Un experimento de enseñanza para la formación matemática inicial de estudiantes para profesor de Ciencias Naturales de la Universidad del Valle

Jimmy Alexander Uribe Carreño
1905614-7412

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2022

Un experimento de enseñanza para la formación matemática inicial de estudiantes para profesor de Ciencias Naturales de la Universidad del Valle

Jimmy Alexander Uribe Carreño
1905614-7412

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemática

Director(a):
Mg. Jorge Enrique Galeano Cano

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2022

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Vicedecanatura de Investigaciones

ACTA DE SUSTENTACIÓN

Programa Académico: Maestría en Educación - Énfasis Educación Matemática

Código del programa: 7412 Resolución del programa: 11 118

Día	Mes	Año
10	8	2022

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

"UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA PARA LA FORMACIÓN MATEMÁTICA INICIAL DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE CIENCIAS NATURALES DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE"

Se trata de:

Trabajo de grado de Maestría ☑

Director

JORGE ENRIQUE GALEANO CANO

Evaluadores

Nombres y Apellidos	Filiación Universitaria
MARISOL SANTACRUZ RODRÍGUEZ	UNIVERSIDAD DEL VALLE
JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA	UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	E-mail	Télefonos de contacto
JIMMY ALEXANDER URIBE CARREÑO	1905614	jimmy.uribe@correounivalle.edu.co	318-7673714

Evaluación

Aprobado ☑ Meritorio ☑ Laureado ☐

Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐

*En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) **ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

*En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente),se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* dd mm aa

*En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firma

Prof. JORGE ENRIQUE GALEANO CANO	*Prof. MARISOL SANTACRUZ RODRÍGUEZ*	*Prof. JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA*
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Jurado Evaluador	Jurado Evaluador

Prof. SANTIAGO A. ARBOLEDA FRANCO	*Prof. MARIBEL PATRICIA ANACONA*
Vicedecano de Investigaciones	(En reemplazo del Vicedecano de Investigaciones)

Dedicatoria

A la memoria de mi hermano, Rafael Antonio Uribe Carreño.

Porqué solo muere, quien es olvidado.

Agradecimientos

En primer lugar, y más importante, a mi padre, Diego Uribe y a mi madre Laura Carreño, por su inquebrantable amor y su fe incansable en mí. Gracias a ustedes soy quien, y cómo soy. Gracias a ustedes he podido avanzar en este camino de la vida académica.

A Tatiana, por estar de la mano apoyándonos en este proceso y nutriendo las ideas de nuestros proyectos con todas nuestras conversaciones, por tu amor y por ser una inspiración en lo que significa la vocación a la docencia.

Al profesor Jorge Enrique Galeano Cano, por haber acompañado este proceso, sus valiosas orientaciones moldearon la forma que el proyecto fue avanzando; y a la profesora Marisol Santacruz, quien muy amablemente estuvo siempre dispuesta a regalarme espacios de su tiempo para brindarme apoyo y orientaciones.

Resumen

En este informe final de trabajo de grado de maestría, se presenta un estudio centrado en la formación matemática relativa a las funciones, de futuros profesores de Ciencias Naturales, llevado a cabo a través de la implementación de una secuencia de enseñanza bajo la estrategia metodológica de los experimentos de enseñanza. Para este se toman como perspectivas teóricas la investigación en modelación matemática conjugadas con las características didácticas de herramientas tecnológicas *affordances;* buscando como objetivo central determinar las características de una propuesta de formación matemática basada en la modelación de tal forma que esta atienda a las necesidades de los estudiantes del programa de Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle. Los resultados dan cuenta de cómo una aproximación basada en la modelación matemática apoyada en herramientas digitales permite una apropiación progresiva de los conceptos fundamentales de las funciones caracterizadas desde la noción de razón de cambio.

Palabras clave: Affordances, experimento de enseñanza, formación de profesores, modelación matemática, herramientas digitales, relación matemáticas y ciencias.

Abstract

In this final report, we present a study focused on the mathematical formation related to functions, of future science teachers, carried out through the implementation of a teaching sequence under the methodological strategy of Teaching experiments. To develop it, research in mathematical modelling is taken as a theoretical perspective as well as the affordances from technological tools; seeking as central objective to determine the characteristics of a mathematical formation proposal based on modelling in such a way that it tends to the specific needs of students from a teacher education in natural sciences and environmental education of the Universidad del Valle. The results show how a mathematical modeling-based approach, supported by digital tools allows for a progressive appropriation of fundamental concepts of functions characterized from the notion of rate of change.

Keywords: Affordances, digital tools, mathematical modelling, mathematics-science relation, teacher education, teaching experiment.

Contenido

Introducción 1

Capítulo I: Presentación del Problema de Investigación 4

1.1 Presentación y contextualización del problema 5

1.2 Antecedentes y Justificación 12

1.2.1 Investigaciones relativas a la razón de cambio, variación y funciones. 13

1.2.2 Investigaciones relativas a las conexiones entre matemáticas y ciencias 16

1.2.3 Investigaciones relativas a la metodología de investigación basada en diseño 20

1.3 Objetivos 24

1.3.1 Objetivo General 24

1.3.2 Objetivos Específicos 24

1.3.3 Preguntas auxiliares de investigación 25

Capítulo II: Referentes Teóricos 27

2.1 Affordances / Características didácticas de los recursos digitales 28

2.2 Una perspectiva en modelación 35

2.3 Contextos involucrados en problemas de modelación 41

2.4 Una conceptualización sobre la razón de cambio 42

2.4.1 Cambio cualitativo 43

2.4.2 Cambio cuantitativo 44

2.4.3 Razón de cambio 45

2.4.3.1 Razón de cambio constante 46

2.4.3.2 Razón de cambio variable 47

Capítulo III: Metodología de la investigación 48

3.1 Enfoque y aproximación del estudio 49

3.2 Estrategia investigativa: Experimento de enseñanza 50

3.3 Recolección de información 54

3.4 La Secuencia de Enseñanza 55

3.4.1 Situación 1. Introducción al pensamiento variacional 58

3.4.2 Situación 2. Cambios relacionados, razón de cambio y proyecto de modelación 61

3.4.3 Situación 3. Situaciones de cambio lineal y afín. 66

3.4.4 Situación 4. Situaciones de cambio cuadrático. 69

3.4.5 Situación 5. Situaciones de cambio exponencial. 72

Capítulo IV: Resultados y discusión 76

4.1 Resultados 76
4.1.1 Análisis local: la forma 77
4.1.2 Análisis local: el contenido 78
4.1.3 Sobre la formación matemática de los estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle 87
4.1.4 Sobre los modelos conceptuales y las estrategias utilizadas que orientaron el diseño de la secuencia 94
4.1.5 Sobre el diseño de la secuencia de enseñanza 96
4.2 Análisis y discusión 98
4.2.1 Sobre la noción de modelación y el diseño de tareas de modelación 98
4.2.2 Sobre los affordances de las herramientas digitales 101
4.2.3 Sobre la complementariedad de los elementos teóricos en el transcurso de la secuencia de enseñanza 104
Capítulo V: Conclusiones y recomendaciones 108
5.1 Respecto al objetivo específico 1 108
5.2 Respecto al objetivo específico 2 110
5.3 Respecto al objetivo específico 3 113
5.4 Recomendaciones y futuros aspectos de investigación 114
Referencias 117
Anexos 120

Índice de Figuras

Figura 1. Continuo de integración Matemáticas y Ciencia. Adaptado de Huntley (1998, citado en Baxter et al 2014) 19
Figura 2. Líneas empíricas de investigación en modelación. Tomado de Stillman (2019) 37
Figura 3. Representación gráfica pendiente de una recta 46
Figura 4. Esquema Experimentos de enseñanza. tomada de (Camargo, 2021) 52
Figura 5. Actividad 1.2 59
Figura 6. Actividad 1.3 60
Figura 7. Actividad 2.1a 62
Figura 8. Actividad 2.1b 63
Figura 9. Actividad 3.2. Imagen tomada de "https://labovirtual.blogspot.com/2014/04/curva-de-calentamiento.html" 69
Figura 10. Ejemplo formato escritura para actividad 2.2 70
Figura 11. Exploración parámetros de una función cuadrática 71
Figura 12. Exploración parámetros función exponencial 75
Figura 13. Actividad 1.1 parte 1 como se les presentó a los estudiantes. Adaptado de Swan (1985) 79
Figura 14. Actividad 1.1 parte 2 como se les presentó a los estudiantes. Adaptado de Swan (1985) 79
Figura 15. Actividad 1.3 como se les presentó a los estudiantes. Elaboración propia 81
Figura 16. Exploración de un estudiante en la actividad 2.1 83
Figura 17. Resultados en actividad 3.1. Elaboración propia 84
Figura 18. Toma de datos de un estudiante en actividad 3.2 85
Figura 19. Soluciones de estudiantes a actividad 5.1 87
Figura 20. Justificación construcción datos trabajo contexto realista. 92
Figura 21. Ejemplo de función Infección vs Tiempo en el trabajo de un grupo de estudiantes. 93
Figura 22. Ejemplo de gráfico de barras, análisis de tráfico ilegal de fauna en Colombia 93
Figura 23. Exploración en applet de tipo T2, actividad 2.1 103

Índice de Tablas

Tabla 1. Rejilla de diseño de las actividades que componen la secuencia de enseñanza.....57
Tabla 2. Datos actividad 5.1.....74
Tabla 3. Consolidado respuestas estudiantes a actividad 2.2.....90
Tabla 4. Distribución actividades por sesión en la secuencia de enseñanza.....97

Introducción

El amplio progreso de la ciencia y la tecnología propicia espacios de transformación en todos los ámbitos de la sociedad moderna, con lo que la necesidad de formar ciudadanos capaces de afrontar los desafíos actuales y porvenir es una constante. En tal contexto, la formación de pensamiento matemático adquiere gran relevancia, en particular en lo relacionado con los aspectos de este que favorecen la resolución de problemas en distintos ámbitos de la realidad.

Numerosas investigaciones han mostrado que el aprendizaje de las matemáticas representa una dificultad para los estudiantes en todos los niveles educativos; particularmente en el nivel de educación superior, en donde la necesidad de formación en matemáticas de los estudiantes responde a los criterios propios de cada disciplina o profesión.

En este sentido, la formación matemática requerida por cada profesión varía de acuerdo con sus necesidades, y en el caso de los programas de formación de profesores, vale la pena preguntarse acerca de los aportes particulares que para un futuro educador genera el recibir una formación matemática.

Dentro de esta discusión general, el programa de formación de profesores en ciencias naturales y educación ambiental de la Universidad del Valle reconoce que sus estudiantes requieren recibir formación matemática, pues esta ciencia funge como una herramienta importante en el estudio de los fenómenos disciplinares que son de su interés.

Con este reconocimiento, a la entonces Área de Educación Matemática, ahora Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas de la Facultad de Educación y Pedagogía, le fue encargada la exploración de características y propuestas relacionadas con las formas de presentación de los contenidos habitualmente abordados en los cursos de formación matemática

básica, específicamente en cursos de estudiantes para profesor de ciencias naturales; con el fin de elaborar una propuesta que dé cuenta de las necesidades propias de formación matemática de los estudiantes del programa de licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental; de esta solicitud nace una propuesta de dos cursos denominados Formación Matemática I y Formación Matemática II.

El presente informe presenta una investigación realizada en el marco de dicha solicitud del programa de licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental, en la cual se realizó un estudio detallado de la propuesta del entonces Área de Educación Matemática, ahora Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas, particularmente para la asignatura de Formación Matemática I, dando paso a reflexiones y propuestas para la mejora del curso.

Para ofrecer al lector un panorama general acerca del contenido del documento, a continuación, se describen cada uno de los cincos capítulos en los que se ha organizado el presente informe: en el primer capítulo se define y acota el tema de estudio, delimitando así el problema de investigación, se formulan los objetivos de este y se dan argumentos que sustentan la propuesta de trabajo.

En el segundo capítulo se hace un recorrido por los conceptos y posturas teóricas que orientaron el desarrollo del trabajo, se inicia el capítulo con la presentación de elementos relacionados con la noción de *Affordances* de una herramienta tecnológica (Brown et al, 2004) la cual es explorada con la intención de caracterizar aquellas acciones que una cierta herramienta tecnológica le facilita (o dificulta) a un estudiante al ser enfrentado a una actividad de aprendizaje; a continuación se presentan ideas relacionadas con la modelación matemática (Stillman, 2019) como línea amplia de investigación en educación matemática, dentro de la cual la presente investigación pretendió acercarse a la perspectiva del diseño de tareas de modelación

matemática (Reit y Ludwig, 2018); a continuación, se definen contextos en los cuales pueden desarrollarse tales tareas de modelación matemática (Barrera y Santos, 2002); se cierra el capítulo haciendo mención a investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la razón de cambio (Rendón, 2009). Cabe mencionar que este marco referencial constituye un elemento central para el diseño y aplicación de las actividades, así como para interpretar los resultados obtenidos durante la implementación de estas.

El tercer capítulo presenta las características de los experimentos de enseñanza, los cuales determinan el marco metodológico en el que se desarrolló el proyecto. Posteriormente se describen los instrumentos diseñados, se detalla la totalidad de las actividades que componen la secuencia de enseñanza y las vicisitudes de la implementación de estas.

El cuarto capítulo presenta un conglomerado de los resultados obtenidos, así como el análisis de los datos construidos a partir de las aplicaciones; los resultados obtenidos en dichos análisis se organizan de acuerdo con el marco referencial teórico presentado. Los datos encontrados dan cuenta de cómo los estudiantes logran progresivamente construir modelos matemáticos en los que se involucran algunos tipos de funciones, al trabajar en contextos reales y realistas, a partir de la identificación de las relaciones entre magnitudes presentes en la situación abordada y la covariación de tales magnitudes.

Finalmente, en el capítulo quinto se describen las conclusiones a las que se llegaron con la implementación del experimento de enseñanza, buscando dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas de tal forma que se da cuenta de la consecución de los objetivos planteados y de los cuales se derivan algunas sugerencias para el desarrollo futuro del trabajo, se cierra el documento con la presentación del listado de referencias bibliográficas y los anexos.

Capítulo I: Presentación del Problema de Investigación

En este capítulo se hace referencia a algunos elementos contextuales que dan lugar al desarrollo de la investigación, en este sentido, se define y acota el problema de investigación. Como punto de partida se dan argumentos sobre la necesidad social de la formación ciudadana en ciencias naturales, y específicamente de profesores de ciencias naturales que puedan atender a tales requerimientos dando paso al reconocimiento de las particularidades requeridas en los programas de formación universitaria, en particular de la formación matemática requerida por el programa de Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle de acuerdo con sus objetivos, así como los resultados de investigaciones realizadas en el marco de la formación inicial de profesores de ciencias tales como el trabajo de Cabrera (2016).

Adicionalmente, se presenta una selección de trabajos que anteceden la investigación, tal como el de Teuscher y Reys (2012), donde se reconoce la importancia de la razón de cambio como un concepto fundacional del cálculo, estos autores estudian también la apropiación de este concepto en estudiantes que se encuentran iniciando su primer curso de cálculo. Por otro lado, trabajos como el de Frykholm y Glasson (2005) han abordado problemas relativos a la integración entre matemáticas y ciencias en la formación de profesores de ciencias. Finalmente, se presentan elementos relacionados con el papel que juegan las matemáticas como herramienta para abordar el estudio de fenómenos propios de las ciencias, con lo que se da muestra de la imperiosa necesidad que tienen los futuros profesores de ciencias de tener una formación matemática. Los anteriores elementos, sirven como una justificación y sustento al desarrollo de este trabajo.

Se reconoce que el problema general de la educación es extremadamente complejo, razón por la que todo trabajo de investigación debe ser delimitado a través de preguntas y objetivos concretos; en este sentido, en la parte final del capítulo se presenta dicha información.

1.1 Presentación y contextualización del problema

En la actualidad, el papel que ocupan la ciencia y la tecnología es fundamental para el desarrollo de los pueblos y en la vida cotidiana de las personas (MEN, 2004). En ámbitos tan cruciales de la experiencia diaria como el transporte, la democracia, las comunicaciones, la toma de decisiones, la alimentación, la medicina, entre muchos otros, están regidos en mayor o menor medida por los avances científicos y tecnológicos, por todo lo anterior el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004), afirma que "parece difícil que el ser humano logre comprender el mundo y desenvolver en él sin una formación científica básica" (pág. 1)

En un mundo en constante cambio, con complejidades y desafíos cada vez mayores, resulta apremiante que las personas cuenten con los conocimientos y herramientas necesarias que proveen las ciencias para comprender su entorno (MEN, 2004). De tal forma que sea posible aportar a la transformación de este, desde una postura crítica y ética frente a los hallazgos y enormes posibilidades que ofrecen las ciencias.

Así entonces, para el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004), formar en Ciencias Naturales en Educación Básica y Media significa:

> Contribuir a la consolidación de ciudadanos y ciudadanas capaces de asombrarse, observar y analizar lo que acontece a su alrededor y en su propio ser; formularse preguntas, buscar explicaciones y recoger información; detenerse en sus hallazgos, analizarlos, establecer relaciones, hacerse nuevas preguntas y aventurar nuevas

> comprensiones; compartir y debatir con otros sus inquietudes, sus maneras de proceder, sus nuevas visiones del mundo; buscar soluciones a problemas determinados y hacer uso de los conocimientos científicos. (p. 1)

Este planteamiento conlleva también una concepción de las ciencias que oriente la consecución de los objetivos de formación; en este sentido, se afirma que en la actualidad más que hablar *la ciencia* en singular, se habla de disciplinas científicas, consideradas como cuerpos de conocimientos desarrollados en el mercado de teorías que dirigen las investigaciones (MEN, 2004). Así entonces, la física, la biología, etc. intentan además de hacer descripciones de sucesos de la realidad o predecir acontecimientos bajo ciertas condiciones; fundamentalmente, comprender lo que ocurre en el mundo, y dar luces sobre el complejo entramado de relaciones que existe entre diversos elementos, la interrelación entre ellos, y las razones que se ocultan tras los eventos.

A la luz de las metas de formación en Ciencias Naturales para los ciudadanos, aparece también la necesidad de que haya una población de profesores adecuadamente formados, que se encuentren en capacidad de llevar a cabo el cumplimiento, e incluso superación de tales metas. En este sentido, la formación de profesores es un tema a la orden del día en la agenda de investigación internacional en el campo de la educación (Acevedo Díaz, 2010; Loughran y Hamilton, 2016), se ha reconocido que este es un proceso complejo en el que influyen una diversidad de elementos y agentes.

En el caso de Colombia, el Ministerio de Educación Nacional impulsó una serie de reformas en torno a los tres subsistemas que componen el sistema de formación de profesores, estos subsistemas son: formación inicial, en servicio y avanzada. (MEN, 2013, citado en Cabrera, 2016) Al ubicarse el interés del presente informe de investigación en la formación inicial de

profesores de ciencias, y específicamente, la formación matemática de dichos profesores; se procede a presentar una descripción de tal subsistema:

Para el Ministerio de Educación Nacional (2013) este subsistema se entiende como:

> … proceso de formación cuyos referentes principales son la educación y la pedagogía, así como la comprensión analítica de cómo se suceden la enseñanza y el aprendizaje en el ser humano, de cómo aprender a enseñar, a construir conocimiento y a movilizar el pensamiento en los diferentes campos del conocimiento, a partir de una sólida fundamentación epistemológica, teórica y práxica, organizadas diacrónica y sincrónicamente, para alcanzar la titulación como profesional en educación. (p. 69)

Cabrera (2016) afirma que el proceso de formación debe contribuir a los futuros profesores de ciencias en la superación de retos como lo pueden ser el presentar los problemas, modelos, conceptos, leyes, teorías, historia y epistemología como atributos propios de la disciplina que orientarán en sus clases; también el brindar las bases fundamentales del conocimiento sobre el aprendizaje de las ciencias; y, reconocer la importancia de las concepciones de los estudiantes para orientar su aprendizaje.

En este sentido, los programas de formación inicial de profesores deben estar a la altura de tales exigencias, de lo contrario, deberán proponerse alternativas que conduzcan al cumplimiento de estas, es decir, vincular cuestiones relacionadas con para qué se enseña un contenido, de las estrategias para enseñarlo, de cómo lo comprenden los estudiantes, de la práctica y del currículo (Cabrera, 2016).

Por otro lado, se acepta que la formación matemática es un imperativo de la sociedad actual, prueba de ello es que el desarrollo de pensamiento matemático aparece contemplado como uno de los objetivos específicos de la educación básica secundaria en la Ley General de

Educación (1994), con lo que se da lugar al estudio de las matemáticas en ese ciclo, pues estas configuran un contexto propicio para la formación de dicho pensamiento.

Dirigiendo la atención al ciclo de la educación superior, y en particular a la Universidad del Valle; la política curricular de dicha institución[1] contempla la formación de pensamiento matemático en el componente de los fundamentos generales del currículo; a partir de este reconocimiento, es posible preguntarse por cuál es la formación matemática que requiere un profesional; en este sentido, se afirma que no todos los profesionales deben recibir la misma formación matemática, y que esta debe adecuarse a las necesidades de cada programa académico (Alsina, 2001).

Autónomamente, en el año 2015 la Universidad del Valle renovó su política curricular y proyecto formativo, materializada en el Acuerdo 025 de septiembre 25, lo cual ha brindado más elementos para abordar las discusiones internas referentes a las reformas de los programas, y en particular, de los programas de formación de profesores en las distintas áreas.

En este acuerdo se entiende la *formación básica general y específica* en la Universidad del Valle como:

> … la responsable de introducir a los estudiantes en la vida universitaria y la cultura académica; en los conocimientos sin los cuales es inconcebible la formación dentro de un campo del saber; de aprender los contenidos y las técnicas básicas de una disciplina y de apropiarse de reflexiones que, aunque relacionadas con una identidad profesional, implican sobre todo la producción de una consciencia histórica y estética que trasciende los fines puramente instrumentales de la formación. (Artículo 4°, 2015).

Como un objetivo curricular correspondiente al ciclo de la formación básica general y específica se encuentra el de fortalecer en los estudiantes su pensamiento lógico-matemático,

[1] Acuerdo 025 de 2015 Consejo Superior. "Por el cual se actualiza la Política Curricular y el Proyecto Formativo de la Universidad del Valle"

científico-tecnológico, filosófico, humanístico y artístico; y dentro de este espectro, es posible ubicar propuestas encaminadas al desarrollo de pensamiento matemático en los estudiantes de la Universidad del Valle; este fue el interés central del presente trabajo. En este sentido, los avances en las ciencias han dejado ver que no todos los profesionales requieren la misma formación matemática.

El programa de Licenciatura en Ciencias naturales y Educación ambiental, adscrito a la Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas de la Facultad de Educación y Pedagogía, no ha sido ajeno a estos procesos de transformación en las políticas curriculares que orientan su quehacer; en este sentido han realizado procesos de autoevaluación y reforma que han dado lugar a discusiones académicas con respecto a su proyecto formativo en general, y a la formación de sus estudiantes en las ciencias como la biología, la química, la física, y particularmente, las matemáticas.

Por tal razón, se da paso a una mirada enfocada en el papel que cumplen las matemáticas en la formación de un profesor de ciencias naturales, con lo que se abre el espectro a la exploración de propuestas relacionadas con la formación matemática más apropiada para los estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental.

A raíz de la reflexión propia de tales procesos, el programa de Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental definió dos asignaturas para sus nuevos estudiantes, Formación Matemática I y Formación Matemática II (Ver **Anexo A: Programa de curso**), cada una de 3 créditos[2], con los cuales brindarles las herramientas requeridas para un satisfactorio proceso a lo largo de su formación profesional como futuros profesores de ciencias naturales.

[2] Un crédito se define en la Universidad del Valle como la unidad de medida del trabajo académico que debe realizar un estudiante en cada una de las actividades formativas establecidas como requisitos para la obtención del

En este sentido, el MEN (2004) afirma que “no es posible pensar en aprendizajes auténticos en ciencias que no signifiquen relaciones profundas y armónicas con otras áreas cómo las matemáticas y el lenguaje” (p. 110) y específicamente, se llama la atención a cómo el desarrollo científico implica el uso de las matemáticas cómo sistema simbólica que permita cuantificar y construir modelos de los fenómenos observados (MEN, 2004). Así, trabajos como los de Maass et al (2019) expresan como la modelación matemática puede ser un vehículo importante para “traer problemas del mundo real al salón de clase de matemáticas” (English, 2016, citado en Maass, 2019).

Maass (2019) afirma que es posible la conexión entre la modelación matemática y las ciencias debido a que, en su mayoría, los problemas del mundo real en los cuales la modelación matemática es una aproximación adecuada son de naturaleza interdisciplinar; esta noción de conexiones entre matemáticas y ciencias ha sido explorada en trabajos como los de Frykholm y Glasson (2005).

Para estos autores, el lenguaje utilizado para discutir la relación entre ciencia y matemáticas debe ser seleccionado cuidadosamente para promover distintas percepciones y prácticas alrededor de la formación en ciencias y matemáticas; llaman la atención a las investigaciones previas en torno a términos como la *interdisciplinariedad* y la *integración* (Berlin, 1991; Berlin y White, 1995; citados en Frykholkm y Glasson, 2005). En relación con la interdisciplinariedad, una idea principal en estas discusiones incluye la suposición de que la integridad de los límites de cada disciplina será preservada a través de la exploración de contextos comunes que promuevan el aprendizaje tanto de las ciencias como de las matemáticas.

título en un programa de pregrado. Un crédito académico equivale a 48 horas de trabajo académico del estudiante, distribuidos sobre la base de periodos académicos de 16 semanas calendario, con dos semanas adicionales para exámenes y evaluación. (Resolución de consejo académico Universidad del Valle 136 de 2017)

Esta perspectiva, requiere, de manera habitualmente poco realista (Frykholm y Glasson, 2005), que los profesores tengan el conocimiento para enseñar las dos disciplinas satisfactoriamente.

Por otro lado, y respecto a la noción de *integración*, las acepciones comunes del término implican que la ciencia y las matemáticas puedan ser mezcladas a la perfección de tal forma que sea difícil determinar donde terminan las matemáticas y donde empiezan las ciencias; la cual trae sus propios desafíos.

Teniendo en cuentas las definiciones presentadas para *interdisciplinariedad* e *integración*, Frykholm y Glasson (2005) proponen hablar de *conexiones* entre ciencias y matemáticas, conexiones que se encuentren auténticamente situadas en las prácticas de cada campo, y en las experiencias comunes de los estudiantes, para estos autores, muchos profesores son capaces de reconocer y reforzar sobre distintas conexiones entre las matemáticas y las ciencias que ellos perciben como intuitivos y relevantes.

Frykholm y Glasson (2005) afirman que, en lugar de yacer principalmente dentro de los constructos de cada disciplina, las conexiones entre ciencias y matemáticas tienden a emerger de los conocimientos previos y las experiencias de los profesores. Así, entonces conjugando la propuesta de Frykholm y Glasson (2005) con la propuesta de Maass (2019), la modelación matemática parece un escenario importante para la explicitación de conexiones entre ciencias y matemáticas, que apoye la formación en matemáticas de los estudiantes para profesor de ciencias naturales y educación ambiental de la Universidad del Valle.

A raíz de todas las consideraciones anteriores, se plantea la siguiente pregunta orientadora para la investigación

¿Qué aporta a la formación matemática inicial de los estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle la caracterización de una secuencia de enseñanza basada en la modelación matemática?

1.2 Antecedentes y Justificación

Es posible afirmar que existe un acuerdo generalizado acerca de la necesidad que tienen los profesionales en general, de recibir formación en saberes y conocimientos matemáticos, sin embargo, la naturaleza o especificidad de tal formación puede, incluso debe, variar de acuerdo con los objetivos de cada programa académico en relación con el papel que juegan las matemáticas en el quehacer de los profesionales que forman.

Enmarcado en este panorama general, una mención especial merece la formación de profesores, un vasto campo de investigación en el que el papel que juegan las ciencias, en particular las matemáticas, que se estudian deben ser objeto de reflexión didáctica por parte de los futuros profesores, al ser tanto parte de la dimensión de conocimientos generales que estos deben tener, como objeto de enseñanza.

En esta dirección, un estudio de la formación matemática que requieren los profesionales, y particularmente los futuros profesores pasa por analizar qué es lo que se requiere que los estudiantes aprendan, y en este sentido, es posible afirmar que lo que se busca no es el estudio de las matemáticas *per se*, sino que se busca la formación de pensamiento matemático por parte de los estudiantes, y que este pensamiento pueda ser aplicado en distintos contextos según sea requerido en su labor profesional. A continuación, se hace referencia explícita de algunas investigaciones que se han encargado de estudiar el campo de interés mencionado.

Para ello, se presentan los antecedentes de esta investigación clasificándolos en tres subapartados los cuales son: mostrar investigaciones relativas a la enseñanza y/o aprendizaje de la razón de cambio, como objeto matemático de estudio en la investigación y a partir del cual se buscó caracterizar las funciones lineales, afines, cuadráticas y exponenciales; luego se presentarán las investigaciones alusivas a trabajos que promueven la estrategia de la búsqueda de conexiones entre matemáticas y ciencias. Por último, se presentarán algunas investigaciones que presentan elementos metodológicos relativos a la investigación basada en diseño (IBD).

1.2.1 Investigaciones relativas a la razón de cambio, variación y funciones.

En el presente subapartado se realiza una mirada a investigaciones relativas desde tres puntos de vista buscando dar cuenta del estado general de la cuestión: Se da inicio presentando la investigación de Teuscher y Reys (2012) quienes analizan la comprensión de la razón de cambio en estudiantes que han cursado diferentes cursos de cálculo. A continuación, se presenta el trabajo de Byerley y Thompson (2017) en donde se analizan los significados de profesores en ejercicio acerca de las nociones de medida, pendiente y razón de cambio. Se cierra el subapartado con el trabajo de Villa-Ochoa et al (2018) quienes investigan el papel de la modelación y el uso de tecnologías en el estudio de la razón de cambio instantánea.

Teuscher y Reys (2012) examinaron la comprensión de la razón de cambio en estudiantes del curso Advanced Placement Calculus que hubiesen cursado distintos cursos de matemáticas en su educación previa. Los estudiantes realizaron un examen de conocimientos y dos tareas abiertas con preguntas referentes a razón de cambio. Los resultados dieron cuenta de que todos los estudiantes poseían falencias importantes en la interpretación del significado de la razón de cambio sin importar su formación previa.

Los estudiantes correctamente calculaban la razón de cambio en funciones lineales, sin embargo, cuando la función no era lineal, los estudiantes presentaban dificultades para calcularla, modelarla en un gráfico o interpretarla en un contexto del mundo real, resultados en concordancia con lo reportado por autores como Herbery y Pierce (2008, citado en Teuscher y Reys, 2012) quienes afirman que típicamente, la razón de cambio es presentada a los estudiantes mediante la fórmula de la pendiente de una línea. Y más aún, se tiende a priorizar la práctica de calcular la pendiente de una línea sin dar importancia a la interpretación de lo que tal resultado significa dentro de un determinado contexto o a las unidades de medida de las magnitudes que intervienen en tal situación.

Para Teuscher y Reys (2012) el vocabulario utilizado por profesores y libros de texto para la razón de cambio es importante, y puede ser un factor que contribuya a los errores y baja comprensión de los estudiantes, pues las explicaciones dadas por los estudiantes sugieren confusiones sobre los conceptos de pendiente, inclinación, razón de cambio, así como las relaciones entre estas.

Dirigiendo la atención a los profesores, Byerley y Thompson (2017) llevaron una a cabo una investigación en la cual indagaron acerca de los significados que poseían para profesores de matemáticas preuniversitarios los conceptos de pendiente, medida y razón de cambio. Los datos fueron recolectados mediante un instrumento escrito validado, diseñado para diagnosticar los significados matemáticos en los profesores.

En los resultados de Byerley y Thompson (2017) se resalta que la mayoría de los profesores poseen principalmente significados aditivos y basados en fórmulas para la pendiente y la razón de cambio en ítems escritos. Pocos profesores dieron cuenta de cómo la razón de cambio

compara el tamaño de cambios relativos entre dos cantidades. Para estos autores, los débiles esquemas de medida en los profesores pueden asociarse con significados limitados para la razón de cambio. Sugieren, en general que la razón de cambio debería ser un tema prioritario y especifico de desarrollo profesional para los profesores de matemáticas.

Respecto al papel de la modelación y la tecnología en el aprendizaje de la razón de cambio, Villa-Ochoa et al (2018) presentan los resultados de un estudio destinado a reconocer las contribuciones que los contextos y las tecnologías digitales ofrecen a la comprensión de la tasa de variación instantánea como una manera de aproximarse a la derivada en un punto en el estudio de las matemáticas.

Villa-Ochoa et al (2018) mencionan cómo en la literatura en educación matemática no existe un consenso acerca de la definición de modelación matemática ni de las implicaciones en el aula; afirman que para ellos la modelación se entiende como una práctica de articulación entre dos entes, uno llamado *modelo* que actúa en otro llamado *lo modelado* para diversos fines como la predicción, el diagnóstico o la evaluación de aspectos del ente modelado (Arrieta y Díaz, 2015, citado en Villa-Ocho et al, 2018).

El estudio se llevó a cabo a través de la metodología cualitativa del estudio de casos, en el cual participaron cuatro estudiantes voluntarios de un curso de precálculo de un programa de ingeniería de una universidad pública en Medellín, Colombia. Las tareas que conformaron el estudio referían a la modelación de fenómenos de covariación apoyadas con herramientas de software como Geogebra y Modellus. El propósito de estas era analizar el comportamiento de variables, reconocer patrones y establecer mecanismos para construir modelos que representaran la covariación.

Los resultados obtenidos dan cuenta de cómo los fenómenos modelados y las tecnologías digitales no son neutros en la comprensión de la razón de cambio instantánea; dan muestra también, de que las situaciones en las cuales la razón de cambio puede asociarse a magnitudes, en contextos y experiencias cercanas a los estudiantes, contribuye a pasar de la comprensión de la razón de cambio promedio a la comprensión de la razón de cambio instantánea. Villa-Ochoa et al (2018) concluyen sugiriendo la necesidad de diseñar ambientes que promuevan que los estudiantes se enfrenten a experiencias de modelación con tecnología en la que los objetos matemáticos puedan tener diversidad de significados e interpretaciones.

La revisión de la literatura relativa a la razón de cambio da luces respecto al papel que juega dicha noción para el estudio de múltiples fenómenos y la comprensión de algunos tipos de funciones, así como de las limitaciones que las aproximaciones clásicas han tenido ante el estudio de esta. En este sentido, la modelación matemática se presenta como un campo fértil de investigación desde el cual desarrollar aportes para la educación matemática.

1.2.2 Investigaciones relativas a las conexiones entre matemáticas y ciencias

Cómo se mencionó brevemente en apartados anteriores, existen múltiples perspectivas que abogan por un trabajo de *integración, trabajo interdisciplinar* o de *búsqueda de conexiones* en la educación en matemáticas y ciencias naturales. Siguiendo la propuesta de Frykholm y Glasson (2005), la investigación siguió la orientación del trabajo en la búsqueda de *conexiones* entre matemáticas y ciencias. En los párrafos siguientes se presentan investigaciones que dan cuenta parcial del estado de la investigación en este sentido.

Ya desde inicios de siglo, Frykholm y Glasson (2005) llamaban la atención a cómo la literatura en educación en matemáticas y ciencia “estaba repleta con llamados a la integración

entre matemáticas y ciencia" (p. 1) sin embargo, hacía falta aún el desarrollo de estudios que examinaran los prerrequisitos, creencias, experiencias y conocimientos requeridos para que los profesores implementaran la enseñanza integrada. Estos autores realizaron un estudio en el cual exploraron el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido, actitudes y creencias con relación a la integración entre matemáticas y ciencia, que futuros profesores de matemáticas o ciencias tenían durante su formación.

El estudio de Frykholm y Glasson (2005) exploró un modelo colaborativo que buscó generar oportunidades educativas significativas dentro del contexto de la formación inicial de profesores, para fomentar la habilidad y la voluntad de identificar y aprovechar las conexiones entre matemáticas y ciencia para la enseñanza en el aula de clase. Los resultados de la investigación dieron muestra de que la búsqueda de conexiones entre matemáticas y ciencia generó entusiasmo entre los participantes pues las producciones de sus colaboraciones dieron cuenta de que lograron crear oportunidades aprendizaje significativas para sus estudiantes, a partir de los conocimientos base que cada uno de los participantes poseía.

Algunas de las cuestiones que el trabajo de Frykholm y Glasson (2005) dejan abiertas incluyen una preocupación respecto al número de futuros profesores que no tenían experiencias previas en relación al trabajo colaborativo de la búsqueda de conexiones entre matemáticas y ciencia, a pesar de no poseer la experiencia y sentirse poco preparados para ello, muchos de estos participantes reportaron creencias fuertes sobre lo positivo de realizar tales conexiones; por otro lado, una preocupación quizá más crítica se refiere a los usos de las matemáticas en los proyectos propuestos por los participantes, pues en muchos casos la matemática aparecía fundamentalmente como una herramienta para la recolección y representación de datos; presentando así una

percepción quizá limitada de los aportes de la educación matemática en la formación de los ciudadanos.

Cerca de una década después, Baxter et al (2014) expresaron también la tendencia a hablar acerca de la integración entre matemáticas y ciencia, sin embargo, estos autores afirman que eran aún escasas investigaciones que exploraran maneras de apoyar a los profesores a lograr tal objetivo. Baxter et al (2014) utilizaron investigaciones en desarrollo profesional en ciencia y matemáticas para diseñar un proyecto de desarrollo profesional que ayudase a profesores de grados tempranos a mejorar su enseñanza de las matemáticas y las ciencias al conectar estratégicamente estas disciplinas.

Los propósitos del estudio incluían: identificar los cambios en la confianza y prácticas de los docentes después de participar en el proyecto de desarrollo profesional; e, identificar diferentes formas de conectar matemáticas y ciencias durante el desarrollo profesional. En relación con el primero de estos objetivos, Baxter et al (2014) reportan que, tanto en matemáticas como en ciencias, los docentes se sintieron más confiados en su habilidad para involucrar a los estudiantes en el aprendizaje, evaluar las comprensiones y facilitar discusiones en clase.

Con relación al segundo objetivo, los autores se apoyaron en la propuesta de Huntley (1998, citado en Baxter et al, 2014) de un continuo de integración entre matemáticas y ciencia (ver Figura 1) el cual identifica diversos tipos de integración, que va desde: clases de ciencia, a clases de ciencia con algo de matemática, a clases que parecieran integrar perfectamente matemáticas y ciencia, a clases de matemáticas con algo de ciencia, y a clases de matemáticas.

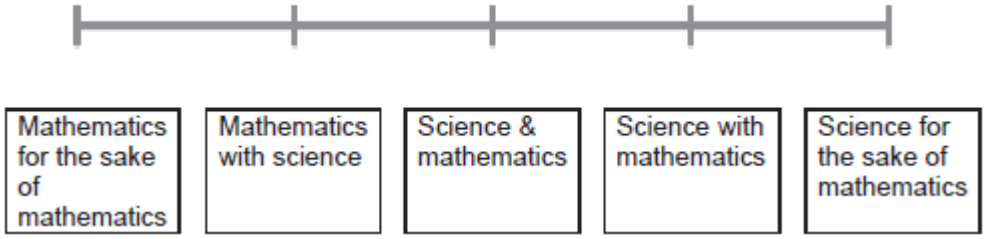


Figura 1. Continuo de integración Matemáticas y Ciencia. Adaptado de Huntley (1998, citado en Baxter et al 2014)

Baxter et al (2014) concluyen que es muy importante apoyar a los docentes a identificar y desarrollar conexiones entre matemáticas y ciencias significativas, más allá de ser superficiales o triviales. En este sentido, la manera en cómo las disciplinas se relacionan es tan importante, o más, que el nivel de prominencia que tenga cada disciplina en una determinada actividad. Definen dos tipos de conexiones: *Infusión* que refiere a la resolución de problemas matemáticos relacionados a conceptos científicos, y *Transferencia*, que refiere a indagaciones científicas apoyadas por procesos y conceptos matemáticos. A pesar de estas conexiones, los autores cierran con el llamado de atención de Lederman y Niess (1997, citado en Baxter et al, 2014) de que matemáticas y ciencias tienen distinciones epistemológicas que son críticas de mantener.

Por otro lado, en su tesis doctoral Wong (2018) indaga acerca de la relación entre la ciencia escolar y la educación matemática. La autora afirma que, si bien la ciencia es dependiente del pensamiento y herramientas matemáticas, esta cercana relación no se ve habitualmente reflejada en las escuelas o en las políticas educativas; Wong (2018) plantea críticas a los llamados a que los departamentos de matemáticas y ciencias trabajen conjuntamente al preguntarse por la plausibilidad de tales propuestas.

Específicamente se pregunta por el cómo y hasta qué punto es posible que educadores en matemáticas y ciencias trabajen juntos, así como cuales son las barreras que dificultan

colaboraciones efectivas, y de mutuo beneficio entre profesores de matemáticas y ciencias; así como formas de intentar superar tales barreras.

Algunos de los resultados de Wong (2018) demuestran que la dependencia en la relación matemáticas y ciencia es asimétrica: las ciencias dependen de las matemáticas, pero lo opuesto no es cierto, lo cual dificulta el desarrollo de una relación mutuamente beneficiosa pues las ciencias siempre tenderán a percibir más beneficios en cualquier colaboración. Esta dependencia asimétrica no ha sido explorada y parece ser crítica para dar cuenta de porqué las colaboraciones entre los departamentos de matemáticas y ciencias en las escuelas es tan atípica.

En términos de los objetivos de la investigación realizada, esta asimetría presentada por Wong (2018) parece apoyar la hipótesis de que el involucrar contextos propios de las ciencias en las clases de matemáticas para profesores en formación de ciencias naturales, apoyará su formación matemática y fomentará una mejor aplicación de las matemáticas en la formación científica de tales profesores.

La revisión de la literatura en la relación matemáticas y ciencia da cuenta de que, si bien se han realizado llamados al trabajo conjunto, poca atención se ha puesto a las dificultades epistemológicas que tal trabajo demanda tanto para profesores de matemáticas, de ciencias e investigadores interesados en la educación en ambos campos.

1.2.3 Investigaciones relativas a la metodología de investigación basada en diseño

Dentro del espectro amplio de la investigación basada en diseño, y al fungir como una herramienta metodológica, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje han sido empleadas en variedad de investigaciones con distintos objetos de estudio, en lo siguiente se presenta una selección realizada de tres investigaciones relativas al uso de trayectorias hipotéticas de

aprendizaje, específicamente relativas a algunos de los objetos matemáticos que fueron tomados en cuenta en el diseño de la propuesta de la investigación: la pendiente como razón de cambio; las funciones cuadráticas y situaciones de cambio cuadrático; y el comportamiento de crecimiento o decrecimiento exponencial.

Con relación al trabajo pendiente y razón de cambio, Nusantara y Putri (2018) investigaron el papel que tiene el uso de un contexto realista, como lo puede ser el análisis de la inclinación de una escalera recostada en una pared, en el aprendizaje de la pendiente de una recta. Los autores afirmaron que "la fórmula para la pendiente de una línea recta tiende a ser enseñada directamente sin involucrar sus bases conceptuales, y así, la pendiente parece estar desconectada de las experiencias de los estudiantes" (p. 1).

Como estrategia metodológica, Nusantara y Putri (2018) llevaron a cabo una investigación basada en diseño dentro de la cual produjeron una trayectoria de aprendizaje constituida por una serie de tareas que componían tres actividades matemáticas: (i) determinar la pendiente de dos escaleras diferentes; (ii) determinar la pendiente de una recta mediante el trabajo con triángulos semejantes, y (iii) resolver problemas relativos al tema de la pendiente de una recta. Se resalta que el proceso de resolución de los estudiantes evidenció un momento de modelación de la situación presentada mediante el uso de triángulos rectángulos. Estas actividades fueron revisadas durante los ciclos de análisis local, tomando como base las dificultades aparentes que presentaban los estudiantes durante la aplicación de esta.

Algunas de las conclusiones obtenidas por Nusantara y Putri (2018) incluyen la afirmación de cómo el contexto de la escalera, un contexto de tipo realista jugó un papel importante en el aprendizaje de la pendiente de una línea recta, y que el uso de la trayectoria de

aprendizaje brindó elementos para caracterizar los aprendizajes esperados en cada una de las actividades que la componían.

Por otro lado, Fonger et al (2020) estudiaron las concepciones de los estudiantes mediante un experimento de enseñanza de pequeña escala dirigido a desarrollar la comprensión del crecimiento cuadrático como un fenómeno cuya razón de cambio está en constante variación. Para ello, los autores diseñan una trayectoria de aprendizaje utilizando como soporte teórico las nociones de Formas de Pensar (WoT, por sus siglas en inglés), y Formas de Entender (WoU por sus siglas en inglés) respecto a los crecimientos cuadráticos en respuesta a actividades que enfatizan el cambio en cantidades relacionadas.

Fonger et al (2020) llaman la atención a cómo existen dos aproximaciones típicas para la enseñanza de las funciones: una aproximación mediante la noción de correspondencia, prevalente en la educación media y que enfatiza las funciones como asignaciones; por otro lado, una aproximación de covariación (Thompson y Carlson, 2017, citado en Fonger et al (2020), en la que enfatizan la a atención en cambios relacionados entre dos variables (habitualmente x e y). Desde esta aproximación es posible estudiar los cambios de al menos dos maneras diferentes: mediante la coordinación de cambios sucesivos entre los pares de valores, o, mediante el razonamiento de cantidades que varían simultáneamente, y que a su vez es posible estudiar cómo cambia cada cantidad en relación con la otra.

Fonger et al (2020) afirman que al escribir sobre la trayectoria de aprendizaje no es posible pretender describir una progresión lineal de las ideas o la estructura del aprendizaje que ocurre, con lo que se llama la atención a las múltiples relaciones existentes y que intervienen durante el aprendizaje y también la enseñanza. Concluyen afirmando que las trayectorias de

aprendizaje pueden servir como una herramienta que busque enlazar las teorías sobre el aprendizaje con teorías sobre la enseñanza.

Finalmente, Ellis et al (2016) desarrollan una trayectoria de aprendizaje relativa al crecimiento exponencial, que buscó identificar y caracterizar las concepciones iniciales que tenían los estudiantes sobre el crecimiento exponencial, así como sus respectivas evoluciones, a través de una enseñanza enfocada en la covariación.

La trayectoria desarrollada por Ellis et al (2016) fue construida a partir de dos experimentos de enseñanza, y busca dar explicaciones acerca del pensamiento y el aprendizaje de los estudiantes en relación con un conjunto de tareas y actividades diseñadas para engendrar una visión del crecimiento exponencial como una relación entre dos cantidades que covarían continuamente.

Para estos autores, la investigación con trayectorias de aprendizaje tiene el potencial para apoyar una mejora en la comprensión del aprendizaje de los estudiantes, permitir el desarrollo de estrategias de enseñanza más efectivas, así como guiar el diseño de currículos y estándares. Mencionan que muchas de las trayectorias de aprendizaje diseñadas hasta el momento trabajan con conceptos matemáticos que se estudian en los primeros años de escolaridad, como la división en partes iguales, la medición de longitudes, sumas y restas, entre otros; con lo que el trabajo con conceptos de niveles superiores se reporte como una necesidad apremiante en la investigación.

Ellis et al (2016) afirman que las trayectorias de aprendizaje pueden proveer oportunidades para *traducir* hallazgos de investigación en desarrollo profesional y mejora en la formación de profesores, permitiéndole a los profesores analizar los aprendizajes de sus

estudiantes con el fin de brindar una retroalimentación apropiada o diseñar o elegir, las actividades más apropiadas para ellos.

Los elementos anteriores dan cuenta de la potencialidad que tiene la posibilidad de realizar una investigación marcada en el espectro de las Investigaciones Basadas en Diseño (IBD), específicamente dirigida al nivel universitario, en este sentido el presente trabajo de grado de maestría buscó aportar elementos para continuar la discusión respecto a la formación matemática a nivel universitario.

1.3 Objetivos

Los objetivos están estrechamente relacionados con la pregunta de investigación central, y son los que orientaron las actividades que se llevaron a cabo. Se parte de un objetivo general complementado por objetivos específicos, tal como se muestra a continuación.

1.3.1 Objetivo General

- Determinar las características de una propuesta de formación matemática basada en la modelación de tal forma que esta atienda a las necesidades de los estudiantes del programa de Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle.

1.3.2 Objetivos Específicos

La realización de la investigación implicó también la proposición de objetivos secundarios, que complementan de alguna manera el objetivo general, estos se mencionan a continuación.

- Caracterizar la formación matemática que requiere un estudiante de la licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental de la Universidad del Valle.
- Determinar las estrategias, estructuras y modelos conceptuales que permitan describir una secuencia de enseñanza basada en la modelación matemática para el desarrollo de pensamiento matemático en estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental.
- Formular una secuencia de enseñanza con respecto a la noción de razón de cambio para los estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental de la universidad del valle que atienda a sus requerimientos específicos de formación.

1.3.3 Preguntas auxiliares de investigación

Los objetivos enunciados anteriormente obedecen al planteamiento de una serie de preguntas de investigación complementarias a la central planteada anteriormente, éstas se enuncian a continuación

¿Cuál es la importancia de la formación matemática que recibe un estudiante para profesor de ciencias naturales?

¿Cómo caracterizar la formación matemática que requiere un estudiante para profesor de Ciencias naturales en sus estudios profesionales?

¿Qué tipo de saber matemático requiere un profesional de la educación en el área de ciencias naturales?

¿Cómo diseñar una secuencia de enseñanza que promueva una formación matemática apropiada para los estudiantes de ciencias naturales?

¿Cómo un experimento de enseñanza puede aportar elementos teóricos para la configuración de propuestas didácticas para estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental?

Capítulo II: Referentes Teóricos

En el presente capítulo se abordan con detalle las posturas a partir de las cuales fue consolidado el marco teórico que sustentó la investigación, tales posturas fueron construidas a partir de una revisión bibliográfica que dio cuenta del potencial de la modelación matemática como herramienta para el estudio de fenómenos en las distintas ciencias, lo que promueve las conexiones entre matemáticas y ciencias descritas en el planteamiento del problema.

En la primera parte del capítulo se explora la noción de *Affordances,* que fue traducida como "Características Didácticas de los recursos digitales" siguiendo la propuesta teórica de Brown et al (2004), con esta se exploran aquellas características de los recursos digitales que posibilitan, o dificultan, la realización de acciones por parte de los estudiantes al enfrentarse a una actividad mediada con un recurso tecnológico, en este sentido, las herramientas digitales se pretendió fuesen utilizadas como complemento y de manera armónica con las tareas de modelación.

Posteriormente, se presentarán algunas posturas teóricas existentes en la literatura relacionadas con la investigación en modelación, siguiendo la categorización propuesta por Stillman (2019) se ubica la investigación dentro de la perspectiva del Diseño de tareas de modelación en las líneas empíricas de investigación y se resalta el trabajo de Reit y Ludwig (2018) quienes proponen una serie de criterios para el diseño de tareas de modelación.

En la tercera parte del capítulo se presenta la clasificación propuesta por Barrera y Santos (2002) de tres tipos de contextos en los que se pueden desarrollar actividades y tareas para el trabajo matemático en el aula. Se cierra el capítulo con una presentación conceptual de la noción de razón de cambio, objeto matemático de interés en la investigación y que fundamenta la

aproximación a las funciones y los modelos que se propusieron como elementos de primordial interés en la formación matemática de los estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental.

2.1 Affordances / Características didácticas de los recursos digitales

Desde inicios de siglo, Brown et al (2004) llaman la atención a que el término "affordances" incrementó su prominencia en la literatura académica en educación matemática en general, y en particular en la línea de investigación de tecnologías en educación matemática; mencionan adicionalmente, una proliferación de distintos usos e interpretaciones. Por tal razón, en lo que sigue se exploran las raíces y uso del término, así como algunas de sus aplicaciones buscando clarificar sus múltiples significados.

Inspirado por la psicología de las cosas cotidianas, el término fue tomado del área de la interacción humano-computador la cual se enfoca en los ambientes diseñados por el hombre (Norman, 1988, citado en Brown et al 2004). Pea (1993, citado en Brown et al, 2004) sugirió que la noción de *affordances* fuese usada para explorar la interrelación entre herramientas tales como los computadores, y la práctica educativa. Pea extiende la idea a los artefactos utilizados en la enseñanza y a las representaciones matemáticas y afirma que las *affordances* de los objetos profunda y a veces innecesariamente restringen su accesibilidad al humano ordinario.

Por otro lado, Gibson (1977, citado en Brown et al, 2004) afirma que, si el *affordance* es percibido o atendido, o no, dependerá de las necesidades del observador y cómo estás cambian; sin embargo, el *affordance* permanecerá invariante, está siempre allí para ser percibido. Para este autor los *affordances* existen dentro de las restricciones de un ambiente y son invariantes. Proponen como ejemplo considerar una mesa rectangular vista por un observador desde una

posición particular. La perspectiva del observador le permitirá observar directamente uno u otro elemento de la mesa, como la longitud de las patas, o el centro de la mesa y estas perspectivas cambian a medida que el observador altera su posición, sin embargo, la mesa en sí misma no habrá cambiado a lo largo de la observación.

En relación a la educación matemática, Pea (1993, citado en Brown et al, 2004) considera que la investigación hacía la noción de *affordances* es de vital importancia, pues muchos de los objetivos de la educación están basados en "the success of the social constructability of affordances – that one can get a learner to attend to the pertinent properties of the environment, or the designed object, or the inscriptional notations, such that the learner can join in to contribute to distributed intelligence in activity" (p. 121) Es decir, que ante una situación de, por ejemplo, análisis de cambios cuantitativos, el estudiante pueda reconocer cuales son las características más importantes que le permite discernir la herramienta utilizada para dar una posible solución a la situación.

Analizar los *affordances* en una situación puede necesitar ser más que listar los ítems disponibles en tal situación (Kennewell, 2000, citado en Brown et al, 2004). Este autor realizó un experimento de diseño con un marco teórico basado en tres grandes categorías de análisis: *affordances*, limitaciones y habilidades; para explorar el efecto de tareas de modelación apoyadas por tecnologías digitales en el aprendizaje del álgebra. Describe los *affordances* como "atributos de las características de apoyo" (2001, p. 103) o "el potencial de acción inherente a las características de la situación" (2000, p. 55) Afirma que las limitaciones son complementarias, y no son el opuesto a las *affordances*.

Las *affordances* describen el potencial de acción, y las limitaciones describen la estructura de la acción. Interacciones entre estudiantes y dispositivos tecnológicos necesariamente involucran tanto las habilidades del estudiante como las *affordances* de las herramientas tecnológicas. Estos elementos se combinan para determinar el potencial de la interacción en cualquier situación dada.

Kaput (2001, citado en Brown et al, 2004) afirma que las *affordances* de la tecnología son las maneras en que esta provee soluciones exitosas a dilemas en la enseñanza, y potencializa las fortalezas de los estudiantes.

El uso de *affordances* y limitaciones como un marco referencial para el análisis de la actividad de aula en ambientes de aprendizaje matemática y tecnológicamente ricos parece prometedor. Al manipular los *affordances* y las limitaciones de ambientes particulares podría ser posible determinar trayectorias de aprendizaje que busquen apoyar y mejorar la formación matemática de los estudiantes.

Brown et al (2004) afirman que aprender cómo utilizar un instrumento complicado tal como una calculadora CAS requiere descubrir sus *affordances* (aquellas que no son obvias) y aprender a operar dentro de sus limitaciones. Por tanto, el usuario debe aprender a pensar sobre estos problemas y operaciones matemáticas de una manera similar a los desarrolladores del software. Un desafío para la investigación en educación matemática es estudiar como este proceso puede ser productivo.

Para el desarrollo de la investigación, se tomó una postura a partir de la cual fueron construidas 3 categorías teóricas y de diseño que buscaron operativizar esta noción, al hacer variar la cantidad de limitaciones y *affordances* disponibles en una herramienta digital presentado

como parte de una actividad a ser desarrollada por los estudiantes, las cuales se describen a continuación.

T1. *Affordances limitados*

En esta categoría fueron incluidos applets cuya utilización estuviese plenamente delimitada, la cantidad de herramientas disponibles para el usuario fuese fija y no pudiese modificarse de ninguna manera. Así, todas las herramientas disponibles tienen un papel preestablecido en el desarrollo de la actividad propuesta, y los estudiantes deben únicamente percibir dichos *affordances* y utilizarlos.

T2. *Affordances sugeridos*

En esta categoría fueron incluidos applets cuya limitación fuese menor en comparación con los T1, sin embargo, aun incluyen elementos que dirigen la atención al uso de herramientas específicas en concordancia con los objetivos de las actividades propuestas.

T3. *Affordances ilimitados*

En esta categoría se incluyen los applets que no vienen con ninguna limitación y sugerencia (adicional a las del desarrollador del software), es decir, permiten una exploración total y no orientada de los *affordances* de los que dispone el applet o software.

Por otro lado, procedemos ahora a explorar investigaciones que han indagado sobre el potencial didáctico de la herramienta web Geogebra, la cual ha mostrado ser un apoyo significativo en comparación con otras herramientas como Khan Academy, IXL, NCTM Illuminations, entre otros (Lavicza, 2010, citado en Wassie y Zergaw, 2019). Resultados como los de Moeller y Reitzes (2011, citados en Wassie y Zergaw, 2019) y Velchova (2011, citados en

Wassie y Zergaw, 2019) han dado muestra de cómo al integrar Geogebra con el currículo de matemáticas puede incrementar la satisfacción de los estudiantes, formar estudiantes con habilidades esenciales para el trabajo en matemáticas y proveer una experiencia de aprendizaje activa. La siguiente es una lista de características que hacen de Geogebra una herramienta a ser considerada y preferida, en los procesos de enseñanza y aprendizaje, Geogebra:

- Es un software libre, multi plataforma, y está compuesto de herramientas fáciles de utilizar
- Soporta escenas dinámicas
- Permite múltiples representaciones de objetos matemáticos
- Permite guardar y exportar archivos en múltiples formatos
- Permite la inserción de imágenes
- Funciona con LaTeX
- Tiene capacidades de prueba automáticas.
- Está disponible en múltiples idiomas
- Permite la producción de materiales educativos por parte de los usuarios, que pueden ser libremente compartido a través de la web
- Tiene una muy activa comunidad internacional de usuarios que comparten sus materiales de enseñanza y brindan soporte técnico.

Wassie y Zergaw (2019) realizaron un estudio documental a partir de artículos con revisión por pares, documentos de conferencias y reportes técnicos publicados en Ingles en el periodo desde 2007 hasta 2018 en bases de datos como: Mendeley Library, Science Direct library, Education Resources Information Center (ERIC) con las palabras claves Geogebra y Tecnología en Educación Matemática, con toda la información recogida, la categorizaron en subtemas, tales como la contribución de Geogebra en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; el aporte de Geogebra en la generación de interés por parte de los estudiantes; y, los desafíos y limitaciones de integrar Geogebra en la escuela.

En relación con la contribución de Geogebra en la enseñanza y el aprendizaje, Wassie y Zergaw (2019) mencionan que la capacidad de Geogebra para integrar conceptos algebraicos y geométricos, le hace preferible para el descubrimiento de propiedades y relaciones matemáticas y, por tanto, para desarrollar en los estudiantes el pensamiento creativo. Geogebra ha sido utilizado como una herramienta para realizar una "demostración automática" y una explicación del teorema de Pitágoras. Ha sido indicado que esta aproximación ayuda a clarificar el teorema y motiva a los estudiantes a estar concentrados con la clase; entre otras, la efectividad de Geogebra también ha sido evidenciada en la comprensión de figuras geométricas, en la resolución de problemas de optimización lineal, en la descripción de autovalores y autovectores, la lógica básica de la simetría y la modelación de curvas paramétricas (Wassie y Zergaw, 2019).

Geogebra también juega un papel importante en la visualización y la comprensión de los efectos de la variación de parámetros en funciones, y los efectos de transformaciones rígidas y no-rígidas (Anabousy et al. 2014, Caglayan, 2011, citados en Wassie y Zergaw, 2019). También es posible caracterizar los efectos del grado y el coeficiente principal en el gráfico de funciones polinomiales de alto grado, junto con su dominio y rango, ceros y la multiplicidad de los ceros, valores máximos y mínimos, puntos de intersección e intervalos de monotonía.

La existencia del software de matemática dinámica, Geogebra, es una oportunidad para investigadores y profesores para hacer énfasis en las características dinámicas de distintos fenómenos de la vida real. Geogebra permite la creación de recursos de enseñanza que podrían mejorar los ambientes de enseñanza y aprendizaje (Caligaris et al 2015, citado Wassie y Zergaw, 2019).

Desde la perspectiva de Geogebra como una herramienta para generar interés en los estudiantes, se encontró que clases apoyadas en este software incrementaron la motivación de los estudiantes (Liu et al, 2011, citado en Wassie y Zergaw, 2019) así como sus razonamientos y la resolución de problemas (Acuña, 2014; Akanmu, 2016 citados en Wassie y Zergaw, 2019). Particularmente, clases en geometría del plano, trigonometría, análisis de funciones y sus gráficas, estadística, en la comprensión de teoremas relacionados con circunferencias, fracciones, y en geometría de transformaciones se encontraron mejoras en los resultados académicos de los estudiantes. Curiosamente, los estudiantes se vuelven más responsables de su propio aprendizaje e incrementan su participación en las clases (Dikovic, 2009, citado en Wassie y Zergaw, 2019).

Por último, desde la perspectiva de los desafíos y limitaciones de integrar Geogebra en las clases de matemáticas, Wassie y Zergaw (2019) mencionan que, entre muchos otros, la disponibilidad de dispositivos con los cuales acceder a Geogebra, el conocimiento pedagógico para integrar Geogebra y la "alfabetización tecnológica" de los usuarios son algunos de los desafíos para lograr una educación matemática integrada con Geogebra de manera efectiva. De hecho, el acceso a los recursos no es ni el objetivo central, ni una garantía que asegure el cumplimiento de los objetivos de las clases. Más bien, este es un vehículo hacía tal objetivo, y para lograrlo, se requiere de uso consciente e intencional.

La fluidez de los estudiantes en el uso de las tecnologías es una oportunidad para que las instituciones educativas lleven a la práctica clases integradas con herramientas tecnológicas. Hasta ahora, Geogebra ha demostrado ser una herramienta crucial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los niveles secundario y terciario (educación media y superior). Una elección inteligente de sesiones complementadas con Geogebra tienen la ventaja

de inspirar a los estudiantes hacía su aprendizaje y por tanto mejorar sus logros académicos (Wassie y Zergaw, 2019).

Por otro lado, aún hay áreas donde hace falta mucha investigación tales como los posibles riesgos o dificultades de utilizar Geogebra, el diseño curricular que adecuadamente incluya sesiones de clase que involucren tecnología y la contribución de Geogebra en la evaluación de los estudiantes. Por encima de todo, para Wassie y Zergaw (2019) la intención tras usar Geogebra en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no debería ser la de reemplazar totalmente las clases tradicionales de matemáticas, sino el complementarlas para hacerlas mejores.

2.2 Una perspectiva en modelación

Existen múltiples perspectivas desde las que ha sido investigada la modelación matemática y, en este sentido, Brown e Ikeda (2018) consideran importante definir los límites de la investigación en modelación matemática, afirman que "la modelación ocurre cuando profesores, estudiantes, matemáticos y otros, intentan describir algún aspecto del mundo real en términos matemáticos con el fin de mejorar la comprensión sobre algo, tomar o recomendar acciones" (p. 2). En los párrafos siguientes, se presentan a grandes rasgos algunas líneas de investigación y se hace especial énfasis en la línea empírica del diseño de tareas.

Para el presente trabajo, retomamos como punto de partida la postura de Niss et al (2007, citado en Stillman, 2019) quien afirma que "l*a modelación matemática* entendida como la resolución de problemas del mundo real es el *proceso* de aplicar matemáticas a un mundo problema del mundo real con el objetivo de entenderlo" (p.1); sin embargo, Stillman (2019) expresa además que

> la modelación es más que aplicar matemáticas, es aplicar las matemáticas necesarias con la intención de mejorar la comprensión respecto a la situación o problema del mundo real al que un estudiante se ve enfrentado. Sin embargo, una vez hallada la solución matemática, ya no se vuelve más sobre el problema inicial excepto para verificar si tal solución tiene sentido (p. 2) (cita original en inglés).

Con una postura definida respecto a la modelación matemática, es prudente entonces preguntarse acerca de los objetivos o metas de la inclusión de la modelación matemática en el aula de clase; Stillman (2019) afirma que existen varios argumentos que son aproximadamente equivalentes a los cinco argumentos que Blum y Niss (1991) presentan para apoyar la inclusión de aplicaciones del mundo real y modelación matemática en los currículos educativos. Desde un punto de vista matemático, se proponen los siguientes tres objetivos

1. La inclusión de la modelación matemática como un vehículo para enseñar conceptos y procedimientos matemáticos.
2. Enseñar modelación matemática y maneras de aplicar matemáticas como contenido matemático, es decir, como parte esencial de las matemáticas.
3. Enseñar modelación matemática para promover las matemáticas como una actividad humana que da respuesta a problemas de distintas naturalezas con lo que se da lugar a la emergencia de conceptos, nociones y procedimientos matemáticos.

A partir de la anterior noción general de la modelación, y sus metas al ser incluido en el aula de clase, Stillman (2019) describe dos grandes líneas de indagación fructíferas en el campo: las líneas teóricas y las líneas empíricas. El presente trabajo de grado se inscribe en la segunda de estas, y, específicamente en la perspectiva del diseño de tareas de modelación.

Las líneas empíricas de investigación en la investigación en modelación matemática son muchas y variadas, Stillman (2019) presenta tres: estudiantes como modeladores, profesores de modelación, y, diseño de tareas de modelación. Se revisa un pequeño subconjunto de estudios ejemplares y los resultados más importantes de estos, se enfatiza únicamente en la línea del diseño de tareas, al ser en la cual se decide inscribir la investigación. En la Figura 2. Líneas empíricas de investigación en modelación. Tomado de Stillman (2019) se presentan posibles intereses de investigación en cada una de las líneas.

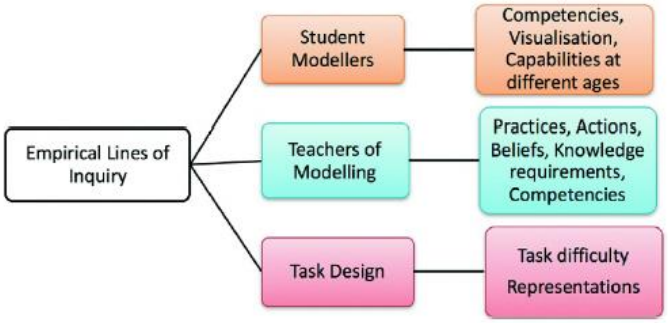


Figura 2. Líneas empíricas de investigación en modelación. Tomado de Stillman (2019)

Resultados empíricos de estudios enfocados en la línea de Estudiantes como Modeladores

Las líneas de indagación que se concentran en los estudiantes abarcan sus competencias de modelación y sus competencias matemáticas, la visualización y sus capacidades en diferentes edades.

Investigación cuantitativa por Kaiser y Brand (2015, citado en Stillman, 2019) ha confirmado que la competencia de modelación parece consistir en una competencia global de modelación y multitud de sub-competencias, tales como simplificar/matematizar, trabajar matemática e interpretar/validar.

Estos autores retoman la definición de competencia de modelación propuesta por Brand (2014, citado en Stillman, 2019) que la entiende como la "habilidad para resolver tareas completas de modelación, así como usar habilidades metacognitivas para monitorear el proceso de modelación". El papel de una competencia global de modelación permanece como una pregunta abierta, sin embargo, parece estar presente en las distintas aproximaciones investigativas referentes a la modelación en educación matemática.

Resultados empíricos de estudios enfocados en los Profesores de modelación

Estudios en esta línea de investigación se han concentrado en las prácticas, acciones, creencias, competencias y conocimientos requeridos por parte de los profesores, entre otras características y factores que influyen al planear, preparar, ejecutar, evaluar y reflejar sobre los procesos de modelación en los que involucran a sus estudiantes.

Al menos dos aproximaciones diferentes han sido identificadas en los profesores en el aula de clase al buscar promover el desarrollo de competencias de modelación: *atomística*, en esta el énfasis está en los procesos de matematización y el análisis matemático de los modelos. Y *holística*, en la cual el énfasis está en el proceso de modelación como un todo y en el cual se espera que todas las fases (de modelación) jueguen un papel. Resultados de Kaiser y Brand (2015, citado en Stillman, 2019) confirman que ambas aproximaciones pueden fomentar la competencia de modelación.

Czocher (2018, citada en Stillman, 2019) plantea una pregunta respecto a las competencias para apoyar la modelación por parte de los estudiantes. ¿Cómo hacen los profesores para que sus estudiantes tomen conciencia que un punto central de la modelación es el de reducir la complejidad de una situación del mundo real, de tal forma que algún(os) modelo(s)

pueda(n) ser aplicado(s) o construido(s), y no el de mantener esa complejidad para que el "modelo" sea una imagen exacta de la realidad? De esta manera llama la atención acerca de la necesidad de continuar los estudios que se concentren también en las competencias de los profesores.

Resultados empíricos de estudios enfocados en Diseño de Tareas

El diseño de tareas en contextos de modelación educativa es un área fructífera para la investigación puesto que un conjunto de especificaciones para problemas adecuados para el aula debe estar basadas en algún tipo de evidencia teórica o empírica (Stillman, 2019). Los elementos esenciales de las tareas utilizadas en implementaciones exitosas de modelación en estudios de investigación han de ser capturados en criterios de diseño que puedan ser utilizados para propósitos tanto de aula como investigativos en el futuro (Stillman, 2019, Reit y Ludwig, 2018). Sin embargo, debe llamarse la atención acerca de que la implementación de tales tareas es una dificultad mayor que el diseño de la tarea por sí misma, tal implementación también involucra los elementos metodológicos de la investigación o el aula de clase.

El diseño de tareas ha sido explorado menos en estudios de prácticas de aula y más como una herramienta para evaluar la modelación. Stillman (2019) afirma que esta es un área que cambia énfasis rápidamente dependiendo de quien se encuentre investigando. Reit y Ludgwig (2018) construyeron un conjunto de criterios que orientaron el diseño de tareas de modelación, tales criterios se listan a continuación:

1. Autenticidad del contexto.
2. Valores numéricos realistas.
3. Carácter de resolución de problemas.
4. Preguntas con un formato *naturalístico.*
5. Variedad de posibles aproximaciones a la tarea.

Para estos autores, la autenticidad y la relación con la realidad son elementos centrales de las tareas de modelación. Se define la autenticidad de una tarea siguiendo la idea de Palm (2002, citado por Reit y Ludwig, 2018) quien la entiende como el hecho de que la tarea tenga su origen en la realidad, y aún más, la situación a estudiar de hecho ocurre (o puede ocurrir) en la realidad. En este sentido, el uso de valores numéricos realistas, es decir, que sean cercanos a los valores que se obtendrían mediante la observación o experimentación en la situación real es de fundamental importancia para mantener la autenticidad de la tarea propuesta.

El carácter de resolución de problemas hace referencia a que no exista un algoritmo de antemano que brinde una solución a la tarea que los estudiantes puedan aplicar directamente, esto implica que la identificación de la solución a la tarea sea en sí mismo, parte del problema que los estudiantes deben abordar.

El formato *naturalistico* de las preguntas que se formulen hace referencia a que tales preguntas sean cercanas a los estudiantes y/o se formulen como una pregunta realista que puede surgir en la realidad. Por último, la variedad de posibles aproximaciones a la tarea implica que debe haber más de una aproximación posible para llegar a la solución esperada. Estas distintas aproximaciones pueden ser distinguidas por el modelo matemático construido, de forma, que pueda existir entonces más de un modelo posible que lleve a una respuesta satisfactoria a la tarea propuesta.

Estos cinco criterios, en conjunto con la perspectiva de investigación del diseño de tareas de modelación, formaron parte directa de los elementos teóricos utilizados en la realización de los diseños de las actividades que forman parte de la secuencia de enseñanza que fue aplicada a los estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental.

2.3 Contextos involucrados en problemas de modelación

Barrera y Santos (2002) afirman que en el estudio de las matemáticas es necesario atender a los procesos que promuevan oportunidades a los estudiantes de examinar casos particulares, formular conjeturas, presentar argumentos y comunicar resultados. De esta manera, los contextos en que son propuestas las tareas pueden favorecer que estas constituyan un apoyo para promover en los estudiantes la disposición hacía el estudio la disciplina, y, por tanto, al aceptar la noción propuesta estos autores, resulta importante realizar una distinción entre algunos de los posibles contextos en que una actividad puede ser propuesta al ser esta una categoría teórica que permea los diseños de una propuesta de aula.

En el apartado anterior, Reit y Ludwig (2018) mencionan el uso de valores numéricos *realísticos* y de contextos auténticos como dos de los criterios que han de ser tenidos en cuenta para el diseño de tareas en las que se ponga en juego el proceso de modelación en los estudiantes. En este sentido, Barrera y Santos (2002) proponen una distinción de tres tipos de contextos con características propias de situaciones que pueden servir de marco para favorecer la participación de los estudiantes.

Contexto puramente matemático

En este tipo de contextos el referente en el cual se desarrolla la situación involucra únicamente aspectos matemáticos. En este tipo de contextos es posible plantear objetivos como la formulación de problemas o la búsqueda de solución a una pregunta plateada.

Contexto del mundo real

En este tipo de contextos, el entendimiento del problema a trabajar se relaciona con la identificación de variables de la situación real que puedan ser examinadas a partir de recursos matemáticos. El proceso de solución de un problema en contexto real conlleva a la construcción

de un modelo matemático. Por la complejidad inherente que conllevan este tipo de problemas, generalmente se hacen simplificaciones para construir una representación matemática aproximada a la realidad.

Contextos hipotéticos

La situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables o parámetros que explican el desarrollo de la situación. Dicho comportamiento de los parámetros no se basa en datos o información experimental o de laboratorio. El planteamiento de situaciones hipotéticas en el aula puede contribuir a que los estudiantes empleen una serie de recursos matemáticos, y diferentes representaciones de tal suerte que puedan construirse uno o más modelos de la situación estudiada, con el fin de estudiar las características de los distintos modelos y buscar distintas formas de solución ante las tareas propuestas.

En la investigación tomó especial interés aquellos contextos hipotéticos, esto al involucrar la sugerencia dada por Reit y Ludwig (2018) de prestar atención a que los valores numéricos que aparecían fuesen *realistas*, entendido como que fuesen valores cercanos a aquellos que se obtendrían en una medición experimental en la situación real que se está hipotetizando, así como el posible recurso a situaciones en contextos reales, permitiendo a los estudiantes realizar mediciones directas en aquellas situaciones.

2.4 Una conceptualización sobre la razón de cambio

El estudio del cambio es de interés primordial en el desarrollo del trabajo, al ser una actividad humana presente en un sinfín de situaciones de la vida real y de las ciencias. En este sentido, en el presente apartado daremos inicio con una descripción de lo qué son los cambios cualitativos, los cambios cuantitativos y la relación de estos últimos con la actividad de medición.

Para posteriormente presentar algunas ideas de la razón de cambio como coeficiente de diferencias, y cómo tal coeficiente se relaciona con razonamientos covariacionales y proporcionales. Se cierra el apartado presentando algunas razones de cambio constantes y variables, con sus respectivos ejemplos.

2.4.1 Cambio cualitativo

En una situación de cambio, intervienen magnitudes que pueden cambiar o no cambiar en la evolución de las circunstancias iniciales (Rendón, 2009). En este sentido, es importante identificar tales magnitudes y la relación que existe entre ellas dentro de una situación particular. La identificación de las magnitudes y la descripción verbal y escrita de la manera cómo estas magnitudes se comportan en la situación, es el acercamiento cualitativo al fenómeno que permitirá hacer predicciones preliminares de lo que sucederá con los elementos involucrados en la situación con el transcurso del tiempo (Rendón, 2009).

Los cambios cualitativos hacen referencia a las relaciones entre factores o componentes de una situación, es decir, se precisa un antes y un después en la circunstancia respecto a aquellas situaciones que generan la modificación (Rendón, 2009). Este tipo de cambio no se determina numéricamente, sino que parte de descripciones, secuencias o instrucciones representadas por medio de palabras que permiten definir una respuesta o conclusión sobre algo. Es probable que este tipo de cambios se apoyen en modelos gráficos y expresiones adjetivadas (Rendón, 2009); es esperable, además, que en las descripciones de situaciones de cambio cualitativo se usen expresiones como: la magnitud tal aumenta, la magnitud tal disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, entre otras.

Finalmente, Rendón (2009) propone entonces que el cambio cualitativo se caracteriza por: distinguir las características necesarias para identificar modificaciones de un objeto, situación o acción propia de un contexto; Permitir representar una situación con una definición *pobre* (parcial, incierta y/o imprecisa), soportando el proceso de solución y proporcionando una interpretación de los resultados; y, Ser la forma más ampliamente utilizada para explicar las modificaciones ocurridas respecto a algo, desde el razonamiento por sentido común.

2.4.2 Cambio cuantitativo

Los cambios se denominan cuantitativos cuando es posible asignar números a las cualidades que se están comparando; dicha actividad de asignación es llamada medida. Dicha noción de medida (valor numérico) viene de la operación cotidiana de comparar conjuntos y no solo se vincula con el número de elementos de un conjunto, sino también con la noción de extensión, entre otras (Rendón, 2009).

Desde los inicios elementales de la teoría de conjuntos y la topología métrica, hay un inmenso camino recorrido que ha pulido la definición de medida. Se ha desarrollado la teoría de conjuntos, la noción de métrica y de topología, de tal forma que hoy en día se cuenta con definiciones formales de medida como una función definida sobre un conjunto. Esta actividad, que consiste en asignar objetivamente un número a alguna observación, ha sido una actividad propia de las ciencias naturales desde siempre. “La necesidad de matematizar, cuantificar y predecir los cambios en los fenómenos naturales, obliga a la construcción de modelos que no son más que aproximaciones de la realidad” (García et al, 2002. Citado en Rendón, 2009).

En muchas situaciones, el hombre se ha relacionado no solo con la actividad de medir, sino también con la necesidad de determinar la variación de dichas mediciones. Estas variaciones

hacen referencia a los cambios de las medidas, es decir, se relaciona con los cambios cuantitativos, busca además definir un número asociado a las modificaciones ocurridas de tal forma que, en cualquier circunstancia, sea posible enunciar la cantidad de aumento o disminución (Rendón, 2009).

El cambio cuantitativo se describe con base los factores que lo generan, matemáticamente denominados *variables*, las cuales son tomados como causas, es decir, como relaciones de dependencia que dan cuenta de lo ocurrido. Adicionalmente, este tipo de cambio pretende lograr precisión, exactitud y verificación concreta respecto a alguna modificación. El conocimiento gana así en confiabilidad y rigurosidad; el procedimiento que desde el avance matemático ha permitido determinar con exactitud un cambio consiste en establecer un punto inicial o de referencia y un punto final y contrastarlos a ambos numéricamente, simbólicamente puede ser escrito cómo $\Delta x = x_f - x_i$ (Rendón, 2009)

2.4.3 Razón de cambio

En términos exclusivamente matemáticos, la razón de cambio se define como un "cociente incremental o de diferencias" (Rendón, 2009). El cociente es definido como el cambio o diferencia en una variable Y dividido por el respectivo cambio en una segunda variable X, reconociendo que el cambio se establece hallando la diferencia entre una magnitud final con una inicial, simbólicamente se expresa como $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Esta definición suele llamarse también razón de cambio promedio sobre un intervalo $[x_1, x_z]$. Rendón (2009) resalta que en muchas ocasiones la razón de cambio está dotada de un significado contextual, pues plantea relaciones significantes entre las magnitudes que intervienen.

En esta dirección, Thompson y sus colegas (1994, 1996, 2008, 2013. Citados en Byerley y Thompson, 2017) describieron como una interpretación productiva sobre la razón de cambio en los estudiantes, involucra la coordinación e integración progresiva de nociones subyacentes tales como la cantidad, variación, covariación, cambio, acumulación y proporcionalidad. Afirman que un apropiado entendimiento de la razón de cambio involucra la covariación de cantidades, así como cantidades y magnitudes relativas.

2.4.3.1 Razón de cambio constante

Este tipo de razones al hallar el resultado del cociente para cualesquiera dos pares de observaciones, siempre un define un mismo resultado. Es decir, al calcular la variación de los incrementos se puede obtener siempre un resultado igual (Rendón, 2009).

Un ejemplo de este tipo de razones puede encontrarse en la pendiente de una recta, la cual no tiene variación para cualquier par de coordenadas de este elemento geométrico. Así como lo puede ser el incremento en la temperatura de un líquido en el tiempo al ser expuesto a una fuente constante de calor, un experimento con estas características hizo parte de las actividades que conforman la secuencia de enseñanza (ver sección 3.4)

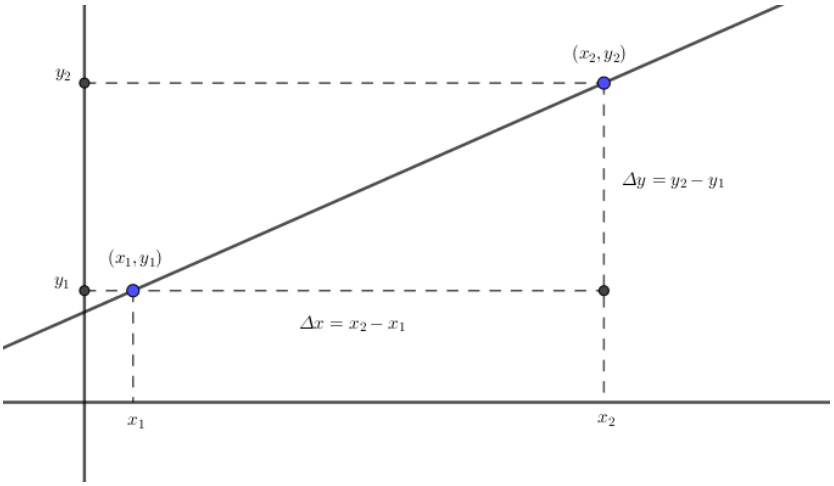


Figura 3. Representación gráfica pendiente de una recta

2.4.3.2 Razón de cambio variable

En algunos casos el cambio puede variar para distintas mediciones que se hagan de las magnitudes en consideración. En estos casos recibe el nombre de razón de cambio instantánea, y en ellas se toman variaciones "pequeñas" entre los estados inicial y final de las magnitudes a considerar. Habitualmente en notación función se representa como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Esta notación es también utilizada para relacionar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado, que fue considerado como uno de los grandes problemas en los que trabajaron matemáticos europeos del siglo XVII (Rendón, 2009).

El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente también se utiliza para definir la derivada de una función. Este concepto se encarga de determinar la razón de cambio de una función en un punto dado. Es decir, provee una formulación matemática de la noción del coeficiente de cambio (Rendón, 2009).

De esta manera, las razones de cambio pueden caracterizar algunas funciones elementales, como una función lineal o afín, con lo cual se buscará allanar el camino para un posterior estudio de las razones de cambio instantáneas con las derivadas en el curso siguiente.

Las posturas teóricas aquí descritas perfilan entonces, una posibilidad de aproximación al estudio de las funciones mediante la modelación de fenómenos de variación, cambio y cambios relacionados, todo ello enmarcado en contextos reales y realísticos, en los cuales recurrir a herramientas digitales sirva como un apoyo para la descripción, estudio y modelación de tales fenómenos, al poseer affordances que permiten la construcción de distintos modelos (gráficos, algebraicos, etc.) a partir de observaciones experimentales constituidas en datos.

Capítulo III: Metodología de la investigación

En el presente capítulo se presentan elementos que dan cuenta de la metodología que orientó la investigación, para tal construcción se tomó en cuenta la caracterización ofrecida por Camargo (2021), en la cual se entiende una metodología como un "conjunto conformado por un enfoque, una o varias aproximaciones, una o varias estrategias investigativas, un conjunto de recursos y una fundamentación teórica específica que genera la base racional para orientar la investigación de principio a fin" (p. 18)

Se asumieron las metodologías cualitativas de investigación como el escenario en el cual definir la orientación metodológica para este trabajo de grado, puesto que, entre otras características, estas permiten acotar la pregunta de investigación a lo largo de la ejecución y desarrollo del proyecto, así como la elaboración emergente de las categorías de análisis, las cuales surgen a partir de los datos que se obtienen durante la ejecución del proyecto (Hernández et al, 2010).

En una metodología, la fundamentación teórica y las estrategias deben articularse en una relación estrecha de construcción y reformulación mutua, de tal suerte que los principios y conceptos asumidos en la fundamentación teórica definan el espectro de lo que es posible y deseable conocer y cómo puede ser conocido. Para Camargo (2021) la metodología determina el problema a investigar, las preguntas que se hacen, el marco conceptual de referencia, el modelo investigativo, las estrategias y los recursos que se ponen en juego para obtener información y analizarla.

Dentro del espectro de posibilidades que se abre en los estudios cualitativos, se presenta la estrategia investigativa de los Experimentos de Enseñanza como una alternativa sobre la cual

esbozar el trabajo del proyecto realizado. Se presentan las particularidades de dicha estrategia y se hace una descripción de algunos de los elementos que participan en el desarrollo del experimento, tales como una descripción general de los estudiantes con quienes se trabajó, la modalidad de desarrollo de la asignatura y la manera en que fue recolectada la información que posteriormente se transformará en datos, resultados que fueron analizados en el capítulo IV y a partir de los cuales fueron construidas las conclusiones presentadas en el capítulo V.

Finalmente, se cierra el capítulo presentando los diseños de las situaciones que componen la secuencia; las tareas que conforman las actividades que se incluyeron en cada una de las cinco situaciones, haciendo explicitas sus particularidades y características.

3.1 Enfoque y aproximación del estudio

Como señala Páramo (2013, citado en Camargo, 2021) lo que define el enfoque de una investigación no son los procedimientos empleados sino la postura epistemológica que se asuma para identificar problemas, formular preguntas y aproximarse al fenómeno de investigación; y así mismo, (Camargo, 2021) llama la atención respecto a la necesidad de sobrepasar la dicotomía sostenida entre el uso de procedimientos cualitativos y cuantitativos, dejando de asociarlos a uno u otro enfoque epistemológico, esto con el fin de aprovechar los beneficios de cada uno según los fines específicos de la investigación.

En este sentido, el presente informe se adscribió bajo el denominado *enfoque fenomenológico* entendido como el conjunto de supuestos, visiones y prácticas de acercamiento que asumen quienes consideran que los fenómenos de indagación sistemática pueden ser descritos, interpretados, explicados y cuestionados. El enfoque fenomenológico es bien recibido en la investigación en ciencias humanas porque más allá de buscar control y predicción pretende

obtener descripciones, explicaciones e inferencias, fundamentadas y suficientemente significativas de los fenómenos de estudio.

Desde este enfoque, existen al menos tres posibles aproximaciones que pueden ser conjugados con la estrategia del experimento de enseñanza: la aproximación *interpretativa* o hermenéutica, en la cual los investigadores buscan profundizar en los significados que construyen estudiantes, profesores, agentes educativos, etc., sobre objetos y procesos matemáticos, la naturaleza de las prácticas educativas, entre otras; no intentan extraer información del escenario investigativo de manera imparcial, sino mediante una co-elaboración con los participantes del estudio. La aproximación *antropológica* que se enfoca en la identificación de regularidades de comportamientos, acciones y prácticas de grupos humanos en su escenario natural. Y, por último, la aproximación *colaborativa-social* que estudia acciones de colaboración en escenarios sociales; en esta aproximación, investigadores sensibles a las inquietudes de los participantes diseñan junto con ellos un libreto para experimentar una transformación en el escenario.

Una característica común que tienen las tres aproximaciones que corresponden al enfoque fenomenológico, es que no se pretenden generar leyes generales sino hacer interpretaciones factibles y útiles en relación con los objetivos de la investigación (Camargo, 2021). Por esta razón, la investigación se rigió llevando una aproximación mixta que tuviera en consideración las principales características de cada una de las tres aproximaciones arriba descritas.

3.2 Estrategia investigativa: Experimento de enseñanza

La estrategia investigativa Experimento de Enseñanza consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico; se busca determinar si ocurre un desarrollo relevante en contextos enriquecidos mediante el diseño y estudio sistemático de formas

y oportunidades de aprendizaje, estrategias de enseñanza, artefactos mediadores, formas de interacción, patrones discursivos y otros condicionantes del ambiente de la clase, tales como las normas sociales y sociomatemáticas (Camargo, 2021).

Los participantes en un Experimento de Enseñanza son: los investigadores, responsables de proponer la secuencia de enseñanza y recopilar la información para analizarla; un profesor que hace parte del equipo de investigación y es el responsable de la gestión de la secuencia; investigadores que actúan como observadores no participantes en la clase; y los estudiantes del aula en donde esta tiene lugar, que son considerados colaboradores en el estudio.

El escenario de un Experimento de Enseñanza suele ser el aula regular de clase, aunque eventualmente se puede llevar a cabo en aulas acondicionadas para tal efecto con menos estudiantes o incluso con grupos de estudiantes que se involucran voluntariamente en la enseñanza en situaciones extracurriculares. El profesor está acompañado de uno o más observadores no participantes que hacen parte del equipo de investigación. Ellos contribuyen a interpretar lo que los estudiantes dicen o hacen y apoyan la toma de decisiones sobre los pasos a dar en la clase. Su posición de observadores les permite captar información que puede habérsele escapado al profesor y ampliar las evidencias de cara a la interpretación que se busca.

Los investigadores, incluido el profesor, van al escenario investigativo con una secuencia preliminar de enseñanza la cual han previsto según la conjetura de aprendizaje que piensan poner en juego. Esta conjetura surge de comprometerse con un marco conceptual sobre el aprendizaje en general y sobre la forma de promover el desarrollo específico de un contenido matemático en un escenario social determinado.

La conjetura formulada tiene dos dimensiones: una, referida al contenido matemático en juego, responde al interrogante sobre qué debería ser enseñado; otra, referida al aprendizaje y

denominada dimensión didáctica, responde al cómo debería ser enseñado. En la dimensión de contenido la conjetura sugiere una vía de acercamiento conceptual para atender un problema. En la dimensión didáctica la conjetura indica, a partir de un marco conceptual, cómo organizar la instrucción, qué tipo de tareas proponer en la secuencia y qué aprendizajes se esperarían lograr.

La conjetura delinea las siguientes etapas del experimento. No se busca simplemente probarla o descartarla sino ir revisándola y reelaborándola a medida que el experimento está en marcha y los investigadores se dan cuenta si el acercamiento conceptual funciona, si una tipología se sostiene o no o si cierta clase de tareas logra el efecto deseado. (Camargo, 2021)

La estrategia metodológica *Experimentos de Enseñanza* está constituida de dos aspectos cíclicos, el primero correspondiente al diseño y planeación de su puesta en acto, y el segundo a los análisis. Este último se describe en dos momentos: los análisis locales y el análisis retrospectivo, en la Figura 4. Esquema Experimentos de enseñanza. tomada de (Camargo, 2021) se muestra una posible esquematización de las fases correspondientes al experimento de enseñanza, y las relaciones entre sus componentes, que serán descritas más adelante.

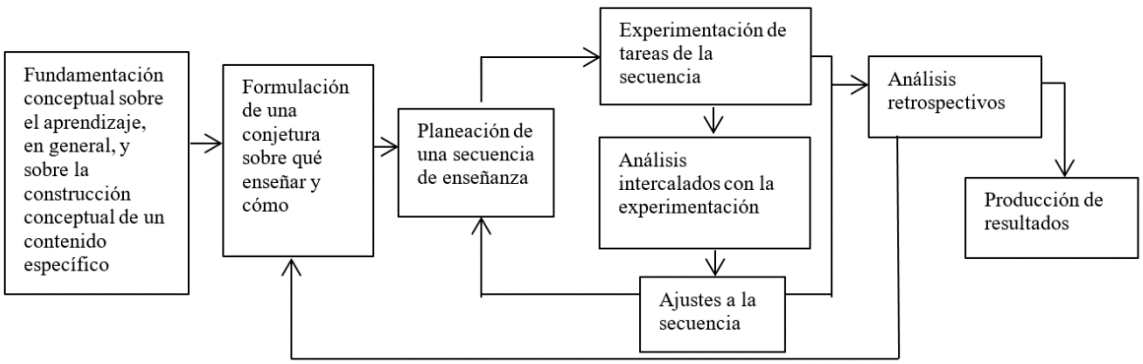


Figura 4. Esquema Experimentos de enseñanza. tomada de (Camargo, 2021)

El experimento se realiza intercalado con la ejecución de la secuencia. Las discusiones sostenidas por el equipo de investigación mientras el experimento progresa son frecuentemente pragmáticas pues la preocupación central es la calidad de la experiencia matemática de los

estudiantes. Estas reuniones intermedias tienen como propósito el ajuste de la conjetura y las tareas subsecuentes en la secuencia diseñada. Los análisis de la actividad de los estudiantes y del proceso social realimentan nuevas experiencias en el aula y conducen a variaciones de metas específicas para una sesión dada (Cobb, 2000)

La última etapa de un Experimento de Enseñanza es un análisis retrospectivo de la información generada en el curso del experimento. Este análisis se hace orientado por la conjetura inicial y tiene como meta encuadrar los eventos de la clase en un marco conceptual amplio para ubicar el experimento como representativo de otros. Los investigadores revisan las evidencias obtenidas durante la experimentación, retrospectiva y prospectivamente, en busca de refinar, confirmar o modificar la conjetura, proponer constructos teóricos e incluso desarrollar modelos de enseñanza.

Los productos de una investigación que adopta la estrategia Experimento de Enseñanza son varios. En primer lugar, secuencias de enseñanza implementadas, evaluadas y mejoradas, con indicaciones explícitas sobre los cambios que se sugieren para que los estudiantes puedan progresar; En segundo lugar, modelos reales de actividad matemática de los estudiantes y de la transformación de esta actividad como resultado de una secuencia de enseñanza (Cobb, 2000). En tercer lugar, “pruebas de existencia” que muestran cómo, bajo ciertas condiciones, es posible lograr un efecto deseado y vale la pena seguir intentándolo; en cuarto lugar, constructos o interpretaciones más profundas de las que se tenían hasta el momento acerca del fenómeno en estudio que dan cuenta de la efectividad o no de las conjeturas puestas en juego (Romberg, 1992, citado en Camargo 2021).

En lo que sigue se presenta el sentido que adoptan en este trabajo cada uno de los elementos que forman parte de la estrategia metodológica del experimento de enseñanza, así

como de otros que no se encuentran ilustrados en la Figura 4. Asimismo, se muestran aspectos que son propios del trabajo investigativo.

3.3 Recolección de información

El experimento de enseñanza fue llevado a cabo entre los meses de septiembre y octubre de 2021, en una modalidad asistida por tecnología aún debida a la pandemia global producida por la enfermedad COVID-19 (OMS, 2022). Por esta razón la totalidad de las sesiones fue realizada a través de la plataforma para reuniones Meet de Google, lo cual permitió la grabación de cada una de estas a través de la herramienta integrada en la plataforma para tal fin.

Las sesiones del experimento fueron llevadas a cabo en el marco del desarrollo de la asignatura formación matemática I, cuyos participantes eran estudiantes de primer semestre del programa de licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental de la Universidad del Valle. La intensidad horaria consistía en una única sesión virtual sincrónica semanal con una duración de tres horas.

De esta manera, fue posible registrar los datos de las interacciones de los estudiantes ante las actividades que se proponían mediante sus participaciones en clase; adicionalmente, se asignó como tarea para cada sesión, la realización de "notas de clase" en la que los estudiantes mostraran su trabajo individual alrededor de cada una de las actividades que componían las situaciones.

Para el desarrollo del trabajo final (Ver Actividad 2.2 en sección 3.4.2) cada grupo de estudiantes contó con la posibilidad de una asesoría individual con el profesor del curso, en la cual presentaban sus avances parciales e inquietudes respecto al desarrollo del trabajo, la

grabación de estas sesiones en conjunto con el documento definitivo constituye un elemento importante para la evaluación y análisis de los resultados de la secuencia.

En suma: se cuenta con grabaciones de sesiones y asesorías, con las cuales estudiar las reacciones de los estudiantes y sus interacciones en el aula con el profesor, y, en algunos casos, con otros estudiantes; notas de clase individuales relativas a cada actividad propuesta; y con el documento de trabajo final elaborado en grupos de tres (3) estudiantes.

3.4 La Secuencia de Enseñanza

La asignatura formación matemática I (ver **Anexo A**) está segmentada en un momento de introducción, y 3 unidades, cada una dedicada a un pensamiento especifico (numérico, geométrico y variacional). Dentro de estas, el espacio más propicio para el estudio de los fenómenos de cambio en contextos reales y realísticos es la unidad de pensamiento variacional, razón por la que el experimento de enseñanza fue llevado a cabo durante esta unidad.

En las cinco sesiones que componen la unidad del pensamiento variacional, se realizó una aproximación desde la perspectiva de la covariación y la razón de cambio para introducir y caracterizar las funciones de interés de estudio (lineales, cuadráticas y exponenciales). La secuencia está compuesta por un total de cinco situaciones, las cuales fueron abordadas a lo largo de cinco sesiones de clase de tres horas semanales. Cada situación está compuesta por un conjunto de actividades que sirven como apoyo para el desarrollo de los objetivos de aprendizaje. A continuación, se presenta la conjetura de la secuencia y sus dimensiones didáctica y de contenido, posteriormente se presentan los criterios teóricos utilizados en el diseño de las actividades y finalmente, se cierra el apartado con una presentación de la planeación de cada sesión con sus respectivas actividades.

Conjetura de la secuencia de enseñanza

Un trabajo fundamentado en la razón de cambio, formulado desde la perspectiva de la modelación matemática y el trabajo integrado con herramientas digitales, apoya la apropiación de affordances apropiados para el trabajo con la función matemática y algunos tipos particulares (Función lineal, cuadrática, exponencial).

Dimensión de contenido

Estudio de la variación, covariación y dependencia entre magnitudes desde el punto de vista de la razón de cambio expresada mediante una función matemática.

Dimensión didáctica o de aprendizaje

Mediante el trabajo con tareas de modelación matemática apoyadas en los *affordances* de recursos digitales, se busca generar las condiciones propicias para el aprendizaje de la función matemática.

Sobre las actividades que componen la secuencia de enseñanza

Para el diseño de las actividades que componen las cinco situaciones que se estudian a través de la secuencia, se tomaron dos grandes categorías teóricas: *Tecnología y Modelación* que fueron presentadas las secciones 2.1 y 2.2 respectivamente.

Con relación a los *affordances* de las distintas herramientas tecnológicas que fueron utilizadas y su papel en el trabajo de los estudiantes, se desarrollaron tres categorías teóricas de diseño las cuales fueron presentadas en la sección 2.1

T1. *Affordances limitados.*

T2. *Affordances sugeridos.*

T3. *Affordances ilimitados.*

Por su parte, desde la perspectiva de la modelación consideramos las siguientes cinco subcategorías propuestas por Reit y Ludwig (2018).

M1. Autenticidad del contexto.

M2. Valores numéricos realistas.

M3. Carácter de resolución de problemas.

M4. Preguntas con un formato *naturalístico.*

M5. Variedad de posibles aproximaciones a la tarea.

Hemos de mencionar que, si bien la propuesta de estos autores propende por tomar en cuenta las cinco subcategorías en el diseño de todas las tareas, para los fines propuestos de la secuencia, en ciertas situaciones fueron dejadas de lado algunas de ellas.

Situación	**Actividad**	**Tecnología**	**Modelación**
S1. Noción de Cambio	A1.1	T1	M4, M5
	A1.2	T2	M3, M4, M5
	A1.3	T1	M1, M4, M5
	A1.4	T3	M3, M4, M5
S2. Razón de Cambio	A2.1	T1, T2	M2, M4, M5
	A2.2	T3	M3, M5
S3. Razón de Cambio Constante	A3.1	T2	M4, M5
	A3.2	T3	M1, M2, M5
S4. Razón de Cambio variable	A4.1	T3	M1, M2, M3, M4, M5
S5. Razón de cambio variable 2.	A5.1	T3	M1, M3

Tabla 1. Rejilla de diseño de las actividades que componen la secuencia de enseñanza

3.4.1 Situación 1. Introducción al pensamiento variacional

La primera sesión del experimento de enseñanza estuvo distribuida en dos momentos: el primero de estos fue introductorio, se presentó el plan de trabajo de las siguientes cinco sesiones, que conformaban también el cierre del curso y se discutió la noción de cambio, enfatizando la idea de la cuantificación y su papel en el estudio de las ciencias naturales. En el segundo momento de la sesión se presentaron un conjunto de actividades (1.1 a 1.4) que fueron categorizadas como de "análisis de cambio en situaciones puntuales" donde mediante el estudio de gráficos de puntos principalmente apoyados en applets de tipo T1, se pudiesen establecer comparaciones que permitiesen describir cambios dentro de las situaciones abordadas.

Momento 1: Noción de cambio

La discusión dio inicio con la idea de cambio, y cómo los cambios pueden ser percibidos; se dieron ejemplos de situaciones de cambio de tipo cualitativo y cuantitativo buscando enfatizar la noción de cuantificar, entendida como "asignar objetivamente un número a alguna observación" (Rendon, 2009). Dicha autora menciona que cuantificar "ha sido una actividad propia de las Ciencias Naturales desde siempre. La necesidad de matematizar, cuantificar y predecir los cambios en los fenómenos naturales obliga a la construcción de modelos que no son más que aproximaciones de la realidad" (p. 13).

Momento 2: Análisis de Cambios en situaciones Puntuales

Actividad 1.1

Esta primera actividad buscó introducir a los estudiantes a un trabajo de análisis de situaciones en las que no se involucren valores numéricos de manera explícita, y se pretendió realizar una

discusión grupal constante a lo largo de un conjunto de tareas seleccionadas de Swan (1985) (Ver Anexo B)

Actividad 1.2

En esta actividad se propuso a los estudiantes realizar un análisis basado en una situación experimental realizada en un laboratorio virtual, applet de tipo T2, cuyo acceso les es permitido a los estudiantes. se buscó realizar comparaciones entre el tiempo que tarda en alcanzar el punto de ebullición cada una de las tres sustancias, esto haciendo un recurso a la información dada sobre cada liquido utilizado (agua, alcohol, benceno).

> "En un laboratorio, se han puesto a calentar cantidades iguales de tres líquidos (agua, alcohol y benceno). Se ha registrado el tiempo que han tardado en empezar a hervir y se presenta en la gráfica siguiente. ¿Qué información puede inferir de los distintos líquidos? ¿Cuál de los tres puntos representa el agua? ¿Por qué?

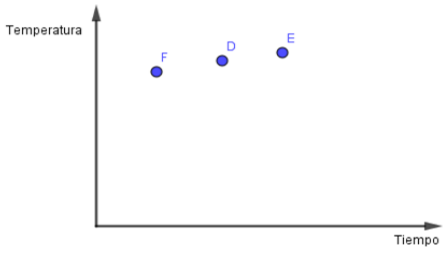


Figura 5. Actividad 1.2

Actividad 1.3

Se propuso realizar el análisis de una situación en la que se involucran dos distancias (casa-parque, casa-estación de policía) y cuatro recorridos en los cuales tales distancias fueron recorridas. Se siguió adicionalmente el patrón de las actividades anteriores de no utilizar números de manera explícita.

Un ciclista sale de su casa y tras un tiempo de recorrido le roban su bicicleta por lo que debe regresar caminando a casa. Al volver a casa toda su familia ha salido; por lo que decide ir caminando a la estación de policía más cercana a poner la denuncia por el robo. Tras lograr poner la denuncia, un familiar lo recoge en carro para llevarlo a casa y poder descansar del ajetreado día.

Si cada punto en la gráfica siguiente representa uno de los segmentos recorridos. ¿Cuál es cuál? ¿Por qué?

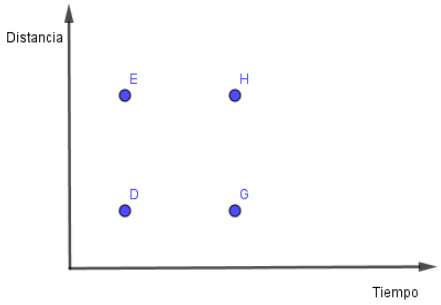


Figura 6. Actividad 1.3

En esta actividad es posible encontrar que algunos estudiantes detecten que los puntos E y H correspondan a la distancia casa-parque; así como otros estudiantes podrían considerar que los puntos D y G corresponden a tal distancia, con lo que se permite al menos dos diferentes posibles a una resolución que pueda ser considerada *correcta*.

Actividad 1.4

La cuarta y última actividad de la sesión 1 buscó ahondar en la comprensión de los estudiantes respecto de la noción de cambio, al configurarse como una actividad en la que estos debían proponer una posible situación que pudiese ser abordada mediante el estudio de valores puntuales como las que fueron presentadas a lo largo de la sesión.

La actividad 1.4 presentó un primer acercamiento a la posibilidad de proponer una situación que pudiese ser modelada, en este caso particular mediante puntos en un gráfico, con lo

que se buscó generar en los estudiantes interés por el estudio de situaciones en contextos extra matemáticos (hipotéticos o realistas) con el uso de herramientas matemáticas.

> Proponga una situación que pueda ser abordada mediante el estudio de momentos puntuales y de un ejemplo de una posible estrategia de solución.

3.4.2 Situación 2. Cambios relacionados, razón de cambio y proyecto de modelación

La sesión 2 estuvo compuesta en 3 momentos, en el primero de estos se abordó la idea de la comparación para dar cuenta de cambios en fenómenos, así como la idea del cambio relacionado, desembocando en la actividad 2.1, en la cual se realizó la exploración de dos applets (de tipos T1 y T2) buscando complementar la pregunta del "¿Qué cambia?" con el "¿Cómo cambia?" e iniciando la exploración y posible asignación de relaciones entre aquellas magnitudes que cambiaban. En el tercer momento se presentó la propuesta de trabajo final del curso, materializado en la actividad 2.2 que permitía ser explorada en contextos reales o realistas, así como el recurso a applets de tipo T3

Momento 1: Cambios relacionados.

Se inició la sesión llamando la atención respecto a cómo la noción de cambio requiere de al menos dos "estados" o "puntos de comparación" para poder ser percibido, y como en el estudio de la naturaleza estos dos estados suelen ser medidos con relación al tiempo (cambios en el tiempo)

Así, se estableció una pregunta más grande al establecer que la pregunta "¿Qué cambia?" Puede estar acompañada de un "¿Cómo cambia?" Que atañe a una descripción relacionada con otros cambios que ocurren simultáneamente con el cambio de interés.

Actividad 2.1

En esta actividad se involucran dos applets de tipo T1 y T2, que presentan modelos de una situación en contexto realista y uno totalmente matemático en los cuales se pretende abordar con los estudiantes las preguntas de ¿Qué cambia? ¿Cómo cambia? Y ¿Es posible establecer relaciones entre las magnitudes que cambian? Invitando a la exploración libre de los applets para posteriormente realizar una discusión grupal sobre lo encontrado.

Explore los siguientes applets de Geogebra y conteste. ¿Qué cambia? ¿Cómo cambia? ¿Es posible establecer relaciones entre las magnitudes que cambian?

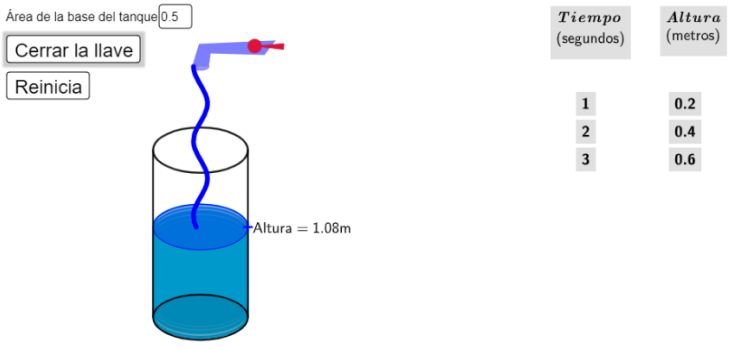


Figura 7. Actividad 2.1a [3]

[3] https://www.geogebra.org/m/PH9ENQfw

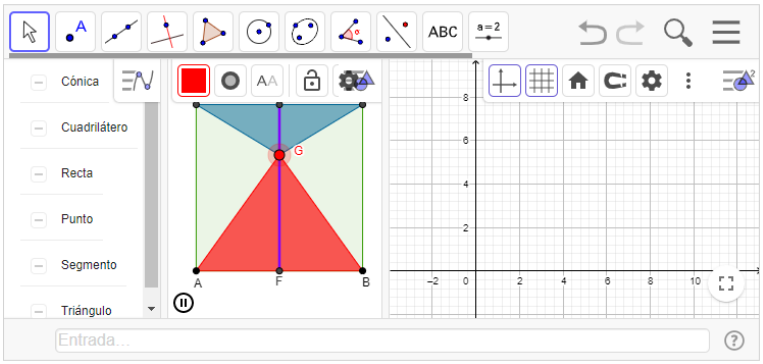


Figura 8. Actividad 2.1b[4]

Momento 2. Razón de cambio y noción de función

Analizadas las situaciones del momento 1, en las que se buscó llamar la atención sobre cómo puede existir más de una única magnitud que cambia en un único "proceso". A continuación, se procedió a definir la razón de cambio como una manera de establecer relaciones entre al menos dos magnitudes que co-varían, y se mostró mediante un análisis visual apoyado en el triángulo diferencial cómo algunas de estas razones de cambio pueden ser observadas.

Adicionalmente, a partir de esta caracterización de la razón de cambio como una forma de relacionar dos magnitudes, se presentó la noción de función de una variable, como idea matemática que engloba relaciones entre dos magnitudes y que sería el objeto de estudio subyacente a las sesiones posteriores.

Momento 3: Propuesta de trabajo final de modelación matemática

El tercer y último momento de la sesión 2 abogó por la presentación de la propuesta de trabajo final, a ser realizado en parejas de estudiantes. Se presentó la guía de trabajo final, se

[4] https://www.Geogebra.org/m/pbwzp5j6

atendieron dudas y se mostró un ejemplo de trabajo final realizado durante una versión anterior del curso.

Actividad 2.2 Trabajo final - equivalente al tercer examen parcial

La presente actividad propuso un ejercicio de exploración para los estudiantes, en el que estos pudieran realizar un proceso de estudio y análisis sobre algún fenómeno de la naturaleza que fuese de su interés. En este sentido, no se sugirió la utilización de ningún software en específico, más si era recomendable apoyarse en herramientas tecnológicas para la construcción y posterior refinamiento del modelo, esto configuró una actividad de tipo T3. El proyecto se convirtió entonces en una actividad transversal a ser desarrollada en paralelo con las restantes situaciones de la secuencia. En el diseño de la tarea se involucraron los criterios M3 y M5 de manera explícita, al permitir que los estudiantes pudiesen realizar una aproximación al fenómeno a modelar con relativa libertad.

El texto que orientó la actividad es seleccionado del libro "*Los reyes de la pasarela. Modelos matemáticos en las ciencias"* (de Torres Curth, 2015), al presentar una posibilidad de aproximación a la noción de modelación que permita orientar (sin llegar a esquematizar) el trabajo de los estudiantes.

Explicación

"La construcción de modelos matemáticos puede resumirse en algunos "pasos", que pueden tener la utilidad de ilustrar esta parte del quehacer matemático, pero obviamente no es una regla.

En primer lugar, ha de existir una **elección** de lo que se quiere modelar (y ha de haber una buena razón para ello). Luego, se deberán identificar los componentes del modelo y sus relaciones, que luego se traducirán en ecuaciones.

Una vez que el modelo está armadito, usualmente contiene lo que llamamos parámetros, es decir, constantes indeterminadas que deberán ser reemplazadas por valores numéricos. La construcción del modelo, que como ya dijimos es el resultado del conocimiento del sistema, de sus componentes y relaciones, suele incluir **datos**. Estos datos generalmente provienen de experimentos de laboratorio y/o de observaciones de campo, o de resultados alcanzados con anterioridad (por ejemplo, datos ya publicados por otros investigadores). Esta información permitirá dar a los parámetros los valores numéricos adecuados. Esta inclusión de la "información de la realidad" en el modelo es lo que se conoce como calibración del modelo.

El próximo paso es la **validación**, que refiere a la comparación de los valores de salida del modelo con valores reales (empíricos) de dichas variables. El objetivo de esta comparación es evaluar el error cometido por el modelo (que proviene tanto del conjunto de supuestos como de los errores de medición y experimentación) y determinar si este es un error que estamos dispuestos a tolerar. El conocimiento previo que el investigador tiene del sistema permite contrastar los resultados teóricos (el modelo conceptual y las hipótesis de funcionamiento del sistema) con lo que se observa en la realidad, y así validar o no el modelo.

Otra parte importante en la construcción de los modelos es lo que se conoce como **análisis de sensibilidad**. La pregunta acá es qué tanto se podrían modificar los resultados del modelo si los valores de las variables de entrada o los parámetros cambiaran un poquito. La importancia de este paso es radical, ya que si el modelo se dispara a valores totalmente distintos cuando se producen pequeñas perturbaciones en los valores numéricos de entrada o en los parámetros, no será un modelo muy confiable, ya que pequeños errores de medición podrían llevar a resultados muy diferentes.

Una vez que sabemos que el modelo "funciona" en esta realidad, podemos ponerlo a funcionar en otros escenarios hipotéticos, que nos permitan contestar la pregunta "¿qué pasaría si…?". Esta fase se la conoce como simulación. Es el proceso de obtener resultados del modelo independizándose de la realidad que le dio origen. Uno obtiene valores de las variables de salida en tiempos futuros a partir de series simuladas de valores de las variables de entrada. Estas últimas pueden ser series de datos que son (aunque no necesariamente reales) de interés para ver precisamente "qué pasaría si…"

Obviamente el proceso de construir un modelo no es un proceso lineal, sino que tiene sus idas y vueltas, sus ajustes, interpretaciones y reinterpretaciones que conducen a redefinir algunas de sus partes o su totalidad. Lo que sí es cierto es que es un proceso rico y muy creativo." (p, 25-26)

Producto

Cada grupo entrega un trabajo (normas de presentación APA) en el que describe su desarrollo de los pasos anteriores. Son seis pasos, marcados con negrita en el texto (el último puede no estar).

La presentación de esta actividad fue acompañada con el ejemplo de un trabajo similar realizado por estudiantes del semestre anterior con el fin de dar alguna idea de cómo involucrar elementos tecnológicos y un ejemplo del tipo de fenómeno que se podía abordar. Adicionalmente, los estudiantes contaron con una o dos sesiones adicionales e individuales (por parejas), en las cuales presentar avances intermedios y dialogar con el profesor respecto a las dudas que tenían en el desarrollo del proyecto.

Esta actividad fue central en la propuesta de la secuencia de enseñanza, y las actividades siguientes buscaron apoyar el desarrollo del proyecto de modelación, así como especificar conceptos matemáticos involucrados en el trabajo con la razón de cambio, tal como la noción de función.

3.4.3 Situación 3. Situaciones de cambio lineal y afín.

La sesión 3 estuvo conformada por dos momentos, en el primero de estos se realizó una exploración en una herramienta digital de tipo T2 a los efectos sobre la gráfica de una función lineal la modificación de sus parámetros acompañado del desarrollo de un cuestionario en Google forms. En el segundo momento se realizó una experimentación virtual a partir de un applet de tipo T1, con el cuál se ejemplificó un tipo de fenómeno realista que da lugar a funciones lineales o afines, para posteriormente proponer a los estudiantes la replicación de la experimentación y la construcción individual de modelos para sus experimentos.

Momento 1: Exploración del efecto visual de la variación de los parámetros de una función afín.

Se inició la clase recordando el tipo de razón de cambio identificable en la gráfica de una línea recta y se procedió a discutir las características de dichas funciones, y del significado de los parámetros "m" y "b" en las funciones de la forma $y = f(x) = mx + b$. Para esto se propuso la exploración de un applet de Geogebra de tipo T2[5] complementado con un conjunto de preguntas.

Actividad 3.1 Exploración de características de las funciones afines con Geogebra

La actividad consiste en dos partes a realizar de manera consecutiva: una exploración de los efectos en la gráfica de la función que suceden al modificar respectivamente los parámetros *m* y *b* en una función de tipo lineal, posteriormente, se realizó un cuestionario en Google forms (Ver Anexo C) de manera individual, este formulario debió ser llenado en un tiempo de 15 minutos buscando identificar de manera rápida la forma en que los estudiantes habrían logrado dar sentido a las transformaciones generadas por la variación de los distintos parámetros de una función afín.

> En el siguiente applet de Geogebra, explore qué sucede con la gráfica de la función al modificar los valores de los de los deslizadores presentes, posteriormente, proceda al formulario y conteste las preguntas allí presentes.

Momento 2. Exploración y modelación de una situación de cambio afín.

Apoyados en un laboratorio virtual de libre acceso[6], se pretendió realizar en conjunto con los estudiantes la construcción de un modelo matemático de la curva de calentamiento del agua

[5] https://www.Geogebra.org/m/by7zdyzk
[6] https://labovirtual.blogspot.com/2014/04/curva-de-calentamiento.html

en estado líquido. En el desarrollo de la construcción, se buscó llamar la atención respecto a cómo hay otras variables que tienen un efecto en los resultados que se pueden obtener (potencia de la estufa en watts, cantidad de líquido a utilizar, temperatura inicial, entre otros que no aparecen en el laboratorio virtual, como lo es la presión atmosférica).

La construcción se realizó en tres etapas: En la primera de estas se realizaría la experimentación a partir de la cual se tomaron los datos en el laboratorio virtual. La segunda etapa iniciaba una vez se tenía una cantidad apropiada de datos, (al menos 10 mediciones) los cuales fueron trasladados a la Hoja de Cálculo de Geogebra, para posteriormente, ser graficados como puntos en la Vista Gráfica y, por último, en la tercera etapa encontrar la recta de mejor ajuste con la correspondiente herramienta. De esta manera nacería una ecuación de la forma aproximadamente $y = mx + b$.

Actividad 3.2 Modelación de un fenómeno de calentamiento

En la presente actividad se le pidió a cada estudiante, realizar un proceso de modelación sobre el laboratorio virtual para el líquido alcohol y el benceno (Un applet de tipo T1). Era permitido realizar modificaciones a las otras variables (cantidad de líquido, potencia de la estufa, etc.), sin embargo, estas debían ser explicitadas, al fungir como parámetros del experimento. La construcción del modelo podía ser apoyada en el software de Geogebra u otro software de tipo T3.

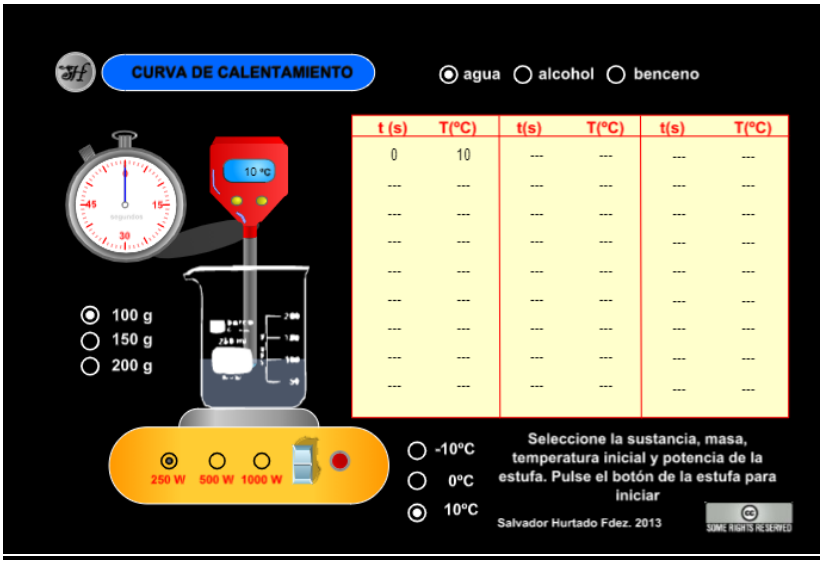


Figura 9. Actividad 3.2. Imagen tomada de "https://labovirtual.blogspot.com/2014/04/curva-de-calentamiento.html"

Construya modelos matemáticos para la curva de calentamiento del alcohol y del benceno, puedes modificar la potencia de la estufa, cantidad de líquido y temperatura inicial de la sustancia.

3.4.4 Situación 4. Situaciones de cambio cuadrático.

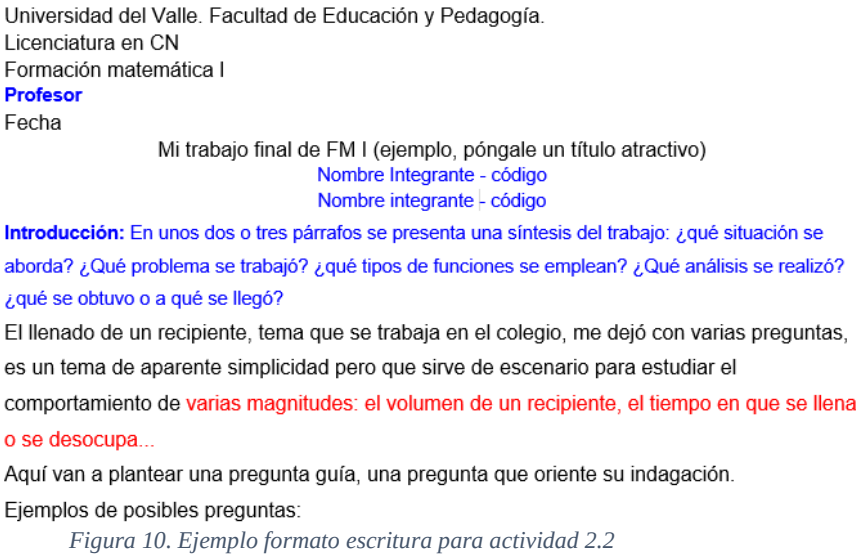
La sesión 4 del experimento estuvo compuesta por tres momentos. En el primero de estos se realizó una socialización de las construcciones realizadas en la actividad 3.2 propuesta al final de la sesión anterior, allí los estudiantes pudieron dar cuenta de su apropiación parcial de los elementos teóricos relevantes para la construcción de modelos y el trabajo con los applets involucrados, así como conceptos relevantes en la caracterización de las funciones lineales. En el segundo momento se presentó un esquema de escritura, que buscó ilustrar una posible organización de los desarrollos al trabajo final actividad 2.2. Por último, se realizó un estudio de las funciones cuadráticas, caracterizadas desde las razones de cambio y apoyados por un applet en modalidad T2, que desembocó en la actividad 4.1, en la cual se buscó la construcción de un modelo de una situación financiera a partir de una exploración libre en modalidad T3.

Momento 1: Discusión en grupo de las construcciones realizadas en la actividad 3.2

La clase dio inicio con una discusión grupal breve relacionada con los modelos construidos individualmente por los estudiantes en el desarrollo de la actividad 3.2 de la semana anterior. Se buscó resaltar las nociones de pendiente como una forma de expresar la razón de cambio en funciones cuya gráfica es una línea recta.

Momento 2: Lineamientos escritura Trabajo Final

Se presentó mediante un dialogo grupal apoyado en un documento de google docs (ver Anexo D), un formato de documento escrito elaborado para orientar la construcción del informe del trabajo final (Actividad 2.2)



Universidad del Valle. Facultad de Educación y Pedagogía.
Licenciatura en CN
Formación matemática I
Profesor
Fecha

Mi trabajo final de FM I (ejemplo, póngale un título atractivo)

Nombre Integrante - código
Nombre integrante - código

Introducción: En unos dos o tres párrafos se presenta una síntesis del trabajo: ¿qué situación se aborda? ¿Qué problema se trabajó? ¿qué tipos de funciones se emplean? ¿Qué análisis se realizó? ¿qué se obtuvo o a qué se llegó?

El llenado de un recipiente, tema que se trabaja en el colegio, me dejó con varias preguntas, es un tema de aparente simplicidad pero que sirve de escenario para estudiar el comportamiento de varias magnitudes: el volumen de un recipiente, el tiempo en que se llena o se desocupa...

Aquí van a plantear una pregunta guía, una pregunta que oriente su indagación.

Ejemplos de posibles preguntas:

Figura 10. Ejemplo formato escritura para actividad 2.2

Se pretendió de esta manera dotar a los estudiantes de un formato que orientase la escritura, presentando también un ejemplo de una posible situación a estudiar.

Momento 3: Trabajo en grupos pequeños de actividades de modelación que dan lugar a funciones cuadráticas.

El tercer momento de la clase dio inicio recordando la construcción presentada antes referente al triángulo diferencial y cómo este permitía caracterizar, particularmente, funciones cuadráticas, así como presentar la expresión algebraica general de una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

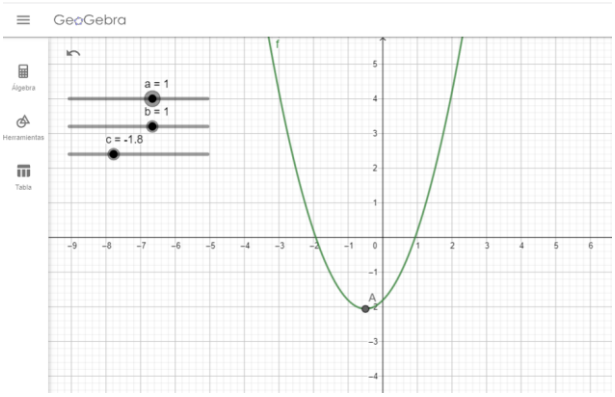


Figura 11. Exploración parámetros de una función cuadrática

Actividad 4.1 Modelación de una situación financiera

En esta actividad se buscaba que los estudiantes trabajen en grupos pequeños para la construcción de un modelo que permita dar solución a la situación planteada. Este proceso debía involucrar la identificación de cuáles son las variables relevantes para el problema y como escribir relaciones entre ellas, de tal forma que se diera lugar a la formulación de una función cuadrática que, por ejemplo, describiera la variación de los ingresos del gimnasio en función de la rebaja que se haga a la cuota mensual. La situación se presenta de manera abierta con la intención de que los estudiantes puedan (o no) utilizar el software Geogebra como un apoyo en la construcción de su solución.

> En un gimnasio local, hay 150 socios que pagan una cuota mensual de $60.000. Los dueños del gimnasio desean incrementar sus ingresos, y, tras un estudio de mercado, se llega a la recomendación de reducir la cuota mensual, ya que por cada $1.000 que ésta disminuya, se

inscribirán 5 nuevos socios. ¿Cuánto debería disminuirse la cuota para obtener la máxima ganancia mensual?

Algunas preguntas auxiliares

- ¿Cómo varía el ingreso al reducir la cuota?
- ¿Qué ocurre con el número de socios al reducir la cuota?
- ¿Genera más ganancias el hecho de que se inscriban más socios?
- Establecer un modelo de la situación.

El espacio final de la clase se dedicó a la discusión grupal respecto a las estrategias de solución propuestas por los estudiantes respecto a la actividad 4.1.

3.4.5 Situación 5. Situaciones de cambio exponencial.

La última sesión del curso estuvo dividida en tres momentos; en el primero de ellos se realizó una presentación relativa a fenómenos de cambio exponencial, apoyados en el software de Geogebra para la representación gráfica de algunas de las funciones resultantes en las exploraciones. En el segundo momento se propone la actividad 5.1, la cual presenta una situación en contexto realista, en la que se solicita la construcción de un modelo a través de una exploración libre en modalidad T3. El momento de cierre realiza una exploración de una herramienta T2, buscando ilustrar los efectos de los distintos parámetros presentes en una función exponencial.

Momento 1: Funciones exponenciales, análisis de situaciones elementales.

En el primer momento de la clase, se presentaron situaciones de cambios de tipo exponencial, haciendo énfasis en la razón de cambio de las variables en estudio en cada situación,

específicamente mencionando cómo el valor de la variable independiente está relacionado de manera multiplicativa con el valor "anterior".

1. Modelo de una bacteria que se duplica empezando con una sola 2^x
2. El caso de más de una bacteria (población inicial mayor)
3. El decaimiento radioactivo. El isótopo del Polonio ^{210}Po tiene una semivida aproximada de un período de 140 días, es decir, dada cualquier cantidad, la mitad de ella se desintegrará en 140 días. Si al principio hay 20 mg de ^{210}Po. Construir un modelo que describa la cantidad restante tras un tiempo determinado

Momento 2: El estudio del buzo, flujo luminoso.

El segundo momento de la clase consistió en trabajo autónomo en grupos pequeños para la construcción de un modelo matemático de una situación realística

Actividad 5.1. Modelación de un fenómeno físico

La actividad consistió en la modelación de un fenómeno físico relativa a la cantidad de luz que llega a distintas profundidades, dando lugar a una exploración de un fenómeno en el que las variables a relacionar son la profundidad y el flujo luminoso.

> Un problema importante en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede atravesar en distintas profundidades del mar. Según la Ley de Beer-Lambert, existe un modelo para este fenómeno, en el que están presentes la cantidad de luz que llega a una cierta profundidad y el flujo luminoso emitido desde un foco de luz en la superficie.

En un experimento llevado a cabo en una costa cercana, un buzo registró el flujo luminoso conforme se sumergía a ciertos metros de profundidad del nivel del mar, utilizando un sensor que arrojó los siguientes resultados

Profundidad en metros (m)	**Flujo luminoso en lumen (lm)**
0	2600
1	866.66
2	288.88
3	96.296
4	32.099

Tabla 2. Datos actividad 5.1

Formular una conjetura sobre el comportamiento observado en la tabla y contestar las siguientes preguntas

1) ¿Cuánto será el flujo luminoso a los 6 metros de profundidad?
2) ¿Y a los 20 metros?
3) ¿Y a los *n* metros?
4) Establecer un modelo matemático de la situación

Momento 3: Exploración de parámetros de la función exponencial

En el tercer momento de la clase, se procedió a realizar una exploración de los efectos que generan en el gráfico de una función exponencial, la modificación de los parámetros de ella tomando como base la forma $f(x) = a * b^{x-c} + d$, empezando desde de la función $f(x) = b^x$ y añadiendo gradualmente los demás parámetros.

Tal exploración será realizada apoyados en el software de Geogebra[7]

[7] https://www.geogebra.org/calculator/jsfuwrtd

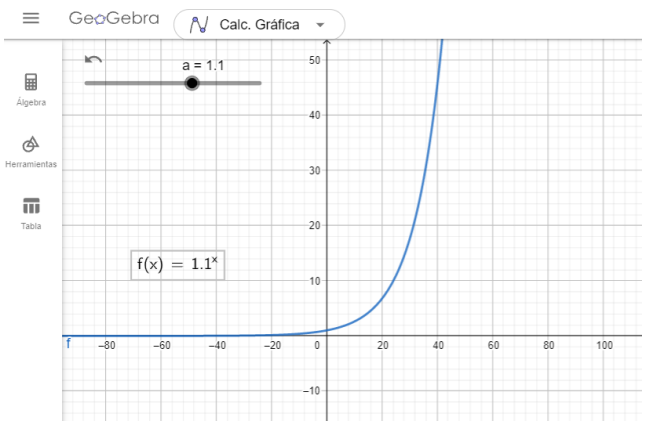


Figura 12. Exploración parámetros función exponencial

En esta situación se buscó describir las transformaciones que generan en la función las modificaciones de los parámetros. A través de las siguientes preguntas orientadoras

1) ¿Qué sucede si el parámetro "*a*" es un número negativo?
2) ¿Cómo es la gráfica de la función si $a=1$?
3) ¿Cómo es la gráfica de la función si $0<a<1$?
4) ¿Cómo es la gráfica de la función si $a>1$?
5) ¿Qué sucede con la gráfica de la función si $b>0$? ¿Y si $b<0$?
6) ¿Qué sucede con la gráfica de la función cuando $c>0$? ¿Y si $c<0$?
7) ¿Qué sucede con la gráfica de la función cuando $d>0$? ¿Y si $d<0$?

Con la exploración de los parámetros de la función exponencial se dio cierre a la última sesión del experimento, y del curso. Los estudiantes contaron con una semana de tiempo adicional posterior a la sesión para las últimas asesorías y posterior entrega del trabajo final (Actividad 2.2 en la secuencia).

Capítulo IV: Resultados y discusión

En el presente capítulo se hace una presentación en dos secciones de los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia de enseñanza. En un primer momento se realiza una descripción de los resultados, en el cual se busca identificar, tendencias, patrones y momentos a resaltar de la experiencia; se incluye también una descripción del ciclo de análisis locales explicitando allí sus principales conclusiones y aportes para el ajuste de la secuencia en el transcurso del desarrollo del experimento.

En la segunda sección del capítulo, se procede a desplegar el aparato teórico con el cual se realizó el análisis de los resultados. En este sentido, se presentan las categorías de análisis diseñadas, así como la forma en que estas fueron puestas en juego para discutir la información obtenida en el experimento buscando dar respuesta a los objetivos planteados por la investigación.

4.1 Resultados

En los párrafos siguientes se presentan un consolidado de los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia de enseñanza, se da inicio con la presentación de algunas de las discusiones llevadas a cabo durante los ciclos de análisis local, diferenciados en dos niveles: forma y contenido. Posteriormente se realiza una presentación de los resultados a la luz de tres categorías que atienden parcialmente a los objetivos del trabajo: la formación matemática de los estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle; los modelos conceptuales y las estrategias utilizadas que orientaron el diseño de la secuencia de enseñanza; y el diseño mismo de la secuencia de enseñanza.

Como contexto general la asignatura Formación Matemática I, y específicamente el trabajo relativo a la secuencia, se desarrolló en el segundo semestre del año 2021 y fue dictada en una modalidad asistida por tecnología. La secuencia fue desarrollada simultáneamente con dos grupos, de 20 y 22 estudiantes respectivamente, por esta razón se cuenta con un total de 10 grabaciones (1 para cada sesión para cada grupo), las notas de clase entregadas de manera individual en cada clase, así como el consolidado de 21 trabajos finales que fueron elaborados entre ambos grupos.

4.1.1 Análisis local: la forma

El ciclo de análisis locales se surtió realizando una reunión semanal posterior a las aplicaciones de las actividades que componían la secuencia. Dichas reuniones consistieron en una revisión por parte del equipo investigador a los videos, materiales y actuaciones de los estudiantes frente a las actividades que se habían propuesto en la semana, de tal suerte que se pudiesen realizar ajustes a las actividades que componían las situaciones a ser propuestas en las sesiones restantes.

A nivel de forma, los ciclos de análisis local dieron cuenta de cómo las actividades tuvieron una duración cercana a la esperada, así como estrategias de solución variadas, aunque cercanas a las esperadas de acuerdo con los objetivos de los diseños; la única excepción siendo el ejercicio de modelación de funciones cuadráticas en la cual los estudiantes realizaron una aproximación inesperada a la situación, resolviéndola con una aproximación numérica en lugar de la propuesta de modelación (ver apartado 4.1.2).

El experimento de enseñanza se surtió en los tiempos planteados, específicamente entre los meses de septiembre y octubre de 2021; dio muestra progresiva de la apropiación por parte de

los estudiantes de las temáticas abordadas, así como la identificación y aprovechamiento de los affordances de los softwares puestos en juego, al ser notable cómo el recurso a las herramientas digitales tuvo un impacto en la actividad matemática de los estudiantes, evidencias de estas afirmaciones son explicitadas en el siguiente apartado. Se resalta cómo a raíz de las discusiones adelantadas en los ciclos de análisis local, múltiples actividades fueron modificadas antes de ser mostradas a los estudiantes, así como incluso nuevas actividades fueron diseñadas, por ejemplo, la actividad 3.1.

4.1.2 Análisis local: el contenido

El desarrollo de las actividades que componían la secuencia fue llevado a cabo en sesiones semanales de 3 horas durante un periodo de 5 semanas, con una semana adicional final para la entrega de la actividad 2.2 que fungió como trabajo final de la asignatura. En los párrafos siguientes se presenta una síntesis de algunas de las discusiones surtidas en los ciclos de análisis local con relación al nivel de contenido de las actividades.

Con respecto a la actividad 1.1, algunos estudiantes asignaron al eje vertical del gráfico la variable "altura", dando así lugar a una lectura invertida de las respuestas esperadas, con lo que se logra evidenciar una lectura icónica de la información presentada en el gráfico tal como se ve en el siguiente fragmento transcrito de una grabación, **E** se refiere al estudiante, y **P** al profesor.

> **E**: … Pero yo lo hice tal forma que Alicia era la segunda, a no, Carlos es el primero.
> **P**: Carlos es el primero…
> **E**: Alicia es el segundo, el tercero es Lola… el cuarto es Martha, el quinto es Daniel, el sexto es Pili, y el séptimo Javi.

La discusión dio paso a la idea de cómo para establecer cambios una posible estrategia es la de realizar comparaciones con preguntas orientadoras como ¿Qué tienen en común? ¿Qué tienen de diferente?

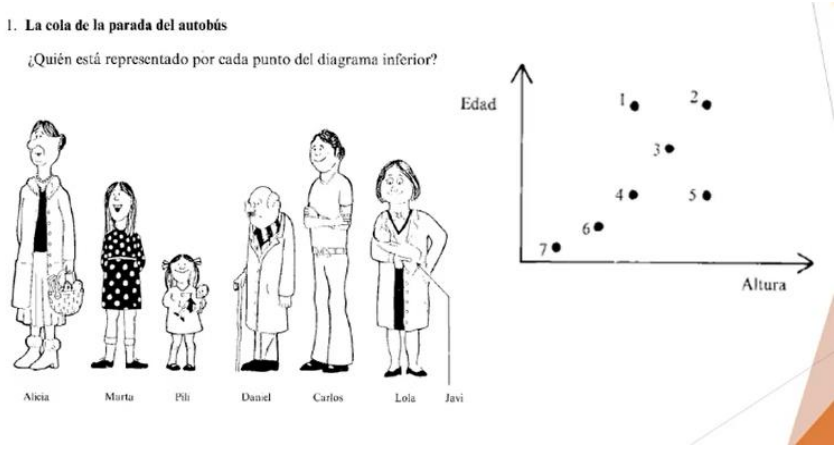
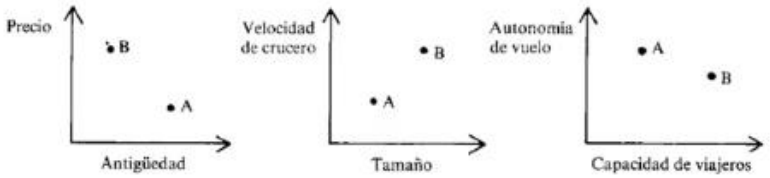


Figura 13. Actividad 1.1 parte 1 como se les presentó a los estudiantes. Adaptado de Swan (1985)

A partir de estas aclaraciones, el análisis de comparaciones para establecer cambios fue la estrategia habitual para el desarrollo de las siguientes partes de la actividad.

P: Cada persona que participe me dice qué piensa de una de las frases, y por qué, para escuchar a varias personas…
E1: Okey, entonces comienzo con "el avión más viejo es más barato"
P: Si, "el avión más viejo es más barato" ¿Es verdad? ¿O es falso? ¿Y por qué?
E1: Para mí es verdad; porqué en la primera gráfica en la de precio y antigüedad se muestra que el más antiguo es el punto A, y se muestra mucho más abajo en la gráfica en el eje del precio, por lo tanto, es verdad, que el avión más viejo, que es el más antiguo, el A, es de menor valor.



La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

—¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?
«El avión más viejo es más barato»
«El avión más rápido es más pequeño»
«El avión más grande es más viejo»
«El avión más barato transporta menos pasajeros»

Figura 14. Actividad 1.1 parte 2 como se les presentó a los estudiantes. Adaptado de Swan (1985)

Pasando a la actividad 1.2, se dio vía libre a la exploración de un laboratorio virtual de categoría T2 en el que los estudiantes pudieron explorar los resultados, también se dio cuenta de la búsqueda de informaciones adicionales para determinar los factores que afectan la situación. Una estrategia general fue la de investigar los puntos de ebullición de las sustancias**.**

> **E:** …Sería fácil saber cuál de los líquidos es, conociendo el punto de ebullición de cada uno de los líquidos, así pues, el que tenga mayor punto de ebullición va a ser la L, y pues a mayor tiempo de ebullición también demora más tiempo en llegar a ese punto, a esa temperatura; creo que, en este caso, el agua sería E porqué tiene el punto de ebullición más alto que los otros dos, sé que el benceno y el alcohol tienen un punto de ebullición más bajo.

En la actividad 1.3 se presentó una discusión en la que algunos estudiantes aún poseían dificultades de lectura, dando muestra de selectivamente ignorar los ejes; adicionalmente, surgió orgánicamente la posibilidad de dar más de una respuesta que sea correcta ante la situación propuesta, llamando la atención respecto a las distintas interpretaciones qué se le pueden dar a un mismo gráfico como se puede observar en el siguiente fragmento transcrito.

> **E1:** Profe, en ese gráfico, D o E podrían ser respuestas correctas para el lugar del robo, pues donde le roban la cicla al muchacho.
> **P:** Estoy de acuerdo. ¿Por qué lo dices?
> **E1:** Porqué pues no sabemos a qué distancia está la estación de policía o a qué distancia le robaron la cicla.
> **E2**: Pero eso lo podemos definir, pues ahí dice que "tras un tiempo recorrido…" eso quiere decir que si alcanzó a recorrer distancia durante un tiempo. Y dice que la estación de policía es la más cercana, de pronto está más cerca que el tiempo que recorrió en la bicicleta ante de que se la robaran
> **E3:** Pero que sea la más cercana no quiere decir que está necesariamente cerca, porqué la estación de policía más cercana a mi casa está brutalmente lejos, pero aun así es la más cercana. Yo no creo que eso afirme que sea más cerca que el lugar donde lo robaron.
> **E4: ¿**No se supone qué la estación de policía es la más cerca a la casa? Porqué él ya se había devuelto a la casa cuando se fue a la estación ¿No?
> **E3:** Por eso, pero que sea la estación más cercana no asegura que sea cerca.

Actividad 1.3

Un ciclista sale de su casa y tras un tiempo de recorrido le roban su bicicleta por lo que debe regresar caminando a casa. Al volver a casa toda su familia ha salido; por lo que decide ir caminando a la estación de policía más cercana a poner la denuncia por el robo. Tras lograr poner la denuncia, un familiar lo recoge en carro para llevarlo a casa y poder descansar del ajetreado día.
Si cada punto en la gráfica siguiente representa uno de los segmentos recorridos. ¿Cuál es cuál? ¿Por qué?

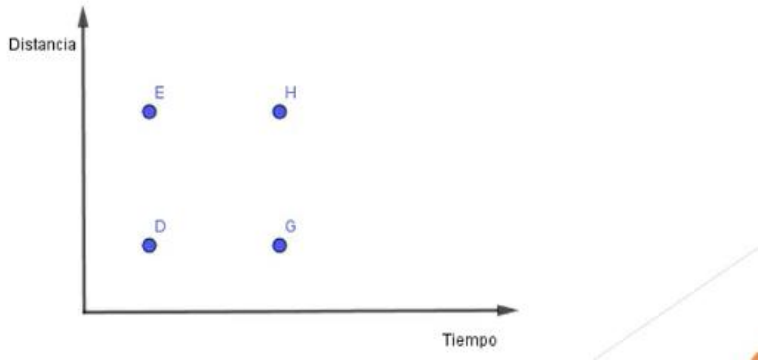


Figura 15. Actividad 1.3 como se les presentó a los estudiantes. Elaboración propia

La primera sesión de la secuencia se cerró con la actividad 1.4, en la que se invitó a los estudiantes a proponer situaciones que involucraran magnitudes dentro de un contexto hipotético o realista que fuese de alguna manera, de su interés. En este caso algunas de las propuestas fueron cercanas a los contextos de las actividades 1.1 a 1.3.

La segunda sesión de la secuencia estuvo compuesta por dos actividades principales, y se inició la sesión con una discusión relativa a la idea de cambios relacionados, y se presenta como ejemplo el área y lado de un cuadrado y cómo estos cambian. En la actividad 2.1 se involucraron dos applets de tipos T1 y T2 respectivamente, que presentaban una situación realista y una situación puramente matemática. La discusión del trabajo con estos applets estuvo orientada a responder las preguntas: ¿Qué cambia? ¿Cómo cambia? Y ¿Es posible establecer relaciones entre las magnitudes que cambian?

Con relación al applet del tanque de agua, algunos estudiantes lograron describir como el cambio del área de la base del cilindro genera un efecto en el volumen del tanque, mencionado en algunos casos en términos de la capacidad del tanque y la cantidad de agua; otros estudiantes no percibieron el *affordance* de modificar tal área de la base, se identificaron relaciones entre tiempo y altura.

Con relación al applet de figuras geométricas, se realizó una discusión respecto a cómo la forma de la figura permanece igual como un cuadrado dentro del cual hay triángulos que están cambiando, así como algunas de las relaciones posibles de congruencia entre triángulos, aunque no se logren justificar con rigurosidad.

> **E:** Yo quería decir dos cosas, es que a mí me parece que la forma de la figura, ósea los triángulos, no es que cambie mucho. Ósea la forma se mantiene, hasta que puede ¿sí? Hasta que ya está tan bajito que ya no puede ser triángulo, sino que, pues, como que desaparece. Pero, cuando vuelve a empezar la animación uno ve que la forma sigue siendo igual ¿Si me entiende?
> **P:** Okey…
> **E:** Y que pues, es un cambio que es muy limitado, ósea tiene poquitas o casi ninguna posibilidad de presentar una alteración.

También sucedió que un estudiante mencionó que utilizó las herramientas de Geogebra para explorar, dando muestra de la identificación de affordances útiles para la tarea. Exploró medidas de ángulos, medidas de bases de triángulos, de áreas de los triángulos ABG y CGD. Numéricamente exploró como la suma de las áreas de los triángulos ABG y CGD permanecen constante.

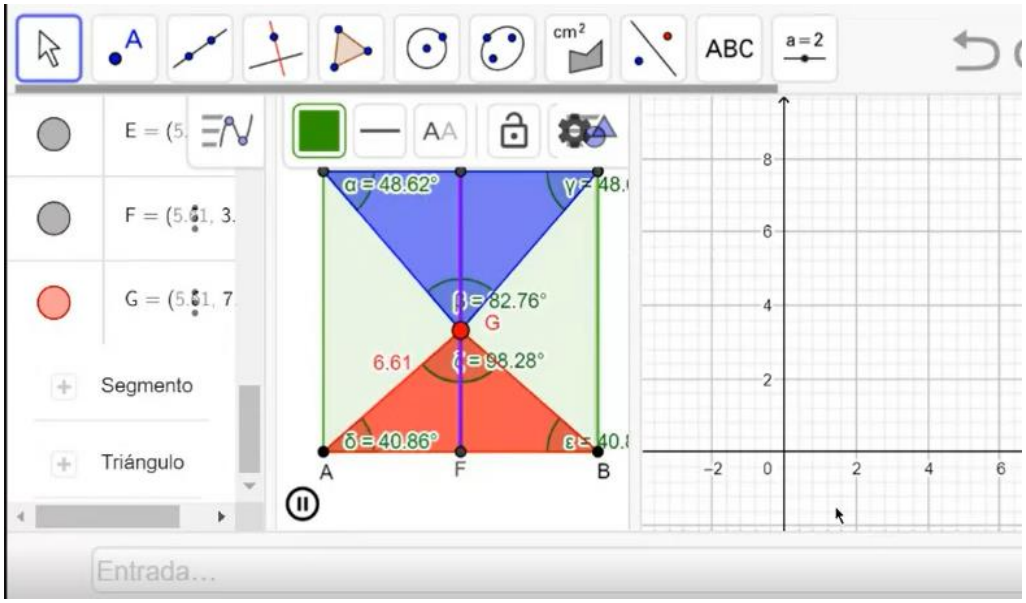


Figura 16. Exploración de un estudiante en la actividad 2.1

La actividad 2.2 fue presentada en esta sesión, sin embargo, al ser esta actividad considerada el trabajo final para efectos del desarrollo del curso, se dio un plazo extenso para la realización de esta y un conglomerado de los resultados de esta actividad serán presentados en la siguiente sección. En la presentación de la guía de la actividad, hubo pocas intervenciones, salvo preguntas relativas al formato de entrega, cantidad de integrantes por trabajo, fecha de entrega, etc. Y con ella se dio cierre a la segunda sesión.

En la sesión 3 se llevaron a cabo las actividades 3.1 y 3.2 de la secuencia. Con relación a la primera de estas se realizó una exploración libre seguida de un diligenciamiento de un formulario de Google donde se preguntaban por interpretaciones respecto a los parámetros *m* y *b* en una ecuación de la forma $y=mx+b$. Las respuestas a este formulario dieron cuenta de una dificultad en la identificación de ecuaciones que representan rectas horizontales (ver Figura 17), sin embargo, cuando la recta no es horizontal hubo una adecuada interpretación tanto de la pendiente como del intercepto con el eje vertical.

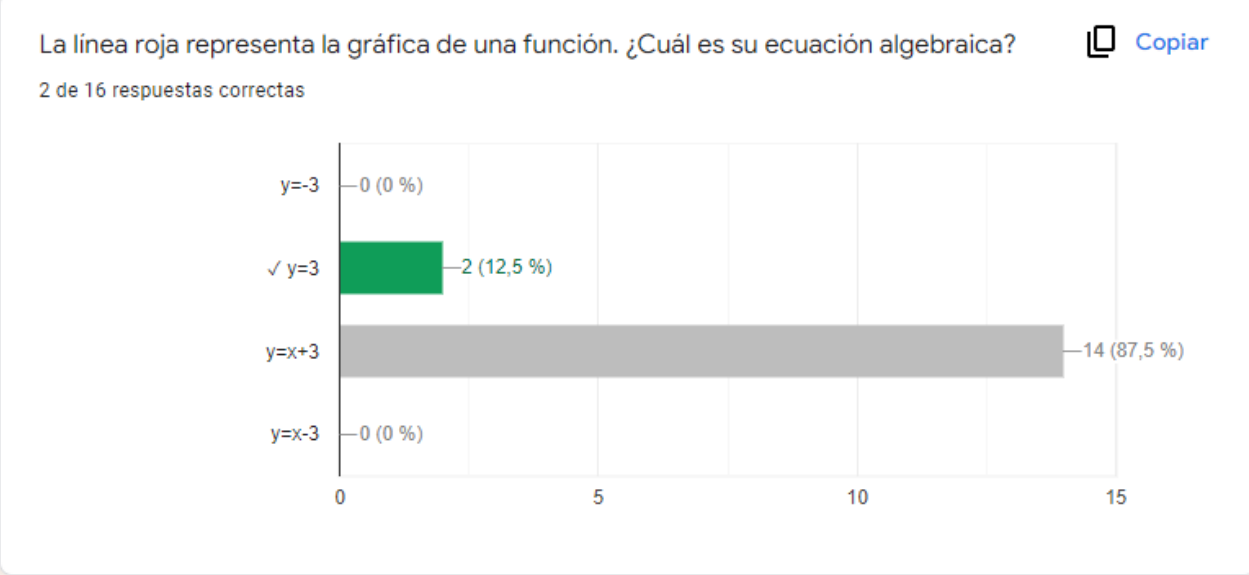


Figura 17. Resultados en actividad 3.1. Elaboración propia

Posteriormente, en la actividad 3.2 los estudiantes trabajaron de manera individual, y el profesor atendía dudas durante el desarrollo de esta. En esta actividad surgieron dudas respecto al uso de Geogebra, en particular los estudiantes realizaron preguntas sobre: Cómo poner paréntesis en la aplicación; cómo poner texto en la vista gráfica.; hacer aparecer la ecuación del gráfico en la vista gráfica; modificar la cantidad de cifras decimales que aparecen en el software.

Se menciona adicionalmente una inquietud respecto a un punto que "parece estar fuera" del ajuste, con lo que, al revisar el proceso seguido por el estudiante, se muestra un error en el proceso de toma de datos al haber ignorado el tiempo que tardó el material en derretirse en el laboratorio virtual. (ver Figura 18)

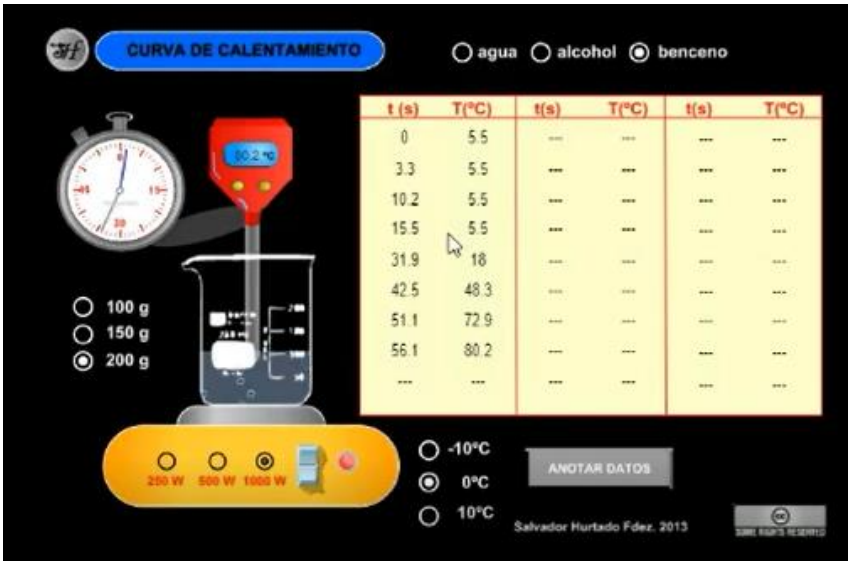


Figura 18. Toma de datos de un estudiante en actividad 3.2

Adicionalmente, la actividad 3.2 fue recapitulada en el inicio de la siguiente sesión donde se discutió el efecto de la potencia de la estufa, y cómo este efecto era reflejado en la ecuación producida por el modelo. Algunos estudiantes listaron los parámetros posibles de ser alterados en el applet (potencia de la estufa, cantidad de material a calentar y temperatura inicial). Se menciona cómo a mayor potencia el tiempo en alcanzar el punto de ebullición es menor y cómo este comportamiento se ve reflejado en la pendiente de la recta.

Con respecto a la actividad 4.1, esta fue trabajada de manera grupal, y surgieron preguntas en relación con lo que se entendía con la expresión “establecer un modelo de la situación”, y se ilustró una tendencia a resolver la actividad mediante la estrategia de prueba y error utilizando estrategias numéricas, tal cómo se muestra en el siguiente apartado transcrito.

E: Profe una pregunta
P: Dime
E: Cuando se refiere a establecer un modelo de la situación. ¿A qué se refiere? Ósea… te comento lo que hice. Ya lo hice, pero a números, ahora ¿Cómo establezco un modelo? Ya encontré la solución a la pregunta de cuánto debería disminuir la cuota para obtener el máximo de ganancia. ¿Ahora cómo establezco…?

P: Esos números que me dices que encontraste, conviértelos en puntos que puedas poner en una gráfica, por ejemplo
E: Ya okey, hacer la gráfica con las características de la situación… ¿La hago en Geogebra o qué?
P: Esa es una opción válida.

Este intercambio da muestra de la estrategia general seguida por los estudiantes en el desarrollo de esta actividad, en la que una posibilidad de desarrollo numérico opacó la búsqueda de modelos para hallar la solución.

Por último, el desarrollo de la actividad 5.1 fue precedido por dos actividades de modelación en situaciones de cambio exponencial orientadas por el profesor en la última sesión de la secuencia en las cuales se presentó una ecuación general para una función exponencial que fue usada de base para el desarrollo de la actividad. Algunos estudiantes buscaron identificar el patrón de cambio en los valores de la función con el fin de identificar la base del exponente, como se da muestra en el siguiente fragmento transcrito.

E: Profe una pregunta
P: Dime
E: Es que en el grupo encontramos un patrón digámoslo así entre los metros de luminosidad, y nos dimos cuenta de que, al dividir el número original, digamos 2600 por 3, ósea dividirlo por 3 nos daba el resultado de abajo, pero al llegar a 288,88 y dividirlo por 3, nos da 96,293 entonces no sabemos si eso afecta en algo.
P: Si, está bien, porqué realmente aquí hay una aproximación *oculta*, pero está bien, encontraron la relación que es.

La mención a las aproximaciones generó nuevamente una discusión acerca de la cantidad de cifras decimales a utilizar y el efecto que estos pueden tener en la construcción de datos para la elaboración de modelos. Algunos estudiantes se apoyaron en Geogebra, específicamente las herramientas de ajuste exponencial para la construcción de su modelo, dando lugar a ecuaciones diferentes. (ver Figura 19)

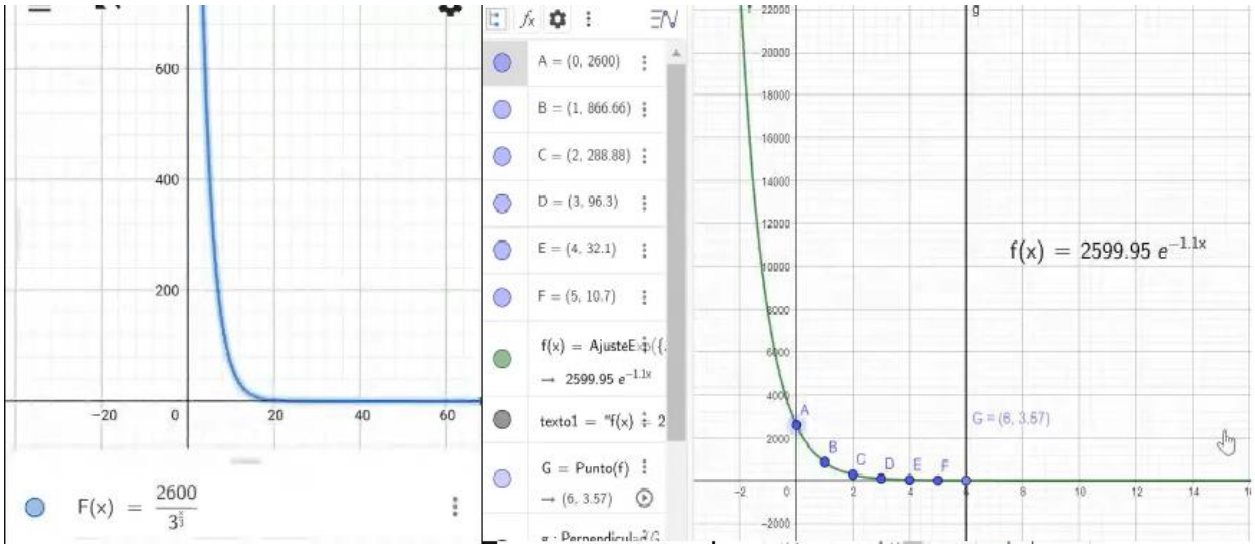


Figura 19. Soluciones de estudiantes a actividad 5.1

La sesión final dio cierre con la exploración de los efectos visuales de algunos parámetros en la función exponencial, y se dio una semana adicional de plazo para la entrega del trabajo final (Actividad 2.2). Los resultados de esta actividad se consolidan y se presentan en el siguiente apartado.

4.1.3 Sobre la formación matemática de los estudiantes de la Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle

En los párrafos siguientes se presentará un conglomerado de los resultados obtenidos en la actividad 2.2 Trabajo final, buscando mediante la exploración de las distintas situaciones modeladas, las herramientas tecnológicas involucradas y los tipos de contexto, brindar una caracterización de la formación matemática adquirida por los estudiantes que formaron parte del experimento.

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las producciones de los estudiantes, en donde se describe, para cada grupo, la situación estudiada, el tipo de contexto en que se enmarcó la actividad y las herramientas digitales utilizadas para su análisis, vale la pena mencionar cómo este trabajo fue propuesto para ser realizado de manera individual o en parejas.

	Situación	Contexto	Herramientas tecnológicas	Comentario
1	Ley de enfriamiento de Newton	Real	Geogebra	Se realiza un experimento al medir los cambios de temperatura de una taza de café utilizando un termómetro digital
2	Llenado de un cilindro	Realista	Lápiz y papel	El estudiante imagina una situación hipotética en la que se debe rescatar a una persona de un pozo, no utiliza funciones, sino aproximaciones numéricas para dar propuestas de solución, se resalta cómo los valores numéricos diseñados fueron apropiados al contexto propuesto
3	Rescate de animales domésticos	Real	Excel	Realizan un modelo de previsión a partir de estadísticas oficiales publicadas, apoyándose en el software de Excel para realizar tales predicciones
4	Equilibrio energético en deportistas	Realista	Geogebra, Excel	Se realiza un estudio acerca de los efectos del consumo de distintas cantidades de carbohidratos, los datos son construidos a partir de valores de referencia proporcionados en bibliografía especializada.
5	Accidentes ofídicos en Colombia	Real	Excel	Se utilizaron estadísticas reales de la cantidad de accidentes relacionados con serpientes, y se desarrolló un modelo que buscó establecer una relación entre la temperatura promedio y la cantidad de accidentes, dando una posible justificación a tal relación.
6	Admisiones en la Universidad del Valle	Real	Excel	Se realiza un modelo comparativo a partir de datos publicados por la Universidad del Valle referentes a la cantidad de aspirantes a ciertas carreras durante los semestres previos a la pandemia del Covid-19 y durante la misma.
7	Desplazamiento forzado en San Andrés de Tumaco	Real	Excel	Se realiza un modelo predictivo de la cantidad de desplazados a partir de la información publicada en bibliografía especializada.

8	Tráfico ilegal de fauna en Colombia	Real	Excel	Se presentan modelos descriptivos a partir de gráficos en Excel, construidos utilizando estadísticos reales. No se construye un modelo utilizando funciones.
9	Casos reportados de Ébola en la república del Congo	Real	Geogebra	Se construye un modelo predictivo a partir de estadísticas oficiales, y se utiliza para contrastar en relación con los valores reales, mostrando las limitaciones del modelo elegido y posibilidades de mejora
10	Mercado inmobiliario en Colombia	Real	Geogebra, Excel	Se presentan modelos descriptivos a partir de gráficos en Excel, construidos utilizando estadísticos reales. No se construye un modelo utilizando funciones.
11	Covid-19 en el departamento de Nariño, Colombia	Real	Excel	Se construye un modelo predictivo a partir de estadísticas oficiales, y se utiliza para contrastar en relación con los valores reales, mostrando las limitaciones del modelo elegido y posibilidades de mejora
12	Potencia de un motor de carro de Formula 1	Realista	Geogebra, Excel	Se construyen modelos descriptivos a partir de estadísticas publicadas en medios especializados, se establecen relaciones funcionales entre distintos tipos de aceleración que se toman en cuenta en el diseño de tales motores.
13	Gasto calórico en jugadores de futbol	Realista	Excel, aplicación online de medición de calorías	Se presentan modelos descriptivos a partir de gráficos en Excel, construidos utilizando valores aproximados a partir de una aplicación en línea. No se construye un modelo utilizando funciones.
14	Mortalidad de enfermedades cardiovasculares	Real	Geogebra, Numbers	A partir de datos oficiales, se construyen dos modelos que relacionan la edad y los fallecimientos por enfermedades cardiovasculares, uno para hombres y otro para mujeres.
15	Ritmo cardiaco en una prueba de rendimiento	Real	Geogebra	Se construyen dos modelos de la frecuencia a partir de datos experimentales, uno para un deportista activo, y otro para un deportista que viene

	denominada “test de Cooper”			de un proceso de rehabilitación para realizar comparativos entre ambos.
16	Casos reportados de Covid-19 en el Valle del Cauca	Real	Excel	Se construye un modelo predictivo a partir de estadísticas oficiales, y se utiliza para contrastar en relación con los valores reales, mostrando las limitaciones del modelo elegido y posibilidades de mejora
17	Péndulo Simple	Real	PASCO Capstone	Apoyados en el software Capstone para el análisis de videos del experimento, se construyen datos a partir de los cuales establecer un modelo funcional de la amplitud de la oscilación en función del tiempo
18	Cambio climático	Real	Excel	Se presentan modelos descriptivos a partir de gráficos en Excel, construidos utilizando estadísticas reales. No se construye un modelo utilizando funciones.
19	Desnutrición en la Guajira, Colombia	Real	Excel	Se construyen modelos descriptivos a partir de estadísticas publicadas en medios especializados, buscando dar cuenta de tendencias en el comportamiento de los datos.
20	Crecimiento Poblacional Caracol Africano en Cali, Colombia	Realista	Geogebra, Excel	A partir de estadísticas oficiales, se construyen datos sobre la variabilidad de la población de caracoles a lo largo del tiempo, dando lugar a un modelo predictivo.
21	Sistema de control del pH de los alimentos	Real	Geogebra, Excel	Se construyen modelos a partir de la construcción de datos experimentales, estudiando la variación en el pH de una sustancia base al ir añadiéndole volúmenes de dos sustancias distintas. Se establecen relaciones funcionales entre el pH y el volumen

Tabla 3. Consolidado respuestas estudiantes a actividad 2.2

En términos de la variedad de softwares utilizados en el desarrollo de estos trabajos, se observó una tendencia a la utilización de Microsoft Excel, esto en contraste a las exploraciones

en Geogebra promovidas en las sesiones de la secuencia, esto se observa pues en 10 trabajos se apoyaron únicamente con Excel, 4 trabajos utilizaron únicamente Geogebra, en 5 trabajos utilizaron tanto Excel como Geogebra; es de resaltar como adicional a estas dos aplicaciones principales, algunos grupos de trabajo utilizaron aplicaciones distintas a las anteriores bien fuese de manera complementaria a Excel o Geogebra, o de manera exclusiva, algunas de estas aplicaciones fueron Numbers[8], PASCO Capstone[9] y una aplicación web de cálculo de calorías no especificada[10]. Un único trabajo se apoyó en la aplicación PASCO Capstone para hacer todo el proceso de análisis de videos de su experimento con los cuales construir datos; tan solo un único trabajo no utilizó ningún software para apoyarse.

Por otro lado, la gran mayoría de los trabajos fueron realizados en contextos reales, bien fuese mediante la realización directa de experimentos a partir de los cuales construir los datos, o a partir de datos publicados en fuentes especializadas, encontrándose en 16 de los 21 trabajos presentados, contextos de este tipo; los restantes 5 trabajos fueron elaborados en contextos realistas, en los cuales se destaca el cuidado en la selección de los valores numéricos de tal forma que estos fuesen cercanos a los valores que serían reales.

En algunos de estos trabajos se utilizó bibliografía especializada para dar soporte a los valores numéricos de los datos que se proponían para el estudio de la situación, como se observa en la Figura 20. La tendencia al uso de contextos reales o de tipo realista teniendo especial atención a la cercanía de los valores numéricos utilizados da muestra del interés que poseen los estudiantes de una licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental a este tipo de

[8] https://www.apple.com/co/numbers/
[9] https://www.pasco.com/products/software/capstone
[10] Trabajo número 13 en Tabla 3. Consolidado respuestas estudiantes a actividad 2.2

contextos, y se configuró como una oportunidad para que los estudiantes identificaran maneras en que las matemáticas podrían servirles como herramientas para la descripción y/o predicción de fenómenos de distintas naturalezas.

Variables de cambio	***Deportista 1***	***Deportista 2***
Gasto Calórico en (30min)	564Kcal	435Kcal
Ingesta de Carbohidratos y su aporte energético por cada (g)	700g (4kcal/g)	300g (4kcal/g)
Ingesta de Proteínas y su aporte energético por cada (g)	126g (4kcal/g)	32g(4kcal/g)
Ingesta de Lípidos y su aporte energético por cada (g)	136g (9kcal/g)	38g(9kcal/g)

Tabla 2. Información de las variables de cambio

Calibración del Modelo

Los datos expuestos en la *tabla 2* se obtuvieron a partir de las fórmulas aportadas por el libro *''Fisiología del Ejercicio''* (McArdle et al.,2015) *y* el articulo *''Nutrición Para el Entrenamiento y la Competición''* (Olivos et al., 2012). Los valores del gasto calórico en 30 minutos de actividad, son valores simulados y modificados de la información aportada por *''Exercise & Calories Burned per Hour''* (Universidad of Kentucky) y la página de noticias BBC (British Broadcasting Corporation) News Mundo que publicó el articulo *'' Cuál es el estilo de natación con el que quemas más calorías''*.

Figura 20. Justificación construcción datos trabajo contexto realista.

En 14 de los trabajos presentados por los estudiantes como desarrollo a la actividad 2.2 se construyeron modelos que relacionaban de manera explícita distintas magnitudes, y los estudiantes buscaban con estas relaciones establecer funciones que permitieran realizar descripciones y/o predicciones sobre el comportamiento de la situación abordada, siendo las más habituales relaciones entre tiempo y cantidad de contagiados de Covid-19 o casos de Ébola (ver Figura 21)

Figura 21. Ejemplo de función Infección vs Tiempo en el trabajo de un grupo de estudiantes.

Por otro lado, 6 de los trabajos presentados establecieron modelos que realizaban descripciones de los fenómenos estudiados y se apoyaron con representaciones gráficas habitualmente estadísticas, como gráficos de barras o diagramas circulares, en estos casos los estudiantes no propusieron posibles relaciones entre magnitudes y, por tanto, tampoco funciones que pudiesen cuantificar tales relaciones. Sin embargo, es de resaltar cómo a pesar de no utilizar funciones, en este conjunto de trabajos se utilizan herramientas proporcionadas por las matemáticas para la elaboración de análisis relativos a las temáticas estudiadas.

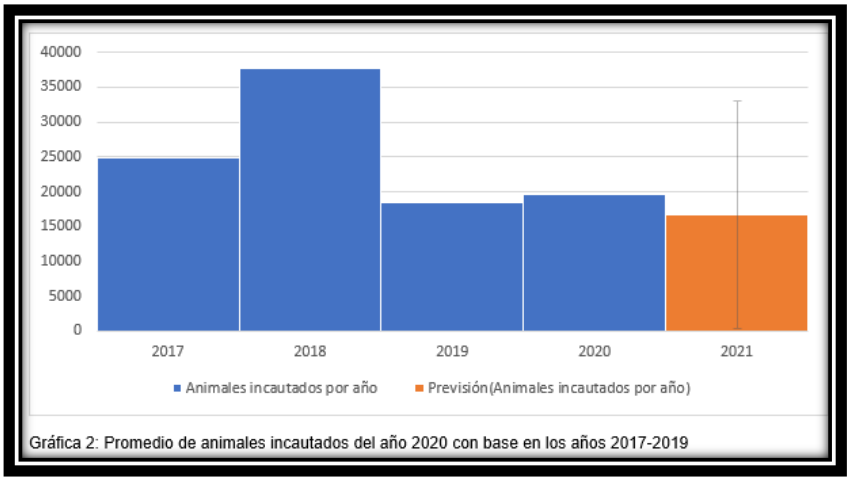


Figura 22. Ejemplo de gráfico de barras, análisis de tráfico ilegal de fauna en Colombia

Hubo un único trabajo que no cumplió ni siquiera aproximadamente con los objetivos propuestos de la actividad, puesto que no utilizó estableció ningún tipo de modelo, la situación

que propuso fue de tipo hipotético y con poco cuidado al manejo de valores numéricos, y tampoco se apoyó en ningún software.

Estos resultados dan muestra de cómo un 66% de los grupos efectivamente utilizaron funciones de distintos tipos (lineales, afines, cuadráticas, exponenciales) para modelar las relaciones entre las magnitudes presentes en sus situaciones de interés y las formas en que tales magnitudes cambiaban, por otro lado el 29% de los estudiantes propusieron modelos que les permitieran describir la situación estudiada sin usar funciones, más si utilizando distintas representaciones gráficas y softwares que les brindarán información relevante.

De esta forma, un alto porcentaje de los estudiantes reconoció las funciones como herramientas útiles para estudiar el cambio y modelar fenómenos de distintas naturalezas, así mismo en discusiones llevadas en clase se abordaron los conceptos que fundamentan las funciones tales como dominio y rango, elementos que serán de utilidad en un estudio más detallado del cambio como el que se propone en la introducción a las derivadas.

4.1.4 Sobre los modelos conceptuales y las estrategias utilizadas que orientaron el diseño de la secuencia

A nivel de estrategias que orientaron el diseño, al tomar en consideración las categorías construidas para los affordances a partir de la propuesta de Brown, Stillman y Herbert (2004), se buscó que las actividades propuestas en la secuencia tuviesen en consideración distintos niveles de aproximación a las affordances de las herramientas utilizadas, partiendo de unas presentaciones gráficas estáticas (de tipo T1) a partir de las cuales hacer inferencias, hasta llegar a un ejercicio abierto en el que el uso de tecnologías digitales fuese incluso opcional, en este sentido los estudiantes apropiaron el uso de geogebra como una herramienta de tipo T3 con la

cual apoyarse en el desarrollo de las múltiples actividades de la secuencia, y, específicamente, en la actividad 2.2 trabajo final.

Adicional al trabajo con las tecnologías digitales, se buscó conjugar que todas las actividades estuviesen propuestas en alguno de los tres contextos propuestos por Barrera y Santos (2002) dando prelación a los contextos realistas. Esto puede observarse en como tan solo dos actividades (2.1 y 3.1) involucraron contextos puramente matemáticos. La actividad 2.2 que compone el trabajo final permitió una aproximación libre, dando lugar a que los estudiantes pudiesen elegir qué tipo de contextos trabajar, en este sentido también se pudo observar una tendencia a los contextos reales y realistas, pues muchos de los contextos elegidos por los estudiantes fueron tomados directamente de la vida real, mediante la realización de experimentos propios o la toma de datos publicados por otros autores (ver apartado 4.1.3).

Cómo elemento final a tomar en consideración en las estrategias de diseño, se encuentran las propuestas de Reit y Ludwig (2018) relativas a subcategorías o criterios para la propuesta de tareas de modelación matemática, las cuales mencionan entre otras, lo realista del contexto, así como el uso de valores numéricos cercanos a aquellos que se encontrarían en una experimentación real; con relación a estos criterios, las distintas actividades de la secuencia los tuvieron en cuenta en mayor o menor medida de acuerdo a como se observa en la Tabla 1.

Los elementos arriba mencionados fueron conjugados en distintos niveles, en una estrategia de diseño general que atendiera además al contenido matemático que se quería abordar en cada actividad, de tal manera que los estudiantes se enfrentaran a la elaboración de modelos de creciente complejidad a lo largo del desarrollo las actividades que componían la secuencia, en los cuales se involucraran contextos puramente matemáticos, realistas o reales, como puntos de

partida para que, con el apoyo de las tecnologías digitales permitieran un refinamiento de las intuiciones iniciales de los estudiantes. En este punto vale la pena resaltar nuevamente cómo la actividad 4.1, relativa a cambios cuadráticos fue solucionada por los estudiantes principalmente mediante el recurso a estrategias numéricas, sin hacer uso de softwares de apoyo diferentes a una calculadora tradicional. Esta actividad llamó la atención a cómo la posibilidad de una resolución numérica "sencilla" opacó la intención del diseño de la actividad.

La ejecución de esta estrategia de diseñó vislumbró un modelo conceptual subyacente a la misma, en el cual el trabajo con la elaboración de modelos, que pasaba por la identificación de variables involucradas en los fenómenos, la dependencia e independencia de estas variables y las relaciones entre ellas, así como formas de cuantificar tales relaciones, al ser fundamentado en contextos realistas cercanos a los estudiantes, y apoyados en el uso de herramientas digitales, brindaría a los estudiantes, elementos para el aprendizaje de los conceptos relativos a las funciones con las que se trabajó.

4.1.5 Sobre el diseño de la secuencia de enseñanza

La discusión de las estrategias, estructuras y modelos conceptuales presentados en el apartado anterior, dieron luces en el diseño de la secuencia de enseñanza que fue presentada en detalle en el apartado 3.4 la cual estuvo compuesta por un total de diez actividades distribuidas en cinco sesiones llevadas a cabo una a la semana (ver Tabla 4), se contó con una semana adicional para el pulimiento y entrega de la actividad 2.2 que se configuró como el trabajo final para la asignatura. La aplicación de la secuencia se dio entre los meses de septiembre y octubre de 2021.

Sesión	Ideas generales que orientaban la sesión	Actividades que componían la sesión
Sesión 1	Noción de cambio, análisis de situaciones puntuales	A1.1
		A1.2
		A1.3
		A1.4
Sesión 2	Razón de cambio, modelación de fenómenos de la naturaleza	A2.1
		A2.2
Sesión 3	Razón de cambio constante, modelación de fenómenos físicos	A3.1
		A3.2
Sesión 4	Razón de cambio variable, cuadrática, modelación de una situación financiera	A4.1
Sesión 5	Razón de cambio variable, exponencial, modelación de una situación biológica	A5.1

Tabla 4. Distribución actividades por sesión en la secuencia de enseñanza

Se logró elaborar una propuesta que tomara una perspectiva de la covariación de magnitudes, y las razones de cambio para caracterizar las funciones matemáticas y cómo estas pueden ser utilizadas para modelar fenómenos físicos, biológicos, económicos o puramente matemáticos, con lo que se buscó ampliar el panorama de los estudiantes respecto a maneras en que las matemáticas pueden ser utilizadas para estudiar los fenómenos que son de su interés como estudiantes de una licenciatura en ciencias naturales. Tal ampliación pudo observarse en la variedad de temáticas abordadas en la actividad 2.2 (trabajo final) mostradas en la Tabla 3, donde se trabajaron temáticas desde la población de bacterias, poblaciones de animales bajo ciertas condiciones, la velocidad en el lanzamiento de cohetes, entre otras.

Los apartados anteriores dan cuenta del consolidado de los resultados obtenidos en el proceso de ejecución del experimento de enseñanza, así como de las principales vicisitudes sorteadas durante el mismo, en los párrafos siguientes se presentará el contraste de estos

resultados con los elementos teóricos que orientaron la investigación, dando lugar a la discusión de tales resultados y que orientan la escritura de las conclusiones que dan cierre a la investigación.

4.2 Análisis y discusión

En los párrafos siguientes se presenta un consolidado de las discusiones adelantadas por el equipo investigador a raíz de los resultados del experimento de enseñanza presentados en el apartado Resultados y un análisis de estos al ser contrastados con los elementos teóricos que orientaron el diseño de la secuencia.

La presentación de estos análisis ha sido segmentada de acuerdo con tres grandes categorías de discusión. Primero se presenta una discusión sobre la noción de modelación presente en el diseño de las tareas y la manera en que esta noción se hizo presente en las distintas elaboraciones de los estudiantes. A continuación, se presenta el análisis de los *affordances* puestos en juego en las actividades que componían la secuencia y las respuestas de los estudiantes a estas actividades, buscando dar luces respecto al desarrollo en la capacidad de los estudiantes de percibir y aprovechar los distintos affordances que permite un mismo software. Se cierra el apartado presentando una discusión relativa a la relación entre los affordances trabajados, los contextos en que se enmarcaron las tareas de modelación y las elaboraciones de los estudiantes, donde se bosqueja la manera colaborativa en que tales elementos teóricos apoyaron la formación de los estudiantes.

4.2.1 Sobre la noción de modelación y el diseño de tareas de modelación

Como punto de partida para la discusión referente al papel de la modelación matemática en el experimento de enseñanza, se retoman las dos acepciones que fueron presentadas en el

apartado 2.2. Brown e Ikeda (2018) expresan que “la modelación ocurre cuando profesores, estudiantes, matemáticos y otros, intentan describir algún aspecto del mundo real en términos matemáticos con el fin de mejorar la comprensión sobre algo, tomar o recomendar acciones” (pág. 2) y por su parte, Stillman (2019) extendía una definición previa al afirmar que “la modelación es más que aplicar matemáticas, es aplicar las matemáticas necesarias con la intención de mejorar la comprensión respecto a la situación o problema del mundo real al que un estudiante se ve enfrentado” (pág. 2).

Ambas definiciones expresan una noción de modelación en la cual se entiende como un proceso, en el que los elementos matemáticos a ser empleados no son preestablecidos, y, por el contrario, una buena parte del proceso que se debe surtir ante una situación problema es el de establecer cuáles son aquellas “matemáticas necesarias” que menciona Stillman (2019), es decir, qué objetos matemáticos son los más apropiados para estudiar el fenómeno a abordar.

Tal discusión da lugar a la puesta en consideración de quizá múltiples objetos matemáticos de manera simultánea, comparando sus características y sus posibilidades de representación de los distintos elementos, variables y relaciones presentes en los fenómenos a abordar; por esta razón, las distintas actividades propuestas en la secuencia buscaron hacer referencia a situaciones abiertas (en múltiples contextos realistas, reales y en casos reducidos, puramente matemáticos) de tal manera que se propiciara en los grupos de trabajo de los estudiantes, la discusión acerca de los objetos matemáticos a utilizar buscando así, la apropiación por parte de los estudiantes de las propiedades y características de tales objetos matemáticos..

En este sentido, los resultados evidenciados en los trabajos de los estudiantes dan cuenta de la aparición de tales discusiones, especialmente ilustradas en la variedad de modelos presentados por los estudiantes en el desarrollo de la actividad 2.2 Trabajo Final; como fue mencionado en el apartado 4.1.3, el 66% de los grupos utilizaron de manera general, modelos a

partir del establecimiento de relaciones entre magnitudes expresadas con funciones, objeto matemático subyacente en la secuencia, utilizando diversas representaciones de estas, entre otras, tabulares, cartesianas y algebraicas. En estos casos, la relación más común fue la de utilizar el tiempo como variable independiente, para el estudio de diversas posibles variables dependientes tales como: contagios COVID, contagios Ébola, periodo de un péndulo, gastos calóricos, etc.

Por su parte, el 29% de los estudiantes construyeron modelos en los cuales las relaciones funcionales entre magnitudes no fueron la base matemática de su estudio; en estos casos, las discusiones de los grupos de estudiantes parecen haberlos llevado a decidir la utilización de otros objetos matemáticos distintos a las funciones para estudiar sus fenómenos de interés, sin embargo, vale la pena mencionar como estos trabajos también constituyen una aproximación a la noción de modelación antes descrita, pues a partir de un contexto específicamente elegido por ellos, buscaron estudiarlo utilizando las herramientas matemáticas que consideraron más apropiadas y que lograron construir modelos que denominamos *descriptivos*, pues en su mayoría generaban descripciones de fenómenos y sus distintos elementos, expresando en menor nivel las relaciones entre tales elementos.

Las distintas elaboraciones de los estudiantes, que dan cuenta de distintas y progresivas aproximaciones a la noción de modelación matemática, permitieron vislumbrar maneras en que las matemáticas podían servirles de apoyo para el estudio de fenómenos naturales, sociales, económicos, entre otros que fuesen de su interés particular; con lo que la inclusión de una perspectiva de modelación en la formación matemática orientada a estudiantes para profesor de ciencias naturales mostró ser una característica importante para la motivación y el éxito académico de los estudiantes.

4.2.2 Sobre los affordances de las herramientas digitales

Se inicia la discusión de los resultados relativos a los affordances de las herramientas digitales involucrados en el diseño y aplicación de la secuencia de enseñanza, con un comentario general respecto a la modalidad en la que el curso fue orientado. La asignatura Formación Matemática I, y específicamente el trabajo relativo a la secuencia, se desarrolló en el segundo semestre del año 2021, aún enmarcado fuertemente por las restricciones al contacto físico y las interacciones sociales en persona debida a la pandemia declarada por la OMS causada por el virus del COVID-19[11] (OMS, 2020). Por estas razones la asignatura fue dictada en una modalidad asistida por tecnología.

Por tal motivo, todas las sesiones de clase de la aplicación de la secuencia de enseñanza fueron realizadas a través de la plataforma Meet de Google; la interacción entre estudiantes y profesor fue totalmente virtual, a través de correos electrónicos, plataforma de campus virtual de la Universidad del Valle y reuniones extra-clase, también por la plataforma Meet. Todas estas condiciones tuvieron un impacto significativo en el desarrollo de la asignatura, por mencionar algunas, la posibilidad de grabar todas las sesiones de clase, permitiendo un registro audiovisual y escrito de las interacciones de los estudiantes; la posibilidad de guardar las notas "del tablero" que el profesor generaba en el transcurso de cada sesión de clase, entre otras. Un análisis de la manera en que estas condiciones afectaron las decisiones del profesor y sus formas de interacción con los estudiantes excede ampliamente los objetivos de la investigación, razón por la cual se

[11] https://www.who.int/es/director-general/speeches/detail/who-director-general-s-opening-remarks-at-the-media-briefing-on-covid-19---11-march-2020

procede a enfatizar la perspectiva de los estudiantes, y cómo las herramientas digitales propuestos impactaron en su actividad matemática.

Con relación a las herramientas tecnológicas puestas en juego como variables en el diseño, se construyeron tres categorías teóricas y de diseño que hicieron referencia al nivel de limitación en las posibilidades de exploración de un applet o software utilizado, cómo se explicó en el apartado 3.4 estas categorías fueron denominadas T1, T2 y T3. En la categoría T1, las posibilidades de exploración se encontraban especialmente limitadas a aquellos affordances que se veían directamente involucrados en la actividad; de tal forma que, si un estudiante lograba percibir algún affordance, este iba a ser relevante para el desarrollo de la actividad.

Con respecto a la categoría T2, denominada *affordances sugeridos*, las posibilidades de exploración del respectivo applet o herramienta digital se encontraban orientadas bien fuese por las instrucciones en la actividad, o una interfaz de usuario adaptada de tal forma que mostrase algunas de las herramientas disponibles, dejando ocultas otras herramientas que podrían, o no, ser útiles para la resolución de algunas actividades. En este sentido, las actividades apoyadas con applets T2 buscaban dar el espacio para la identificación de affordances adicionales a las estrictamente necesarias para desarrollar las actividades, de tal manera que existiese la posibilidad de dar respuestas con un mayor nivel de estructuración.

Un ejemplo de tal potencial se mostró en la Figura 16. Exploración de un estudiante en la actividad 2.1, en la que un estudiante al percibir otros affordances del applet de Geogebra, pudo realizar exploraciones en las cuales comparar múltiples elementos presentes en la figura, tales como las medidas de las áreas, ángulos y lados de distintos triángulos que podían ser identificados en la construcción geométrica; resultados como el mostrado en la Figura 23 dan

cuenta de la apropiación por parte de los estudiantes del manejo de los recursos digitales y su uso como instrumento en la resolución de un problema propuesto.

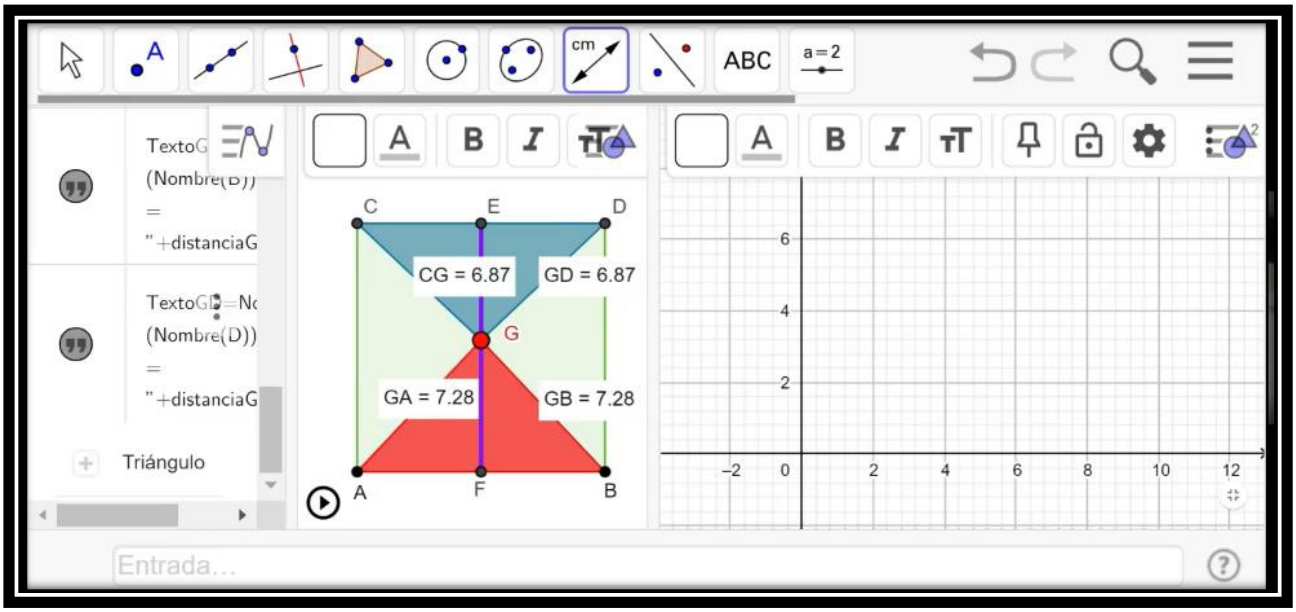


Figura 23. Exploración en applet de tipo T2, actividad 2.1

Por último, los recursos de tipo T3 presentaron un desafío especifico pues al no presentar ningún tipo de restricción, recaía en los estudiantes la elección incluso del recurso digital a utilizar y la manera en que este sería utilizado para dar respuesta a las actividades propuestas. En las actividades 3.2 y 5.1, la estrategia general que surgió entre los estudiantes fue el de utilizar el software de Geogebra para representar los datos que se obtenían, y a partir de allí utilizar la herramienta Ajuste (lineal, o exponencial) para hacer aparecer una función que describiera aproximadamente el comportamiento de las variables involucradas.

Se resalta lo ocurrido en la actividad 4.1, la cual categorizamos, en relación con los recursos tecnológicos, como una actividad de tipo T3, en la cual, los estudiantes dieron respuesta a la actividad en su mayoría sin hacer uso de recurso digital alguno, lo cual al ser una actividad propuesta en la parte final de la secuencia se esperaba que los estudiantes mostrasen una mayor

apropiación del uso de las herramientas digitales para apoyarse en la resolución de los problemas, sin embargo, recurrir únicamente a una resolución hecha a lápiz y papel, mediante el ensayo y error con los valores numéricos, da luces respecto a las características que puede tener una actividad que busque generar en los estudiantes la necesidad de recurrir a herramientas digitales para el desarrollo de estas.

Lo enunciado en los párrafos anteriores, da cuenta parcial de la manera en que las herramientas digitales influenciaron la actividad matemática de los estudiantes al enfrentarse a las distintas actividades que componían la secuencia, ilustrando cómo en algunos casos los estudiantes se limitaban a la utilización únicamente de las herramientas que habrían sido mostradas por el profesor, o, en otros casos, al haber una mayor apropiación de la herramienta digital, se identificaba la posibilidad de aprovechar affordances adicionales, que pudiesen profundizar la exploración realizada de los fenómenos estudiados.

Sin embargo, la posibilidad de utilización de diversos affordances ofrecidos por las herramientas digitales no fue el único impacto observado en la actividad matemática de los estudiantes; en el apartado siguiente se presenta la discusión relativa a la manera en que las herramientas digitales propuestas complementaron la perspectiva en modelación puesta en juego y su apropiación por parte de los estudiantes.

4.2.3 Sobre la complementariedad de los elementos teóricos en el transcurso de la secuencia de enseñanza

El análisis de las maneras en que los affordances de los recursos digitales impactaron la actividad matemática de los estudiantes, transcurrió también por tomar en consideración la concepción de modelación subyacente al diseño de las actividades que componían la secuencia,

así como los contextos en los que estas fueron propuestas. Por esta razón, en los párrafos siguientes se presenta el análisis realizado al impacto que los elementos teóricos operativizados en criterios de diseño tuvieron los unos con respecto a los otros.

En la concepción que orientó el diseño, se pretendía que las herramientas digitales se configuraran como apoyos para los procesos de modelación de los estudiantes, de tal forma que estos fueran apropiándose gradualmente de las herramientas, hasta lograr en las actividades posteriores, particularmente la actividad 2.2 trabajo final, ser capaces de recurrir al uso de herramientas digitales que consideraran, en sus discusiones grupales, necesarias y suficientes para construir los modelos de los fenómenos que estaban abordando.

Esta intención de diseño se observa en cómo las actividades de la secuencia tienden a reducir las limitaciones en el uso de las herramientas digitales, pasando de actividades con herramientas digitales T1 hacía actividades con herramientas digitales T3, esto a la vez que la modelación requerida en cada actividad subsecuente iba reduciendo los parámetros predeterminados, es decir, buscando presentar preguntas abiertas que no preconfiguraran un camino o estrategia hacía la solución. En este sentido, los resultados dan cuenta de cómo las herramientas digitales fueron puestas en coordinación con los criterios de modelación en las tareas generando oportunidades de discusión en los estudiantes que desembocaran en una actividad matemática mediada por software como Geogebra o Excel.

Siguiendo la propuesta de Reit y Ludgwig (2018) respecto a la autenticidad de los contextos a involucrar en el diseño de actividades, en la secuencia se utilizaron únicamente dos herramientas digitales en las que la situación a estudiar fue planteada en un contexto puramente matemático (actividades 2.1b y 3.1), por su parte, la vasta mayoría de las actividades fueron

ubicadas en contextos realistas; entre estas, las actividades de la sesión 1 de la secuencia fueron diseñadas de tal forma que no fuesen utilizados valores numéricos para establecer relaciones o comparaciones, pues la intención de esta primera sesión fue la de realizar un acercamiento inicial a la noción de cambio a nivel cualitativo. Las actuaciones de los estudiantes en esta primera sesión dan cuenta de cómo la ubicación en contextos realistas permitió la comprensión de las actividades y el desarrollo de estas como se ilustró en el apartado 4.1.2.

Por su parte, en las actividades que, si involucraron el trabajo con valores numéricos, el diseño tuvo en cuenta también la recomendación de Reit y Ludgwig (2018) de utilizar valores numéricos *realistas*, de tal forma que todo valor numérico presentado a los estudiantes en una actividad fuese cercano al valor "real" que se obtendría en una medición o experimentación directa de los fenómenos. De esta manera, los criterios teóricos de la modelación matemática fueron puestos en concordancia con los contextos en que eran enmarcadas las actividades propuestas.

Con excepción de la actividad *4.1* de la secuencia, en la cual los estudiantes en su mayoría no se apoyaron en las herramientas digitales que habían sido privilegiadas durante el desarrollo de la secuencia, optando por una solución numérica de la misma; las respuestas de los estudiantes a las actividades, bosquejadas en el apartado 4.1.2 dan muestra del papel complementario de las herramientas digitales en el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, específicamente en sus procesos de construcción de modelación.

Los resultados dan cuenta de cómo los estudiantes apropiaron el uso de los valores matemáticos realistas, cómo se puede dar cuenta en la actividad 2.2 trabajo final, en la cual aquellos estudiantes que trabajaron en contextos realistas en muchos casos "construyeron" sus

datos a partir de artículos, libros, o fuentes de información de tal forma que sus datos numéricos fuesen cercanos a aquellos de la realidad (ver, por ejemplo Figura 20).

A manera de síntesis, los elementos teóricos relativos a la concepción de modelación presente en las tareas, así como el recurso a herramientas digitales fueron puestos en concordancia, y su conjugación mostró ser un valioso aporte para la formación de los estudiantes, pues los resultados dan cuenta de cómo la apropiación de las herramientas digitales dio lugar a procesos de modelación que permitieran el estudio de los distintos fenómenos como se ilustró en el apartado 4.1.3. Así mismo, los contextos en que se enmarcaron las actividades mostraron generar interés en los estudiantes, sin embargo, no pareció haber un efecto notable entre los contextos utilizados y el recurso a distintas herramientas digitales, en este sentido la relación entre estos dos elementos no parece ser tan significativa.

Los resultados arriba mostrados y la discusión precedente configuraron el cierre del experimento de enseñanza con el cual se buscó dar respuesta a los objetivos planteados en el trabajo de investigación. En los apartados 4.1.1 a 4.1.3 de los análisis locales y la formación matemática de los estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales y educación ambiental se presentó un conglomerado de resultados que dan respuesta parcial al objetivo específico 1. En el apartado 4.1.2 se describieron las estrategias, estructuras y modelos conceptuales de tal forma que se dio respuesta parcial al objetivo específico 2, y, por último, los apartados 3.4 y 4.1.5 presentan la secuencia de enseñanza diseñada y aplicada, de tal forma que se da respuesta parcial al objetivo específico 3. El apartado 4.2 de la discusión de los resultados complementa los apartados descritos en la evaluación de la consecución de los objetivos.

Capítulo V: Conclusiones y recomendaciones

El desarrollo del presente trabajo dio lugar a una serie de resultados presentados y discutidos en el capítulo IV, los cuales desde la mirada de quienes estuvieron involucrados en la investigación, aportan de manera significativa a la enseñanza de las funciones a través de la modelación matemática, particularmente dirigida a estudiantes para profesor de ciencias naturales, al inicio de su formación universitaria, al presentar una propuesta de caracterización de las funciones desde las relaciones de variación y covariación de magnitudes involucradas en fenómenos de las distintas ciencias.

A continuación, se presentan las principales conclusiones derivadas de la investigación, divididas a partir de cada uno de los objetivos específicos planteados, recogiendo la forma en que se les dio cumplimiento, adicional a comentarios a manera de cierre sobre cada uno de ellos. De esta manera se realiza una presentación que muestra la forma en que se dio cumplimiento al objetivo general del trabajo. Se da cierre al capítulo presentando algunas líneas de indagación que quedan abiertas a futuros trabajos de investigación.

5.1 Respecto al objetivo específico 1

El estudio del cambio, en particular su cuantificación, es un elemento fundamental en el estudio de las ciencias naturales (Garcia, 2002, citado en Rendon, 2009), en este sentido, las funciones son objetos matemáticos que vinculan magnitudes mostrando entre ellas relaciones de dependencia, covariación entre otras, por tanto, su estudio es privilegiado en los cursos de matemáticas que se ofertan a estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales.

La propuesta de formación matemática para estos estudiantes, como fue entendida en este trabajo, se expresó en una aproximación sistemática al estudio de los cambios y, particularmente,

a la razón de cambio en fenómenos de las ciencias físicas, biológicas, e incluso económicas, de tal forma que esta aproximación diera lugar a la caracterización de algunos tipos específicos de funciones que son de especial interés para un posterior abordaje en el estudio de los cambios instantáneos en la introducción al cálculo diferencial e integral (ver 3.4).

Al ser un curso de nivel universitario, se optó por realizar una aproximación relativamente breve a cada tipo de función pues la formación básica recibida en los niveles previos de escolaridad afirma que los estudiantes fuesen por lo menos familiares con algunas de las funciones a trabajar (MEN, 1998, 2006). Esta característica configuró una oportunidad para concentrarnos en las características de las funciones como objetos matemáticos privilegiados para expresar relaciones entre magnitudes, las formas en que tales magnitudes varían y covarían, de tal forma que se perfilaran como herramientas útiles para el estudio de fenómenos en las distintas ciencias.

Otro elemento importante que tomar en cuenta fue la manera en que las herramientas digitales en que se apoyó la secuencia contribuyeron en la actividad matemática de los estudiantes y sus formas de relacionarse con los fenómenos. En este sentido, la propuesta de formación matemática para los estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales buscó concentrarse en el análisis de los fenómenos estudiados, y sus relaciones, apoyándose en los affordances de las herramientas digitales para profundizar tales análisis, así como delegando los cálculos más extensos estas herramientas.

Los resultados presentados en el apartado 4.1.3 dieron cuenta de la apropiación de los estudiantes de esta propuesta de formación, al mostrar un uso extensivo de múltiples softwares

como Geogebra, Excel, entre otros. Para apoyarse en la expresión de las relaciones por ellos establecidas en sus análisis de los fenómenos abordados.

Es posible afirmar con base en los resultados obtenidos que los estudiantes, en su mayoría, apropiaron el concepto de función acorde con lo planteado en los objetivos de la secuencia, pues en los fenómenos abordados en la actividad 2.2 trabajo final, muchos de los grupos recurrieron a representaciones de funciones con diversos niveles de ajuste a los datos construidos u obtenidos para el análisis de los fenómenos abordados (ver 4.1.3); sin embargo, y quizá más importante, se dio muestra del desarrollo de criterios por parte de las estudiantes para realizar la pregunta de las *matemáticas necesarias* a aplicar en una situación con base en lo propuesto por Stillman (2019); en este sentido, las relaciones entre magnitudes, la covariación y la razón de cambio fueron elementos matemáticos utilizados por los estudiantes para dar respuesta a tal pregunta (ver 4.1.2).

En este sentido, se concluye que como parte de una formación matemática apropiada para un estudiante para profesor de ciencias naturales y educación ambiental puede incluirse la caracterización de las funciones mediante la razón de cambio, pues esta permite hacer explicitas algunas de las relaciones entre distintas magnitudes presentes en un fenómeno a estudiar, lo cual puede apoyar a los estudiantes al enfrentarse al análisis de fenómenos de las ciencias de su interés o el estudio de modelos matemáticos clásicos en la literatura de las ciencias naturales.

5.2 Respecto al objetivo específico 2

Tal como lo menciona Stillman (2019), la investigación en modelación matemática configura un extenso campo de investigación que ha probado dar frutos tanto a nivel teórico para el desarrollo del campo mismo, como a nivel de aula, con propuestas didácticas y sugerencias de

diseño para situaciones en las que se pretenda involucrar el proceso de modelación matemática. Dentro de estas sugerencias, el conjunto de características propuestas por Reit y Ludwig (2018) para el diseño de tareas de modelación fueron fundamentales en el diseño de las actividades que compusieron la secuencia, y dieron muestra de una forma en que pueden involucrarse orientaciones teóricas en el quehacer docente.

En este sentido, la manera de conjugar los elementos teóricos involucrados en la investigación constituyó una estrategia para el diseño y quedó ilustrada en la sección 3.4 La Secuencia de Enseñanza, con lo que se da una muestra de posibles formas de conjugar resultados de investigación en una propuesta que pueda ser llevada al aula. Así, una estrategia llevada a cabo en el desarrollo de la investigación involucró la elaboración de rejillas de diseño, constituidas por categorías operativas diseñadas a partir de cada uno de los elementos teóricos principales en los que se apoyó el trabajo.

Las interrelaciones de los elementos teóricos puestos en juego en el diseño y evaluación de las actividades, dio cuenta de una estructura a partir de la cual fue posible describir los distintos elementos que conformaban la secuencia de enseñanza. En particular dio la posibilidad de describir cada actividad en términos de los criterios de modelación que fueron tenidos en cuenta en su diseño, así como los tipos de herramientas digitales propuestos para su desarrollo (ver 3.4).

A la luz de los resultados presentados en el capítulo IV, y especialmente de la discusión adelantada en el apartado 4.2.3, la aplicación de una secuencia de enseñanza que tomó en consideración los affordances de las herramientas digitales puestas en juego, así como categorías teóricas de diseño de tareas de modelación propuestas en distintos contextos, dio lugar a

discusiones en los grupos de estudiantes relativas a los conocimientos matemáticos “necesarios” o “apropiados” para abordar el estudio de fenómenos en las distintas ciencias.

En este sentido, los elementos teóricos que orientaron los diseños, configuraron un apoyo a la actividad matemática de los estudiantes, especialmente permitiendo la caracterización de las funciones a partir de relaciones entre magnitudes, variaciones de estas, y la forma en que tales variaciones afectaban a otras magnitudes involucradas, a la par que fomentó la indagación en los estudiantes por las maneras en que los conceptos matemáticos trabajados durante el desarrollo de la secuencia ayudaban a describir fenómenos en otras ciencias.

A manera de conclusión es posible afirmar que el operativizar los elementos teóricos que orientan el diseño y planeación de la secuencia de enseñanza (un ejemplo de tal operativización se puede observar en la Tabla 1), se configura en una estrategia fundamental para lograr describir una propuesta de secuencia, de tal forma que los elementos conceptuales matemáticos que se quieran abordar puedan ser incluidos y desarrollados en las distintas actividades, secuenciadas de tal manera que den respuesta a los objetivos de formación matemática que se propongan. (ver 4.1.4)

Así pues, el presente trabajo de investigación se configura como una muestra de una posible organización de las estructuras que, basadas en los modelos conceptuales derivadas de elementos teóricos presentados en el Capítulo 2, permitieron describir una secuencia de enseñanza basada en la modelación, y que tenía como objetivo la formación de pensamiento matemático, particularmente relativo al pensamiento variacional en el trabajo con funciones de tipo lineal, afín, cuadrático y/o exponencial, dirigida a estudiantes de primer semestre del

programa de Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental de la Universidad del Valle.

5.3 Respecto al objetivo específico 3

Con relación a la secuencia de enseñanza, esta fue formulada tomando como orientación los elementos teóricos seleccionados, así como la estrategia metodológica del experimento de enseñanza, dando lugar a una serie de situaciones y actividades en las que los estudiantes se enfrentaron a procesos de modelación de fenómenos en distintos contextos, siendo apoyados por herramientas tecnológicas que podían, o no, ser opcionales para el desarrollo de estas.

La secuencia dio lugar a una aproximación progresiva al concepto de función, y específicamente, a las funciones lineales, afines, cuadráticas y exponenciales, caracterizándolas mediante las relaciones entre las magnitudes involucradas en los fenómenos estudiados y las formas en cómo estas covariaban, enmarcadas en tareas de modelación diseñadas acorde con los criterios propuestos por Reit y Ludwig (2018) y que involucraban el posible recurso a herramientas digitales para apoyar el desarrollo de estas (ver 4.1.3).

Se logró elaborar una propuesta que tomara como perspectiva la covariación de magnitudes, y las razones de cambio para caracterizar las funciones matemáticas y cómo estas pueden ser utilizadas para modelar fenómenos físicos, biológicos, económicos o puramente matemáticos, con lo que se buscó ampliar el panorama de los estudiantes respecto a maneras en que las matemáticas pueden ser utilizadas para estudiar los fenómenos que son de su interés como estudiantes de una licenciatura en ciencias naturales, en este sentido, los resultados obtenidos permitieron afirmar cómo la utilización de este tipo de fenómenos fue una estrategia productiva

para fomentar la participación e interés de los estudiantes en el trabajo con los objetos matemáticos abordados, en este caso algunos tipos de funciones (ver 4.1.5).

La secuencia diseñada permitió estructurar el plan de trabajo de buena parte de los contenidos a abordar en el semestre (ver **Anexos**

Anexo A, programa de curso), proporcionando una mirada a la fundamentación de los conceptos relativos a algunos tipos de funciones mediante una aproximación basada en la modelación; en este sentido, el trabajo con secuencias de enseñanza muestra ser una alternativa valiosa para el diseño de planes de trabajo en los cursos de formación universitaria, que busca vincular los resultados de investigación con propuestas de aula e intenta reducir la brecha entre investigación y docencia.

Finalmente, al tomar en consideración como la secuencia diseñada y presentada buscó atender a las especificidades de los estudiantes con quienes se trabajó, en particular, el papel de las matemáticas como una herramienta de apoyo para la modelación, estudio y análisis de fenómenos en las ciencias naturales; esta puede ser tomada, valorada, incrementada y rediseñada por investigadores interesados en la formación matemática de futuros profesores de ciencias, o en el trabajo con modelación y funciones apoyados en tecnologías digitales; así como puede servir de base para nuevos diseños que se ajusten a atender las necesidades de formación específicas de los estudiantes a quienes sean dirigidos.

5.4 Recomendaciones y futuros aspectos de investigación

Una vez presentados los resultados del desarrollo de este trabajo de investigación, se formulan algunas recomendaciones o sugerencias para aquel lector interesado en profundizar aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las funciones, y que deseen implementar este tipo de

propuestas teórico-metodológicas en el aula, en el que se destaque la caracterización de las funciones mediante la razón de cambio y las relaciones entre magnitudes.

- La apropiación de un marco teórico, y a partir de este, una concepción de aprendizaje y de enseñanza, es un proceso que lleva tiempo, así como dificultades inherentes al cambio en la forma de pensar que, en ocasiones, pasa por evaluar críticamente las posturas personales previamente elaboradas.
- En este sentido, la explicitación de la postura que se quiera tomar en relación con la enseñanza y el aprendizaje permite una valoración de las variables puestas en juego en el diseño de actividades que se lleven al aula, o incluso en el diseño de secuencias de enseñanza que transcurran durante un tiempo prolongado. En el presente trabajo se conjugó una perspectiva teórica que involucró modelos matemáticos (Stillman, 2019, Reit y Ludwig, 2018), así como el recurso a herramientas digitales y sus affordances (Brown et al, 2004; Wassie y Zergaw, 2019), buscando apoyar el aprendizaje de las funciones de los estudiantes.

Debido al interés especifico de la formación matemática de futuros profesores de ciencias naturales, la asimetría en la relación entre las matemáticas y las ciencias detallada por Wong (2018) puede ser tomada como una oportunidad, para desde los cursos de matemáticas apoyar la formación de los estudiantes presentando los conocimientos matemáticos como saberes útiles y necesarios para la comprensión, modelación y estudio detallado de fenómenos en las ciencias naturales que sean de su interés principal.

En este sentido, la modelación matemática apoyada por recursos tecnológicos mostraron ser elementos teóricos y de diseño que aportan significativamente a propuestas de aula que

permiten vincular el estudio de fenómenos en distintas ciencias (física, química, economía) con los elementos y conceptos matemáticos habitualmente empleados en sus descripciones, dando luces en relación con el papel de las funciones matemáticas y sus distintos tipos (lineal, cuadrática, exponencial, entre otras) en la descripción analítica de tales fenómenos, en particular se resalta la caracterización de las funciones a partir de la razón de cambio, que pasa por la identificación de relaciones entre distintas magnitudes presentes en un mismo fenómeno, como un elemento de análisis importante que debe ser tomado en cuenta al proponer análisis de situaciones que puedan ser modeladas con funciones.

Finalmente, y como cierre del documento, vale la pena mencionar que, a partir de los resultados obtenidos en la investigación y la confrontación teórica de estos, es posible plantear interrogantes que podrían considerarse importantes para el desarrollo de futuras investigaciones, que puedan dar continuidad a lo elaborado; entre ellas se encuentran:

- ¿De qué manera abordar los cambios instantáneos y las razones de cambio instantáneas desde una perspectiva de modelación apoyada por herramientas digitales?
- ¿Cómo puede estudiarse la manera en que los affordances de los recursos digitales impactan la actividad matemática del docente y la manera de dar sus clases, en ambientes de docencia presencial o asistida por tecnologías?

Referencias

Acevedo Díaz, J. A. (2010). Formación del profesorado de ciencias y enseñanza de la naturaleza de la ciencia. *Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 653-660.

Alsina, C. (2001). Why the professor must be a stimulating teacher. En D. Holton, *The teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI study* (págs. 3-12). Dordrecht: Springer.

Barrera, F., & Santos, T. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: Un caso hipotético de suministro de medicamento. *Seminario Nacional de Formación de Docentes. Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas.* Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Baxter, J., Beghetto, R., Ruzicka, A., & Livelybrooks, D. (2014). Professional Development Strategically Connecting Mathematics and Science: The Impact on Teacher's Confidence and Practice. *School Science and Mathematics*, 102-113.

Brown, J., & Ikeda, T. (2018). Conclusions and Future Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. En G. Stillman, & J. Brown, *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs.* Springer.

Brown, J., Stillman, G., & Herbert, S. (2004). Can the notion of affordances be of use in the design of a technology enriched mathematics curriculum. *In Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research* (págs. 119-129). Sydney: MERGA.

Byerley, C., & Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teacher's meanings for measure, slope and rate of change. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 168-193.

Cabrera Castillo, H. G. (2016). *Aportes a la enseñanza de la química a partir de un estudio histórico filosófico de la experimentación asociada a la combustión para profesores en formación inicial.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática.* Bogotá: Editorial Universidad de Antioquia.

Cobb, P. (2000). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. En A. Kelly, & R. Lesh, *Handbook of research design in Mathematics and Science Education* (págs. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

de Torres Curth, M. (2015). *Los reyes de la pasarela. Modelos matemáticos en las ciencias.* Buenos Aires: Fundación de Historia Natural Félix de Azara.

Duval, R. (2004a). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Ellis, A., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M., & Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Student's Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, 151-181.

Fonger, N., Ellis, A., & Dogan, M. (2020). A quadratic growth learning trajectory. *The Journal of Mathematical Behaviour 59*.

Frykholm, J., & Glasson, G. (2005). Connecting Science and Mathematics Instruction: Pedagogical Context Knowledge for Teachers. *School Science and Mathematics*, 127-141.

Furner, J., & Kumar, D. (2007). The Mathematics and Science Integration Argument: A Stand for Teacher Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 185-189.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. d. (2010). *Metodología de la Investigación. Quinta Edición.* Mexico D.F.: Interamericana Editores, S.A.

Loughran, J., & Hamilton, M. (2016). *International Handbook of Teacher Education.* Springer Science and Business Media.

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M., & Merrilyn, G. (2019). The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM*, 869-884.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Sistema colombiano de formación de educadores y lineamientos de política.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Nusantara, D., & Putri, R. (2018). Slope of a Straight Line in Ladder: a Learning Trajectory. *Journal of Physics: Conference Series 1097*.

OMS. (14 de Enero de 2022). *Cronología de la respuesta de la OMS a la COVID-19*. Obtenido de Organización Mundial de la Salud: https://www.who.int/es/news/item/29-06-2020-covidtimeline

Reit, X., & Ludwig, M. (2018). An Approach to Theory Based Modelling Tasks. En G. Stillman, W. Blum, & M. Salett, *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (págs. 81-91). Springer.

Rendón, P. (2009). Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión. *Trabajo de grado de maestría*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Stillman, G. (2019). State of the art on Modelling in Mathematics Education - Lines of Inquiry . En G. Stillman, & J. Brown, *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (págs. 1-20). Springer.

Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs.* Nottingham: Shell Centre & Joint Matriculation Board.

Teuscher, D., & Reys, R. (2012). Rate of Change: AP Calculus Student's Understandings and Misconceptions After Completing Different Curricular Paths. *School Science and Mathematics*, 359-376.

Universidad del Valle. (25 de Septiembre de 2015). Acuerdo 025. *Por el cual se actualiza la Política Currícular y el Proyecto Formativo de la Universidad del Valle*. Santiago de Cali.

Villa-Ochoa, J., González-Goméz, D., & Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea en Matemáticas. *Formación Universitaria*, 25-34.

Wassie, Y., & Zergaw, G. (2019). Some of the potential affordances, challenges and limitations of using geogebra in mathematics education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*.

Wong, V. (2018). The Relation Between School Science and Mathematics Education. *Tesis doctoral*. Londrés, Inglaterra: King's College London.

Anexos

Anexo A: Programa de curso

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

1. IDENTIFICACIÓN DE LA ASIGNATURA

Programa académico	Licenciatura en Ciencias Naturales y Educación Ambiental – 3491
Nombre de la Asignatura	Formación Matemática I
Código y Grupo	405138M – Grupos 1 y 2
Profesores:	Jorge Enrique Galeano Jimmy Alexander Uribe
Horario:	Martes 7:00 a.m. - 10:00 a.m. Miércoles 10:00 a.m. - 1:00 p.m.
Créditos	3
Habilitable	Si
Validable	Si
Período académico	Febrero – Junio de 2021

2. DESCRIPCIÓN GENERAL

Un elemento importante en la educación matemática es propiciar el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático en la población escolar; y particularmente, en los profesores en formación. En este sentido, consideramos que una de las competencias que deben desarrollar los estudiantes de la licenciatura en ciencias naturales, es la modelación matemática.

Respecto a la modelación, se pueden distinguir tres tipos de contextos, utilizados para incentivar la participación de los estudiantes en actividades esenciales del quehacer de la disciplina: contextos del mundo real, los hipotéticos y los puramente matemáticos (Barrera y Santos, 2002).

De acuerdo con lo anterior, en este curso se abordarán modelos en estos tres contextos y se impulsará el aprendizaje basado en proyectos con la mediación de tecnologías digitales; haciendo uso de sistemas de Geometría Dinámica, sistemas algebraicos computacionales, Hoja Electrónica de cálculo, plataformas electrónicas, etc.

A continuación, describimos brevemente cada uno de los contextos mencionados anteriormente:

a. Contextos del mundo real. El referente donde se desarrolla la situación involucra fenómenos o situaciones reales. La solución de este tipo de problemas conlleva a la construcción de un modelo matemático.

El punto de partida en la construcción de un modelo matemático es un *problema real*. Debido a la complejidad que tienen este tipo de problemas, generalmente se hacen simplificaciones para construir una representación matemática aproximada a la realidad. Por lo tanto, hay que establecer una clara distinción entre el modelo como representación y la situación representada.

Un *modelo* de la situación original resulta a partir de trasladar datos, variables, conceptos, relaciones, suposiciones y condiciones, a un lenguaje matemático. El valor que se da a los resultados y las predicciones, que es un aspecto fundamental en matemáticas, pues permiten tomar decisiones; están en función de la interpretación que se haga de los *modelos* dentro de la situación real que se estudia, de ahí que, en el proceso de solución se aplicarán los métodos matemáticos conocidos para obtener los *resultados de dicho modelo*, sacar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos. Para esto, el manejo de herramientas computacionales puede resultar de gran utilidad.

b. Contextos hipotéticos. La situación se construye a partir de una serie de condiciones y suposiciones sobre las variables que intervienen en un problema realista. Los datos proporcionados en este tipo de problemas no son reales.

El planteamiento de situaciones hipotéticas en el aula puede contribuir a que los estudiantes empleen una serie de recursos matemáticos, diferentes representaciones de los conceptos que se involucran, y diferentes formas de resolver el mismo problema.

c. Contextos puramente matemáticos. El referente en el que es construida la situación problemática involucra solamente aspectos matemáticos.

El objetivo principal de plantear este tipo de situaciones es que los estudiantes pueden hacer uso de recursos y estrategias para diseñar métodos de solución, encontrar patrones, construir conjeturas y darles seguimiento. Un ejemplo, es el problema que se denomina *explorando*

Son muchas las aplicaciones de las matemáticas que se pueden abordar en el nivel de bachillerato. La experiencia nos señala que este enfoque despierta mayor interés en los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas.

En el curso, se estudiarán problemas de aplicación a la biología, a la economía, a la física. De tal manera que el maestro vea la necesidad de problematizar el entorno. Y que en las ciencias tiene una beta de problemas que pueden servir de plataforma para motivar a sus alumnos.

3. OBJETIVOS

3.1. Objetivo Central

Ofrecer herramientas para la modelación matemática que permitan explicar fenómenos naturales con la mediación de tecnologías digitales, para la toma de decisiones o la comprensión de la información.

3.2. Objetivos Específicos

- Reconocer las características de los modelos matemáticos en el transcurso de la historia de la humanidad.
- Identificar las características de un modelo matemático.
- Diferenciar algunos tipos de modelos matemáticos.

- Proponer modelos matemáticos determinísticos y aleatorios para la comprensión de fenómenos naturales.
- Proponer modelos matemáticos sobre el entorno cercano.
- Utilizar tecnologías digitales como herramientas de mediación en la construcción y solución de modelos matemáticos.

4. CONTENIDOS Y/O EJES TEMÁTICOS.

1. Introducción
Se abordará desde una aproximación histórica a la modelación matemática algunos de los problemas asociados a la física, astronomía, química y biología. Así mismo, privilegiando el papel que juega la modelación matemática, se pretende en esta sección dar cuenta de qué es un modelo matemático, el proceso de modelar, y los tipos de proyectos de modelación en ciencias naturales.

2. Pensamiento numérico
Se pretende describir a los números reales como un objeto de estudio fundamental en el desarrollo de las matemáticas; sus propiedades y relaciones. Conocer la naturaleza de números relevantes como: Pi y e.

3. Pensamientos métrico y geométrico
Centrado en los procesos de modelación, conocer los modelos de la naturaleza para estimar el área y el perímetro de situaciones reales. Modelar y resolver problemas relativos a la densidad y el volumen. Describir transformaciones elementales en el plano y estudiar las secciones cónicas y sus aplicaciones.

4. Pensamiento variacional
En esta sección se quiere abordar situaciones de cambio y variación, involucrando problemas de modelación con funciones en fenómenos de las ciencias tales como la física, la química, entre otros.

5. METODOLOGÍA

El curso es de modalidad asistida por tecnología y tiene una duración de tres horas semanales. Se llevará a cabo un trabajo teórico-práctico donde el profesor conjuntamente con los estudiantes adelantará la discusión y análisis de las actividades propuestas tanto a nivel individual como grupal, abordarán proyectos de modelación matemática de fenómenos de la naturaleza con la mediación de tecnologías digitales.

Tipo de Clase	No. de horas
Teórica: Discusión de una lectura	1
Teórica: Uso de recursos (e.g. tecnologías digitales) en el desarrollo del pensamiento matemático	1
Taller (trabajo colaborativo)	1

6. EVALUACIÓN

La evaluación final del curso será el promedio ponderado de

ITEM	Porcentaje
Controles de lectura	10%
Talleres y actividades en clase	20%/30%

Proyecto de modelación matemática	30%
Exámenes (son dos)	40%/30%

7. BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

Benitez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en la resolución de problemas con apoyo de la tecnología computacional*. Tesis Doctoral. Cinvestav. México.

Hitt, F. (2006). Funciones en contexto. Prentice Hall, Pearson

Hitt, F. (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En *Investigaciones en Matemática Educativa.* Hitt, F. (Ed.). Grupo Editorial Iberoamérica, (pp. 245-264), México.

Mederos, O y Rodríguez, B (2010). Modelación Matemática. UADEC-México.

MEN (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Serie Documentos. Ministerio de Educación Nacional. Santafé de Bogotá.

Santos, M. y Barrera M., F. (2005). Delving into Conceptual Frameworks: Problem Solving Representations, and Models and Modeling Perspectives. In Lloyd, G. M., Wilson, J. L. M., y Behm, S. L. (Eds.), *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Esta bibliografía se complementará a lo largo del curso.

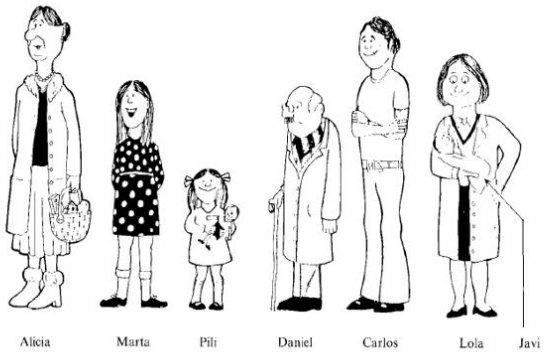
Anexo B: Imágenes seleccionadas de Swan (1985) que componen actividad 1.1

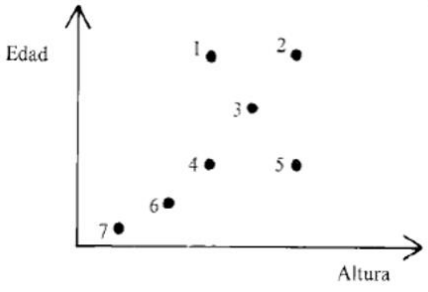
Imágenes de las actividades seleccionadas de Swan (1985) que componen la actividad 1.1

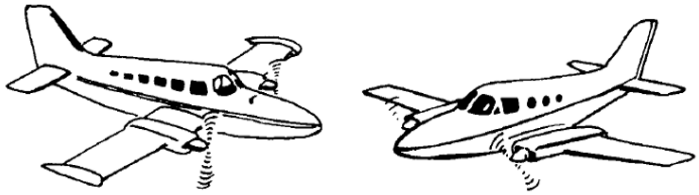
Actividad 1.1

1. **La cola de la parada del autobús**

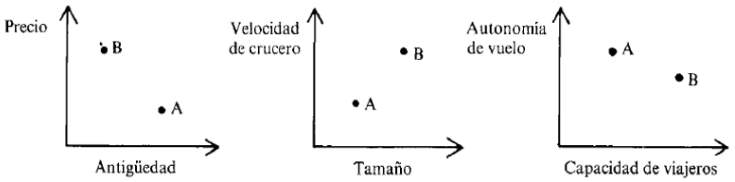
¿Quién está representado por cada punto del diagrama inferior?

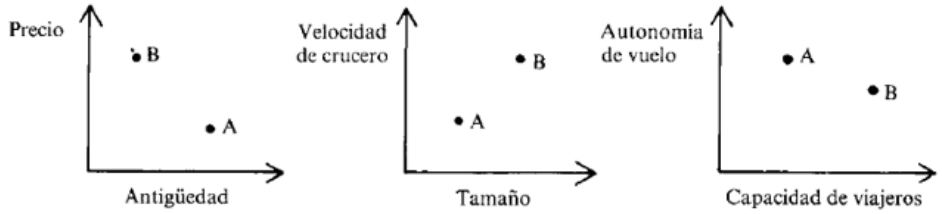






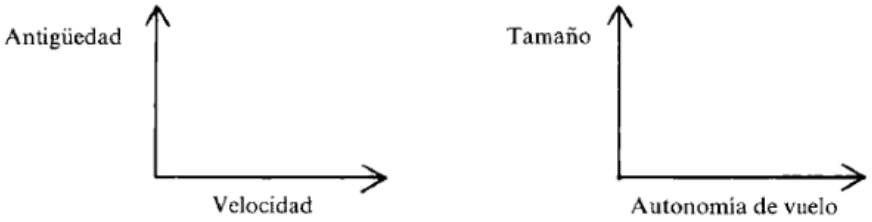
Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros, A y B (Nota: las gráficas no se han realizado con exactitud).





La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

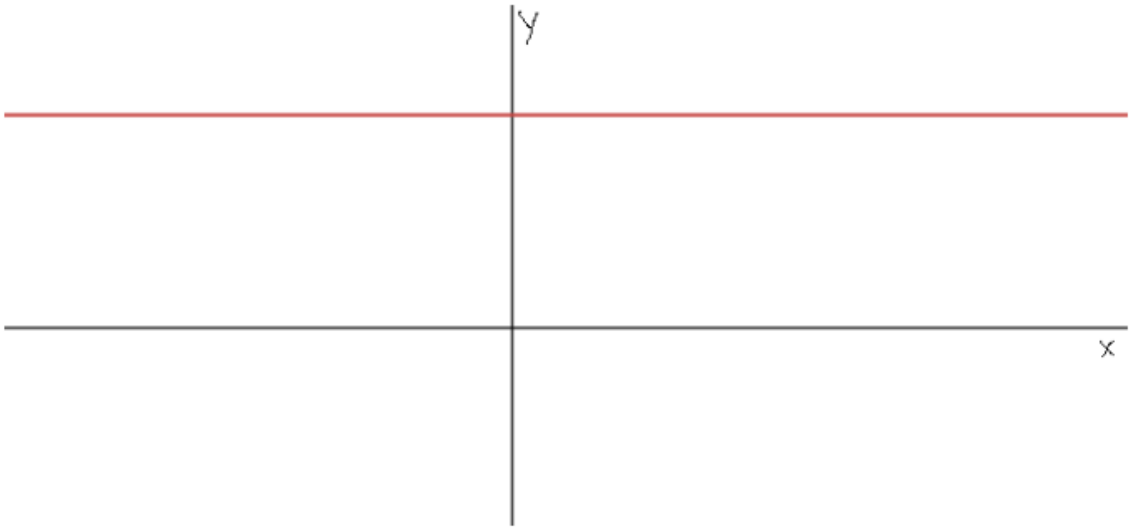
— ¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?
«El avión más viejo es más barato»
«El avión más rápido es más pequeño»
«El avión más grande es más viejo»
«El avión más barato transporta menos pasajeros»
— Copia las gráficas siguientes. En cada gráfica marca dos puntos que representen a A y a B.



Anexo C : Preguntas del formulario de Google forms actividad 3.1

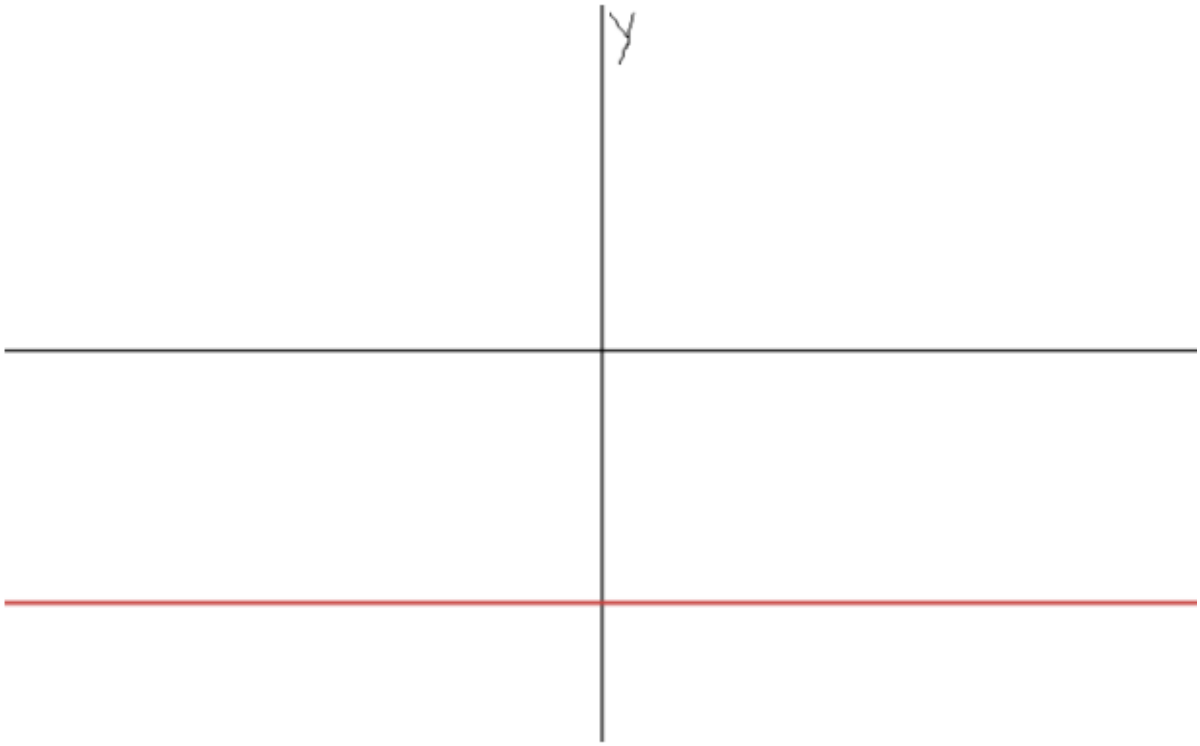
Preguntas del formulario de Google forms actividad 3.1 de la secuencia de enseñanza

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



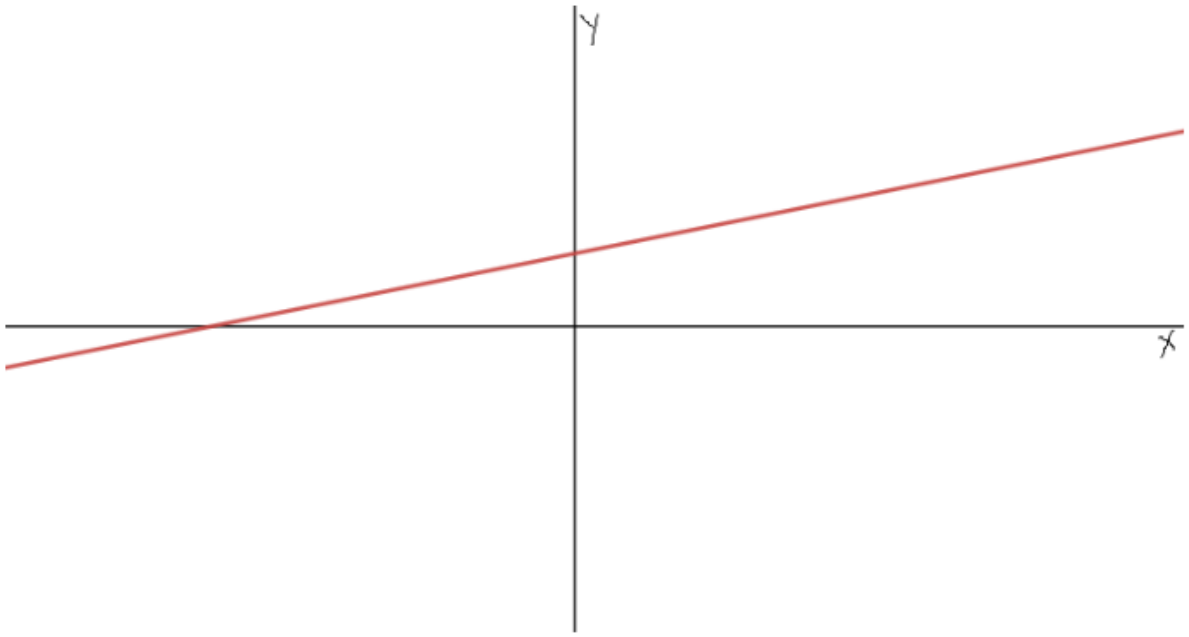
- y=-3
- y=3
- y=x+3
- y=x-3

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



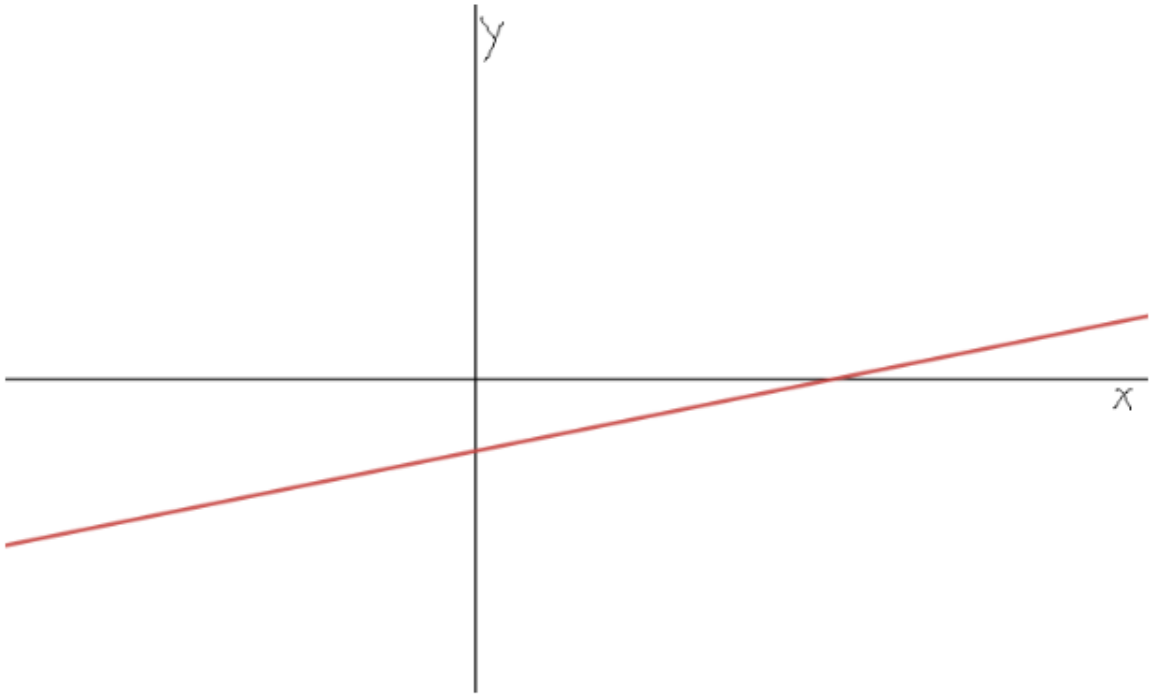
- [ ] y=3
- [ ] y=-3
- [ ] y=x+3
- [ ] y=x-3

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



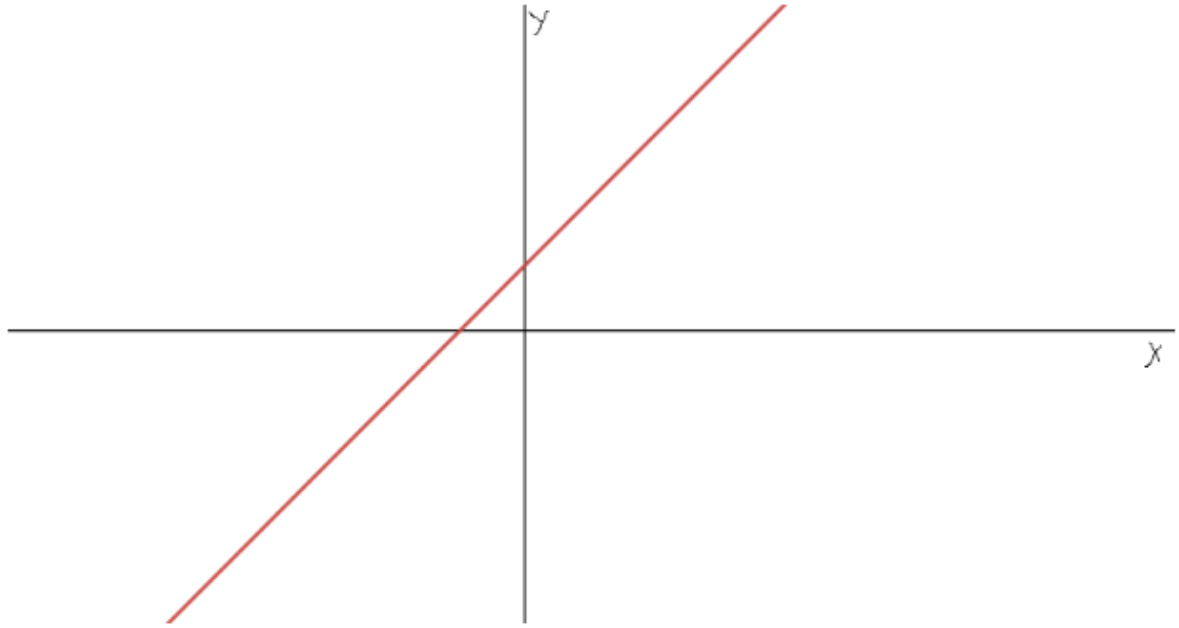
- y=0.2x+1
- Y=-0.2x+1
- y=0.2x-1
- y=-0.2x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



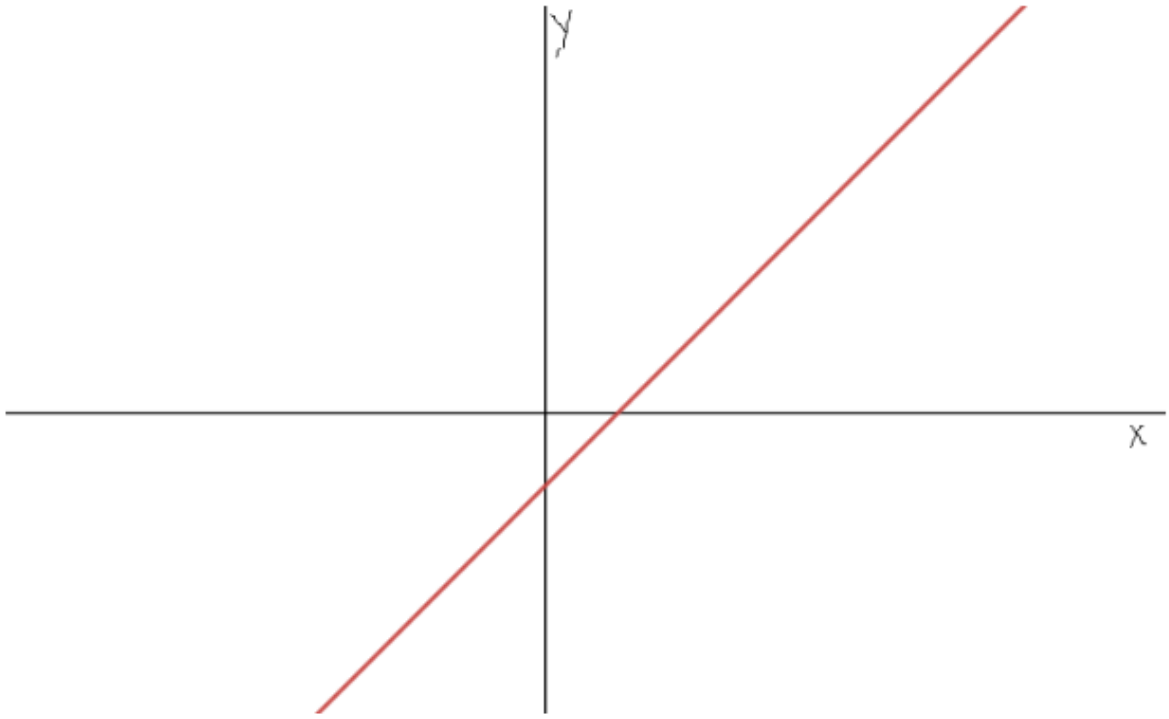
- y=0.2x+1
- y=0.2x-1
- y=-0.2x+1
- y=-0.2x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



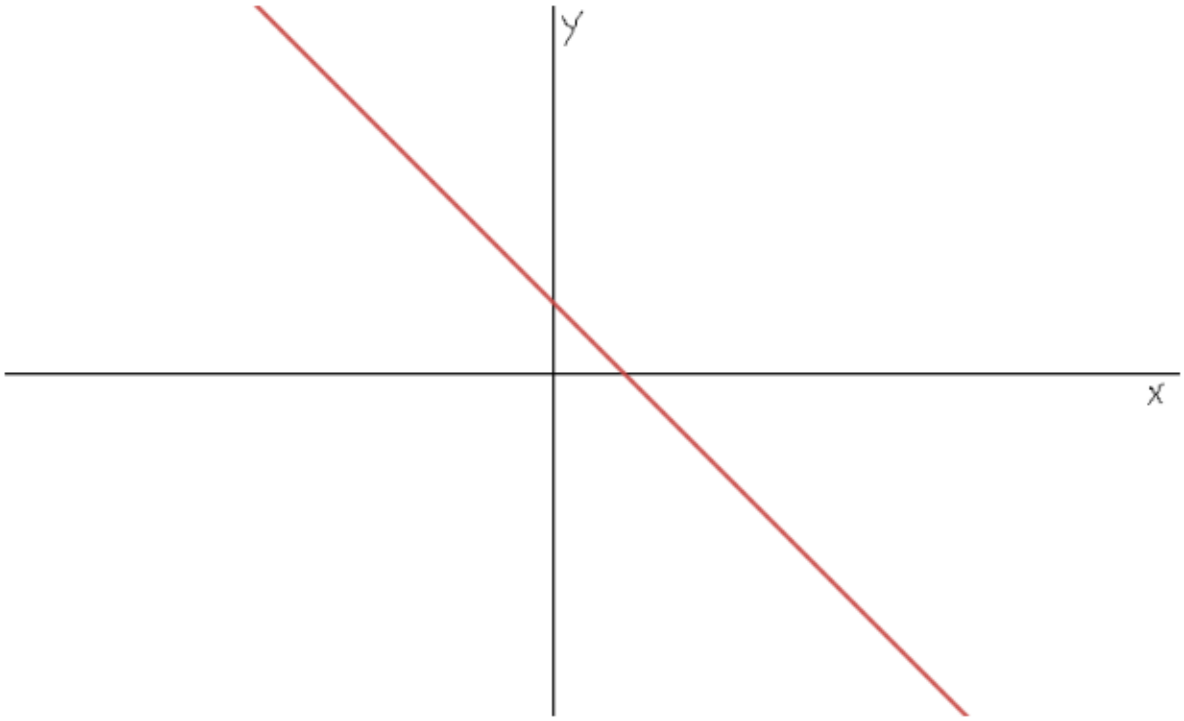
- y=x+1
- y=x-1
- y=-x+1
- y=-x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



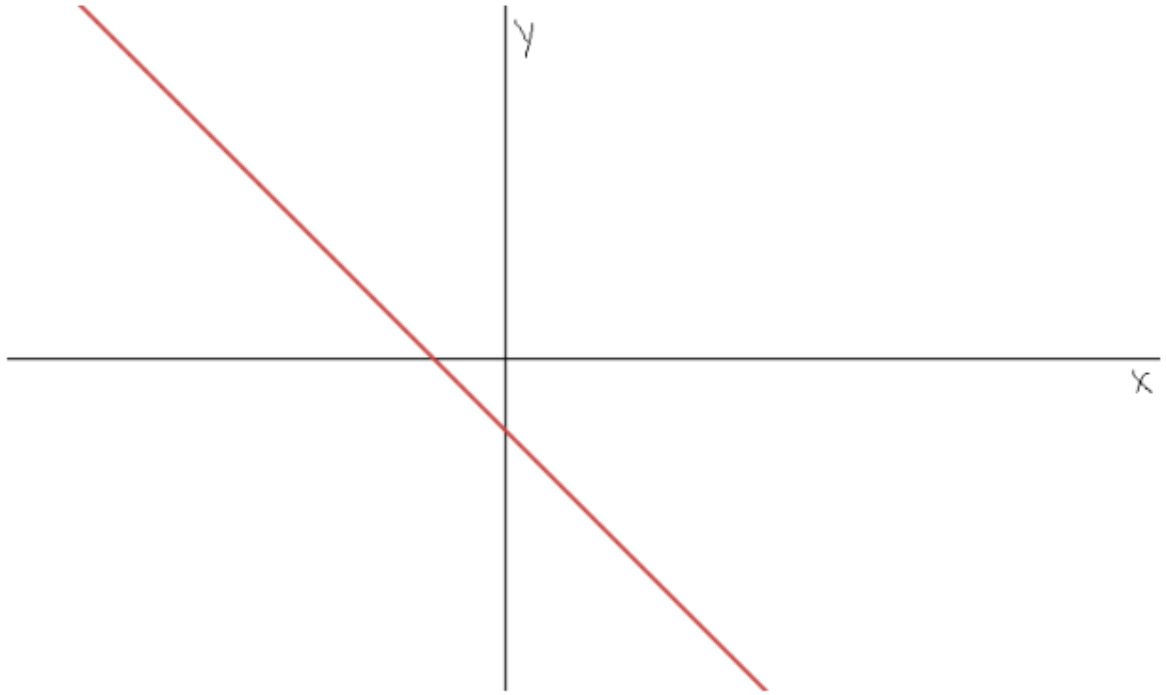
- y=x+1
- y=x-1
- y=-x+1
- y=-x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



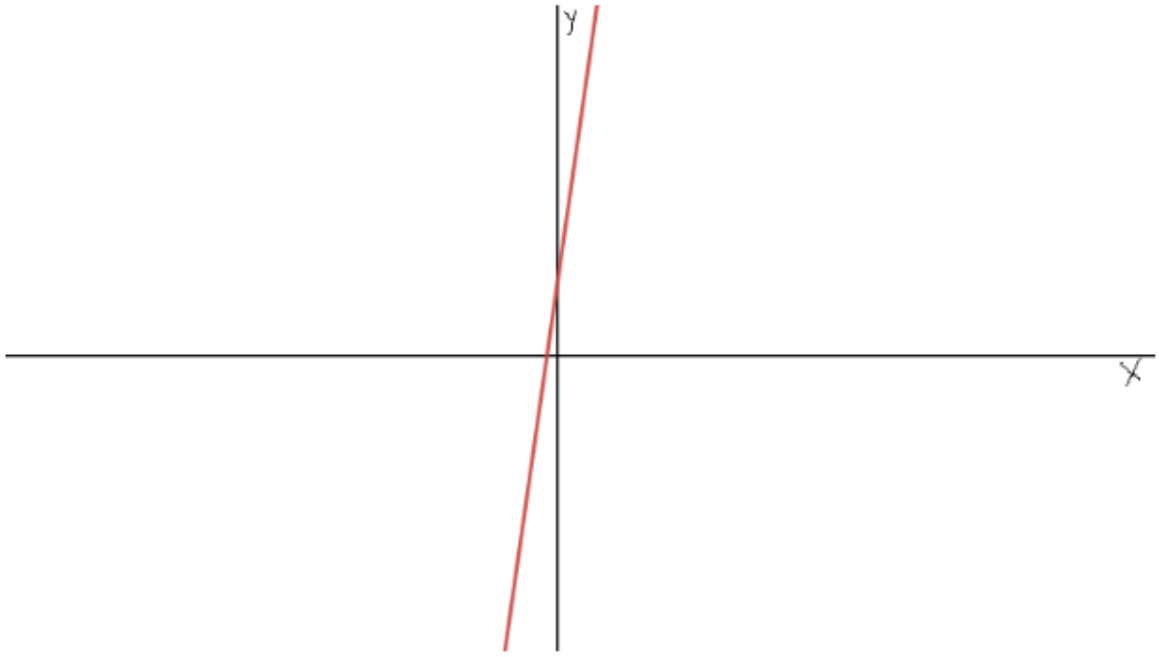
- ○ y=x+1
- ○ y=x-1
- ○ y=-x+1
- ○ y=-x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



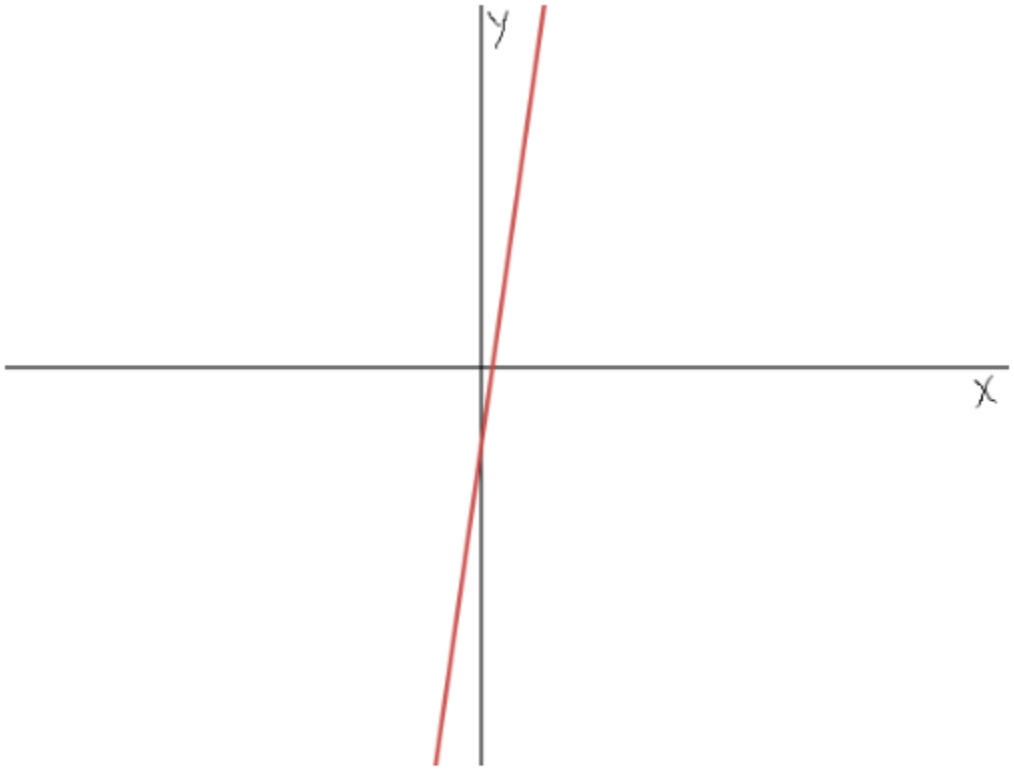
- y=x+1
- y=x-1
- y=-x+1
- y=-x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



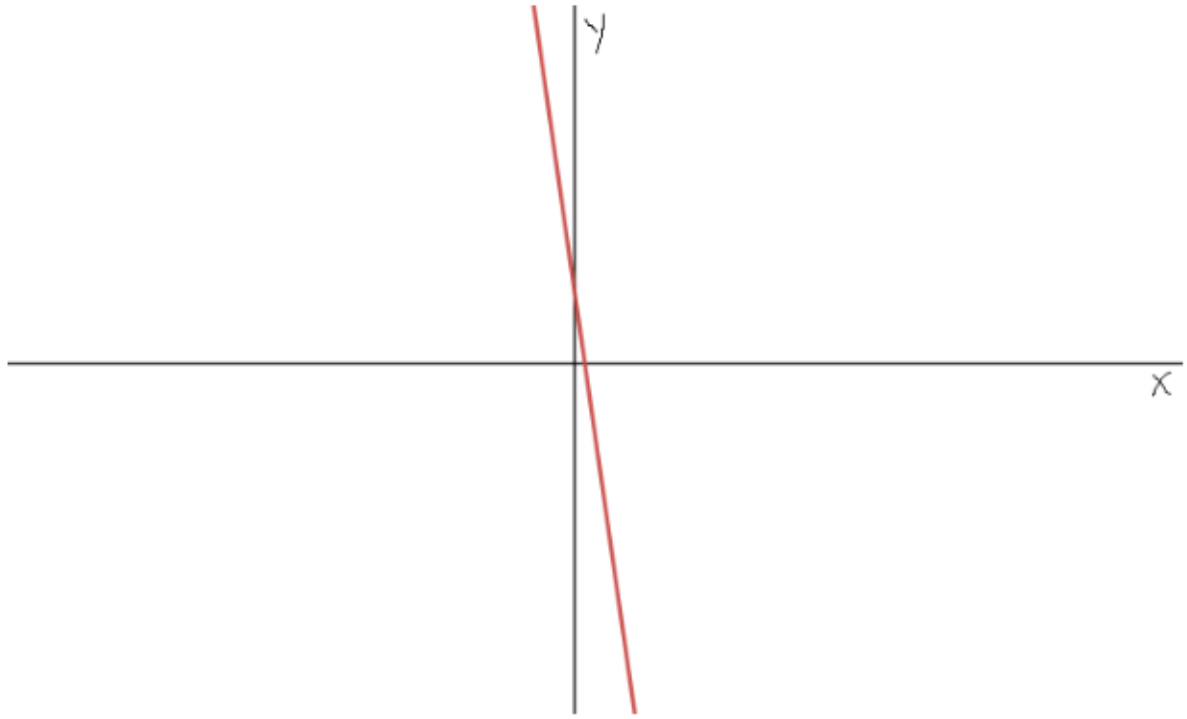
- y=7x+1
- y=7x-1
- y=-7x+1
- y=-7x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



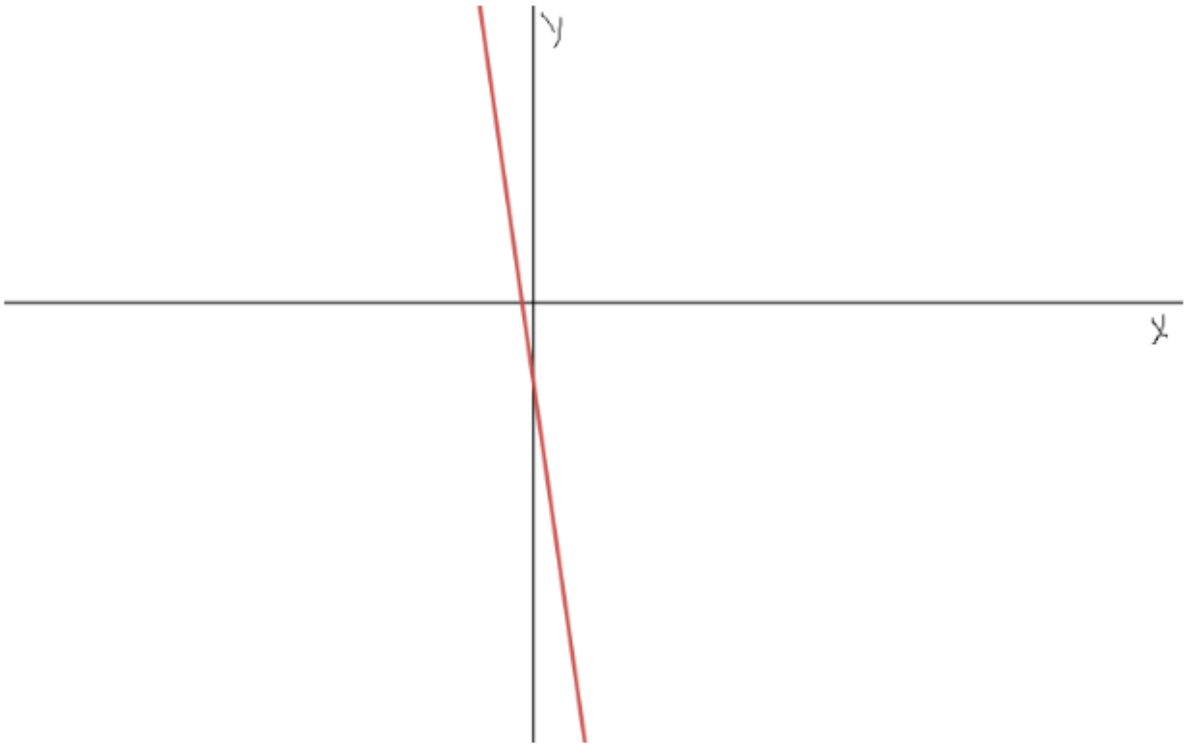
- y=7x+1
- y=7x-1
- y=-7x+1
- y=-7x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



- y=7x+1
- y=7x-1
- y=-7x+1
- y=-7x-1

La línea roja representa la gráfica de una función. ¿Cuál es su ecuación algebraica? *



- y=7x+1
- y=7x-1
- y=-7x+1
- y=-7x-1

Anexo D: Formato borrador escritura para actividad 2.2 Trabajo Final

Universidad del Valle. Facultad de Educación y Pedagogía.
Licenciatura en CN
Formación matemática I
Profesor
Fecha

Mi trabajo final de FM I (ejemplo, póngale un título atractivo)

Nombre Integrante - código
Nombre integrante - código

Introducción: En unos dos o tres párrafos se presenta una síntesis del trabajo: ¿qué situación se aborda? ¿Qué problema se trabajó? ¿Qué tipos de funciones se emplean? ¿Qué análisis se realizó? ¿Qué se obtuvo o a qué se llegó?

El llenado de un recipiente, tema que se trabaja en el colegio, me dejó con varias preguntas, es un tema de aparente simplicidad pero que sirve de escenario para estudiar el comportamiento de varias magnitudes: el volumen de un recipiente, el tiempo en que se llena o se desocupa...

Aquí van a plantear una pregunta guía, una pregunta que oriente su indagación.

Ejemplos de posibles preguntas:

- *La pregunta busca una generalización o definición conceptual ("¿Qué es …?", "¿Cómo es …?").*
- *La pregunta promueve una descripción ("¿Qué se puede observar de...?")*
- *La pregunta es de explicación causal ("¿Por qué …?").*
- *La pregunta requiere una comprobación ("¿Cómo se comprobaría que …?").*
- *La pregunta es de tipo predictivo ("¿Qué pasará si …?").*
- *La pregunta es de relaciones: causalidad, asociación, tendencia y / o interacción entre dos o más variables ("¿Cómo influirá … en …?", "¿Cómo cambiará … si …?").*

Se llegó a la función tal, con la cual…

1. Estudio analítico del llenado de un recipiente

Un recipiente como el de la figura de abajo se llena con un agua, el agua entra a una razón constante. La gráfica de la derecha muestra cómo varía la altura del líquido en el vaso X a medida que el agua cae dentro de él.

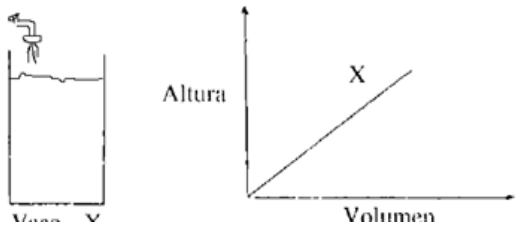
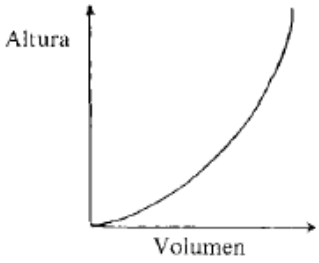
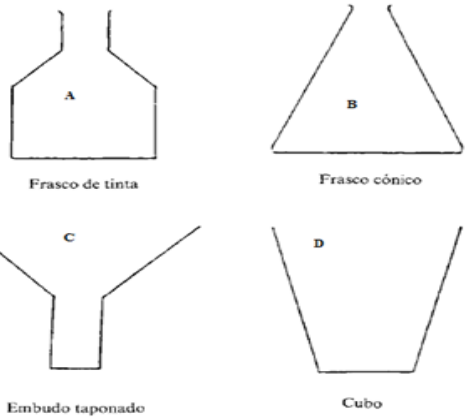


Figura 1. Descripción de mi situación. Elaboración propia

Teniendo en cuenta la gráfica siguiente, ¿Cómo podríamos determinar cuál sería el envase adecuado para obtener la representación más cercana de la relación que se presenta entre altura y volumen?



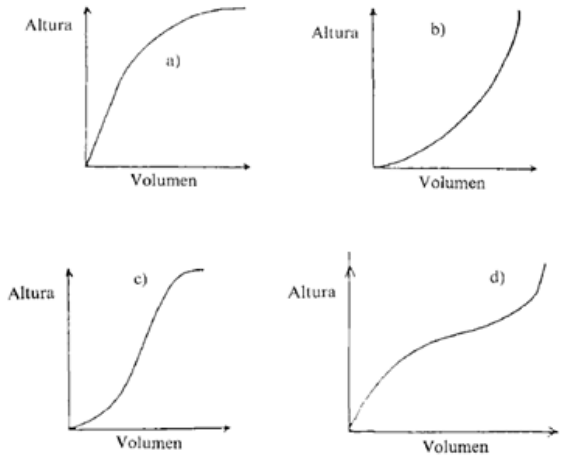
Opciones



El análisis se centra en B y D, pues obviamente A y C no son, y teniendo en cuenta que en recipientes "rectos" la gráfica es una línea recta ¿cómo decidir entre B y D? Un análisis intuitivo del gráfico me dice que la altura crece poco al principio y a medida que aumenta el volumen la altura crece más; o mejor, cambios iguales en el volumen producen primero aumentos pequeños en la altura y al final aumentos grandes en dicha altura. Eso parece ser la descripción de lo que ocurre con el recipiente B

2. El papel de las gráficas...

Lo anterior nos lleva a proponer una forma de generalizar y tecnificar el estudio de la relación entre el cambio en la altura y el aumento del volumen en diversos recipientes. El problema se formuló en los siguientes términos:



Para un recipiente que se llena a razón constante ¿Cómo afecta su forma a la velocidad con la que sube el nivel del agua?

Se considera el nivel del agua la variable (y) dependiente de la variable (x) volumen {la "velocidad" es la razón de cambio de la y con respecto a la x.}

¿Qué me dicen las funciones de esta velocidad de llenado?

Responder a estas cuestiones permitirá no solo decidir a qué recipientes corresponden las gráficas de al lado, sino entender la relación que en ellos se presenta entre la altura y el volumen (es decir, la razón de cambio)

3. Razón de cambio: el caso del volumen y la altura de un recipiente que se llena

3.1 Ideas básicas sobre el llenado de recipientes

En un recipiente cilíndrico, una unidad de volumen produce un incremento (fijo) de la altura del agua. Veamos el siguiente ejemplo hipotético

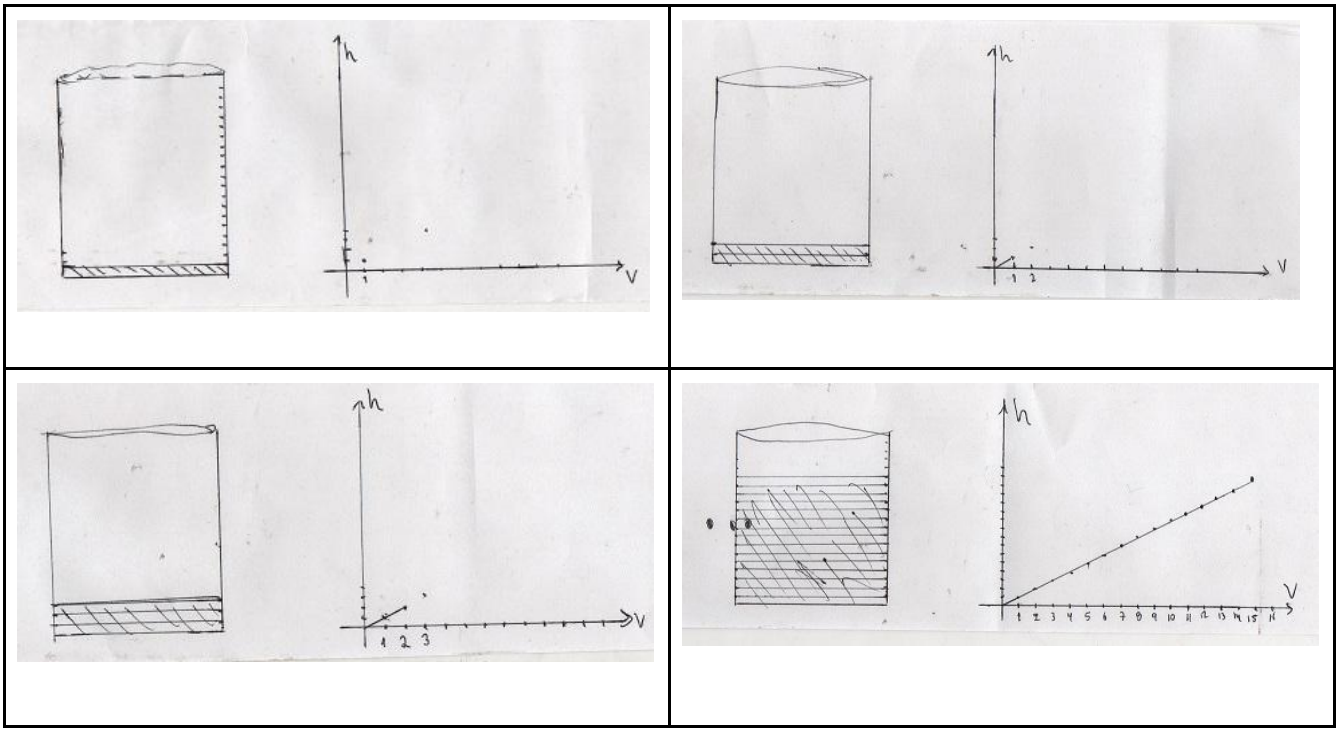


Figura 2. Ilustración del llenado de un recipiente: en cada imagen se muestra la entrada de una unidad de volumen y su correspondiente cambio en la altura del agua.

Distintos recipientes tienen distintas tasas de cambio de la altura con respecto al volumen.

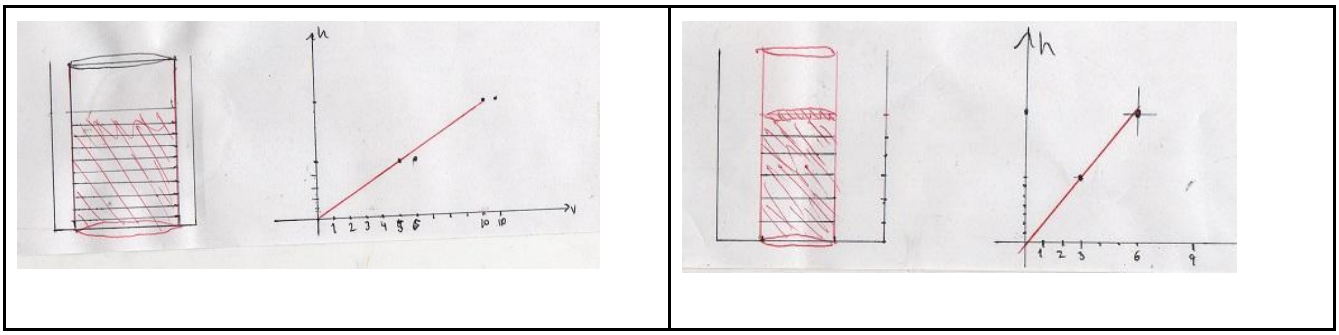


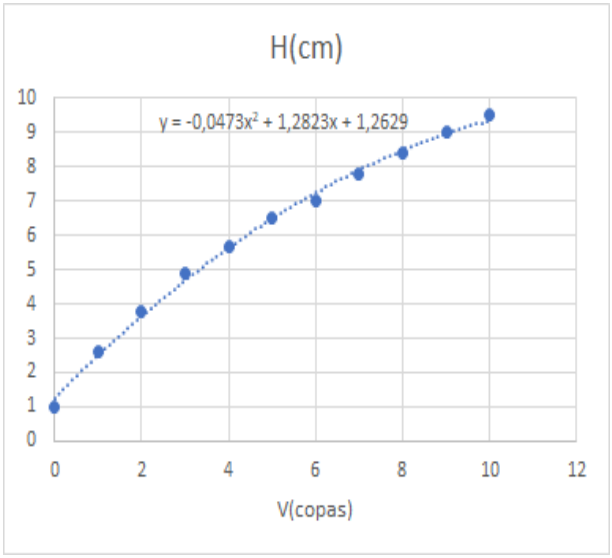
Figura 3. Ilustración del llenado de un recipiente, variación del grosor: en comparación con un recipiente tomado como referencia, se muestra el llenado de dos recipientes más delgados que el de referencia.

3.2 mi modelo del problema

Para estudiar el comportamiento de la razón de cambio en recipientes no cilíndricos, se realizan dos experimentos con dos vasos. Los vasos se llenan con una unidad de volumen (1 copa) lo que garantiza la "entrada" constante de volumen; para cada copa se toman las medidas de las alturas, como se puede ver a continuación.

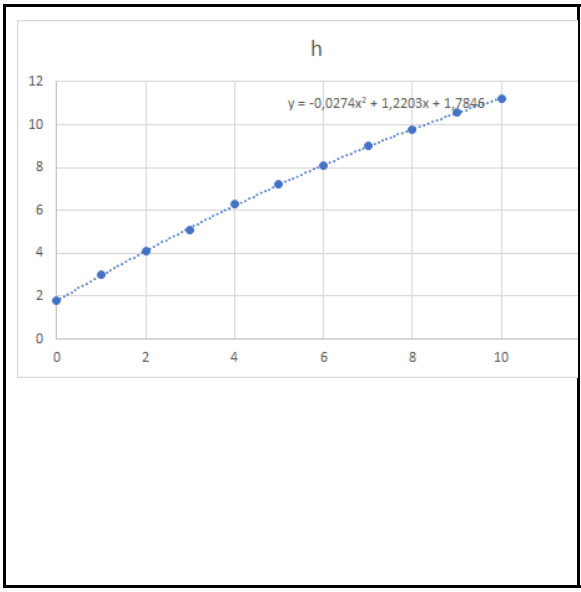
Las medidas anteriores se organizan en una tabla y se procesan con…

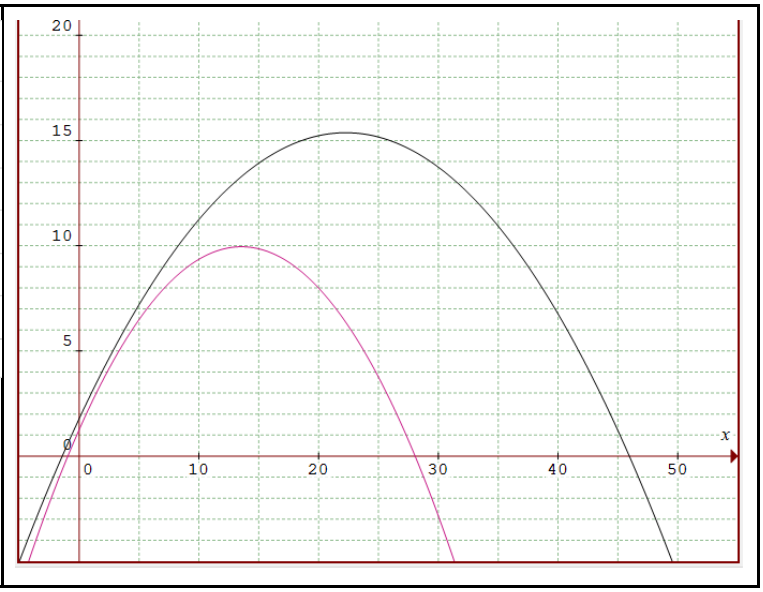
V(copas)	H(cm)
0	1
1	2,6
2	3,8
3	4,9
4	5,7
5	6,5
6	7
7	7,8
8	8,4
9	9
10	9,5



En el segundo vaso obtengo:

{poner el vaso largo}	y uso Graphmatica para comparar

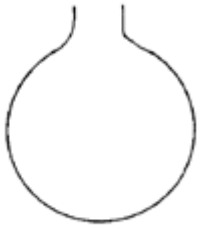




Las gráficas “extendidas” no corresponden con el problema -pues el dominio de las funciones no es el real- sin embargo dejan ver mejor el comportamiento de cada función. El tamaño de los vasos explica porqué una gráfica es más alta que la otra.

3.3

Lo anterior abre preguntas sobre este comportamiento en recipientes que no tienen lados rectos, por ejemplo:



Frasco de evaporación

y buscar el impacto sobre la razón de cambio.

Conclusiones: Con base en lo realizado se deben escribir dos o tres párrafos que sinteticen los resultados a los que se llegó en el análisis, la forma en que estos atienden el problema propuesto y/o la manera en que nuestra comprensión de la situación mejora o cambia gracias a lo realizado.

CONCLUSIONES
En relación con el llenado de recipientes puedo decir que:

La forma afecta a la velocidad en que se sube el nivel del agua de tal y tal manera.

De la misma manera: las gráficas, las funciones me dicen de esta velocidad de llenado que tal y tal cosa.

El desarrollo de lo anterior amplía nuestro conocimiento del comportamiento del llenado de un recipiente en tanto que tal cosa y tal cosa.

REFERENCIAS

Señale las referencias (incluso si son de Internet, como páginas web) que utilizó en su trabajo.

BIBLIOGRAFIA