientos adquiridos en términos de secuencia numérica verbal convencional y principio de correspondencia uno a uno, les permite a los estudiantes realizar el conteo “uno, dos, tres, cuatro” e identificar el cuarto puesto.

A su vez, se da a conocer que la atención es parte importante en el aprendizaje del estudiante tal como se expone en la dimensión cognitiva (MEN, 1998b) y en uno de los pilares del conocimiento *aprender a conocer* (MEN, 1998a), puesto que si el estudiante se distrae aunque comprenda el concepto no va a realizar bien la tarea. Se debe tener en cuenta que los periodos de atención van aumentando en la medida que el estudiante desarrolla sus capacidades cognitivas.

Además, los estudiantes que dan una respuesta equivocada como E7 y E9 estimulan la discusión en el grupo, este hecho les permite revisar conceptos, formular preguntas y construir conceptos, al parecer se estimula la comunicación como proceso general del aprendizaje (MEN, 1998a).

a. e. ¿En qué posición está Emily la Elefante?

La tipificación de las respuestas obtenidas en este literal se presenta a continuación:

Tabla 20

Resultados S2, T1, P1, Ld

Tipo de	Respuesta	Descripción de la	Frecuencia
---------	-----------	-------------------	------------

respuesta		respuesta	Absoluta
R1	Estudiantes que indican	“De tres” (E3, E6)	2
	correctamente la posición de Emily Elefante	“Tercera” (E2, E4, E5, E9, E10, E11)	6
R2	Estudiantes que indican incorrectamente la posición correcta de Emily Elefante	Segundo, quinto, octavo (E7, E8, E9)	3
TOTAL			11

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la tabla anterior se puede observar que 8 estudiantes indican correctamente la posición de Emily elefante (Ver anexo 18: S2, T1) y a 3 de ellos se les dificulta indicar la posición correcta.

De los 8 estudiantes que dicen la posición de Emily elefante, seis de ellos cuando se les formula la pregunta tocan con el lápiz el personaje y dicen "En la tercera" (Por ejemplo: Ver video 2.5) y los otros dos estudiantes inician el conteo desde el primer personaje señalando con el dedo los vagones de izquierda a derecha mientras dicen: "uno, dos, tres" y responden "es el tres" (Por ejemplo: Ver video 2.6). Los tres estudiantes que dan una respuesta de tipo R2, aunque la profesora interviene señalándoles con el dedo índice los personajes mientras dice "primero, segundo,... décimo" y reitera la pregunta, los estudiantes vuelven a dar otra respuesta incorrecta.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos se percibe que algunos estudiantes de Transición utilizan el término numérico ordinal “tercero” y como SMS utilizan las palabras número “tres”, en ambos casos el significado está ligado a la posición de un personaje en una secuencia ordenada de objetos. En este último caso, se reconoce el papel de las tareas anteriores para fortalecer el proceso de conteo sin la cual, probablemente, no podrían haber obtenido la respuesta correcta.

De acuerdo a lo anotado antes, sobresale la importancia de que los estudiantes conozcan los términos ordinales y el papel del conteo como procedimiento que ayuda a identificar la posición ordinal de un elemento. Lo anterior, para aportar a que los estudiantes comprendan los números y la numeración y por ende aportar al desarrollo de pensamiento matemático (MEN, 1998a). Probablemente, los estudiantes responden de manera incorrecta, en algunos casos, debido a que están en un periodo de adquisición del léxico de los términos ordinales (Chamorro, 2005) o porque no comprenden el rol del conteo en la comprensión del número como ordinal (Anaconda, *et al.* 1998).

○ Situación 2: Tarea 1, Pregunta 2 (S2T1P2)

2. Teniendo en cuenta la organización del tren. La docente indica a los estudiantes que escojan uno de los personajes, el que más les llame la atención y escriban un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren.

La tipificación de las respuestas obtenidas se presenta a continuación

Tabla 21

Resultados S2, T1, P2

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido (E2, E4,E5,E6, E8,E10, E11, E12)	8
R2	Estudiantes que no indican la posición del personaje escogido (E3, E9, E7)	3
TOTAL		11

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la tabla anterior se puede observar que ocho estudiantes indican correctamente la posición del personaje escogido y tres estudiantes no logran indicar la posición del personaje. En R1 se realizan las siguientes representaciones:

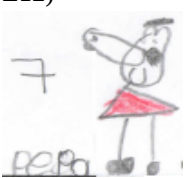
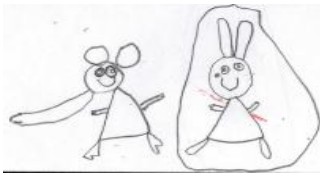
Dibuja el personaje e indica representación simbólica del ordinal (E2, E10, E11)	Dibuja el personaje y escribe la notación indo-arábica (E4, E12)	Escribe notación indo-arábica (E5, E8)	Realiza dos dibujos el del personaje que ha escogido y el personaje anterior (E6)
			

Ilustración 33.Respuestas de la S2, T1, P2

Con relación a los estudiantes que no indican la posición del personaje escogido, dos estudiantes realizan un dibujo y el otro estudiante realiza el dibujo de Pepa (séptima) pero escribe el número cinco.

Según los resultados obtenidos se puede inferir que los estudiantes tienen diferentes maneras de representar el orden. Algunos de ellos utilizan la representación simbólica del ordinal, esta representación al parecer indica la posición de un objeto en una secuencia ordenada. Y otros estudiantes utilizan algunos estratos de los SMS: las representaciones simbólicas (notaciones indo-arábicas) y las representaciones gráficas (Ilustración 32, E6). En

ambos casos indican la posición en la que se encuentran ubicados los personajes en la secuencia ordenada, es decir, representan la posición del objeto en la secuencia.

Los otros estudiantes no representan la posición, solo se limitan a dibujar el personaje escogido. El otro estudiante que realiza el dibujo de pepa y el número cinco, puede deberse a que ha recurrido al conteo pero utiliza una representación simbólica incorrecta del número siete.

Esta situación da a conocer la relevancia de proponer a los estudiantes situaciones problemáticas, debido a que promueve el proceso de simbolización en matemática (Filloy et al. 2007). Así, en la enseñanza controlada, la simbolización aparece en la situación problema como una necesidad de representar una posición; el símbolo en este caso tiene sentido y significado para el estudiante (Castro, et al. 1988). Además, el uso de representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas) por parte de ocho estudiantes, puede ser producto del avance que tuvieron los aprendices en términos de simbolización en las tareas propuestas en la situación anterior.

○ *Situación 2: Tarea 1, Pregunta 3 (S2T1P3)*

En esta pregunta se le presentan al estudiante dos casos: en el caso 1 hay un tren con dos vagones y en cada vagón hay 4 personajes, luego se traslada un personaje del primer vagón al segundo vagón. El caso 2, es similar al anterior, solo que en cada vagón hay 5 personajes. (Ver anexo 7.2). En cada caso se les pregunta a los estudiantes lo siguiente:

- | |
|---|
| a. ¿Cuántos personajes están en el primer vagón? |
| b. ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón? |

La tipificación de las respuestas obtenidas se presenta a continuación:

Tabla 22

Resultados S2, T1, P3

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que indican correctamente la cantidad de personajes que hay en cada vagón en los dos casos (E2, E4, E5, E9, E10, E11, E12)	7
R2	Estudiantes que indican correctamente la cantidad de personajes que hay en el primer vagón, pero indican una cantidad incorrecta en el segundo vagón, en los dos casos (E3, E8)	2
R3	Estudiantes que indican la cantidad incorrecta de personajes en los vagones en un caso o en los dos (E6, E7)	2
TOTAL		11

Atendiendo a los resultados obtenidos en la tabla anterior se puede observar que 7 estudiantes resuelven correctamente los dos casos y los otros 4 estudiantes indican una cantidad incorrecta de personajes en un caso, en los dos casos o en un vagón.

Los estudiantes que indican correctamente la cantidad de personajes que hay en cada vagón, dicen el número y lo representan simbólicamente aunque algunos en notación en espejo (ver video 2.7). Los estudiantes que dan una respuesta de tipo R2 indican correctamente la cantidad de personajes que hay en el primer vagón (sustracción) tanto en el caso 1 como en el caso 2, pero cuando la profesora les plantea el literal b (adición), en cada caso, los estudiantes dan una respuesta incorrecta (Ver anexo 17: S2, T1). Con relación a los estudiantes que dan una respuesta de tipo R3, uno de ellos (E6) puede resolver correctamente el caso 1, pero el caso 2 no y el otro estudiante (E7) da respuestas incorrectas en ambos casos, solamente dice las palabras número (“ocho” y “nueve”).

Los estudiantes en su mayoría utilizan como representación las notaciones indo-arábigas, el significado que le atribuyen los estudiantes a esta representación corresponde en su mayoría al sucesor o antecesor de un número y al cardinal de una colección. Aunque no siempre es así, es el caso de una estudiante quién aunque dice un número “tres” realiza la notación 4, esta estudiante podría encontrarse en el proceso de asignación de sentido y significado de la representación simbólica. Como estrato del SMS los estudiantes utilizan las notaciones en espejo, ellas corresponden a la cantidad correcta que se quiere representar. Reconocer el sucesor ($n+1$) y el antecesor ($n-1$) de un número permite además que los estudiantes se acerquen a la comprensión del concepto de las operaciones en situaciones concretas (MEN, 1998b), este concepto importante en la comprensión del SND.

Teniendo en cuenta lo anterior, en la enseñanza controlada es necesario tener en cuenta que la comprensión del sucesor y el antecesor del número no se debe centrar solamente en la escritura de la serie numérica a partir del control de la serie elemental: 21-22-23 (Chamorro, 2005), los estudiantes también deben comprender el carácter cardinal de estos conceptos (Ortiz, 2014).

Finalmente, los estudiantes que contestaron incorrectamente a esta pregunta, podrían ser debido a que están en el proceso de construcción de la estructura aditiva, o porque están en el proceso de comprensión del vínculo entre la dirección del movimiento en la secuencia numérica y el cambio de la cardinalidad.

3.2.2.2 Resultados y análisis de la Situación 2, Tarea 2 (T2). En esta tarea participan 10 estudiantes, E5 y E8 no asistieron.

○ *Situación 2: Tarea 2, Pregunta 1 (S2T2P1)*

1. Los estudiantes completan los rieles del tren con los números correspondientes. Mientras tanto la profesora pregunta:
 - a. ¿Explica por qué el número 9 va en esa posición?
 - b. ¿En qué posición se debe colocar el número 12? ¿Por qué?
 - c. ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué?

Con relación al literal a, todos los estudiantes colocan el 9 en la posición correcta, algunos cuentan del uno hasta el 8 señalando cada símbolo y colocan el 9 (E1, E2, E3, E4, E11, E12); y otros afirman que el número va en esa posición porque el 9 va adelante del 8 (E7, E6, E9, E10).

Respecto al literal b, 8 estudiantes colocan el 12 en la posición correcta. Una pareja (E1, E2) justifica la posición en que ubicaron el 12, porque empieza por el dígito 1 y los demás números que le siguen también empiezan por el dígito 1 (ver video 2.10); la otra pareja (E9, E10) utiliza el conteo y señala los símbolos mientras dice la secuencia numérica verbal 11, 12, 13, 14, 15 (Ver video 2.11). Los otros cuatro estudiantes (E3, E4, E11, E12) ubican el 12 en donde debería ir el número 21, por tanto la profesora interviene y les muestra el dígito con el que empieza cada número, 23, 24, 25, luego les muestra el dígito con el que empieza el doce y les pregunta ¿este número va aquí? Entonces los estudiantes despegan el 12 y lo colocan en el lugar correcto (Ver video 2.13). Finalmente los dos estudiantes (E7, E6) colocaron el 12 donde debería ir el número 17.

Con relación al literal c, seis estudiantes (E1, E2, E3, E4, E11 y E12) colocan el 21 en la posición correcta, estos estudiantes observan el dígito de las decenas y de las unidades para completar la secuencia (Ver video 2.14). Cuatro estudiantes (E7, E6, E9, E10) colocaron el 21 en una posición incorrecta, una pareja coloca el 21 en donde debería ir el 28, justifican su respuesta porque antes han colocado el 20 (donde debería ir el 27) los estudiantes dicen que el “21 va adelante del 20” (Ver video 2.12) y la otra pareja coloca el 21 donde debería ir el 20 y dice que ahí se debe ubicar porque así son los números.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos se puede percibir que los estudiantes reconocen las representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas) y su significado tiene

que ver con el lugar que ocupa un número en una secuencia numérica. Las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver los problemas son:

- El conteo: Dicen la secuencia numérica verbal hasta llegar al espacio en blanco y luego buscan la representación simbólica del número que han dicho. Algunos estudiantes manejan un nivel de cadena irrompible (dicen la secuencia numérica desde el 1 hasta llegar al número que les hace falta) y otros manejan el nivel de cadena rompible (empiezan el conteo desde otro número distinto de 1 y continúan hasta nombrar el número que falta), estos niveles el docente puede tenerlos en cuenta y procurar que el estudiante adquiera otros niveles de conteo (Fuson y Hall, como se citó en Castro et al. 1999).
- El sucesor o el antecesor de un número: los estudiantes asocian la palabra número con la representación simbólica.
- El dígito de la decena y el dígito de las unidades: Algunos estudiantes en estas primeras edades tienen un conocimiento intuitivo sobre la importancia de la posición de las cifras al momento de completar la secuencia numérica, lo cual es parte importante del SND.

Resolver estas preguntas requiere que los estudiantes conozcan las representaciones simbólicas de algunos números (1-9), el hecho de no conocerlas, les impide en gran medida poder expresar sus hipótesis sobre la manera en que se organiza la secuencia numérica convencional. La situación 1 al parecer les permitió a los estudiantes afianzar estos conocimientos sobre representación simbólica y así poder realizar esta tarea.

En la enseñanza controlada esta pregunta acerca a los estudiantes a la comprensión del CNN por medio del significado del número como secuencia numérica (MEN, 1998 a); también acerca a los estudiantes a la comprensión del sucesor y el antecesor del número y posibilita el espacio para que expresen su conocimiento intuitivo sobre la manera en se presenta el orden de las representaciones simbólicas en el SND. Lo anterior se debe tener en cuenta para que el estudiante comprenda las características de la secuencia numérica propia del SND.

○ *Situación 2: Tarea 2, Pregunta 2 (S2T2P2)*

2. Con los números ubicados en el sitio correspondiente, la docente le indica a los estudiantes que reparen los rieles del tren para que Pepa y sus amigos puedan

pasar, para ello deben unir los rieles en el orden correcto. Mientras reparan los rieles los estudiantes responden a las siguientes preguntas:

- a. ¿Qué número es el sucesor del 5?
- b. ¿Qué número es el antecesor de 10? ¿Por qué?

Los estudiantes a medida que van colocando las piezas, observan los números, discuten sobre la ubicación de las piezas, y finalmente unen los rieles del tren en el orden correcto del 1 al 30, la participación de la docente en este aspecto se limita de preguntarles ¿cuál es el sucesor de x ? (donde x es 5, 10, 19, 24, 15) (Ver video 2.15). La tipificación de las respuestas obtenidas en la pregunta se presenta a continuación:

Tabla 23
Resultados S2, T2, P2

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta (pareja)
R1	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5 y el antecesor del 10 (E1, E2, E3, E4, E6, E8, E9, E10)	4
R2	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10, pero dicen que el sucesor del 5 es el 4 (E11, E12)	1
TOTAL		5

Teniendo la tabla anterior se puede observar que todos los estudiantes identifican el antecesor del 10 y ocho estudiantes identifican el sucesor del 5. Los estudiantes que responden correctamente a las preguntas empiezan por identificar el número en los rieles del tren y luego dicen cuál es el sucesor o el antecesor del número. Con relación a la pareja que se le dificulta reconocer el sucesor del 5, la estudiante E11 señala el 4, entonces la profesora le pregunta a E12 ¿estás de acuerdo? Y el estudiante dice nuevamente el 4 (ver video 2.18 y anexo 20: S2, T2).

Al momento de realizar los registros todos los estudiantes utilizan como representación las notaciones indo-arábigas (Ver anexo 19: S2, T2), aunque algunos de ellos utilizaron como estrato del SMS la notación en espejo (E3, E4, E6, E8, E9, E10, E12). A estas representaciones la mayoría de los estudiantes le atribuyen el significado de sucesor o antecesor de un número. Los estudiantes reconocen el antecesor del 10 como el número que esta inmediatamente anterior al 10; y algunos estudiantes reconocen el sucesor de 5 como el número inmediatamente siguiente a 5.

En la implementación de la propuesta de aula se reconoce que los estudiantes pueden confundir estas palabras “sucesor” y “antecesor”. La pareja que se le dificulta reconocer el sucesor del 5, muy seguramente da una respuesta equivocada porque aún está en el proceso de

aprendizaje de estos dos términos, probablemente confunde antecesor con sucesor o tiene dificultad con reconocer las nociones “antes de” o “después de”, nociones fundamentales al identificar el sucesor y el antecesor de un número en la secuencia numérica.

Además, aunque podría esperarse que los estudiantes tengan dificultades al momento de formar la secuencia numérica del 1 al 30 se evidencia un reconocimiento de los sucesores y antecesores de los números, lo cual les permite formar toda la secuencia numérica. Probablemente los estudiantes están usando sus hipótesis sobre la manera en que se presenta el orden en el SND como lo manifestaron en la pregunta anterior.

Por último, se presenta en esta tarea el principio de lúdica (MEN, 1998b) en el cual a partir del juego los estudiantes comparten sus conocimientos con sus compañeros, se comunican y van construyendo sus conocimientos. Además, en esta tarea al parecer se aporta al pilar del conocimiento “*aprender a hacer*” pues los estudiantes en pareja participan y planean la realización de una tarea en común, esto favorece la tolerancia, el respeto, la cooperación; y potencia el aprendizaje a través de la acción y la socialización de saberes (MEN, 1998a).

○ *Situación 2: Tarea 2, Pregunta 3 (S2T2P3)*

3. La docente orienta a los estudiantes con las siguientes instrucciones:
- d. Encierran en un círculo un número que sea menor que 20
 - e. Señalen con una X un número que sea mayor que 10
 - f. Coloreen el número que es mayor que 10 pero menor que 12

Las respuestas obtenidas por los estudiantes se pueden tipificar en la siguiente tabla

Tabla 24

Resultados S2, T2, P3

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 10, pero indican incorrectamente el número que es mayor que 10 y menor que 12 (E1, E2, E3, E4, E6, E8, E10, E11, E12).	9
R2	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 10 e indican correctamente el número que es mayor que 10 pero menor que 12. (E9)	1
TOTAL		10

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la tabla anterior se puede observar que todos los estudiantes identifican los números que son menores que 20 y los números

mayores que 10; sin embargo, solo 1 estudiante puede indicar el número mayor que 10 y menor que 12. Para establecer las relaciones de orden en la recta numérica algunos estudiantes identifican la dirección en la que están los números mayores (derecha) o los números menores (izquierda) y este conocimiento se lo comparten a sus compañeros.

Con relación literal c, 9 de los estudiantes aunque identifican un número mayor que 10 y un número menor que 12, se les dificulta reconocer el número que cumple ambas condiciones al tiempo (Ver video 2.20). Y algunos estudiantes necesitaron que la docente les indicará la representación simbólica del 20 para que pudieran dar la respuesta correcta (ver video 2.19)

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos se puede observar que los estudiantes reconocen las frases “mayor que” y “menor que” y al parecer le otorgan el significado atendiendo a la comparación de posiciones ordinales en la secuencia numérica, en la cual se pueden establecer diferentes relaciones posiblemente ligadas a la comprensión de una de las hipótesis del SND que menciona Lerner y Sadovsky (1994): entre dos números de igual cantidad de cifras, se reconoce que la posición de las cifras determina cuál es el mayor; por tanto, es importante que los estudiantes expongan en la enseñanza controlada sus conocimientos sobre el tema.

También se puede percibir que los estudiantes son partícipes y constructores de su proceso de aprendizaje, ellos por una parte dan a conocer sus hipótesis sobre la manera en que se establecen relaciones de orden en la secuencia numérica convencional; y por otra parte, comunican su conocimiento a sus compañeros; permitiendo que en el proceso de comunicación (MEN, 1998^a) se desarrolle el aprendizaje mutuo, se contrasten hipótesis y se construya el conocimiento.

Por último, los resultados indican que para los estudiantes es complejo identificar un número que cumpla las dos condiciones al mismo tiempo: que sea mayor que diez y menor que doce.

3.2.2.3 Resultados y análisis de la Situación 2, Tarea 3 (T3). En esta tarea participan 11 estudiantes, E8 no asistió.

○ *Situación 2: Tarea 3, Pregunta 1, La (S2T3P1La)*

3. Durante el juego, la docente le pregunta a uno de los estudiantes lo siguiente:
- a. ¿Qué número sacaste en la carta?

Las respuestas obtenidos por los estudiantes se pueden tipificar en la siguiente tabla:

Tabla 25

Resultados S2, T3, P1, La

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que indican la cantidad obtenida en la carta (E1, E2, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E11, E12)	9
R2	Estudiantes que indican una cantidad diferente a la obtenida en la carta cuándo es mayor a seis (E3, E7)	2
TOTAL		11

Según la tabla anterior se puede apreciar que 9 estudiantes indican la cantidad obtenida en la carta y los otros dos estudiantes indican una cantidad diferente a la obtenida. Con relación a los estudiantes que dan una respuesta de tipo R1 utilizan como estrategia: observar la representación simbólica en la carta y decir el número (E9, E5, E1, E10, E2), la otra estrategia es señalar uno a uno los personajes que aparecen en la carta mientras mueven los labios y dicen el número (E12, E4) o dice la secuencia numérica verbal (E6, E3) y repiten el último número.

Con relación a los estudiantes que indican una cantidad diferente a la obtenida en la carta, se puede apreciar que uno de ellos (E7) realiza un señalamiento uno a uno de los personajes que aparecen en la carta y dice la secuencia numérica aunque no guarda un orden (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9; o 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8); al finalizar el conteo el estudiante repite el último número en la secuencia (Ver video 2.27). El otro estudiante (E3) termina el conteo aunque hacen falta personajes por contar (Ver video 2.21).

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en esta pregunta, se puede apreciar que la representación que utilizan los estudiantes son las palabras-número para realizar el conteo y responder a la pregunta. Esas palabras número en ocasiones indican el cardinal de la colección que se representa en las cartas (9 estudiantes). Pero no siempre es así, los estudiantes E7 y E3 utilizan las palabras número pero se les dificulta identificar el cardinal de la colección, esto es debido a las dificultades que presentan con el principio de orden estable (el orden de la secuencia no es estable) y la correspondencia uno a uno (termina el conteo aunque hacen falta objetos por contar).

Por tanto, en el aula de clase se debe tener presente las dificultades de los estudiantes al momento de establecer el cardinal de la colección las cuales influyen en el establecimiento de las relaciones de orden entre cardinales. En el desarrollo de las tareas se nota un avance en los estudiantes en términos de conteo y del reconocimiento de las representaciones simbólicas utilizadas en las cartas, lo cual es parte importante del SND. Más aún, cuando a un estudiante se le dificulta reconocer la representación simbólica, otro estudiante se acerca y le dice que está equivocado, este hecho lo ayuda en su proceso a corregir la respuesta y encontrar otra estrategia (conteo) para identificar el cardinal de la colección. Así, el estudiante “aprende a conocer” es decir, comprende y descubre algunos conocimientos sobre la tarea del conteo y “aprende a vivir juntos” fomentando el descubrimiento del otro, a través de la participación y la cooperación en el aprendizaje (MEN, 1998a).

3.2.2.1.1 Situación 2: Tarea 3, Pregunta 1, Lb y Lc (S2T3P1Lb y Lc)

- b. ¿Ese número es mayor que diez? ¿Por qué?
c. ¿Ese número es menor que diez? ¿Por qué?

Tabla 26
Resultados S2, T3, P1, Lb y Lc

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que indican correctamente el número que es mayor o menor que diez (E1, E2, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E11, E12)	9
R2	Estudiantes que indican de manera incorrecta cuando un número es mayor o menor que diez (E3, E7)	2
TOTAL		11

Atendiendo a los resultados en la tabla anterior se puede observar que 9 estudiantes pudieron reconocer los números que son mayores o menores a diez. Al preguntarles sobre el porqué de su respuesta, algunos estudiantes contestan lo siguiente:

- 11 es mayor que diez, porque tiene más pepas que diez (ver video 2.22).
- 11 es mayor que diez, ya que esta delante del diez (ver video 2.25).
- Cuatro es menor, porque solo hay 4 y 10 es más que cuatro (Ver video 2.28).

Con relación a los dos estudiantes que se les dificulta indicar cuando un número es mayor o menor que diez, se puede observar que sus compañeros tratan de corregirlos y les explican la respuesta correcta. Ej.: “4 es menor, porque 10 es más que cuatro” (Ver video 2.28).

Segun los resultados anteriores se puede constatar que los estudiantes interpretan las frases “mayor que” y “menor que” algunos de ellos le atribuyen un significado atendiendo a la posición ordinal en la secuencia numérica verbal y otros atendiendo al establecimiento de relaciones de orden en contextos cardinales. Aunque los estudiantes no utilizan las frases “mayor que” o “menor que” si utilizan las expresiones comparativas (Chamorro, 2005) “más pepas que” y “10 es más que” las cuales representan un estrato del SMS.

En una de las respuestas de los estudiantes se da a conocer la lógica que le aplican a las relaciones de orden “4 es menor, porque solo hay 4 y 10 es más que cuatro” así pues, en términos matemáticos se podría interpretar como sigue $4 < 10$ y $10 > 4$; es decir, $(a < b \Leftrightarrow b > a)$. Así, los estudiantes dan a conocer su conocimiento sobre las relaciones de orden lo que contribuye en la comprensión del CNN (Ortiz, 2014).

Además, en el aula es importante que el estudiante establezca relaciones de orden entre dos colecciones visibles al contar (MEN, 2009b), pero que también establezca relaciones de orden entre representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas), esto último el MEN no lo tiene en cuenta para el desarrollo de competencia matemática.

3.2.2.1.1 Situación 2: Tarea 3, Pregunta 1, Ld (S2T3P1Ld)

d. ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez?

Los estudiantes para componer el diez, inicialmente escogen tarjetas al azar y cuentan todos los personajes; si obtienen una cantidad distinta a diez, escogen otra tarjeta y realizan este mismo procedimiento hasta obtener diez en total (Ver video 2.23). Algunos estudiantes al momento de realizar el conteo de los personajes, si se dan cuenta que excede al 10, no siguen contando retiran la carta y escogen otra carta.

Las combinaciones que realizaron los estudiantes para formar diez son 4 y 6, 8 y 2, 3 y 7, 1 y 9. Al parecer a medida que los estudiantes encuentran las cantidades en las cartas que les permitan componer el diez, se van volviendo más conscientes de los cardinales que les permiten hacer tal composición.

En consideración a los resultados obtenidos en esta pregunta se puede evidenciar que los estudiantes entienden la pregunta, especialmente la palabra “suma” la cual posiblemente es interpretada como unir dos colecciones con el fin de obtener la cantidad diez. Evidentemente los estudiantes utilizan como estrategia para sumar dos colecciones el conteo completo de las

dos colecciones (Fuson y Briars, 1990) y resuelven este problema aditivo utilizando el conteo con correspondencia uno a uno, en objetos visibles (MEN, 2008).

El docente debe tener en cuenta que componer y descomponer el cardinal 10, es una habilidad matemática importante para facilitar la comprensión del SND (Saxton y Cakir, 2006). Los resultados evidencian que la mayoría de los estudiantes pueden realizar la composición del número diez en estas primeras edades, incluso reconocen la importancia del conteo para identificar el cardinal de las colecciones, esto puede deberse a las tareas desarrolladas en la situación 1.

Además, en la comprensión de la composición y descomposición del 10 es importante que los estudiantes reconozcan las cantidades mayores o menores a 10 (relación de orden trabajada en preguntas anteriores), para que en la tarea del conteo puedan anticipar respuestas y tomar decisión sobre la colección que necesita para formar la agrupación de 10. Así, el estudiante comprende que un cardinal (10) puede resultar de la composición de varias cantidades (González y Weinstein, 2008). Comprender este hecho es fundamental para aproximarse a la construcción de algunos elementos fundamentales del SND, en un sentido más amplio comprender la composición y descomposición numérica aporta a la construcción de pensamiento numérico (MEN, 1998a)

Por último, en el desarrollo de esta tarea los estudiantes ejercitan la memoria la cual es parte necesaria de “aprender a conocer”, los estudiantes recurren a la memoria sobre las combinaciones que permiten componer el diez para evitar realizar siempre el conteo de todos los elementos de la colección (MEN, 1998a)

○ *Situación 2: Tarea 3, Pregunta 2, La (S2T3P2)*

2. Al terminar el juego, la docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de grupos de diez que formaron en la siguiente tabla y que determinen las posiciones en que quedaron, teniendo en cuenta que el jugador que haya obtenido la mayor cantidad de grupos de diez es el primero.

Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden
1		
2		
3		
4		

- a. ¿Quién quedo de primero?
b. ¿Quién quedo de tercero?

Los estudiantes reconocen la cantidad de grupos de diez al visualizar los vagones (ver video 2.29) y representan la cantidad de grupos de diez en la tabla utilizando las notaciones

indo-arábigas. Además, se puede observar en la ilustración 34 (izquierda) el jugador 2 realiza una grafía que no refleja ninguna de las características de la cantidad representada (2). Además en la ilustración 34 (derecha) se puede observar que los estudiantes utilizan la representación simbólica 0 (cero) para denotar ausencia de grupos de diez.

Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden
1 Hugo S. González	2	1º
2 eskor	2	2º
3 Carla	1	3º

Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden
1 Orlando	1	Primer
2 Dana	22	Primer
3 Sara	1	Segundo
4 Kathine	0	tercer

Ilustración 34.Respuestas de algunos estudiantes S2, T3, P2

El orden que establecen los estudiantes en las tablas atiende a dos aspectos: en uno de los grupos como todos sus integrantes obtiene un grupo de diez en el tren, el orden que se asigna tiene que ver con el primero en obtener diez (Ver video 2.24). En los otros dos grupos (E6, E3, E11, E4, E12, E7, E2) el orden que asignan tiene que ver con ¿Quién obtuvo mayor cantidad de grupos de diez? En este proceso, E7 cada vez que se pregunta ¿quién fue el primero? Levanta la mano (Ver video 2.30).

Los resultados obtenidos anteriormente dan a conocer que los estudiantes pueden identificar los grupos de diez en el tren (Ver anexo 21: S2, T3). Así mismo, se reconocen las notaciones indo-arábigas que utilizan los estudiantes las cuales tienen un significado ligado a la cantidad de grupos de diez formados en el tren, incluso cuando hay ausencia de grupos de diez los estudiantes realizan la representación simbólica (0). Este hecho es importante, porque los estudiantes están comprendiendo la multiplicidad como unidad (Blanco, 2009) y el cero como ausencia de grupos de 10, lo cual es característica del SND.

En la ilustración 34 (izquierda) se observa que el estudiante E7 utiliza un estrato del SMS identificado como forma para número, es decir una grafía que no brindan información sobre el número o la colección (Scheuer *et al.*, 2000). En la situación anterior el estudiante solo utilizaba representaciones simbólicas de dimensión 1 (puntos), Sin embargo, en esta situación se percibe un avance en términos de representación; es decir, la situación problema permite que el estudiante se acerque a la tarea de la simbolización. Es labor del docente posibilitar el espacio para que ese estrato del SMS avance a SMS más abstractos. Además, se

evidencia el avance de los estudiantes, quienes en su totalidad recurrieron a las representaciones simbólicas (indo-arábigas y en espejo) para representar la cantidad.

Por último, se observa que aunque todos los estudiantes identifican la posición “primera” y “última”, al resolver esta tarea varios estudiantes quieren ser los primeros. Al parecer en estas edades los estudiantes quieren ser los protagonistas, es decir, quieren ser los primeros. Por tanto, es necesario que los estudiantes entiendan la importancia de ser honestos y reconocer cuándo han dado una respuesta incorrecta, esto al parecer aporta a la dimensión ética (MEN, 1998b).

c. ¿Cuántas Pepa Pigs tiene el tren del jugador 1 en total?

Para responder a esta pregunta en uno de los grupos (E6, E3, E11, E4) el jugador 1 tenía 3 grupos de 10 y responden a la pregunta diciendo los números 10 o 15, luego la profesora les dice que cuenten todos los personajes en las tablas y los estudiantes (E12 y E2) realizan el conteo hasta 30 (la profesora les ayuda con los nudos); pero al momento de realizar la consigna en la ficha escriben el 7 en notación en espejo (Ver video 2.31). En los otros dos grupos debido a que el jugador 1 tenía solo un grupo de diez, los estudiantes escriben en el recuadro la representación simbólica 10.

Realizar conteos de diez en diez es complejo para los estudiantes, más aún porque se encuentran en el proceso de aprender la secuencia numérica verbal. Al igual que en la pregunta anterior, los estudiantes no hacen la representación de dimensión 1 del treinta pero, al parecer sienten la necesidad de realizar un símbolo para representar la cantidad.

Teniendo en cuenta los resultados y análisis de resultados anteriores se pueden realizar algunas conclusiones iniciales con relación a las representaciones utilizadas por los estudiantes, los avances de los estudiantes y la enseñanza controlada.

Se puede observar que los estudiantes de Transición utilizan y reconocen diferentes representaciones verbales y escritas para indicar la posición de un objeto en una colección ordenada; “primero” “segundo” “tercero”, “último”, las palabras número (“esta de tres”), las representaciones simbólicas ordinales (Ej.: 1º), las notaciones indo-arábigas y los dibujos. Para determinar el número ordinal, los estudiantes usan como estrategias: el conteo usando términos ordinales (primero, segundo... etc.) y conteo usando secuencia numérica verbal (uno, dos, tres... etc.), en ambos casos se empieza por el objeto inicial hasta llegar al objeto deseado.

Además, en el desarrollo de la situación se pueden observar algunos avances en términos del número como ordinal, en el conteo, en las representaciones simbólicas, en la composición del diez y en algunas características del SND.

Incluso, se reconoce que la situación anterior (situación 1) permite fortalecer conocimientos sobre la secuencia numérica verbal convencional, el principio de correspondencia uno a uno, y el conteo; lo cual incide al momento de reconocer la posición de un objeto o el cardinal de la colección.

Los estudiantes avanzan en la comprensión del número como ordinal, en lo concerniente al conteo, la secuencia numérica verbal, la correspondencia uno a uno, el cardinal, los términos ordinales y las representaciones del número ordinal lo cual al parecer indica que los estudiantes avanzan en la comprensión de la posición de un objeto en una secuencia ordenada, en la comprensión del sucesor y el antecesor de un número y en el establecimiento de las relaciones de orden en contextos cardinales.

Por otro lado, esta situación da a conocer la relevancia de proponer a los estudiantes situaciones problemáticas como esta, debido a que se incita a los estudiantes a acercarse al proceso de simbolización en matemática para representar la posición ordinal o para representar el cardinal de una colección. Algunos aprendices dejan de realizar representaciones simbólicas de dimensión 1 (puntos) y usan estratos de los SMS o notaciones indo-arábigas, estas últimas son características del SND.

A su vez, los estudiantes avanzan en la composición de diez. El hecho de reconocer las cantidades mayores o menores a 10, les permite a los aprendices anticipar respuestas y tomar decisiones sobre la colección que se necesita para formar la colección de 10 elementos. Además, con la práctica los estudiantes reconocen algunas combinaciones (ej. 6 y 4) y las utilizan para componer el 10.

Incluso, a través del establecimiento de las relaciones de orden los estudiantes presentan un avance en la comprensión del valor posicional y lo utilizan al formar la secuencia numérica del 1 al 30. También se evidencia un avance en la comprensión del SND pues los estudiantes reconocen la cantidad de dieces que tienen, (lo que muestra un posible acercamiento al reconocimiento de la multiplicidad como una unidad) y comprenden el cero como ausencia de grupos de diez.

Además, desde la enseñanza controlada se pueden identificar algunos aportes a las dimensiones, los pilares de la educación, los procesos generales, los principios, entre otros.

Con relación a las dimensiones, los resultados muestran que se realizan algunos aportes a la dimensión ética, al promover que los estudiantes sean honestos y reconozcan cuando dan una respuesta incorrecta. También se reconoce en el aula de clase procurar que los estudiantes estén atentos como base para contribuir a la dimensión cognitiva (1998b).

El desarrollo de la situación al parecer aporta al pilar “aprender a hacer” según el cual los estudiantes participan y planean del desarrollo de una situación problema en común con sus compañeros. Los estudiantes “aprende a vivir juntos” por medio del descubrimiento del otro, a través de la participación y la cooperación (MEN, 1998a). Y además, “aprenden a conocer” construyendo algunos conocimientos, en este pilar la memoria y la atención son fundamentales.

A su vez, a través de la comunicación como proceso general y como dimensión se promueve la discusión en el grupo, lo cual permite revisar conceptos, confrontar ideas, formularse nuevas preguntas y acceder a nuevos conceptos. También, al parecer se aporta el principio de la lúdica (MEN, 1998b) puesto que a partir de los juegos propuestos, los estudiantes comparten sus conocimientos y van construyendo sus conocimientos.

Las directrices sobre relaciones de orden que establecen el MEN (2009b) se quedan cortas respecto a las relaciones de orden que pueden establecer los estudiantes. Estas directrices dejan de lado el reconocimiento de la posición de un objeto en una serie ordenada, las relaciones de orden entre representaciones simbólicas, y la identificación del sucesor y el antecesor de un número.

Finalmente, en este proceso se deben tener en cuenta:

- Identificar la posición de un elemento en una serie ordenada algunas veces está supeditado al procedimiento de contar, a la adquisición del léxico de los términos ordinales, y al reconocimiento del elemento inicial y el elemento final en la serie ordenada.
- Los estudiantes deben conocer los términos ordinales, su representación simbólica y el papel del conteo como procedimiento que ayuda a identificar la posición ordinal de un elemento

- Los estudiantes pueden confundir estas palabras “sucesor” y “antecesor”. Es necesario que se trabajen estos dos conceptos desde la representación simbólica y desde el cardinal que representan.

Finalmente, se destaca el uso de los materiales como el tren, la banda numérica, y el juego de cartas, pues permiten trabajar el reconocimiento de los números escritos, las representaciones simbólicas, el sucesor y el antecesor de un número, las relaciones de orden, el valor posicional y la representación simbólica del 0.

3.2.3 Resultados y análisis de resultados de la Situación 3 (S3): La tienda y la agrupación. La situación 3, consta de tres tareas, las cuales fueron aplicadas en tres sesiones los días 14, 21 y 23 de abril del 2016 (Ver anexo 7.3). La cantidad de estudiantes que participan se especifican en cada Tarea.

3.2.3.1 Resultados y análisis de la Situación 3, Tarea 1 (T1). En el desarrollo de esta tarea participan 11 estudiantes, E7 no asistió este día.

○ *Situación 3: Tarea 1, Pregunta 1 (S3T1P1)*

1. La docente le entrega a cada grupo un número. El grupo debe escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número. El mensaje sólo puede tener los números que Pipe el títere entiende. Al final los estudiantes deben meter todos los dulces en la bolsa. Este ejercicio se realiza con los siguientes números:
 - a. 12

La tipificación de las respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

Tabla 27

Resultados S3, T1, P1, La

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta (Grupos)
R1	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1, E5, E4, E3, E12, E8, E11, E4)	2
R2	Estudiantes que escriben el 5, el 6 y el 1 para componer el doce (E9, E6, E2)	1
TOTAL		3

Atendiendo la tabla anterior se puede observar que 8 estudiantes tuvieron en cuenta la agrupación de 10 al momento de componer el número 12 y los otros tres estudiantes realizan la composición del 12 utilizando cantidades distintas a diez. Los estudiantes requieren de la intervención de la docente para hacer la composición de esta cantidad; inicialmente, deciden

escribir el número 1 en la hoja y luego el 2, pero se dan cuenta que uno más dos no da doce; entonces los estudiantes comienzan a decir números aleatoriamente, por lo tanto la docente interviene y les dice que deben contar para estar seguros (Ver video 3.2). Realizar el conteo les permite realizar la composición del número 12.

El grupo 3 decide escribir el 10, y cuando la profesora les pregunta ¿cuánto le falta al diez para llegar al doce? los estudiantes dicen, “faltan dos” (Ver video 3.3). Las representaciones que usan los estudiantes son las siguientes

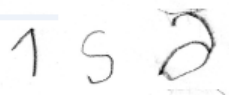
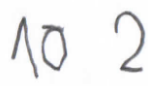
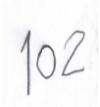
Grupo 1 (E1, E5, E4, E3)	Grupo 2 (E12, E8, E11, E4).	Grupo 3 (E9, E6, E2)
		

Ilustración 35. Respuestas S3, T1, P1, La

b. 26

La tipificación de las respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

Tabla 28

Resultados S3, T1, P1, Lb

Tipo de respuesta	Respuesta	Descripción de las respuestas	Frecuencia Absoluta (Grupo)
R1	Estudiantes que escriben 10, 10 y 6 para componer el 26 (E1, E5, E4, E3)	Notaciones indo-arábigas	1
R2	Estudiantes que escriben 10, 7 y 9 para componer el 26 (E12, E8, E11, E4).	Notación en espejo	1
R3	Estudiantes que escriben 10, 6, 4, y 6 para componer el 26 (E9, E6, E2)	Notaciones indo-arábigas	1
TOTAL			3

De acuerdo a la tabla anterior se puede observar que todos los estudiantes tuvieron en cuenta las agrupaciones de 10 para componer el 26, incluso un grupo tuvo en cuenta dos agrupaciones de diez para realizar la composición. Al igual que en el literal anterior, los estudiantes deciden escribir el número 26 en la hoja y la docente les recuerda que deben contar para estar seguros. En la composición de cantidades el conteo con los dedos de las manos es fundamental (Ver video 3.4). Además, cuando un estudiante no se ha apropiado del

proceso de escritura un compañero le da indicaciones; por ejemplo, “El diez es el uno y el cero” o “mira te falta el cero”. Los registros escritos de los grupos son los siguientes:

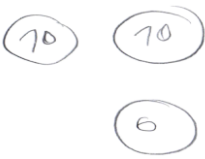
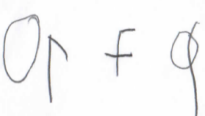
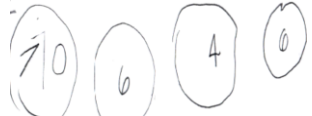
Grupo 1 (E1, E5, E4, E3)	Grupo 2 (E12, E8, E11, E4).	Grupo 3 (E9, E6, E2)
		

Ilustración 36. Respuestas S3, T1, Lb

c. 42

La tipificación de las respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

Tabla 29

Resultados S3, T1, P1, Lc

Tipo de respuesta	Respuesta	Descripción de la respuestas	Frecuencia Absoluta (Grupos)
R1	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42 (E1, E5, E4, E3, E12, E8, E11, E4).	Notación en espejo	2
R2	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 2 y 9, pero no componen el 42 (E9, E6, E2).	Notaciones indo-arábigas	1
TOTAL			3

De acuerdo a la lectura de la tabla anterior se puede observar que todos los estudiantes tuvieron en cuenta las agrupaciones de 10 para componer el 42, sin embargo, un grupo no logra hacer la composición del 42, solo llega hasta el 41, aunque la profesora les pregunta en múltiples ocasiones “¿si tienen 41 cuánto les hace falta para llegar al 42?” los estudiantes no llegan a la respuesta.

Al momento de hacer el conteo la docente debe ayudarles a los estudiantes en los nudos para realizar el conteo (Ver video 3.5). Las representaciones escritas de los estudiantes son las siguientes

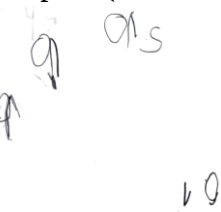
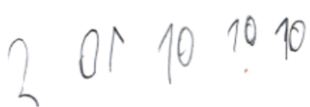
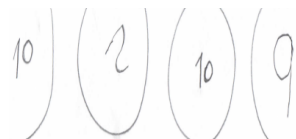
Grupo 1 (E1, E5, E4, E3)	Grupo 2 (E12, E8, E11, E4).	Grupo 3 (E9, E6, E2)
		

Ilustración 37. Respuestas S3, T1, P1, Lc

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el La, Lb y Lc se puede observar que algunos estudiantes usan las representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas) y otros estudiantes usan como estrato del SMS las notaciones en espejo y las representaciones simbólicas con las cifras invertidas (01), las cuales indica cardinal de la colección. Estas representaciones aunque son simbólicas, atendiendo a las consideraciones de Filloy (1999) están más ligadas a la acción de contar con los dedos de las manos, es decir a acciones concretas, más no representan acciones más abstractas, como reconocer que en el 26, el 2 representa el 20, atendiendo al valor posicional de las cifras.

Por otro lado, las descomposiciones de los números 12, 26 y 42 ($10+2$, $10+10+6$, $10+10+10+10+2...$ etc.) dan a conocer que los planteamientos de Kamii (2000) tienen sentido, pues los estudiantes piensan aditivamente, y tienen en cuenta la agrupación de diez (base 10 propia del SND). Los resultados de la experimentación muestran que en el proceso de descomposición la técnica de conteo corporal (Ifrah, 1987) al parecer facilita la realización de agrupamientos de diez en diez; además, los estudiantes comprenden que el número también puede ser visto como la totalización de una o más agrupaciones y pasan de la percepción de colecciones de unidad por unidad a una percepción de agrupamientos de diez en diez, lo cual es parte importante en la comprensión del SND. Sin embargo, en la enseñanza controlada los docentes han de tener en cuenta que a los estudiantes se les dificulta hacer conteos de diez en diez, por lo que deben recurrir a la totalización de las cantidades usando el conteo y la docente debe recordarles a los estudiantes los términos para designar las decenas (nudos) para que puedan realizar el conteo.; esta situación hace que el procedimiento se vuelva más tedioso, pues cada vez que agregan un diez los estudiantes deben de realizar el conteo total de todos los dedos.

Además, los resultados obtenidos dan a conocer que involucrar situaciones problemas en la enseñanza de los primeros años permite comunicar ideas, y representar el CNN (MEN, 1998a). En la tarea, los estudiantes *aprenden haciendo*, trabajando en equipo, contando con los dedos de las manos, realizando representaciones simbólicas y confrontando ideas (MEN, 1998b). El principio de participación también se constata en la organización y el trabajo en grupo, los estudiantes intercambian conocimientos, son partícipes de una sociedad y partícipes en su aprendizaje (MEN, 1998b). Además, se aporta al desarrollo de la dimensión ética

(MEN, 1998b) los estudiantes cooperan entre ellos, cuando un estudiante no puede realizar una acción referente al conteo o la representación se apoyan en el proceso.

Por último, los estudiantes pueden componer las cantidades, lo que da a conocer que las situaciones anteriores han aportado al conteo, teniendo en cuenta la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y la cardinalidad de la colección. Se muestra un avance en los estudiantes que se ve reflejado en el uso de representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas), la composición de cantidades usando agrupaciones de diez, y la aproximación al pensamiento aditivo. Estos aspectos son parte fundamental en la comprensión del SND

Situación 3: Tarea 1, Pregunta 2 (S3T1P2)

2. La docente da a conocer la siguiente situación: Pipe el títere debe ponerle un precio a las bolsas de dulces que se han formado: 12 dulces, 26 dulces, 42 dulces. Pero los precios son muy altos y Pipe no los entiende, porque solo puede contar hasta 10. Ayúdale a Pipe a ponerle los precios a las bolsas de bananas. Los precios son los siguientes:

1.300

600

2.100

Mientras realizan la tarea, la profesora pregunta:

- d. ¿Cuál es el mayor precio? ¿Por qué?
- e. ¿Cuál es el menor precio? ¿Por qué?
- f. Indica la razón por la que el precio corresponde a la bolsa de bananas

Cuando la profesora le pregunta a los integrantes del grupo 2 (E12, E8, E11, E4) ¿cuál es el mayor precio?, uno de los estudiantes (E11) toma la ficha que tiene el número 2.100, y dice que es el mayor porque tiene muchos números mientras que el 600 tiene muy poquitos, además tienen el dos y el uno (señala los dígitos del 2.100) y E8 completa “y tiene dos ceros” (Ver video 3.7).

Con relación al grupo 1 (E1, E5, E4, E3) cuando la profesora les pregunta ¿Cuál es el mayor precio? E1 dice “el cien” señalando el número 2.100, porque tiene más números, cuando la profesora le muestra que 1.300 tiene la misma cantidad de cifras que 2.100 y le formula otra vez la pregunta el estudiante señala nuevamente el 2.100 y dice “porque tiene un dos”. Y cuando la docente pregunta ¿cuál es el menor? Uno de los estudiantes (E5) toma la ficha con el número 600 y dice que es el menor porque “tiene más poquitos números” (Ver video 3.6)

Cuando la profesora le pregunta al grupo 3 (E9, E6, E2) ¿cuál es el menor? los estudiantes señalan el 600 porque tiene “menos números”, luego les pregunta ¿cuál es el

menor entre 1.300 y 2.100? y los estudiantes dicen que el menor es 1.300 porque tiene un 1 y que 2.100 es el “más grande”

Los estudiantes pueden colocarle el precio correspondiente a cada bolsa de bananas atendiendo a la cantidad de dulces que observan. A la bolsa que tiene mayor cantidad de dulces (42) le asignan el precio mayor (2.100) a la bolsa con menor cantidad de bananas de dulces (12) le asignan el precio menor (600) y a la bolsa restante (26) el precio que queda (1.300).

Teniendo en cuenta lo anterior, se da a conocer que los estudiantes usan como SMS los términos comparativos como: “poquitos”, “muchos” y “grande” (Chamorro, 2005), los cuales atienden al establecimiento de las relaciones de orden entre representaciones simbólicas. Lo cual da a conocer que los estudiantes aunque no manejan expresiones como “mayor que” o “menor que” si establecen relaciones de orden entre las cantidades.

De manera que los estudiantes de Transición pueden hacer comparaciones de escrituras numéricas, en el desarrollo de la tarea los planteamientos de Lerner y Sadovsky (1994) tienen sentido en tanto los estudiantes en estos primeros años entienden algunos aspectos del SND, las cuales atienden a la comprensión del SND: Entre dos números de diferente cantidad de cifras, el mayor es el que tiene mayor cantidad de cifras; y entre dos números de igual cantidad de cifras se comparan los dígitos de la potencia mayor, es decir “el primero es el que manda”.

Por último, se muestra un avance en los estudiantes, en lo que tiene que ver con el reconocimiento de las representaciones simbólicas de los números en la situación; y no solo esto, los estudiantes también estiman la cantidad que indica la representación simbólica y a partir de ello establecen relaciones de orden. Al parecer el conocimiento adquirido sobre el orden de las posiciones (primero, segundo, último) es fundamental para que el estudiante establezca comparaciones entre los dígitos de los números, y lo acerquen a la idea del valor posicional.

3.2.3.2 Resultados y análisis de la Situación 3, Tarea 2 (T2). En el desarrollo de esta tarea participan 11 estudiantes, E4 no asistió este día.

○ Situación 3: Tarea 2, Pregunta 1 (S3T2P1)

1. Mientras se realiza el juego, la investigadora le pregunta a por lo menos dos de los estudiantes del grupo:
- ¿Cuántas monedas de un peso tienes?
 - ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad?
 - ¿Cuántas monedas de 10 pesos tienes?
 - ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad?
 - ¿Cuántas monedas de 100 pesos tienes?
 - ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad?

La tipificación de las respuestas de los estudiantes con relación al La, Lc, Le, se presenta a continuación:

Tabla 30

Resultados S3, T2, P1, La, Lc, Le

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 y dicen la cantidad correcta de monedas de cada valor (E1, E9, E10, E12).	4
R2	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 pero realizan conteo correcto cuando se les señala la moneda (E11, E5, E2, E8, E6).	5
R3	Estudiantes que no identifican las monedas de \$10, \$100 aunque se le señale la moneda y dicen una cantidad incorrecta de monedas (E7, E3).	2
TOTAL		11

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la tabla anterior se puede decir, que al responder los literales a, c y e, algunos estudiantes conocen las monedas con las denominaciones \$1, \$10, \$100, pero otros estudiantes confunden tales denominaciones. Especialmente cuando se les pregunta por las monedas de \$100 los estudiantes tienden a contar las monedas de \$10 pesos; por tanto, la maestra debe intervenir y mostrarle las monedas \$10 y las de \$100 pesos. De los 11 estudiantes, 9 dicen la cantidad correcta de monedas que posee atendiendo a su valor. Los otros dos estudiantes (E3, E7) tienen dificultades al realizar el conteo, por ejemplo E3 realiza el conteo de las 16 fichas de \$1 de la siguiente manera: “1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16” (Ver video 3.12).

Los resultados anteriores muestran que los estudiantes utilizan las palabras número para realizar el conteo de las monedas. En ocasiones la palabra número indica el cardinal de la colección, pero otras veces la palabra número no indica el cardinal debido a las dificultades

que poseen los niños en la secuencia numérica verbal cuando excede a 10 y en la correspondencia uno a uno.

Teniendo en cuenta lo anterior, las orientaciones del MEN (2009b) sobre el aprendizaje de los estudiantes en estos primeros años tienen sentido, pues algunos de ellos realizan el conteo saltándose algunas palabras numéricas o algunos objetos; y otros cuentan usando la secuencia convencional, con correspondencia uno a uno y expresando el cardinal. Por tanto, los estudiantes están en el proceso de cuantificación como parte del desarrollo de la competencia matemática. En este sentido, los docentes deben tener en cuenta el proceso que realizan los estudiantes en el conteo. Como se evidencia en el proceso realizado por E3, si bien la última palabra en la secuencia numérica muestra el cardinal de la colección, en el proceso del conteo se presentan dificultades de correspondencia y de secuencia numérica verbal.

Por último, se nota un avance de los estudiantes, especialmente de E7 quién dice la secuencia numérica verbal hasta 10, recordemos en las tareas de la situación 2 solo podía hacerlo hasta 7; no obstante, sigue teniendo dificultades en la correspondencia uno a uno, lo cual repercute en el reconocimiento del cardinal de la colección.

La tipificación de las respuestas de los estudiantes con relación a los literales b, d y f, se presenta a continuación:

Tabla 31

Resultados S3, T2, P1, Lb, Ld, Lf

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que realizan la agrupación de 10 monedas de igual valor y realizan los cambios (E1, E2, E5, E6, E8, E9, E10, E11, E12)	9
R2	Estudiantes que no realizan agrupaciones de 10 monedas y no logran realizar los cambios (E3, E7)	2
TOTAL		11

Según la tabla anterior se puede inferir que 9 de los estudiantes pueden hacer agrupaciones de 10 monedas con las cuales realizan los cambios, mientras que los otros tres estudiantes tienen dificultades al formar las agrupaciones de diez.

Con relación a los estudiantes que dan una respuesta R1, ellos, toman una a una las monedas mientras dicen la secuencia numérica del uno al diez o solo mueven los labios mientras toman las fichas para formar la colección (ej. Ver video 3.21). Mientras que los

estudiantes que dan la respuesta de tipo R2 intentan hacer el cambio con una moneda, la docente debe recordarles que deben tener agrupaciones de 10 para hacer el cambio; sin embargo, entregan una agrupación distinta a diez (Ver video 3.8). Los compañeros del grupo tratan de ayudarlos contando las monedas para formar la agrupación de diez monedas para que puedan realizar el cambio.

A su vez, en el desarrollo de la tarea los estudiantes pueden cambiar 10 monedas de \$1 por una moneda \$10; y cambiar 10 monedas de \$100 por una moneda de \$1.000, pero se les dificulta hacer los cambios de 10 monedas de \$10 por la moneda de \$ 100, en ocasiones cambian diez monedas de \$10 por otra de \$10 o por otra de \$1.000, la docente debe intervenir y recordarles las reglas de los cambios.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que los estudiantes usan las palabras número en el conteo para formar la agrupación de diez. En este caso, la palabra número “diez” significa agrupación de diez elementos, la agrupación solo puede ser formada por los estudiantes cuando comprenden el vínculo entre el cardinal y el ordinal para componer el diez. Incluso, para realizar los cambios los estudiantes deben otorgarle un sentido y significado a la frase “agrupación de diez”, la cual indica formar una agrupación de monedas de igual valor que representen el cardinal diez. Los estudiantes que comprenden este hecho forman agrupaciones de diez para hacer los cambios.

Además, en el desarrollo de la tarea se puede ver que aparentemente se aporta a la dimensión ética (MEN, 1998b) pues hay cooperación entre los estudiantes, cuándo uno no puede realizar el conteo sus compañeros le ayudan a realizar la agrupación de diez monedas del mismo valor. Incluso, el trabajo en grupo permite que los estudiantes *aprendan a vivir juntos* (MEN, 1998b) para conocer al otro, conocerse a sí mismo, reconocer las diferencias, concebirse como un equipo que tienen un objetivo en común al realizar la tarea y en la cual, la colaboración es un eje fundamental.

Por último, percibe un avance en los estudiantes en términos de conteo, no siempre realizan el conteo en voz alta de todos los elementos, tratan de realizar en conteo solamente moviendo los labios y dicen en voz alta la palabra número que representa la agrupación de diez. Además, a medida que se recuerdan las reglas de los cambios a los estudiantes, ellos avanzan en la comprensión de los cambios entre 10 monedas de un valor de orden inferior a una moneda que represente un valor de orden superior. La dificultad que presentan los

estudiantes al cambiar 10 monedas de \$10 pesos por una moneda de \$100 puede ser el resultado de los resultados obtenidos en la primera pregunta, los estudiantes confunden estas dos representaciones el 10 con el 100.

○ Situación 3: Tarea 3, Pregunta 2 (S3T3P2)

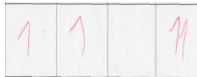
2. La docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de monedas de cada integrante del grupo en la siguiente tabla:

Cantidad Estudiante	Monedas de 1.000 pesos	Monedas de 100 pesos	Monedas de 10 pesos	Monedas de 1 peso
1				
2				
3				

En la realización de la pregunta los estudiantes que hacen el papel de banqueros (E6, E5, E12) no realizan los registros. La tipificación de las respuestas de los estudiantes se presenta a continuación:

Tabla 32

Resultados S3, T3, P2

Tipo de respuesta	Respuesta	Ejemplo	Frecuencia Absoluta
R1	Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábica (E1, E2, E5, E6, E8, E10, E11, E12)		5
R2	Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación en espejo (E9, E3)		2
R3	Estudiantes que utilizan unos para representar la cantidad de monedas en la tabla (E7)		1
TOTAL			8

Teniendo en cuenta la tabla anterior se puede apreciar que todos los estudiantes representaron correctamente la cantidad de monedas en la tabla (Ver video 3.11), los estudiantes cuentan las monedas teniendo en cuenta su valor y escriben la notación indo-arábica en la casilla que le indica la docente, cuando un estudiante no reconoce la moneda sobre la cual se le está preguntado, otro estudiante le ayuda, señalándole la moneda correcta, lo mismo sucede al momento de realizar la representación simbólica, es el caso de E3 quién no sabe cómo escribir el 8 y su compañero E9 le indica la manera correcta de hacerlo, dibuja un ocho con el dedo en el aire y le dice “son dos bolitas”.

Teniendo en cuenta los resultados expuestos anteriormente se puede observar que los estudiantes utilizan las representaciones indo-arábigas propias del SND, y también se observa como SMS las notaciones en espejo y la escritura repetitiva de números (1 1), estas representaciones significan las unidades de diferente orden (10, 100, 1000).

Se reconoce el avance en los estudiantes en términos de representación, aunque en tareas anteriores utilizaron formas para números la cual no brindaba información sobre la colección, esta vez se realiza una representación (1, 1) que brinda información sobre la cantidad de la colección dos. Además, en los avances de los estudiantes se reconoce el uso del cero para designar que hay ausencia de agrupamiento de un orden determinado, lo cual es parte importante en la comprensión del SND. También, se observa una representación (R3) muy parecida a la que utilizaron los chinos en la antigüedad, cuando hay ausencia de agrupamiento en un orden determinado se deja la casilla vacía (Ifrah, 1987).

Por último, en esta tarea se ve la colaboración entre los estudiantes lo cual es parte importante de la dimensión ética (MEN, 1998b). Se resalta además, la importancia de proponer situaciones problemas, en las cuales se permita la comunicación entre pares, por un lado la situación problema promueve al acercamiento a los procesos de simbolización (Filloy *et al.* 2007) y por otra parte, si se promueve la comunicación (MEN, 1998a) los estudiantes comparten los conocimientos que han adquirido sobre la representación simbólica de los números. Así la simbolización aparece como necesidad de comunicar una cantidad y la representación simbólica se construye entre los estudiantes.

○ *Situación 3: Tarea 2, Pregunta 3 (S3T2P3)*

4. La docente le dice a los estudiantes que observen los puntajes que han registrado en la tabla y respondan las siguientes preguntas:
- d. Si en una casilla hace falta realizar una conversión de monedas, se plantea la siguiente pregunta ¿Esta cantidad de monedas no la podrías haber cambiado por otra moneda?
 - e. Teniendo en cuenta la cantidad de monedas de 1.000 pesos que tiene el estudiante 2 indica ¿Cuántas monedas de 100 pesos necesitas para cambiar esa cantidad?
 - f. Indica el dinero que tienes en total

El literal a no se le formuló a los estudiantes, pues ellos habían realizado todos los cambios posibles. Con relación al literal b, ninguno de los estudiantes responde acertadamente, algunos dicen que la moneda de mil se cambia por otra moneda de mil (Ver

video 3.9) y otros estudiantes dicen un número aleatorio “se necesitan diez mil” o “doscientos” (Ver video 3.10).

Con relación al literal c los estudiantes en su totalidad realizan el conteo de las monedas que tienen en su poder. Por ejemplo E3 y E9 realizan los siguientes registros

Cantidad Estudiante	Monedas de 1000 pesos	Monedas de 100 pesos	Monedas de 10 pesos	Monedas de 1 peso	Total
1 sara	0	8	1	5	14
2 johanna	1	2	4	3	14

Ilustración 38. Respuestas S3, T2, P3

Teniendo en cuenta los resultados anteriores se puede observar que para los estudiantes pasar de una unidad de orden superior a unidades de orden inferior es una tarea compleja, por eso no logran hacer el literal. Cuando se les pregunta ¿Cuánto tienen en total? no dicen el valor total de las monedas, sino que realizan el conteo de las mismas, los estudiantes se encuentran en el proceso de adquisición del léxico de las unidades de mil, las centenas y las decenas, por eso no pueden decir la cantidad de dinero que tienen en total.

3.2.2.5 Resultados y análisis de la Situación 3, Tarea 3 (T3). En el desarrollo de esta tarea participan los 12 estudiantes

- Situación 3: Tarea 3, Pregunta 1 (S3T3P1)

La docente le entrega a cada estudiante un catálogo de ventas con los siguientes productos y sus precios respectivos:



Al momento de presentar el catálogo de ventas los estudiantes tratan de leer los precios de los artículos que aparecen, dicen el precio del Supercoco “cien”, del Gansito

“setecientos”, del Bon Bon Bum “doscientos” y de los chicles “doscientos”. El precio de los demás artículos no los dicen por completo: La Pony Malta vale “ochocientos”, los Quipitos “quinientos”, la chocolatina “cien” o “uno cientos” y las papas “doscientos” o “cincuenta” (Ver video 3.1). Teniendo en cuenta los resultados anteriores se puede observar que los estudiantes reconocen las palabras números para designar las notaciones 100, 200, 700, 500 y 800. Además, cuando la representación simbólica contiene unidades de mil, o decenas algunos estudiantes tienden a leer solamente la centena, y algunos otros les atribuyen una designación personal a 1.100 como “uno cientos” y otros solo dicen solamente la unidad de mil.

1. La docente le plantea a los estudiantes organizados en parejas las siguientes situaciones:
- Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso. ¿Por qué es el más costoso?



2.500



1.800

- Entre la chocolatina y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso ¿Por qué es el más costoso?



1.100



1.800

Las respuestas obtenidas por los estudiantes se pueden tipificar en la siguiente tabla:

Tabla 33

Resultados S3, T3, P1

Tipo de respuesta	Respuesta	Frecuencia Absoluta (Parejas)
R1	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta (E10, E8, E2, E7, E1, E12)	4
R2	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta, pero escogen incorrectamente el producto más costoso entre la chocolatina y la Pony Malta (E9, E3)	1
R3	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre la chocolatina y la Pony Malta, pero escogen incorrectamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta (E5, E11)	1
TOTAL		6

Atendiendo a los resultados presentados en la tabla se puede decir que 10 estudiantes respondieron correctamente el literal a y 10 estudiantes respondieron correctamente el literal b. Con relación a los estudiantes que respondieron correctamente el La se puede apreciar que

señalan las papas como el producto más costoso porque empieza por el número dos (Ver video 3.19) incluso algunos expresan que “dos es mayor que uno” (Ver video 3.18). Los estudiantes también hacen referencia a lo que han escuchado en su vida cotidiana “mi papá me dice que las papas Margaritas son caras”. La pareja que no contesta a esta pregunta correctamente dice que la pony malta es más cara porque tiene un ocho. Con relación a los estudiantes que respondieron correctamente el literal b se puede apreciar que señalan la pony malta como más costosa porque observan el dígito que aparece en la segunda cifra (Ver video 3.20). La pareja que no pudo contestar correctamente indica que la chocolatina es la más costosa porque tiene dos “unos” y la Pony Malta solo tiene un “uno”.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se puede ver que algunos estudiantes utilizan expresiones como “dos es mayor que uno” la cual atiende a las relaciones de orden en contextos cardinales. Se puede observar que los estudiantes no utilizan términos ordinales como “primero” o “segundo”; sin embargo, al desarrollar estas preguntas comparan las cifras que están ubicadas en la primera posición (de izquierda a derecha), en el caso de ser iguales comparan las cifras que estas ubicadas en la segunda posición (de izquierda a derecha). Las relaciones de orden que se establecen entre las representaciones simbólicas obedecen a los planteamientos de Lerner y Sadovsky (1994) sobre las hipótesis que elaboran los estudiantes sobre la escritura del SND. A partir de las relaciones de orden los estudiantes exponen sus ideas sobre la manera en que funciona el SND lo cual da a conocer su conocimiento intuitivo sobre el valor posicional. Atendiendo a los planteamientos del MEN (1998a) reflexionar sobre el valor posicional les permite a los estudiantes comprender el SND.

Además, se destaca en el desarrollo de la tarea que los estudiantes reconocen la separata como contexto cotidiano y los relaciona con sus experiencias numéricas previas. En este aspecto, el contexto escogido tiene que ver con el ambiente que rodea al estudiante y por ende le da sentido a las matemáticas que aprende (MEN, 1998a).

○ Situación 3: Tarea 3, Pregunta 2 (S3T3P2)

1. La docente entrega a las parejas algunas monedas y los estudiantes deben escoger las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el producto que se le indica

Productos	Monedas que entrega la profesora
	9 de 10 pesos 15 de 1 peso
	6 de 100 pesos 13 de 10 pesos
	13 de 100 pesos

En la sigui ^{1.100} la se presentan el total del dinero que coloca cada pareja de estudiantes dependiendo del producto al primer intento, sin la intervención de la docente.

Tabla 34

Resultados S3, T3, P2. Dinero que coloca cada pareja atendiendo al producto

Producto/Pareja	E9, E3	E2, E7	E10, E8	E5, E11	E1, E12	E6, E4
Supercoco \$100	\$101	\$21	\$22	\$6	\$11	\$105
Gansito \$700	\$730	\$730	\$600	\$730	\$670	\$ 600
Chocolatina \$ 1.100	\$ 1.300	\$1.000	\$900	\$1.300	\$1.300	\$1.300

Al momento de colocar las monedas para formar los productos se puede observar que ninguno de los estudiantes logra colocar la cantidad exacta al primer intento. Los estudiantes requieren de la ayuda de la docente para poder realizar el conteo y colocar la cantidad correcta de monedas de cada producto

Al realizar el conteo se observa que los estudiantes reconocen el sufijo **nta** que aparece en las palabras número del 30 al 40 **treinta**, **cuarenta**,... **noventa**; lo mismo sucede con el sufijo **cientos**, que aparece en las palabras número del 200 al 900. A medida que la profesora va diciendo los números de diez en diez o de cien en cien los estudiantes tratan de seguir la secuencia utilizando estos sufijos (Ver video 3.16), incluso si la profesora comienza la palabra número los estudiantes tratan de continuarla (Ver video 3.17).

Al realizar el conteo los estudiantes tratan de seguir la secuencia de diez en diez pero esta no guarda el orden convencional, por ejemplo: la docente dice “diez”, los estudiantes dicen “veinte”, “cuarenta”, entonces la profesora corrige “treinta” y los estudiantes continúan

“cuarenta”, “cincuenta” (Ver video 3.15). Además, cuando los estudiantes tratan de seguir la secuencia de cien en cien, logran hacerlo hasta cierto número por ejemplo: un estudiante dice “cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, cinco-cientos, seiscientos, ochocientos” (Ver video 3.22) la profesora corrige quinientos y setecientos. Solo dos de los estudiantes (E7, E3) logran llevar la secuencia de cien en cien hasta cuatrocientos, el resto de los estudiantes puede llevarla más allá de cuatrocientos. Los estudiantes pueden continuar el conteo después de un nudo (dieces), por ejemplo: un estudiante cuando llega a 90 sigue el conteo 91, 92, 93, 94, 95, 96 (Ver video 3.14).

Teniendo en cuenta lo anterior, se da a conocer que los estudiantes usan las palabras número: “Diez”, “cien”, “mil” a ellas les atribuyen el significado atendiendo a las agrupaciones de diez monedas teniendo en cuenta su denominación. Lo cual es parte importante en la comprensión de potencia de la base del SND, 10 (10^1), 100 (10^2), 1.000 (10^3).

En el desarrollo de las tareas los docentes deben tener en cuenta que los estudiantes se encuentran en el proceso de adquisición de la secuencia numérica de las decenas y de las centenas, por ello las tareas de conteo de las cantidades propuestas se vuelven complejas para los estudiantes. Sin embargo, exponerlos a este tipo de tareas expone su conocimiento sobre cómo funciona la secuencia en el SND, los estudiantes reconocen los sufijos de las decenas del 30 al 90 y de las centenas del 200 al 900. Incluso, reconocer el sucesor de la decena, por eso cuando llegan a noventa, por ejemplo, se vuelven a repetir los números del uno al nueve aunque antecedido de la palabra noventa (noventa y uno, noventa y dos, noventa y tres, etc.). Además, cuando los estudiantes dicen “noventa y ocho”, “noventa y nueve” ¿cómo sigue? Y la profesora dice “cien”, muestran que ellos reconocen que hay un cambio de unidad de diferente orden.

A su vez, en el desarrollo de las tareas es importante que los estudiantes reflexionen sobre las agrupaciones, porque al parecer los ayuda a comprender el SND (MEN, 1998a); en este aspecto, la tarea propuesta permite que los estudiantes agrupen 10 monedas de \$1 para formar la de \$10, también que agrupen 10 monedas de \$10 para formar el valor de \$100, y que agrupen 10 monedas de \$100 para formar el valor de \$1.000. En este sentido se aporta a la agrupación sobre la cual se base el SND.

En el aprendizaje de la secuencia numérica verbal y la comprensión de cambios la dimensión comunicativa (MEN, 1998b) tiene un papel relevante, pues los estudiantes

aprenden en la medida que comunican su conocimiento sobre la manera en que se crean agrupaciones para formar un valor determinado. La comunicación en el equipo aporta al uso y reconocimiento de las decenas en la secuencia numérica verbal. Además, se nota un trabajo en equipo en el cual los estudiantes participan en la construcción de los grupos de monedas, se motivan y buscan la manera de representar la colección correcta de monedas para poder comprar el producto. Por tanto, al parecer se aporta a “aprender a vivir juntos” (MEN, 1998b) como pilar de la educación.

Por último, en el desarrollo de esta tarea se reconoce el avance en los estudiantes en lo que tiene que ver con el reconocimiento de las monedas, los estudiantes distinguen las monedas de \$10 y las de \$100. Además, se nota un avance en términos del reconocimiento de los cambios, entre 10 monedas de orden inferior a una moneda de orden superior. Así mismo, en el desarrollo de la tarea se aporta a la secuencia numérica verbal, a la adquisición del léxico de las decenas y de las centenas.

Teniendo en cuenta los resultados y análisis de resultados de los estudiantes que participaron de la situación 3, se presentan algunas reflexiones sobre las notaciones simbólicas, los avances en el aprendizaje y los aportes al modelo de enseñanza.

Con relación a las notaciones simbólicas, se puede observar que los estudiantes para representar las agrupaciones de diez utilizan la notación simbólica 10, y los SMS como las cifras invertidas (01) y la notación en espejo (**10**). Estas representaciones aunque son simbólicas, atendiendo a las consideraciones de Filloy (1999) están más ligadas a la acción de contar con los dedos de las manos, es decir a acciones concretas, más no representan acciones más abstractas.

En el desarrollo de la situación se puede observar algunos avances en el aprendizaje de los estudiantes con relación al conteo, las representaciones simbólicas, las comparaciones notacionales, las agrupaciones y los cambios.

Con relación al conteo, se puede apreciar un avance en los estudiantes de Transición pues todos dicen la secuencia en el orden convencional del 1 al 10, y aquellos que pueden decir la secuencia del 1 al 15 no utilizan términos personales como “diez y uno” o “diez y dos”. Además, los estudiantes en ocasiones realizan el conteo sin mencionar toda la secuencia numérica verbal solo dicen en voz alta la palabra número “diez” que representa el cardinal de la agrupación. Incluso en el conteo de cantidades superiores a diez los estudiantes reconocen

los sufijos de las decenas y las centenas y tratan de realizar el conteo de diez en diez y de cien en cien. Por otro lado, se muestra un avance en los estudiantes en el uso de representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas) para representar las agrupaciones de 10 y el cardinal de las colecciones.

Además, se evidencian las hipótesis de los estudiantes para realizar comparaciones notacionales con números mayores a diez, lo cual da a conocer un avance en la comprensión de algunas características del SND como la aproximación al valor posicional, y la asociación entre la representación simbólica y la cantidad.

A su vez, se presenta un avance con relación a las agrupaciones, lo cual puede ser el resultado de componer y descomponer cantidades utilizando las agrupaciones de diez. Los niños comprenden que el número también puede ser visto como la totalización de una o más agrupaciones. Además, se reconoce el uso del cero para designar la ausencia de agrupamiento de un orden determinado.

Respecto a los cambios, los estudiantes en la medida que practican progresan en la comprensión de los cambios de 10 unidades de orden inferior a una unidad orden superior. Además, los estudiantes avanzan en la comprensión del SND desde lo aditivo y utilizan el principio de repetición de la base diez para descomponer el número (Ej.: $42 = 10 + 10 + 10 + 10 + 2$).

Todas las anotaciones anteriores influyen en el modelo de enseñanza, en el cual se pueden hacer otras anotaciones desde lo curricular y desde la labor del docente. Desde lo curricular se resalta el rol de las situaciones problema, los pilares de la educación, las dimensiones, los principios y el pensamiento matemático.

Por un lado, la situación problema promueve un acercamiento a los procesos de simbolización, la cual aparece con un sentido u significado propio como representación de una agrupación. Por otro lado, en el desarrollo de las tareas se aporta a los pilares de la educación. En la tarea los estudiantes *aprenden haciendo*, contando los dedos de las manos, realizando representaciones simbólicas y expresando ideas. Además, el trabajo en grupo permite que los estudiantes *aprendan a vivir juntos* para conocer al otro, conocerse a sí mismo, reconocer la labor del equipo para alcanzar un objetivo. Incluso, *aprende a conocer* fortaleciendo la atención y la memoria.

También se aporta al desarrollo de la dimensión ética, pues los estudiantes cooperan entre ellos para realizar la tarea; y al desarrollo de la dimensión comunicativa, en la que los estudiantes comunican su conocimiento sobre la secuencia numérica verbal, las agrupaciones, las relaciones de orden y los cambios. A su vez, se evidencia el principio de participación en la organización y el trabajo en grupo, y el principio de lúdica en la realización de los juegos que permite a los estudiantes acceder al conocimiento sobre el SND.

Respecto al desarrollo de pensamiento matemático se puede observar que los estudiantes están en el proceso de cuantificación, y del establecimiento de las relaciones de orden como parte del desarrollo de la competencia matemática (MEN, 2009b). Además, los estudiantes reflexionan sobre las agrupaciones y el valor posicional lo cual es parte importante del SND (MEN, 1998a). A su vez, los estudiantes reconocen la separata y la tienda como un contexto cotidiano y lo relacionan con sus experiencias numéricas previas.

Por otro lado, en las prácticas de aula se deben tener en cuenta algunas consideraciones que se presentan a continuación:

- Los estudiantes se encuentran en el proceso de adquisición de la secuencia numérica, por eso desconocen algunas decenas y centenas. Los docentes deben apoyarlos en el conteo.
- Al momento de realizar la tarea si los estudiantes no comprenden el cardinal del 10, es complejo que puedan hacer las agrupaciones de diez.
- Para los estudiantes pasar de una unidad de orden superior a unidades de orden inferior es una tarea compleja.
- Las tareas que incluyen la composición y descomposición numérica permite que los alumnos se familiaricen con los números y con sus propiedades lo cual influye en la comprensión de SND y en la comprensión de las operaciones aditivas.
- Al momento de realizar tareas que involucran el dinero, es necesario hacer la caracterización de las notaciones simbólicas que aparecen en las monedas, esto con el propósito de diferenciar cada una de las representaciones que aparecen en ellas. Lo anterior ayudaría al momento de realizar agrupaciones de monedas y los cambios. Además, el dinero como material didáctico propicia la comprensión del conteo, los cambios de unidades de diferente orden y la descomposición en agrupaciones de diez,

los cuales contribuyen al conocimiento del estudiante sobre el SND (Saxton y Cakir, 2006).

- Es importante propiciar espacios para que los estudiantes implementen el conteo utilizando los dedos de las manos, la técnica de conteo corporal facilita la realización de agrupamientos de diez en diez y componer cantidades.

3.2.4 Resultados globales de la implementación de la propuesta de aula. A partir de los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta de aula se puede decir algunas anotaciones sobre la representación, los avances del aprendizaje de los estudiantes y la enseñanza.

Con relación a la representación se puede anotar que al realizar el conteo los estudiantes usan las representaciones verbales (palabras número) de la siguiente manera: dicen solamente la palabra número que representa el cardinal, dicen solamente la secuencia numérica verbal, dicen la secuencia numérica verbal y repiten el último número de la secuencia y dicen dos palabras número o más. Además, para representar el cardinal de una colección de 10 elementos o de una colección diferente los estudiantes utilizan notaciones indo-arábigas, notaciones en espejo, representaciones de dimensión 1 (puntos), caracteres pictográficos, cifras invertidas (01); y secuencia de notaciones indo-arábigas en el orden convencional. Y para representar el ordinal los estudiantes utilizan representaciones verbales como los términos ordinales (“primero”, “segundo”, “tercero”) o las palabras número (“esta de tres”) y como representaciones escritas utilizan las representaciones simbólicas ordinales (Ej.: 1º), las notaciones indo-arábigas y los dibujos. Los docentes deben estar pendientes a las representaciones de los estudiantes y a los procesos de conteo para determinar si efectivamente la representación atiende al cardinal, ordinal o agrupación.

Con relación a los avances de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, se destacan los siguientes:

- Los estudiantes reconocen la palabra "cero" y el símbolo “0”, y lo usan para representar la ausencia de cantidad, o ausencia de agrupamiento en un orden determinado.

- En el desarrollo de las tareas los estudiantes que tenían dificultades en la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y el cardinal, avanzan en su proceso.
- Al momento de realizar el conteo de una colección los estudiantes no dicen dos números o más sino que utilizan la secuencia numérica verbal. El conteo también lo utilizan para determinar el cardinal de la colección.
- Los estudiantes presentan un avance en torno a la comprensión del valor posicional (por medio de las relaciones de orden en la secuencia numérica y las comparaciones entre representaciones simbólicas), los cambios, el pensamiento aditivo y el principio de repetición para descomponer o componer cantidades.
- Los estudiantes avanzan en su proceso de conteo de cantidades superiores a diez, reconocen los sufijos de las decenas y las centenas y tratan de realizar el conteos de diez en diez y de cien en cien.
- Los estudiantes comprenden el 10 como cardinal, a través de tareas que involucran el conteo, formar colecciones, componer cantidades, establecer relaciones de orden, entre otras.
- Los estudiantes avanzan en la comprensión del número como totalización de una o más agrupaciones, además usan las agrupaciones de diez para componer o descomponer un número.
- Se evidencia el avance de los estudiantes en términos del uso de representaciones indo-arábigas para representar agrupaciones de 10 y el cardinal de las colecciones. En este aspecto, los caracteres pictográficos, las representaciones de dimensión 1 y la escritura sucesiva de dígitos hasta llegar al número deseado, desaparecen.

Por otro lado, con relación a la enseñanza se realizan algunas anotaciones desde la curricular y la implementación de la propuesta de aula.

Respecto a lo curricular se destaca la relevancia de proponer la resolución de situaciones problemáticas, debido a que se incita a los estudiantes a acercarse al proceso de simbolización en matemática; así, los símbolos aparecen con un sentido y significado propio. Además la comunicación como proceso general y como dimensión en Transición es fundamental para que el estudiante exprese su conocimiento, confronte ideas, formule preguntas y construya conocimientos. También, se aporta al desarrollo de la dimensión ética,

debido a que se promueven valores como la colaboración, la solidaridad y la honestidad. En el desarrollo de la dimensión cognitiva se promueve la atención y la memoria para la construcción de conocimientos. Incluso, la participación y la lúdica son principios transversales en los cuales los estudiantes se conciben como participantes activos de su aprendizaje, de su grupo de trabajo y además intercambia conocimientos y experiencias a través de los juegos propuestos. A su vez se aporta a la construcción de los pilares de la educación *aprender a hacer, aprender a conocer, aprender a vivir juntos y aprender a ser*.

También se reconoce desde la parte curricular que las orientaciones del MEN (2009b) sobre las matemáticas en grado de Transición, se quedan cortos para describir la cuantificación y los principios de conteo, las relaciones de orden, la comunicación de cantidades y la agrupación.

Se pueden tener en cuenta algunas consideraciones sobre la implementación de la propuesta sobre la cardinalidad, la ordinalidad y la agrupación.

- Los estudiantes de Transición manifiestan dificultades en la comprensión de la correspondencia uno a uno (etiqueta y particiones), y la secuencia numérica verbal. El docente debe proponer tareas para que el estudiante supere las dificultades y comprenda el número como cardinal.
- Reconocer la posición de un elemento en la serie está vinculada al procedimiento de contar y al reconocimiento del elemento inicial y final en la serie ordenada de objetos concretos. Si el estudiante presenta dificultades en estos aspectos difícilmente podrá reconocer el número como ordinal.
- El reconocimiento de las posiciones de los objetos en una serie ordenada influye en la comprensión de la posición de las cifras en el número y así mismo en la comprensión del valor posicional.
- Es importante que los estudiantes conozcan los términos ordinales y su representación simbólica para representar el número como ordinal
- Descomponer las unidades de mil en centenas y los problemas que involucran la resta son complejos para los estudiantes de grado Transición.
- Las palabras sucesor y antecesor deben asociarse a la representación simbólica o verbal y al cardinal que representan.

- Las tareas sobre composición y descomposición numérica aporta a que el estudiante se familiaricen con el CNN, sus propiedades, y la operación aditiva.
- El uso del conteo con los dedos de las manos facilita la realización de agrupamientos de diez y la composición y descomposiciones de cantidades.
- Así mismo el uso de materiales como el juego cincuenta fichas, los dados, el tren, la banda numérica, y el juego de cartas, dentro de situaciones problemas permiten trabajar el cardinal y el ordinal. Además, se reconoce el dinero como material manipulativo que propicia la comprensión del conteo, los cambios de unidades de diferente orden y la descomposición en agrupaciones de diez, los cuales contribuyen al conocimiento del estudiante sobre el SND

3.3 Sobre la entrevista y el estudio de casos

Atendiendo los planteamientos de Filloy (1999), realizar la propuesta de aula anterior permite realizar algunas observaciones sobre la pregunta problema en cuestión, pero también permite observar diferentes perfiles de los estudiantes, con lo cual se escoge a un subgrupo para realizar un estudio de casos. En este contexto, la propuesta de aula permite elaborar la entrevista para elaborar un ambiente de observación para el estudio de caso.

3.3.1 Sobre los perfiles de los estudiantes. En general los estudiantes que desarrollaron la propuesta de aula se clasifican de acuerdo a tres ejes que corresponden a cada una de las situaciones: situación 1, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno, situación 2, la ordinalidad; y situación 3, la agrupación. Para establecer los perfiles de sujetos se tuvo en cuenta el índice de actuaciones satisfactorias (respuestas correctas) sobre el total de las preguntas en cada una de las situaciones. Los estudiantes de perfil alto, responden más del 80% de las preguntas correctamente, los estudiantes de perfil medio, responden entre el 50% al 79% de las preguntas correctamente y los estudiantes de perfil bajo responden menos del 50% correctamente (Ver anexo 23: clasificación perfiles estudiantes y anexo 27: actuaciones de los estudiantes)

Atendiendo a los planteamientos de Filloy (1999) una vez establecidos los criterios de clasificación respecto a los tres ejes, se obtiene una visión del desempeño de los estudiantes en conjunto, lo cual se presenta a continuación:

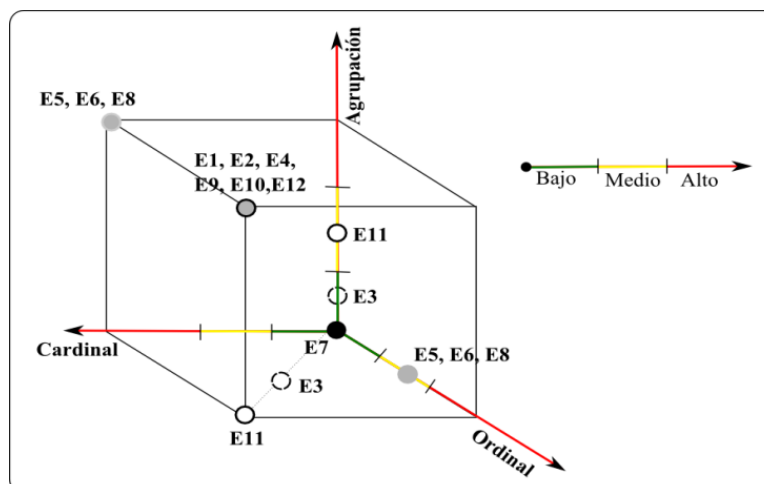


Ilustración 39. Clasificación de los perfiles de los estudiantes

Se decide entrevistar a dos estudiantes que representan el subgrupo escogido, uno de perfil alto (E10) y otro estudiante de perfil bajo (E7). El protocolo de entrevista con enseñanza se diseña a partir de la propuesta de aula inicial (Ver protocolo 25). La entrevista se realiza en la IED Ciudad de Bogotá, durante el horario escolar de los estudiantes, se garantiza la disponibilidad del alumno para ser entrevistado en el día y horario previsto, junto con la autorización paterna.

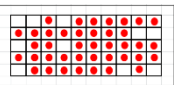
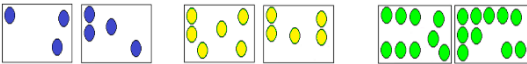
3.3.2 Sobre el diseño de la entrevista. Atendiendo a los MTL se escogen algunas preguntas de la propuesta de aula para realizar la entrevista; teniendo en cuenta, las preguntas en las que los estudiantes (E7 y E10) tuvieron mayor dificultad o las preguntas que movilizan conceptos claves de la cardinalidad, ordinalidad y agrupación. Lo anterior, para observar de manera clara los procedimientos y las dificultades presentes al resolver las preguntas propuestas

La entrevista es semi-estructurada¹⁵, es decir la investigadora formula las preguntas consignadas en la entrevista pero también puede hacer preguntas espontáneas, lo cual permite profundizar en las características de las actuaciones de los estudiantes al realizar las preguntas. A continuación se presenta un cuadro comparativo entre la propuesta de aula y las preguntas escogidas para hacer la entrevista.

¹⁵ En la entrevista semiestructurada los ítems no están totalmente predeterminados, por lo que permite obtener respuestas que en un principio no se habían previsto. En este tipo de entrevistas se pueden utilizar preguntas complementarias. El objetivo es profundizar o clarificar las respuestas de los estudiantes, para obtener una respuesta más completa y precisa y facilitar al mismo tiempo la tarea del entrevistado (Grass, Arguilaga, Gómez, 1990)

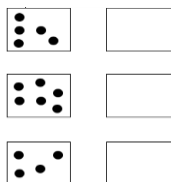
Tabla 35

Presentación de la entrevista en relación a la propuesta de aula

Situación 1: Cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno	Entrevista																																																
Tarea 1: La correspondencia uno a uno y el conteo 1. Cada pareja de estudiantes juegan “cincuenta fichas” Durante el juego a los estudiantes se les pregunta: e) ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados? f) ¿Quién ha colocado menos fichas en la tabla? g) ¿Cuántas fichas te faltan para tener la misma cantidad que tu compañero? h) ¿Cuánto te falta para ganar? 2. Teniendo en cuenta las fichas en el tablero se muestra a continuación:  que ¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para llenar todas las casillas? 3. Lucía tiene seis fichas como se muestra a continuación:  a) Pedro tiene una ficha más que Lucía. Dibuja las fichas que tiene Pedro b) Mariana tiene 2 fichas menos que Lucía. Dibuja las fichas que tiene Mariana	Cada estudiante juega “cincuenta fichas” Durante el juego al estudiante se les pregunta: a. ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados? b. ¿Cuánto te falta para ganar?																																																
Tarea 2: Del 0 al 10 Los estudiantes juegan “Cincuenta Fichas” y luego realizan la siguiente tarea. 1. Usando las fichas del juego realiza una colección que tenga: a) 0 fichas b) 3 fichas c) 4 fichas d) 6 fichas e) 8 fichas f) 10 fichas 2. Observa las parejas de cartas y señala con una X la carta que tiene: 3 fichas 6 fichas 10 fichas 	Usando las fichas del juego realiza una colección que tenga a) 3 fichas b) 4 fichas c) 10 fichas																																																
Tarea 3: El 10 1. Cada pareja de estudiantes juegan “Cincuenta Fichas”. De manera individual se registra en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados. 2. Los estudiantes observan los puntajes que han registrado en las tablas y realizan lo siguiente: 4. Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla 5. Compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo el mayor puntaje? <table border="1" data-bbox="607 1541 753 1780"> <caption>Estudiante 1</caption> <thead> <tr> <th>TURNO</th> <th>PUNTAJE</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td></td></tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="781 1541 927 1780"> <caption>Estudiante 2</caption> <thead> <tr> <th>TURNO</th> <th>PUNTAJE</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> <tr><td>5</td><td></td></tr> <tr><td>6</td><td></td></tr> <tr><td>7</td><td></td></tr> <tr><td>8</td><td></td></tr> <tr><td>9</td><td></td></tr> <tr><td>10</td><td></td></tr> <tr><td>11</td><td></td></tr> </tbody> </table>	TURNO	PUNTAJE	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		TURNO	PUNTAJE	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		De manera individual se registra en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados.
TURNO	PUNTAJE																																																
1																																																	
2																																																	
3																																																	
4																																																	
5																																																	
6																																																	
7																																																	
8																																																	
9																																																	
10																																																	
11																																																	
TURNO	PUNTAJE																																																
1																																																	
2																																																	
3																																																	
4																																																	
5																																																	
6																																																	
7																																																	
8																																																	
9																																																	
10																																																	
11																																																	

Capítulo 3. El Sistema de Numeración Decimal en Transición

6. Compara con tu compañero los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor cantidad?
7. Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos, compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo más veces diez puntos?
8. Escribe una X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10?
3. De manera individual, completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.



TURNOS	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

- a. Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos
- b. Completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total



Situación 2: Pepa y la Ordinalidad

Tarea 1: El Número como ordinal

La docente le muestra a los estudiantes el video Pepa pig “viaje en tren”; luego, les muestra un tren con diez vagones, cada vagón con un personaje de la serie, y hace énfasis sobre la posición de los personajes en el tren.



1. De manera individual, los estudiantes responden a las siguientes preguntas:
 - a. Encierra en un círculo el personaje que está ubicado de primero en el tren
 - b. Escribe una X sobre el personaje que está ubicado de último en el tren
 - c. Colorea el personaje con quien debe cambiar el puesto Candy Gata para estar en el cuarto puesto
 - d. ¿En qué posición está Emily la Elefante?
2. Teniendo en cuenta la organización del tren. La docente le indica a los estudiantes que escojan uno de los personajes, el que más les llame la atención y escriban un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren.
3. La docente les presentan un tren con dos vagones a los estudiantes. En el primer vagón hay 5 personajes del video: Pepa cerdita, Wendy loba, Emilia elefanta, Rebeca liebre y Madame gacela y en el segundo vagón están los otros personajes del video: Susy oveja, Pedro pony, Danny perro, Zoe cebra y Candy gata. La profesora cuenta cada grupo de personajes y los pone en los vagones respectivos. Luego, la profesora cuenta que Pepa cerdita quiere pasarse al segundo vagón, así que toma a Pepa cerdita del primer vagón y la desplaza al segundo vagón. Finalmente los estudiantes indican:
 - a. ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?
 - b. ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?

La investigadora le muestra al estudiante un tren con diez vagones, cada vagón con un personaje de la serie “Pepa”.



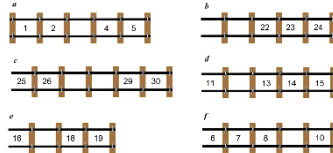
El estudiante responde a las siguientes preguntas

- a. ¿En qué posición está Emily la Elefante?
- b. Teniendo en cuenta la organización del tren. La investigadora le indica al estudiante que escoja uno de los personajes, el que más le llame la atención y escriba un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren.

Una Aproximación a la construcción del Sistema de Numeración Decimal en Transición

Tarea 2: Sucesor y Antecesor

La tarea se realiza en parejas, la profesora le entrega a los estudiantes los rieles del tren cortados en seis trozos como se muestra a continuación y las fichas con los números 3, 2, 9, 12, 14, 17, 20, 21, 27, 28 y 17. Cada ficha tiene un adhesivo para que el estudiante pueda ponerlo en el espacio correspondiente.



La profesora cuenta que mientras Pepa y sus amigos daban un paseo en el tren se percataron de que los rieles se habían descompuesto y por tanto el tren no podía pasar por ese camino. La docente invita a los estudiantes a ayudar a reparar los rieles del tren

4. Los estudiantes completan los rieles del tren con los números correspondientes. Mientras tanto la profesora pregunta:

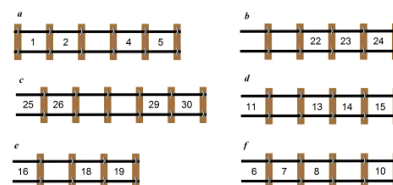
- d. ¿Explica por qué el número 9 va en esa posición?
- e. ¿En qué posición se debe colocar el número 12? ¿Por qué?
- f. ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué?

Luego, la profesora introduce las palabras *sucesor* y *antecesor* de un número haciendo referencia al siguiente o al anterior de un número. Por ejemplo: “¿Qué número es el siguiente de 4? “A ese número lo vamos a llamar sucesor”, ¿Qué número esta antes del 4? “A ese número lo vamos a llamar antecesor”

5. Con los números ubicados en el sitio correspondiente, la docente le indica a los estudiantes que reparen los rieles del tren para que Pepa y sus amigos puedan pasar, para ello deben unir los rieles en el orden correcto. Mientras reparan los rieles los estudiantes responden a las siguientes preguntas:

- c. ¿Qué número es el sucesor del 5?
 - d. ¿Qué número es el antecesor de 10? ¿Por qué?
6. La docente orienta a los estudiantes con las siguientes instrucciones:
- g. Encierren en un círculo un número que sea menor que 20
 - h. Señalen con una X un número que sea mayor que 10
 - i. Coloreen el número que es mayor que 10 pero menor que 12.

La investigadora le entrega al estudiante los rieles del tren cortados en seis trozos como se muestra a continuación y la ficha con los números 12 y 21, la ficha tiene un adhesivo para que el estudiante pueda ponerlo en el espacio correspondiente. El estudiante completa los rieles del tren con los números correspondientes.



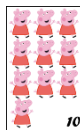
Mientras tanto la investigadora pregunta:

- a. ¿En qué posición se debe colocar el número 12? ¿Por qué?
- b. ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué?

Tarea 3: Relaciones de orden

La tarea se realiza en grupos de tres o cuatro personas. La profesora le entrega a los estudiantes un mazo de cartas españolas modificadas con las imágenes de Pepa Pig, y la imagen del tren.

Cada estudiante tiene un tren, se ubican las cartas boca abajo y la carta 10 boca arriba en el centro de la mesa. La cantidad en la carta indica los personajes. Los estudiantes deben ubicar en cada vagón del tren 10 personajes y solamente diez personajes.

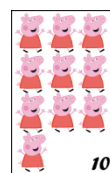


Cada estudiante da la vuelta a una carta, si esa carta contiene la cantidad 10 se la lleva y la pone como vagón en el tren, si no la deja boca arriba sobre la mesa. Los estudiantes pueden sumar el número que obtuvieron en la carta con otro número de una carta que esté boca arriba sobre la mesa para obtener la cantidad 10, en ese caso, tomará las dos cartas y las pondrán en un vagón en el tren

Gana el jugador que haya formado más grupos de diez.



La investigadora le entrega al estudiante un mazo de cartas españolas modificadas con las imágenes de Pepa Pig, y la imagen del tren. Se ubican las cartas boca abajo y la carta 10 boca arriba en el centro de la mesa. La cantidad en la carta indica los personajes. El estudiante debe ubicar en cada vagón del tren 10 personajes y solamente diez personajes.



El estudiante escoge una carta del mazo y le da la vuelta, si esa carta contiene la cantidad 10 se la lleva y la pone como vagón en el tren, si no, la deja boca arriba sobre la mesa. El estudiante puede sumar

Capítulo 3. El Sistema de Numeración Decimal en Transición

d. Durante el juego, la docente le pregunta a uno de los estudiantes lo siguiente: e. ¿Qué número sacaste en la carta? f. ¿Ese número es mayor que diez? ¿Por qué? g. ¿Ese número es menor que diez? ¿Por qué? h. ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez? El literal a, b y c se pueden realizar en cualquier momento del juego, y el literal d cuando el puntaje obtenido en la carta sea menor a diez. e. Al terminar el juego, la docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de grupos de diez que formaron en la siguiente tabla y que determinen las posiciones en que quedaron, teniendo en cuenta que el jugador que haya obtenido la mayor cantidad de grupos de diez es el primero. <table><tr><th>Jugador</th><th>Cantidad de grupos de diez</th><th>Orden</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr></table> f. ¿Quién quedó de primero? g. ¿Quién quedó de tercero? h. ¿Cuántas Pepa Pigs tiene el tren del jugador 1 en total?	Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden	1			2			3			4			el número que obtuvo en la carta con otro número de una carta que este boca arriba sobre la mesa para obtener la cantidad 10, en ese caso, tomará las dos cartas y las pondrán en un vagón en el tren  Durante el juego de Pepa Pig, la investigadora le pregunta al estudiante lo siguiente: ¿Qué número sacaste en la carta? ¿Ese número es mayor o menor que diez? ¿Por qué? ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez?
Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden														
1																
2																
3																
4																
situación 3: la tienda y la agrupación Tarea 1: La tienda de Pipe Para realizar esta tarea se requiere de 400 bananas, 24 bolsas y un títere. Los estudiantes se organizan en grupos de 3 o 4. La docente da a conocer la siguiente la siguiente situación: Pipe el títere tiene una tienda de bananas, a él le puedes pedir las bananas que quieras. Pero Pipe tiene un problema, solo puede contar hasta 10, así que cuando alguien va a la tienda de Pipe a pedir bananas solo pueden utilizar los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, porque son los números que Pipe conoce. 3. La docente le entrega a cada grupo un número. El grupo debe escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número. El mensaje sólo puede tener los números que Pipe el títere entiende. Al final los estudiantes deben meter todos los dulces en la bolsa. Este ejercicio se realiza con los siguientes números: d. 12 b. 26 c. 42 4. La docente da a conocer la siguiente situación: Pipe el títere debe ponerle un precio a las bolsas de dulces que se han formado: 12 dulces, 26 dulces, 45 dulces. Pero los precios son muy altos y Pipe no los entiende, porque solo puede contar hasta 10. Ayúdale a Pipe a ponerle los precios a las bolsas de bananas. Los precios son los siguientes: 1.300 600 2.100 Mientras realizan la tarea, la profesora pregunta: g. ¿Cuál es el mayor precio? ¿Por qué? h. ¿Cuál es el menor precio? ¿Por qué? i. Indica la razón por la que el precio corresponde a la bolsa de bananas	La investigadora le entrega al estudiante un número. El estudiante debe escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número. El mensaje sólo puede tener los números que Pipe el títere entiende (1-10). Al final el estudiante debe meter todos los dulces en la bolsa. Este ejercicio se realiza con los siguientes números: a. 12 b. 26															
Tarea 2: Juego de las Monedas Se juega en equipos de 3 o 4 personas. Para realizar el juego se requiere que cada equipo tenga dos dados convencionales, 80 monedas de \$ 1, 90 monedas de \$ 10, 90 monedas de \$100 y 10 monedas de \$1.000 cada grupo de monedas deben estar organizadas en una bolsa aparte. Cada grupo escoge un integrante de su equipo para que sea el banquero, es	Para realizar el juego se requiere de dos dados convencionales, 30 monedas de \$ 1, 40 monedas de \$ 10, 40 monedas de \$100 y 5 monedas de \$1.000 cada grupo de monedas deben estar organizadas en															

Una Aproximación a la construcción del Sistema de Numeración Decimal en Transición

decir, la persona encargada de hacer los cambios de monedas, el banquero va a tener solamente 10 monedas de \$10, 10 monedas de \$100 y 10 monedas de \$1.000. El resto de monedas (80 monedas de \$ 1, 80 monedas de \$ 10 y 80 monedas de \$100) se ubican en la mitad de la mesa para empezar el juego.

Cada estudiante del grupo (excepto el banquero) tira los dados y toma la cantidad de monedas que se le indican. En las dos primeras rondas van a tomar monedas de un peso, en la tercera y cuarta ronda van a tomar monedas de \$ 10, y en la quinta y sexta ronda van a tomar monedas de \$ 100, según la cantidad que aparece en el dado.

Después de obtener las monedas, cada grupo puede hacer cambios con el banquero, siguiendo las siguientes reglas:

- 10 monedas de 1 peso se pueden cambiar por una moneda de 10 pesos.
- 10 monedas de 10 pesos se pueden cambiar por una moneda de 100 pesos.
- 10 monedas de 100 pesos se pueden cambiar por una moneda de 1.000 pesos.

5. Mientras se realiza el juego, la investigadora le pregunta a por lo menos dos de los estudiantes del grupo:

a. ¿Cuántas monedas de un peso tienes? b. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué?

c. ¿Cuántas monedas de 10 pesos tienes? d. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué?

e. ¿Cuántas monedas de 100 pesos tienes? f. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué?

6. La docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de monedas y billetes de cada integrante del grupo en la siguiente tabla:

Cantidad Estudiante	Monedas de 1.000 pesos	Monedas de 100 pesos	Monedas de 10 pesos	Monedas de 1 peso
1				
2				
3				
4				

7. La docente le dice a los estudiantes que observen los puntajes que han registrado en la tabla y respondan las siguientes preguntas:

- g. Si en una casilla hace falta realizar una conversión de monedas, se plantea la siguiente pregunta ¿Esta cantidad de monedas no la podrías haber cambiado por otra moneda?
- h. Teniendo en cuenta la cantidad de monedas de 1.000 pesos que tiene el estudiante 2 indica ¿Cuántas monedas de 100 pesos necesitas para cambiar esa cantidad?
- i. Indica el dinero que tienes en total

una bolsa aparte.

Un estudiante va a ser el banquero, es decir, la persona encargada de hacer los cambios de monedas, el banquero va a tener solamente 10 monedas de \$10, 10 monedas de \$100 y 5 monedas de \$1.000. El resto de monedas (30 monedas de \$ 1, 30 monedas de \$ 10 y 30 monedas de \$100) se ubican en la mitad de la mesa para empezar el juego.

El otro estudiante tira los dados y toma la cantidad de monedas que se le indican. En las dos primeras rondas van a tomar monedas de un peso, en la tercera y cuarta ronda van a tomar monedas de \$ 10, y en la quinta y sexta ronda van a tomar monedas de \$ 100, según la cantidad que aparece en el dado.

Después de obtener las monedas, el estudiante puede hacer cambios con el banquero, siguiendo las siguientes reglas:

- 10 monedas de 1 peso se pueden cambiar por una moneda de 10 pesos.
- 10 monedas de 10 pesos se pueden cambiar por una moneda de 100 pesos.
- 10 monedas de 100 pesos se pueden cambiar por una moneda de 1.000 pesos.

Mientras se realiza el juego de los cambios, la investigadora le pregunta al estudiante:

- a. ¿Cuántas monedas de \$1/\$10/\$100 tienes?
- b. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad?
- c. ¿Cuánto dinero tienes en total?

Tarea 3: La Separata de ofertas

La docente le entrega a cada estudiante un catálogo de ventas con los siguientes productos y sus precios respectivos:



2. La docente le plantea a los estudiantes organizados en parejas las siguientes situaciones:

- b. Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el



2.500



1.800

La investigadora entrega al estudiante 13 monedas de \$100 y le indica que deben pegar frente a cada producto las monedas necesarias y sólo las necesarias, ni más ni menos, para comprar el producto

Capítulo 3. El Sistema de Numeración Decimal en Transición

producto más costoso. ¿Por qué es el más costoso?

c. Entre la chokolatina y la Pony malta, encierra en un círculo el producto más costoso ¿Por qué es el más costoso?




1.100
1.800

3. La docente entrega a las parejas algunas monedas y los estudiantes deben escoger las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el producto que se le indica

Productos	Monedas que entrega la profesora	Productos	Monedas que entrega la profesora	Productos	Monedas que entrega la profesora
 100	9 de 10 pesos 15 de 1 peso	 700	6 de 100 pesos 13 de 10 pesos	 1.100	13 de 100 pesos

La docente le indica a los estudiantes que deben pegar frente a cada producto las monedas necesarias y solo las necesarias, ni más ni menos, para comprar el producto

Productos	Monedas
 100	
 700	
 1.100	

Productos	Monedas
 1.100	

La entrevista tienen en cuenta las preguntas de cada situación. Así pues, se diseña la Entrevista teniendo en cuenta la propuesta de aula (Ver anexo 25: Protocolo de entrevista).

La Entrevista se realiza con el propósito de identificar las actuaciones de los estudiantes al enfrentarse con problemas que movilicen el concepto de cardinalidad a través de la correspondencia uno a uno y la secuencia numérica verbal; la ordinalidad a través de la secuencia numérica verbal, la posición de un objeto en una secuencia ordenada y las relaciones de orden en contextos cardinales; y la agrupación de diez, a través de los cambios de unidades de diferente orden, la composición y descomposición de cantidades.

Las preguntas en la entrevista se escogen porque trabajan conceptos matemáticas fundamentales del CNN y el SND, los cuales se presentan a continuación:

Tabla 36

Entrevista y conceptos matemáticos involucrados

Entrevista	Conceptos matemáticos involucrados
Situación 1	
Cada estudiante juega “cincuenta fichas”	○ Correspondencia uno a uno
Durante el juego al estudiante se les pregunta:	○ Secuencia numérica verbal
a. ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados?	○ Cardinal
b. ¿Cuánto te falta para ganar?	○ conteo

Usando las fichas del juego realiza una colección que tenga

- a) 3 fichas b) 4 fichas c) 10 fichas

- Cardinal 3, 4 y 10
- Correspondencia uno a uno
- Conteo

De manera individual se registra en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados.

TURNO	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

- Cardinal
- Representación de la cantidad (simbólica o pictórica)
- Cardinal 10
- Composición del 10

- c. Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos
- d. Completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total



Situación 2

La investigadora le muestra al estudiante un tren con diez vagones, cada vagón con un personaje de la serie “Pepa”.

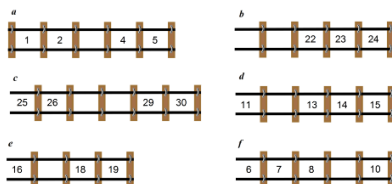


El estudiante responde a las siguientes preguntas

- c. ¿En qué posición esta Emily la Elefante?
- d. Teniendo en cuenta la organización del tren. La investigadora le indica al estudiante que escoja uno de los personajes, el que más le llame la atención y escriba un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren.

- Posición de un objeto en una secuencia ordenada.
- Ordinalidad
- Términos ordinales

La investigadora le entrega al estudiante los rieles del tren cortados en seis trozos como se muestra a



continuación y la ficha con los números 12 y 21, la ficha tiene un adhesivo para que el estudiante pueda

- Posición de un número en la secuencia numérica notacional.
- Ordinal
- Identificación de representaciones simbólicas notacionales

Capítulo 3. El Sistema de Numeración Decimal en Transición

ponerlo en el espacio correspondiente. El estudiante completa los rieles del tren con los números correspondientes. Mientras tanto la investigadora pregunta:

- ¿En qué posición se debe colocar el número 12?
¿Por qué?
- ¿En qué posición se debe colocar el número 21?
¿Por qué?

Durante el juego de Pepa Pig, la investigadora le pregunta al estudiante lo siguiente:

- ¿Qué número sacaste en la carta?
- ¿Ese número es mayor o menor que diez? ¿Por qué?
- ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez?

- Relaciones de orden en contextos cardinales
- Mayor que
- Menor que
- Identificación de representaciones simbólicas notacionales
- Conteo

○ Situación 3

La investigadora le entrega al estudiante un número. El estudiante debe escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número. El mensaje sólo puede tener los números que Pipe el títere entiende (1-10). Al final el estudiante debe meter todos los dulces en la bolsa. Este ejercicio se realiza con los siguientes números:

b. 12 b.26

Mientras se realiza el juego de los cambios, la investigadora le pregunta al estudiante:

- ¿Cuántas monedas de \$1/\$10/\$100 tienes?
- ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad?
- ¿Cuánto dinero tienes en total?

- Descomposición del número en grupos de diez
- Identificación de representaciones simbólicas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
- Cardinal
- Conteo
- Secuencia numérica verbal

La investigadora entrega al estudiante 13 monedas de \$100 y le indica que deben pegar frente a cada producto las monedas necesarias y sólo las necesarias, ni más ni menos, para comprar el producto

Productos	Monedas
 1.100	

- Agrupaciones de diez
- Cambios de unidades de orden inferior a unidades de orden superior
- Identificación de representaciones simbólicas (1, 10, 100, 1.000)
- Conteo
- Secuencia numérica verbal
- Agrupación de 10 unidades de orden inferior a una unidad de orden superior
- Reconocimiento de la notación 1.100
- Conteo de cien en cien

A continuación se describe de forma breve, la razón por la cual se conduce a eliminar algunas preguntas para la entrevista (Ver de manera detallada Anexo 24: Preguntas para la entrevista)

Las preguntas S1, T1, P1, Lb y Lc; S1, T3, P2, La, Lb y Lc; S2, T3, P2, La, Lb y Lc, no se pueden realizar en la entrevista, pues la entrevista es de carácter individual y las preguntas están direccionadas a hacer comparaciones o a ordenar resultados de los participantes.

Las preguntas S1, T2, P1, La; S2, T1, Lb y Lc; S2, T2, P1, La; S2, T2, P2; S2, T2, P3, La y Lb; S3, T1, P2; S3, T2, P2; S3, T2, P3, La; no se realizan en la entrevista puesto que como se mencionó anteriormente se van a tener en cuenta las preguntas en las que los estudiantes E1 y E7, obtuvieron respuestas incorrectas o aquellas que manejan conceptos matemáticos fundamentales del CNN y el SND. Las preguntas S2, T2, P3, Lc; y S3, T2, P3, Lb, se eliminan pues ninguno de los estudiantes tuvo éxito al responderla.

Finalmente S1, T1, P2, no se realiza pues los conceptos matemáticos se trabajan también con la S1, T1, P1; además la S1, T1, P3 no se trabaja porque requiere de que el docente intervenga y reconstruya el problema. La pregunta S1, T2, P3, no se escoge puesto que los estudiantes pueden identificar la carta correcta aún sin realizar un conteo correcto de las mismas.

3.4 Sobre el Estudio de Casos

A continuación se presenta los resultados y el análisis de la entrevista realizada a los estudiantes E7 y E10 (Ver anexo 26: Transcripción de entrevistas). La entrevista se realiza con el estudiante E7 en tres espacios de tiempo para evitar que sienta cansancio al resolver las preguntas. La situación 1 se realizan al inicio de la jornada (E7: 15 minutos y E10: 11 minutos); la situación 2 se realizan en la mitad de la jornada (E7:13 minutos y E10: 13 minutos) y la situación 3 se realizan al finalizar la jornada (E7: 19 minutos y E10: 19 minutos).

3.4.1 Estudiante 7, Situación 1. Al responder a la pregunta ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados? el estudiante le asigna a cada punto del dado una etiqueta siguiendo la secuencia numérica verbal convencional; lo cual indica que utiliza la correspondencia uno a uno y el principio de orden estable; aunque en ocasiones es descuidado en su ejecución, por ello necesita la intervención de la investigadora para volver a contar y dar una respuesta correcta,

Sin embargo, aunque el estudiante utiliza el conteo siguiendo la correspondencia uno a uno y la secuencia numérica verbal no lo usa para determinar el cardinal de la colección.

E7: (lanza los dados, obtiene en el primer dado 5 puntos y en el segundo dado 2 puntos). I: ¿Cuánto sacaste? E7: (señala uno a uno los puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. I: Bueno entonces coloca las fichas en la tabla. E7: (toma una a una diez fichas y las coloca en cada casilla del tablero del juego mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. I: Pero sacaste 7. E7: Retira una ficha.	E7: (lanza los dados y obtiene en el primer dado 2 puntos y en el segundo dado 8 puntos). I: ¿Cuánto sacaste? E7: (señala uno a uno nueve puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. I: Vamos a contarlos otra vez, despacito. E7: (señala uno a uno los diez puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. E7: (toma una a una diez fichas y las coloca en el tablero mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.
--	---

Para responder a la pregunta ¿Cuánto te falta para ganar? El estudiante señala las casillas vacías con el dedo y le asigna a cada casilla contada una palabra número de la secuencia numérica verbal; sin embargo, vuelve a contar casillas que ya había contado.

I: ¿Cuánto te falta para ganar?

E7: (señala una a una las siete casillas vacías de la tabla mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete (señala dos casillas que ya había señalado y dice) ocho, nueve.

La intervención de la Investigadora para que el estudiante vuelva a contar las casillas fue fundamental para que el estudiante pudiera responder a la pregunta correctamente

I: Cuéntalos otra vez.

E7: (Señala una a una las siete casillas vacías de la tabla mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: ¡Bien!

Al momento de registrar el puntaje obtenido al lanzar los dados, el estudiante realiza la notación simbólica que aparece en la parte izquierda de la tabla; es decir, en el primer turno escribe el 1 aunque ha obtenido diez al lanzar los dados, en el segundo turno escribe el 2 aunque ha obtenido once al

TURNO	PUNTAJE
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

lanzar los dados, y así sucesivamente. Cuando la profesora le pide que represente la cantidad obtenida por medio de puntos, el

estudiante le asigna a cada punto dibujado una palabra siguiendo la secuencia numérica verbal, pero la cantidad total de puntos no corresponde a la cantidad total de puntos en los dados. El estudiante trata de representar la cantidad obtenida utilizando las representaciones simbólicas aunque estas no indiquen el cardinal de la colección.

Ilustración 40. Entrevista E7, Pregunta 2

I: Vas a escribir aquí once (Señala la casilla del segundo turno de la tabla en la ficha). E7: (escribe 2). I: ¿Ese es el once? E7: Sí. I: ¿Puedes dibujar once puntos? E7: (dibuja seis puntos, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. I: ¿Ya hay once? E7: Sí.	E7: (señala uno a uno los diez puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. I: Vas a escribir aquí diez (señala la casilla del quinto turno en la tabla de la ficha). E7: (escribe el 5 y dibuja siete puntos mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.
---	---

Al momento de colorear en la tabla los puntajes en los que ha obtenido diez puntos, como al estudiante se le dificultó registrar correctamente los puntajes en la tabla, no reconoce las dos veces en las que ha obtenido diez puntos.

I: (retira el juego y le muestra la tabla de la ficha al estudiante) ¿Tú me puedes mostrar un puntaje en el que hayas obtenido diez?

E7: (señala la séptima casilla de la tabla en la ficha, vacía).

I: Pero aquí no hay nada.

E7: (señala el puntaje del sexto turno, luego señala el puntaje del quinto turno).

I: ¿Sabes en donde sacaste diez puntos?

E7: No sé.

Al momento de completar los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total. Al estudiante se le dificulta componer el diez, aunque realiza el conteo de los puntos correctamente, al parecer no comprende que al realizar el conteo la palabra número asignada el último elemento de la colección representa el cardinal de la misma

I: ¡Bueno!, ahora (señala los dados de la ficha) vas a completar los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez en total. Mira vamos a contar los puntos del primer dado: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (mientras cuenta señala uno a uno los puntos de la cara del dado de la derecha con el lápiz).

E7: (dibuja seis puntos en la cara del dado de la izquierda mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Vamos a contarlos los dos (I señala los 12 puntos de los dados y mientras E7 dice):

E7: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce.

I: ¿Hay diez?

E7: No.

I: ¿Qué hacemos para que haya diez?

E7: Falta un punto (hace un punto en la cara del dado de la izquierda).

I: Vamos a contarlos los dos (I señala los 13 puntos de los dados y mientras E7 dice):

E7: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

I: ¿Qué hacemos para que haya diez?

E7: No sé

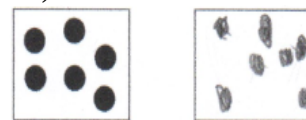


Ilustración 41. Entrevista E7, Pregunta 4

Con relación a la última pregunta, el estudiante puede formar la colección de tres fichas cuando la investigadora le pide que realice el conteo. En este caso, al parecer el estudiante es consciente de la relación entre el conteo y el cardinal de la colección.

I: Esteban ¿Puedes mostrarme 3 fichas?

E7: (toma cuatro fichas y las pone sobre la mesa).

Capítulo 3. El Sistema de Numeración Decimal en Transición

I: Cuéntalas para estar seguro.

E7: (con el dedo señala una a una las fichas mientras dice) Uno, dos, tres (quita la ficha de más).

Al estudiante se le dificulta formar la colección de seis fichas o diez fichas. En el primer caso, al momento de realizar el conteo le asigna a dos o más fichas una misma palabra número, además la secuencia numérica verbal no es convencional. Lo anterior da a entender que en este caso el estudiante se le dificulta seguir la correspondencia uno a uno y el principio de orden estable al realizar el conteo.

I: ¡Muy bien Esteban! (quita las tres fichas). Ahora ¿puedes mostrarme 6 fichas? E7: (toma una a una 11 fichas mientras dice) Uno, dos, ocho, trece, quince, catorce, quince, diez y seis, cuatro. I: Puedes contar para estar seguro. E7: (señala con el dedo índice las 11 fichas de la colección mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once. I: ¿Ya hay 6 fichas? E7: No. I: ¿Qué hacemos para que haya seis fichas? E7: No sé.	I: Ok. Ahora vamos a formar una colección de diez fichas. E7: (toma una a una las diez fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. I: ¿Ya hay diez fichas? E7: (retira cuatro fichas, señala una a una las seis fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis I: ¿Ya hay diez fichas? E7: no I: ¿Qué debemos hacer? E7: No sé.
--	---

Con la intervención de la investigadora, al decirle que realice de nuevo el conteo, el estudiante le asigna a cada ficha la palabra número atendiendo a la secuencia numérica convencional, es decir, realiza el conteo siguiendo la correspondencia uno a uno y el principio de orden estable, pero no forma la colección de seis fichas. Al formar la colección de diez fichas la docente le muestra que debe continuar contando hasta llegar a 10 y el estudiante logra realizar la colección de diez fichas.

I: mira Esteban vamos a contar (señala una a una las seis fichas mientras dice) uno,

E7: dos (I señala la segunda ficha), tres (I señala la tercera ficha), cuatro (señala la cuarta ficha), cinco (señala la quinta ficha), seis (señala la sexta ficha)

I: siete (agrega una ficha)

E7: siete

I: (agrega otra ficha)

E7: ocho

I: (agrega otra ficha)

E7: nueve

I: (agrega otra ficha)

E7: diez

I: Vez como llegamos hasta diez, ya tienes diez fichas. Ahora tu solito (recoge las diez fichas)

E7: (toma una a una las diez fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Ya tienes diez?

E7: si

Así, al mostrarle al estudiante la relación entre el conteo y la cardinalidad de la colección el estudiante puede formar la colección de diez fichas

3.4.2 Estudiante 10, situación 1. Al responder a la pregunta ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados? el estudiante señala uno a uno los puntos de los dados, mueve los labios y dice la palabra número que representa el cardinal de la colección. Al momento de colocar las fichas en el tablero, toma una a una las fichas mientras mueve los labios y coloca en el tablero la cantidad de fichas correspondiente a la cantidad obtenida en los dados.

E10: (lanza los dados, en el primer dado obtiene seis puntos y en el segundo dado siete puntos). I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados? E10: (señala uno a uno los puntos de los dados, mientras mueve los labios) Trece. I: ¿Coloca las fichas en el tablero! E10: (toma una a una las trece fichas mientras mueve los labios y las coloca a un lado; luego, toma una a una las trece fichas y las coloca en el tablero).	E10: (lanza los dados, en el primer dado obtiene tres puntos en el segundo dado cero puntos). I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados? E10: (toca el dado de 3 puntos) Tres. I: ¿Tres? E10: Y el otro no está. I: Y cómo se llama “el no está”. E10: Cero. I: Coloca tres fichas. E10: (toma 3 fichas de la bolsa y las pone en el tablero) Las tres fichas son fáciles.
---	---

El estudiante también asocia la palabra número cero con la ausencia de puntos. Debido a que el estudiante no realiza un señalamiento de los puntos de la cara del dado que tiene tres puntos, se podría inferir que el estudiante determina el cardinal de la colección por subitización.

Para responder a la pregunta ¿Cuánto te falta para ganar? El estudiante señala cada una de las casillas vacías del tablero y le asigna a cada casilla una palabra número siguiendo la secuencia numérica verbal. La última palabra dicha en tono de voz más alto, representa el cardinal de la colección.

I: ¿Cuánto te falta para ganar?

E10: (señala uno a uno las casillas vacías del tablero mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco (la última palabra en el tono de voz más alto)

Al momento de registrar en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados, el estudiante utiliza notaciones simbólicas (notación convencional y notación en espejo) cada notación representa el cardinal de la colección.

E10: (lanza los dados, obtiene en el primer dado cinco y en el segundo dado tres).

I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados?

E10: (señala uno a uno los puntos de los dados, mueve los labios y dice) Ocho.

I: Escribe aquí ocho (señala la casilla del segundo turno).

E10: (escribe 8).

TURNO	PUNTAJE
1	13
2	8
3	3
4	27
5	7
6	8

Ilustración 42. Entrevista E10, Pregunta 2

Al momento de colorear en la tabla los puntajes en los que ha obtenido diez puntos, el estudiante observa la tabla y se da cuenta que en ningún turno obtuvo diez.

I: Bueno Nicol, ahora vamos a ver la tabla que está aquí (señala la tabla del punto 3) ¿En qué turno obtuviste 10?

E10: (mira a la investigadora).

I: ¿En alguno de estos puntajes obtuviste diez?

E10: No.

Al momento de completar los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total, el estudiante dibuja inicialmente seis puntos y utiliza el conteo para rectificar que hay diez puntos en total.

I: Listo vamos a hacer el otro ejercicio, estas son las caras de dos dados, vas a completar la cara de este dado (cara del dado en blanco), para que en total nos de diez. Vamos a contar cuántos puntos hay en el primer dado (señala los puntos del primer dado).

E10: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Aquí hay seis, cuánto nos falta para haya diez en total.

E10: Seis más.

I: ¿Seis más? Coloca seis más.

E10: (Dibuja seis puntos mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: ¿Ya hay diez?

E10: (con el lápiz, señala uno a uno los puntos de los dos dados, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. Me falta borrar este (borra dos puntos).

I: Ya hay diez.

E10: Sí.

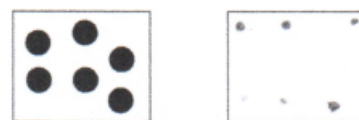


Ilustración 43. Entrevista E10, Pregunta 4

El estudiante utiliza el conteo para componer el diez; al parecer comprende que al realizar el conteo la palabra número asignada al último elemento de la colección representa el cardinal de la misma, por eso cuando dice diez y señala el décimo punto, borra los puntos que coloca de más.

El estudiante forma la colección de tres fichas sin decir la secuencia numérica verbal y sin señalar una a una las fichas.

I: ¡Muy bien Nicol!, ahora te voy a pedir con las fichas que hay aquí (fichas del juego “cincuenta fichas”) que me formes una colección de tres fichas.

E10: ¿Tres fichas?

I: Tres fichas solamente.

E10: (toma tres fichas y las pone una encima de otra)

El estudiante forma las colecciones de seis fichas y de diez fichas utilizando el conteo, cada vez que toma una ficha dice una palabra número siguiendo la secuencia numérica convencional. Cuando dice la palabra número seis o diez; deja de tomar fichas y dice que ha formado la colección respectiva.

I: ¡Muy bien Nicole! ¿Puedes mostrarme seis fichas?

E10: (toma una a una las seis fichas y las

I: ¡Muy bien Nicole! ¿Puedes mostrarme diez fichas?

E10: (toma una a una las 10 fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez,

acomoda una encima de otra mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis fichas. I: ¿Ya hay seis fichas? E10: Si	(acomoda las 10 fichas, una encima de otra). I: ¿Ya hay diez fichas? E10: Si
--	--

3.4.3 Estudio de casos, situación 1. Para realizar el conteo el estudiante E7 procede a señalar cada objeto (puntos, casillas, fichas) y le asigna a cada uno, una palabra número siguiendo la secuencia numérica convencional. Lo mismo sucede cuando forma una colección. Sin embargo, al estudiante se le dificulta formar colecciones que representen cardinales superiores a tres. De modo que, aunque E7 usa la correspondencia uno a uno y la secuencia numérica verbal en el conteo, esto no garantiza comprensión del cardinal de la colección (Wynn, 1992).

Por otro lado, E10 al utilizar el conteo realiza los siguientes procedimientos; señala uno a uno los objetos (puntos, fichas, casillas) mientras mueve los labios y dice la palabra número que representa el cardinal de la colección, o señala uno a uno los objetos (casillas, fichas, puntos) y le asigna a cada uno una palabra número siguiendo la secuencia numérica convencional, la última palabra la dice en un tono de voz más alto (Fuson, 1998); estos procedimientos le permiten al estudiante formar colecciones y totalizar cantidades. De modo que, E10 usa la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal en el orden convencional y comprende el cardinal de la colección. Además, cuando va a contar colecciones menores o iguales a tres observa la colección y dice la palabra número que representa el cardinal, aparentemente realiza un conteo súbito de las cantidades (Chamorro, 2005). Incluso reconoce la palabra número “cero” y la asocia con la ausencia de puntos en la cara del dado. La comprensión del cardinal y la comprensión del cero, son parte importante en la comprensión del SND.

Para representar la cantidad obtenida en los dados el estudiante E7 realiza representaciones simbólicas de dimensión 1 (Zhang y Norman, 1993) mientras dice la secuencia numérica verbal convencional, pero estos símbolos no representan el cardinal de la colección. Mientras que E10 para representar la cantidad usa las representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas) y como SMS las notaciones en espejo. Lo que quiere decir que la estudiante E10 se acerca al proceso de simbolización para representar una cantidad, aspecto importante en la comprensión del SND.

Como procedimiento para componer el diez ambos estudiantes cuentan los puntos del primer dado y dibujan la misma cantidad de puntos en el segundo dado; sin embargo, E7 cuenta la totalidad de puntos en los dados pero se le dificulta componer el diez, aparentemente no reconoce que el último número dicho en la secuencia numérica verbal representa el cardinal de la colección (Anaconda, et al. 1998). Mientras que E10 al contar que hay doce puntos al totalizar las cantidades en los dados, comienza a borrar los puntos que sobran hasta obtener diez en total. Reconocer que se deben quitar puntos requiere que el estudiante identifique cuando una cantidad es mayor a diez. Debido a que el estudiante usa el conteo hasta llegar a diez y borra el resto de puntos, da a conocer que comprende que cada numeral n en la lista numérica verbal se refiere a una colección del cardinal n (Le Corre y Carey, 2007; Ortiz, 2014).

En el conteo E7 presenta dificultades de correspondencia (partición), de secuencia numérica verbal y de cardinalidad, lo cual incide en el procedimiento del conteo (Gelman, 1978). La labor de la investigadora al pedirle al estudiante que realicen el conteo nuevamente y despacio permite que el estudiante pueda contar los elementos. Además, cuando la investigadora le explica el vínculo entre la secuencia numérica y el cardinal de la colección, el estudiante logra hacer la colección que representa el cardinal 10.

3.4.4 Estudiante 7, Situación 2. Al estudiante se le presenta la ilustración del tren de Pepa (ver ilustración 25) en la ficha. Cuando se le pregunta por la posición en la que está Emily la Elefante, el estudiante dice una palabra que no se puede identificar, tal vez no conoce los términos ordinales y trata de inventar una palabra para denotar la posición del personaje en el tren.

I: Emily ¿me puedes señalar cuál es Emily?

E7: (señala a Danny Perro).

I: La elefanta.

E7: (señala a Emily la Elefanta).

I: ¿En qué posición esta?

E7: En el tete.

I: ¿En qué posición esta?

E7: En el tete.

I: ¿podrías repetir otra vez?

E7: En el tete.

La investigadora interviene señalando cada personaje y diciendo su respectivo término ordinal; sin embargo, el estudiante trata de decir otra palabra; al final, no dice la posición correcta en la que se encuentra Emily Elefanta

I: Vamos a ver (señala uno a uno los personajes en el tren mientras dice) primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, décimo. Entonces, Emily Elefante ¿en qué posición está?

E7: En sé.

I: ¿En qué?

E7: En setu.

I: ¿En segundo?

E7: Segundo.

Cuando la investigadora le indica al estudiante que escoja uno de los personajes, el que más le llame la atención y escriba un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren, el estudiante escoge a Pedro Pony e indica correctamente que es el primero, aunque no realiza ningún símbolo para representar el primero

I: ¡Bueno Esteban! Resulta que ahora, vas a escoger uno de los personajes, el que más te llame la atención y vas a escribir un mensaje para que yo pueda conocer la ubicación del personaje en el tren. El dibujo lo debes hacer en el rectángulo.

E7: (el estudiante realiza un dibujo) ¡Ya!

I: ¿Listo? ¿A quién dibujaste?

E7: ¡A Pedro!

I: Cuál es la posición.

E7: Primero.



Ilustración 44. Entrevista E7, Pregunta 6

La investigadora le entrega al estudiante los rieles del tren y las fichas con los números 12 y 21. Cuando la investigadora le pregunta al estudiante ¿En qué posición se debe colocar el número 12? Y ¿En qué posición se debe colocar el número 21? El estudiante coloca los números en un lugar incorrecto

E7: (toma el 12 y lo coloca después del 8, los rieles quedan así: 6, 7, 8, **12**, 10 y el 21 lo coloca después del 11, el riel queda con los siguientes números 11, **21**, 13, 14, 15).

El número 21 lo coloca en esa posición seguramente porque lo confunde con el 12 y el 12 lo coloca en esa posición seguramente porque observa que el 10 tiene dos dígitos al igual que el doce; sin embargo, cuando la investigadora le pregunta por qué el doce va ahí, el estudiante cambia de opinión, despegó el 21 del riel (11, 21, 13, 14) y en su lugar pega el doce (11, 12, 13, 14); y el número 21 lo pega en la posición correcta.

Cuando la investigadora le pregunta sobre la razón por la que coloca los números en esos lugares el estudiante da a conocer que los números son iguales, seguramente se refiere a

las características de los números en el riel (tienen dos dígitos y el dígito de la potencia mayor (10^2) en cada riel son iguales).

I: Y el 12 ¿por qué va aquí? (señala el 12 en el riel 6. 7. 8. 12. 10). E7: (retira el 12) Va allá (quita el 21 y pone el 12 en su lugar, el riel queda con los siguientes números 11, 12, 13, 14, 15). I: ¿por qué va ahí? E7: Porque este (señala el 12) es igual que estos (señala el 13, 14, 15). I: ¿Es igual que esos? ¿Cómo así que es igual que esos? ¿Tienen los mismos números? E7: ¡Sí! I: (toma solamente el riel con los números del 11 al 15) A ver ¿el 12 por qué va ahí? E7: Porque éste (señala el 12) y estos (señala los demás números) son iguales. I: ¿Cuáles números? Estos (señala el 1) o estos (señala el 3). E7: Todos.	I: ¿porque el 21 va ahí? E7: Porque tienen los mismos números. I: (toma solamente el riel con los números del 21 al 24) y éste de aquí (señala el 21) ¿por qué va aquí? E7: Porque son los mismos números.
---	--

La investigadora le recuerda al estudiante el juego de cartas de Pepa pig, cuándo le pregunta sobre ¿Qué número sacaste en la carta? Al estudiante se le dificulta identificar las representaciones simbólicas de la carta así que recurre al conteo, aunque en ocasiones realiza saltos en el conteo y debe volver a contar para estar seguro de la cantidad obtenida en la carta.

E7: Toma una carta del mazo (carta 6).

I: ¿Qué número sacaste en la carta?

E7: uno, dos, tres, cuatro cinco.

I: Vas a contarla otra vez.

E7: (señala una a una las Pepa Pigs, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Seis.

Al responder a la pregunta ¿Ese número es mayor o menor que diez? El estudiante observa la carta que ha sacado y la compara con la carta que tiene diez Pepas, el estudiante responde correctamente a la pregunta.

E7: (toma la carta 9 y señala los personajes mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

I: Nueve, ¿ese número es mayor o menor que diez?

E7: Mayor.

I: ¿Mayor que diez?

E7: Menor (coloca la carta nueve al lado de la carta diez)

I: ¿Y por qué menor?

E7: Porque le hace falta una pepa ahí (señala un espacio en blanco).

El estudiante al parecer utiliza la correspondencia uno a uno y se da cuenta que a la carta 9 le falta una pepa para ser igual a la carta 10 y por eso es menor.

Al responder a la pregunta ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez? El estudiante escoge dos cartas, cuando la investigadora le pide que cuente, el estudiante señala cada uno de los personajes en las dos cartas siguiendo

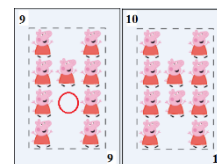


Ilustración 45. Entrevista E7, Pregunta 8

la secuencia numérica verbal convencional. En caso de decir la secuencia del uno al diez, el estudiante admite que ha obtenido diez en total.

I: ¿A este número (carta 1) le podrías sumar otro número para obtener diez?

E7: (junta dos cartas, la carta con 1 personaje y la carta con seis personajes).

I: ¿Con estas dos? A ver vamos a contarlas a ver si nos da diez.

E7: (señala uno a uno los personajes de las cartas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: ¿Dio diez?

E7: No.

I: Entonces ¿con qué otra carta puedes sumarla?

E7: (acerca la carta seis).

I: Pero si estos dos son iguales (señala las dos cartas con seis personajes).

E7: (acerca la carta nueve).

I: ¿Estas dos? Ok ¡vamos a contarlas!

E7: (señala uno a uno los personajes en las dos cartas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Te dio diez?

E7: Sí.

I: Bueno, pues vamos a ponerlas en un vagón del tren (toma las dos cartas y se las pasa a Esteban).

El estudiante reconoce cuando ha obtenido diez y cuando no.

3.4.5 Estudiante 10, Situación 2. Al estudiante se le presenta la ilustración del tren de Pepa (ver ilustración 25) en la ficha. Cuando se le pregunta por la posición en la que está Emily la Elefante, el estudiante dice correctamente que es la tercera

I: Tú me puedes decir ¿en qué posición esta Emily la Elefante?

E10: ¿Emily la elefante? (Señala a Emily en la ficha).

I: ¿Cómo se llama esa posición?

E10: (Señala los tres primeros personajes del tren mientras dice) primera, segunda, tercera, ¡es la tercera!

Cuando la investigadora le indica al estudiante que escoja uno de los personajes, el que más le llame la atención y escriba un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren, el estudiante dibuja a Wendy loba, escribe el 2 y la silaba “se” para representar el segundo.

E10: (dibuja a Wendy loba).

I: Listo ¿a quién escogiste? ¿A Dany Perro?

E10: ¡No! a Wendy loba.

I: Y ¿en qué posición esta?

E10: De segunda.

I: Puedes escribir de segunda.

E10: (escribe se).

I: ¿Cómo representamos el segundo?

E10: (escribe 2)



Ilustración 46. Entrevista E10, Pregunta 6

La investigadora le entrega al estudiante los rieles del tren cortados en seis y las fichas con los números 12 y 21. Cuando la investigadora pregunta ¿en qué posición se debe

colocar el número 21? El estudiante confunde el 21 con el doce, pero lo puede ubicar en el riel correcto y se justifica usando la secuencia numérica verbal en orden descendente

I: ¿Podrías ubicar el 12 y el 21 en las vías del tren?

E10: (toma el 12) El veintiuno va (lo pone en la posición del 21, los rieles quedan 12, 22, 23, 24).

I: ¿Ese es el veintiuno?

E10: (quita el 12 y pone el 21, los rieles quedan 21, 22, 23, 24).

I: ¿Por qué ese va ahí?

E10: Porque acá (señala con el dedo índice el 24) está el 24, el 23 (señala con el dedo índice el 23), el 22 (señala con el dedo índice el 22) y el 21 (señala con el dedo índice el 21).

Cuando la investigadora pregunta ¿en qué posición se debe colocar el número 12? El estudiante lo coloca en la posición correcta y se justifica usando la secuencia numérica verbal en orden descendente.

I: Y entonces éste (señala el 12) ¿dónde va?

E10: El 12 va (toma el carril con los números del 11 al 15 y pega el 12 después del 11).

I: ¿Y por qué el 12 va ahí?

E10: Porque aquí (señala con el dedo índice el 15) está el 15, el 14 (señala con el dedo índice el 14), el 13 (señala con el dedo índice el 13) y el 12 (señala con el dedo índice el 12).

El estudiante evidentemente reconoce las representaciones simbólicas, les asocia la palabra número correspondiente y reconoce la secuencia numérica en orden descendente.

La investigadora le recuerda al estudiante el juego de cartas de Pepa pig, cuándo le pregunta sobre ¿Qué número sacaste en la carta? El estudiante dice la palabra número correspondiente al símbolo presente en la carta.

I: ¡Toma una carta!	I: ¡Toma una carta!
E10: (toma la carta 6).	E10: (toma la carta 9).
I: ¿Qué número sacaste en la carta?	I: ¿Qué número sacaste en la carta?
E10: (observa la carta) Seis.	E10: (observa la carta) Nueve.

Al responder a la pregunta ¿Ese número es mayor o menor que diez? El estudiante observa la carta y dice si es mayor o menor. La respuesta del estudiante es correcta y justifica su respuesta haciendo referencia a la cantidad que representa tal número en comparación con la carta diez.

E10: (observa la carta) Seis.	E10: (observa la carta) Doce.
I: ¿Esa carta es mayor o menor que diez?	I: ¿Esa carta es mayor o menor que diez?
E10: Es menor	E10: Es mayor
I: ¿Por qué?	I: ¿Por qué?
E10: porque tiene más poquitas Pepas	E10: porque tiene más bastantes Pepas

El estudiante reconoce el significado de mayor y menor y las asocia a las frases “más bastantes” y “más poquitas” respectivamente.

Al responder a la pregunta ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez? El estudiante escoge cartas y realiza el conteo de los personajes para corroborar que tiene diez en total

I: ¿Qué número sacaste en la carta?

E10: (observa la carta) Nueve.

I: La puedes poner en el vagón.

E10: No.

I: ¿Ese número de ahí lo puedes sumar con otro para que dé diez?

E10: Con ésta (señala el 9).

I: Esas dos (señala las dos cartas con nueve personajes), contémoslas a ver.

E10: (señala una a una los personajes en las cartas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis, diez y siete, diez y ocho.

I: ¿Entonces?

E10: Con ésta (señala la carta del 1).

I: ¡Cuéntalas!

E10: (señala una a una los personajes en las cartas 1 y 9 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez.

El estudiante llena los cinco vagones del tren, las composiciones que realiza son: 9 y 1, 6 y 4, y 2 y 8.

3.4.6 Estudio de Casos, Situación 2. Para identificar la posición de un objeto en una secuencia ordenada, E10 usa como procedimiento señalar cada objeto de la secuencia y asignarle a cada uno el término ordinal correspondiente hasta llegar a Emily elefante; de manera que, E10 reconoce el significado de los términos ordinales y los usa en el contexto; es decir, comprende el número como ordinal (Castro et al., 1988). Mientras que E7 usa una palabra de carácter personal ("tete") para designar la posición de Emily, aunque la profesora le indica los términos ordinales en la secuencia de objetos (primero, segundo, etc.) E7 no los usa; al parecer está el proceso de adquisición de los términos ordinales, en el cual la comprensión del número como ordinal (MEN, 1998a) y la memorización de los términos tienen un papel importante (MEN, 1998b).

Además, a E7 se le dificulta representar simbólicamente la primera posición, pero si la identifica como "primera". Mientras que E10 trata de representar la segunda posición escribiendo el número 2 y la sílaba "se". Lo anterior da a entender que la situación problema permite que E10 se acerque al proceso de simbolización del número ordinal (Filloy et al. 2007).

Por otra parte, ambos estudiantes ubican el 12 y el 21 en el lugar correcto en la secuencia numérica. E7 procede a observar los números de los rieles y coloca los números 12 y 21 en el lugar correcto, el estudiante seguramente observa la similitud de los primeros

dígitos (12, 13) lo cual le permite ubicar los números en el lugar correcto; es decir, se aproxima a la comprensión del valor posicional el cual es parte importante en la comprensión del SND. A su vez, E10 procede a designar verbalmente las notaciones 12 y 21 y para ubicarlas dice la secuencia numérica verbal mientras señala las representaciones simbólicas en los rieles (ej.: catorce, trece, sigue el doce). El estudiante E10, reconoce las representaciones simbólicas propias del SND y usa la secuencia numérica verbal en un nivel bidireccional (Castro, et al. 1999) para completar la secuencia numérica.

A su vez, para identificar la cantidad de pepas en las cartas los estudiantes utilizan diferentes procedimientos. E7 realiza el conteo de los personajes en cada carta, en ocasiones tiene dificultades en la correspondencia uno a uno (Gelman, 1978) por lo cual debe volver a contar. Mientras que E10 dice la palabra número atendiendo al símbolo en la carta; Lo anterior indica que uno de los estudiantes usa el conteo para identificar el cardinal de la colección (lo cual representa un avance respecto a la entrevista anterior) y el otro estudiante asocia la notación indo-arábica con el cardinal de la colección. Incluso, para establecer relaciones de orden E7 compara las cantidades de la carta que ha obtenido con la carta de diez Personajes, al parecer usa la correspondencia uno a uno para comparar las colecciones y poder establecer si es mayor o menor a diez (Anaconda et al.1998). Mientras que E10 no necesita otra carta para realizar la comparación, el estudiante dice cuando una carta es mayor o menor atendiendo a la cantidad que representa el símbolo. Al parecer E10 establece relaciones de orden entre representaciones simbólicas.

Por último, ambos estudiantes pueden realizar la composición lo cual es importante para que el estudiante comprenda las propiedades numéricas (MEN, 1998a); sin embargo, los procedimientos que utilizan son distintitos; E7 presenta un avance, pues utiliza el conteo y reconoce cuándo ha obtenido diez al totalizar las cantidades de las dos cartas. Así mismo, E10 empieza contando las pepas en las cartas, pero también memoriza las composiciones para componer el 10, lo que le permite economizar el conteo de todos los personajes que se encuentran en cada carta. Hay que tener en cuenta que la memorización es parte importante en el desarrollo de la dimensión cognitiva (1998b)

3.4.7 Estudiante 7, situación 3. Al momento de realizar el mensaje para pedirle a Pipe el títere 12 bananas el estudiante escribe 2 y 2. La intervención de la profesora al pedirle al estudiante que cuente es muy importante para que él se dé cuenta que aún no ha obtenido doce en total.

E7: (escribe 2 y 2).

I: ¿Dos y dos da doce? Vamos a ver, pon dos y dos deditos.

E7: (pone dos deditos en la mano izquierda).

I: Y otros dos deditos (coge la mano derecha de E y le levanta dos deditos), vamos a contarlos (señala uno a uno los cuatro dedos levantados mientras E7 dice).

E7: Uno, dos, tres, cuatro.

I: ¿Ya dio doce?

E7: No.

Luego, el estudiante escribe el número 3 y representa con los dedos de las manos las cantidades dos, dos y tres; pero al contar todos los dedos se da cuenta que aún no ha obtenido doce en total. Así que escribe 4, la investigadora le ayuda a representar las cantidades usando sus manos, y al realizar el conteo el estudiante reconoce que aún no ha obtenido doce.

E7: El cuatro (escribe 4).

I: Listo, coloca dos deditos.

E7: (levanta dos dedos de la mano izquierda).

I: Otros dos.

E7: (levanta dos dedos de la mano derecha).

I: Yo voy a colocar tres (levanta tres dedos de la mano izquierda) y cuatro (levanta dos cuatro dedos de la mano derecha). Cuéntalos todos a ver si ya da (señala uno a uno los dedos levantados mientras E7 dice).

E7: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once.

I: Once, ya casi ¿ya tenemos 12?

E7: Todavía no.

I: ¿Qué número hay que colocar si ya vamos en 11?

E7: Falta el gordito.

I: ¿Falta poner otro dedito? ¿Y cómo representamos otro dedito?

E7: (escribe "6").

I: Pero ese es el seis, nos da mucho más, con esos números no hemos podido formar el doce ¿cómo representamos otro dedito?

E7: No sé.

El estudiante identifica que le falta un dedo para componer el 12; sin embargo, está en el proceso de escritura simbólica de la cantidad por eso escribe 6.

Al momento de realizar el mensaje para pedirle a Pipe el títere 26 bananas el estudiante escribe los dígitos del número 26. La intervención de la investigadora para que el estudiante totalice las cantidades 2 y 6 obliga al estudiante a cambiar de decisión.

I: ¿Qué números debe tener el mensaje?

E7: El 2 y el 6.

I: Escríbelos.

E7: (escribe el 2 y el 6 en la hoja).

I: Pon tú dos deditos.

Ilustración 47. Entrevista E7, Pregunta 9, literal a

Capítulo 3. El Sistema de Numeración Decimal en Transición

E7: (levanta dos dedos de la mano izquierda).

I: Y yo voy a poner seis (levanta seis dedos), cuéntalos todos a ver ¿cuánto te da?: Cuéntalos (señala los dos dedos de la mano de E7).

E7: Uno, dos.

I: (dobla uno a uno los seis dedos que tiene levantados mientras E7 dice).

E7: Tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: ¿Te dio veintiséis?

E7: No.

Ilustración 48. Entrevista
E7, Pregunta 9, literal b

El estudiante no escribe los números necesarios para componer el 26 y al final decide no seguir intentando.

I: ¿Qué números hay que colocar?

E7: Los otros.

I: ¿Cuáles? Mira que Pipe el títere solo conoce estos números (señala la hoja con los números del 1 al 10).

E7: No sé.

Por otro lado, el estudiante lanza los dados y toma la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$100 atendiendo a las indicaciones. Al responder a la pregunta ¿cuántas monedas de un peso tienes? (ha obtenido 21 monedas de \$1), el estudiante realiza el conteo siguiendo la secuencia numérica verbal en el orden convencional hasta 11 y le asigna a cada una de las 11 monedas una palabra número; sin embargo, después de la décimo primera moneda, la secuencia numérica verbal utilizada en el conteo no es convencional, incluso le asigna una misma palabra número a dos fichas y finaliza el conteo con la palabra diez.

I: ¿Cuántas monedas de un peso tienes?

E7: (señala la primera moneda) Uno, (señala la segunda moneda) dos, (señala la tercera moneda) tres, (señala la cuarta moneda) cuatro, (señala la quinta moneda) cinco, (señala la sexta moneda) seis, (señala la séptima moneda) siete, (señala la octava moneda) ocho, (señala la novena moneda) nueve, (señala la décima moneda) diez, (señala la décimo primera moneda) once, (señala la décimo segunda moneda) trece, (señala décimo tercera moneda) catorce, (señala décimo cuarta moneda) diez y seis, (señala décimo quinta y décimo sexta moneda) diez y ocho, (señala décimo séptima moneda) diez y nueve, (señala décimo octava moneda) diez y siete, (señala décimo novena moneda) ocho, (señala vigésima moneda) nueve, (señala vigésima primera moneda) diez.

El estudiante ha obtenido diez y seis monedas de \$10 y 22 monedas de \$100, al responder a la pregunta ¿cuántas monedas de diez pesos/cien pesos tienes? el estudiante realiza un conteo siguiendo la secuencia numérica convencional hasta diez, después de diez el orden no es estable y se salta las monedas.

I: ¿Esas son las monedas de diez pesos? ¿Ese es el número diez?

I: ¿Cuántas monedas de cien pesos tienes?

E7: (señala la primera moneda) uno, (señala la

E7: Señala las monedas de diez, (señala la primera moneda) uno, (señala la segunda moneda) dos, (señala la tercera moneda) tres, (señala la cuarta moneda) cuatro, (señala la quinta moneda) cinco, (señala la sexta moneda) seis, (señala la octava moneda) siete, (señala la décima segunda moneda) ocho, (señala la décimo quinta moneda) nueve, (señala la décimo sexta moneda) diez.	segunda moneda) dos, (señala la tercera moneda) tres, (señala la cuarta moneda) cuatro, (señala la quinta moneda) cinco, (señala la sexta moneda) seis, (señala la octava moneda) siete, (señala la décima segunda moneda) ocho, (señala la décimo primer moneda) nueve, (señala la décimo sexta moneda) diez, once, trece, catorce, diez y seis, (señala la vigésimo segunda moneda) diez y ocho.
--	--

En cada caso la investigadora interviene y realiza el conteo de cada una de las monedas y le muestra al estudiante la cantidad de monedas que tiene de cada valor.

El estudiante reconoce que se puede hacer cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10 o \$100, que posee en el momento. Para ello, forma colecciones de 10 monedas del mismo valor y se las entrega al banquero. El estudiante comprende que cuando tiene una cantidad diferente a 10 no puede realizar el cambio.

I: Con las monedas de un peso ¿puedes hacer cambios con el banquero? E7: Sí. I: ¿Qué tienes que hacer? E7: Contarlas (toma una a una las 10 monedas de \$1 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. I: Listo dásela al banquero. Banquero: (le pasa la moneda de \$10 y recibe las 10 monedas de \$1). I: Con las monedas de diez pesos ¿puedes hacer cambios? E7: Sí. I: ¿Qué tienes que hacer? E7: Contarlas (toma una a una las diez monedas de \$10 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. I: ¡Listo! dásela al banquero. Banquero: (le pasa la moneda de cien y recibe las diez monedas de \$10).	I: Con las monedas de diez pesos ¿puedes hacer cambios con el banquero? E7: Sí. I: ¿Qué tienes que hacer? E7: Contarlas (toma una a una las 8 monedas de \$10 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. I: ¿Puedes hacer un cambio? E7: No.
---	---

Sin embargo, al estudiante se le dificulta anticipar el valor de la moneda que le debe entregar el banquero al hacer el cambio, solo identifica el color de la moneda.

I: Con las monedas de un peso ¿puedes hacer cambios con el banquero?
E7: Sí.
I: ¿Qué tienes que hacer?
E7: Contarlas (toma una a una las diez monedas de \$1 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez.
I: Listo dásela al banquero. ¿Esteban qué moneda te tiene que dar el banquero?
E7: La de cien.
I: Pero si le diste monedas de un peso,
E7: la azul

Capítulo 3. El Sistema de Numeración Decimal en Transición

I: Banquero ¿qué moneda le vas a dar?

Banquero: (Le pasa la moneda de diez pesos que es azul y recibe las diez monedas de \$1).

I: Mira que la banquera te dio la moneda de \$10 no de \$100, recuerda las reglas

Debido a que el estudiante puede formar la colección de diez monedas de cada valor puede hacer todos los cambios posibles con las monedas obtenidas al entregárselas al banquero. Cuando al estudiante se le pregunta cuántas monedas tiene en total recurre al conteo de las monedas de uno en uno, independiente del valor que posean.

I: Esteban ¿cuánto tienes en total?

E7: Una, dos, tres (tomando las tres monedas de \$10).

Por eso, fue necesario que la investigadora interviniera y le recordará que las monedas son de diferente valor, las monedas de \$1 las puede contar de uno en uno, las de \$10 las puede contar de diez en diez y las monedas de \$100 de cien en cien. El estudiante puede hacer el conteo de las monedas de un peso, realizando el conteo de uno en uno, pero se le dificulta realizar el conteo de diez en diez o de cien en cien.

I: Pero esas no son de uno en uno, son de diez en diez, tendría que ser: diez (toma primera moneda de diez pesos), veinte (toma segunda moneda de diez pesos), treinta (toma tercera moneda de diez pesos).

I: (señala la cuarta moneda de diez pesos).

E7: cuarenta.

I: (señala la quinta moneda de diez pesos).

E7: Sesenta.

I: Cincuenta (señala la quinta moneda de diez pesos).

E7: Cincuenta.

I: (señala la sexta moneda de diez pesos).

E7: Sesenta.

I: (señala la séptima moneda de diez pesos).

E7: cuarenta.

I: Setenta (señala la séptima moneda de diez pesos).

E7: Setenta.

I: (señala la octava moneda de diez pesos) Ochenta.

E7: Ochenta.

Al final cuando se le pregunta sobre cuántas monedas tiene en total el estudiante contesta que diez.

I: ¿Y entonces cuánto tienes en total?

E7: Diez.

I: ¿Diez?

E7: Si.

Cuando la investigadora le entrega al estudiante 13 monedas de \$100 y le indica que deben pegar al frente de la chocolatina las monedas necesarias y sólo las necesarias, ni más ni

menos, para comprarla (\$1.100). El estudiante lee realiza la lectura del número como “dos unos y dos ceros”

I: Mira, aquí tenemos la chocolatina (muestra ficha con la imagen de la chocolatina) que tenemos en la separata ¿cuánto vale la chocolatina?

E7: Dos unos y dos ceros.

I: Significa mil cien.

Inicialmente el estudiante coloca todas las monedas de \$100 para comprar la chocolatina. Las monedas las cuenta de uno a uno siguiendo la secuencia numérica verbal convencional hasta la décima moneda, después, la secuencia numérica no es convencional.

E7: (toma una a una las trece monedas de \$100 mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, trece, catorce.

Al estudiante se le dificulta colocar la cantidad correcta de monedas para comprar el producto, así que la investigadora dirige el conteo de cien en cien. Aunque el estudiante solo puede hacer el conteo hasta cuatrocientos utiliza el sufijo “cientos” para continuar el conteo hasta novecientos.

I: (señala la primera moneda) cien, (señala la segunda moneda) doscientos, (señala la tercera moneda).

E7: Trescientos.

P:(Señala la cuarta moneda).

E7: Cuatrocientos.

I: (señala la quinta moneda).

E7: Ochocientos.

I: Quinientos (señala la quinta moneda).

E7: Quinientos.

I: (señala la sexta moneda), Seiscientos, (señala la séptima moneda), setecientos

E7: Cientos.

I: (señala la octava moneda) Ochocientos.

E7: Cientos.

I: (señala la novena moneda) Novecientos.

E7: Cientos.

I: (señala la décima moneda) Mil.

E7: Mil.

I: (señala la décimo primera moneda) Mil cien.

E7: Mil cien.

I: (señala la décimo segunda moneda) Mil doscientos.

E7: Mil doscientos.

I: (señala la décimo tercera moneda) Mil trescientos.

E7: Mil trescientos.

Después de realizar el conteo, el estudiante decide quitar una moneda, realiza el conteo nuevamente pero aún no obtiene \$1.100, así que quita otra moneda y por tanto obtiene \$1.100 para comprar la moneda.

3.4.8 Estudiante 10, situación 3. Al momento de realizar el mensaje para pedirle a Pipe el títere 12 bananas el estudiante escribe el uno y el dos, la docente debe pedirle al estudiante que represente tales cantidades con los dedos y las totalice, con lo cual el estudiante se da cuenta que no ha obtenido doce.

E10: (escribe el 1 y el 2 en la hoja).

I: ¿Estos números suman doce?

E10: El uno adelante y el dos atrás.

I: Uno más dos es doce.

E10: Sí.

I: Si colocas un dedito y dos deditos ¿cuánto te da?

E10: (Extiende un dedo de la mano izquierda y dos dedos de la mano derecha).

I: ¡Cuéntalos!

E10: Uno, dos, tres.

I: Entonces ¿qué tenemos que hacer? Si tú le das este mensaje a Pipe el sólo te va a dar tres dulces, él no te va a dar doce.

Cuando el estudiante se da cuenta que no ha obtenido doce decide escribir el diez y el cuatro, pero al realizar el conteo (diez dedos de las manos de la investigadora y cuatro dedos de la mano de E10) se da cuenta que obtiene una cantidad mayor a doce y por tanto debe quitar dos dedos.

I: él sólo conoce estos números (Señala la hoja con los números escritos del 1 al 10).

E10: O sea que debo escribir el 10.

I: Puede ser.

E10: (escribe el 10).

I: Diez, ¿Cuánto le falta al diez para llegar a doce?

E10: ¡Doce!, el doce no lo conoce.

I: Te voy a poner aquí diez deditos (extiende los diez dedos de las manos).

E10: (señala uno a uno los diez dedos, al señalar el último dedo dice) Cuatro.

I: Vamos a ver, pon tú cuatro dedos (le toma la mano a el estudiante).

E10: Extiende cuatro dedos de la mano derecha.

I: Cuéntalos todos a ver si ya da doce.

E10: (señala uno a uno los 10 dedos de la mano de I) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, (dobla dos dedos de la mano de ella, de los que tiene extendidos) once doce. O sea que debo quitar este (dobla un dedo) y este (dobla otro dedo)

I: A bueno, ¿aquí cuántos dedos hay? (mueve sus manos).

E10: Diez.

I: Y tú.

E10: Dos.

I: ¡Dos!

E10: Van doce.

Ilustración 49. Entrevista
E10, Pregunta 9, Literal a

Al momento de realizar el mensaje para pedirle a Pipe el títere 26 bananas el estudiante utiliza los dedos de las manos y la secuencia numérica verbal en el orden convencional para determinar que veintiséis se compone con “diez, diez y seis”.

I: Diez y siete te da veinte seis.

E10: Borra el 7 y escribe el 6.

I: A ver coloca seis deditos y yo voy a colocar diez (levanta los diez dedos de las manos).

E10: (Levanta seis dedos de las manos).

I: Cuéntalos (dobla uno a uno los diez dedos de las manos mientras E10 dice).

E10: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez, (dobla uno a uno los dedos que tiene levantados mientras dice) once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis (levanta un dedo) diez y siete, (levanta otro dedo) diez y ocho, (levanta otro dedo) diez y nueve, (levanta otro dedo) veinte.

I: ¿Cuántos tengo levantados?

E10: Diez.

I: Y tú ¿cuántos tienes levantados?

E10: Diez.

I: Escríbelos.

E10: Escribe 10.

I: Si llegamos a veinte cuánto te falta para llegar a veintiséis.

E10: Veintiuna (levanta un dedo), veintidós (levanta otro dedo), veintitrés (levanta otro dedo), veinticuatro (levanta otro dedo), veinticinco (levanta otro dedo), veintiséis (levanta otro dedo).

I: Muy bien, ¿cuántos dedos levantaste?

E10: Seis.

I: Escríbelo.

E10: (Escribe 6).

I: Muy bien, entonces diez (levanta diez dedos de las manos).

E10: Más diez (levanta diez dedos de las manos), más seis es igual da veintiséis.

I: Muy bien.

La secuencia numérica verbal es convencional y el estudiante la utiliza siguiendo un nivel de cadena rompible, es decir empieza desde veinte en adelante el conteo hasta llegar a veintiséis. Así el estudiante le asigna un significado aditivo al numeral aplicando el conteo veintiséis es igual a diez, diez y seis utilizando las agrupaciones de diez.

El estudiante lanza los dados y toma la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$100 atendiendo a las indicaciones. Al responder a la pregunta ¿cuántas monedas de un peso tienes? realiza el conteo asignándole a cada moneda una palabra número atendiendo a la secuencia numérica verbal convencional.

I: ¿Cuántas monedas de un peso tienes?

E10: (señala con el dedo índice una a una las 16 monedas de \$1 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis.

I: ¿Cuántas monedas de diez pesos tienes?

E10: (señala con el dedo índice una a una las 13 monedas de \$10 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

I: ¿Cuántas monedas de cien pesos tienes?

E10: (señala con el dedo índice una a una las 16 monedas de \$100 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis.

Handwritten numbers: 106 and 10.

Ilustración 50.
Entrevista E10,
Pregunta 9, Literal b

El estudiante identifica las denominaciones de las monedas \$1, \$10, \$100 y cuenta las monedas siguiendo el principio de correspondencia uno a uno y el principio de orden estable atendiendo a la secuencia numérica convencional.

El estudiante reconoce que se puede hacer cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10 o \$100, que posee en el momento. Para ello forma grupos de diez y se las entrega al banquero. Incluso, anticipa el valor de la moneda que le debe entregar el banquero al realizar el cambio.

I: Nicole, con estas monedas de un peso ¿tú puedes hacer un cambio? Con el banquero E10: Sí. I: ¿Qué tienes que hacer? E10: Diez de un peso. I: Hágle pues. E10: (con la mano derecha toma una a una 10 monedas de \$1 y se las pone en la mano izquierda mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. I: Con esas monedas puedes hacer un cambio, entrégaselas al banquero. E10: (sonríe, le entrega las monedas al banquero). I: Esteban ¿qué moneda le tienes que dar a Nicole? Banquero: esta (toma la moneda de diez pesos y se la pasa a Nicole). I: Nicole ¿está bien? E10: Sí.	I: ¿Con las monedas de \$100 tú puedes hacer un cambio? E10: Para el banquero seguro (sonríe). I: Si E10: (con la mano derecha señala una a una 10 monedas de \$100 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez (recoge las 10 monedas de \$100 y se las pone en la mano izquierda), diez fichas. I: ¿Qué moneda te tiene que entregar el banquero? E10: Las de mil.
--	---

Cuando al estudiante se le pregunta cuántas monedas tiene en total recurre al conteo de las monedas de uno en uno, independiente del valor que posean.

I: Muy bien, Nicole ¿Cuánto tienes en total?

E10: (con el dedo índice de la mano derecha señala una a una las 6 monedas de \$1 y la moneda de \$10 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. (con el dedo índice de la mano derecha señala una a una las 3 monedas de \$10 y la moneda de \$100 mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, (con el dedo índice de la mano derecha señala una a una las 6 monedas de \$100 y la moneda de \$1.00 mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

Resulta necesario que la docente intervenga y le diga al estudiante que debe tener en cuenta el valor de las monedas. Por lo tanto, la docente trata de explicar el conteo de las monedas teniendo en cuenta su valor y siguiendo los nudos.

I: Mira (toca la moneda de \$1.000) tienes mil, (toca las 7 monedas de \$100 mientras dice) cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, van mil setecientos (toca las 4 monedas de \$10 mientras dice) diez.

E10: Diez.

I: (toca la segunda moneda de \$10).

E10: Veinte.

I: (toca la tercera moneda de \$10).

E10: Treinta.

I: (toca la cuarta moneda de \$10).

E10: Cuarenta.

I: Mil setecientos cuarenta (toca una a una las seis monedas de \$1 mientras dice) y uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. Mil setecientos cuarenta y seis. Si viste.

Sin embargo, cuando el estudiante va a realizar el conteo solo, nombra solamente el valor de las monedas mientras las cuenta

I: Ahora cuéntalas tú

E10: (señala la moneda \$1.000) mil, (señala la primera moneda \$100) cien, (señala la segunda moneda \$100) cien, (señala la tercera moneda \$100) cien, (señala la cuarta moneda \$100) cien, (señala la quinta moneda \$100) cien, (señala la sexta moneda \$100) cien, (señala la séptima moneda \$100) cien, (señala la primera moneda \$10) diez, (señala la segunda moneda \$10) diez, (señala la tercera moneda \$10) diez, (señala la cuarta moneda \$10) diez, (señala las seis monedas \$1) seis.

El conteo utilizado por el estudiante se asemeja un poco al sistema de numeración aditivo en el cual el estudiante expone una palabra número atendiendo al valor de cada moneda, esta es la solución que encuentra el estudiante al responder esta pregunta.

Cuando la investigadora le entrega al estudiante 13 monedas de \$100 y le indica que deben pegar al frente de la chocolatina las monedas necesarias y sólo las necesarias, ni más ni menos, para comprarla (\$1.100). El estudiante realiza la lectura del número como “mil cien”

I: (le pasa a el estudiante la ficha con la imagen de la chocolatina) Te voy a dar estas monedas (13 monedas de \$100) ¿Cuánto es que vale la chocolatina? (Señala la chocolatina de la ficha con el valor de \$1.100).

E10: Ehh, mil cien.

Al primer intento el estudiante coloca las 13 monedas de \$100, luego quita siete y pone cuatro fichas, es decir, deja 10 monedas de \$100. Hecho por el cual la docente interviene y promueve el conteo de cien en cien de las fichas; sin embargo, el estudiante está en el proceso de aprendizaje de la secuencia numérica verbal de cien en cien.

I: Mira, cien (señala la primera moneda), doscientos (señala la segunda moneda), (señala la tercera moneda).

E10: Trescientos.

I: (señala la cuarta moneda).

E10: Cuatrocientos.

I: (señala la quinta moneda).

E10: Setecientos.

I: Quinientos, (señala la sexta moneda).

E10: Setecientos.

I: Seiscientos, (señala la séptima moneda).

E10: Setecientos.

I: (señala la octava moneda).

E10: Ochocientos.

I: (señala la novena moneda).

E10: (silencio).

I: Novecientos (señala la décima moneda) mil.

Cuándo llegan a este punto el estudiante reconoce que le falta poner una moneda para obtener mil cien

I: Y son mil cien (señala el \$1.100 de la ficha) ¿Qué te hace falta?

E10: Poner otras dos acá (señala el lugar para poner las monedas).

I: ¿Otras dos? Pon otras dos.

E10: O sea una (coloca una moneda de \$100).

I: ¿Una o dos?

E10: Una.

Al realizar el conteo final el estudiante puede decir algunas palabras número siguiendo la secuencia numérica convencional de cien en cien

I: Ok. Vamos a contar (señala la primera moneda) cien, (señala la segunda moneda).

E y I: Doscientos.

I: (señala la tercera moneda).

E10 y I: Trescientos.

I: (señala la cuarta moneda).

E10: Ochocientos.

I: Cuatrocientos (señala la quinta moneda).

E10: Silencio.

I: Quinientos.

E10: Entos.

I: (señala la sexta moneda).

E10: Seiscientos.

I: (señala la séptima moneda).

E10: Setecientos....

I: (señala la décima primera moneda) mil cien.

E10: Mil cien.

I: Muy bien Nicol.

Al parecer el estudiante ha percibido regularidades al momento de nombrar palabras número de los “cienes”

3.4.9 Estudio de casos, situación 3. Para realizar la descomposición de los números 12 y 26, los estudiantes utilizan procedimientos que involucran el conteo usando los dedos de las manos (del estudiante y de la investigadora). E7, por su parte, escribe representaciones simbólicas de manera aleatoria, representa las cantidades usando los dedos de las manos y realiza el conteo total de las cantidades; mientras que E10 desde el inicio reconoce que debe utilizar el agrupaciones de diez, representa las cantidades usando los dedos de las manos, las cuenta y va quitando o aumentando cantidades hasta llegar a la cantidad deseada.

Lo anterior da a entender que los estudiantes reconocen el vínculo entre el conteo (siguiendo la correspondencia uno a uno y la secuencia numérica verbal) y el cardinal (Le Corre y Carey, 2007; Ortiz, 2014); además, comprenden que el número puede ser visto como

la composición de una o más cantidades, lo cual es importante en la comprensión del CNN y del SND (MEN, 1998a).

Con relación al desempeño de E7 en esta situación se puede asegurar que debido a que al estudiante se le dificulta reconocer las representaciones simbólicas de los números del 1 al 10, no puede utilizarlas en la composición de los números (12, 26). Podría haber sido mejor para el estudiante si se le hubiera solicitado que utilizará puntos que representen las cantidades del 1 al 10 y así tratar de componer los números. Se destaca el desempeño de E7 quien reconoce la cantidad que representa el cardinal diez y la diferencia de otras cantidades, también identifica si se deben agregar o quitar cantidades para componer el diez. De manera que, el estudiante avanza en el reconocimiento del vínculo entre el cardinal y el ordinal (Anaconda, et al. 1998), y establece relaciones de orden entre cantidades, lo cual le permite tomar decisiones al momento de componer cantidades.

Por otra parte, para determinar la cantidad de las monedas, los estudiantes proceden a separarlas atendiendo a su denominación. Sin embargo, E7 solo puede realizar el conteo siguiendo la secuencia numérica verbal en el orden convencional hasta el 11, mientras que E10 realiza el conteo de las cantidades incluso si estas son superiores a diez. Para realizar el conteo de las monedas, los estudiantes usan la secuencia numérica verbal, la correspondencia uno a uno y el cardinal. Se nota el avance de E7 quien realiza el conteo de cantidades inferiores o iguales a diez (siguiendo la correspondencia uno a uno y la secuencia numérica verbal), al parecer la intervención de la investigadora en la entrevista 1, en la cual le pide al estudiante que realice el conteo despacio le ayuda al estudiante para que realice el conteo con mayor concentración y cuidado. Esto es parte importante de la dimensión cognitiva (MEN, 1998b).

Igualmente, al momento de realizar los cambios los estudiantes realizan el siguiente procedimiento, separan una a una las monedas de la misma denominación y le asignan a cada moneda una palabra número siguiendo la secuencia numérica verbal convencional hasta 10, cuando llegan a diez dejan de contar y le entregan el grupo de diez monedas al banquero. Para poder realizar este procedimiento los estudiantes usan la secuencia numérica verbal, la correspondencia uno a uno y el cardinal diez. En este sentido, E7 presenta un avance porque inicialmente tenía dificultades en estos conceptos; sin embargo, en esta entrevista puede formar las agrupaciones de diez monedas.

Probablemente la intervención de la docente, en la que le explica a E7 la manera de formar una colección de diez elementos, fue la que permitió que el estudiante realizara los cambios. Además, aunque el estudiante se le dificulta identificar la representación simbólica de la moneda que le tiene que dar el banquero al realizar el cambio, sí reconoce el color de la moneda; lo anterior, indica que el estudiante entiende el valor relativo de la moneda atendiendo al color, característica importante en el aprendizaje del SND (Castaño, 1997).

Por otra parte, para totalizar la cantidad de dinero los estudiantes utilizan diferentes procedimientos, E7 por su parte cuenta las monedas uno a uno independiente del valor que representan, mientras que E10 nombra solamente el valor de la moneda a medida que la señala. Poder determinar la cantidad de dinero requiere necesariamente del pensamiento aditivo y la secuencia numérica verbal incluyendo los términos para las decenas y las centenas. Los estudiantes se encuentran en el proceso de adquisición de estos conceptos, seguramente por eso se les dificulta totalizar la cantidad de dinero que poseen (MEN, 2009b).

Para componer la cantidad 1.100 con monedas de \$100 los estudiantes debieron utilizar de manera indiscutible el conteo de cien en cien, como a los estudiantes se les dificulta seguir esta secuencia, la investigadora guía el conteo con la secuencia numérica verbal de 100 en 100. Lo anterior, permite que los estudiantes empiecen a percibir regularidades en la secuencia numérica verbal como el uso del sufijo "cientos".

3.4.10 Resultados globales del estudio de casos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el estudio de casos se puede ver que E7 presenta un avance en torno al conteo del 1 al 10, las dificultades que inicialmente presentaba con relación a la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y el cardinal fueron superadas, lo cual se evidencia al momento de formar colecciones de diez elementos en la situación 3. Al parecer la intervención de la investigadora al pedirle al estudiante que realice el conteo nuevamente y despacio, y la explicación entre el vínculo entre la secuencia numérica y el cardinal de la colección le permite al estudiante que pueda contar los elementos de la colección (1-10) y representar el cardinal.

De manera que, usar el conteo le permite al estudiante formar colecciones de diez elementos, representar una cantidad, formar una colección y componer el diez. Es el caso de E10 quien usa la secuencia numérica verbal, la correspondencia uno a uno y la cardinalidad

para realizar la actividad. Incluso reconoce la palabra número “cero” y la asocia con la ausencia de puntos en la cara del dado.

Respecto a las representaciones que utilizan los estudiantes se puede observar que E10 realiza representaciones simbólicas (notaciones indo-arábicas) y notaciones en espejo que representan el cardinal de la colección, mientras que E7 usa representaciones simbólicas (dimensión 1 y notaciones indo-arábicas) que no representan la cantidad obtenida en los dados. De manera que E7 se encuentra en el proceso de representación simbólica de las cantidades.

Por otro lado, E10 reconoce el significado de los términos ordinales “primero”, “segundo” y “último” incluso trata de representar las posiciones de los objetos usando notaciones indo-arábicas, mientras que E7 solo reconoce la primera posición y se encuentra en el proceso de adquisición de términos ordinales. Teniendo en cuenta el número como ordinal, cabe resaltar que ambos estudiantes ubican los números 12 y 21 en el lugar correcto en la secuencia numérica usando su conocimiento sobre la secuencia numérica y el valor posicional. Además, para establecer relaciones de orden E7 usa la correspondencia uno a uno, mientras que E10 establece relaciones de orden teniendo en cuenta el cardinal de la colección.

Además, los estudiantes comprenden que el número puede ser visto como la composición de una o más cantidades. Sin embargo, debido a que E7 no reconoce las representaciones simbólicas le impide descomponer cantidades usando símbolos numéricos. Sin embargo, al momento de realizar los cambios aunque E7 no reconoce la representación simbólica que aparece en las monedas, sí reconoce el color de la moneda lo cual le permite hacer cambios con las monedas; lo anterior, indica que el estudiante entiende el valor relativo de la moneda atendiendo al color, característica importante en el aprendizaje del SND. Por otro lado, E10 sí reconoce las representaciones simbólicas y le asocia a cada una su cardinal correspondiente, lo cual le facilita descomponer cantidades usando símbolos numéricos y reconocer los valores que aparecen en las monedas para realizar cambios entre monedas.

Finalmente, a los estudiantes se les dificulta determinar la cantidad de dinero que poseen en el momento, este hecho está íntimamente relacionado con el pensamiento aditivo y la secuencia numérica verbal que incluye los términos para las decenas y las centenas. Realizar el conteo de las monedas en compañía de la docente, le permite a los estudiantes percibir regularidades en la secuencia numérica verbal como el uso del sufijo “cientos”.

CAPÍTULO 4:

Conclusiones generales y reflexiones didácticas

A continuación se presentan las conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas que surgen a partir del proceso fundamentación, diseño, implementación y análisis de la propuesta de aula sobre la enseñanza y aprendizaje de algunos elementos fundamentales del SND en Transición aplicada en la I.E.D Ciudad de Bogotá. Tales conclusiones se obtienen al confrontar los resultados y análisis obtenidos, con la pregunta problema y con los objetivos planteados al inicio de este trabajo de investigación. Al finalizar el capítulo se presentan las referencias bibliográficas que fueron utilizadas en el desarrollo de este trabajo de investigación.

4.1 Conclusiones generales

Las conclusiones generales se presentan en correspondencia con los objetivos planteados, develando que en el desarrollo del trabajo fue posible atender a cada uno de ellos.

En relación al primer objetivo específico se puede afirmar que se determinó un MTL sobre el CNN y el SND como marco de referencia para el diseño y experimentación de situaciones problema sobre los conceptos de orden, cardinal y agrupación. Dicho MTL estuvo fundamentado en cuatro componentes: enseñanza, formal, cognición y comunicación.

En cuanto al modelo de enseñanza se puede decir que el MEN propone la educación en los primeros años de manera integral desde los pilares de la educación, los principios, y las dimensiones; además, direcciona la enseñanza de las matemáticas atendiendo a los principios de conteo, las relaciones de orden, la resolución de problemas y la comunicación de cantidades; estas orientaciones se complementan con las disposiciones sobre la importancia del conteo, las agrupaciones y el valor posicional para la comprensión de los números y la numeración; y por ende, para el desarrollo de pensamiento numérico y sistemas numéricos en los primeros años de la escolaridad. Sin embargo, los textos escolares y el currículo de la institución en la que se aplica la propuesta de aula, que se supone deben reflejar la propuesta del MEN al parecer no lo hace, pues presentan el CNN y el SND sin tener en cuenta algunas de estas disposiciones, como los principios del conteo, las agrupaciones, el valor posicional, los principios de Transición, los pilares de la educación etc. Se observa además que aunque los textos presentan los conceptos de manera diferente ambos coinciden en presentar el CNN desde una visión conjuntista, y en presentar el SND desde la representación simbólica pero no ahondan en la comprensión del mismo.

Por otro lado, el modelo de competencia formal se fundamenta desde la fenomenología histórica y desde las matemáticas mismas. Desde la fenomenología histórica se da a conocer que el CNN se va construyendo y formalizando a través de los avances y descubrimientos que hace el hombre. Además, debido a que surge la necesidad de representar simbólicamente el CNN el hombre se enfrenta con el proceso de construcción del SND. Ambos conceptos, CNN y SND se encuentran estrechamente relacionados. De manera paralela, la fenomenología pura da a conocer que la formalización del CNN y del SND en su momento actual y sus usos se encuentra sustentada desde el enfoque conjuntista.

Siguiendo con la idea anterior, tanto la fenomenología pura como la fenomenología histórica, están de acuerdo en que la construcción de algunos elementos fundamentales del CNN y del SND obedece a la comprensión de la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal, las relaciones de orden, el cardinal, la base, el concepto de cero, la posicionalidad, la estructura aditiva, la estructura multiplicativa y las cifras. Por tanto, para el diseño de la propuesta de aula se retoman estos conceptos y sus definiciones.

Con relación a los componentes cognitivo y de comunicación se aprecia la importancia de estudiar el aprendizaje de los estudiantes sobre el CNN y el SND y las formas de representar ese conocimiento. En concordancia con lo anterior, el marco conceptual sobre el aprendizaje de los principios de conteo (correspondencia uno a uno, orden, cardinalidad), del CNN, del SND, de las operaciones aditivas y las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de estos conceptos; así como, las representaciones (verbales, simbólicas) y el dinero como material manipulativo, fueron considerados como principales para el diseño de la propuesta de aula en la enseñanza controlada.

Todo lo anterior, hace parte de un análisis previo del problema, lo cual implica un MTL inicial para la construcción de algunos elementos fundamentales del CNN y el SND partiendo de los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación. En este modelo se reconoce que el CNN y el SND se fundamenta desde una visión conjuntista; que sin embargo, pretende realizar algunos alcances que se proponen desde los lineamientos curriculares, sobre las competencias matemáticas en Transición y el desarrollo de pensamiento numérico y sistemas numéricos. Este aspecto demarcó en el MTL inicial la necesidad de trabajar el CNN y el SND atendiendo al análisis del aprendizaje y las dificultades de los estudiantes, la enseñanza de esos conceptos y las representaciones que utilizan los estudiantes para expresar su conocimiento. De manera paralela, dicho modelo inicial justificó la viabilidad de propender el acercamiento al CNN y el SND a través de la puesta en escena de situaciones problema sobre los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación. Por lo tanto, lo que se mencionó anteriormente sobre cada uno de los componentes permiten la consolidación del MTL como insumo para realizar el diseño y desarrollo de la experimentación.

De acuerdo con lo anterior y en relación al segundo objetivo específico relacionado con determinar una propuesta de aula para su implementación en un sistema de enseñanza controlada, atendiendo al MTL sobre el CNN y el SND, se puede afirmar que los

conocimientos que concurren en el diseño de la propuesta de aula se articulan en tres aspectos principales: las situaciones problema, los conceptos matemáticos y los referentes curriculares colombianos.

Las situaciones problema se nutren del estudio de las tareas, preguntas y materiales manipulativos propuestos por diferentes autores a nivel nacional e internacional ya documentados en el MTL–Castaño (1997), Kamii (2000), Wynn (1992), Lerner y Sadovsky (1994), González y Weinstein (2008) y Chamorro (2005)-, las situaciones toman como centro de atención el estudio de los juegos y a partir de ellos se proponen problemas que trabajen los conceptos de orden, cardinal y agrupación. Lo anterior, permite diseñar una propuesta de aula compuesta por tres situaciones problema: la situación 1 denominada el juego cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno; la situación 2 denominada el juego pepa y la ordinalidad; y la situación 3 denominada el juego la tienda y la agrupación.

Además, la propuesta de aula se nutre del estudio del modelo de competencia formal, el cual toma como centro de atención la cardinalidad, la ordinalidad y la agrupación, y todas las nociones y conceptos matemáticos que contribuyen en la construcción de estos conceptos. Este hecho, permite tomar decisiones sobre las preguntas que se le formulan a los estudiantes, el nivel de complejidad de las mismas y su organización en las tareas.

A su vez, la propuesta de aula responde al llamado que se hace desde los referentes curriculares colombianos, en los que se da a conocer que es posible que los niños avancen en la comprensión del SND por medio de la construcción de los conceptos de cardinalidad y ordinalidad, en este trabajo de investigación se agrega otro concepto para la comprensión del SND, la agrupación; sin dejar de lado la mirada integral del grado Transición, los principios, los pilares de la educación y algunas dimensiones.

Por otro lado, la implementación de la propuesta de aula presenta costos y consecuencias importantes a resaltar: se requiere de tiempo de sesiones de trabajo con los docentes para la apropiación de elementos teóricos, y se requiere que el docente se apropie de un rol distinto, en el que guía el proceso de construcción del aprendizaje, más no el rol en el que se le dice la respuesta al estudiante.

Además, la rejilla de análisis que tiene en cuenta las representaciones del concepto matemático, los estratos de los SMS y los significados de las representaciones, es una herramienta potente que permitió examinar y analizar las actuaciones de los estudiantes al

resolver las tareas propuestas en las situaciones problema. Así mismo, los organigramas son una herramienta potente que permitieron tener una visión rápida y global de los conceptos en los que presentan dificultad los estudiantes y en los que no. Incluso, los protocolos para la implementación no fueron una camisa de fuerza sino que guiaron la implementación de la propuesta de aula, dichos protocolos permitieron avanzar en varias direcciones dependiendo de las actuaciones de los alumnos.

Finalmente, en este trabajo se asumió el desafío de implementar una propuesta de aula que integra los conceptos de orden, cardinalidad y agrupación en Transición para construir algunos elementos fundamentales del SND. Inicialmente implica correr el riesgo de enfrentar a los estudiantes de este grado con situaciones problemas que aún no se les ha enseñado a resolver (según la propuesta de enseñanza de la institución), obliga a trabajar con respuestas correctas, con respuestas imparciales y con respuestas incorrectas; lo cual, en últimas termina nutriendo los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, pues se experimenta un ambiente en el que coexisten diferentes procedimientos y conceptualizaciones sobre algunos elementos fundamentales del SND, se comparte con el par la respuesta y se trata de llegar a un consenso. Se asume el reto y se obtiene como resultado un proceso de construcción de conocimiento en el cual los estudiantes son los protagonistas.

Por otro lado, el objetivo específico número 3 relacionado con identificar y caracterizar, según el análisis de las actuaciones de los estudiantes, algunos aspectos conceptuales (cardinalidad, ordinalidad, etc.) y procedimentales (técnicas de conteo, agrupamientos, etc.) del CNN y el SND en estudiantes de Transición al desarrollar la propuesta de aula, se puede concluir que:

- El desarrollo de las tareas permitieron que los estudiantes avanzaran en el conteo del 1 hasta el 10. En la realización de las tareas de la situación 3 fue evidente la superación de las dificultades de los estudiantes con relación al principio de correspondencia uno a uno (terminan de etiquetar aunque faltan objetos por contar, saltan objetos, le asignan a dos objetos una misma palabra número, no separa los elementos contados de los no contados), el principio de orden estable (el dominio de la secuencia numérica es menor a la colección contada) y el principio de cardinalidad (relación entre orden, correspondencia y cantidad). En el desarrollo de las tareas la docente y los compañeros

corrigen la secuencia numérica convencional y la correspondencia uno a uno al realizar el conteo, además le recuerdan a los estudiantes que presentan estas dificultades que deben de realizar el conteo despacio y que deben relacionar el conteo con el cardinal. Con las acciones anteriores los estudiantes que tenían estas dificultades avanzan en su proceso.

- En el desarrollo de la experimentación, específicamente, en las tareas de la situación 1 y la situación 2 se logró que los estudiantes utilizaran el conteo para identificar el cardinal de la colección y para formar colecciones que representan un cardinal. La intervención de la docente (quien les dice a los estudiantes que deben realizar el conteo), el desarrollo de las tareas, y la comunicación de ideas entre pares, le permitieron a los estudiantes reconocer la necesidad de realizar el conteo. De modo que, los planteamientos de Le Corre y Carey (2007) tienen sentido, puesto que para determinar el cardinal de la colección se debe comprender que este conocimiento está estrechamente relacionado con el conteo. Tener en cuenta lo anterior es muy importante pues incide en el progreso de los estudiantes en la representación simbólica del cardinal, en la totalización de cantidades, en la composición y descomposición de cantidades; y por tanto en la comprensión de elementos fundamentales del CNN y del SND.
- En la realización de las tareas que implican la práctica del conteo los estudiantes muestran un avance en la representación verbal del cardinal. Al parecer, las tareas en las que el estudiante representa el cardinal por medio de una colección o por medio de representaciones simbólicas, contribuyen a que se dé cuenta que la última palabra número en la secuencia numérica verbal indica el cardinal de la colección, aspecto importante en la comprensión del CNN.
- Con las tareas de la situación 2 se logró que los estudiantes avanzaran en la comprensión del establecimiento de las relaciones de orden. En el desarrollo de la propuesta de aula los estudiantes usan diferentes estrategias para establecer relaciones de orden: realizan el conteo de los objetos y comparan los cardinales de las colecciones, comparan las cantidades visualmente, y comparan las cantidades que indican las representaciones simbólicas. Al realizar la comparación los estudiantes

usan el conteo, la correspondencia uno a uno y la secuencia numérica convencional (colección de objetos), lo cual aporta al aprendizaje del CNN.

- Al establecer las relaciones de orden los estudiantes reconocen las expresiones “mayor que” y “menor que” y le otorgan el significado atendiendo a la posición ordinal de un número en la secuencia numérica o atendiendo a la cantidad que representa el número; pero no las usan, los estudiantes utilizan términos comparativos como “más pepas que” y “10 es más que”, “muchas”, “pocas”, “más que” tal como lo menciona Chamorro (2005).
- La puesta en escena de las tareas de la situación 2 permitieron que los estudiantes se fueran encaminando y avanzando en la comprensión del número como ordinal. En el proceso fue evidente el acercamiento a algunos aspectos claves asociados al número como ordinal, tales como: identificación del criterio de ordenación, reconocimiento del primer elemento de la colección ordenada y reconocimiento de los términos ordinales. Para identificar la posición de un objeto en una colección ordenada, los estudiantes señalan uno a uno los objetos y le asignan su respectivo termino ordinal o le asignan una palabra número siguiendo la secuencia numérica verbal. Además, para indicar la posición de un objeto en una colección ordenada los estudiantes dicen los términos numericos ordinales “primero” “segundo” “tercero”, “último”, dicen las palabras número (“esta de tres”), utilizan las representaciones simbólicas ordinales (Ej.: 1º), las notaciones indo-arábigas y los dibujos.
- La comprensión del número como ordinal aporta también al reconocimiento del orden de las cifras de los números. Este hecho se puede evidenciar en la tarea 3 de la situación 3, en la cual los estudiantes establecen relaciones de orden atendiendo a la posición de las cifras de la representación simbólica del número. La expresión “el primero es el que manda” es muestra de ello.
- A partir de los resultados de esta investigación se da a conocer que las disposiciones del MEN (2009b) se quedan cortas al momento de brindar orientaciones sobre la enseñanza de las relaciones de orden en Transición. Puesto que los estudiantes no solo realizan comparaciones de cantidades a partir de la percepción del espacio ocupado por los objetos, o comparaciones de colecciones después de contar; los estudiantes de Transición pueden realizar otro tipo de comparaciones. En el desarrollo de la

experimentación se muestra que los estudiantes realizan comparaciones de cantidades al encontrar la diferencia cuantitativa entre las colecciones, comparan dos notaciones indo-arábicas atendiendo al cardinal que las representan, comparan dos cantidades en diferentes representaciones (indo-arábica y de dimensión 1) atendiendo el cardinal que representan; y comparan cantidades por medio de análisis lógicos: “4 es menor porque solo hay 4 y 10 es más que cuatro” así pues, en términos matemáticos se podría interpretar como sigue $4 < 10$ y $10 > 4$ ($a < b \Leftrightarrow b > a$) o “10 es menor que 13 porque tiene tres más que diez” (podría acercarse a *Dados $m, n \in N$ decimos que: $m \leq n$ si existe $p \in N$ tal que $n = m + p$*). Es necesario que desde las orientaciones del MEN (2009b) se brinden un panorama más amplio sobre las relaciones de orden que pueden establecer los estudiantes para aportar al desarrollo de pensamiento matemático y a la comprensión del CNN y el SND.

- Con el desarrollo de las tareas propuestas en las situación 3 se logró que los estudiantes pudieran hacer agrupaciones de diez elementos, aspecto relevante en la construcción de la noción de base la cual es clave en el SND. En el desarrollo de las tareas se da a conocer que los estudiantes de Transición realizan agrupaciones de diez elementos utilizando la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y el cardinal. Los avances de los estudiantes en la comprensión de los conceptos anteriores les facilita hacer agrupaciones de 10 elementos. El procedimiento que utilizan los estudiantes para realizar agrupaciones de diez elementos es el siguiente, señalan uno a uno los elementos mientras dicen la secuencia numérica verbal y cuando llegan a diez dejan de tomar elementos.
- El desarrollo de la propuesta de aula permite que los estudiantes progresen en la comprensión de la composición del diez. Componer el diez usando el conteo exige que los estudiantes comprendan y usen la secuencia numérica verbal, la correspondencia uno a uno, el cardinal, y el establecimiento de relaciones de orden. Una de las estrategias que utilizan los estudiantes para componer el diez consiste en partir de una colección dada y agregar uno a uno elementos hasta llegar al diez y la otra estrategia es partir de una cantidad agregar otra cantidad y realizar el conteo total de la colección, en este procedimiento se resalta la importancia de establecer relaciones de orden, puesto que reconocer que una cantidad es menor o mayor a diez permite tomar

decisiones (agregar cantidades o quitarlas) para obtener diez en total. Al realizar las situaciones problema los estudiantes utilizan el conteo para componer el diez y se van apropiando de los cardinales que les permiten hacer la composición del diez (5 y 5, 6 y 4, 9 y 1, y 7 y 3). Teniendo en cuenta lo anterior y atendiendo a las disposiciones del MEN (1998a) la composición y descomposición de cantidades acerca a los estudiantes a la realización de operaciones aditivas y a la comprensión del CNN y el SND.

- La realización de tareas que involucran la totalización de cantidades que incluyen el dado sin puntos, la representación del cardinal “0” y la representación de ausencia de agrupaciones en un orden determinado, conlleva a que los estudiantes avancen en la comprensión del concepto de cero. En la situación 1 los estudiantes de Transición inicialmente usaban la palabra “nada” para designar la cara del dado sin puntos, pero la realización de las situaciones problemas (situación 1, situación 2 y situación 3) y la comunicación entre pares, permite que los estudiantes empiecen a utilizar la palabra número “cero” y el símbolo “0” para representar la ausencia de cantidad, o la ausencia de agrupamiento; incluso, se percibe en el desarrollo de las tareas que los estudiantes totalizan con naturalidad las cantidades, cuando se ve involucrado el dado sin puntos. Lo anterior da a conocer que los estudiantes avanzan en la comprensión del concepto de cero lo cual es característico del SND.
- Respecto a la representación de la cardinalidad, los estudiantes evidenciaron de forma paulatina a través del desarrollo de las tareas, mayor dominio de los SMS para representar el cardinal de una colección. Para representar el cardinal los estudiantes en la situación 1 usan las representaciones de dimensión 1 (puntos), los caracteres pictográficos, la secuencia de notaciones indo-arábigas en el orden convencional, las notaciones invertidas, las notaciones en espejo, las formas para números y las notaciones indo-arábigas. Sin embargo, se muestra en la situación 3 que los estudiantes avanzan en su proceso de representación, al parecer la realización de las preguntas, en las que se involucra el conteo, el trabajo en equipo, la escritura y la comunicación entre pares, le permite a los estudiantes que desaparezcan algunas representaciones, y que tiendan a realizar solamente representaciones simbólicas (notaciones indo-arábigas) y/o notaciones en espejo para representar el cardinal de las colecciones, lo cual es parte importante del SND.

- Igualmente, al representar la agrupación de diez elementos los estudiantes evidenciaron a través del desarrollo de las tareas, mayor dominio de la representación simbólica 10. Para representar las agrupaciones de diez como se puede ver en la situación 3, los estudiantes utilizan las cifras invertidas 01, la notación en espejo 10 y la notación indo-arábica 10. Estas representaciones evidencian que los estudiantes están en el proceso de aprendizaje del valor posicional y de la escritura convencional del diez. Si bien se observa que los estudiantes utilizan representaciones simbólicas, atendiendo a las consideraciones de Filloy (1999), estas representaciones simbólicas están ligadas a la acción de contar, es decir a acciones concretas que representan la cantidad de diez elementos.
- Los estudiantes de Transición avanzan en la descomposición de cantidades usando sucesión de dieces y unos. Al descomponer los números de dos cifras como se puede ver en la situación 3, los estudiantes utilizan representaciones simbólicas en las que se ve involucrado el diez, por ejemplo: 26 se descompone en 10, 10 y 6; 42 se descompone en 10, 10, 10, 10 y 2. Teniendo en cuenta lo anterior, los planteamientos de Kamii (2000) y Castaño (1997) cobran sentido, pues los estudiantes de los primeros años piensan aditivamente. Teniendo en cuenta este aspecto, se hace necesario reconocer que si bien se observa que los estudiantes utilizan la representación simbólica 10, atendiendo a las consideraciones de Filloy (1999), estas representaciones simbólicas están más ligadas a la acción de contar con los dedos de las manos, es decir a acciones concretas, pero no representan acciones más abstractas, como reconocer que en el 26, el 2 representa el 20, atendiendo al valor posicional de las cifras.
- El conteo usando los dedos de las manos aporta a la comprensión del número como totalización de agrupaciones. Inicialmente (S3, T1, P1, La) al realizar la descomposición de los números de dos cifras los estudiantes tienden a tomar como referencia las cifras de la representación simbólica. Sin embargo, el desarrollo de la tarea en la que se propicia el conteo usando los dedos de las manos tuvo un rol trascendental, pues permitió evidenciar de manera concreta las agrupaciones de diez en el número. Así, los estudiantes comprenden que el número también puede ser visto como totalización de una o más agrupaciones.

- Las tareas de la situación 2 permiten que los estudiantes de Transición progresen en la comprensión de la estructura la secuencia numérica (simbólica) del 1 al 30. El desarrollo de la propuesta de aula permitió que los estudiantes utilizaran diferentes estrategias: el conteo (nivel cadena irromplible, y cadena romplible), el reconocimiento de la posición de las cifras en la organización de los números; y el reconocimiento del sucesor y antecesor de un número para completar la secuencia numérica escrita. Lo anterior deja ver que los planteamientos de Chamorro (2005) tienen sentido en lo relacionado con el aprendizaje de la cantinela en los primeros años, al parecer los estudiantes reconocen el esquema de las posiciones (los números posteriores a 10, deben ir precedidos de 1, como, 11,12, etc.) y reconocen la serie elemental (saben que 15 va después de 14 porque 5 va después de 4), lo cual, da a conocer que los estudiantes tienen una idea del valor posicional lo cual es parte importante en la comprensión del SND.
- La realización de las tareas de la situación 3 en torno a la realización de cambios de monedas, permitió que los estudiantes tuvieran un mayor acercamiento a los cambios de un agrupamiento de 10 unidades de orden inferior a una unidad de orden superior. Para ello fue necesario que en el desarrollo de la tarea 2 de la situación 3 se propiciaran los espacios para que la docente y los mismos estudiantes recordaran las reglas de los cambios (por ejemplo: 10 monedas de \$100 se cambian por una moneda de \$1.000). Teniendo en cuenta lo anterior y según los planteamientos de Saxton y Cakir (2006) realizar cambios es una habilidad que deben desarrollar los estudiantes para acercarse a la comprensión del SND en la escolaridad.
- Los estudiantes de Transición establecen relaciones de orden entre notaciones simbólicas. Los resultados de esta investigación dejan ver que los planteamientos de Lerner y Sadovsky (1994) son importantes, pues al realizar la comparación de representaciones simbólicas los estudiantes expresan sus hipótesis sobre la manera en que funciona el SND; entre las hipótesis que muestran los estudiantes se identificaron las siguientes: entre dos números de diferente cantidad de cifras, el mayor es el que tiene mayor cantidad de cifras; entre dos números de igual cantidad de cifras se comparan los dígitos de la potencia mayor, es decir “el primero es el que manda”; y si los dígitos de la potencia mayor son iguales, las cifras que se deben comparar son las

inmediatamente anteriores a ellas. De manera que, las comparaciones entre representaciones simbólicas incitan a los estudiantes a expresar aspectos importantes sobre la manera en que funciona el SND como el valor posicional.

- Al integrar tareas que involucran el conteo de monedas de diferentes denominaciones los estudiantes se acercan a la comprensión de algunas regularidades en la secuencia numérica verbal propia del SND. Lo anterior se da cuando la docente ayuda a contar la cantidad de dinero, en este proceso los estudiantes empiezan a descubrir algunas regularidades en el sistema, como por ejemplo, reconocen que después de una decena (20, 30...90), se repite esta palabra, se le agrega la conjunción (y), y un dígito del 1 al 9 siguiendo el orden (**noventa** y uno, **noventa**, etc.). Lo mismo sucede en el conteo de cien en cien, los estudiantes descubren algunas regularidades; las palabras terminan en “**cientos**” y algunas veces tiene semejanza con los dígitos: **doscientos**, **trescientos**, **cuatrocientos**. Por tanto, los estudiantes a partir de las tareas establecen regularidades que hace posible comprender algunos aspectos de la organización de la secuencia numérica verbal del SND.
- Las dificultades que se presentaron al desarrollar las tareas de agrupación son las siguientes: algunas palabras número no revelan propiamente los agrupamientos de diez que componen el número; debido a que a los estudiantes se les dificulta realizar conteos de diez en diez y de cien el cien, no pueden establecer el valor del dinero que poseen en el momento; la naturaleza de las palabras número obstaculizan el aprendizaje de la secuencia numérica convencional en el orden convencional y finalmente a los estudiantes se les dificulta hacer cambios de una unidad de orden superior por 10 unidades de orden inferior, este cambio implica la coordinación jerárquica de la estructura de unidades de diferente orden.
- Las disposiciones del MEN (2009b) dejan de lado diferentes conceptos matemáticos con relación al CNN y el SND que se pueden trabajar en estos primeros años, como el número como posición (primero, segundo, tercero), las relaciones de orden entre representaciones simbólicas, las agrupaciones de diez, la composición y descomposición de cantidades, el concepto de cero, el valor relativo, y el sucesor y el antecesor de un número. Los cuáles deberían tenerse en cuenta debido a que los

estudiantes, como se muestra en la investigación, pueden avanzar en la comprensión de estos conceptos.

Con relación a la Cardinalidad, ordinalidad y agrupación se puede concluir que:

- La comprensión de la agrupación de diez o la base del SND, está ligado a la comprensión de la cardinalidad y la ordinalidad. Evidentemente, para poder hacer agrupaciones de diez, se requiere de conocimiento cardinal del diez, además de la secuencia numérica verbal que permita realizar el conteo de los 10 elementos para realizar la agrupación con objetos concretos.
- Descomponer los números en agrupaciones de diez, le permite al estudiante acercarse a la comprensión del número en el SND. Así, pasan de comprender el número como una colección total a comprender el número como colección que puede ser descompuesta en otras colecciones utilizando la base del sistema, es decir la base diez.
- Realizar agrupaciones de diez unidades para realizar cambios de unidades de orden inferior a unidades de orden superior con las monedas, aporta a la comprensión de la manera en que se organiza el número desde el SND, en el cual se utilizan diferentes potencias 10^1 (10), 10^2 (100) y 10^3 (1.000).

Teniendo en cuenta todo lo anterior se obtiene que:

- La propuesta de aula presentada en este trabajo permitió caracterizar aspectos conceptuales y procedimentales del SND en estudiantes de Transición de la I.E. D. Ciudad de Bogotá, en lo correspondiente a los conceptos de ordinalidad, cardinalidad y agrupación, caracterizar tales aspectos implicó reconocer las estrategias utilizadas por los estudiantes al realizar las tareas, identificar los conceptos que pusieron en práctica y las dificultades a las que se enfrentaron.
- Los resultados de la propuesta de aula permitieron que los estudiantes comprendieran que el concepto de agrupación está asociado con la noción de la base 10, el concepto de cardinal está asociado con la cantidad que representa la notación indo-arábiga, y la comprensión del ordinal está asociada al valor posicional; así, agrupación, cardinal y ordinal son conceptos claves en la comprensión del SND.

- El desempeño de los estudiantes al desarrollar las tareas dan a conocer que se apropian de los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación lo cual les permite acercarse al conteo, al concepto de cero, al valor posicional, a la composición y descomposición de cantidades, a la adición, a los cambios, a la simbolización, a la identificación de las regularidades en la secuencia numérica de diez en diez y de cien en cien, los cuales son fundamentales en el aprendizaje del SND.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, se considera pertinente y posible desde grado Transición enseñar los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación para aproximarse a la construcción de elementos fundamentales del SND como la base, la cantidad y el valor posicional.

4.2 Algunas reflexiones teóricas y metodológicas sobre la enseñanza del CNN y el SND en Transición.

A continuación se presentan algunas reflexiones como consecuencia de los resultados de este estudio en la I.E. D. Ciudad de Bogotá, las cuales apuntan al cuatro objetivo específico de este trabajo.

- La implementación de la propuesta de aula promueve la actitud crítica e investigativa del docente frente al proceso de enseñanza de las matemática en Transición, lo cual conlleva a dejar de lado prácticas infructuosas como hacer planas, darle la respuesta al estudiante o arribar al libro de texto siempre que se pretenda enseñar matemática en Transición. El docente en este proceso se compromete a pensar que los estudiantes pueden construir conocimiento matemático, a dejar el temor de introducir nuevas expresiones por miedo a que los estudiantes no entiendan como “mayor que” o “menor que”. En este proceso de enseñanza, el docente tiene un nuevo rol, el de investigador y por tanto debe interiorizar diferentes concepciones teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje del CNN y el SND en los primeros años de la escolaridad, lo cual a título personal, es lo más complejo.
- Es importante que los maestros de Transición diseñen tareas que potencien el aprendizaje del CNN y del SND, por eso se requiere de un conocimiento pluridisciplinar que abarque componentes matemáticos, cognitivos, comunicativos y de enseñanza. Por tanto, es necesario que los docentes se apropien de elementos

conceptuales, procedimentales y metodológicos como los que se muestran en este trabajo que le permitan tomar una postura crítica y fundamentada al momento de realizar las propuestas de aula para movilizar los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación en Transición.

- En el proceso de aprendizaje del cardinal, del orden y la agrupación los estudiantes presentan dificultades de correspondencia uno a uno, de secuencia numérica verbal, en la adquisición de los términos ordinales, en la composición y descomposición de cantidades, entre otros. El docente debe proponer tareas para que el estudiante supere las dificultades y acercarlo en la comprensión el CNN.
- El docente debe tener presente no solo las representaciones verbales de los estudiantes o las representaciones simbólicas para representar el cardinal, el ordinal o la agrupación. El docente también tiene que tener presente las actuaciones de los estudiantes; como se ha visto en esta investigación, así el estudiante diga la palabra número o escriba una representación simbólica correcta no siempre indica comprensión del concepto.
- Se destaca la relevancia de proponer situaciones problemáticas para que los estudiantes las resuelvan, debido a que se incita a los estudiantes a acercarse a la comprensión de diferentes conceptos y a la simbolización en matemática; así, los símbolos aparecen con un sentido y significado propio
- Las tareas propuestas permiten desarrollar la dimensión ética específicamente valores como la colaboración y el respeto a las normas. Además, se reconoce que la propuesta de aula dirigida a los estudiantes de Transición al parecer aporta a los cuatro aprendizajes fundamentales: *aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos, y aprender a ser.*
- Los docentes pueden estimular a los estudiantes para que utilicen el conteo al momento de realizar tareas en las que deban comparar, componer, totalizar y formar colecciones. Sobre todo en la escuela se deben realizar tareas para que los estudiantes sean conscientes del vínculo estrecho entre el conteo y la cardinalidad de una colección.
- En la enseñanza del CNN los conceptos de sucesor y antecesor deben asociarse no solo a la representación simbólica o verbal sino también al cardinal que representan.

- En las tareas de aula promover el conteo corporal es importante porque permite que el estudiante sea consciente de los agrupamientos de diez presentes en la cantidad y el cardinal que la representa.
- Es necesario reflexionar sobre la importancia del aprendizaje correcto de los ordinales, especialmente de sus términos, y de sus representaciones simbólicas los cuales se han dejado de lado en la enseñanza, y cuando hay que utilizarlos se hace con una denominación equivocada.
- Al momento de trabajar la comparación de cantidades, es importante incluir tareas cuya diferencia entre las cantidades sea mínima (1-4) para que los estudiantes utilicen el conteo y establezcan relaciones de orden.
- La organización de los objetos al realizar el conteo es muy importante, pues dependiendo de la manera en que estén organizados podría provocar una mayor o menor exigencia para el estudiante, tal como se muestra en la situación 1.
- Los resultados indican que las tareas que involucran la descomposición de unidades de mil en centenas, los problemas que involucran la resta y la identificación de un número que cumpla dos condiciones al mismo tiempo (que sea mayor que diez y menor que doce) son tareas complejas para los estudiantes de grado Transición.
- Los materiales utilizados tienen múltiples ventajas, el juego cincuenta fichas permite trabajar la correspondencia uno a uno, la secuencia numérica verbal y lo cardinal. Con el uso del tren, de la banda numérica, y el juego de cartas, los estudiantes se trabaja el reconocimiento y escritura de los numerales indo-arábigos, el sucesor y el antecesor de un número, las relaciones de orden, el valor posicional y la representación simbólica del 10. Por último, el dinero, propicia la comprensión de los cambios de unidades de diferente orden y la descomposición en agrupaciones de diez.
- La propuesta de aula tienen en cuenta situaciones problemas, la lúdica y el juego. La implementación y el desarrollo de situaciones problema, tal como se muestra en los resultados, es una vía efectiva para que el estudiante construya conocimientos matemáticos en la medida en que resuelve el problema, planea estrategias, plantea preguntas y comparte posiciones con sus pares. Además, se reconoce la lúdica y el juego como dinamizador de las tareas, las cuales, sin ponerlo en tela de juicio, posibilitan la apropiación de elementos conceptuales y procedimentales del CNN y el

SND, fomentan espacios en los cuales se desarrollan habilidades comunicativas en lo referido al SND y favorece la apropiación de las normas, el intercambio de conocimientos, el trabajo en equipo y la formación en valores.

- Para realizar el conteo (regularmente de cantidades superiores a 3) los estudiantes utilizan el señalamiento con el dedo o con un objeto para contar los elementos de una colección. Sin embargo, hay que tener en cuenta que no toda expresión verbal implica necesariamente conocimiento del cardinal. Los estudiantes utilizaron las palabras número para realizar el conteo, como se muestra a continuación: dicen una palabra número, enuncian la secuencia numérica verbal y repiten el último número o lo dicen en voz alta, dicen solamente la secuencia numérica verbal o dicen dos palabras número o más. Sin embargo, hay que tener en cuenta que los estudiantes que utilizan las palabras número no siempre tienen conciencia de que esa palabra representa la cantidad de la colección.
- En el desarrollo de la propuesta de aula los estudiantes cumplen un nuevo rol, ellos también enseñan, al ver que sus compañeros tienen alguna equivocación o duda, intervienen, corrigen y ayudan. En el proceso de enseñanza, generar espacios en los cuales los estudiantes den a conocer sus opiniones sobre cómo funciona el SND es importante, por un lado la persona que dice una respuesta incorrecta aprende, pues se da cuenta que hay una opinión diferente a la propia, necesariamente lo que sus compañeros le dicen adquiere algún significado para él. En este sentido la dimensión comunicativa, es importante, pues le permite a los estudiantes expresarse mejor, confirmar saberes, corregir y aprender nuevos conceptos. Además, es necesario realizar tareas que promuevan la atención y la memorización como habilidades importantes en el desarrollo de la dimensión cognitiva.

Finalmente, se debe resaltar que la investigación aquí expuesta tiene gran incidencia en la formación personal y académica de la autora. Cada uno de los aspectos abordados en este trabajo enriquece los horizontes teóricos conceptuales, procedimentales y metodológicos para la enseñanza del CNN y el SND en la escolaridad. Además, la elaboración de este trabajo de investigación se constituye como una práctica formativa, permite documentar una problemática propia del campo de la educación matemática inicial, tomar elementos teóricos y

metodológicos que posibilitaron la elaboración de una propuesta de aula y una entrevista, y que además fueron la base para realizar los análisis. Así pues, se contribuye al enriquecimiento del campo teórico y metodológico de la enseñanza de las matemáticas en la educación inicial.

4.3 Sobre el MTL y futuros estudios

Teniendo en cuenta los planteamientos de Filloy (1999) a partir del MTL propuesto sobre la construcción de algunos elementos fundamentales del SND en Transición, en coherencia con la Teoría los MTL tienen como característica la recursividad, en el cual después de haberse hecho un estudio experimental en el que se confronta el planteamiento del problema con el desarrollo de la implementación hasta el análisis e interpretación de los resultados, la problemática inicial se enmarca en la perspectiva de un nuevo MTL.

Así, pues atendiendo a la característica de la recursividad de los MTL, se da a conocer que los resultados obtenidos en el presente estudio pueden ir más allá de una aproximación a la enseñanza del SND en Transición, pueden seguirse los estudios con una propuesta de enseñanza en la que se trabajen operaciones aditivas, o donde se trabaje con mayor énfasis sobre las agrupaciones de diez, como una continuación de la enseñanza y aprendizaje del SND en primaria. También sería interesante observar los avances de los estudiantes al aplicarles tales tareas durante todo un año y darles seguimiento en los años posteriores, para conocer su avance en términos del conocimiento matemático especialmente en la comprensión del SND.

Las preguntas útiles, que podrían ser las generadoras de tal estudio serían:

- ¿En qué medida los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación contribuyen a la comprensión de la estructura aditiva?
- ¿En qué medida los conceptos de cardinalidad, ordinalidad y agrupación contribuyen a la comprensión del SND en otros grados de la educación básica primaria?
- ¿Cómo los estudiantes de Transición pueden comprender el SND con todas sus características?

Con estas preguntas se puede proponer un nuevo problema en la perspectiva de un nuevo MTL, el cual implica un trabajo de planeación, fundamentación, revisión y análisis a la luz de los componentes del MTL.

4.4 Referencias bibliográficas

- Achinstein, P. (1967). *Los Modelos Teóricos*. México D.F., México: Universidad Nacional Autónoma de México. Problemas Científicos y Filosóficos.
- Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA*, 8(1), 30-46.
- Anacona, M., Arbeláez, G., & Recalde, L. (1998). *Número y magnitud: una perspectiva histórica*. Cali, Colombia: Artes gráficas Univalle.
- Balbuena, H., Block, D., Fuenlabrada, I., Valencia, R., & Ortega, L. (1991). Reflexiones en torno a la modernización educativa. El caso de las matemáticas en los primeros grados de la primaria. *Educación Matemática*, 3(3), 40-57.
- Bedoya, L. M. (2003). *Peano, Lawvere, Peirce: Tres axiomatizaciones de los números naturales* (Trabajo de grado para optar al título de Profesional en Matemática con énfasis en Estadística). Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.
- Benito, C. & Sanchez, J. (2011). *La Comunicación en el Aula de Primero de Primaria Sobre los Números Naturales*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidós.
- Blanco, H. (febrero, 2008). La Educación Matemática desde un punto de vista sociocultural y la formación de Licenciados en Matemáticas y Etnoeducadores con énfasis en matemáticas. *Boletín ASOCOLME*, 1 (1), 4-6.
- Blanco, H., (2009). *Del número a los sistemas de numeración* (Trabajo de investigación de maestría) Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Broitman, C., Grimaldi, V., y Ponce, H. (2011). *El valor posicional. Reflexiones y propuestas para su enseñanza*. Buenos Aires, Argentina: Santillana.
- Brun, J. (2002). *Los Presocraticos*. México D.F, México: Cruz.
- Cabanne, N. E., y Ribaya, M. T., (2009). *Didáctica de la matemática en el nivel inicial: tareas para el niño de 3 a 5 años*. Buenos Aires, Argentina: Bonum.
- Carey, S. (2004). Bootstrapping y the origin of concepts. *Daedalus. Winter*, 133(1), 59-68. doi: 10.1162/001152604772746701.
- Castaño, J. (1997) Hojas pedagógicas 6. Colección: matemáticas serie lo numérico. Proyecto: Descubro las Matemáticas Fundación Restrepo Barco. Bogotá, Colombia.

-
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1988). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid, España: Síntesis.
- Cerón, C y Gutiérrez, L (2013). *La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos*. (Trabajo de Pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid, España: Pearson Educación.
- Collado, L. (2014). *La Enseñanza del Número Cardinal y Ordinal en Educación Infantil*. (Trabajo de maestría). Zaragoza, España, Colombia.
- Collazos, V. & Girón, J. (2014). Algunas Concepciones Sobre el Número Natural que Privilegian Docentes de Preescolar y Primero de Primaria. Universidad del valle, Cali, Colombia.
- Collette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas*. Madrid, España: Siglo XXI.
- Conant, L. (1994). El arte de contar. En: J. Newman. *El mundo de las matemáticas*, (p. 134). Tomo 4. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.
- Congreso de Colombia. (11 de septiembre de 1997). Normas relativas a la prestación del servicio educativo del nivel preescolar. [Decreto 2247 de 1997]. DO: 43.131.
- Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994) Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214.
- Congreso de Colombia. (8 de noviembre de 2006). Código de la infancia y la adolescencia. [Ley 1098 de 2006]. DO: 46.446.
- Constitución política de Colombia [Const.] (1991) 2da Ed. Legis.
- Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* y otros escritos, Madrid, Alianza Editorial.
- Fernández, C. (2010). Análisis Epistemológico de la Secuencia Numérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 59-87.
- Filloy, E.(1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. *Investigaciones en Matemática Educativa*. México D.F., México: Iberoamericana.
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2007). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. Berlin Heidelberg, New York: Springer.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Boston, London: Kluwer Academic Publishers.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York, Estados Unidos: Springer-Verlag.

-
- Fuson, K. c., & Hall, 1. W. (1983). *The acquisition of early number word meanings*. New York, Estados Unidos: Academic Press.
- Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction*, 7(4), 343-403.
- Fuson, K. C., y Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first-and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 21 (3), 180-206.
- Gelman, R. (1978). Counting in the preschooler: What does and does not develop. En Siegler, R. *Children's thinking: What develops*, (pp 213-242). Estados Unidos: Lawrence.
- Gelman, R. y Gallistel, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44(1), 43-74.
- Gerdes, P. (2008). *A numeração em Moçambique. Contribuição para uma reflexão sobre cultura, língua e educação matemática*. USA y London, Reino Unido: Lulu.
- Gilmore, C. K., y Spelke, E. S. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*. 107(3) 932-945.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para los maestros*. Recuperado de:
http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf
- Goldin, G., y Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, and B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (397-430). New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G. A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 125-145). New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Godino, J. D. (2004). *Matemáticas para maestros*. Recuperado de:
http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/livros/Matematicas_maestros.pdf
- González, A. y Weinstein, E. (2008). *¿Cómo enseñar matemáticas en el jardín de infantes?* Buenos Aires, Argentina: Colihue.
- González, O. y Castellanos, M. (2008). El ábaco abierto como mediación pedagógica en el desarrollo de los procesos de pensamiento lógico-matemáticos. En C. Luque (Presidencia), *XVIII Encuentro de Geometría y VI encuentro de Aritmética*, Bogotá, Colombia.

-
- Gras, J. A., Argilaga, M. T. A., y Benito, J. G. (1990). *Metodología de la investigación en ciencias del comportamiento*. Murcia, España: Universidad de Murcia.
- Ifrah, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid, España: Alianza.
- Kamii, C. (1995). *Reinventando la aritmética II. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid, España: Visor.
- Kamii, C. K. (2000). *El niño reinventa la aritmética, implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid, España: Visor.
- Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p. 159-196). New Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Le Corre, M. y Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, 105(2), 395-438.
- Le Corre, M., Vab de Walle, G., Brannon E. M., y Carey, S. (2006). Re-visiting the competence/performance debate in the acquisition of the counting principles. *Cognitive psychology*. 52(2), 130-169.
- Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, Cecilia y Saiz, Irma (comps.): *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.
- Lesh, R., Landau, M., y Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied problem-solving research. In R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (p. 263-343). New York, Estados Unidos: Academic Press.
- Leslie, A., M., Gallistel, C., R., y Gelman, R. (2007). Where Integers Come From. En Carruthers, P., Laurence, S., Stich, S. (Ed.) *The Innate Mind* (p. 109-138). New York, Estados Unidos: Oxford University Press.
- Maravilla, A. (2011). *El orden y el conteo en la construcción de los números naturales con el modelo de John von Neumann en niños preescolares*. (Trabajo de Maestría) Instituto Politécnico Nacional, México D.F, México.
- MEN (1998a). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santafé de Bogotá, Colombia: Magisterio.
- MEN (1998b). *Lineamientos Curriculares de Preescolar*. Santafé de Bogotá, Colombia: Magisterio.
- MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Santafé De Bogotá, Colombia: Magisterio.
- MEN (2009a). *Documento No 10: Desarrollo infantil y competencias en la primera infancia*. Santafé de Bogotá, Colombia.

-
- MEN (2009b). *Documento No 13: Elementos conceptuales aprender y jugar. Instrumento diagnóstico de competencias básicas en Transición*. Santafé de Bogotá, Colombia.
- MEN. (2010). *Política Educativa para la primera infancia*. Santafé de Bogotá, Colombia.
- Montessori, M. (1912). *Manual práctico del método Montessori*. Barcelona, España: Araluce.
- Nick Junior (2016). *Pepa Pig*. De <https://www.youtube.com/watch?v=oJuN5yIzBTQ>
- Obando, G., y Vásquez, N.,(2008). *Pensamiento numérico del preescolar a la educación básica*. Curso dictado en 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Colombia: Valledupar.
- Orozco, M., Guerrero, D. F., & Otálora, Y. (2007). Los errores sintácticos al escribir numerales en rango superior. *Infancia y aprendizaje*, 30(2), 147-162.
- Orozco, M., y Hederich, C. (2002). *Errores de los niños al escribir numerales dictados*. Universidad del Valle y Colciencias.
- Ortiz, G. (2014). *Los números naturales*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: nova methodo*. Recuperado de <http://www.archive.org/details/arithmeticespri00peangoog>
- Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica*. Edición de Armando Sercovich. Madrid: Taurus.
- Prieto, C. A. (2012). *La comprensión del sistema de numeración decimal y su adecuado uso en las operaciones aritméticas* (Trabajo de Maestría). Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona, España: Horsori.
- Puig, L. (2003). Signos, Textos y sistemas matemáticos de signos. En Filloy, E. (Ed.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (p. 174-186). México D.F., Mexico: Fondo de Cultura Económica/CINVESTAV.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma* (58), 7-23.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación. en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Sarnecka, B. W., & Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition*, 108(3), 662-674.
- Saxton, M., & Cakir, K. (2006). Counting-On, Trading and Partitioning: Effects of Training and Prior Knowledge on Performance on Base-10 Tasks. *Child development*, 77 (3), 767-785.

- Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S. M., & Christinat, C. T. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y aprendizaje*, 23(90), 31-50.
- Smith, D. y Ginsburg, J. (1994). De los números a los numerales y de los numerales al cálculo. En: J. Newman. *El mundo de las matemáticas* (p. 50- 154). Tomo 4. Barcelona, España: Editorial Grijalbo.
- Stevin, S. (1634). *Les Oeuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges*. Recuperado de <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView/ECHOzogiLib?url=/mpiwg/online/permanent/library/NUA55ZF4/index.meta&pn=1&ws=3&mode=txttool&start=1>
- Talens, J. y Company, J. M. (1984). The Textual Space: On the Notion of Text. *The Journal of the Midwest Modern Language Association*, 17(2), 24-36.
- Terigi, F., & Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista iberoamericana de educación*, 43, 59-83.
- Vasco, C. E. (1.999). Significado educativo del texto. En: Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E., Sánchez, G., *Análisis de textos escolares de Matemática* (pp 11 -34). Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Vásquez, N. (2010). *Un Ejercicio de Transposición Didáctica en Torno al Concepto de Número Natural en el Preescolar y el Primer Grado de Educación Básica* (Trabajo de Maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México D.F., México: Trillas.
- Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24(2), 220-251.
- Zhang, J., & Norman, D. A. (1993). A cognitive taxonomy of numeration systems. In *Proceedings of the fifteenth Annual Conference of the cognitive Science Society* (p. 1098-1103). New Jersey, Estados Unidos: Erlbaum.

Anexos

Anexo 1. Encuesta



Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Encuesta



Nombre: _____

Título profesional: _____

Institución Educativa: _____

Grado en el que Enseña: _____

Fecha: _____

1) Indique el tipo de documentos que utiliza para preparar su trabajo en matemáticas con los estudiantes de Transición.

2) Escriba el tipo de materiales que utiliza para la iniciación al concepto de número natural en sus estudiantes de Transición.

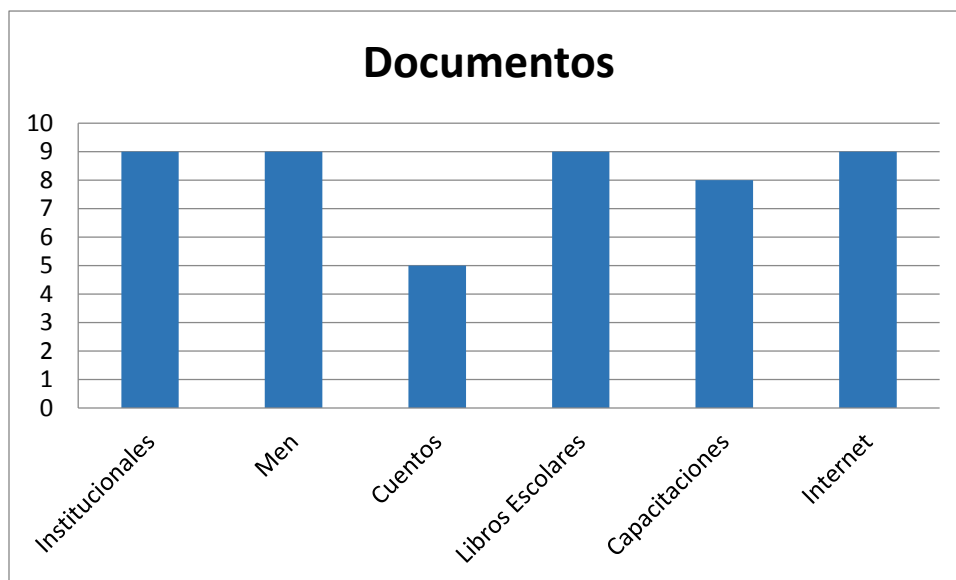
3) Escriba los textos que usted como docente toma de referencia para los procesos de enseñanza del concepto de número natural en Transición (especificando la editorial)

4) Indique el libro de texto que utilizan los estudiantes de Transición para la clase de matemáticas (Especifique la Editorial)

5) En caso de tenerlos, Mencione los materiales complementarios que tienen los libros de textos para facilitar el aprendizaje del concepto de número en los estudiantes de Transición

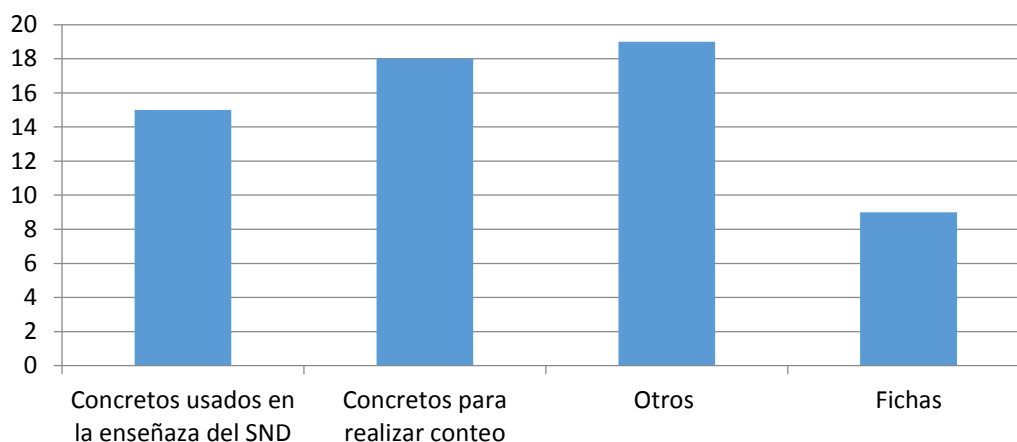
Anexo 2. Resultados de Encuesta pregunta 1

1) Indique el tipo de documentos que utiliza para preparar su trabajo en matemáticas con los estudiantes de Transición.

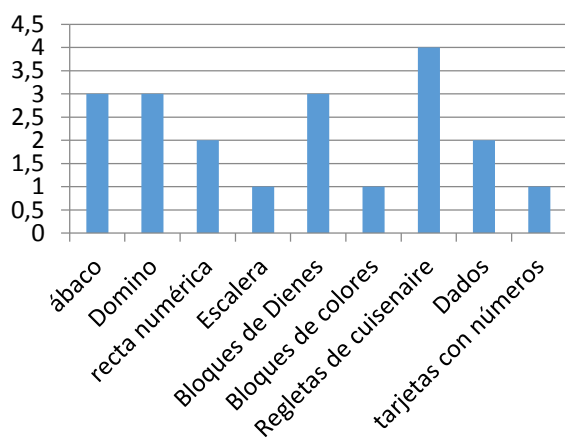


Anexo 3. Resultados de Encuesta pregunta 2

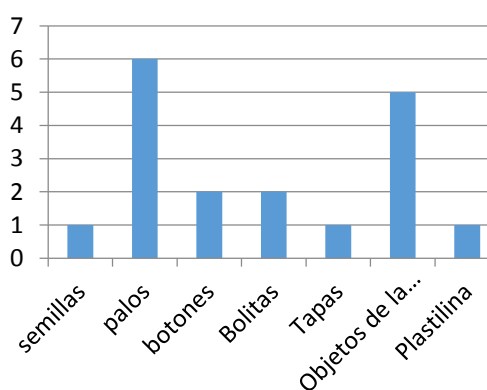
2) Escriba el tipo de materiales que utiliza para la iniciación al concepto de número natural en sus estudiantes de Transición.



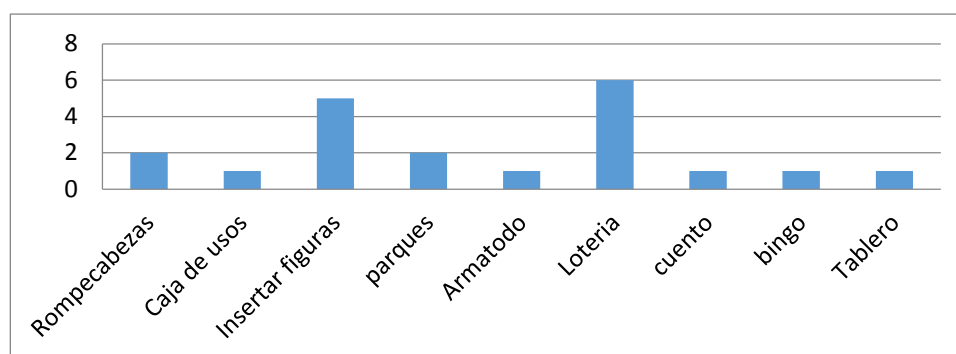
Respecto a los materiales concretos usados en la enseñanza del SND



Respecto a los materiales concretos para realizar conteo

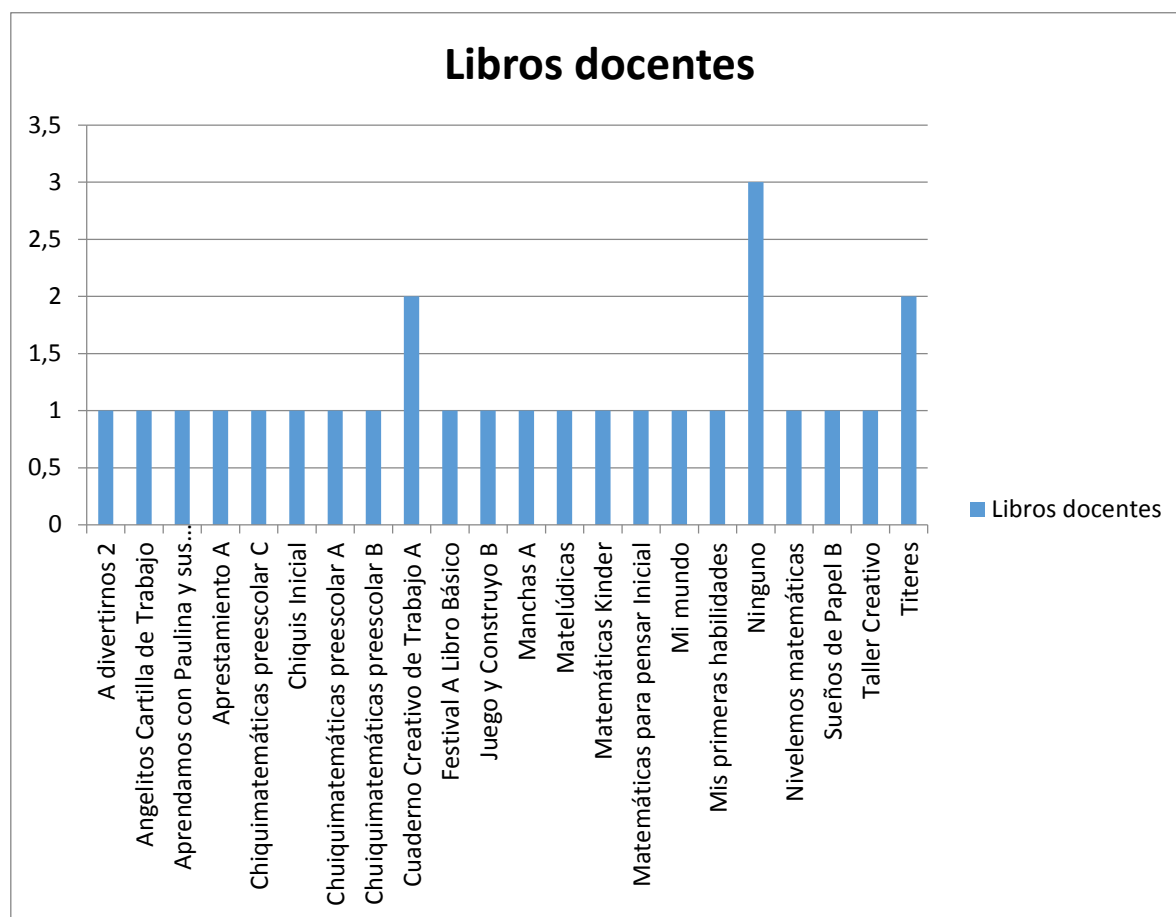


Otros materiales



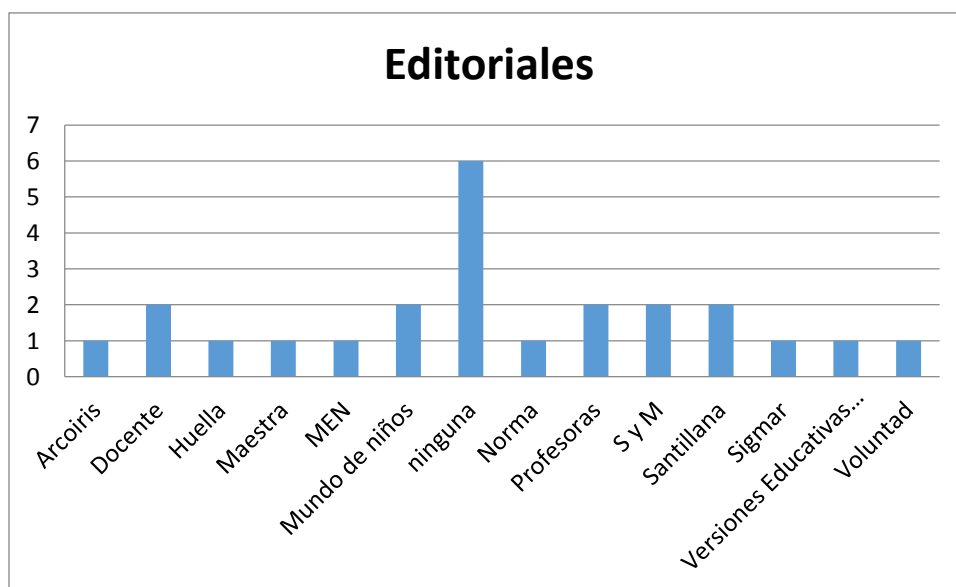
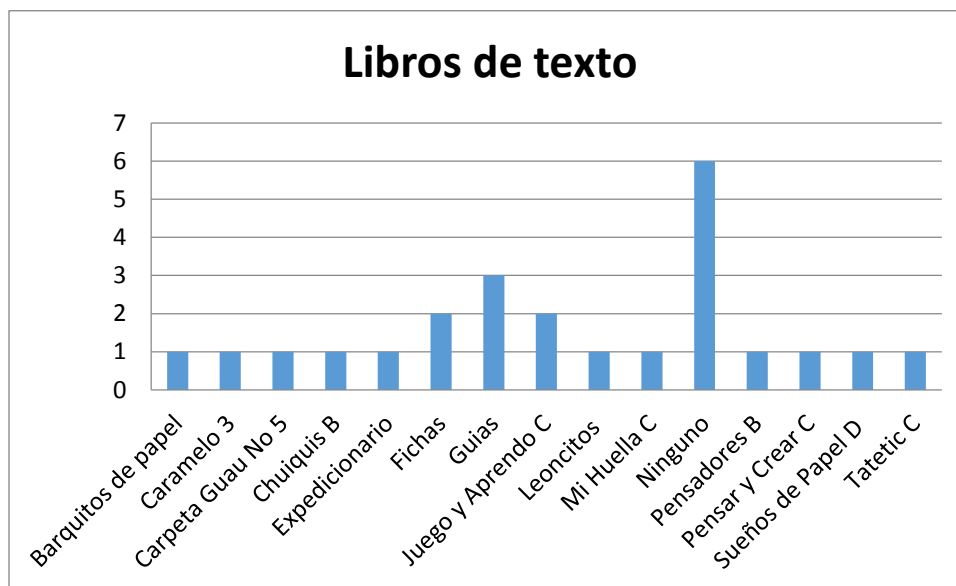
Anexo 4. Resultados de Encuesta pregunta 3

3) Escriba los textos que usted como docente toma de referencia para los procesos de enseñanza del concepto de número natural en Transición (especificando la editorial)



Anexo 5. Resultados de Encuesta pregunta 4

4) Indique el libro de texto que utilizan los estudiantes de Transición para la clase de matemáticas (Especifique la Editorial)



Anexo 6. Resultados de Encuesta pregunta 5

5) En caso de tenerlos, Mencione los materiales complementarios que tienen los libros de textos para facilitar el aprendizaje del concepto de número en los estudiantes de Transición.



Anexo 7. Protocolo de la propuesta de aula

Anexo 7.1 Protocolo de situación 1

Para la realización de esta secuencia se cuenta con 3 sesiones, cada una tiene una duración aproximada de 30 a 45 minutos. Las tareas las realizan 12 estudiantes de la jornada de la mañana en el I.E.D. Ciudad de Bogotá.

- ¿Cuántas fichas te faltan para tener la misma cantidad que tu compañero? Esta pregunta se realiza al principio del juego cuando las cantidades no exceden a 20 fichas. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le debe pedir que cuente la cantidad de fichas que tiene él y la cantidad de fichas que tiene el compañero, luego se le repite nuevamente la pregunta.
- ¿Quién ha colocado menos fichas en la tabla? Esta pregunta se realiza cuando la diferencia entre las cantidades es menor o igual a cuatro. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le debe pedir que cuente la cantidad de fichas que tiene él y la cantidad de fichas que tiene el compañero, luego se le repite nuevamente la pregunta.
- ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados? Esta pregunta se realiza en cualquier momento del juego. Si el niño no da una respuesta acertada se le debe pedir que cuente la cantidad de puntos que tienen los dos dados en total.
- ¿Cuánto te falta para ganar? Esta pregunta se realiza al finalizar el juego, cuando falten 10 fichas o menos. Si el niño no da una respuesta acertada se repite nuevamente la pregunta.

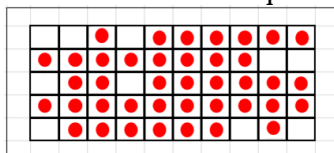
Esta tarea comienza con la presentación por parte de la docente del juego “Cincuenta fichas”, cada pareja de estudiantes se organizan en una mesa (las parejas se conforman de manera aleatoria), los estudiantes desarrollan el juego llenando la tabla con las fichas de acuerdo a los puntajes obtenidos en los dados. Al iniciar cada tarea de esta situación, los estudiantes se organizan para jugar “Cincuenta fichas”.

Para realizar la tarea 1, la docente y la investigadora les plantean las siguientes preguntas a los estudiantes, mientras ellos desarrollan el juego “Cincuenta fichas”.

Luego, los estudiantes se organizan de manera individual y la profesora les pasa la ficha para que desarrollen el punto 2. La maestra les indica que teniendo en cuenta las fichas en el tablero que se muestra en la imagen, ¿Cuántas fichas deben colocar en el tablero para llenar todas las casillas? Si el estudiante no sabe escribir el número, se le pedirá que dibuje la cantidad de fichas. Si no da una respuesta acertada al representar la cantidad se le pedirá que cuente la cantidad de casillas que hacen falta y la cantidad que ha dibujado.

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

- Teniendo en cuenta las fichas en el tablero que se muestra a continuación:



¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para **llenar** todas las casillas?

Con los estudiantes organizados de manera individual la profesora les pasa la ficha para que desarrollen el punto 3. La maestra les plantea a los estudiantes la siguiente situación: Lucia tiene seis fichas como se muestra en la imagen (La docente cuenta las seis fichas que aparecen en la imagen). Pero Pedro tiene una ficha más que Lucia. ¿Cuántas fichas tiene Pedro? Dibuja las fichas que tiene Pedro. Si el estudiante no entiende se le repite toda la situación.

Después, la maestra le recuerda a los estudiantes que Lucia tiene seis fichas y les dice a los estudiantes que Mariana tiene dos fichas menos que Lucia. ¿Cuántas fichas tiene Mariana? Dibuja las fichas que tiene Mariana. Si el estudiante no entiende o contesta de manera incorrecta se le recuerda la cantidad de fichas que tiene Lucia y se le repite nuevamente que Mariana tiene dos fichas menos que Lucia, entonces ¿Cuántas fichas tiene Mariana? Dibuja las fichas que tiene Mariana.

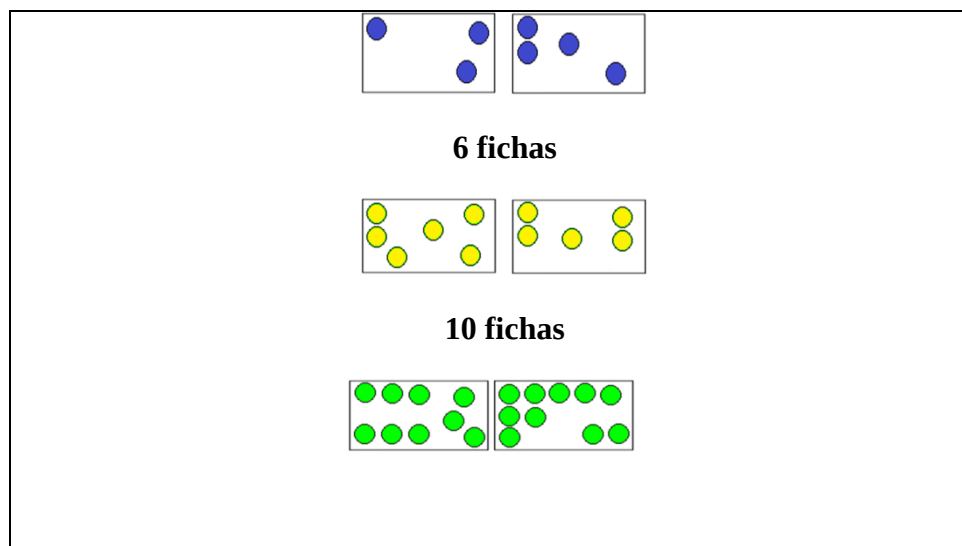
Nombre: _____	Grado: _____	Fecha: _____
• Lucia tiene seis fichas como se muestra a continuación:   a. Pedro tiene una ficha más que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Pedro  b. Mariana tiene 2 fichas menos que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Mariana 		

Para desarrollar la tarea 2 los estudiantes se organizan en parejas y utilizan las fichas de plástico del juego “Cincuenta fichas”. La docente les dice a los estudiantes que quiere que en parejas formen una colección con un número particular de fichas. ¿Podrías mostrarme x fichas? Solamente x fichas. Si la pareja de estudiantes no dan una respuesta acertada se le dice: Pueden contar para estar seguros de que tienes solamente x fichas ¿Puedes arreglarlo para que sean solamente x fichas? Este mismo procedimiento se realiza con 0, 3, 4, 6, 8 y 10.

Luego, los estudiantes se organizan de manera individual y la profesora les pasa la ficha para que desarrollen el punto 2. Para realizar este punto la docente guía a los estudiantes para que observen las parejas de cartas y señalen con una X la carta que represente un número de elementos en particular (3 fichas, 6 fichas y 10 fichas). Si el niño no da una respuesta acertada, se le pregunta por la cantidad que tiene cada tarjeta y se le vuelve a dar la indicación: “Señala con una X la carta que represente 3/6/10 fichas” según corresponda

Nombre: _____	Grado: _____	Fecha: _____
---------------	--------------	--------------

- Observa las parejas de cartas y señala con una X la que tiene:
3 fichas



Con relación al desarrollo de la tarea 3, es necesario tener en cuenta que antes de iniciar a jugar “Cincuenta fichas” la docente debe presentarle a cada pareja de estudiantes la tabla, en la cual deben escribir su nombre y registrar en cada casilla, de manera individual, la cantidad obtenida al lanzar los dados mientras juegan “Cincuenta fichas”.

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

1. Cada pareja de estudiantes juegan “Cincuenta Fichas” y de manera individual, registran en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados.

Estudiante 1: _____ Estudiante 2: _____

TURNO	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

TURNO	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

En este punto la investigadora y la docente deben verificar si los estudiantes están utilizando la tabla para realizar la consignación y si los estudiantes están consignando de la manera adecuada la cantidad de puntos obtenidos en los dados. Si los niños no dan una respuesta acertada al registrar la docente o la investigadora le piden al estudiante que cuenten nuevamente la cantidad de puntos en el dado y la comparen con la cantidad que han registrado en la tabla, de esta manera se les pregunta ¿Puedes arreglarlo para que queden x puntos en la tabla? (siendo x la cantidad obtenida en los dados).

Más adelante, la docente les dice a los estudiantes que observen los puntajes que han registrado en las tablas y sigan las instrucciones consignadas en el punto 2.

- Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla. La investigadora revisará que los estudiantes realicen este punto.
- Compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo el mayor puntaje? En este punto la docente le da la indicación a los estudiantes para que escriban el nombre del estudiante que obtuvo el mayor puntaje en la línea azul, en caso de que los estudiantes no sepan escribir la investigadora les ayudará a realizarlo.
- Compara con tu compañero los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor cantidad? La docente les da la indicación a los estudiantes de que observen los puntajes que obtuvieron en el cuarto turno y que escriban en la línea roja el nombre del estudiante que obtuvo la menor cantidad, en caso de que los estudiantes no sepan escribir la investigadora les ayudará a realizarlo.
- Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos, compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo más veces diez puntos? La docente les da la indicación a los estudiantes para que colorean los puntajes en los que obtuvieron la cantidad diez y que escriban en la línea verde el nombre del estudiante que obtuvo más veces diez puntos, en caso de que los estudiantes no sepan escribir la investigadora les ayudará a realizarlo.
- Escribe una X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10? La docente formula esta pregunta a los estudiantes, si no entienden los estudiantes repite esta pregunta.

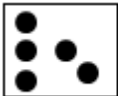
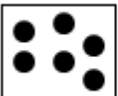
Observen los puntajes que han registrado en las tablas y sigan las siguientes instrucciones:

- Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla
- Compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo el mayor puntaje? _____
- Compara con tu compañero los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor cantidad? _____
- Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos, compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo más veces diez puntos? _____
- Escribe una X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10? _____

Luego, los estudiantes se organizan de manera individual y la profesora les pasa la ficha para que desarrollen el punto 3. Para realizar este punto la docente guía a los estudiantes para que observen las parejas de dados y completen los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le dice: Los puntos que dibujaste en la cara del dado no completan diez. ¿Puedes arreglarlo para obtener diez puntos en total?

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

La docente le indica a los estudiantes que de manera individual, completen los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.

En esta situación, la investigadora toma nota de los desempeños de los niños en el desarrollo de cada una de las preguntas y toma los registros fílmicos y fotográficos.

Anexo 7.2 Protocolo de situación 2

Para la realización de esta secuencia se cuenta con 3 sesiones, cada una tiene una duración aproximada de 30 a 45 minutos. Las tareas las realizan 12 estudiantes de la jornada de la mañana en el I.E.D. Ciudad de Bogotá

Esta situación comienza con la presentación por parte de la docente del video Pepa Pig “Viaje en tren” (<https://www.youtube.com/watch?v=oJuN5yIzBTQ>); el video tiene una duración de 4:29 minutos.

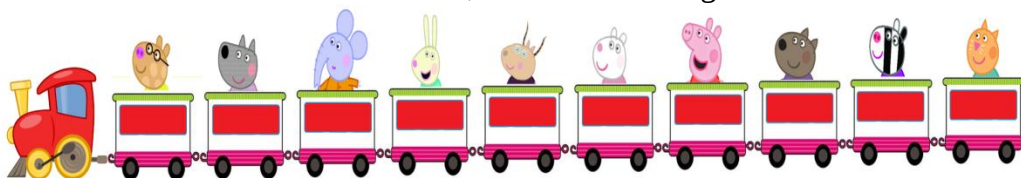
Luego, la maestra le muestra a los estudiantes un tren con diez vagones pegado en el tablero, cada vagón con un personaje de la serie (Ver ilustración 25)

La maestra les recuerda a los estudiantes el nombre de los personajes Pedro poni, Wendy loba, Emilia elefanta, Rebeca liebre, Madame gacela, Susy oveja, Pepa cerdita, Danny perro, Zoe cebrá y Candy gata.

Luego, los estudiantes se organizan de manera individual y la profesora les pasa la ficha para que desarrollen el punto 1.

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

1. De manera individual, los estudiantes siguen las instrucciones



- e. ¿En qué posición está Emily la Elefante?

La maestra les da las siguientes indicaciones a los estudiantes:

- Encierra en un círculo el personaje que está ubicado de primero en el tren. Si el estudiante no responde o no da una respuesta acertada se le repite nuevamente la pregunta.
- Escribe una X sobre el personaje que está ubicado de último en el tren. Si el estudiante no responde o no da una respuesta acertada se le repite nuevamente la pregunta.

- c. Colorea el personaje con quién debe cambiar el puesto Candy Gata para estar en el cuarto puesto. Si el estudiante no da una respuesta acertada, se le recuerda el orden: “Primero, segundo, tercero,... décimo” mientras se señala los personajes respectivamente. Luego se le repite la pregunta.
- d. ¿En qué posición esta Emily la Elefante? Si el estudiante no da una respuesta acertada, se le recuerda el orden: “Primero, segundo, tercero,... décimo” mientras se señala los personajes respectivamente. Luego se le repite la pregunta. Si el niño no sabe escribir la respuesta, la docente o la investigadora le escribirá la respuesta.

Para todas las preguntas anteriores si el estudiante no da una respuesta acertada se tendrá en cuenta la primera respuesta que el estudiante ha dicho y la segunda respuesta también.

Para realizar el punto 2, la docente llama la atención de los estudiantes para que miren nuevamente el tren que ésta en el tablero y les indica que escojan uno de los personajes, el que más les llame la atención y escriban un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren. Este mensaje lo deben escribir dentro del rectángulo.

2. Teniendo en cuenta la organización del tren. Escoge uno de los personajes, el que más te llame la atención y escribe un mensaje para que la profesora conozca la ubicación del personaje

Después, la docente le presenta a los estudiantes un tren con dos vagones. En el primer vagón hay 5 personajes del video: Pepa cerdita, Wendy loba, Emilia elefanta, Rebeca liebre y Madame gacela y en el segundo vagón están los otros personajes del video: Susy oveja, Pedro poni, Danny perro, Zoe cebrá y Candy gata. La docente cuenta cada grupo de personajes y los pone en los vagones respectivos. Luego, la docente cuenta que Pepa cerdita quiere pasarse al segundo vagón, así que toma a Pepa cerdita del primer vagón y la desplaza al segundo vagón. Finalmente, la docente le pasa a los estudiantes la ficha para responder las preguntas que aparecen en el punto 3:

3) Indica:

- a. ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?
- b. ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?



Si los estudiantes no pueden escribir el número, se les dice a los estudiantes que dibujen la cantidad de personajes.

También se les presenta el siguiente caso: En el primer vagón están 4 personajes del video: Pepa cerdita, Wendy loba, Emilia elefanta y Rebeca liebre; y en el segundo vagón están 4 personajes del video: Susy oveja, Danny perro, Zoe cebrá y Candy gata. La docente cuenta cada grupo de personajes y los pone en los vagones respectivos. Luego, la docente cuenta que Pepa cerdita quiere pasarse al segundo vagón, así que toma a Pepa cerdita del primer vagón y la desplaza al segundo vagón. Al finalizar se realizan las mismas preguntas.

- a. ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?
- b. ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?

Para desarrollar la tarea 2 los estudiantes se organizan en parejas. La profesora cuenta que mientras Pepa y sus amigos daban un paseo en el tren se percataron de que los rieles se habían descompuesto y por tanto el tren no podía pasar por ese camino. La docente invita a los estudiantes a ayudar a reparar los rieles del tren apoyando su explicación en la gráfica No 1.

Luego, la profesora le entrega a los estudiantes los rieles del tren cortados en seis trozos como se muestra a continuación y las fichas con los números 3, 2, 9, 12, 14, 17, 20, 21, 27, 28 y 17. Cada ficha tiene un adhesivo para que el estudiante pueda ponerlo en el espacio correspondiente (Ver ilustración 27)

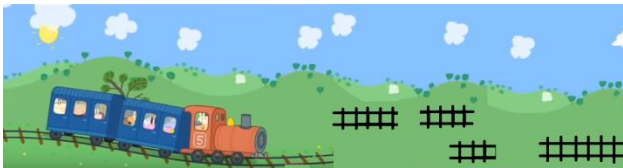
La profesora les da a conocer a los estudiantes que deben completar los rieles del tren con los números correspondientes. Para eso, deben mirar las fichas con los números 3, 2, 9, 12, 14, 17, 20, 21, 27, 28 y 17 y ubicarlos en el lugar correcto de los rieles. Mientras los estudiantes realizan esto la profesora y la investigadora le preguntan a las parejas de estudiantes:

- a. ¿Explica por qué el número 9 va en esa posición? Esta pregunta se realiza independientemente de si está bien ubicado o no el número en la secuencia. En caso de que el número 9 no esté ubicado de manera correcta y no lo corrige se le pide al estudiante que cuente del uno hasta el diez, y luego, que ubique el número 9 en la posición correcta. La docente repite nuevamente la pregunta.
- b. ¿En qué posición se debe colocar el número 12? ¿Por qué? Esta pregunta se realiza independientemente de si está bien ubicado o no el número en la secuencia. En caso de que el número 12 no esté ubicado de manera correcta y el estudiante no lo corrige, se le pide que cuente o que observe el número, la primera y la segunda cifra y la ubique en el lugar correspondiente. Luego, se le que ubique el número en el lugar correcto y se le repite la pregunta.
- c. ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué? Esta pregunta se realiza independientemente de si está bien ubicado o no el número en la secuencia. En caso de que el número 21 no esté ubicado de manera correcta y el estudiante no lo corrige, se le pide que observe el número, la primera y la segunda cifra y la ubique en el lugar correspondiente. Luego, se le pide que ubique el número en el lugar correcto y se le repite la pregunta.

Luego, la profesora introduce las palabras sucesor y antecesor de un número haciendo referencia al siguiente o al anterior de un número. Por ejemplo: ¿Qué número es el siguiente de 4? A ese número lo vamos a llamar sucesor, ¿Qué número está antes del 4? A ese número lo vamos a llamar antecesor

Con los números ubicados en el sitio correspondiente, la docente le indica a los estudiantes que reparen los rieles del tren para que Pepa y sus amigos puedan pasar, para

ello deben unir los rieles en el orden correcto. Mientras reparan los rieles los estudiantes realizan la siguiente ficha

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____
Mientras pepa y sus amigos daban un paseo en el tren se percataron de que los rieles se habían descompuesto y por tanto el tren no podía pasar por ese camino. Era necesario reparar los rieles  1) Con los números ubicados en el sitio correspondiente, con un compañero, unir los rieles del tren en el orden correcto y responder: a) ¿Qué número es el sucesor del 5? b) ¿Qué número es el antecesor de 10?

La docente formula las siguientes preguntas

- a. ¿Qué número es el sucesor del 5? Ese número lo van a escribir en el rectángulo rojo.
- b. ¿Qué número es el antecesor de 10? Ese número lo van a escribir en el rectángulo azul

Si los estudiantes aún no reconocen el término antecesor o sucesor, se les da un nuevo ejemplo: ¿Qué número es el siguiente de 7? A ese número lo vamos a llamar sucesor, ¿Qué número esta antes del 7? A ese número lo vamos a llamar antecesor Luego, se les repite nuevamente las preguntas.

Por último, la docente orienta a los estudiantes con las siguientes instrucciones:

- a. Encierren en un círculo un número que sea menor que 20. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le pide que señale el número 20, en caso de que no lo conozca la docente le mostrará el número en los rieles y le dirá nuevamente la indicación.
- b. Señalen con una X un número que sea mayor que 10. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le pregunta ¿estás seguro que n es mayor que 10? O ¿es menor que 10? Debes señalar con una X un número que sea mayor que 10.

- c. Coloreen el número que es mayor que 10 pero menor que 12. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le pide que señale los números mayores que 10 y también los menores que 12 y se le formula nuevamente la pregunta.

Luego, para realizar la Tarea 3 los estudiantes se organizan en grupos de 3 o 4 personas. La profesora le entrega a cada grupo de estudiantes un mazo de cartas españolas modificadas con las imágenes de Pepa Pig, y la imagen del tren. La docente da las instrucciones para realizar el juego, mientras realiza la explicación se apoya en las cartas y en la imagen del tren: Se ubican las cartas boca abajo y la carta 10 (Ver ilustración 29) boca arriba en el centro de la mesa (muestra la carta 10 y la pone en el centro de la mesa). La cantidad en la carta indica los personajes. En cada vagón del tren solo se pueden ubicar 10 personajes y solamente diez personajes, ni más ni menos.

Cada estudiante da la vuelta a una carta, si esa carta contiene la cantidad 10 se lleva y la pone como vagón en el tren, si no la deja boca arriba sobre la mesa. Los estudiantes pueden sumar el número que obtuvieron en la carta con otro número de una carta que esté boca arriba sobre la mesa para obtener la cantidad 10, en ese caso, tomará las dos cartas y las pondrán en un vagón en el tren (ver ilustración 30).

Gana el jugador que haya formado más grupos de diez.

Durante el juego, la docente y la investigadora le preguntan a uno de los estudiantes lo siguiente:

- ¿Qué número sacaste en la carta? Si el niño no reconoce el número se le pide que cuenta
- ¿Ese número es mayor que diez? ¿Por qué? Si el estudiante contesta de manera incorrecta se le pide que compare la carta que saco con la carta diez que está en el centro de la mesa. Luego se le hace esta pregunta nuevamente
- ¿Ese número es menor que diez? ¿Por qué? Si el estudiante contesta de manera incorrecta se le pide que compare la carta que saco con la carta diez que está en el centro de la mesa. Luego se le hace esta pregunta nuevamente
- ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez? Si el estudiante contesta de manera incorrecta se le pide que cuente usando los dedos desde la cantidad que obtuvo en la carta hasta llegar a 10.

El literal a, b y c se pueden realizar en cualquier momento del juego, y el literal d cuando el puntaje obtenido en la carta sea menor a diez.

Al terminar el juego, la docente le pasa a los niños la ficha y le indica que registren la cantidad de grupos de diez que formaron en la siguiente tabla, además les pide que determinen las posiciones en que quedaron, teniendo en cuenta que el jugador que haya obtenido la mayor cantidad de grupos de diez es el primero.

Nombres: _____ Grado: _____ Fecha: _____

- Registrar la cantidad de vagones que obtuvieron los integrantes del grupo. Luego, determinar las posiciones en que quedaron los integrantes, teniendo en cuenta que el jugador que haya obtenido la mayor cantidad de grupos de diez es el primero

Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden
1		
2		
3		
4		

- | | |
|----|--|
| a) | ¿Quién quedo de primero? |
| b) | ¿Quién quedo de tercero? |
| c) | ¿Cuántas Pepas tiene el tren del jugador 1 en total? |

La docente también le pide a los estudiantes que pongan al frente de las letras rojas el nombre de Quién quedo de primero y al frente de las letras azules el nombre de quién quedo de tercero. Si el estudiante no da una respuesta acertada, se le recuerda el orden: “Primero, segundo, tercero, cuarto” mientras se señala los personajes respectivamente. Luego se le repite la pregunta.

Finalmente se les pregunta ¿Cuántas Pepa Pigs tiene el tren del jugador 1 en total? Si el estudiante no responde se le indica que las cuente.

Anexo 7.3 Protocolo de situación 3

Para la realización de esta secuencia se cuenta con 4 sesiones, cada una tiene una duración aproximada de 30 a 45 minutos. Las tareas las realizan 12 estudiantes de la jornada de la mañana en el I.E.D. Ciudad de Bogotá.

Para realizar la tarea 1 se requiere de 400 bananas, 12 bolsas y un títere. Los estudiantes se organizan en grupos de 3 o 4. La docente le presenta a los estudiantes el títere Pipe; y les dice que Pipe el títere tiene una tienda de bananas, a él se le pueden pedir las bananas que quieran. Pero Pipe tiene un problema, solo puede contar hasta 10, así que cuando alguien va a la tienda de Pipe a pedir bananas solo pueden utilizar los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (La docente escribe los números en el tablero), porque son los números que Pipe conoce.

Así pues, la docente le entrega a cada grupo el número 12 y también le entrega una hoja de papel y les dice lo siguiente: “El grupo debe escribir un mensaje en la hoja para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número, pero recuerden el mensaje solo puede tener los números que Pipe entiende”. La docente va a ser quién maneje el títere y por tanto, va a entregar las bananas.

Mientras tanto la investigadora, va a pasar de grupo en grupo observando las estrategias que utilizan los estudiantes para componer el número doce, en caso de que a un grupo le falte o le sobren bananas la investigadora les va a preguntar: ¿Pueden contar la cantidad de bananas que tienen hasta el momento? ¿Ya tienen 12 bananas? ¿Qué debes de hacer para tener 12 bananas? La investigadora también les va a preguntar a los grupos ¿Cuántos grupos de diez puedes formar con el número 12?

Finalmente la docente le pide a los estudiantes que metan los 12 dulces en la bolsa y le pongan sobre la bolsa el número 12. Este mismo procedimiento se realiza con los números 26 y 42.

Después la docente le pide a los estudiantes que pongan sobre la mesa las bolsas que ellos mismos han conformado: 12, 26 y 42 bananas. Luego, la investigadora pone sobre la mesa los siguientes precios:

\$ 1.300

\$ 600

\$ 2.100

La docente da a conocer la siguiente situación: Pipe el títere debe ponerle un precio a las bolsas de dulces que cada grupo tiene sobre la mesa. Pero los precios son muy altos y Pipe no los entiende, porque solo puede contar hasta 10. La docente incita a los estudiantes para que ayuden a Pipe a ponerle los precios a las bolsas de bananas.

Mientras realizan la actividad, la profesora y la investigadora preguntan:

-
- ¿Cuál es el mayor precio? ¿Por qué? Si los estudiantes no contestan o no dan una respuesta acertada, se le pedirá que observen los dígitos de los números y de los números que tienen más dígitos que observen la primera cifra (Unidad de Mil) para poder decidir cuál es el número mayor.
 - ¿Cuál es el menor precio? ¿Por qué? Si los estudiantes no contestan o no dan una respuesta acertada, se le pedirá que observen los dígitos de los números y que decidan cuál es el número menor de acuerdo a la cantidad de dígitos.
 - Indica la razón por la que el precio corresponde a la bolsa de bananas

Para desarrollar la tarea 2 “Juego de las Monedas” los estudiantes se organizan en grupos de 3 o 4 personas por mesa. La docente y la investigadora colocan en la mesa de cada equipo dos dados convencionales, 80 monedas de \$ 1, 80 monedas de \$ 10 y 80 monedas de \$ 100, cada grupo de monedas deben estar organizadas en una bolsa aparte. Luego, la docente les da la indicación a los niños para que escojan en cada equipo un estudiante que quiera ser el banquero, la docente les explica que el banquero va a ser la persona encargada de hacer los cambios de monedas. Cuando lo hayan escogido la investigadora le va a pasar al banquero 10 monedas de \$ 10, 10 monedas de \$ 100 y 10 monedas de \$ 1.000.

La docente les da la indicación para que cada estudiante del grupo (excepto el banquero) tire los dados y tomen la cantidad de monedas correspondientes. La docente explica que en las primeras dos rondas cada estudiante debe tomar monedas de \$ 1 según la cantidad obtenida al lanzar los dados. Cuando finalizan las dos primeras rondas, la docente indica que en las siguientes dos rondas van a tomar monedas de \$ 10 según la cantidad obtenida al lanzar los dados. Cuando finalizan estas dos rondas, la docente indica que en las siguientes dos rondas van a tomar monedas de \$ 100 según la cantidad obtenida al lanzar los dados.

Después de obtener las monedas, la docente da a conocer que cada grupo puede hacer cambios con el banquero, siguiendo las siguientes reglas:

- 10 monedas de 1 peso se pueden cambiar por una moneda de 10 pesos.
- 10 monedas de 10 pesos se pueden cambiar por una moneda de 100 pesos.
- 10 monedas de 100 pesos se pueden cambiar por una moneda de 1.000 pesos.

Estas reglas quedan consignadas en el tablero de tal manera que el banquero de cada grupo pueda mirarlás siempre que las necesite.

Mientras se realiza el juego, se le realizan las siguientes preguntas a por lo menos dos estudiantes del grupo:

- ¿Cuántas monedas de un peso tienes? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada se le pide que cuente las monedas de un peso.
- ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada, se le repasan las reglas que aparecen en el tablero para hacer los cambios y se le repite nuevamente la pregunta
- ¿Cuántas monedas de 10 pesos tienes? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada se le pide que cuente las monedas de diez pesos.
- ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada, se le repasan las reglas que aparecen en el tablero para hacer los cambios y se le repite nuevamente la pregunta
- ¿Cuántas monedas de 100 pesos tienes? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada se le pide que cuente las monedas de cien pesos.

- f. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada, se le repasan las reglas que aparecen en el tablero para hacer los cambios y se le repite nuevamente la pregunta

La investigadora va a realizarle estas preguntas a los equipos 1 y 2, mientras que la docente le va a hacer estas preguntas al grupo 3.

Después de que los estudiantes han terminado de realizar los cambios de monedas, la docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de monedas de cada integrante del grupo en la siguiente tabla:

Nombres: _____		Grado: _____			Fecha: _____	
Cantidad Estudiante	Monedas de 1.000 pesos	Monedas de 100 pesos	Monedas de 10 pesos	Monedas de 1 peso	Total	
1.						
2.						
3.						
4.						

La docente le dice a los estudiantes que observen los puntajes que han registrado en la tabla y respondan las siguientes preguntas:

- Si en una casilla hace falta realizar una conversión de monedas, se plantea la siguiente pregunta ¿Esta cantidad de monedas no la podrías haber cambiado por otra moneda? Si el estudiante no responde, o no da una respuesta acertada se le indica que observe las normas de cambio que está en el tablero y se pregunta si con esa cantidad puede hacer grupos de 10 monedas del mismo tipo.
- Teniendo en cuenta la cantidad de monedas de 10 pesos que tiene el estudiante 1 indica ¿Cuántas monedas de un peso necesitas para cambiar esa cantidad? Si el estudiante no responde, o no da una respuesta acertada se le muestra la cantidad de monedas de 10 pesos que indica la tabla. “mira estas son las monedas de 10 pesos que tiene el estudiante 1” y se le formula nuevamente la pregunta.
- Teniendo en cuenta la cantidad de monedas de 1.000 pesos que tiene el estudiante 2 indica ¿Cuántas monedas de 100 pesos necesitas para cambiar esa cantidad? Si el estudiante no responde, no da una respuesta acertada se le muestra la cantidad de monedas de 1.000 pesos que indica la tabla. “mira estas son las monedas de 1.000 pesos que tiene el estudiante 2” y se le formula nuevamente la pregunta.
- Indica el dinero que tienes en total. Si el estudiante no responde o no da una respuesta de la manera acertada se le pide que cuente las monedas de \$ 1.000, luego las de \$ 100, luego las de \$ 10 y luego las de \$1

Luego, para realizar la Tarea 3, los estudiantes se organizan en parejas, la docente le entrega a cada estudiante un catálogo de ventas con los siguientes productos y sus precios respectivos (Ver ilustración 31)

Después, la docente le entrega a cada pareja de estudiantes una ficha como la siguiente

Nombres: _____	Grado: _____	Fecha: _____
Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso.		




2.500 1.800

¿Por qué es el más costoso?

- Entre la chocolatina y la Pony malta, encierra en un círculo el producto más costoso ¿Por qué es el más costoso?




1.100 1.800

¿Por qué es el más costoso?

La docente le plantea a los estudiantes las siguientes situaciones:

- Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso. ¿Por qué es el más costoso? La docente o la investigadora escriben las respuestas dadas por los estudiantes. Si encierran en un círculo el producto equivocado, se les dice que miren los primeros dígitos en el precio de cada producto y se les repite nuevamente la pregunta.
- Entre la chocolatina y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso ¿Por qué es el más costoso? La docente o la investigadora escriben las respuestas dadas por los estudiantes. Si encierran en un círculo el producto equivocado, se les dice que miren los primeros y los segundos dígitos en el precio de cada producto y se les repite nuevamente la pregunta.

Más adelante la investigadora entrega por parejas algunas monedas: 9 de 10 pesos, 15 de 1 peso, cada moneda tiene velcro para que el estudiante pueda pegarlas en la ficha. La docente le indica los estudiantes que el Super coco vale 100 pesos, para poder comprarlo deben escoger las monedas necesarias y solo las necesarias, ni más ni menos y pegarlas en la ficha. Las parejas que lo hagan de manera correcta se les da el producto. La ficha es la siguiente:

Productos	Monedas
 100	

Si el estudiante coloca las monedas de la manera incorrecta se le recuerda nuevamente las reglas para hacer los cambios de monedas y se le repite nuevamente la pregunta.

Este procedimiento se hace igual para los siguientes productos

Product	Monedas que entrega la profesora	Productos	Monedas que entrega la profesora
 700	6 de 100 pesos 13 de 10 pesos	 1.100	13 de 100 pesos

Las tablas que se usan para estos productos son los siguientes:

Producto	Monedas
 700	

Producto	Monedas
 1.100	

Anexo 8. S1, T1

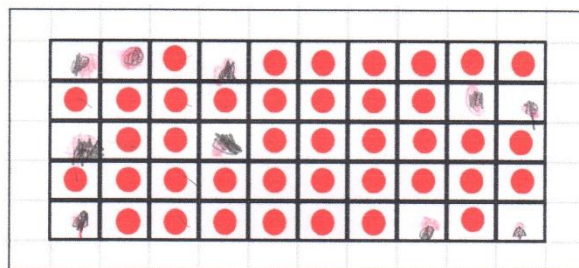
COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

 Nombre: Jan stevan Cervo Grado: _____ Fecha: _____

- Teniendo en cuenta las fichas en el tablero que se muestra a continuación:


 ¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para **llenar** todas las casillas?

60 60 00 00 00 00

Anexo 9. S1, T1

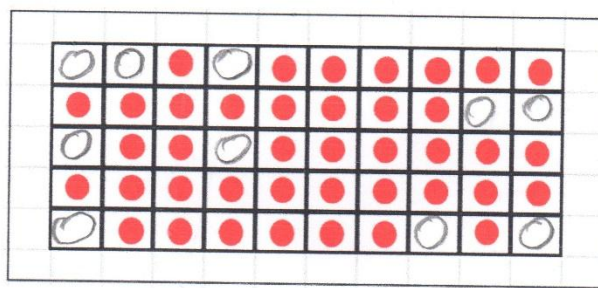


COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
 FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Oriana Isabela Salguero Grado: _____ Fecha: _____



- Teniendo en cuenta las fichas en el tablero que se muestra a continuación:



¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para **llenar** todas las casillas?



1234567980

Anexo 10. S1, T1, P3

COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Katerin Julieth Mesa Grado: _____ Fecha: _____

- Lucia tiene seis fichas como se muestra a continuación:



- a. Pedro tiene una ficha más que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Pedro



- b. Mariana tiene 2 fichas menos que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Mariana



Anexo 11. S1, T1, P3



COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
 FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Nicolas Montoya Grado: _____ Fecha: _____

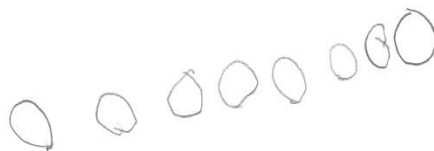
- Lucia tiene seis fichas como se muestra a continuación:



- a. Pedro tiene una ficha más que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Pedro



- b. Mariana tiene 2 fichas menos que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Mariana



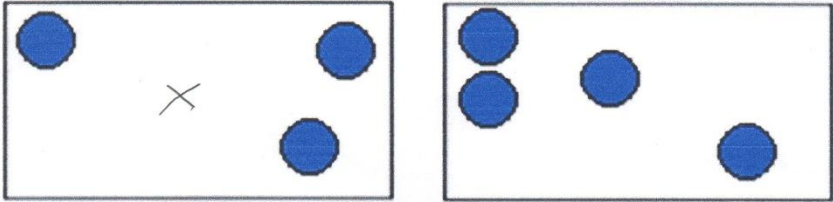
Anexo 12. S1, T2

 **COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ**
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

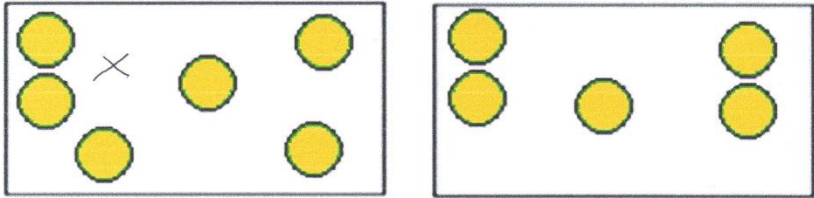
Nombre: Carolina Cruz Grado: _____ Fecha: _____

• Observa las parejas de cartas y señala con una X la que tiene:

3 fichas

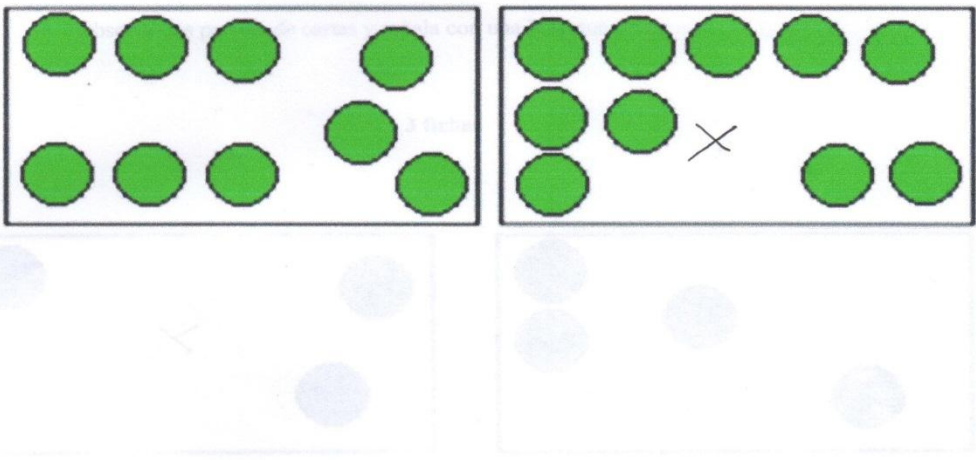


6 fichas



 **COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ**
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

10 fichas



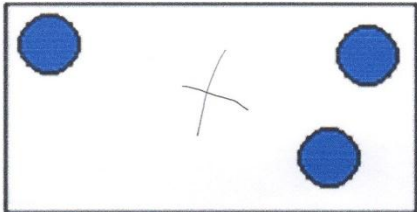
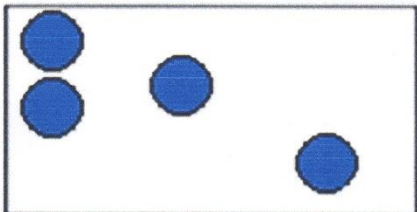
Anexo 13. S1, T2

 **COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ**
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

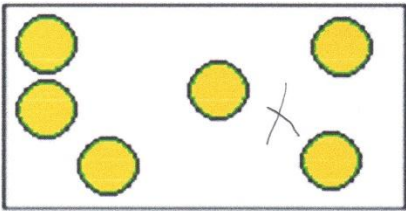
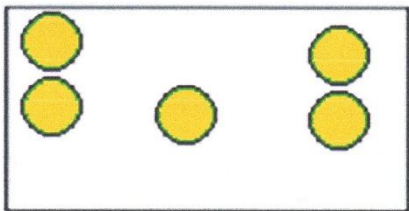
Nombre: Dylan Matias Grado: _____ Fecha: _____

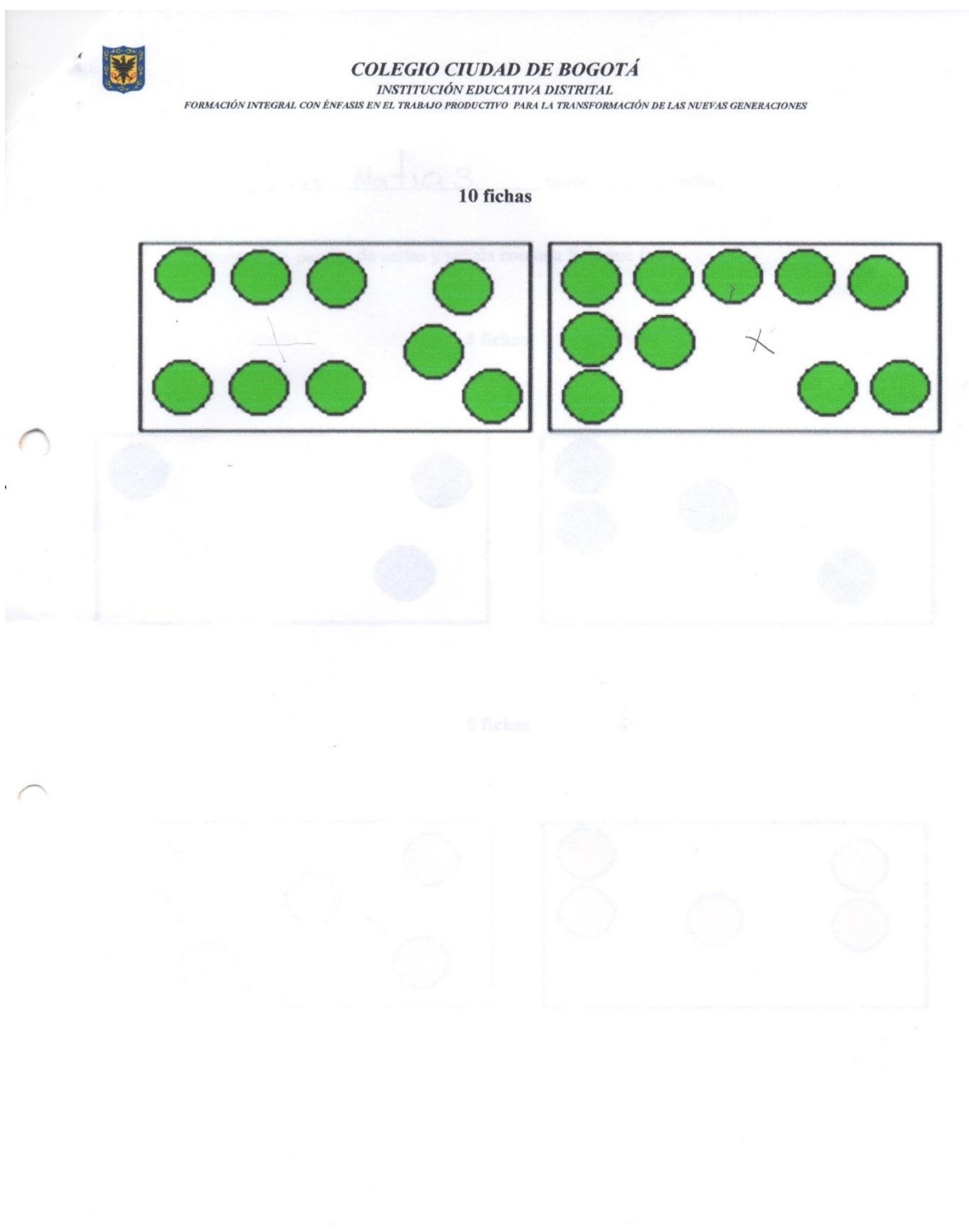
• Observa las parejas de cartas y señala con una X la que tiene:

3 fichas

6 fichas



INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

1. Cada pareja de estudiantes juegan “Cincuenta Fichas” y de manera individual, registran en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados.

Estudiante 2: Carolina

TURNOS	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

TURNOS	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	6
5	
6	
7	5
8	
9	
10	
11	

2. Observen los puntajes que han registrado en las tablas y sigan las siguientes instrucciones:
- Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla
 - Compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo el mayor puntaje? Carolina
 - Compara con tu compañero los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor cantidad? empate
 - Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos, compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo más veces diez puntos? Dylan
 - Escribe una X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10? Carolina

Anexo 15. S1, T3, P3

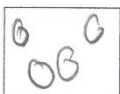
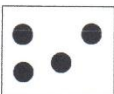
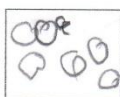
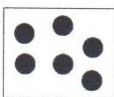
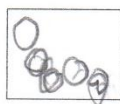
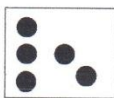
COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

 Nombre: Juan Esteban Ayala Grado: _____ Fecha: _____

La docente le indica a los estudiantes que de manera individual, completen los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.



Anexo 16. S1, T3, P3

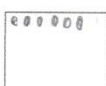
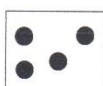
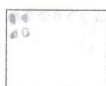
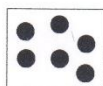
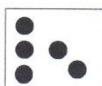
COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Carolina Grado: _____ Fecha: _____

La docente le indica a los estudiantes que de manera individual, completen los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.



Anexo 17. S2, T1

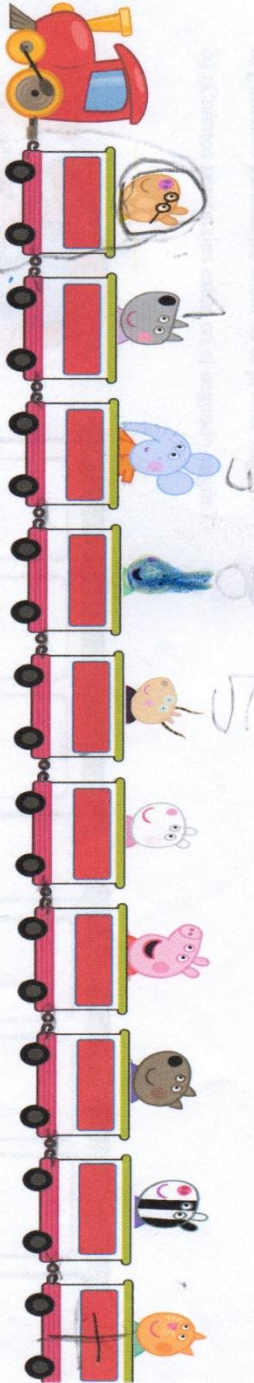


COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRICTAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Sara Jarama Grado: _____ Fecha: _____

1. De manera individual, los estudiantes siguen las instrucciones

• ¿En qué posición esta Emily la Elefante?



2. Teniendo en cuenta la organización del tren. Escoge uno de los personajes, el que más te llame la atención y escribe un mensaje para que la profesora conozca la ubicación del personaje



Pepe cefalópodo

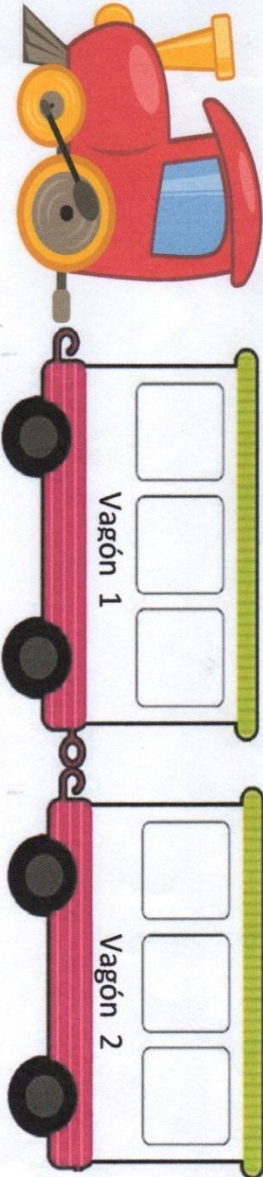
Vagón 1 Vagón 2


COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRICTAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

3) Indica:

a) ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?

b) ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?



5

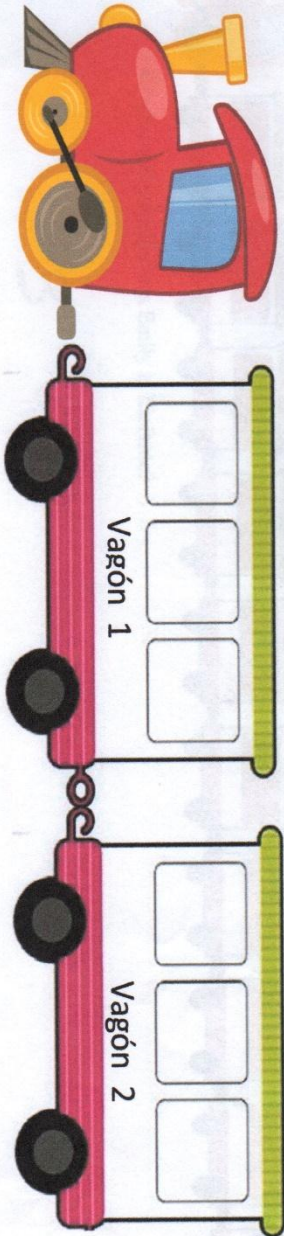
8


COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
 INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
 FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

3) Indica:

a) ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?

b) ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?



4

Anexo 18. S2, T1

COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Orana Isabela Salgado Grado: _____ Fecha: _____

1. De manera individual, los estudiantes siguen las instrucciones

• ¿En qué posición está Emily la Elefante?

tercero

2. Teniendo en cuenta la organización del tren. Escoge uno de los personajes, el que más te llame la atención y escribe un mensaje para que la profesora conozca la ubicación del personaje

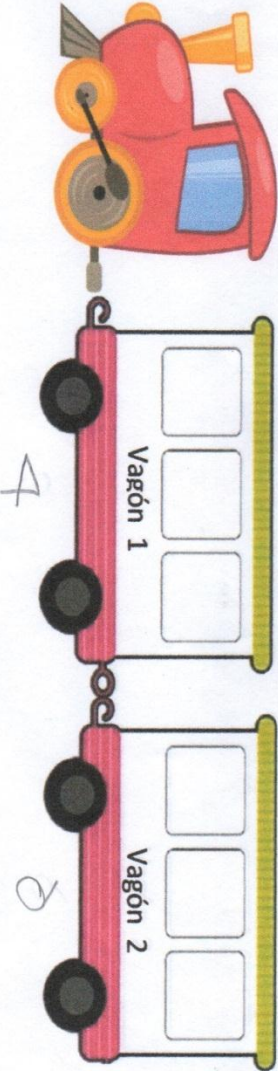


COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRICTAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

3) Indica:

a) ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?

b) ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?

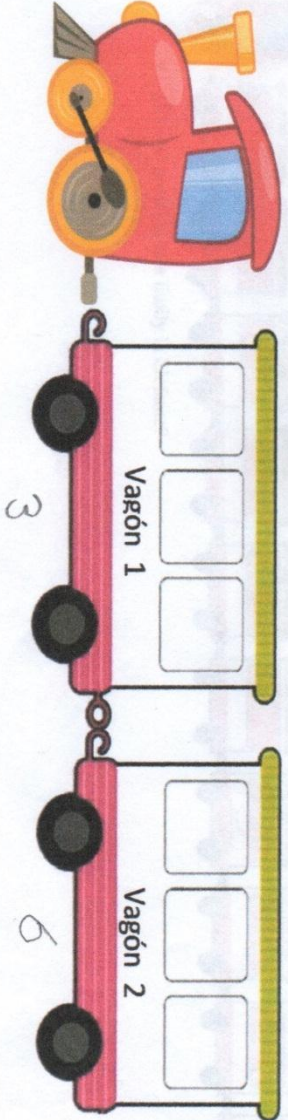


 **COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ**
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

3) Indica:

a) ¿Cuántos personajes están en el primer vagón?

b) ¿Cuántos personajes están en el segundo vagón?



Anexo 19. S2, T2



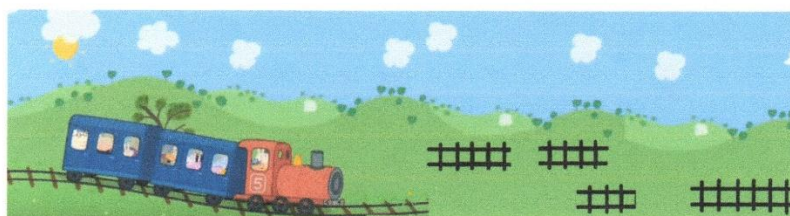
COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Nicol Grado: _____ Fecha: _____

Mientras pepa y sus amigos daban un paseo en el tren se percataron de que los rieles se habían descompuesto y por tanto el tren no podía pasar por ese camino. Era necesario reparar los rieles



- Con los números ubicados en el sitio correspondiente, con un compañero, unir los rieles del tren en el orden correcto y responder:
a. ¿Qué número es el sucesor del 5?

6

- b. ¿Qué número es el antecesor del 10?

9

Anexo 20. S2, T2



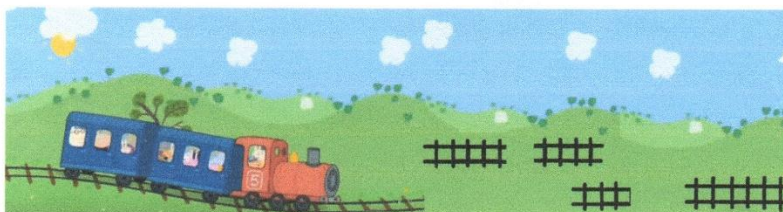
COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombre: Manuel Grado: _____ Fecha: _____

Mientras pepa y sus amigos daban un paseo en el tren se percataron de que los rieles se habían descompuesto y por tanto el tren no podía pasar por ese camino. Era necesario reparar los rieles



- Con los números ubicados en el sitio correspondiente, con un compañero, unir los rieles del tren en el orden correcto y responder:
 - ¿Qué número es el sucesor del 5?

4

- ¿Qué número es el antecesor del 10?

9

Anexo 21. S2, T3



COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombres: Manuel Santiago, Esteban, Carolina Grado: I-3 Fecha: _____

- Registrar la cantidad de vagones que obtuvieron los integrantes del grupo. Luego, determinar las posiciones en que quedaron los integrantes.

Jugador	Cantidad de grupos de diez	Orden
1 <u>Manuel S. Gonzales</u>	<u>2</u>	<u>1</u>
2 <u>esteban</u>	<u>2</u>	<u>2</u>
3 <u>Carolina</u>	<u>1</u>	<u>3</u>
4		

a. ¿Quién quedó de primero?

esteban Manuel

b. ¿Quién quedó de tercero?

Carolina

c. ¿Cuántas Pepas tiene el tren del jugador 1 en total?

4

Anexo 22. S3, T3



COLEGIO CIUDAD DE BOGOTÁ
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

FORMACIÓN INTEGRAL CON ÉNFASIS EN EL TRABAJO PRODUCTIVO PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LAS NUEVAS GENERACIONES

Nombres: Nicol y Nicolas Grado: _____ Fecha: _____

- Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso.



2.500



1.800

¿Por qué es el más costoso?

Porque son margaritas, porque es caro y mi papá no las puede comprar.
Las papas son más grandes porque valen 2.500. Nicolas responde que

- Entre la chocolatina y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso

¿Por qué es el más costoso?

no se luego
de preguntar
varias veces



1.100



1.800

¿Por qué es el más costoso?

tiene un 1 y 1 8
el uno de la pony malta se parece al 1 de la chocolatina
y con el 8 forman 2 círculos y el ocho no es igual
al 1 de la chocolatina porque el 8 es diferente. y el
8 es más grande

Anexo 23. Clasificación perfiles estudiantes

A continuación se tabulan las respuestas de los estudiantes teniendo en cuenta las respuestas incorrectas y las respuestas correctas (con intervención de la docente o sin intervención) en cada una de las situaciones. El color amarillo indica perfil alto, el color naranja perfil medio y el rojo perfil bajo.

Situación 1: Juego cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno.				
Estudiantes	Respuestas incorrectas	Respuestas correctas	Total de preguntas	Porcentaje de respuestas correctas
E 1	5	20	25	80%
E 2	3	22	25	88%
E 3	5	11	16	69%
E 4	2	14	16	88%
E 5	5	20	25	80%
E 6	3	22	25	88%
E 7	18	7	25	28%
E 8	4	21	25	84%
E 9	1	24	25	96%
E 10	1	24	25	96%
E 11	1	24	25	96%
E 12	3	22	25	88%

Situación 2: El juego Pepa y la ordinalidad				
Estudiantes	Respuestas incorrectas	Respuestas correctas	Total de preguntas	Porcentaje de respuestas correctas
E 1	1	14	15	93%
E 2	1	21	22	95%
E 3	6	16	22	73%
E 4	1	21	22	95%
E 5	7	7	14	50%
E 6	5	17	22	77%
E 7	12	10	22	45%
E 8	3	4	7	57%
E 9	2	20	22	91%
E 10	2	20	22	91%
E 11	1	21	22	95%
E 12	2	20	22	91%

Situación 3: Juego la tienda y la agrupación

Una Aproximación al Sistema de Numeración Decimal en Transición

Estudiantes	Respuestas incorrectas	Respuestas correctas	Total de preguntas	Porcentaje de respuestas correctas
E 1	2	16	18	89%
E 2	2	16	18	89%
E 3	10	8	18	44%
E 4	0	8	8	100%
E 5	3	15	18	83%
E 6	2	16	18	89%
E 7	8	5	13	38%
E 8	3	15	18	83%
E 9	3	15	18	83%
E 10	2	16	18	89%
E 11	4	14	18	78%
E 12	3	15	18	83%

Anexo 24. Preguntas para la entrevista

Las preguntas escogidas son las de color amarillo

Situación 1	Tarea 1	1. Cada pareja de estudiantes juegan “cincuenta fichas” Durante el juego a los estudiantes se les pregunta:	a) ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados? d) ¿Cuánto te falta para ganar?	Se escoge las preguntas abordan conceptos matemáticos correspondencia uno a uno, cardinal y orden en la secuencia numérica verbal
			¿Quién ha colocado menos fichas en la tabla?	No se escoge la pregunta porque la entrevista se realiza de manera individual, el estudiante no tiene compañero para realizar la comparación
			¿Cuántas fichas te faltan para tener la misma cantidad que tu compañero?	
		2. Teniendo en cuenta las fichas en el tablero que se muestra a continuación:	¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para llenar todas las casillas?	No se escoge la pregunta porque Los conceptos trabajados en esta pregunta, se abordan con los literales a y d de la pregunta 1
		3. Lucia tiene seis fichas como se muestra a continuación:	a) Pedro tiene una ficha más que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Pedro	No se escoge la pregunta porque para que los estudiantes realizarán estas preguntas se requiere de que la docente intervenga y reformule la pregunta
			b) Mariana tiene 2 fichas menos que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Mariana	
	Tarea 2	Usando las fichas del juego realiza una colección que tenga	a) 0 fichas	No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que desarrolla otro concepto importante
			b) 3 fichas c) 4 fichas d) 6 fichas e) 8 fichas f) 10 fichas	Se escogen Lb, Lc y Lf, pues a E7 se le dificulta construir tales colecciones y E10 las construye luego que se le indica que cuente
		2. Observa las parejas de cartas y señala con una X la carta que tiene	3 fichas, 6 fichas, 10 fichas	No se escoge la pregunta porque los resultados muestran que los estudiantes pueden identificar la carta correcta aún sin realizar un conteo correcto de las mismas
	Tarea 3	1. se registra en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados		Se escoge la pregunta para observar la representación de las cantidades obtenidas en los dados; además E7 presenta dificultades en la consignación de cantidades
		2. Los estudiantes observan los puntajes que han registrado en las tablas y realizan lo siguiente:	a. Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla	No se escoge la pregunta porque la entrevista se realiza de manera individual, el estudiante no tiene compañero para realizar la comparación
			b. Compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo el mayor puntaje?	
			c. Compara con tu compañero los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor	

Una Aproximación al Sistema de Numeración Decimal en Transición

		cantidad?	
		d. Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos, compara con tu compañero y decide ¿Quién obtuvo más veces diez puntos?	Solo se realiza la primera parte "Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos" Pues el estudiante realiza la entrevista de manera individual
		e. Escribe una X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10?	No se escoge porque ninguno de los estudiantes tuvo éxito al resolver la pregunta.
	De manera individual, completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.	Dado izquierdo: 5 puntos	No se escoge la pregunta porque los estudiantes pueden copiar la misma cantidad del dado izquierdo al dado derecho y forman el diez.
		Dado izquierdo: 6 puntos Dado izquierdo: 4 puntos	Se escogen las preguntas de dado izquierdo 6 puntos.

situación 2	Tarea 1	1. De manera individual, los estudiantes responden a las siguientes preguntas:	a. Encierra en un círculo el personaje que está ubicado de primero en el tren	No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que desarrolla otro concepto importante
			b. Escribe una X sobre el personaje que está ubicado de último en el tren	
			c. Colorea el personaje con quién debe cambiar el puesto Candy Gata para estar en el cuarto puesto	
			d. ¿En qué posición está Emily la Elefante?	Se escoge esta pregunta pues, E7 da una respuesta incorrecta
		2. Teniendo en cuenta la organización del tren. La docente le indica a los estudiantes que escojan uno de los personajes, el que más les llame la atención y escriban un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren.		Se escoge esta pregunta pues, E7 da una respuesta incorrecta
	Tarea 2	1. Completa los rieles del tren con los números correspondientes. Mientras tanto la profesora pregunta:	a. ¿Explica por qué el número 9 va en esa posición?	No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que desarrolla otro concepto importante
			b. ¿En qué posición se debe colocar el número 12? ¿Por qué?	Se escogen estas preguntas pues E7 las contesta de manera incorrecta
			c. ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué?	
		2. la docente le indica a los estudiantes que	a. ¿Qué número es el sucesor del 5?	No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes

Capítulo 4: Conclusiones generales y reflexiones didácticas

		reparen los rieles del tren para que Pepa	b. ¿Qué número es el antecesor de 10? ¿Por qué?	que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que desarrolla otro concepto importante
		3. La docente orienta a los estudiantes con las siguientes instrucciones:	a. Encierran en un círculo un número que sea menor que 20	No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que desarrolla otro concepto importante
			b. Señalen con una X un número que sea mayor que 10	
			c. Coloreen el número que es mayor que 10 pero menor que 12	Se elimina la pregunta pues ninguno de los estudiantes tuvo éxito al responderla
	Tarea 3	1. Durante el juego, la docente le pregunta a uno de los estudiantes lo siguiente:	a. ¿Qué número sacaste en la carta?	Se escogen estas preguntas pues E7 las contesta de manera incorrecta. Se reformula los literales b y c por la pregunta ¿Ese número es mayor o menor que diez? ¿Por qué?
			b. ¿Ese número es mayor que diez? ¿Por qué?	
			c. ¿Ese número es menor que diez? ¿Por qué?	
			d. ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez?	
		2. La docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de grupos de diez que formaron en la siguiente tabla y que determinen las posiciones en que quedaron, teniendo en cuenta que el jugador que haya obtenido la mayor cantidad de grupos de diez es el primero.	a. ¿Quién quedo de primero? b. ¿Quién quedo de tercero? c. ¿Cuántas Pepa Pigs tiene el tren del jugador 1 en total?	No se escoge la pregunta porque la entrevista se realiza de manera individual, el estudiante no tiene compañero (s) para realizar la comparación

situación 3	Tarea 1	1. La docente le entrega a cada grupo un número. El grupo debe escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número. El mensaje sólo puede tener los números que Pipe el títere entiende.	a. 12	Se considera suficiente escoger solo dos números el 12 y el 26 para aplicarlos
			b. 26	
			c. 42	
		2. Ayúdale a Pipe a ponerle los precios a las bolsas de bananas. Los precios son los siguientes	a. ¿Cuál es el mayor precio? ¿Por qué? b. ¿Cuál es el menor precio? ¿Por qué? nanas	No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que

	Tarea 2		c. Indica la razón por la que el precio corresponde a la bolsa	desarrolla otro concepto importante
		1. Mientras se realiza el juego, la investigadora le pregunta a por lo menos dos de los estudiantes del grupo:	a. ¿Cuántas monedas de un peso tienes? b. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué? c. ¿Cuántas monedas de 10 pesos tienes? d. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué? e. ¿Cuántas monedas de 100 pesos tienes? f. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? ¿Por qué?	Se escogen estas preguntas pues E7 las contesta de manera incorrecta
		2. La docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de monedas y billetes de cada integrante del grupo en la siguiente tabla:		No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que desarrolla otro concepto importante
		3. La docente le dice a los estudiantes que observen los puntajes que han registrado en la tabla y respondan las siguientes preguntas:	a. Si en una casilla hace falta realizar una conversión de monedas, se plantea la siguiente pregunta ¿Esta cantidad de monedas no la podrías haber cambiado por otra moneda?	No se escoge la pregunta porque todos los estudiantes que realizaron la pregunta, la contestaron correctamente y se escoge otra pregunta que desarrolla otro concepto importante
			b. Teniendo en cuenta la cantidad de monedas de 1.000 pesos que tiene el estudiante 2 indica ¿Cuántas monedas de 100 pesos necesitas para cambiar esa cantidad?	Se elimina la pregunta pues ninguno de los estudiantes tuvo éxito al responderla
			c. Indica el dinero que tienes en total	Se formula esta pregunta E10 y E7 no responden correctamente a la pregunta
	Tarea 3	1. La docente le plantea a los estudiantes organizados en parejas las siguientes situaciones:	a. Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso. ¿Por qué es el más costoso? b. Entre la chocolatina y la Pony malta, encierra en un círculo el producto más costoso ¿Por qué es el más costoso?	No se escoge la pregunta porque ninguno de los estudiantes (E10, E7) contestaron incorrectamente a la pregunta.

	2. La docente entrega a las parejas algunas monedas y los estudiantes deben escoger las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el producto que se le indica	Super coco \$100, la docente entrega 9 monedas de \$10 y 15 de \$1. Gansito \$700, la docente entrega 6 monedas de \$100 y 13 monedas de \$10 Chokolatina \$1.100, la docente entrega 13 monedas de 100	Se considera suficiente escoger solo la chokolatina en la se manejan un cambio de unidad (Centena) a una unidad de orden superior (Unidad de Mil)
--	--	--	---

Anexo 25. Protocolo de Entrevista

Para la realización de estas entrevistas se cuentan con 3 sesiones, cada una tiene una duración aproximada de 30 a 45 minutos. Las tareas las realizan dos estudiantes (E10, E7) de Transición de la jornada de la mañana en el I.E.D. Ciudad de Bogotá.

Entrevista 1: Cincuenta fichas, la cardinalidad y la correspondencia uno a uno

El estudiante juega “Cincuenta Fichas” Para realizar el juego se requiere de un tablero dividido en cuadrículas organizadas en 5 filas y 10 columnas, 50 fichas circulares de diferente color. Se requiere de dos dados modificados, 1 dado con los números del 0 al 5 y el otro dado con los números 0, 4, 5, 6, 7, 8. El estudiante lanza los dados y va llenando cada tablero con las fichas circulares de acuerdo a la cantidad de puntos obtenidos al lanzar los dados en cada turno. Sólo se puede colocar una ficha por cada cuadrícula. Gana el estudiante si llena completamente las cuadrículas de su tablero.

1. La investigadora le plantea las siguientes preguntas al estudiante, mientras desarrolla el juego “Cincuenta fichas”
 - a. ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados? Esta pregunta se realiza en cualquier momento del juego. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le debe pedir que cuente la cantidad de puntos que tienen los dos dados en total.
 - b. ¿Cuánto te falta para ganar? Esta pregunta se realiza al finalizar el juego, cuando falten 10 fichas o menos. Si el estudiante no da una respuesta acertada se repite nuevamente la pregunta.
2. La investigadora le presentarle al estudiante la tabla, en la cual deben escribir su nombre y registrar en cada casilla, la cantidad obtenida al lanzar los dados mientras juega “Cincuenta fichas”.

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

2. El estudiante juega “Cincuenta Fichas” y registran en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados.

TURNO	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

3. Más adelante, la investigadora le dice al estudiante que observe los puntajes que ha registrado en la tabla y sigan las instrucciones consignadas en el punto 3
 - a. Colorea los puntajes en los que obtuviste diez puntos. Si el estudiante da una respuesta incorrecta la investigadora le pide que cuente o que identifique el símbolo 10.
4. Luego, la investigadora le pasa la ficha para que desarrollen el punto 4. Para realizar este punto la investigadora guía al estudiante para que completen los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le dice: Los puntos que dibujaste en la cara del dado no completan diez. ¿Puedes arreglarlo para obtener diez puntos en total?

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

Completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez puntos en total.




5. Para desarrollar el punto 5 el estudiante utilizan las fichas de plástico del juego “Cincuenta fichas”. La investigadora le dice al estudiante que quiere que forme una colección con un número particular de fichas. ¿Podrías mostrarme x fichas? Solamente x fichas. Si el estudiante no da una respuesta acertada se le dice: Puedes contar para estar seguro de que tienes solamente x fichas ¿Puedes arreglarlo para que sean solamente x fichas? Donde $x = 3, 6, 10$.

Entrevista 2: Peppa y la Ordinalidad

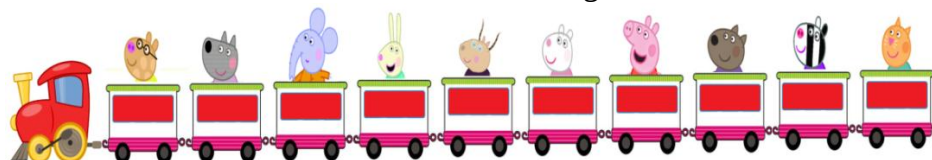
La investigadora le muestra al estudiante un tren con diez vagones, cada vagón con un personaje de la serie “Pepa” y le recuerda el nombre de los personajes Pedro poni, Wendy loba, Emilia elefanta, Rebeca liebre, Madame gacela, Susy oveja, Pepa cerdita, Danny perro, Zoe cebrá y Candy gata.



1. La investigadora le pasa la ficha para que desarrollen el punto 1.

Nombre: _____ Grado: _____ Fecha: _____

2. De manera individual, el estudiante sigue las instrucciones

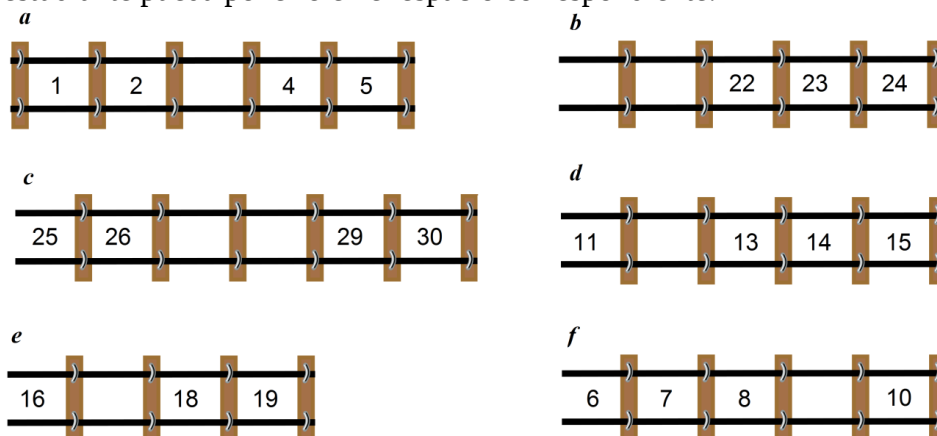


- a. ¿En qué posición esta Emily la Elefante?
- b. Teniendo en cuenta la organización del tren. Escoge uno de los personajes, el que más te llame la atención y escribe un mensaje para que la investigadora conozca la ubicación del personaje

La investigadora le formula las siguientes preguntas al estudiante:

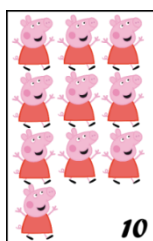
- ¿En qué posición esta Emily la Elefante? Si el estudiante no da una respuesta acertada, se le recuerda el orden: “Primero, segundo, tercero,... décimo” mientras se señala los personajes respectivamente. Luego se le repite la pregunta. Si el niño no sabe escribir la respuesta, la investigadora le escribirá la respuesta.
 - La investigadora llama la atención del estudiante para que mire nuevamente el tren y le indica que escoja uno de los personajes, el que más les llame la atención y escriba un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren. Este mensaje lo deben escribir dentro del rectángulo.
3. Para desarrollar la pregunta 2, la investigadora cuenta que mientras Pepa y sus amigos daban un paseo en el tren se percataron de que los rieles se habían descompuesto y por tanto el tren no podía pasar por ese camino. La investigadora invita al estudiante a reparar los rieles del tren. Luego, la investigadora le entrega al estudiante los rieles del tren cortados en seis trozos como se muestra a continuación

y las fichas con los números 12, 21. Cada ficha tiene un adhesivo para que el estudiante pueda ponerlo en el espacio correspondiente.

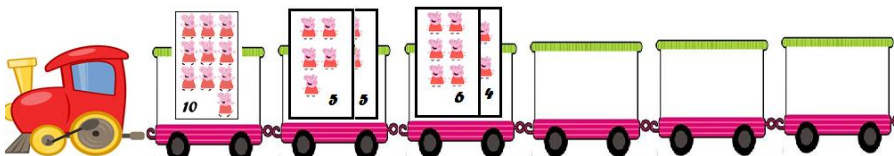


La investigadora le da a conocer al estudiante que debe completar los rieles del tren con los números correspondientes. Para eso, deben mirar la ficha con el número 21 y ubicarlo en el lugar correcto de los rieles. La investigadora le preguntan al estudiante: ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué? Esta pregunta se realiza independientemente de si está bien ubicado o no el número en la secuencia. En caso de que el número 21 no esté ubicado de manera correcta y el estudiante no lo corrige, se le pide que cuente o que observe el número, la primera y la segunda cifra y la ubique en el lugar correspondiente. Luego, se le que ubique el número en el lugar correcto y se le repite la pregunta. Lo anterior, se hace también con el número 12.

4. Luego, para realizar la pregunta 3 la investigadora le entrega al estudiante un mazo de cartas españolas modificadas con las imágenes de Peppa Pig, y la imagen del tren. Se ubican las cartas boca abajo y la carta 10 boca arriba en el centro de la mesa. El estudiante debe ubicar en cada vagón del tren diez personajes y solamente diez personajes.



El estudiante escoge una carta del mazo y le da la vuelta, si esa carta contiene la cantidad 10 se la lleva y la pone como vagón en el tren, si no, la deja boca arriba sobre la mesa. El estudiante puede sumar el número que obtuvo en la carta con otro número de una carta que este boca arriba sobre la mesa para obtener la cantidad 10, en ese caso, tomará las dos cartas y las pondrán en un vagón en el tren.



Durante el juego, la investigadora le pregunta al estudiante lo siguiente:

- ¿Qué número sacaste en la carta? Si el niño no reconoce el número se le pide que cuente
- ¿Ese número es mayor o menor que diez? ¿Por qué? Si el estudiante contesta de manera incorrecta se le pide que compare la carta que saco con la carta diez que está en el centro de la mesa. Luego se le hace esta pregunta nuevamente
- ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez? Si el estudiante contesta de manera incorrecta se le pide que cuente usando los dedos desde la cantidad que obtuvo en la carta hasta llegar a 10.

Entrevista 3: La Tienda y la Agrupación

- Para realizar esta pregunta se requiere de 50 bananas, 2 bolsas y un títere. La investigadora da a conocer la siguiente situación: Pipe el títere tiene una tienda de bananas, a él le puedes pedir las bananas que quieras. Pero Pipe tiene un problema, solo puede contar hasta 10, así que cuando alguien va a la tienda de Pipe a pedir bananas solo pueden utilizar los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, porque son los números que Pipe conoce.

La investigadora le entrega al estudiante el número 12 y también le entrega una hoja de papel y le dice lo siguiente: “Debes escribir un mensaje en la hoja para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número, pero recuerda el mensaje solo puede tener los números que Pipe conoce”. La investigadora va a ser quién maneje el títere y por tanto va a entregar las bananas, en caso de que al estudiante le falten o le sobren bananas la investigadora le va a preguntar: ¿Pueden contar la cantidad de bananas que tienen hasta el momento? ¿Ya tienen 12 bananas? ¿Qué debes de hacer para tener 12 bananas? La investigadora también les va a preguntar al estudiante ¿Cuántos grupos de diez puedes formar con el número 12? Luego, la investigadora le pide al estudiante que meta los 12 dulces en la bolsa. Este mismo procedimiento se realiza con el números 26.

- Para realizar la pregunta 2 se requiere de dos dados convencionales, 30 monedas de \$ 1, 40 monedas de \$ 10, 40 monedas de \$100 y 5 monedas de \$1.000 cada grupo de monedas deben estar organizadas en una bolsa aparte. Un estudiante va a ser el banquero, es decir, la persona encargada de hacer los cambios de monedas, el banquero va a tener solamente 10 monedas de \$10, 10 monedas de \$100 y 5 monedas de \$1.000. El resto de monedas (30 monedas de \$ 1, 30 monedas de \$ 10 y 30 monedas de \$100) se ubican en la mitad de la mesa para empezar el juego.

La investigadora da la indicación para que un estudiante tire los dados y tome la cantidad de monedas correspondientes. La investigadora explica que en las dos

primeras rondas va a tomar monedas de un peso, en la tercera y cuarta ronda va a tomar monedas de \$ 10, y en la quinta y sexta ronda va a tomar monedas de \$ 100, según la cantidad que aparece en el dado.

Después de obtener las monedas, el estudiante puede hacer cambios con el banquero (E10), siguiendo las siguientes reglas:

- 10 monedas de 1 peso se pueden cambiar por una moneda de 10 pesos.
- 10 monedas de 10 pesos se pueden cambiar por una moneda de 100 pesos.
- 10 monedas de 100 pesos se pueden cambiar por una moneda de 1.000 pesos.

Esta pregunta se hace primero con E10 como banquero y E7 como jugador y luego se intercambian los papeles.

Mientras se realiza el juego, la investigadora le pregunta al estudiante:

- a. ¿Cuántas monedas de \$1/\$10/\$100 tienes? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada se le pide que cuente las monedas de un/ diez/cien pesos, según corresponda.
 - b. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad? Si el estudiante no contesta o no da una respuesta acertada, se le repasan las reglas que aparecen en el tablero para hacer los cambios y se le repite nuevamente la pregunta
 - c. ¿Cuánto dinero tienes en total? Si el estudiante no responde o no da una respuesta de la manera acertada se le pide que cuente las monedas de \$ 1.000, luego las de \$ 100, luego las de \$ 10 y luego las de \$1
7. Por último, la investigadora le entrega a un estudiante 13 monedas de \$100 y le indica que la chokolatina vale \$ 1.100, para poder comprarlo debe escoger las monedas necesarias y solo las necesarias, ni más ni menos y pegarlas en la ficha. Si lo hace correctamente se le da el producto. La ficha es la siguiente:

Productos	Monedas
 1.100	

Si el estudiante coloca las monedas de la manera incorrecta se le recuerda nuevamente las reglas para hacer los cambios de monedas y se le repite nuevamente la pregunta.

Anexo 26. Transcripción de entrevistas

Entrevista Estudiante 7

I: Hola Esteban, ¿tú sabes cómo se llama este juego? (Muestra el tablero, las fichas y los dados del juego cincuenta fichas).

E7: ¡Sí! es el que se tira los dados y se ponen las fichas.

I: Bueno, Esteban el juego se llama cincuenta fichas y ya sabes cómo es, se tiran los dados y se van poniendo las fichas en el tablero, ganas cuando llenes todo el tablero ¡Tira los dados!

E7: (lanza los dados y obtiene en el primer dado 7 puntos y en el segundo dado 3 puntos).

I: ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados?

E7: (señala cada uno de los puntos de los dados con el dedo índice mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Ok, vas a escribir en el primer turno diez (señala con el dedo índice la casilla del primer turno de la tabla en la ficha).

E7: (escribe el número 1).

I: ¿Listo? ¿Tú puedes hacer diez puntos?

E7: (mueve la cabeza de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, señal de no).

I: ¿Seguro?

E7: (mueve la cabeza de izquierda a derecha y de derecha a izquierda señal de no).

I: Coloca las diez fichas en el tablero.

E7: (toma una a una diez fichas, mientras las va colocando en el tablero dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¡Lanza otra vez los dados!

E7: (lanza los dados y obtiene en el primer dado 7 puntos y en el segundo dado 4 puntos).

I: ¿Cuánto sacaste?

E7: (señala cada uno de los puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once.

I: Vas a escribir aquí once (Señala la casilla del segundo turno de la tabla en la ficha).

E7: (escribe 2).

I: ¿Ese es el 11?

E7: Sí.

I: ¿Puedes escribir 11 punticos?

E7: (dibuja seis puntos, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: ¿Ya hay once?

E7: Sí.

I: Listo entonces coloca once fichas en el tablero.

E7: (toma una a una diez fichas, mientras las coloca en cada casilla del tablero del juego dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Cuánto habías sacado?

E7: Once.

I: Entonces ¿ya hay 11?

E7: ¡No!

I: Entonces ¿qué te falta?

E7: (observa el tablero).

I: ¿Hace falta poner fichas o no?

E7: No.

I: Si vas por diez (Señala cada una de las fichas que ha puesto en tablero E, mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez ¿Te falta poner fichas?

E7: No.

I: ¿No? Bueno, entonces vamos otra vez a tirar los dados.

E7: (lanza los dados, obtiene en el primer dado 5 puntos y en el segundo dado 2 puntos).

I: ¿Cuánto sacaste?

E7: (señala uno a uno los puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: Escribe el puntaje aquí (Señala la casilla del tercer turno de la tabla en la ficha).

E7: Escribe el 3.

I: ¿Sacaste tres? ¿O cuánto sacaste? Mira los dados (señala los dados).

E7: (señala uno a uno los puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete (dibuja 8 puntos en casilla que indica el tercer turno mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: Pero si sacaste siete. ¿Así ésta bien?

E7: No.

I: ¿Qué tenemos que hacer?

E7: No sé.

I: Bueno entonces coloca las fichas en la tabla.

E7: (toma una a una diez fichas mientras las coloca en cada casilla del tablero del juego dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Pero sacaste 7.

E7: Retira una ficha.

I: Mira vamos a contar (la investigadora señala las fichas que ha colocado E7 en el último turno, mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. Mira siete (Observa a E7) y el resto lo retiramos (retira dos fichas del tablero) ¿listo? ¡vuelve a tirar los dados!

E7: (lanza los dados y obtiene en el primer dado 5 puntos y en el segundo dado 1 punto).

I: ¿Cuánto sacaste?

E7: (señala uno a uno los puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Vamos a escribir aquí seis (señala la sexta casilla de la tabla en la ficha).

E7: (escribe el 4).

I: Dibuja seis puntos.

E7: (dibuja siete puntos mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: Pero eran seis.

E7: (borra un punto).

I: Vas a colocar seis fichitas.

E7: (toma una a una diez fichas, mientras las coloca en cada casilla del tablero del juego dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, cuatro.

I: ¿Cuánto habías sacado? (Señala con el dedo índice cada uno de los puntos de los dados mientras E7 dice).

E7: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Ahora contemos las que pusiste en la tabla (señala con el dedo índice cada una de las fichas que puso E7 en el último turno).

E7: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Seis (Señalando la sexta ficha), es hasta aquí, debes retirar el resto.

E7: (retira cuatro fichas).

I: ¡Lanza los dados!.

E7: (lanza los dados y obtiene en el primer dado 2 puntos y en el segundo dado 8 puntos).

I: ¿Cuánto sacaste?

E7: (señala uno a uno nueve puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

I: Vamos a contarlos otra vez, despacito.

E7: (señala uno a uno los diez puntos de los dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Vas a escribir aquí diez (señala la casilla del quinto turno en la tabla de la ficha).

E7: (escribe el 5 y dibuja siete puntos mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

E7: (toma una a una diez fichas y las coloca en el tablero mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Cuánto te falta para ganar?

E7: (señala una a una las siete casillas vacías de la tabla mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete (señala dos casillas que ya había contado y dice) ocho, nueve.

I: Cuéntalos otra vez.

E7: (Señala una a una las siete casillas vacías de la tabla mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: ¡Bien! ¡Lanza otra vez los dados!

E7: (lanza los dados y obtiene en el primer dado seis puntos y en el segundo dado 7 puntos).

I: ¿Cuánto sacaste?

E7: (señala uno a uno los puntos de los dados, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, cuatro .

I: Vas a escribir aquí el 14 (Señala la casilla del sexto turno de la tabla en la ficha).

E7: (escribe el 6 y dibuja cuatro puntos mientras dice) Uno, dos, tres, catorce.

I: ¿Listo?

E7: ¡Sí! (Coloca 7 fichas que son las que quedan para llenar la tabla).

I: (retira el juego y le muestra la tabla de la ficha al estudiante) ¿Tú me puedes mostrar un puntaje en el que hayas obtenido diez?

E7: (señala la séptima casilla de la tabla en la ficha, vacía).

I: Pero aquí no hay nada.

E7: (señala el puntaje del sexto turno, luego señala el puntaje del quinto turno).

I: ¿Sabes en donde sacaste diez puntos?

E7: No sé.

I: Tú me puedes señalar un puntaje en el que hayas sacado un puntaje mayor a diez.

E7: (señala el puntaje del segundo turno, sacó 11 en los dados, pero registra solo seis puntos y la notación 2).

I: Entonces ahí vas a hacer una equis.

E7: Realiza una “X” sobre el segundo turno.

I: ¡Bueno!, ahora (señala los dados de la ficha) vas a completar los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener diez en total. Mira vamos a contar los puntos del primer dado: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis (mientras cuenta señala uno a uno los puntos de la cara del dado de la derecha con el lápiz).

E7: (dibujar seis puntos en la cara del dado de la izquierda mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Vamos a contarlos los dos (I señala los 12 puntos de los dados y mientras E dice):

E7: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce.

I: ¿Hay diez?

E7: No.

I: ¿Qué hacemos para que haya diez?

E7: Falta un punto.

I: Dibújalo.

E7: (hace un punto en la cara del dado de la izquierda).

I: Ahora vamos a mirar la otra pareja de dados. Contemos los puntos de la primera cara (señala cada uno de los puntos de la cara del dado de la derecha mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, ¿cuántos puntos deben aparecer en la otra cara del dado (Señala la cara del dado izquierdo) para obtener diez puntos en total?

E7: (dibuja cuatro puntos mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro.

I: Vamos a contarlos los dos (Señala los puntos de los dados, mientras E7 dice).

E7: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: ¿Qué hacemos para que de 10?

E7: No sé.

I: Ok. Esteban ahora vamos a usar las fichas del juego “cincuenta fichas” (reúne las cincuenta fichas del juego), yo te voy a decir que formes una colección de fichas y tú lo vas a hacer ¿listo?

E7: Listo.

I: Esteban ¿Puedes mostrarme 3 fichas?

E7: (toma cuatro fichas).

I: Cuéntalas para estar seguro.

E7: (señala una a una las fichas mientras dice) Uno, dos, tres (quita la ficha de más).

I: ¡Muy bien! (quita las tres fichas), Ahora ¿Puedes mostrarme 4 fichas?

E7: (toma una a una 4 fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro.

I: ¡Muy bien Esteban! (quita las cuatro fichas). Ahora ¿puedes mostrarme 6 fichas?

E7: (toma una a una 11 fichas mientras dice) Uno, dos, ocho, trece, quince, catorce, quince, diez y seis, cuatro.

I: Puedes contar para estar seguro.

E7: (señala con el dedo índice las 11 fichas de la colección mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once.

I: Ya hay 6 fichas.

E7: No.

I: ¿Qué hacemos para que haya seis fichas?

E7: No sé.

I: Vamos a contar (señala una a una seis fichas mientras E7 dice).

E7: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Hasta aquí (señala la sexta ficha) el resto las quitamos (retira cuatro fichas) ¿entendiste cómo es?

E7: Sí.

I: Ahora, Vamos a formar una colección de 8 fichas.

E7: (toma una a una 10 fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Hay 8?

E7: No.

I: Puedes contar para estar seguro.

E7: (señala una a una las 10 fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Qué hay que hacer para que haya solo 8?

E7: Retira una ficha.

I: ¿Ya?

E7: Sí.

I: Ok. Ahora vamos a formar una colección de diez fichas.

E7: (toma una a una las diez fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Ya hay diez fichas?

E7: (retira cuatro fichas, señala una a una las seis fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: ¿Ya hay diez fichas?

E7: no

I: ¿Qué debemos hacer?

E7: No sé.

I: Este tren es el de pepa (señala con el dedo índice el tren que se encuentra en la ficha), en él se encuentran Pedro poni, Wendy loba, Emilia elefanta, Rebeca liebre, Madame gacela, Susy oveja, Pepa cerdita, Danny perro, Zoe cebra y Candy gata ¿te acuerdas de este tren?

E7: Sí.

I: (señala el tren con el lápiz) ¿Puedes señalarme con el dedito el personaje que está ubicado de primero en el tren?

E7: Es pedro (lo señala con el dedo índice).

I: ¡Enciérralo en un círculo!

E7: (toma el lápiz y hace un círculo sobre Pedro poni en la ficha).

I: Tú me puedes decir ¿en qué posición esta Emily la Elefante?

E7: Primero.

I: Emily ¿me puedes señalar cuál es Emily?

E7: (señala a Danny Perro).

I: La elefanta.

E7: (señala a Emily la Elefanta).

I: ¿En qué posición esta?

E7: En el tete.

I: Vamos a ver (señala uno a uno los personajes en el tren mientras dice) primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, decimo. Entonces, Emily Elefante en ¿qué posición está?

E7: En sé.

I: ¿En qué?

E7: En setu.

I: ¿En segundo?

E7: Segundo.

I: Vamos a ver, te los voy a contar otra vez (I señala uno a uno los personajes en el tren mientras dice) primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto, séptimo, octavo, noveno, decimo. Entonces, Emily Elefante en ¿qué posición está?

E7: No sé.

I: En ¿qué posición está?

E7: En cuso.

I: Dime una posición para colocarlo.

E7: En cuarto.

I: ¡Bueno Esteban! Resulta que ahora, vas a escoger uno de los personajes, el que más te llame la atención y vas a escribir un mensaje para que yo pueda conocer la ubicación del personaje en el tren. El dibujo lo debes hacer en el rectángulo.

E7: (el estudiante realiza un dibujo) ¡Ya!

I: ¿Listo? ¿A quién dibujaste?

E7: ¡A Pedro!

I: Cuál es la posición.

E7: Primero.

I: ¡Muy bien Esteban! vamos a hacer otra pregunta (le pasa a E7 los rieles del tren) si quieres puedes irlos viendo.

E7: Toma los rieles.

I: ¿Te acuerdas que había que hacer?

E7: Pegar los números.

I: Muy bien, resulta Esteban que aquí tengo estos dos números, este que es el 12 y este que es el 21 (señala el número 12 y el número 21 con el dedo índice). ¿Estos dos números en dónde irán?

E7: (toma el 12 y lo coloca después del 8, los rieles quedan así: 6. 7. 8. 12. 10; y el 21 lo coloca después del 11, el riel queda con los siguientes números 11, 21, 13, 14, 15).

I: Y el 12 ¿por qué va aquí? (señala el 12 en el riel 6. 7. 8. 12. 10).

E7: (retira el 12) Va allá (quita el 21 y pone el 12 en su lugar, el riel queda con los siguientes números 11, 12, 13, 14, 15).

I: ¿por qué va ahí?

E7: Porque este (señala el 12) es igual que estos (señala el 13, 14, 15).

I: ¿Es igual que esos? ¿Cómo así que es igual que esos? ¿Tienen los mismos números?

E7: ¡Sí! (toma el 21 y lo pega antes del 22, el riel queda con los siguientes números: 21, 22, 23, 24).

I: ¿porque el 21 va ahí?

E7: Porque tienen los mismos números.

I: Pero dime como así que tienen los mismos números (toma los dos rieles, el riel con los números del 11 al 15 y el riel con los números del 21 al 24).

E7: Porque son iguales.

I: ¿Cuáles son iguales?

E7: Señala el 21 y el 12.

I: (toma solamente el riel con los números del 11 al 15) A ver ¿el 12 porqué va ahí?

E7: Porque éste (señala el 12) y estos (señala los demás números) son iguales.

I: ¿Cuáles números? Estos (señala el 1) o estos (señala el 3).

E7: Todos.

I: (toma solamente el riel con los números del 21 al 24) y éste de aquí (señala el 21) ¿por qué va aquí?

E7: Porque son los mismos números.

I: ¡Ah ya!

I: Vamos a hacer la última pregunta (muestra un mazo de cartas españolas modificadas con las imágenes de Pepa Pig) recuerdas para para jugar con las cartas, primero debemos de poner la carta 10 boca arriba (pone la carta 10 boca arriba sobre la mesa) en el centro de la mesa, y tú debes ubicar en cada vagón del tren (muestra el tren con diez vagones) diez personajes y solamente diez personajes. Si sacas la carta del diez la puedes poner en un vagón ¿Listo?

E7: Sí.

I: Toma una carta.

E7: Toma una carta del mazo (carta 6).

I: ¿Qué número sacaste en la carta?

E7: uno, dos, tres, cuatro cinco.

I: Vas a contarla otra vez.

E7: (señala una a una las Pepa Pigs, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Seis.

I: ¿Ese número es mayor o menor que diez?

E7: Menor.

I: ¿Por qué menor?

E7: (toma otra carta del mazo, la carta 6) Uno, dos, tres, cuatro, cinco.

I: ¿Cinco? Vas a contarla otra vez.

E7: (señala uno a uno los personajes que aparecen en la carta mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: ¿El número es mayor o menor que diez?

E7: Es menor.

I: ¿Y por qué es menor?

E7: Porque son iguales (señala las dos cartas de 6 personajes cada una).

I: Vas a sacar otra carta.

E7: (toma la carta 9 y señala los personajes mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.

I: Nueve, ¿ese número es mayor o menor que diez?

E7: Mayor.

I: ¿Mayor que diez?

E7: Menor (coloca la carta nueve al lado de la carta diez)

I: ¿Y por qué menor?

E7: Porque le hace falta una pepa ahí (señala un espacio en blanco).

I: Otra carta.

E7: (toma la carta 9 y señala los personajes mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve. Iguales (señala las dos cartas en las que ha obtenido 9).

I: ¿El número es menor o mayor que diez?

E7: Menor.

I: Saca otra carta.

E7: Toma la carta (carta 1) una pepa.

I: ¿Esa carta es menor o mayor que diez?

E7: Menor.

I: ¿A este número (carta 1) le podrías sumar otro número para obtener diez?

E7: (junta dos cartas, la carta con 1 personaje y la carta con seis personajes).

I: ¿Con estas dos? A ver vamos a contarlas a ver si nos da diez.

E7: (señala uno a uno los personajes de las cartas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: ¿Dio diez?

E7: No.

I: Entonces ¿con qué otra carta puedes sumarla?

E7: (acerca la carta seis).

I: Pero si estos dos son iguales (señala las dos cartas con seis personajes).

E7: (acerca la carta nueve).

I: ¿Estas dos? Ok ¡vamos a contarlas!

E7: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Te dio diez?

E7: Sí.

I: Bueno, pues vamos a ponerlas en un vagón del tren (toma las dos cartas y se las pasa a Esteban).

E7: (pone las dos cartas en el primer vagón).

I: ¡Mira! ya tienes un vagón lleno.

E7: Toma una carta (carta 4).

I: ¿Cuánto sacaste?

E7: De a dos.

I: ¿Cómo así de a dos? ¿Qué cantidad es esa? Cuéntala.

E7: (señala uno a uno los personajes de Pepa mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro.

I: ¿Cuatro es menor o mayor que diez?

E7: Menor.

I: ¿Esa cantidad puedes sumarla con otra en la mesa?

E7: (toma la carta seis) ¡ésta!

I: ¿Con ésta? A ver ¡contémosla!

E7: (señala uno a uno los personajes de las dos cartas mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¡Diez! ¿Obtuviste diez?

E7: Sí.

I: Entonces estas dos las vamos a poner en otro vagón del tren.

I: Hola Esteban recuerdas a Pipe el títere.

E7: Sí.

I: Recuerdas que Pipe el títere tiene una tienda de bananas, a él le puedes pedir las bananas que quieras. Pero Pipe tiene un problema, solo puede contar hasta 10, así que cuando alguien va a la tienda de Pipe a pedir bananas solo pueden utilizar estos números (señala uno a uno los números del 1 al 10 que están escritos en una hoja mientras E7 dice).

E7: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Mira estos son los números que Pipe conoce, no conoce otros números, solo esos que están ahí (señala la hoja en la que están escritos los números). Tú le vas a pedir a pipe el títere 12 dulces (le entrega al estudiante un cuadrado en el que están escrito “12”), pero solo

puedes utilizar los números que están aquí (señala hoja con los números del 1 al 10), no puedes utilizar otros números porque Pipe el títere no los conoce) ¿Entendido?

E7: Sí.

I: Bueno, escribe un mensaje para que Pipe el títere te dé doce dulces.

E7: Uno (escribe el 1), dos (escribe 2), tres (escribe el 3), cuatro (escribe el 4), cinco (escribe el 6).

I: Oye pero tú estás escribiendo todos los números.

E7: Estoy escribiendo los números de acá (señala la hoja con los números del 1 al 10).

I: Tienes que pedir solo doce dulces, no tienes que escribir todos los números de acá, solo tienes que pedir doce dulces.

E7: (escribe 2 y 2).

I: ¿Dos y dos da doce? Vamos a ver, pon dos y dos deditos.

E7: (pone dos deditos en la mano izquierda).

I: Y otros dos deditos (coge la mano derecha de E y le levanta dos deditos), vamos a contarlos (señala uno a uno los cuatro dedos levantados mientras E7 dice).

E7: Uno, dos, tres, cuatro.

I: ¿Ya dio doce?

E7: No. I: Entonces ¿Qué tenemos que hacer para que nos dé doce?

E7: Los números.

I: ¿Qué otro número tenemos que hacer para que nos dé doce?

E7: (toma el lápiz, escribe “3”).

I: Coloca tú dos deditos.

E7: (levanta dos dedos de la mano izquierda).

I: Otros dos deditos.

E7: (levanta otro dedo en la mano izquierda, en total tres dedos levantados en la mano izquierda y levanta tres dedos en la mano derecha) Tres (señala el número tres escrito).

I: Mira, primero dos deditos (Señala el número dos escrito por E7).

E7: (levanta dos dedos de la mano izquierda).

I: Listo, ahorita otros dos (señala el número dos escrito por E7).

E7: (levanta dos dedos de la mano derecha).

I: Ahorita, yo voy a poner tres (levanta tres dedos de la mano izquierda) contémoslos (señala uno a uno los dedos con la mano derecha mientras E7 dice).

E7: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: ¿Ya dio doce?

E7: Sí.

I: ¿Sí? ¡No!, todavía no hay doce ¿qué número hay que colocar?

E7: El cuatro (escribe 4).

I: Listo, coloca dos deditos.

E7: (levanta dos dedos de la mano izquierda).

I: Otros dos.

E7: (levanta dos dedos de la mano derecha).

I: Yo voy a colocar tres (levanta tres dedos de la mano izquierda) y cuatro (levanta dos cuatro dedos de la mano derecha). Cuéntalos todos a ver si ya da (señala uno a uno los dedos levantados mientras E7 dice).

E7: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once.

I: Once, ya casi ¿ya tenemos 12?

E7: Todavía no.

I: ¿Qué número hay que colocar si ya vamos en 11?

E7: Falta el gordito.

I: ¿Falta poner otro dedito? ¿Y cómo representamos otro dedito?

E7: (escribe “6”).

I: Pero ese es el seis, nos da mucho más, con esos números no hemos podido formar el doce ¿cómo representamos otro dedito?

E7: No sé.

I: Bueno, ahora le vas a escribir un mensaje en la hoja para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección que indica el número (le muestra una hoja con el número 26), pero recuerda el mensaje solo puede tener los números que Pipe conoce. Ese número es el 26. ¿Qué números debe tener el mensaje?

I: ¿Qué números debe tener el mensaje?

E7: El 2 y el 6.

I: Escríbelos.

E7: (escribe el 2 y el 6 en la hoja).

I: Pon tú dos deditos.

E7: (levanta dos dedos de la mano izquierda).

I: Y yo voy a poner seis (levanta seis dedos), cuéntalos todos a ver ¿cuánto te da?:

Cuéntalos (señala los dos dedos de la mano de E7).

E7: Uno, dos.

I: (dobla uno a uno los seis dedos que tiene levantados mientras E7 dice).

E7: Tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: ¿Te dio veintiséis?

E7: No.

I: ¿Qué números hay que colocar?

E7: Los otros.

I: ¿Cuáles? Mira que Pipe el títere solo conoce estos números (señala la hoja con los números del 1 al 10).

E7: No sé.

I: ¿Cómo que no sé?

E7: No.

I: Intenta poner algún número.

E7: No.

I: Bueno Esteban entonces acabamos la primera pregunta.

El estudiante lanza los dados y toma la cantidad de monedas correspondientes, las dos primeras rondas toma las monedas de un peso, en la tercera y cuarta ronda toma monedas de \$ 10, y en la quinta y sexta ronda va a tomar monedas de \$ 100, según la cantidad que aparece en el dado.

I: ¿Cuántas monedas de un peso tienes?

E7: (señala la primera moneda) Uno, (señala la segunda moneda) dos, (señala la tercera moneda) tres, (señala la cuarta moneda) cuatro, (señala la quinta moneda) cinco, (señala la sexta moneda) seis, (señala la séptima moneda) siete, (señala la octava moneda) ocho, (señala la novena moneda) nueve, (señala la décima moneda) diez, (señala la décimo primera moneda) once, (señala la décimo segunda moneda) trece, (señala décimo tercera moneda) catorce, (señala décimo cuarta moneda) diez y seis, (señala décimo quinta y

décimo sexta moneda) diez y ocho, (señala décimo séptima moneda) diez y nueve, (señala décimo octava moneda) diez y siete, (señala décimo novena moneda) ocho, (señala vigésima moneda) nueve, (señala vigésima primera moneda) diez. I: ¿Cuántas monedas de diez pesos tienes?

E7: Señala las monedas de \$100.

I: ¿Esas son las monedas de diez pesos? ¿Ese es el número diez?

E7: Señala las monedas de diez, (señala la primera moneda) uno, (señala la segunda moneda) dos, (señala la tercera moneda) tres, (señala la cuarta moneda) cuatro, (señala la quinta moneda) cinco, (señala la sexta moneda) seis, (señala la octava moneda) siete, (señala la décima segunda moneda) ocho, (señala la décimo quinta moneda) nueve, (señala la décimo sexta moneda) diez.

I: ¿Cuántas monedas de cien pesos tienes?

E7: (señala la primera moneda) uno, (señala la segunda moneda) dos, (señala la tercera moneda) tres, (señala la cuarta moneda) cuatro, (señala la quinta moneda) cinco, (señala la sexta moneda) seis, (señala la octava moneda) siete, (señala la décima segunda moneda) ocho, (señala la décimo primera moneda) nueve, (señala la décimo sexta moneda) diez, once, trece, catorce, diez y seis, (señala la vigésimo segunda moneda) diez y ocho.

I: Con las monedas de un peso ¿puedes hacer cambios con el banquero?

E7: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E7: Contarlas (toma una a una las diez monedas de \$1 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez.

I: Listo pásela al banquero. ¿Esteban qué moneda te tiene que dar el banquero?

E7: La de cien.

I: Pero si le diste monedas de un peso,

E7: Osea la azul

I: Banquero ¿qué moneda le vas a dar?

Banquero: (Le pasa la moneda de diez pesos que es azul y recibe las diez monedas de \$1).

I: Mira que la banquera te dio la moneda de \$10 no de \$100, recuerda las reglas

I: Con las monedas de diez pesos ¿puedes hacer cambios?

E7: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E7: Contarlas (toma una a una las diez monedas de \$10 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¡Listo! pásela al banquero.

Banquero: (le pasa la moneda de cien y recibe las diez monedas de \$10).

I: Con las monedas de cien pesos ¿puedes hacer cambios?

E7: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E7: Contarlas (toma una a una las monedas de \$100 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez.

I: Listo pásela al banquero.

Banquero: (Le pasa la moneda de \$1.000 y recibe las diez monedas de \$100).

I: Con las monedas de un peso ¿puedes hacer cambios con el banquero?

E7: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E7: Contarlas (toma una a una las diez monedas de \$1 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez.

I: Listo dásela al banquero. ¿Esteban qué moneda te tiene que dar la banquera?

E7: La de cien.

I: Pero si le diste monedas de un peso, Banquera ¿qué moneda le vas a dar?

Banquero: (Le pasa la moneda de diez pesos y recibe las diez monedas de \$1).

I: Mira que la banquera te dio la moneda de \$10 no de \$100. Con las monedas de diez pesos ¿puedes hacer cambios con el banquero?

E7: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E7: Contarlas (toma una a una las 8 monedas de \$10 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: ¿Puedes hacer un cambio?

E7: No.

I: Entonces déjalas ahí.

I: Con las monedas de cien pesos ¿puedes hacer cambios con el banquero?

E7: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E7: Contarlas (toma una a una las diez monedas de \$1 mientras dice) una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Listo dásela al banquero. ¿Esteban qué moneda te tiene que dar la banquera?

E7: La de cien.

Banquera: ¡La de mil! (toma las diez monedas de cien pesos y le da la moneda de mil a E7).

I: Esteban ¿cuánto tienes en total?

E7: Una, dos, tres (tomando las tres monedas de \$10).

I: Pero esas no son de uno en uno, son de diez en diez, tendría que ser: diez (toma primera moneda de diez pesos), veinte (toma segunda moneda de diez pesos), treinta (toma tercera moneda de diez pesos).

I: (señala la cuarta moneda de diez pesos).

E7: cuarenta.

I: (señala la quinta moneda de diez pesos).

E7: Sesenta.

I: Cincuenta (señala la quinta moneda de diez pesos).

E7: Cincuenta.

I: (señala la sexta moneda de diez pesos).

E7: Sesenta.

I: (señala la séptima moneda de diez pesos).

E7: cuarenta.

I: Setenta (señala la séptima moneda de diez pesos).

E7: Setenta.

I: (señala la octava moneda de diez pesos) Ochenta.

E7: Ochenta.

I: Listo.

E7: Diez (toma una moneda de diez pesos), veinte (toma una moneda de diez pesos), catorce (toma una moneda de diez pesos), diez y seis (toma dos monedas de diez pesos), ochocientos (toma tres monedas de diez pesos).

I: ¿Y entonces cuánto tienes en total?

E7: Diez.

I: ¿Diez?

E7: Sí.

I: Bueno Esteban, vamos a hacer la tercera pregunta, ¿te acuerdas de la separata? (muestra imagen de la separata de ofertas) ¿cuánto vale la chokolatina?

E7: Trescientos.

I: Mira esto (señala el 1.100) significa mil cien. ¿A ti te gustan las chokolatinas?

E7: Sí.

I: Mira, aquí tenemos la chokolatina (muestra ficha con la imagen de la chokolatina) que tenemos en la separata ¿cuánto vale la chokolatina?

E7: Dos unos y dos ceros.

I: Significa mil cien, te acuerdas que ahora jugamos con las monedas (le muestra al estudiante 13 monedas de \$100) y te acuerdas que cuando formabas un grupo de cien ¿qué moneda te tenían que dar?

E7: Cien.

I: ¿Otra moneda de cien? ¡No! ¿Qué moneda te tenían que dar?

E7: Doscientos.

I: No había monedas de doscientos, te tenían que dar una moneda de mil. Bueno, para poder comprar la chokolatina debes escoger las monedas necesarias y solo las necesarias, ni más ni menos y pegarlas en la ficha.

E7: (toma una a una las trece monedas de \$100 mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, trece, catorce.

I: ¿Aquí ya hay mil cien?

E7: Sí.

I: Vamos a contar.

I: (señala la primera moneda) cien, (señala la segunda moneda) doscientos, (señala la tercera moneda).

E7: Trescientos.

P:(Señala la cuarta moneda).

E7: Cuatrocientos.

I: (señala la quinta moneda).

E7: Ochocientos.

I: Quinientos (señala la quinta moneda).

E7: Quinientos.

I: (señala la sexta moneda), Seiscientos, (señala la séptima moneda), setecientos

E7: Cientos.

I: (señala la octava moneda) Ochocientos.

E7: Cientos.

I: (señala la novena moneda) Novecientos.

E7: Cientos.

I: (señala la décima moneda) Mil.

E7: Mil.

I: (señala la décimo primera moneda) Mil cien.

E7: Mil cien.

I: (señala la décimo segunda moneda) Mil doscientos.

E7: Mil doscientos.

I: (señala la décimo tercera moneda) Mil trescientos.

E7: Mil trescientos.

I: No hay mil cien.

E7: Toca quitar ésta (quita una moneda de cien pesos).

I: Vamos a contar, (señala la primera moneda) Cien, (señala la segunda moneda).

E7: Doscientos.

I: (señala la tercera moneda).

E7: Cuatrocientos.

I: Trecientos (señala la tercera moneda).

E7: Trecientos.

I: (señala la cuarta moneda).

E7: Seiscientos.

I: Cuatrocientos (señala la cuarta moneda).

E7: Cuatrocientos.

I: (señala la quinta moneda).

E7: Seiscientos.

I: Quinientos (señala la quinta moneda).

E7: Quinientos.

I: (señala la sexta moneda).

E7: Seiscientos.

I: (señala la séptima moneda).

E7: Cuatrocientos.

I: (señala la séptima moneda) Setecientos, (señala la octava moneda).

E7: Cuatrocientos.

I: (señala la octava moneda) Ochocientos.

E7: Ochocientos.

I: (señala la novena moneda).

E7: Cincuenta.

I: (señala la novena moneda) Novecientos.

E7: Cientos.

I: (señala la décima moneda) mil.

E7: Mil.

I: (señala la décimo primera moneda) Mil cien.

E7: Mil cien.

I: (señala la décimo segunda moneda) Mil doscientos.

E7: Mil doscientos.

I: ¿Ya hay mil cien?

E7: No.

E7: Toca quitar esta (retira una moneda de \$100).

I: Ok.

Entrevista Estudiante 10

I: Hola Nicole, ¿tú sabes cómo se llama este juego? (Muestra el tablero, las fichas y los dados del juego cincuenta fichas).

E7: ¡Sí! Se tiran dados y se ponen fichas.

I: Bueno, Nicole el juego se llama cincuenta fichas y ya sabes cómo es, se tiran los dados y se van poniendo las fichas en el tablero, ganas cuando llenes todo el tablero ¡Tira los dados!

E10: (lanza los dados, obtiene en el primer dado 7 puntos y en el segundo 6 puntos).

I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados?

E10: (señala uno a uno los puntos de los dados, mientras mueve los labios) Trece.

I: Escribe aquí trece (señala la casilla del primer turno).

E10: (escribe 13).

I: ¡Coloca las fichas en el tablero!

E10: (toma una a una las trece fichas mientras mueve los labios y las coloca a un lado; luego, toma una a una las trece fichas y las coloca en el tablero).

I: ¡Muy bien! lanza los dados otra vez.

E10: (lanza los dados, obtiene en el primer dado cinco y en el segundo dado tres).

I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados?

E10: (señala uno a uno los puntos de los dados, mientras dice) Ocho.

I: Escribe aquí ocho (señala la casilla del segundo turno).

E10: (escribe 8).

I: Coloca ocho fichas.

E10: (toma una a una las siete fichas de la bolsa mientras mueve los labios y las coloca a un lado; luego, coloca una a una las siete fichas en el tablero).

I: ¿Ya hay 8? Cuéntalas (señala la primera ficha que coloca la estudiante en el segundo turno).

E10: (señala una a una las fichas con el dedo índice mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete; me falta una (toma la ficha de la bolsa y la coloca en el tablero).

I: ¡Muy bien, lanza los dados otra vez!

E10: (lanza los dados, en el primer dado tres puntos en el segundo dado cero puntos).

I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados?

E10: (toca el dado de 3 puntos) Tres.

I: ¿Tres?

E10: Y el otro no está.

I: Y como se llama “el no está”.

E10: Cero.

I: Coloca tres fichas.

E10: (toma 3 fichas de la bolsa y las pone en el tablero) Las tres fichas son fáciles.

I: Tira los dados.

E10: (lanza los dados, obtiene 6 puntos en el primer dado y 8 puntos en el segundo dado).

I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados?

E10: (señala uno a uno los puntos de los dados, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce.

I: Escribe aquí catorce (Señala la casilla del cuarto turno).

E10: (escribe 14).

I: Coloca catorce fichas.

E10: (toma 14 fichas de la bolsa mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce (las coloca a un lado; luego coloca una a una las catorce fichas en el tablero).

I: ¿Cuánto te falta para ganar?

E10: Señala uno a uno las casillas vacías del tablero mientras dice: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce (doce en tono más alto).

I: ¡Lanza los dados!

E10: (lanza los dados, obtiene cuatro puntos en el primer dado y tres puntos en el segundo dado).

I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados?

E10: (señala uno a uno los puntos de los dados, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: Escribe aquí siete (Señala la casilla del quinto turno).

E10: (escribe 7).

I: Coloca siete fichas.

E10: (toma 7 fichas de la bolsa mientras mueve los labios y las coloca a un lado; luego, coloca una a una las siete fichas en el tablero).

I: ¿Cuánto te falta para ganar?

E10: (señala uno a uno las casillas vacías del tablero mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco (la última palabra en el tono de voz más alto)

I: ¿Será que sacas cinco? ¡Lanza los dados!

E10: (lanza los dados, obtiene cuatro en el primer dado y uno en el segundo dado).

I: ¿Cuánto obtuviste al lanzar los dados?

E10: (señala uno a uno los puntos de los dados, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco.

I: Escribe aquí 5 (Señala la casilla del sexto turno).

E10: (escribe 5).

E10: Toma 5 fichas de la bolsa mientras mueve los labios y las coloca a un lado; luego, coloca una a una las 5 fichas en el tablero.

I: ¡Ganaste!

I: Bueno Nicol, ahora vamos a ver la tabla que está aquí (señala la tabla del punto 3) ¿En qué turno obtuviste 10?

E10: (mira a la investigadora).

I: ¿En alguno de estos puntajes obtuviste diez?

E10: No.

I: ¿En cuál de estos turnos obtuviste un puntaje mayor a diez?

E10: (señala el 14 con el lápiz).

I: ¿Ahí? Vas a hacerle una equis.

E10: (dibuja una X sobre el 14).

I: Listo vamos a hacer el otro ejercicio, estas son las caras de dos dados, vas a completar la cara de este dado (cara del dado en blanco), para que en total nos de diez. Vamos a contar cuántos puntos hay en el primer dado (señala los puntos del primer dado).

E10: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Aquí hay seis, cuánto nos falta para haya diez en total.

E10: Seis más.

I: ¿Seis más? Coloca seis más.

E10: (Dibuja seis puntos mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: ¿Ya hay diez?

E10: (con el lápiz, Señala uno a uno los puntos de los dos dados, mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez. Me falta borrar este (borra dos puntos).

I: Ya hay diez.

E10: Sí.

I: Vamos a mirar acá (señala con el dedo índice los puntos de la cara del dado de la derecha con cuatro puntos, mientras E10 dice).

E10: Uno, dos, tres, cuatro.

I: ¿Cómo completamos diez?

E10: Colocamos cuatro más.

I: ¿Si? Coloca cuatro más.

E10: (dibuja cuatro puntos en la cara del dado de la izquierda mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro.

I: ¿Ya hay Diez?

E10: (con el lápiz, señala cada uno de los puntos de los dos dados mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho; uno más (dibuja un punto) y otro (dibuja un punto) ¡Diez!

I: ¡Muy bien Nicol!, ahora te voy a pedir con las fichas que hay aquí (fichas del juego “cincuenta fichas”) que me formes una colección de tres fichas.

E10: ¿Tres fichas?

I: Tres fichas solamente.

E10: (toma tres fichas y las pone una encima de otra)

I: ¡Muy bien Nicole! (retira las tres fichas) ¿puedes mostrarme cuatro fichas?

E10: (toma una a una las cuatro fichas y las acomoda una encima de otra).

I: ¡Muy bien Nicole! ¿Puedes mostrarme seis fichas?

E10: (toma una a una las seis fichas y las acomoda una encima de otra mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis fichas.

I: ¿Ya hay seis fichas?

E10: Si! ¡Muy bien Nicole! (retira las seis fichas) Puedes mostrarme ocho fichas.

E10: (toma una a una las 8 fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho (acomoda las 8 fichas, una encima de otra).

I: ¡Muy bien Nicole! ¿Puedes mostrarme diez fichas?

E10: (toma una a una las 10 fichas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, (acomoda las 10 fichas, una encima de otra).

I: ¿Ya hay diez fichas?

E10: Si

I: Este tren es el de Pepa (señala con el dedo índice el tren que se encuentra en la ficha), en él se encuentran Pedro poni, Wendy loba, Emilia elefanta, Rebeca liebre, Madame gacela, Susy oveja, Pepa cerdita, Danny perro, Zoe cebra y Candy gata ¿Te acuerdas de este tren?

E10: Sí.

I: ¿Tú me puedes señalarme el personaje que está ubicado de primero en el tren?

E10: (señala a Pedro).

I: ¿Lo puedes encerrar en un círculo?

E10: (toma el lápiz y lo encierra en un círculo).

I: Tú me puedes decir ¿en qué posición esta Emily la Elefante?

E10: ¿Emily la elefante? (Señala a Emily).

I: ¿Cómo se llama esa posición?

E10: Tercera.

I: (escribe tercera) Resulta que ahora, vas a escoger uno de los personajes, el que más les llame la atención y vas a escribir un mensaje para que yo pueda conocer la ubicación del personaje en el tren. El dibujo lo debes hacer en el rectángulo.

E10: (dibuja a Wendy loba).

I: Listo ¿a quién escogiste? ¿A Dany Perro?

E10: ¡No! a Wendy loba.

I: Y ¿en qué posición esta?

E10: De segunda.

I: Puedes escribir de segunda.

E10: (escribe se).

I: ¿Cómo representamos el segundo?

E10: (escribe 2)

I: ¡Muy bien Nicole!, ahora vamos a hacer otra pregunta (le pasa a E10 los rieles del tren) ¿te acuerdas de esto?

E10: Son las vías del tren.

I: ¿Te acuerdas que había que hacer?

E10: Pegar los números que faltaban.

I: Mira tenemos aquí dos números, éste de aquí (señala el 12) que es el.

E10: Doce.

I: Y este de aquí (señala el 21) que es el veintiuno.

E10: Veintiuno.

I: ¿Podrías ubicar el 12 y el 21 en las vías del tren?

E10: (toma el 12) El veintiuno va (lo pone en la posición del 21, los rieles quedan 12, 22, 23, 24).

I: ¿Ese es el veintiuno?

E10: (quita el 12 y pone el 21, los rieles quedan 21, 22, 23, 24).

I: ¿Por qué ese va ahí?

E10: Porque acá (señala con el dedo índice el 24) está el 24, el 23 (señala con el dedo índice el 23), el 22 (señala con el dedo índice el 22) y el 21 (señala con el dedo índice el 21).

I: Y entonces éste (señala el 12) ¿dónde va?

E10: El 12 va (toma el carril con los números del 11 al 15 y pega el 12 después del 11).

I: ¿Y por qué el 12 va ahí?

E10: Porque aquí (señala con el dedo índice el 15) está el 15, el 14 (señala con el dedo índice el 14), el 13 (señala con el dedo índice el 13) y el 12 (señala con el dedo índice el 12).

I: Bueno, vamos a dejarlos por acá (pone en un lado los rieles del tren). Ahora, vamos a hacer otra pregunta ¿te acuerdas de éstas de aquí? (Saca el mazo de cartas españolas modificadas y el tren). Ésta es la carta del diez, vas a empezar a sacar las cartas, si obtienes diez, vas a empezar a ponerlas en los vagones si no, pues no las pones en el vagón.

I: ¡Toma una carta!

E10: (toma la carta 6).

I: ¿Qué número sacaste en la carta?

E10: (observa la carta) Seis.

I: ¿Esa carta es mayor o menor que diez?

E10: Es menor

I: ¿Por qué?

E10: porque tiene más poquitas Pepas

I: ¿La puedes poner en el vagón?

E10: No.

I: Entonces ponla encima de la mesa, toma otra carta.

E10: (observa la carta) Doce.

I: ¿Esa carta es mayor o menor que diez?

E10: Es mayor

I: ¿Por qué?

E10: porque tiene más bastantes Pepas

I: Toma otra carta

E10: (toma la carta 1).

I: ¿Qué número sacaste en la carta?

E10: La primera.

I: La puedes poner.

E10: ¡No!

I: ¡Toma una carta!

E10: (toma la carta 9).

I: ¿Qué número sacaste en la carta?

E10: (observa la carta) Nueve.

I: La puedes poner en el vagón.

E10: No.

I: ¿Ese número de ahí lo puedes sumar con otro para que dé diez?

E10: Con ésta (señala el 9).

I: Esas dos (señala las dos cartas con nueve personajes), contémoslas a ver.

E10: (señala una a una los personajes en las cartas mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis, diez y siete, diez y ocho.

I: ¿Entonces?

E10: Con ésta (señala la carta del 1).

I: ¡Cuéntalas!

E10: (señala una a una los personajes en las cartas 1 y 9 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez.

I: Muy bien, las puedes colocar en el vagón ¡ya llenaste un vagón!

E10: Me faltan cuatro vagones.

I: Saca otra carta.

E10: (Toma la carta 1) una pepa.

I: ¿Esa carta es menor o mayor que diez?

E10: Menor.

I: ¿A este número le podrías sumar otro número para obtener diez?

E10: Con ésta (señala la carta del 9).

I: ¡Cuéntalas!

E10: (señala una a una los personajes en las cartas 1 y 9 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez.

I: Muy bien, ¡ya llenaste otro vagón!

I: Hola Nicol ¿lo recuerdas a él? (Muestra a Pipe el títere).

E10: El Pipe.

I: Él es Pipe el títere (Muestra a Pipe el títere).

I: Recuerdas que Pipe el títere tiene una tienda de bananas, a él le puedes pedir las bananas que quieras. Pero Pipe tiene un problema, solo puede contar hasta 10, así que cuando alguien va a la tienda de Pipe a pedir bananas solo pueden utilizar estos números (señala uno a uno los números del 1 al 10 que están escritos en una hoja mientras E10 dice).

E10: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Mira estos son los números que Pipe conoce, no conoce otros números, solo esos que están ahí (señala la hoja en la que están escritos los números). Tú le vas a pedir a pipe el títere 12 dulces (le entrega al estudiante un cuadrado en el que están escrito “12”) dulces, pero solo puedes utilizar los números que están aquí (señala hoja con los números del 1 al 10), no puedes utilizar otros números porque Pipe el títere no los conoce ¿Listo?

E10: (escribe el 1 y el 2 en la hoja).

I: ¿Estos números suman doce?

E10: El uno adelante y el dos atrás.

I: Uno más dos es doce.

E10: Sí.

I: Si colocas un dedito y dos deditos ¿cuánto te da?

E10: (Extiende un dedo de la mano izquierda y dos dedos de la mano derecha).

I: ¡Cuéntalos!

E10: Uno, dos, tres.

I: Entonces ¿qué tenemos que hacer? Si tú le das este mensaje a Pipe el sólo te va a dar tres dulces, él no te va a dar doce.

E10: Escribe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

I: Espera estas escribiendo todos los números ¿cómo hacemos para componer el doce?

E10: Borra todos los números. (Escribe 12).

I: Pero ese número Pipe el títere no lo conoce, él sólo conoce estos números (Señala la hoja con los números escritos del 1 al 10).

E10: O sea que debo escribir el 10.

I: Puede ser.

E10: (escribe el 10).

I: Diez, ¿Cuánto le falta al diez para llegar a doce?

E10: ¡Doce!, el doce no lo conoce.

I: Te voy a poner aquí diez deditos (extiende los diez dedos de las manos).

E10: (señala uno a uno los diez dedos, al señalar el último dedo dice) Cuatro.

I: Vamos a ver, pon tú cuatro dedos (le toma la mano a la estudiante).

E10: Extiende cuatro dedos de la mano derecha.

I: Cuéntalos todos a ver si ya da doce.

E10: (señala uno a uno los 10 dedos de la mano de I) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, (dobla dos dedos de la mano de ella, de los que tiene extendidos) once doce. O sea que debo quitar este (dobla un dedo) y este (dobla otro dedo) para poner este (levanta un dedo).

I: Entonces cuántos deditos debes colocar ahí para que te de doce.

E10: Uno.

I: ¿Uno? Coloca uno.

E10: (extiende un dedo de la mano izquierda).

I: Cuéntalos a ver si ya da doce.

E10: (señala uno a uno los 10 dedos de la mano de I mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, (señala el dedo de la mano que tiene extendido) once, (levanta un dedo de la mano izquierda) doce.

I: A bueno, ¿aquí cuántos dedos hay? (mueve sus manos).

E10: Diez.

I: Y tú.

E10: Dos.

I: ¡Dos!

E10: Van doce.

I: Van diez y cuánto te falta.

E10: Dos (escribe dos y dos).

I: (dos y dos).

E10: Veinte dos, mentiras (borra un dos).

I: Bien, mira diez más dos es doce (extiende diez dedos de la mano) tú levanta dos dedos.

E10: (levanta dos dedos).

I: (dobla cada dedo mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez, (Señala los dedos de E10 mientras dice) once, doce. Diez y dos dan doce.

E10: Doce.

I: Pásale el mensaje a Pipe el títere para que te dé doce dulces.

I: Ahora le vas a pedir a Pipe el títere 26 dulces, recuerda que él sólo conoce los números del 1 al 10 (señala los números en la hoja).

E10: Escribe el 10 y el 8.

I: Yo voy a colocar diez dedos (extiende diez dedos en las manos) y tú ocho.

E10: (levanta uno a uno los dedos de las manos mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.

I: Vamos a contarlos todos. (I dobla uno a uno los dedos que tiene levantados mientras E10 dice).

E10: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez, (dobla los 8 dedos que tiene levantados mientras dice) once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis, diez y siete, diez y ocho, o sea que debo poner un dedo (levanta un dedo de la mano derecha).

I: ¿Un dedo?

E10: (Levanta cinco dedos de la mano izquierda y un dedo de la mano derecha).

I: Cinco y uno da seis.

E10: Diez y seis.

I: Diez y seis, pero son veintiséis, no diez y seis.

E10: Esta mal el número borra el ocho y escribe el 7.

I: Diez y siete te da veinte seis.

E10: Borra el 7 y escribe el 6.

I: A ver coloca seis deditos y yo voy a colocar diez (levanta los diez dedos de las manos).

E10: (Levanta seis dedos de las manos).

I: Cuéntalos (dobla uno a uno los diez dedos de las manos mientras E10 dice).

E10: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve diez, (dobla uno a uno los dedos que tiene levantados mientras dice) once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis (levanta un dedo) diez y siete, (levanta otro dedo) diez y ocho, (levanta otro dedo) diez y nueve, (levanta otro dedo) veinte.

I: ¿Cuántos tengo levantados?

E10: Diez.

I: Y tú ¿cuántos tienes levantados?

E10: Diez.

I: Escríbelos.

E10: Escribe 10.

I: Si llegamos a veinte cuánto te falta para llegar a veintiséis.

E10: Veintiuna (levanta un dedo), veintidós (levanta otro dedo), veintitrés (levanta otro dedo), veinticuatro (levanta otro dedo), veinticinco (levanta otro dedo), veintiséis (levanta otro dedo).

I: Muy bien, ¿cuántos dedos levantaste?

E10: Seis.

I: Escríbelo.

E10: (Escribe 6).

I: Muy bien, entonces diez (levanta diez dedos de las manos).

E10: Más diez (levanta diez dedos de las manos), más seis e igual da veintiséis.

I: Muy bien.

El estudiante lanza los dados y toma la cantidad de monedas correspondientes, las dos primeras rondas toma las monedas de un peso, en la tercera y cuarta ronda toma monedas de \$ 10, y en la quinta y sexta ronda va a tomar monedas de \$ 100, según la cantidad que aparece en el dado.

I: ¿Cuántas monedas de un peso tienes?

E10: (señala con el dedo índice una a una las 16 monedas de \$1 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis.

I: ¿Cuántas monedas de diez pesos tienes?

E10: (señala con el dedo índice una a una las 13 monedas de \$10 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece.

I: ¿Cuántas monedas de cien pesos tienes?

E10: (señala con el dedo índice una a una las 16 monedas de \$100 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, diez y seis.

I: Nicole, con estas monedas de un peso ¿tú puedes hacer un cambio? Con el banquero

E10: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E10: Diez de un peso.

I: Háglele pues.

E10: (con la mano derecha toma una a una 10 monedas de \$1 y se las pone en la mano izquierda mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: Con esas monedas puedes hacer un cambio, entrégaselas al banquero.

E10: (sonríe, le entrega las monedas al banquero).

I: Esteban ¿qué moneda le tienes que dar a Nicole?

Banquero: esta (toma la moneda de diez pesos y se la pasa a Nicole).

I: Nicole ¿está bien?

E10: Sí.

I: Con las monedas de \$10 ¿puedes hacer un cambio? Nicole.

E10: Sí.

I: ¿Qué tienes que hacer?

E10: Contar las de 10 para completar diez. (con la mano derecha toma una a una 10 monedas de \$10 y se las pone en la mano izquierda mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez.

I: ¿Qué moneda te tiene que entregar Esteban?

E10: Las rojas.

Banquero: (le entrega a Nicole una moneda roja).

E10: (le entrega al banquero 10 monedas de \$10).

I: ¿Pero qué valor tiene esa moneda?

E10: Cien.

I: ¿Con las monedas de \$100 tú puedes hacer un cambio?

E10: Para el banquero seguro (sonríe).

I: Aja.

E10: (con la mano derecha señala una a una 10 monedas de \$100 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez (recoge las 10 monedas de \$100 y se las pone en la mano izquierda), diez fichas.

I: ¿Qué moneda te tiene que entregar el banquero?

E10: Las de mil.

I: Esteban, mira te van a entregar una colección de monedas.

E10: Para el banquero que se está riendo (sonríe y le pasa 10 monedas de \$100 al banquero).

Banquero: Esteban mira, ¿Qué moneda le tienes que entregar?

E10: La de mil.

Banquero: Esta (toma la moneda de mil).

I: Esa pásasela a Nicole.

Banquero: (Le pasa la moneda de \$1.000 a Nicole).

I: Muy bien, Nicole ¿Cuánto tienes en total?

E10: (con el dedo índice de la mano derecha señala una a una las 6 monedas de \$1 y la moneda de \$10 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. (con el dedo índice de la mano derecha señala una a una las 3 monedas de \$10 y la moneda de \$100 mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, (con el dedo índice de la mano derecha señala una a una las 6 monedas de \$100 y la moneda de \$1.00 mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.

I: Mira que todas son de diferente valor (toca las monedas de \$100).

E10: Si, pero (toca la moneda de \$1.000).

I: Esta es la moneda de \$1.000 (toca la moneda de \$1.000) ¿Cuáles son las de \$100?

E10: Toca una moneda de \$100.

I: ¿Hay otra moneda de cien?

E10: No.

I: Segura.

E10: (toca la moneda de mil) Esta es la moneda de \$1.000.

I: Mira esta es otra moneda de \$100 (toca una moneda de \$100), estas con las monedas de uno (toca las monedas de \$1) y estas son las monedas de \$10 (toca las monedas de \$10).

Éstas (toca las monedas de \$1) si valen uno, (señala las monedas una a una con el dedo índice mientras dice) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. Pero éstas (señala las monedas de

\$10 una a una con el dedo índice) son diez, veinte, treinta, cuarenta, estas son de diez en diez. Y éstas de cien en cien (señala las monedas de \$100).

E10: Y ésta (toca la moneda de \$1.000).

I: Esa es de mil y solamente hay una ¿Y ésta? (toca la primera moneda de cien) cien (señala la segunda moneda de cien).

E10: Doscientos.

I: (toca la tercera moneda de cien).

E10: Trescientos.

I: (toca la cuarta moneda de cien).

E10: Cuatrocientos.

I: (toca la quinta moneda de cien pesos).

E10: Cien.

I: Quinientos (toca la sexta moneda de cien pesos).

E10: Setecientos.

I: Seiscientos (toca la séptima moneda de cien pesos).

E y I: Setecientos.

I: ¿Cuánto tienes en total?

E10: (suspira), mira a la investigadora.

I: No sabes.

E10: No.

I: Mira (toca la moneda de \$1.000) tienes mil, (toca las 7 monedas de \$100 mientras dice) cien, doscientos, trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, van mil setecientos (toca las 4 monedas de \$10 mientras dice) diez.

E10: Diez.

I: (toca la segunda moneda de \$10).

E10: Veinte.

I: (toca la tercera moneda de \$10).

E10: Treinta.

I: (toca la cuarta moneda de \$10).

E10: Cuarenta.

I: Mil setecientos cuarenta (toca una a una las seis monedas de \$1 mientras dice) y uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis. Mil setecientos cuarenta y seis. Si viste.

E10: Sí (sonríe).

I: Bueno, vamos a hacer otro punto. Resulta que para comprar esta rica chocolatina.

E10: Sonríe.

I: (le pasa a la estudiante la ficha con la imagen de la chocolatina) Te voy a dar estas monedas (13 monedas de \$100) ¿Cuánto es que vale la chocolatina? (Señala la chocolatina de la ficha con el valor de \$1.100).

E10: Ehh mil cien.

I: Mil cien. Te acuerdas que ahorita con el banquero, formamos un grupo para que te dieran una moneda de mil y mira aquí es mil cien (señala el valor del mil cien en la ficha). Aquí (señala la ficha) debes colocar las monedas necesarias y sólo las necesarias para comprar la chocolatina, ni más ni menos.

E10: Pega 13 monedas de 100 en la ficha.

I: ¿Ahí hay mil cien? ¿Cómo hacemos para saber que hay mil cien?

E10: (despega cinco monedas de \$100 y señala con los dedos índice y anular dos monedas de \$100 mientras dice) Estas dos (señala con los dedos índice y anular dos monedas de \$100 mientras dice) y estas dos (despega seis fichas y pega dos fichas en la parte de abajo).

I: ¿Cuántas monedas tuviste que dar ahorita para que te devolvieran mil pesos?

E10: Diez.

I: A bueno ¿cuántas tienes ahí?

E10: (señala una a una las monedas de \$100 mientras dice) Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.

I: Y necesitas.

E10: (Pega 4 monedas de \$100) ¡Diez!

I: ¿Ahí, cuánto tienes ya?

E10: Mil cien.

I: Mira, cien (señala la primera moneda), doscientos (señala la segunda moneda), (señala la tercera moneda).

E10: Trescientos.

I: (señala la cuarta moneda).

E10: Cuatrocientos.

I: (señala la quinta moneda).

E10: Setecientos.

I: Quinientos, (señala la sexta moneda).

E10: Setecientos.

I: Seiscientos, (señala la séptima moneda).

E10: Setecientos.

I: (señala la octava moneda).

E10: Ochocientos.

I: (señala la novena moneda).

E10: (silencio).

I: Novecientos (señala la décima moneda) mil. Y son mil cien (señala el \$1.100 de la ficha) ¿Qué te hace falta?

E10: Poner otras dos acá (señala el lugar para poner las monedas).

I: ¿Otras dos? Pon otras dos.

E10: O sea una (coloca una moneda de \$100).

I: ¿Una o dos?

E10: Una.

I: Ok. Vamos a contar (señala la primera moneda) cien, (señala la segunda moneda).

E y I: Doscientos.

I: (señala la tercera moneda).

E y I: Trescientos.

I: (señala la cuarta moneda).

E10: Ochocientos.

I: Cuatrocientos (señala la quinta moneda).

E10: Silencio.

I: Quinientos.

E10: Entos.

I: (señala la sexta moneda).

E10: Seiscientos.

I: (señala la séptima moneda).

E10: Setecientos.

I: (señala la octava moneda).

E10: Ochocientos.

I: (señala la novena moneda).

E10: Novecientos.

I: (señala la décima moneda).

E10: Silencio.

I: Mil.

E10: Mil.

I: (señala la décima primera moneda) mil cien.

E10: Mil cien.

I: Muy bien Nicol.

Anexo 27. Actuaciones de los estudiantes

Situación 1: Tarea 1									
Estudiante	Pregunta 1				Pregunta 2		Pregunta 3: Lucia tiene seis fichas		
	A. ¿Cuánto sacaste en total al lanzar los dados?		B. ¿Quién ha colocado menos fichas en la tabla?	C. ¿Cuántas fichas te faltan para tener la misma cantidad que tu compañero?	D. ¿Cuánto te falta para ganar?	¿Cuántas fichas se deben colocar en el tablero para llenar todas las casillas?		a) Pedro tiene una ficha más que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Pedro	b) Mariana tiene 2 fichas menos que Lucia. Dibuja las fichas que tiene Mariana
E1: Dilan	Totaliza	Repite última palabra número	Conteo	Respuesta correcta, uso de la secuencia numérica	Conteo correcto	Olvida contar una casilla, respuesta incorrecta	Pictórica	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta incorrecta dibuja 7
E2: Caro	Totaliza	Repite última palabra número	Conteo	Respuesta correcta, uso de la secuencia numérica	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Representación simbólica 01	Respuesta incorrecta dibuja cuatro fichas	Respuesta incorrecta dibuja 3
E3: Sara	No totaliza	Dice secuencia numérica	Observación	No responden correctamente	Conteo correcto	Respuesta correcta y tiene errores en el conteo	Pictórica	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta incorrecta dibuja 2
E4: Oriana	Totaliza	Repite última palabra número	Observación	No responden correctamente	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Uso de representaciones simbólicas del 1 al 10, algunas en notación en espejo	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta incorrecta dibuja 3
E5: Joseph	Totaliza	Dice una palabra número	Observación	No responden correctamente	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Pictórico	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta incorrecta dibuja 0 fichas
E6: Katherine	Totaliza	Repite última palabra número	Observación	No responden correctamente	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Pictórico	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta correcta dibuja 4 fichas
E7: Esteban	No totaliza	dice secuencia numérica	Observación	No responden correctamente	No cuenta correctamente	Respuesta correcta y tiene errores en el conteo	Pictórico	Respuesta incorrecta dibuja seis fichas	Respuesta incorrecta dibuja 6
E8: Nicolás	Totaliza	Repite última palabra número	Observación	No responden correctamente	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Pictórico	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta incorrecta dibuja 8
E9:Johan	Totaliza	Dice cardinal	Diferencia cuantitativa entre colecciones	Respuesta correcta, comparación visual en los tableros	Conteo correcto	Respuesta correcta y tiene errores en el conteo	Simbólico 10	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta correcta dibuja 4 fichas
E10: Nicol	Totaliza	Repite última palabra número	Diferencia cuantitativa entre colecciones	Respuesta correcta, comparación visual en los tableros	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Simbólico 10	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta correcta dibuja 4 fichas
E11:Dana	Totaliza	Repite última palabra número	Conteo	Respuesta correcta, comparación visual en los tableros	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Pictórico	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta correcta dibuja 4 fichas
E12:Manuel	No totaliza	Repite última palabra número	Conteo	Respuesta correcta, comparación visual en los tableros	Conteo correcto	Respuesta correcta y cuenta bien	Uso de representaciones simbólicas del 1 al 10, algunas en notación en espejo	Respuesta correcta dibuja 7 fichas	Respuesta incorrecta dibuja 2

Una Aproximación al Sistema de Numeración Decimal en Transición

Situación 1: Tarea 3

Situación 1: Tarea 2									
Estudiante	Pregunta 1: Usando las fichas del juego realiza una colección que tenga:						Pregunta 2: Señala la carta con		
	a. 0 fichas	b. 3 fichas	c. 4 fichas	d. 6 fichas	e. 8 fichas	f. 10 fichas	3 fichas	6 fichas	10 fichas
E1: Dilan	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente no realiza conteo	No señala la ficha correcta
E2: Caro	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente no realiza conteo	Señala la ficha correcta luego de que se le pide que cuente
E3: Sara	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	No realiza la colección	Señala correctamente y realiza conteo	Señala carta incorrecta después de que se le pide que cuente señala la correcta	Señala correctamente y realiza conteo
E4: Oriana	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente y realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo	Señala la ficha correcta luego de que se le pide que cuente
E5: Joseph	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente no realiza conteo	Señala carta incorrecta después de que se le pide que cuente señala la correcta	Señala la ficha correcta luego de que se le pide que cuente
E6: Katherine	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo
E7: Esteban	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección sin conteo (copia)	No realiza la colección	No realiza la colección	No realiza la colección	Señala carta incorrecta después de que se le pide que cuente señala la correcta	Señala carta incorrecta después de que se le pide que cuente señala la correcta	Señala la carta correcta aunque tiene errores en el conteo
E8: Nicolás	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo	Señala correctamente no realiza conteo
E9: Johan	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo
E10: Nicol	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Señala correctamente y realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo
E11: Dana	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo
E12: Manuel	Realiza la colección	Realiza la colección sin conteo	Realiza colección usando el conteo	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Realiza colección cuando se le pide que cuente (2 intento)	Realiza colección usando el conteo al primer intento	Señala correctamente no realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo	Señala correctamente y realiza conteo

Capítulo 4: Conclusiones generales y reflexiones didácticas

Estudiante	Pregunta 1	Pregunta 2:					Pregunta 3:		
	Registra en cada casilla de la tabla la cantidad obtenida al lanzar los dados	a. Encierra en un círculo el mayor puntaje en tu tabla	b. ¿Quién obtuvo el mayor puntaje?	c. En los puntajes obtenidos en el cuarto turno ¿Quién obtuvo la menor cantidad?	d. ¿Quién obtuvo más veces diez puntos?	e. X sobre un puntaje mayor a 10 ¿Por cuánto ese puntaje es mayor a 10?	5	6	4
E1: Dilan	Representaciones de dimensión 1 (puntos), registro y conteo acorde a la cantidad obtenida en los dados	Señala 8 que no es el mayor	Escoge el mayor	Dicen que hay empate	Obtuvo una vez diez y dice correctamente que él fue	No tiene ningún puntaje mayor a diez. No responde a la pregunta	Dibuja 5 círculos	Dibuja 6 puntos, los cuenta borra 2 puntos	Dibuja cuatro puntos los cuenta y dibuja otros dos
E2: Caro	Representaciones de dimensión 1 (puntos) y representaciones simbólicas. Dificultad en el conteo y registro de cantidades mayores o iguales a 9	Señala correctamente el mayor puntaje	Escoge el mayor	Dicen que hay empate	No obtuvo diez, dice que su compañero sacó más veces diez.	Señala el 14. No responde a la pregunta	Dibuja 8 cuando cuenta dibuja 1 más, cuenta y borra 3, cuenta borra 1.	Dibuja 6 puntos, los cuenta borra 2 puntos	Dibuja cuatro puntos los cuenta y dibuja otros dos
E3: Sara	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino
E4: Oriana	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino
E5: Joseph	Representaciones simbólicas. Registro y conteo desacorde a la cantidad obtenida en los dados.	Señala correctamente el mayor puntaje	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	No obtuvo diez	Señala el 12. No responde a la pregunta	Dibuja cinco mientras sigue la secuencia numérica verbal	Dibuja cuatro siguiendo la secuencia numérica verbal	Dibuja seis siguiendo la secuencia numérica verbal
E6: Katherine	Representaciones de dimensión 1 (puntos) y representaciones simbólicas. Registro y conteo acorde a la cantidad obtenida en los dados	Encierra un puntaje que no es el mayor	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	No obtuvo diez	Señala el 14. No responde a la pregunta	Dibuja cinco	Dibuja seis puntos, luego borra dos	Dibuja cinco puntos cuando cuenta dibuja un punto
E7: Esteban	Representaciones de dimensión 1 (puntos). Registro y conteo desacorde a la cantidad obtenida en los dados, cantidades mayores a 3	Encierra correctamente el puntaje mayor	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	Aunque obtiene un diez no lo encuentra	Señala el puntaje 14. No responde a la pregunta	Dibuja 5 círculos	Dibuja 13	Dibuja 4
E8: Nicolás	Representaciones de dimensión 1 (puntos). Registro y conteo desacorde a la cantidad obtenida en los dados, cantidades mayores a 7	Encierra correctamente el puntaje mayor	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	Obtuvo un diez y dice que él obtuvo más veces diez	Señala un puntaje en el que dibuja 12. No responde a la pregunta	Dibuja diez puntos borra 2, luego borra tres	Dibuja diez, borra siete puntos luego dibuja 1	Dibuja 4 puntos, cuenta hasta 8 y dibuja otros dos
E9: Johan	Representaciones simbólicas. Registro y conteo acorde a la cantidad obtenida en los dados.	Encierra correctamente el puntaje mayor	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	Obtuvo una vez diez y dice que él sacó más veces diez	Señala el 13. No responde a la pregunta	Dibuja cinco puntos y los cuenta	Dibuja 6 puntos los cuenta y borra dos puntos	Dibuja cuatro puntos los cuenta y dibuja otros dos
E10: Nicol	Representaciones simbólicas. Registro y conteo acorde a la cantidad obtenida en los dados.	Encierra correctamente el puntaje mayor	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	No obtuvo diez y dice que su compañero sacó más veces diez	Señala el 13. No responde a la pregunta	Dibuja cinco y los cuenta	Dibuja seis puntos, los cuenta y borra dos	Dibuja 4 puntos los cuenta y dibuja otros dos puntos
E11: Dana	Representaciones de dimensión 1 (puntos) y representaciones simbólicas. Registro y conteo acorde a la cantidad obtenida en los dados.	Encierra correctamente el puntaje mayor	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	Obtuvo tres veces diez, dice que él fue el que más veces obtuvo diez	No sacó ningún puntaje mayor a diez	Dibuja 10 puntos y luego los borra uno a uno	Dibuja 10 en la cara del dado, borra uno a uno los puntos hasta obtener diez en total	Dibuja 4 puntos en el dado. Borra uno a uno los puntos hasta que en total tiene seis, luego dibuja uno a uno los puntos hasta obtener 10.
E12: Manuel	Representaciones de dimensión 1 (puntos). Registro y conteo acorde a la cantidad obtenida en los dados.	Encierra correctamente el puntaje mayor	Escoge el mayor	Indican correctamente la menor cantidad	Obtuvo una vez diez y dice correctamente que su compañero sacó más veces diez	Señala el 12. No responde a la pregunta	Dibuja cinco mientras sigue la secuencia numérica verbal	Dibuja cuatro siguiendo la secuencia numérica verbal	Dibuja seis puntos siguiendo la secuencia numérica verbal.

Una Aproximación al Sistema de Numeración Decimal en Transición

Situación 2: Tarea 1							
Estudiante	Pregunta 1				Pregunta 2	Pregunta 3	
	a. Encierra en un círculo el personaje que está ubicado de primero en el tren	b. Escribe una X sobre el personaje que está ubicado de último en el tren	c. Colorea el personaje con quién debe cambiar el puesto Candy Gata para estar en el cuarto puesto	d. ¿En qué posición está Emily la Elefante?	Teniendo en cuenta la organización del tren. La docente le indica a los estudiantes que escojan uno de los personajes, el que más les llame la atención y escriban un mensaje para que ella pueda conocer la ubicación del personaje en el tren.	Caso 1: 4 personajes en cada vagón	Caso 2: 5 personajes en cada vagón
E1: Dilan	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino
E2: Caro	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica correctamente de tercer	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 6 personajes
E3: Sara	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica correctamente de tres	Estudiantes que no indican la posición del personaje escogido.	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 2 personajes	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 5 personajes
E4: Oriana	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica correctamente de tercera	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes. No	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 6 personajes
E5: Joseph	Encierra el primer personaje	Se distrae y no encierra ningún personaje (se equivoca al primer intento)	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto (empieza a contar por el último puesto)	Indica correctamente de tercera	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes. No	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 6 personajes
E6: Katherine	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica correctamente de tres	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes	Contesta incorrectamente: vagón 1: 6 personajes, vagón 2: 8 personajes
E7: Esteban	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto (se equivoca al primer intento)	Indica incorrectamente al principio diez y luego segundo	Estudiantes que no indican la posición del personaje escogido.	Contesta incorrectamente: vagón 1: 9 personajes, vagón 2: 8 personajes	Contesta incorrectamente: vagón 1: 8 personajes, vagón 2: 9 personajes
E8: Nicolás	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica incorrectamente al principio catorce y luego quinto	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 7 personajes	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 8 personajes
E9: Johan	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje (se equivoca al primer intento)	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto (se equivoca al primer intento)	Indica inicialmente de sexto y luego de tercero	Estudiantes que no indican la posición del personaje escogido.	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 6 personajes
E10: Nicol	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica correctamente de tercero	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 6 personajes
E11: Dana	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica inicialmente que de segunda y luego dice que tercera	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 6 personajes

Situación 2: Tarea 2

E12:Manuel	Encierra el primer personaje	Encierra el último personaje	Colorea correctamente el personaje en el cuarto puesto	Indica que no sabe y luego que esta de octavo	Estudiantes que indican correctamente la posición del personaje escogido	Contesta correctamente: vagón 1: 3 personajes, vagón 2: 5 personajes	Contesta correctamente: vagón 1: 4 personajes, vagón 2: 6 personajes
------------	------------------------------	------------------------------	--	---	--	--	--

Una Aproximación al Sistema de Numeración Decimal en Transición

Estudiante	Pregunta 1			Pregunta 2		Pregunta 3		
	a. ¿Explica por qué el número 9 va en esa posición?	b. ¿En qué posición se debe colocar el número 12? ¿Por qué?	c. ¿En qué posición se debe colocar el número 21? ¿Por qué?	a. ¿Qué número es el sucesor del 5?	b. ¿Qué número es el antecesor de 10?	a. Encierran en un círculo un número que sea menor que 20	b. Señalen con una X un número que sea mayor que 10	c. Coloreen el número que es mayor que 10 pero menor que 12
E1: Dilan	Coloca el 9 en la posición correcta. Usa conteo	Coloca el 12 en la posición correcta, observa la primera cifra	Coloca el 21 en la posición correcta, observa la primera cifra	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20	Estudiantes que señalan con una X un número mayor que 10	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 12
E2: Caro	Coloca el 9 en la posición correcta. Usa conteo	Coloca el 12 en la posición correcta, observa la primera cifra	Coloca el 21 en la posición correcta, observa la primera cifra	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 21	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 11	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 13
E3: Sara	Coloca el 9 en la posición correcta. Usa conteo	Coloca el 12 en la posición correcta, con intervención	Coloca el 21 en la posición correcta, observa la primera cifra	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 22	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 12	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 14
E4: Oriana	Coloca el 9 en la posición correcta. Usa conteo	Coloca el 12 en la posición correcta, con intervención	Coloca el 21 en la posición correcta, observa la primera cifra	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 23	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 13	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 15
E5: Joseph	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino
E6: Katherine	Coloca el 9 en la posición correcta. 9 va delante del 7	Colocan el 12 en una posición incorrecta	Coloca el 21 en una posición incorrecta. Donde debería ir el 21 dicen que así son los números	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 23	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 13	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 15
E7: Esteban	Coloca el 9 en la posición correcta. 9 va delante del 8	Colocan el 12 en una posición incorrecta	Coloca el 21 en una posición incorrecta. Donde debería ir el 21 dicen que así son los números	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 23	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 14	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 16
E8: Nicolás	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino	No vino
E9: Johan	Coloca el 9 en la posición correcta. 9 va delante del 7	Coloca el 12 en la posición correcta, utiliza el conteo	Coloca el 21 en una posición incorrecta. Dicen el 21 va delante del 20	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 23	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 14	Estudiantes que indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 15
E10: Nicol	Coloca el 9 en la posición correcta. 9 va delante del 8	Coloca el 12 en la posición correcta, utiliza el conteo	Coloca el 21 en una posición incorrecta. Dicen el 21 va delante del 21	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 23	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 15	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 16
E11: Dana	Coloca el 9 en la posición correcta. Usa conteo	Coloca el 12 en la posición correcta, con intervención	Coloca el 21 en la posición correcta, observa la primera cifra	Estudiantes que indican correctamente el sucesor del 5	Estudiantes que indican correctamente el antecesor del 10	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 23	Estudiantes que encierran en un círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 16	Estudiantes que no indican correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 17
E12: Manu	Coloca el 9 en la	Coloca el 12 en la	Coloca el 21 en la	Estudiantes que	Estudiantes que	Estudiantes que encierran	Estudiantes que encierran en un	Estudiantes que no indican

Capítulo 4: Conclusiones generales y reflexiones didácticas

el	posición correcta. Usa conteo	posición correcta, con intervención	posición correcta, observa la primera cifra	indican correctamente el sucesor del 5	indican correctamente el antecesor del 10	en un círculo un número menor que 23	círculo un número menor que 20, señalan con una X un número mayor que 17	correctamente el número que es mayor que 10 y menor que 18
----	----------------------------------	--	--	---	--	---	--	--

Situación 2: Tarea 3							
Estudiante	Pregunta 1				Pregunta 2		
	a. ¿Qué número sacaste en la carta?	b. ¿Ese número es mayor que diez? ¿Por qué?	c. ¿Ese número es menor que diez? ¿Por qué?	d. ¿Qué número le podrías sumar al número que obtuviste en la carta para obtener la cantidad diez?	a. ¿Quién quedo de primero?	b. ¿Quién quedo de tercero?	c. ¿Cuántas Pepa pigs tiene el jugador 1 en total?
E1: Dilan	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	1 y 9	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E2: Caro	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	5 y 5	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E3: Sara	Indican una cantidad diferente a la obtenida en la carta	Indican de manera incorrecta cuando un número es mayor que diez	Indican de manera incorrecta cuando un número es menor que diez	6 y 4	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E4: Oriana	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	4 y 6	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E5: Joseph	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	8 y 2	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E6: Katherine	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	No forma grupos de diez	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E7: Esteban	Indican una cantidad diferente a la obtenida en la carta	Indican de manera incorrecta cuando un número es mayor que diez	Indican de manera incorrecta cuando un número es menor que diez	4 y 6	Contestan incorrectamente a la pregunta	Contestan incorrectamente a la pregunta	Contestan incorrectamente a la pregunta
E8: Nicolás	No vino		No vino	No vino		No vino	No vino
E9: Johan	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	4 y 6	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E10: Nicol	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	3 y 7	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E11: Dana	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	4 y 6, 5 y 5	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta
E12: Manuel	Indican la cantidad obtenida en la carta	Indican correctamente el número que es mayor que diez	Indican correctamente el número que es menor que diez	3 y 7, 2 y 8, 1 y 9	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta	Contestan correctamente la pregunta

Una Aproximación al Sistema de Numeración Decimal en Transición

Situación 3: Tarea 1					
Estudiante	Pregunta 1			Pregunta 2	
	a. Escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección de 12	b. Escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección de 26	c. Escribir un mensaje para pedirle a Pipe los dulces necesarios y solo los necesarios para formar la colección de 42	a. ¿Cuál es el mayor precio? ¿Por qué?	b. ¿Cuál es el menor precio? ¿Por qué?
E1: Dilan	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 10 y 6 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E2: Caro	Estudiantes que escriben el 5, el 6 y el 1 para componer el doce	Estudiantes que escriben 10, 6, 4, y 2 para componer el 26.	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E3: Sara	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 10 y 6 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E4: Oriana	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 10 y 6 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E5: Joseph	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 10 y 6 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E6: Katherine	Estudiantes que escriben el 5, el 6 y el 1 para componer el doce	Estudiantes que escriben 10, 6, 4, y 2 para componer el 26.	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E7: Esteban	No vino	No vino	No vino		No vino
E8: Nicolás	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 7 y 9 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 2 y 9, pero no componen el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E9:Johan	Estudiantes que escriben el 5, el 6 y el 1 para componer el doce	Estudiantes que escriben 10, 6, 4, y 2 para componer el 26.	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E10: Nicol	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 7 y 9 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 10 y 2 para componer el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E11:Dana	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 7 y 9 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 2 y 9, pero no componen el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número
E12:Manuel	Estudiantes que escriben el 10 y el 2 para componer el doce (E1,	Estudiantes que escriben 10, 7 y 9 para componer el 26	Estudiantes que escriben 10, 10, 10, 2 y 9, pero no componen el 42	Estudiantes indican correctamente el mayor precio atendiendo a la primera cifra	Estudiantes que indican el menor precio atendiendo a la cantidad de cifras del número

Capítulo 4: Conclusiones generales y reflexiones didácticas

Situación 3: Tarea 2										
Estudiante	Pregunta 1						Pregunta 2	Pregunta 3		
	a. ¿Cuántas monedas de \$1 tienes?	c ¿Cuántas monedas de \$10 tienes?	e ¿Cuántas monedas de \$100 tienes?	b. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad	d. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad	f. ¿Puedes hacer cambios con esa cantidad	2. La docente le indica a los estudiantes que registren la cantidad de monedas de cada integrante del grupo en la siguiente tabla:	a. Si en una casilla hace falta realizar una conversión de monedas, se plantea la siguiente pregunta ¿Esta cantidad de monedas no la podrías haber cambiado por otra moneda?	b. Teniendo en cuenta la cantidad de monedas de 1.000 pesos que tiene el estudiante 2 indica ¿Cuántas monedas de 100 pesos necesitas para cambiar esa cantidad?	c. Indica el dinero que tienes en total
E1: Dilan	Estudiantes que identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 y dicen la cantidad correcta de monedas de cada denominación			Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$100			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E2: Caro	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 pero realizan conteo correcto			Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$101			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E3: Sara	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 y dicen una cantidad incorrecta de monedas de cada denominación			Estudiantes que se les dificulta formar las agrupaciones de diez monedas de \$1, \$10, \$100 para hacer los cambios (E7, E3).			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación en espejo	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E4: Oriana	No vino			No vino			No vino	No vino	No vino	No vino
E5: Joseph	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 pero realizan conteo correcto			Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$104			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E6: Katherine	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 pero realizan conteo correcto			Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$105			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E7: Esteban	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 y dicen una cantidad incorrecta de monedas de cada denominación			Estudiantes que se les dificulta formar las agrupaciones de diez monedas de \$1, \$10, \$100 para hacer los cambios (E7, E3).			Estudiantes que utilizan los unos para representar la cantidad de monedas en la tabla	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E8: Nicolás	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 pero realizan conteo correcto			Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$107			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E9:Johan	Estudiantes que identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 y dicen la cantidad correcta de monedas de cada denominación			Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$108			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación en espejo	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E10: Nicol	Estudiantes que identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 y dicen la cantidad correcta de monedas de cada denominación			Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$109			Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores

Una Aproximación al Sistema de Numeración Decimal en Transición

E11:Dana	Estudiantes que no identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 pero realizan conteo correcto	Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$110	Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores
E12:Manuel	Estudiantes que identifican las monedas de \$1, \$10, \$100 y dicen la cantidad correcta de monedas de cada denominación	Estudiantes que hacen cambios con la cantidad de monedas de \$1, \$10, \$111	Estudiantes que representan correctamente la cantidad de monedas en la tabla usando notación indo-arábiga	No se realiza la pregunta pues los estudiantes hacen todos los cambios	Los estudiantes no responden correctamente	Los estudiantes cuentan las monedas y no tienen en cuenta sus valores

Situación 3: Tarea 3			
Estudiante	Pregunta 1		Pregunta 2
	a. Entre las papas Margarita y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso. ¿Por qué es el más costoso?	b. Entre la chocolatina y la Pony Malta, encierra en un círculo el producto más costoso ¿Por qué es el más costoso?	2. La docente entrega a las parejas algunas monedas y los estudiantes deben escoger las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina
E1: Dilan	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta;	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E2: Caro	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E3: Sara	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que no escogen el producto más costoso entre la chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E4: Oriana	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E5: Joseph	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que no escogen el producto más costoso entre la chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E6: Katherine	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E7: Esteban	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E8: Nicolás	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E9:Johan	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que no escogen el producto más costoso entre la chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E10: Nicol	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E11:Dana	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre la chocolatina y la Pony Malta, pero no escogen el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora
E12:Manuel	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta	Estudiantes que indican correctamente el producto más costoso entre las papas Margarita y la Pony Malta; y entre la Chocolatina y la Pony Malta	Estudiantes que escogen las monedas necesarias y solo las necesarias para comprar el supercoco, el gansito y la chocolatina con ayuda de la profesora

Anexo 28. Sobre los libros de textos

A continuación se presentan las instituciones que participaron de la encuesta y los textos que utilizan para la enseñanza en el grado Transición. Algunas instituciones son de carácter público (Ver tabla 1) y otras son de carácter privado (Ver tabla 2)

Tabla 37.
Instituciones de carácter público

Institución Educativa (I.E)	Sede	Municipio	Texto Guía	Editorial
1. Ciudad de Cali	Vásquez Cobo	Cali	ninguno	ninguno
2. Ciudad de Cali	El recuerdo	Cali	ninguno	ninguno
3. Normal superior Santiago de Cali	Joaquín de Caicedo y Cuero	Cali	Pensar y Crear C	Versiones Educativas del siglo XXI
4. José María Carbonel	Honorio Villegas	Cali	Juego y Aprendo C	Santillana
5. José María Carbonel	Isabel de Castilla	Cali		
6. Carlos Holguín Lloreda	Jardín Infantil Nacional	Cali	Chuiquis B	Arcoiris
7. Rafael Navia Varón	Panamericano	Cali	Guías	Profesoras
8. José María Vivas Balcázar	Santo Domingo	Cali	Guías	Profesoras
9. Joaquín de Caicedo y Cuero	San Roque	Cali	Ninguno	Ni ninguno
10. Normal Superior Farallones de Cali	Central	Cali	Barquitos de Papel	Mundo de niños
11. I.E. Boyacá	Independencia	Cali	Guía	Maestra
12. I.E. Ciudad Modelo	Central	Cali	Ninguno	ninguno
13. I.E. Simón Bolívar	Central	Jamundí	Expedicionarios	MEN
14. Nuestra Señora de Chiquinquirá	Tomas Ignacio	Roldanillo	Ninguno	Ninguno

Tabla 38.
Instituciones de carácter privado

Institución o Colegio	Municipio	Texto Guía	Editorial
1	Cali	Sueños de Papel D	Sigmar
2	Cali	Fichas	Docente
3	Cali	Fichas	Docente
4	Cali	Mi Huella C	Huella
5	Cali	Leoncitos	Voluntad
6	Cali	Pensadores B	Mundo de Niños
7	Cali	Tactectic C	S y M
8	Cali	Caramelo 3	Norma
9	Cali	Carpeta Guau No 5	
10	Cali	Ninguno	Ninguno

Debido a que no hay una tendencia en la actualidad por escoger determinado libro de texto para la enseñanza de las matemáticas. Se decide tomar dos libros de manera aleatoria para realizar el análisis de textos, el libro Expedicionarios (Texto 1) Editorial MEN y el libro

Juego y Aprendo C (Texto 2),, usado en dos instituciones de carácter público, de Editorial Santillana

Sobre el texto 1 y el texto 2

A continuación se presentan las características de los dos textos que se escogen para realizar el análisis de textos (Ver tabla 3)

Tabla 39

Presentación del texto 1 y el texto 2

Características	Presentación del texto 1	Presentación texto 2
Título	Expedicionarios	Juego y Aprendo C.
Atores	Maribel Vergara Arboleda, Martha Patricia Alvis Orjuela, Liliana Patricia Arias Delgado, Claudia Liliana Cortés, Javier Alberto Flechas Hernández, María Fernanda Gonzáles Velasco, entre otros.	Claudia Cecilia Soacha Barbosa Grupo Editorial Santillana
Distribuidores	Editorial MEN	Santillana
ISBN	978-958-98666-1-0	978-958-24-2996-6
Edición	Bogotá, 2008	Bogotá, 2015
Precio	Prohibida su Venta	50.000
Material Complementario	Ninguno	Adhesivos
Área	Integrada	Integrada
Grados	Preescolar Escolarizado y no Escolarizado	Transición
Formato	33 cm X 24cm	33 cm X 24cm
Impresión de páginas	Bicolor (blanco y gris)	Interiores a Color
Encuadernación	Pegado.	Pegado.
Tipo de cubierta	Pasta Semi-dura a color/ 99 páginas	Pasta Semi-dura a color/ 207 páginas

Presentación del texto 1. Desde el aspecto técnico, se puede decir que el tipo de letra es clara y legible, no se usan colores en las actividades, lo que puede hacer que el texto sea muy poco llamativo para el estudiante. Las imágenes son grandes, se pueden realizar diferentes actividades en ellas que impliquen cortar, colorear, pintar, pegar objetos en ella, etc.

El libro de texto abarca como metodología el trabajo por proyectos de aula, esta es una estrategia de aprendizaje que busca poner en práctica acciones para el logro de las metas educativas. Por tal motivo el índice está compuesto por cuatro proyectos a saber: Educando mi afectividad; eco-ecológico; Colombia, el país en que vivo; y cuéntame un cuento. Proyectos propuestos por el Modelo Pedagógico Círculos Integrales de Desarrollo de Educación Preescolar (CIDEP). En cada una de las actividades propuesta aparecen las acciones que debe realizar el estudiante como pintar, completar, escribir, hablar, colorear, etc. También aparecen los ámbitos técnico-científico, comunicativo en el mundo y personal “en sí mismos”.

Finalmente aparece el tiempo sugerido para el desarrollo de cada actividad. En los proyectos propuestos se trabajan diferentes áreas de manera integral. Por tanto, en cada unidad de abordan algunas actividades con relación a las matemáticas y de manera específica con relación al CNN y el SND, siempre vinculado al proyecto en el que se encuentre. Así, las actividades apuntan a la comprensión del conteo, de los números del 1 al 8 y las sumas sencillas.

Presentación del texto 2. Desde el aspecto técnico, se puede decir que el tipo de letra es clara y legible, se usan colores en cada una de las actividades, además se utilizan estrellas de colores distintos para reconocer las páginas que pertenecen a cada una de las unidades. Las imágenes son llamativas y lo suficientemente grandes para que el estudiante pueda realizar diferentes acciones en ellas

Con relación al contenido, el libro de texto está compuesto de 4 temas o unidades, que se presentan de la siguiente manera, cuando sea grande quiero ser, un lugar natural para cuidar, un lugar para divertirme, y un lugar para vivir. En cada una de las unidades se trabajan las diferentes competencias de manera integral matemática, comunicativa, científica y ciudadana. En las actividades que se proponen en el libro de texto aparecen las acciones que debe realizar el estudiante como observar, punzar, picar, colorear, entre otros. También se hace referencia a las dimensiones y competencias que se trabajan en la actividad además de los desempeños específicos que se esperan de los estudiante. Con relación a la competencia matemática en la primera unidad se trabajan los números del 1 al 10, en la segunda unidad los números del 11 al 20, en la tercera unidad los números del 21 al 30 y en la última unidad los números del 31 al 50.

Ficha de los textos respecto a los contenidos que tratan el CNN y el SND.

Cada texto presenta algunos contenidos específicos para la enseñanza del CNN y el SND los cuales se presentan a continuación (Ver tabla 4)

Tabla 40.

Ficha sobre el contenido de los libros

Libro	Expedicionarios	Juego y Aprendo C
Código	01	02
Unidades y contenidos que	1. Proyecto Educando mi afectividad	UNIDAD 1 Cuando sea grande quiero ser
	1.1 La figura diferente:	-Los números del 1 al 5 -Correspondencia

trabajan el CNN y el SND	pertenece no pertenece	-Los números del 1 al 10
	2. Proyecto Eco-ecológico	UNIDAD 2 Un lugar natural para cuidar
	2.1 Contar los pollos:	-Los números del 11 al 15
	Números del 1 al 6	-Correspondencia
	2.2 Contar los huevos:	-Los números del 16 al 20
	Números del 1 al 8	-Muchos pocos
	2.3 Sumemos pollitos:	-Los números del 10 al 20
	Sumas hasta 5	UNIDAD 3 Un lugar para divertirme
	2.4 Florencio de Cosecha:	-Los números del 20 al 25
	Números del 1 al 4	-Los números del 26 al 30
	3. Proyecto Colombia, el país en el que vivo	-Conteo de elementos
	3.1 El que no pertenece	-Los números del 20 al 30
	4. Proyecto cuéntame un cuento	UNIDAD 4 Un lugar para vivir
	4.1 Limón Limonada:	-Los números del 30 al 35
	Números del 1 al 5	-Los números del 36 al 40
		-Los números del 40 al 45
		-Los números del 46 al 50
		-Los números del 40 al 50

Sobre las categorías y variables de análisis. Como se especifica en el marco teórico para realizar el análisis de textos se seleccionan cuatro categorías de análisis, a saber:

- Conceptos previos
- Actividades propuestas que abordan el conteo y la cardinalidad
- Actividades propuestas que abordan el principio de sucesión y la ordinalidad
- Actividades propuestas que desarrollen el concepto de agrupación
- Los sistemas de representaciones usados en el texto escolar (simbólico, verbal, gráfico)

En la tabla 5 se presentan las categorías, el texto objeto de análisis, el descriptor de desempeño que atiende a aspectos matemáticos, un ejemplo de un ejercicio y el total de ejercicio en todo el libro. Por último, se presenta la tabla 6 en la cual se exponen los sistemas de representación usados en el texto escolar, clasificándolas en, representación simbólica (RS), representación verbal (RV) o representación gráfica (RG).

Tabla 41.

Rejilla de análisis libros de textos

Categorías	Texto	Descriptores	Ejemplos y ejercicios que se proponen	Total ejercicios
Conceptos previos	01	Correspondencia uno a uno	Trace una línea entre la figura geométrica y el objeto correspondiente (p.30)	4
		Pertenencia	Encierre la figura que no pertenece a cada grupo (p.23)	2
	02	Correspondencia uno a uno	Une con una línea cada profesional con el elemento que le corresponde (p.23)	3
Actividades propuestas que aborden el conteo y la cardinalidad	01	Conteo de objetos y escritura del símbolo numérico	Cuenta y escriba el número de los pollos que se encuentran en cada uno de los corrales (p.32)	3
		Preparación de receta	Prepara la limonada con ayuda de un adulto (solo los ingredientes p. 85)	1
	02	Conteo de objetos	Cuenta los cerditos, retiene el número en el círculo que corresponde a cada cerdito y rellena el número cinco con bolitas de papel (p. 29)	3
		Pregunta ¿Cuántos... hay? Conteo de objetos y escritura de símbolo	¿Cuántas aves ves en la parte de arriba? (p.91) Cuenta cada uno de los elementos y escribe el número correspondiente en la tabla. (p.143)	2 1
Actividades propuestas que aborden el principio de sucesión y la ordinalidad	01	Orden en la secuencia numérica	Escriba el número de huevos que hay en cada canasta. Escriba los números en orden de menor a mayor sobre la línea de la parte inferior (p.43)	1
		Relaciones de orden (mayor que, menor que)	Coloree de rojo la materia que tiene menos flores y de amarillo la que tiene más. (p.49)	1
		Orden de pasos	Sigue los pasos para preparar la limonada (p.85)	1
	02	Orden de los acontecimientos de un cuento	Escribe en los recuadros los números del 1 al 4 según el orden en que ocurrieron los hechos en el cuento (p. 69)	2
		Relaciones de orden (mayor que, menor que) Orden en la Secuencia numérica	Observa las peceras ¿Hay la misma cantidad de peces en las dos peceras? (p.95) Escribe los números que faltan del 10 al 20 (p.98)	1 14

Actividades propuestas que desarrollen el concepto de agrupación	01	Determinar si un objeto pertenece o no a un grupo	La figura diferente, encierre la figura que no pertenece cada grupo. Coloree los demás. (p. 23)	2
		Operaciones aditivas hasta cinco	Cuente los pollitos en cada línea y escriba su resultado (p.44)	1
	02	Reconoce los elementos que pertenecen o no pertenecen	Marca con una X los elementos que no son parte de la naturaleza (p.54)	1

Tabla 42.

Rejilla sobre el discurso en los libros de texto.

Discurso	Texto	Representaciones Involucradas	Ejemplo en el Texto	Cantidad de Ejercicios
Lenguaje	01	RV y acciones	Prepara con un adulto la receta (p. 85)	1
		RG	Une con una línea los gestos parecidos (p.14)	7
		RG y RS	Cuente y escriba el número de los pollos que se encuentran en cada uno de los corrales (p.32)	4
	02	RG	Une con una línea cada una de las situaciones de la izquierda con la expresión de la princesa que corresponda (p.165)	3
		RS	Escribe los números que faltan en los recuadros de la zanahoria para completar la serie hasta el 20 (p.97)	16
		RG y RS	Observa el dibujo y responde: ¿Cuántas aves ves en la parte de arriba? p.91	3