



Una propuesta de aula para la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros y su estructura aditiva utilizando algunos recursos pedagógicos.

Juan Alejandro Villegas Velásquez

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
Licenciatura en Matemáticas
Febrero 2023



Una propuesta de aula para la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros y su estructura aditiva utilizando algunos recursos pedagógicos.

Juan Alejandro Villegas Velásquez
201756913

Mg. Ligia Amparo Torres Rengifo
Directora del Trabajo de Grado

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
Licenciatura en Matemáticas
Febrero 2023

Dedicatoria

*A mis padres y mi hermana, Ángela María
Velásquez, José Edison Villegas y Daniela Villegas
Velásquez, mis motores de vida, quienes comparten
mis alegrías y me apoyan en mis tristezas.*

Agradecimientos

Para comenzar quiero agradecer a Dios, por permitirme vivir y la tranquilidad que en estos días he sentido por culminar uno de los pasos de mi vida, al cual le he dedicado gran parte de mi tiempo.

También, a mis padres y a mi hermana, Ángela María Velásquez, José Edison Villegas y Daniela Villegas Velásquez, quienes siempre han estado para mí, su apoyo es incondicional, me motivan y se alegran de todo aquello que alcanzo.

Además, a mis abuelos quienes de alguna manera estuvieron en el proceso y siempre han estado para mí, en especial, a mi abuelo José quien no logró verme como profesional pero muchas veces me dio la bendición para ir a mis prácticas. A mis abuelas por todo el amor que aún me ofrecen.

Así mismo a mi tutora Ligia Amparo Torres, quien fue paciente y realmente me aconsejó en diferentes aspectos, los cuales permitieron que no me rindiera. También, a la profesora Ana Milena Duque Garzón por apoyarme incondicionalmente, a los docentes (mis compañeros) quienes me animaron o ayudaron durante las sesiones de las implementaciones y a los estudiantes del grado sexto del Colegio Taller de María.

Por último, a cada persona que estuvo a mi lado en este proceso y que ahora no están, pero me motivaron o aconsejaron para que no me rindiera en los momentos en que más me agobiaba.

Resumen

En este documento se presenta una propuesta de aula para favorecer algunos aspectos conceptuales y procedimentales de los números enteros en estudiantes de grado 6° del Colegio Taller de María ubicado en Jamundí, Valle del Cauca. Metodológicamente, se realizaron 4 sesiones de clases y la implementación de una estrategia investigativa basada en el experimento de enseñanza basada en una secuencia de enseñanza desarrollada en 5 momentos principales: fundamentación y documentación de la problemática, el diseño de la propuesta de aula, la implementación de la propuesta de aula, resultados y análisis de resultado, finalmente, documento final y conclusiones.

Ahora bien, los principales resultados mostraron que, al realizar las actividades utilizando GeoGebra, la calculadora, los palitos bicolores y el juego “escalando hacia la meta”, los estudiantes reconocieron los números enteros y su estructura aditiva, qué tipo de procedimiento era menos complejo, la identificación de conceptos fundamentales en el estudio de los números enteros, sin embargo, se identificó que el uso de materiales manipulativos limitaban a los estudiantes al indicar sus respuestas y se debe potenciar más el uso de GeoGebra como un recurso pedagógico que permita que el conocimiento que los estudiantes adquirieron, utilizándolo, puedan aplicarlo en otros contextos.

Palabras clave: números enteros, estructura aditiva de números enteros, propuesta de aula, recursos pedagógicos.

Abstract

This document presents a classroom proposal to favor some conceptual and procedural aspects of integers in 6th grade students of the Taller de María School located in Jamundí, Valle del Cauca. Methodologically, 4 class sessions and the implementation of a research strategy based on the teaching experiment based on a teaching sequence developed in 5 main moments were carried out: foundation and documentation of the problem, the design of the classroom proposal, the implementation of the classroom proposal, results and result analysis, finally, final document and conclusions.

Furthermore, the main results showed that, by performing the activities using GeoGebra, the calculator, the bicolor sticks and the game "climbing towards the goal", the students recognized the integers and their additive structure, which type of procedure was less complex, the identification of fundamental concepts in the study of integers, However, it was identified that the use of manipulative materials limited the students when indicating their answers and the use of GeoGebra as a pedagogical resource that allows students to apply the knowledge acquired by using it in other contexts should be further promoted.

Keywords: integers, additive structure of integers, classroom proposal, pedagogical resources.

Tabla de Contenido

	Pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN.....	13
1.1. PRESENTACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA	13
1.2. OBJETIVOS.....	20
1.2.1. <i>Objetivo General</i>	20
1.2.2. <i>Objetivo Específicos</i>	20
1.3. JUSTIFICACIÓN	21
1.4. ANTECEDENTES	25
1.4.1. <i>Investigaciones a Nivel Local Respecto al Concepto del Número Entero o el Material Manipulativo</i>	26
1.4.2. <i>Investigaciones a Nivel Nacional Respecto al Concepto Del Número Entero y Algunos Recursos Pedagógicos Tecnológicos</i>	29
1.4.3. <i>Investigaciones a Nivel Internacional Sobre el Uso del Material Manipulativo para la Enseñanza-Aprendizaje de los Números Enteros y Su Estructura Aditiva</i>	32
2. CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	36
2.1. PERSPECTIVA CURRICULAR	36
2.2. PERSPECTIVA DIDÁCTICA	45
2.2.1. <i>Obstáculos, dificultades y errores en la enseñanza-aprendizaje de los números enteros</i>	46

2.2.2. Sobre las técnicas de los estudiantes y algunas alternativas para la enseñanza-aprendizaje de la estructura aditiva con números enteros	49
2.2.3. Recursos Pedagógicos	51
2.3. PERSPECTIVA MATEMÁTICA	55
2.3.1. Elementos Epistemológicos e Históricos de los Números Enteros.....	55
2.4. ARTICULACIÓN DE LAS PERSPECTIVAS	63
3. CAPÍTULO 3: LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS DESDE UNA PROPUESTA DE AULA CON INTEGRACIÓN DE ALGUNOS RECURSOS PEDAGÓGICOS	65
3.1. PROPUESTA DE AULA.....	66
3.2. SOBRE LA PROPUESTA DE AULA	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
3.2.1. El Uso de Recursos Pedagógicos Manipulativos y Tecnológicos con Números Enteros.....	68
4. CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS	83
4.1. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 1: LA MINERÍA SUBTERRÁNEA Y LOS AEROGENERADORES PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DEL NÚMERO ENTERO.....	84
4.2. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS, SITUACIÓN 2: ESTRUCTURA ADITIVA CON NÚMEROS ENTEROS TENIENDO COMO REFERENCIA ALTURAS Y PROFUNDIDADES.....	108
CONCLUSIONES GENERALES.....	129
REFERENCIAS.....	134

Índice de tablas

Tabla 1. Promedio y desviación estándar en las pruebas saber 11 - ICFES 2019 en el Valle del Cauca.	15
Tabla 2. Articulación de las perspectivas de la propuesta de aula.	64
Tabla 3. Organización de las situaciones y actividades propuestas.	67
Tabla 4. Tipificación S1A1P1P2.	84
Tabla 5 Tipificación S1A1P3.	85
Tabla 6. Tipificación S1A1P4.	86
Tabla 7. Tipificación S1A1P5.	87
Tabla 8. Tipificación S1A1P6.	88
Tabla 9. Tipificación S1A1P7.	89
Tabla 10. Tipificación S1A1P8.	90
Tabla 11. Tipificación S1A2P1.	91
Tabla 12. Tipificación S1A2P3.	96
Tabla 13. Tipificación S1A2P4.	98
Tabla 14. Tipificación S1A2P5.	99
Tabla 15. Tipificación S1A2P6.	99
Tabla 16. Tipificación S1A2P7.	100
Tabla 17. Tipificación S1A2P8.	102
Tabla 18. Tipificación S1A2P9.	103
Tabla 19. Tipificación S1A2P10A.	104

Tabla 20. Tipificación S1A2P10B.....	105
Tabla 21. Tipificación S1A2P11.....	106
Tabla 22. Tipificación S2A1P1.....	108
Tabla 23. Tipificación S2A1P2A.....	109
Tabla 24. Tipificación S2A1P2B.....	111
Tabla 25. Tipificación S2A1P2C.....	112
Tabla 26. Tipificación S2A1P2D.....	113
Tabla 27. Tipificación S2A1P3.....	114
Tabla 28. Tipificación S2A2P1.....	114
Tabla 29. Tipificación S2A2P2.....	116
Tabla 30. Tipificación S2A2P3.....	117
Tabla 31. Tipificación S2A2P4.....	118
Tabla 32. Tipificación S2A2P5.....	119
Tabla 33. Tipificación S2A2P6.....	120
Tabla 34. Tipificación S2A2P7.....	121
Tabla 35. Tipificación S2A2P8.....	123
Tabla 36. Tipificación S2A2P9.....	124
Tabla 37. Tipificación S2A2P10.....	125

Índice de figuras

Figura 1. Coherencia Vertical y Horizontal relacionado con el pensamiento numérico.	41
Figura 2. Actividades propuestas en los DBA. (MEN, 2016)	43
Figura 3. Actividades propuestas en los DBA. (MEN, 2016).	44
Figura 4. Sistema de numeración usado por los chinos.	57
Figura 5. Conjunto de los números enteros.	61
Figura 6. Procedimiento para resolver sumas con números enteros.	62
Figura 7. Propiedades de los números enteros.	62
Figura 8. Minería subterránea.	74
Figura 9. Mineros y la distancia.	75
Figura 10. Escalando hacia la meta.	78
Figura 11. Palitos bicolores.	81

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje se han transformado, en especial la educación en matemáticas, donde múltiples investigaciones han permitido identificar los aspectos sociales, culturales y educativos que intervienen en los actores principales, docente y estudiante, desarrollando teorías, alternativas y metodologías de enseñanza y aprendizaje que buscan que los estudiantes logren construir su propio conocimiento.

Un caso particular que conviene indagar corresponde a los números enteros y su estructura aditiva. Este es un concepto al que se le dedica varias sesiones de clase durante el grado sexto o séptimo, y es ahí donde investigaciones desarrolladas por autores como González et al. (1999), Bruno (2001,2004), Rico (2007), y González y Ponce (2017) plantean que, es común que estudiantes de grados superiores de educación básica y profesionales de otras áreas cuenten con evidentes dificultades para resolver situaciones en las que se involucran los números enteros y su estructura aditiva.

Por lo anterior, se hace necesario presentar alternativas que permitan que los estudiantes se apropien de su conocimiento, que en las clases sean sujetos activos para que no sea un concepto que se aprende para cumplir con un requisito, para aprobar la asignatura, el año lectivo o una evaluación.

Frente a lo anterior, el presente trabajo cuenta con la siguiente estructura para abordar esta problemática en estudiantes de grado 6°. En el primer capítulo se hace un recorrido por el planteamiento del problema (desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática), los objetivos, la justificación y los antecedentes que permitieron establecer algunas

fundamentaciones para el desarrollo de esta investigación, dado que se estudiaron aspectos fundamentales del concepto del número entero, sus operaciones y propiedades; orientaciones que sirvieron para la formulación de una propuesta de aula con el uso de recursos pedagógicos manipulativos y tecnológicos.

En el capítulo 2, se encuentra el marco de referencia conceptual a partir de tres perspectivas: la curricular, didáctica y matemática. En la primera se tienen en cuenta los referentes del Ministerio de Educación Nacional de Colombia para orientar los procesos educativos. En la segunda, las diferentes investigaciones presentadas por González et al. (1990) Bohórquez (2019) y Bruno (2000), para identificar los errores, obstáculos y alternativas para la enseñanza-aprendizaje del concepto del número entero. En la tercera, se identifican los elementos epistemológicos e históricos pertinentes en esta propuesta.

En el capítulo 3 y 4 se encuentra la propuesta de aula, el contexto de los estudiantes con quienes se implementó la propuesta, los resultados y análisis obtenidos en las sesiones con los estudiantes.

Finalmente, se presentan las conclusiones generales y algunas reflexiones didácticas respecto a los procesos de enseñanza del concepto del número entero y su estructura aditiva, presentándole al lector los aspectos positivos y los que se deben mejorar para que se fortalezcan los conocimientos de los estudiantes, teniendo en cuenta el uso del material manipulativo, tecnológico y situaciones en contextos de la vida real.

1. Capítulo 1. Aspectos generales de la investigación

A continuación, se presenta la problemática de la introducción del concepto del número entero y su estructura aditiva en la escuela. Teniendo en cuenta algunas referencias, se planteó el diseño de una propuesta de aula en la cual se implementó el uso de algunos recursos pedagógicos que permitieron la enseñanza y el aprendizaje de algunos aspectos del concepto de número entero. En este sentido, se muestra el desarrollo de todo el capítulo primero referente al planteamiento del problema, los objetivos, la justificación y algunos antecedentes, que muestran la importancia del trabajo.

1.1. Presentación de la problemática

En las orientaciones curriculares colombianas, particularmente los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), se considera importante el desarrollo del pensamiento numérico y se debe ampliar con el uso significativo de los números y sus propiedades, puesto que allí se desarrolla el razonamiento numérico que deben tener los estudiantes, por eso existe una responsabilidad enorme por parte de la escuela en términos de que, por ejemplo, los estudiantes puedan relacionar lo que aprenden en las clases de matemáticas con los fenómenos o cotidianidad de la vida real.

De hecho, se describe en los Lineamientos Curriculares que:

[...] lo más importante en el trabajo con las propiedades no es que los alumnos las expresen con símbolos o palabras, sino que sean capaces de manejar los números con solvencia al resolver problemas de la vida real, y en especial, para efectuar operaciones con destreza y eficacia, tanto en el cálculo mental como con calculadora. (MEN, 1998, p. 34)

Además, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se establece que la extensión del concepto del número se genera a partir de los distintos conjuntos numéricos, por ejemplo:

El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. (MEN, 2006, p. 56)

No obstante, aunque está claro que estos lineamientos, al igual que lo representan otros como los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, el informe de las pruebas PISA en matemáticas a nivel nacional mostró que, entre el año 2017 y el 2020, los estudiantes de educación básica obtuvieron una calificación mayor o igual a 71 puntos de 100 posibles, es decir, un 28% y 5% respectivamente de los que presentaron estas pruebas en el calendario A y B.

Esta realidad muestra la idoneidad de la implementación de nuevas estrategias que permitan que el aprendizaje de las matemáticas de forma significativa, y que abran paso a nuevas propuestas e investigaciones que logren desarrollar el pensamiento numérico de los estudiantes y los conlleve a explorar nuevas estrategias de resolución.

En este mismo escenario, en las pruebas SABER 11° en Colombia los estudiantes en la sección de matemáticas obtuvieron un puntaje promedio de 52 puntos de los 100, lo que cuestiona sobre qué está sucediendo con los conocimientos que se están adquiriendo durante los años educación básica secundaria, y plantean también interrogantes sobre si se está realmente obteniendo los resultados que se esperan.

Posiblemente sí se estén generando los resultados que se quieren durante cada año lectivo, sin embargo no se tiene en cuenta que en la pruebas SABER 11 tienen en cuenta

todas aquellas temáticas que fueron enseñadas, explicadas en cada año escolar y precisamente se evalúa la aplicación de estos conocimientos en diferentes contextos, tales como de vida real, matemáticos y otras ciencias, dado que se quiere “comprobar el grado de desarrollo de las competencias de los estudiantes que están por finalizar el grado undécimo de la educación media” (MEN, 2018, párr. 5).

Nivel de agregación	Promedio	Desviación
Colombia	52	12
ET	49	11
Oficiales urbanos ET	50	11
Oficiales rurales ET	48	10
Privados ET	53	12
GC 1 ET	46	10
GC 2 ET	49	11
GC 3 ET	53	11

Tabla 1. Promedio y desviación estándar en las pruebas saber 11 - ICFES 2019 en el Valle del Cauca.

Fuente: (MEN, 2019)

La tabla 1 muestra que, la educación básica es superada por un poco más de la mitad de lo que se quiere durante este tiempo, abriendo paso a la necesidad de reflexión curricularmente hablando, ajustar la práctica en el salón de clases, analizar las formas de enseñar y aprender de los educandos en múltiples escenarios, así como mirar las alternativas para resolver los planteamientos problemáticos.

Por otro lado, la construcción de los números enteros se hace a partir de los números naturales, lo que implica que algunos estudiantes aún utilicen los números positivos para resolver las operaciones en las cuales deberían utilizar los números negativos, es decir, se

crea un rechazo o se siguen ignorando los números negativos (Castaño, 2019; González et al., 1990).

Considerando la experiencia que se ha tenido en la enseñanza y aprendizaje de los números enteros por parte del estudiante- investigador (autor de este trabajo), se ha observado que algunos estudiantes se confunden cuando suman los números enteros, específicamente cuando tienen en los sumandos hay al menos un número negativo, debido a que la experiencia durante los 5 años de primaria (y en ocasiones hasta sexto) no tienen ninguna relación con el número negativo, por esto empiezan a surgir dudas sobre cómo resolver los ejercicios que les está proponiendo el docente, por ejemplo, cuando resuelven la suma, no saben si el resultado es positivo o negativo.

También, se ha analizado que la interpretación del símbolo “-” es menos compleja cuando se interpreta como resta con los números enteros positivos, pero al ver por ejemplo el (-4) lo relacionan directamente con la resta, es decir, separan el “-” del 4. Esto guarda relación con los planteamientos de Bruno (2001), Iriarte (1990), González y Ponce (2017) al enfatizar sobre la existencia de obstáculos, problemas y algunas dificultades respecto al aprendizaje de los números enteros, que han sido recurrentes en diferentes contextos.

Por ejemplo, abordando a Iriarte (1990) en su investigación con estudiantes de 8º, identificó algunos errores y obstáculos respecto a las concepciones que se crean con relación al concepto del número y la estructura aditiva con los números enteros, describiendo los siguientes:

- La identificación del número con cantidad: al relacionar los números con la cantidad obstaculizara la ampliación de la concepción de número, puesto que en la mayoría de los casos de la vida real no se utilizan los números negativos. Por ejemplo, en vez de decir “tengo -15 respecto al primero” se dice “me faltan 15 puntos para alcanzar al primero”.

En este sentido, “mientras no se abandone el plano de lo real es difícil concebir los números negativos” (Iriarte, 1990, p. 13)

- La suma como aumento: considerar siempre la suma como la acción de agregar una cantidad a otra, es decir, como si se cumpliera en general que el resultado siempre es mayor que los sumandos, por esto se obstaculiza la interpretación del estudiante al sumar los números negativos. Por ejemplo, si se tiene el 4 y se le indica al estudiante que busque un número que sumado con este la suma sea 1, posiblemente se piense que no existe o es le sea más complejo encontrar aquel número, debido a la concepción que han interiorizado de la suma con los números naturales.
- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural: Al relacionar que entre más lejos esté el número del cero es mayor, involucra obstaculizar el aprendizaje del orden con los números negativos. Por ejemplo, al preguntarle a los estudiantes sobre un número menor que -3, en ocasiones, se piensa que podría ser el -1 o 0.
- Ignorar el signo: Este es un error que los estudiantes comenten, en la resolución de problemas en aquellos casos que utilizan temperaturas negativas, por ejemplo, “-7 grados Moscú, -3 en Budapest. Si alguien hubiera viajado a Moscú a Budapest, ¿habría notado una subida o bajada de temperatura? Algunos estudiantes, olvidando por completo el signo “menos” y operando como si se tratara de números naturales, contestan: “una bajada porque $7 - 3 = 4$ ” (Iriarte, 1990, p. 15). Puede agregarse que, los estudiantes han sistematizado las operaciones con los números naturales, que ahora ignoran lo que es un “nuevo” uso del símbolo “-“con los números negativos.

En este sentido, es importante que los docentes utilicen diferentes estrategias que logren que el concepto del número permee el conocimiento del estudiante y logre utilizarlos en las operaciones básicas

De lo anterior, es necesario tener en cuenta que:

[...] además de los equipamientos en material de cada centro, se ha ampliado la oferta de exposiciones y museos de la ciencia, en las que ha cambiado el paradigma expositivo “prohibido tocar”. La visita a eventos o lugares excepcionales puede dar un impulso y generar expectativas, pero el impacto real lo proporciona el día a día en las aulas, donde es impredecible la manipulación de objetos, y no sólo diseñados para el aprendizaje de las matemáticas, sino también objetos cotidianos [...] (Corbalán, 1994, p. 59)

Asimismo, los docentes pueden utilizar material manipulativo en el aula de clase “[...] ya que son una ayuda importante para el aprendizaje de los alumnos” (Flores et al., 2011, p. 65), siendo necesario que el concepto del número no quede en ambigüedades, sea palpable e inteligible para los estudiante; aunque se debate que el uso del material manipulativo, no es tan frecuente en las clases de matemáticas de secundaria como en primaria, ya sea por desconocimiento de las metodologías que se pueden utilizar para enseñar este tema, las concepciones o creencias que se tienen dentro de la sociedad o por parte del docente.

En este sentido, “[...] hay que conectar la tarea a realizar con los conocimientos y capacidades reales de los alumnos; con las ideas y significados que tienen sobre los números y sus operaciones” (González et al., 1990, p. 17), siendo necesario que los estudiantes tengan contacto con los materiales manipulables puesto que con estos “[...] se plantean y resuelven situaciones interesantes, empleando medios adecuados y permitiendo la creatividad” (Flores

et al., 2011, p. 36); logrando que puedan construir su propio conocimiento y formalizar el concepto que se está estudiando con la intervención del docente, si es necesario.

Por otro lado, es importante considerar el avance de la tecnología para que las aulas comiencen a hacer uso de este tipo de recursos, dado que en algunos casos se conoce su existencia pero no se utilizan por asuntos de paradigmas o creencias de que no se deben usar (o en algunos casos por desconocimiento del docente).

Algunas de las creencias sociales y educativas indican que la calculadora no se puede usar dentro del aula, en este caso, es evidente que no se consideran las ventajas que puede brindar como soporte y verificación del paso a paso que realiza el estudiante para que él mismo pueda hacerlo, esto ayudaría a generar estrategias de motivación de los estudiantes que empiecen por desechar la idea de que un matemático es aquel que realiza operaciones mentales rápidamente.

Puede agregarse que “la calculadora no tiene porqué entorpecer o frenar la actividad cognitiva del estudiante, pero siempre es indispensable la reflexión previa del profesor acerca del uso que puede hacer de ella” (Flores et al. 2011, p. 118).

Por lo anterior, es importante que se creen propuestas que logren un aprendizaje interesante para que los estudiantes identifiquen que pueden utilizar lo que han aprendido dentro del aula del concepto del número y sus operaciones en otros contextos, particularmente de los números enteros, dado que el número negativo causa confusiones en algunos estudiantes cuando se les presenta por primera vez este concepto en la clase; principalmente desde 6° de básica secundaria.

Además, se debe tener en cuenta que con uso del material manipulativo y la calculadora, se puede lograr que se apropien de su conocimiento, dado que la manipulación

de los objetos es importante para el dominio de los conceptos y los objetos abstractos que se estudian en matemáticas, por lo tanto se considera importante resolver la siguiente pregunta:

¿Cómo a través de una propuesta de aula, que involucra algunos recursos pedagógicos, se pueden movilizar algunos aspectos del concepto de número entero y su estructura aditiva en estudiantes de grado sexto de la educación básica secundaria?

Para responder a esta pregunta de investigación, se creó una propuesta de aula que involucró el uso de material manipulativo y tecnológico para los estudiantes de grado sexto del Colegio Taller de María, para favorecer la construcción de algunos aspectos conceptuales y procedimentales de los números enteros tales como, la comprensión de la adición con los números enteros y sus propiedades, particularmente los números enteros negativos. De esta manera, se puedan diferenciar los procedimientos que se deben realizar, como también que sea menos compleja la manipulación del signo “-” en la adición de los números enteros.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Favorecer la construcción de algunos aspectos conceptuales y procedimentales de los números enteros, a través del uso de algunos recursos pedagógicos en una propuesta de aula para estudiantes del grado sexto de la educación básica.

1.2.2. Objetivo Específicos

- Determinar algunos elementos conceptuales y metodológicos desde las perspectivas didácticas, matemáticas, curricular y de los recursos para documentar el problema de investigación.

- Articular en una propuesta de aula los elementos conceptuales y metodológicos estudiados, utilizando algunos recursos tecnológicos y manipulativos.
- Caracterizar los desarrollos de los estudiantes de grado sexto a través de análisis de la implementación de la propuesta de aula que involucra recursos pedagógicos en el aprendizaje de los números enteros.

1.3. Justificación

El presente trabajo es importante para la investigación en educación matemática, debido a que se planteó desde 3 perspectivas que contribuyeron a la enseñanza y el aprendizaje de algunos aspectos del concepto del número entero, identificando los obstáculos, barreras y diferentes definiciones que han existido.

También tiene un aporte significativo en la medida que, intenta romper con paradigmas, creencias o concepciones en el contexto educativo que no permiten el avance al mismo ritmo que se hace en otros contextos de la vida cotidiana, por esto se consideró importante hacer una propuesta de aula que implementara algunos recursos tecnológicos y manipulativos, que se pueden transformar en recursos pedagógicos haciendo un uso adecuado y fundamentado en los referentes curriculares anteriormente mencionados.

Ahora bien, este trabajo complementa el trabajo del docente, usando la aplicación de GeoGebra en algunas tareas de la educación en Matemáticas, debido a que:

[...] la innovación tecnológica no se traduce directamente en innovación pedagógica, lo que sugiere que en los próximos años las políticas educativas debieran poner más el acento en las transformaciones del modelo de las prácticas educativas y enfatizar menos (aunque sin obviarlo) la dotación de aparatos tecnológicos a las aulas. (AREA, 2018, como se citó en Ruiz & Alemán, 2019, p. 22).

De modo que, este trabajo permitirá que se brinde un espacio a la reflexión respecto al qué y cómo debemos articular los diferentes aparatos tecnológicos que permitan una educación en matemáticas menos tediosa.

En este escenario, no se puede olvidar el aporte significativo al concepto matemático que se quiere enseñar al estudiante, pues no se trata de utilizar o implementar tecnologías sin una revisión previa de las ventajas que puede brindar al currículo o a las temáticas que se plantean; la idea es favorecer al educando para avanzar en la proposición de estrategias para la resolución de problemas siempre con el norte del concepto matemático que se estudia.

Además, esta propuesta de aula que se implementó tuvo el objetivo de favorecer la construcción de algunos aspectos conceptuales y procedimentales de los números enteros en el grado sexto, por lo que consideró crucial el uso de recursos pedagógicos y tecnológicos para que los estudiantes logaran construir el concepto del número entero y los diferentes procedimientos de su estructura aditiva.

Asimismo, que fuera menos complejo el uso de diferentes representaciones, tales como: los signos, símbolos, material manipulativo y tecnológico en la resolución de problemas en contextos cotidianos o propios de las matemáticas, además que descubrieran que hay otras maneras de aprender, motivando a la construcción de sus propios conocimientos, es decir, que los estudiantes llegaran a sus propias conjeturas verificando los resultados con los recursos pedagógicos.

En este orden de ideas, se considera que este trabajo aporta a la investigación por ser acorde a lo que se plantea en los Lineamientos Curriculares:

En general consideran que las matemáticas en la escuela tienen un papel esencialmente instrumental, que por una parte se refleja en el desarrollo de habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida práctica, para usar

ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos [...]. (MEN, 1998, p. 12).

La estimulación que permite el objeto manipulativo y el uso de la tecnología en las clases de matemáticas amplía las destrezas, las habilidades de los estudiantes y la visualización del objeto matemático, dado que hay diferentes representaciones, símbolos o signos que el estudiante puede manipular, comparar u operar.

Además, al utilizar las diferentes formas de llegar al concepto del número entero y su estructura aditiva, los estudiantes se enteran que no hay una única manera de aprender y no se quedan con lo que dice o hace el docente, sino que complementan y amplían su conocimiento con sus compañeros, lo que hace que se desarrolle su pensamiento numérico y un aprendizaje significativo.

Desde estos aportes, la articulación de los recursos pedagógicos mencionados permite que se formulen y exploren estrategias que se armonizan con los medios con los cuales se quiere transmitir el mensaje, y donde se espera fácilmente que el estudiante pueda interactuar con el docente en el momento de la exploración, validando sus conjeturas o reflexiones que se generan a partir del uso de los recursos pedagógicos.

Igualmente, lo que el docente planifica para su clase, el orden en que lo ejecuta y los recursos que utiliza, permiten que el estudiante no se concentre únicamente en memorizar lo que en clase se explicó sobre el concepto, sino que “[...] lo más importante es el problema que se quiere resolver” (Flores et al., 2011, p. 36)

También esta investigación permite identificar que las innovaciones pedagógicas son importantes, dado que no es posible que desde que se realizó la investigación hasta hoy en día se utilicen las mismas estrategias de enseñanza, es decir, que los estudiantes deban

memorizarse procedimientos con algunos números, pero que al finalizar el grado sexto o séptimo no comprendan realmente cómo es que se obtienen estos resultados.

No lograrlo implicará que el docente deba explicar nuevamente los números enteros y su estructura aditiva, debido a que los estudiantes no lo recuerdan, pues, “[...] en muchas ocasiones la memorización de conceptos o procedimientos puede ser necesaria, pero creemos que el problema está en aquellos casos en los que no se dota de significado a lo memorizado” (Carazo & Brey, 2012, p. 83). Así, utilizar la memorización directa en la enseñanza no siempre es la única solución, siendo necesario que la labor del docente sea la de contribuir a la construcción significativa de los conceptos matemáticos que se logrará con la fundamentación de las actividades que son planteadas.

Además, la articulación de diferentes recursos pedagógicos permite que los estudiantes exploren sus estrategias, aunque no se desconoce que después del uso constante de estos, se llega a la memorización, pero como lo describen Flores et al. (2011)

“El aprendizaje directo se asocia con la memorización de definiciones y procedimientos. En el indirecto se aprende haciendo, aunque después haya que memorizar de manera sistemática para recordar el procedimiento. Partimos de que el que aprende es el alumno, pero cada alumno tiene unos hábitos particulares e interpreta las instrucciones de manera diferente”. (p.36)

Por todo ello, las tareas propuestas con materiales y recursos están menos reguladas que cuando tiene protagonismo el profesor. Se puede interpretar que muchas de estas tareas son de investigación y opinión, por lo que tenemos que establecer algún tipo de control que ayude a compartir lo aprendido, dándole los límites que establezcan su formulación, justificación y fundamentación; es necesario complementarlas mediante acciones en común

para incentivar a expresar lo aprendido y dar forma para que permita su retención y recuperación.

Se debe agregar que, los números enteros se utilizan en las diferentes temáticas que son enseñadas en los grados superiores, por lo que este trabajo permitiría que los estudiantes consigan formalizar la intuición de lo que han conocido a través de su experiencia en contextos escolares y cotidianos con los números naturales, además de que en la vida cotidiana también se utilizan intuitivamente los números negativos, lo que indica que se deben ampliar los aspectos procedimentales con estos.

Finalmente, se espera que este trabajo aporte algunas reflexiones para los docentes en formación y en ejercicio, nutra las diferentes estrategias que los estudiantes utilizan y que la educación matemática sea menos compleja, es decir, que los aspectos conceptuales y procedimentales con los números enteros sean más atractivos para los estudiantes, teniendo en cuenta los referentes curriculares.

1.4. Antecedentes

En este apartado se presentan algunas investigaciones en tres contextos: las primeras son a nivel local, cuyos trabajos son realizados por estudiantes de la Universidad del Valle; las segundas son a nivel nacional, en las cuales se tienen en cuenta los trabajos presentados por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Nacional y la Universidad Pedagógica Nacional y, por último, a nivel internacional dos trabajos de diferentes universidades de Perú, en los cuales se utilizaron materiales manipulativos para la enseñanza de los números enteros y la estructura aditiva con estos. Así, todos estos escritos se consideraron importantes, debido a que en todas se referencian y estudian aspectos

fundamentales sobre el concepto del número entero, el uso del material manipulativo y tecnológico.

1.4.1. Investigaciones a Nivel Local Respecto al Concepto del Número Entero o el Material Manipulativo

En este apartado se presentan algunos resultados de investigaciones desde la perspectiva local que se consideran importantes para esta propuesta de aula debido a que se estudia el concepto del número entero diferentes contextos y el uso del material manipulativo en la educación básica secundaria para la enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos.

Inicialmente, Navia y Orozco (2012) realizaron su trabajo de grado respecto al concepto del número entero, enfatizando en el número negativo, en la línea de formación de didáctica de las Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, presentando como objeto de estudio los números enteros, en particular el número negativo, fundamentados en que históricamente los matemáticos tardaron muchos siglos en aceptarlos como números.

La experiencia de las autoras en su práctica docente permitió que observaran que, un gran porcentaje de los estudiantes no comprendían el concepto del número entero y las operaciones básicas con este conjunto numérico, ya que se enseñan los números negativos haciéndole analogías a los estudiantes, “[...] sin considerarlos como objetos de naturaleza distinta a los positivos” (Navia y Orozco, 2012, p. 7).

Para analizar los datos adoptaron una metodología de tipo cualitativo e interpretativo, implementando la propuesta en un grupo de estudiantes del grado séptimo por medio de una secuencia didáctica para la construcción de los números enteros a partir del significado de los números negativos; ideas prácticas y pedagógicas. Por ende, dentro de los principales

resultados, en los estudiantes se evidenciaron avances conceptuales de los números negativos al utilizarlos en diferentes contextos y estuvieron más atraídos por las actividades en las que se utilizaba la recta numérica para resolver operaciones.

Por su parte, Caicedo, Colorado e Hinestroza (2018) realizaron en su investigación la implementación de una propuesta de aula que involucraba situaciones problemas contextualizadas para lograr identificar algunas dificultades que se presentan con los estudiantes al momento de solucionar actividades en contextos cotidianos, y las características que se deben tener en cuenta al diseñar situaciones problemas que aporten a la comprensión del concepto del número entero. Para ello, utilizaron la metodología de estudio de caso para lograr una explicación mucho más detallada de las conjeturas y estrategias que utilizan los estudiantes.

Las conclusiones de los autores fueron que, la propuesta de aula permitió comprobar la existencia de algunas dificultades como las de ordenar, los cambios de registro, entre otras que son importantes para comprender, reconocer y aprender la conceptualización de los números enteros. Entonces, utilizando estas respuestas diagnósticas se diseñaron e implementaron actividades que tuvieran sentido y significado para los estudiantes, dado que estas situaciones hacían parte del contexto del estudiante. También, se resalta que la implementación de la propuesta de aula permitió que los estudiantes aumentarán su nivel de comprensión en el concepto del número entero.

Se presenta también como antecedente, el trabajo de grado de Espinosa (2013), en el cual se tiene en cuenta el material manipulativo para la enseñanza de la factorización en estudiantes de grado octavo. Se usaron los Algebloks para identificar las limitaciones y potencialidades que permiten al momento de factorizar; se consideró importante que al llevar

este tipo de materiales al aula los docentes deben tener en cuenta que “El material manipulativo no se puede convertir en el objeto de estudio” (Espinosa, 2013).

La metodología utilizada fue un estudio instrumental de casos de tipo cualitativo en la cual se utilizó la descripción para comprender el estudio de caso. En los resultados se evidenció que los estudiantes utilizando el material manipulativo lograron concentrarse y utilizar diferentes procedimientos para resolver los ejercicios propuestos, además estaban muy motivados resolviendo las tareas asignadas que hasta estaban perdiendo la noción del tiempo; el uso de los Algeblocs permitió que los estudiantes justificaran sus procedimientos con un discurso matemático que involucraban conceptos geométricos, numéricos y algebraicos.

Las investigaciones que se presentan son pertinentes para el trabajo que se desarrolló, debido a que se indaga y se cuestiona, primero respecto al número entero en el grado sexto de la educación básica secundaria, utilizando una secuencia didáctica y una propuesta de aula, las cuales le permiten que los docentes puedan trabajar situaciones del propio contexto de los estudiantes.

Sin embargo, no se utiliza ningún tipo de material manipulativo o tecnológico, a excepción de la de Espinosa (2013), para la enseñanza-aprendizaje del concepto del número entero, en efecto, se buscará en esta propuesta potencializar las estrategias de los estudiantes para resolver tareas o actividades en las que se trabaje este concepto con la implementación de materiales manipulativos y tecnológicos.

Por otro lado, el material manipulativo en los grados de secundaria no es común por esto se muestra que existen propuestas en las que se implementa, pero es importante que los estudiantes tengan contacto con materiales desde el pensamiento numérico y no solamente se llegue al pensamiento algebraico y variacional para que se puedan implementar. Sin embargo,

el trabajo con los Algebloks permite tener en cuenta que el material manipulativo no se puede convertir en el objeto de estudio, sino que es el medio que permite que los conceptos abstractos que se están trabajando puedan ser un poco más accesibles para los estudiantes.

1.4.2. Investigaciones a Nivel Nacional Respecto al Concepto Del Número Entero y Algunos Recursos Pedagógicos Tecnológicos

A continuación, se presentan algunas investigaciones nacionales que tienen en cuenta el concepto del número entero y el uso de la tecnología para la enseñanza-aprendizaje de estos. Es importante resaltar que el uso de la tecnología es evidente y palpable en diferentes contextos, pero en el contexto educativo aún existen restricciones y/o limitaciones, ya sea porque las instituciones no le ven una necesidad al uso de los celulares o computadores en las aulas de clase, motivos económicos o el conocimiento que tienen los docentes respecto a las plataformas, apps y diferentes softwares que ayudarían a potencializar la formación de los estudiantes.

Bohórquez (2019), Trabajo de grado presentado para optar el título de Magíster en Docencia de las matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional, describe algunas de sus experiencias como docente en diferentes instituciones públicas y privadas. La autora describe que trabajó en una institución donde la mayoría de los estudiantes habían estado juntos desde primaria y en otra, donde los estudiantes habían hecho su primaria en diferentes instituciones, en ambos casos, las estudiantes presentaron dificultades en los números enteros, debido a que no hay un aprendizaje significativo de estos.

Afirma que, parece que se aprendieran algunos procedimientos o fórmulas que luego son olvidadas en los grados siguientes, en este sentido, se espera que, con las diferentes representaciones y la propuesta de aula, el aprendizaje sea significativo, dado que se desea

que los estudiantes puedan construir su concepto del número negativo, sin necesidad de repetir o copiar lo que el docente escribe o dice.

Los resultados de esta investigación mostraron que, es necesario que los docentes realicen una autocrítica del modo como quieren transmitir el conocimiento a sus estudiantes, que no sea solamente enseñarles conceptos matemáticos, sino que sean interesantes para lograr que tengan un aprendizaje significativo, concluyendo que los docentes de sexto y séptimo de básica secundaria no lograron aplicar nada de las reflexiones descritas.

En el caso de la investigación de Polanco (2020), en su trabajo final para optar al título de Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, presenta la importancia de la implementación de algunos recursos pedagógicos y tecnológicos dentro del aula de clase dado los avances de esta última en la educación, pero siempre precisando que “[...] no siempre su inclusión en el aula obedece a ejercicios estructurados en armonía con estrategias pedagógicas claras” (Polanco, 2020, p. 1).

En este punto, el autor considera que el apoyarse en estas herramientas permite invitar fácilmente a los docentes de matemáticas a generar estrategias pedagógicas que implementen el uso de la tecnología como motor de transformación, razón por la cual decide utilizar para su trabajo una metodología basada en la Investigación Acción Participante (IAP) para involucrar lo que piensa el estudiante más allá de lo que solo dice o escribe, particularmente realizado en un contexto de pandemia como lo representó el COVID 19 para el mundo en general.

Los resultados arrojados exponen tres aspectos que se tuvieron en cuenta en las conclusiones, primero, por la parte social algunos estudiantes no tenían acceso a computadores en sus hogares lo que los limitó frente a la realización de algunas de las actividades que normalmente se enseñan en las instituciones educativas y el consumo de

drogas con la crisis mundial del COVID 19 no permitió en algunos casos la mejor disposición para responder, segundo, respecto a la enseñanza de los números enteros, se identificó que los docentes no entran a enseñarlos directamente porque existen conceptos de primaria que han sido olvidados por los estudiantes, en este sentido, la situación didáctica mediada por las herramientas TIC permitió que se mejorará en el aprendizaje de los números enteros con sus operaciones, dada la nueva configuración de las actividades planteadas. Por último, que los estudiantes tenían dificultad en resolver problemas que eran cercanos a su contexto, por esto se propone que se generen estrategias que permitan que los estudiantes contextualicen el conocimiento matemático y puedan utilizarlo en la solución de problemas que se relacionen con su entorno.

García (2018) plantea el problema, debido al uso de la memorización de los conceptos y/o procedimientos para resolver problemas con la estructura aditiva con los números enteros, por esto se hizo el uso de la tecnología a la luz del aprendizaje significativo, debido a que el Ministerio de Educación Nacional plantea que no solo se busca que los estudiantes aprendan a hacer operaciones, sino que reconozcan realmente el concepto de los procedimientos que se le presentan.

Para abordar el problema se utilizó la estrategia pedagógica basada en el aprendizaje significativo que está inmersa en el Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA), en este caso, se utilizaron vídeos lúdicos, applets contextualizados (por ejemplo, el recorrido de un ascensor, las altitudes, temperatura, entre otros), pero se utilizó con una parte del grupo y la otra parte, recibieron las clases de manera tradicional. Entre los resultados se analizó que los estudiantes que utilizaron el OVA obtuvieron un puntaje promedio mayor a los que tuvieron las clases en la forma de educación tradicional, además que los estudiantes con el OVA mostraron diferentes procedimientos para dar solución a las actividades que se le planteaban.

A modo de conclusión, las propuestas presentadas a nivel nacional presentan dos puntos de vista, el primero tiene en cuenta en modo de narrativa el concepto de los números enteros, debido a que se considera importante la motivación y lo significativo que deben ser los conceptos matemáticos al momento de enseñarlos, en efecto, se tendrá en cuenta en esta propuesta de aula, complementándolo con ideas que innoven y estimulen el pensamiento de los estudiantes y, así pues, se logre una adquisición de los conocimientos que se quieren para el uso de estos en la vida real.

El segundo punto de vista, presenta la implementación de la tecnología en la enseñanza de los números enteros, donde se destaca la importancia del uso de este tipo de herramientas para generar mayores opciones para que los educandos puedan resolver los problemas planteados, y de paso cualifiquen su conocimiento sobre el tema abordado. Sin embargo, está claro que no siempre los estudiantes tienen la posibilidad de usar este tipo de herramientas, lo cual podría significar una desventaja al momento de realizar las actividades en comparación con compañeros y otros educandos que sí cuentan con estas, de ahí que se considere complementar con material manipulativo para tener diferentes alternativas, puesto que al final los recursos pedagógicos son el medio y no el fin de las propuestas educativas.

1.4.3. Investigaciones a Nivel Internacional Sobre el Uso del Material Manipulativo para la Enseñanza-Aprendizaje de los Números Enteros y Su Estructura Aditiva

Se consideran pertinentes las siguientes investigaciones como antecedentes del presente trabajo de grado, debido a que en ambas se tienen en cuenta diferentes materiales manipulativos para la enseñanza-aprendizaje de los números enteros y las operaciones con estos.

Requena (2018), estudiante de la licenciatura en educación secundaria en la especialidad de matemática, física e informática de la Universidad Nacional “José Faustino Sánchez Carrión” ubicada en Perú., presentó un trabajo de grado donde se adaptaron las regletas de Cuisenaire para identificar la efectividad que tenía para la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones con números enteros, esto con el objetivo de que fuera menos complejo su aprendizaje; concepto particularmente abordado en los grados 6° y 7° de la educación básica secundaria.

Para la aplicación de las actividades o tareas que se les presentaron a los estudiantes, se dividieron en dos grupos, el primero utilizaba el material y el otro no (grupo de prueba y control). El tipo de investigación se describe según Requena (2018) como “aplicada o empírica porque se busca la aplicación o utilización de los conocimientos que se tienen acerca de las regletas de Cuisenaire” (p. 23), y se utilizó un enfoque cuantitativo, debido a que se trabajaron con aspectos observables y medibles.

En los resultados de la propuesta de aula que se implementó en esta investigación, se evidenció que los materiales manipulativos que se quieran utilizar para la enseñanza de los conceptos matemáticos deben tener unas reglas propias que guíen a los estudiantes hacia el conocimiento que se quiere, además de que el uso es solo para aprehender las reglas de las operaciones básicas con los números enteros, por lo que en este caso particular se comprobó que la adaptación de las regletas de Cuisenaire facilitó la familiarización de los estudiantes con los números enteros en contextos de la vida cotidiana.

Ahora bien, Torres (2016) en su trabajo de grado para obtener el título profesional de licenciado en Educación Secundaria: Matemáticas de la Universidad César Vallejo ubicada en Chiclayo, Perú, desarrolló una investigación a partir de la aplicación de material concreto para mejorar la resolución de problemas en la estructura aditiva con los números enteros en el

grado 6° de educación básica secundaria, bajo la premisa de que el material manipulativo impacta positivamente para desarrollar las habilidades que los estudiantes para comprender ideas como la suma y resta de los números enteros.

El método de investigación fue cuantitativo para lograr organizar los resultados, de tal manera que sirviera para investigaciones posteriores, en este sentido, fue pertinente el método hipotético deductivo y el método de modelación, además, los instrumentos para la recolección de datos fueron pre test, post test y ficha de observación. Por último, para realizar los análisis se consideraron importante los conceptos de estadística tales como: Las medidas de tendencia central, la desviación estándar y pruebas de hipótesis.

Los resultados, mostraron que la propuesta aportó a mejorar el conocimiento debido a que, posterior a la implementación del material, los estudiantes aprehendieron el concepto del número entero y las operaciones con estos, además de posibilitar la construcción de su propio conocimiento (aprendizaje significativo) y por último, “se infiere si no se aprende a resolver problemas de adición y sustracción de números enteros mediante la manipulación de material concreto, a través de toda la vida del estudiante habrá rezagos, conflictos en la forma correcta de operar números enteros y estudiantes con posibles fracasos en el área de matemática” (Torres, 2016, p.69-70)

Las propuestas de trabajo que se presentaron muestran que, se puede tener en cuenta en el aula la implementación del material manipulativo dentro de la enseñanza de los números enteros, debido a que se evidencia que es necesario que los estudiantes vean, manipulen e interpreten lo que se está enseñando, aunque, se reconoce que los materiales no son el objeto de estudio.

Se debe resaltar que se espera que complementen y aporten nuevas ideas para el aprendizaje de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes, con el uso de las

reglas adecuadas que los guíen para capturar esos objetos abstractos que en la mayoría de los casos tienden a confundir a los educandos. Además, ambas investigaciones muestran que el grupo que trabaja con los objetos manipulativos tiende a tener un mejor rendimiento de la aprehensión del concepto de los números enteros.

En los trabajos presentados, no se ha complementado el material manipulativo y tecnológico para que los estudiantes logren explorar estrategias o alternativas para resolver y verificar los resultados que obtienen. En efecto, se espera que con esta propuesta los estudiantes se apropien de su conocimiento y que, en grados superiores, en la vida cotidiana o en otros contextos en los que se requieran de la estructura aditiva con los números enteros, los estudiantes logren resolver los ejercicios planteados de forma correcta.

Finalmente, con la implementación de estos recursos, lo más importante es que los estudiantes logren complementar los conocimientos sobre el concepto del número, ampliándolo para reconocer las situaciones que se deben modelar utilizando los números enteros.

2. Capítulo 2. Marco de referencia conceptual

A continuación, en el capítulo 2, se presentan las tres perspectivas que se tienen en cuenta en este trabajo de grado, para llevar a cabo la formulación de actividades o propuesta de aula. Las perspectivas que se consideran fundamentales son las perspectivas Curricular, Didáctica y la Matemática.

En la primera se tienen en cuenta los documentos curriculares que orientan la estructuración del currículo en la escuela. En la perspectiva didáctica se tienen en cuenta los errores, obstáculos y dificultades en la enseñanza-aprendizaje de los números enteros, además de los procedimientos de los estudiantes y algunas alternativas que son utilizadas para la enseñanza y el aprendizaje de la estructura aditiva con números enteros. Y, por último, en la perspectiva matemática se tienen en cuenta los elementos epistemológicos e históricos, además se definen los números enteros y su estructura aditiva con sus respectivas propiedades.

2.1. Perspectiva curricular

En la perspectiva curricular se tienen en cuenta los referentes que brinda el Ministerio de Educación Nacional (MEN) para apoyar los procesos pedagógicos de las instituciones públicas y privadas en Colombia. Los documentos oficiales del MEN pertinentes que sirven para direccionar esta propuesta son:

- Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998)
- Los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas. (MEN, 2006)
- Los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016)

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006) y en los Lineamientos Curriculares (1998) destaca el pensamiento numérico, que es el manejo de los números, las operaciones aditivas y multiplicativas con estos, también el uso de este conocimiento en los diferentes contextos de la vida diaria u otros contextos en los que sea necesario el uso de procedimientos matemáticos, en este sentido se considera importante que en la escuela los estudiantes lo desarrollen a partir de actividades contextualizadas para lograr un aprendizaje significativo, dado que si se trabaja con el contexto de los mismos estudiantes se logra que puedan utilizar diferentes estrategias que pueden construir a partir de lo que conocen.

Como se menciona en los Lineamientos Curriculares “[...] el pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativo” (MEN, 1998, p. 26), es decir, que es necesario el planteamiento de actividades que permitan explorar paso a paso la naturaleza del conjunto numérico que se les está presentando, para que puedan identificar las distintas formas en las que se pueden representar las cantidades, el valor o establecer la relación con elementos que han construido en la experiencia escolar o cotidiana.

Ahora bien, “el contexto mediante el cual se acercan los estudiantes a las matemáticas es un aspecto determinante para el desarrollo del pensamiento” (MEN, 1998, p. 26). Aquí se establece importante el uso de contextos conocidos para que la primera experiencia sea inteligible y significativa, y no se creen barreras debido al rechazo que se puede establecer por desconocer el contexto, sin embargo, se debe tener en cuenta que la naturaleza de los números enteros exige el uso de contextos matemáticos propios que se deben escoger sobre los conocimientos previos para lograr una introducción clara para ellos.

Por lo anterior, se considera relevante que “para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos como el geométrico, el métrico, el de datos; es como si este tipo de pensamiento tomara una forma particular en cada sistema” (MEN, 1998, p. 17), sin embargo, no significa que el pensamiento numérico requiere necesariamente de los otros sistemas, sino que potencializan su desarrollo.

En este sentido, este trabajo pretendió favorecer la construcción de algunos aspectos de los números enteros enmarcándose en el pensamiento numérico que se describe en los lineamientos curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBCM), donde se tuvo en cuenta que el aprendizaje fuera significativo para que los estudiantes pudieran utilizar este conocimiento en los siguientes años escolares, dado que en los Estándares Básicos de Competencia se propone que en los grados sexto y séptimo de la educación básica se estudien los números enteros, puesto que los estándares no hacen alusión a estos directamente, sino que se refieren a los números racionales.

Cabe aclarar que, este trabajo incorporó actividades contextualizadas para que los estudiantes las realizaran, siendo totalmente modificables estos contextos para futuros docentes que quieran utilizar la propuesta de aula, debido a que los contextos que se utilizaron en esta propuesta son conocidos para los estudiantes donde se implementó, para facilitar la comprensión de los conceptos, puede anotarse que:

[...]para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesaria la intervención continua del maestro para modificar y enriquecer ese contexto con la intención de que los estudiantes aprendan. Estas intervenciones generan preguntas y situaciones interesantes que por estar relacionadas con su entorno son relevantes para el estudiante y le dan sentido a las matemáticas. Así es como del contexto amplio se generan situaciones problemáticas (MEN, 1998, p. 19)

Por otro lado, el aprendizaje de la estructura aditiva con los números enteros y su concepto son fundamentales, sin embargo, se tiene en cuenta que:

Aunque los chinos e hindúes empezaron a explorar números negativos hace más de mil años, en los países europeos éstos no se aceptaron como números hasta bien entrado el Siglo XVII. El concepto de número negativo es el resultado de la cuantificación de ciertos cambios en las medidas de una magnitud, o de la medida relativa de una magnitud con respecto a un punto de referencia, identificado con el cero. (MEN, 2016, p.60)

Por lo anterior, el Ministerio de Educación Nacional en los EBCM invita a pensar a los docentes en implementar diferentes estrategias que permitan que la resistencia que se ha tenido históricamente a los números negativos no se siga reflejando en los estudiantes, por esto, esta propuesta utilizó recursos pedagógicos para resolver actividades o tareas de los contextos conocidos de los estudiantes, como se propone en los lineamientos curriculares “Es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos” (MEN, 1998, p.35) de esta manera potencializar los procedimientos, el empoderamiento de los estudiantes de su propio conocimiento y se logre un aprendizaje significativo.

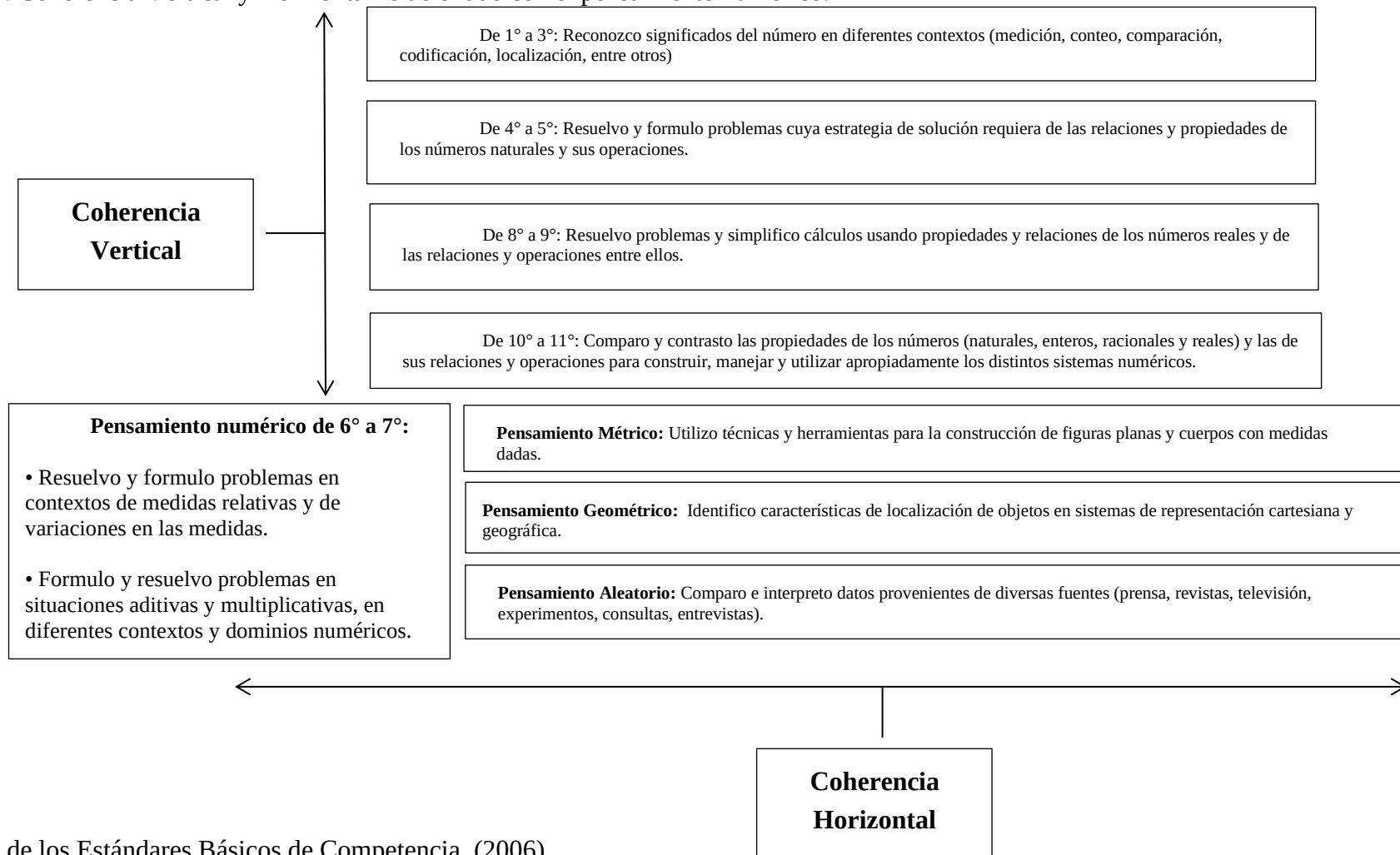
Por lo anterior, es importante tener en cuenta que las actividades presentadas en la propuesta de aula están organizadas de dificultad media, media-alta y finalmente alta, para así guiar a los estudiantes a conocimientos abstractos y cambiar la forma tradicional que es común en las escuelas que es presentar una definición, un ejemplo y ejercicios repetitivos.

Se considera importante tener en cuenta en el desarrollo de esta propuesta de aula los siguientes Estándares en relación con el concepto del número entero, la estructura aditiva con los números enteros y el pensamiento numérico en los grados sexto y séptimo de la educación

básica secundaria, además de su coherencia vertical y horizontal con los estándares los otros grados de la educación básica y media.

A continuación, se presenta la tabla en la cual se relacionan los estándares que tienen en cuenta en esta propuesta de aula, se organiza de forma horizontal con los pensamientos métrico, geométrico y aleatorio, debido a que se considera que se pueden trabajar estos estándares transversalmente en la propuesta, además que se fortalecen los conceptos que se le presentaron a los estudiantes en los grados de 1° a 5° en la coherencia vertical que podrían ser “los conocimientos previos” que se considera que han adquirido los estudiantes, así mismo, lo que se espera que puedan comprender en los grados de 8° a 11°, después de haber trabajado y cumplido con los estándares que se tienen en cuenta del pensamiento numérico en esta propuesta para grado sexto.

Figura 1. Coherencia Vertical y Horizontal relacionado con el pensamiento numérico.



Nota. Adaptado de los Estándares Básicos de Competencia, (2006).

Los estudiantes deben utilizar las propiedades de los números enteros para proponer estrategias y procedimientos que ayuden a resolver problemas en diferentes contextos de la vida cotidiana como se plantea también en los lineamientos curriculares. Al respecto, el MEN, en los DBA presenta algunos tipos de actividades que promueven el desarrollo de las habilidades que necesitan los estudiantes para realizar cálculos que solucionen los problemas que se le plantean, actividades tales como:

Derechos Básicos de Aprendizaje • v.2

- 1.** Interpreta los números enteros y racionales (en sus representaciones de fracción y de decimal) con sus operaciones, en diferentes contextos, al resolver problemas de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc. Reconoce y establece diferentes relaciones (de orden y equivalencia) y las utiliza para argumentar procedimientos).

Evidencias de aprendizaje

- Resuelve problemas en los que intervienen cantidades positivas y negativas en procesos de comparación, transformación y representación.
- Propone y justifica diferentes estrategias para resolver problemas con números enteros, racionales (en sus representaciones de fracción y de decimal) en contextos escolares y extraescolares.
- Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias.
- Interpreta y justifica cálculos numéricos al solucionar problemas.

Ejemplo

En una competencia de autos a tres vueltas, el tiempo (en minutos) de cada vuelta se registró en la siguiente tabla.

	A	B	C
Vuelta 1	1,573	1,580	1,593
Vuelta 2	1,644	1,662	1,632
Vuelta 3	1,790	1,682	1,604

Los competidores ganan puntos de acuerdo con las siguientes reglas:

Finalizada la segunda vuelta se dan 10 puntos de bonificación en la clasificación general a quien vaya de líder y 5 puntos a quien vaya de segundo.

Al ganador de la competencia le dan 20 puntos, al segundo 10 puntos y al tercero 5 puntos.

- a) Escribe cómo se distribuyen los puntos al finalizar la segunda vuelta y al finalizar la carrera.
- b) Determine cuál de los autos se acercó más a un minuto y sesenta décimas de minuto en la primera vuelta.
- c) Explica por qué considera que la práctica generalizada en este tipo de carreras el tiempo por vuelta se representa con tres dígitos después de la coma y no por dos.
Calcula la diferencia de tiempo de los tres carros A, B y C en la primera vuelta con un carro D si se sabe que en esa vuelta invierte 1,4 minutos. ¿Cuáles serían estas diferencias si por un percance mecánico demora 1,09 minutos?

- 2.** Utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas.

Evidencias de aprendizaje

- Propone y utiliza diferentes procedimientos para realizar operaciones con números enteros y racionales.
- Argumenta de diversas maneras la necesidad de establecer relaciones y características en conjuntos de números (ser par, ser impar, ser primo, ser el doble de, el triple de, la mitad de, etc).

Ejemplo

Un obrero tiene que controlar la cantidad de vapor que hay en la caldera a través de un dispositivo conectado a ella, así como muestra la figura. Por este dispositivo entra vapor que se encarga de mover el corcho. El corcho sube cuando aumenta la cantidad de vapor en la caldera y baja cuando disminuye. Cuando el

Figura 2. Actividades propuestas en los DBA. (MEN, 2016)

Fuente: Elaboración propia

Matemáticas • Grado 6º

Derechos Básicos de Aprendizaje • v.2

nivel del vapor en la caldera es el normal el corcho marca exactamente el punto cero.



□ Para indicar la ubicación del corcho se utilizan números acompañados del signo más (+) o del signo menos (-). Si el corcho está por encima del punto cero su ubicación se representa con un número acompañado del signo más. Si el corcho está por debajo de cero la ubicación del corcho se representa con un número acompañado del signo menos.

□ Los desplazamientos del corcho hacia arriba se representan por números acompañados del signo "+". Los desplazamientos hacia abajo se representan por números acompañados del signo "-".

Calcula el desplazamiento del corcho si inicialmente está en la raya -23 y después aparece en la raya marcada con -45.

Identifica cuál de las dos expresiones, $(-80) + 8(-15)$ y $(-80) - 8(-15)$, permite calcular la raya final a la que llega el corcho si inicialmente está en la raya marcada con -80 y a partir de este punto hace 8 desplazamientos uno tras otro hacia abajo. Cada desplazamiento tiene una magnitud de 15 rayas. Da razones de su elección¹.

¹Adaptación de una tarea tomada de Pruebas Comprender de Matemática. Grado Noveno (2005) Secretaría de Educación de Bogotá D.C.

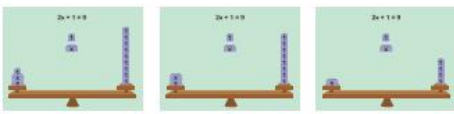
3. Reconoce y establece diferentes relaciones (orden y equivalencia) entre elementos de diversos dominios numéricos y los utiliza para argumentar procedimientos sencillos.

Evidencias de aprendizaje

- Determina criterios de comparación para establecer relaciones de orden entre dos o más números.
- Representa en la recta numérica la posición de un número utilizando diferentes estrategias.
- Describe procedimientos para resolver ecuaciones lineales.

Ejemplo

En la figura se muestra una secuencia de imágenes que ilustran formas de encontrar el valor de x .



Describe diferentes procedimientos o acciones que le permitan conocer el valor de x y pone a prueba esos procedimientos.

4. Utiliza y explica diferentes estrategias (desarrollo de la forma o plantillas) e instrumentos (regla, compás o software) para la construcción de figuras planas y cuerpos.

Evidencias de aprendizaje

- Construye plantillas para cuerpos geométricos dadas sus medidas.
- Selecciona las plantillas que genera cada cuerpo a partir del análisis de su forma, sus caras y sus vértices.

Figura 3. Actividades propuestas en los DBA. (MEN, 2016).

Fuente: Elaboración propia

Lo anterior, muestra cómo a través de actividades que pueden estar conectadas a la vida cotidiana de los estudiantes se puede desarrollar el pensamiento numérico, también se destaca el uso de la calculadora en el aula de clase para verificar sus procedimientos.

Por lo tanto, este trabajo tiene en cuenta los estándares básicos que se mencionaron, se toma en cuenta los contextos propios de los estudiantes y el uso de la calculadora que proponen los DBA y, así mismo, se consideran los elementos fundamentales que se mencionan en los lineamientos curriculares del pensamiento numérico para atender algunas de las dificultades que se presentan alrededor del concepto del número entero y su estructura aditiva, con la implementación de recursos pedagógicos con los que se espera que los estudiantes se hayan apropiado del conocimiento, teniendo en cuenta que se resolvieron situaciones de la vida cotidiana con las que se pretende que los estudiantes puedan aprehender los conceptos abstractos después de haberlos manipulado, verificado y reconocido o apropiado con los diferentes recursos pedagógicos.

2.2. Perspectiva didáctica

En esta perspectiva se presentan los principales contenidos didácticos que se tuvieron en cuenta para la construcción de la propuesta de aula teniendo en cuenta los obstáculos, dificultades y errores en la enseñanza – aprendizaje de los números enteros en las que se consideraron pertinentes las investigaciones de González et al. (1990), Bohórquez (2019) y Bruno (2000), también respecto a las estrategias de los estudiantes y algunas alternativas para la enseñanza – aprendizaje de la estructura aditiva con números enteros en los que cabe mencionar a Bofferding y Richardson (2013), Ural (2016) y Bishop et al. (2011) y por último, los recursos pedagógicos en los que se citan a Alsina et al. (1993), Godino, Batanero y Font (2003) y Preysler (1999).

2.2.1. Obstáculos, dificultades y errores en la enseñanza-aprendizaje de los números enteros

A continuación, se presentan los obstáculos, dificultades y errores que evidenciaron las diferentes investigaciones presentadas por González et al., (1990) Bohórquez (2019) y Bruno (2000) estableciendo algunas relaciones con las problemáticas que causaron los números enteros para los primeros matemáticos, y mostrando que aún en el siglo XXI permanecen algunas de estas situaciones que ya se establecían o se estudiaban en el siglo XIX.

- Las situaciones de la vida real se consideran un obstáculo, puesto que los números naturales se utilizaron para contar, entonces su aceptación fue menos compleja que los números negativos, puesto que en el siglo XIX se tenía la creencia que “las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real” (González et al., 1990, p. 152), entre la comunidad de matemáticos este pensamiento cambió, y se lograron muchos avances en las matemáticas, sin embargo, en la comunidad educativa aún en el siglo XXI se observa que los docentes en la mayoría de los casos buscan relacionar las matemáticas con la vida cotidiana de los estudiantes para explicar algunos conceptos.

Ahora bien, con los números naturales es menos compleja que tenga sentido, o los estudiantes logren relacionar, una actividad en su contexto cotidiano, pero con los números negativos se identifica que hay un contraste, puesto que las reglas no aplican, o más bien, no tienen sentido en la vida cotidiana o realistas, en algunas ocasiones, por ejemplo:

Para seleccionar dicho docente el criterio fue que realizó una actividad de adición de números enteros, mediante una guerra de soldados donde los buenos mataban a los malos, por ejemplo (-5) representaba 5 soldados malos y 6 representaba

6 soldados buenos, entonces los 5 buenos mataban cinco malos y quedaba uno bueno

(1). (Bohórquez, 2019, p.18)

Con la adición parece que funciona perfectamente, pero qué sucede si multiplicamos dos soldados malos, ¿tiene sentido que se vuelva “bueno”? Otro ejemplo, no es común que se diga “tengo menos \$500 pesos”, haciendo referencia a que tiene una deuda de \$500.

- Se relaciona con el orden de los números naturales, pero en los números enteros se encuentra con que “-10” es mayor que “-32”, hay una relación de los números en la mente de los estudiantes con el “10” y el “32”, pero omiten el “-“. En este sentido, González, et al., (1990) dicen que: “Da la impresión que la escuela no hace mucho hincapié en la reflexión sobre las nociones de orden, ni el uso de vocabulario relativo al orden, ni en su representación por esquemas” (p. 25)
- El olvido de los números negativos por parte de los estudiantes tal como ocurrió en la historia, no solo en la escuela, sino que también en la educación superior, por ejemplo, González, et al. (1990) “A un grupo de estudiantes de magisterio de la especialidad de ciencias le pedimos que cada uno de ellos escribiese un número, ninguno escribió un número negativo”.

También, Bruno (2000) en el estudio de la resolución de problemas presenta que los estudiantes utilizan procedimientos que, en ocasiones, tienden a limitarlos y/o a confundirlos, debido a que se identificaron distintos aspectos que se relacionaron con cada uno de los tipos identificados que se presentan a continuación:

- El orden de los datos: los estudiantes plantearon operaciones con los datos que aparecían, lo que indica que no se están comprendiendo las situaciones problema que se les están planteando. Es decir, los estudiantes toman los datos o números que aparecen en los

enunciados y consideran importante tomar cada número que aparece, luego, operarlos de alguna forma, ya sea multiplicándolos, restándolos o sumándolos, sin tener en cuenta qué están representando o qué significan en el texto, sino que solo los operan teniendo en cuenta el tema que están estudiando y no razonan o no fundamentan el procedimiento que están realizando.

- Adaptar la operación a la recta: Los estudiantes resuelven utilizando la recta, luego buscan operaciones que muestren el mismo resultado que obtuvieron en ésta, en algunos casos se identificó que los estudiantes se demoraban y hacían muchos intentos antes de encontrar la operación que necesitaban, en efecto se estableció que a los estudiantes les es complicado establecer conexión en las operaciones o alguna relación con estas y los números negativos.

En otras palabras, para los estudiantes es menos complejo realizar la modelación de situaciones con los números naturales, pero al introducir los números enteros, en particular, los números negativos, se observa que no encuentran una relación entre la representación aritmética a la que deben llegar y los enunciados que se les presentan.

- Usar números positivos: Se reconocieron que algunos estudiantes evadían las operaciones con los números negativos, de modo que planteaban las operaciones con los números positivos e interpretan cualitativamente si era un resultado negativo o positivo desde el contexto que se les planteó, en otras palabras, para los estudiantes no son necesarios los números negativos en sus resultados.

2.2.2. Sobre las estrategias de los estudiantes y algunas alternativas para la enseñanza-aprendizaje de la estructura aditiva con números enteros

Bofferding & Richardson (2013), Ural(2016), Bishop et al., (2011), González & Ponce (2017) presentan en sus investigaciones, las estrategias utilizadas por los aprendices al momento de resolver situaciones problema en los que deben utilizar los números enteros y su estructura aditiva, mencionan que comúnmente se usan procedimientos mecánicos que pueden funcionar para la solución de problemas que se colocan en el momento, sin embargo, estas estrategias que son memorizadas limitan a gran escala la comprensión del concepto del número entero y su estructura aditiva, por lo tanto no se adquieren competencias Matemáticas ni a utilizar lo que han aprendido en otros contextos.

También, se identifica que los estudiantes en gran parte reconocen situaciones en las que se pueden involucrar números enteros, como los son la temperatura y las deudas, pero si no se logra el uso de las operaciones con los números enteros sin un aprendizaje significativo o que realmente permee el conocimiento del sujeto, quien adquiere el conocimiento se olvida, se queda en simples pasos que no pueden adaptar en otras situaciones, no logran plantear sus propias operaciones o problemas ni se tienen claros los métodos de resolución matemáticamente, debido a los diferentes errores u obstáculos que se presentan.

Además, se empiezan a realizar operaciones en las cuales el resultado es negativo, pero los estudiantes en primaria no trabajan con ese tipo de resultados si es mayor el sustraendo la resta no se realiza o en ocasiones, se menciona que no se puede, en efecto, cuando se deben realizar este tipo de operaciones los estudiantes tienden a confundirse o a dudar.

En consecuencia, Bofferding & Richardson (2013), Ural (2016), Bishop et al. (2011), González & Ponce (2017) presentan como alternativa el uso de la recta numérica en la enseñanza de la adición y la sustracción con números enteros, teniendo en cuenta el punto de partida que es un 0, para identificar a lo que se le suma o se le resta. También, recomiendan el uso de las magnitudes inversas a priori a la introducción de las operaciones con los números enteros, debido a que estas dos estrategias, desarrollan el razonamiento numérico de los estudiantes.

Lo anterior, se sugirió, dado que los estudiantes lograron resolver correctamente las operaciones con la recta numérica, pero al no trabajarle de ninguna manera los números negativos en los primeros años de escolaridad, lo que hacen los estudiantes ignorarlos ni solucionar ni plantear ejercicios que los contengan como ha ocurrido históricamente con este conjunto numérico González et al. (1990).

Así mismo, en su estudio de caso identificaron en una estudiante que presentaba dificultades en el aprendizaje de los conceptos matemáticos y algunos aspectos cognitivos, sin embargo, con algunas clases de refuerzo y utilizando las siguientes alternativas permitieron que el estudio de caso adquiriera nuevos conocimientos:

- Identificar situaciones de la vida cotidiana del estudio de caso en las cuales se utilizarán los números enteros, es decir, tuvieran un sentido o un uso, facilitó superar dificultades que al principio se habían presentado.
- La recta numérica también permitió un mayor reconocimiento de los números enteros, su orden entre un par de números y realizar la adición y sustracción.

En consideración a lo que este trabajo se enfocó con los estudiantes, fue presentarles el concepto del número entero y la adición con estos para guiarlos de tal modo que logren

desarrollar sus propias estrategias que les permitan un aprendizaje relevante y que no sea un concepto que solo se aprende en el momento de la clase, sino que les permita utilizarlos en lo que les resta de la educación básica secundaria.

Por ende, no es fructífero volver a trabajarlos desde el inicio cuando ya se está haciendo la introducción a los racionales o los reales en los grados superiores, se espera que se eviten las ambigüedades, las definiciones erróneas que comúnmente se observan en las aulas de clase y permita que los estudiantes puedan utilizar lo aprendido en otros contextos o en su vida cotidiana para la resolución de problemas donde se involucran los números negativos y positivos.

2.2.3. Recursos Pedagógicos

La acción de enseñar dentro o fuera de un salón de clase debe ser lo que inspira al docente de Matemáticas para crear, diseñar o implementar diferentes estrategias para transmitir un concepto matemático a sus estudiantes. Además, en la experiencia del estudiante-investigador, se ha observado que estas estrategias disminuyen en la mayoría de los casos por parte de los docentes cuando los estudiantes llegan a la educación básica secundaria y media, es como si el uso de los diferentes recursos pedagógicos existiesen solamente para los estudiantes de primaria, por esto, en ocasiones, las clases para los estudiantes se convierten en un ciclo: definición, ejemplos, ejercicios y/o tareas para la casa, lo que desmotiva a los estudiantes a aprender, debido a que se convierte en una rutina.

Ahora bien, para favorecer algunos aspectos conceptuales y procedimentales con los números enteros se considera que los recursos pedagógicos son “un conjunto de documentos, la situación matemática, el aprovechamiento didáctico. En el devenir de sus investigaciones, han destacado particularmente los procesos de documentación de los profesores” (Guin &

Trouche, 2007 como se citó en Garzón et al., 2013, pág. 3) en este sentido, un recurso pedagógico es la fundamentación que utiliza el docente y las actividades que surgen de la revisión de los documentos que considera pertinentes, pero es de su labor docente, puesto que así es como los artefactos se vuelven recursos pedagógicos y es él quien lo condiciona para que sea un instrumento para la enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos.

También, se considera que los recursos pedagógicos son “la integración en la enseñanza de las matemáticas de artefactos informáticos diseñados no para tal fin sino para apoyar o ayudar en otras actividades profesionales” (Haspekian & Artigue, 2007 como se citó en Garzón et al., 2013, pág. 3) lo cual significa, que los artefactos informáticos se reconocen como recursos pedagógicos con el uso y la adecuación que el docente considere relevante para favorecer la construcción de los conceptos que se quieren transmitir a los estudiantes.

Por otro lado, es necesario subrayar que “no existe una correspondencia biunívoca entre un material y un concepto. Un mismo concepto ha de trabajarse en lo posible, con diversidad de materiales” (Alsina et al., 1999, p.13), en efecto se considera importante que los docentes evalúen e implementen los recursos pedagógicos para fortalecer el razonamiento matemático de los estudiantes, además, el conocimiento del estudiante inicia con lo concreto o lo palpable, lo real para él, entonces el docente al guiarlo con recursos pedagógicos manipulativos estimula sus sentidos y que él busque sus propias conjeturas sobre el concepto que se está enseñando.

Para comprender mejor la importancia de los recursos pedagógicos se usan diferentes clasificaciones de estos. Una de ella consiste en diferenciar dos tipos de recursos:

Ayudas al estudio: recursos que asumen parte de la función del profesor (organizando los contenidos, presentando problemas, ejercicios o conceptos). Un

ejemplo lo constituyen las pruebas de autoevaluación o los programas tutoriales de ordenador, etc. También se incluyen aquí los libros de texto, libros de ejercicios, etc.

Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático:

Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático. (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 128)

Por consiguiente, los materiales manipulativos que se implementaron en esta investigación son objetos físicos tales como: dados, palitos bicolores y un juego de mesa “escalando hacia la meta”, los objetos anteriormente mencionados, se consideran importantes para observar cómo los estudiantes construyen sus ideas a partir de sus conocimientos previos y las ideas que surgen al manipularlos.

Además, El aprendizaje de las Matemáticas debe estar alineado con el desarrollo del pensamiento, lo cual se logra a través de una progresión gradual de etapas que involucran diversas operaciones cognitivas. Estas operaciones van desde una etapa concreta y manipulativa del material hasta una etapa formal y abstracta, pasando por una etapa intermedia de representación. Es importante destacar que este proceso de maduración del pensamiento es continuo y no se produce de manera inmediata.

Por consiguiente, los recursos pedagógicos que se utilizan en esta propuesta se diseñaron teniendo en cuenta lo más concreto y finaliza con lo abstracto, utilizando reglas, definiciones o conceptos propios matemáticos. Ahora bien, el uso correcto de los recursos permite que los estudiantes reconozcan si sus procedimientos o estrategias realmente funcionan, por ejemplo, con GeoGebra o la calculadora pueden verificar y potenciar lo que

piensan, con el material manipulativo no existe esa verificación, sin embargo, permite que los estudiantes utilicen otras estrategias para solucionar lo que se les propone.

Se puede agregar que:

La selección e instalación del software, la preparación de la sala de sistemas, las actividades y la selección de objetos matemáticos son una “configuración didáctica” que favorece la exploración del proceso de génesis instrumental por parte de los estudiantes. La preparación de los ejercicios, la metodología (grupal, individual) para el desarrollo de estos, el uso de proyector y las explicaciones en tablero representan la forma en que el docente “explora” las potencialidades del software. Esta preparación favorece explorar las actuaciones de los estudiantes mientras relacionan los conocimientos previos con los objetos matemáticos propuestos en cada una de las actividades propuestas. La respuesta a preguntas durante el desarrollo de las actividades, así como la explicación de comandos nuevos y no explorados en los manuales de uso del software entregados a los estudiantes, son parte de la “actuación docente” [...] (Suarez & Castro, 2016, p. 112)

En consecuencia, las actividades, los materiales, el trabajo individual o grupal de los estudiantes y el uso de los diferentes recursos utilizados y planteados en esta propuesta de aula permiten que los estudiantes exploren qué método consideran menos complejo, en efecto potencialicen sus conocimientos respecto al pensamiento matemático.

Finalmente, la propuesta de aula es el recurso pedagógico con el que se quiere guiar al estudiante a favorecer algunos aspectos conceptuales y procedimentales con los números enteros, además, que permitió la ampliación de sus conocimientos y el desarrollo de sus estrategias para aplicar el pensamiento matemático en cualquier contexto en el que sea necesario.

2.3. Perspectiva Matemática

2.3.1. Elementos Epistemológicos e Históricos de los Números Enteros

Como lo dicen González et al. (1990), la construcción del concepto del número ha estado presente siempre en la historia de las Matemáticas.

Los números naturales por su naturaleza de que sirven para contar, medir y ordenar, fueron aceptados relativamente rápido, si se compara con los números enteros, debido a que estos fueron rechazados, olvidados y hasta ignorados por algunos matemáticos en diferentes culturas y locaciones, quizás por algunas concepciones de los matemáticos, tales como la de los pitagóricos que todo lo que había en el universo eran números y los números eran cosas, por este tipo de definiciones, si bien se pueden llamar, es que existieron muchos tropiezos antes de concretarse o aceptarse. Cabe resaltar, que los números negativos surgen a partir del tratamiento de las operaciones algebraicas en las que había necesidad de ampliar el conocimiento y en las cuales los números naturales limitaban los resultados que se obtenían intuitivamente, por esto con las investigaciones y manipulaciones que se hacían empíricamente se construyó y se formalizó el conjunto que permitía responder a aquellas necesidades.

“[...] los matemáticos chinos también poseían la idea de número negativo y estaban acostumbrados a calcular con ellos utilizando varillas negras para representar negativos y rojas para denotar los positivos. Sin embargo, la primera vez que aparecen de forma explícita las reglas que la aritmética con los negativos es en una obra del matemático hindú Brahmagupta que data del año 628.” (González et al., 1990, p.24)

Sin embargo, los avances que obtuvieron en aquella época los chinos e hindúes no siguieron y quedaron en el olvido, debido a que no se consideraban necesarios en la vida cotidiana de aquella época.

El uso de los negativos era necesario en el álgebra y fueron considerados en el cálculo, pero no se definían como números aún en el siglo XVII, “pero, por otra parte, era un hecho que allí estaban, surgían de la resolución de ecuaciones, llevaban a resultados válidos e incluso, si se admitía su existencia, aún sin interpretar, iban a permitir métodos generales de resolución de ecuaciones” (González et al., 1990, p. 31)

Finalmente, en el siglo XIX Hermann Hankel contribuye a la aceptación de los negativos como números, teniendo en cuenta el cambio de concepción que tenían los matemáticos, es decir, su fundamentación fue desde lo formal y no relacionándolo solo con lo cotidiano, lo palpable, que era lo que buscaban y por lo que no se aceptaban los negativos como números, además amplió el concepto de número de la siguiente manera:

1. La palabra número responderá a símbolos o agregados de símbolos que no necesariamente representan números del campo numérico previamente dado o conocido, sino que su significado puede ser cualquiera.
2. Se definirán para el nuevo campo numérico las operaciones fundamentales de la aritmética (adición y multiplicación) y el concepto de igualdad, de manera que se conserven las definiciones en el campo menos amplio como caso particular de las nuevas definiciones y que subsistan las leyes formales de uniformidad, asociativa, conmutativa, distributiva y conservación del elemento neutro. (González et al., 1990, p. 49)

Además, los signos que se utilizan actualmente permiten que los estudiantes puedan diferenciar entre un número positivo y uno negativo, aunque en algunos casos se representa el número positivo sin agregarle “+”, debido a que como se ha descrito anteriormente los

números enteros se consideran como una extensión de los números naturales. Por otro lado, el signo “-“, lo utilizaban indirectamente los chinos como se muestra en la siguiente figura:

II	+	III	
T	III	II	
IIII	I	II	
	=I	I=	

-2	10	-3	
6	-8	2	
4	1	-7	
	21	13	

Figura 4. Sistema de numeración usado por los chinos.

Fuente: Elaboración propia

La figura 4, muestra, al lado izquierdo, los números utilizados por los chinos, en los cuales diferenciaban los positivos de los negativos con los colores rojo positivo y negro negativo. Al lado derecho, se muestra la interpretación con los símbolos utilizados hoy en día.

Sin embargo, los chinos no aceptaron la idea de que un número negativo pudiera ser solución de una ecuación. Corresponde a los indios la diferenciación entre números positivos y negativos, que interpretaban como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente. (Torres, s.f., p.9)

En este sentido, en la educación básica se espera que los estudiantes de los grados sexto o séptimo comprendan en algunos meses la manipulación y se adapten a los diferentes símbolos que se utilizan en las operaciones algebraicas con los números enteros, pero no se tiene en cuenta que fue un proceso de adaptación que tardó años en ser comprendido, adoptado y utilizado entre la comunidad de matemáticos, puesto que “incluso hasta el siglo

XIX, trataron muchas veces de reorganizar los cálculos algebraicos para evitar la aparición de los números negativos” (Rojas, 2018, p. 88)

Por último, en este trabajo de investigación se espera que se realicen aportes para que los estudiantes logren establecer relaciones con sus conocimientos previos y amplíen su concepto del número, introduciendo los números enteros. También, que las actividades implementando el uso del material manipulativo y tecnológico, permitan la formulación y modelación de la estructura aditiva, la cual se ha estudiado histórica, epistemológicamente y que se ha identificado que han permanecido errores, obstáculos y barreras, tales como: el uso de los números enteros en la contabilidad, que tiende a confundir a los estudiantes a futuro, dado que al pensar la multiplicación no es posible que los estudiantes multipliquen 2 deudas y el resultado sea una ganancia. Entonces, se quieren afrontar para establecer posibles alternativas efectivas que le permitan al estudiante adquirir el aprendizaje significativo sobre los números enteros y su estructura aditiva, además que no cause limitaciones al momento del aprendizaje de la estructura multiplicativo con los mismos.

Ahora bien, se cita la definición de los números enteros de las notas de clase del curso de álgebra moderna de la Universidad del Valle, Castaño (2019):

El conjunto de los números enteros, simbolizado como $\mathbb{Z}$, son la unión del conjunto de los números enteros naturales N y sus opuestos $Op(N)$, que, por conveniencia, adoptamos la notación:

$$Op(N) = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}.$$

Es decir,

$$\mathbb{Z} = N \cup \mathbb{Z}^- = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Esta definición tiene “la interpretación de cantidades negativas como aquellas que están orientadas en sentido opuesto a las positivas” (González et al., 1990, p. 24), aún en el siglo XXI se pueden encontrar definiciones, un ejemplo, es la que está en el libro de notas de algebra moderna que se dicta en la Universidad del Valle, cabe resaltar que esta concepción de los negativos como sentido opuesto a las positivas es del siglo XVIII. También, se puede apreciar que esta definición se toman a “los enteros negativos como extensión formal de los naturales” (González, et al., 1990, p. 24), que es una de las concepciones que se tenían y se conserva desde el siglo XIX.

Por otro lado, se citan los siguientes axiomas, propiedades y una observación que la estructura de los números enteros satisface:

(A₀) Existen dos funciones s y p , definidas como:

$$s, p = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Tales que:

$$s(a, b) = a + b$$

y

$$p(a, b) = a \cdot b = ab$$

Llamadas suma y producto respectivamente.

Observe que las anteriores funciones indican que las operaciones de suma y producto sobre $\mathbb{Z}$ son cerradas.

Estas operaciones son únicas, lo cual significa que son operaciones bien definidas.

Esto es:

Si $a = b$ y $c = d$ entonces $(a, c) = (b, d)$. Esto indica que $s(a, c) = s(b, d)$, es decir, $a + c = b + d$.

Análogamente, $p(a, c) = p(b, d)$.

(s.1) Propiedad asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(s.2) Propiedad conmutativa: $a + b = b + a$

(s.3) Neutro de la suma: Existe un único número entero tal que $a + b = b + a = a$

Aquí, $b = 0$ se le llama elemento neutro de la suma.

(s.4) Inverso aditivo. Para entero a existe un único b tal que $a + b = b + a = 0$.

Aquí, $b = -a$ es el inverso aditivo de a .

(p.1) Propiedad asociativa: $a(bc) = (ab)c$.

(p.2) Propiedad conmutativa: $ab = ba$.

(p.3) Neutro del producto: Existe un único entero $b \neq 0$ tal que $ab = ba =$

a para todo $a \in \mathbb{Z}$.

(p.4) Propiedad cancelativa del producto: si $a \neq 0$ y $ab = ac$ entonces $b = c$.

(p.5) Distributiva del producto respecto a la suma:

(a) Por izquierda: $a(b + c) = ab + ac$.

(b) Por derecha: $(a + b)c = ac + bc$.

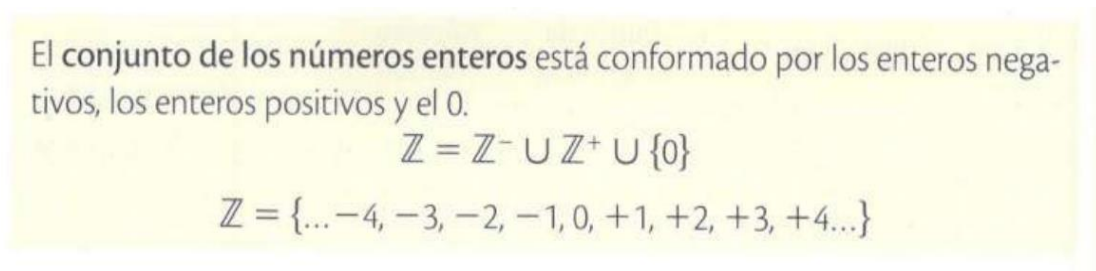
Observación 1.2

La operación sustracción $a - b$ se define como $a - b = a + (-b)$. Luego, $\mathbb{Z}$ es cerrado para la sustracción o diferencia. Esto significa que para restar debes ejecutar una suma.

Lo anterior, muestra cómo se establecen las definiciones de la suma y el producto con sus correspondientes propiedades en nivel académico, para el estudio y demostración de cada una de estas propiedades que se enseñan a estudiantes universitarios en los primeros 5 semestres.

Por otro lado, otras definiciones que se pueden encontrar a nivel escolar son las siguientes:

El Ministerio de Educación Nacional, dotó a los colegios con los libros “vamos a aprender Matemáticas” en el grado 7, en el cual se presentan los enteros como:



El conjunto de los números enteros está conformado por los enteros negativos, los enteros positivos y el 0.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\dots\}$$

Figura 5. Conjunto de los números enteros.

Fuente: Vamos a aprender matemáticas 7. (MEN,2017)

En contraste con la definición anterior, se destaca que se presentan los números enteros como un conjunto distinto o que no tiene ninguna relación con los números naturales, debido a que en la primera definición tenía en cuenta que los números enteros se construyen a partir de los números naturales, unidos con sus opuestos y con el cero, luego se hace un cambio de representación, que permite introducir una definición con el conocimiento previo que se tiene del concepto del número, que en este caso es del número natural, dado que según MEN se estudian durante la primaria.

En la **adición de números enteros del mismo signo**, se suman los valores absolutos de los sumandos y a esta suma se le antepone el signo que tienen en común.

5.2 Adición de números enteros de diferente signo

En la **adición de números enteros de diferente signo**, se restan los valores absolutos de los sumandos y a la suma se le antepone el signo del sumando que tenga el mayor valor absoluto.

Figura 6. Procedimiento para resolver sumas con números enteros.

Fuente: Vamos a aprender matemáticas 7. (MEN,2017)

Propiedad	Descripción	Ejemplo
Clausurativa	La adición de dos o más números enteros es otro número entero.	$(-20) + (-39) = -59$
Conmutativa	En la adición de números enteros, el orden de los sumandos no altera la suma.	$(-25) + 45 = 45 + (-25)$ $20 = 20$
Asociativa	Se pueden asociar los sumandos de varias formas y el resultado no se altera.	$\bullet (-23 + 24) + (-4)$ $= 1 + (-4) = -3$ $\bullet -23 + [24 + (-4)]$ $= -23 + 20 = -3$
Modulativa	Todo número entero sumado con el 0 da como resultado el mismo número entero.	$0 + (-12) = (-12) + 0$ $-12 = -12$
Invertiva	Todo número entero sumado con su opuesto aditivo da como resultado 0.	$25 + (-25) = (-25) + 25$ $0 = 0$

Figura 7. Propiedades de los números enteros.

Fuente: Vamos a aprender matemáticas 7. (MEN,2017)

A nivel universitario la suma se presenta como una función que sus conjuntos de dominio y el codominio son los números enteros, pero en a nivel de la educación básica, se presenta como la operación de números negativos y positivos, creando reglas utilizando el valor absoluto para que los estudiantes identifiquen el signo del resultado.

Por otro lado, las propiedades de la suma se presentan de forma general por un lado y por el otro, se describen y se ejemplifican cada una de las propiedades, es evidente que se debe hacer, debido a que se busca a nivel universitario la formalidad y la demostración que realmente estas propiedades se cumplen, pero a nivel de secundaria se espera que los estudiantes verifiquen las propiedades con casos particulares, sin necesidad de la demostración, por esto se puede decir que no se mencionan los axiomas en este nivel.

Por último, se tienen en cuenta los aspectos mencionados respecto a los números enteros, como lo es su naturaleza, ya que es totalmente distinta a la de los números naturales, además, teniendo cuenta que los números negativos primero se usaron para solucionar algunas ecuaciones y luego, fueron aceptados como números. También, se tiene en cuenta el uso de los signos “+” y “-“, dado que esta propuesta de aula estimula los sentidos de los estudiantes para comenzar con lo concreto y culminar con el concepto abstracto de los números enteros y su estructura aditiva. Así mismo, se tienen en cuenta la importancia del contraste que hay entre lo que se les presenta a los estudiantes en su etapa escolar y la etapa universitaria, dado que en un caso solamente se utilizan las propiedades y el orden los números enteros y por el otro caso, se presenta una definición más amplia y que complementa la anterior, dado que se presentan las propiedades, axiomas u observaciones que permiten que los estudiantes universitarios las utilicen para demostrar los teoremas que se presentan en clase.

2.4. Articulación de las perspectivas

A continuación, se presenta en tabla las relaciones de lo realizado en la propuesta de aula para abordar la problemática de los números enteros y su estructura aditiva desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática.

Tabla 2. Articulación de las perspectivas en la propuesta de aula.

Perspectiva Curricular	Perspectiva Didáctica	Perspectiva Matemática
-Permite identificar que el pensamiento numérico se debe introducir y fortalecer utilizando el contexto de los estudiantes.	-Permite reconocer las dificultades, obstáculos y errores que tienen los estudiantes con los números enteros y su estructura aditiva tales como: la vida real,	-Permite identificar los problemas u obstáculos epistemológicos e históricos que se han presentado con los números enteros.
-Invita a la ampliación de las estrategias para la enseñanza de la estructura aditiva con los números enteros y enfatiza en los números negativos, dado que históricamente ha existido una resistencia a estos.	dado que todo no se logra representar con los números enteros como sucede con los números naturales; el orden de los datos en los ejercicios que se les plantean, es decir, los estudiantes consideran que deben utilizar todos los datos que se les plantean en una actividad; el uso de la recta les causa dificultad a los estudiantes y por último, la necesidad de utilizar números positivos e ignorar los negativos al momento de operar.	-Reconoce la necesidad de los números negativos en el álgebra, dado que los números naturales limitaban los resultados que se obtenían, por ejemplo, en la resolución de algunas ecuaciones. Además, se definen los números enteros, su estructura aditiva y sus propiedades.
- Promueve el planteamiento de actividades que le permitan a los estudiantes identificar las formas de representar las cantidades, el valor o conjeturar con los elementos que han		

aprendido durante su experiencia o conocimientos previos.	-Se identifican algunas estrategias y las alternativas para la enseñanza-aprendizaje de los números enteros y su estructura aditiva.
-Propone utilizar las propiedades de los números enteros para que los estudiantes logren crear sus propias estrategias y procedimientos para resolver problemas de la vida cotidiana.	- Se establece la importancia de los recursos manipulativos o tecnológicos dentro del aula de clase.
-Reconoce los procesos generales de aprendizaje que ayudan en la construcción del pensamiento numérico.	

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta las 3 perspectivas planteadas en la Tabla 2, se presenta en el capítulo 3 la propuesta de aula que permitió que se articularan los aspectos fundamentales que en esta se presentan, dado que cada una de las perspectivas aporta elementos para la construcción de aspectos conceptuales y procedimentales de los números enteros y su estructura aditiva para los estudiantes del grado sexto de la educación básica secundaria. Cabe aclarar que, esta propuesta de aula se puede adaptar a otros contextos de la vida cotidiana o de otras ciencias, si es necesario.

3. Capítulo 3: La Enseñanza de los Números Enteros desde una Propuesta de Aula con Integración de algunos Recursos Pedagógicos

En este capítulo, se presentan los aspectos de la propuesta aula, tales como: el diseño de la propuesta de aula, en el que se promueven los aspectos importantes que aportan las 3 perspectivas que se desarrollaron en el marco de referencia conceptual. También, se presentan las situaciones que se implementaron y los conceptos matemáticos que se trabajaron con los estudiantes. Por otra parte, se presenta el contexto y caracterización de los participantes, además de la metodología de implementación. Por último, se encuentran la organización, análisis de los resultados y algunas conclusiones iniciales.

3.1. Propuesta de aula

Para el diseño de esta propuesta de aula se tuvieron en cuenta los elementos más importantes de las 3 perspectivas descritas anteriormente.

La propuesta de aula que se implementó estaba dirigida a los 13 estudiantes del grado sexto de la educación básica secundaria del Colegio Taller de María que está ubicado en Jamundí, Valle del Cauca. El colegio es de carácter privado y en cada grado tienen menos de 20 estudiantes. Las situaciones se plantearon en un contexto que los estudiantes conocían, la minería, dado que era uno de los temas que habían estudiado en ciencias sociales, sin embargo, al principio de la propuesta de aula se contextualiza nuevamente a los estudiantes con la minería subterránea y se complementa con información de los aerogeneradores que permiten el uso de la energía eólica.

A continuación, se presentan los elementos constitutivos de la propuesta:

Tabla 3. Organización de las situaciones y actividades propuestas.

Situaciones	Actividades	Contenido matemático	Desempeños
Situación 1: la minería subterránea y los aerogeneradores en la construcción del concepto del número entero.	2	•Número relativo. •Uso de la recta numérica. •Orden de los números enteros. •Valor absoluto. •Estructura aditiva con números enteros.	•Identifica y resuelve situaciones relacionada con posiciones relativas. •Reconoce y ordena los números enteros. •Identifica el valor absoluto de los números enteros. • Ubica en la recta numérica los números enteros usando GeoGebra.
Situación 2: estructura aditiva con números enteros teniendo como referencia las alturas y las profundidades,	2	•Estructura aditiva con números enteros. •Opuesto aditivo de los números enteros. •Elemento neutro en la adición.	•Usa el valor absoluto para resolver operaciones con números enteros. •Indica el opuesto aditivo de algunos números enteros. • Resuelve algunas sumas utilizando material manipulativo.

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 3 muestra las dos situaciones que se plantean en la propuesta de aula para los estudiantes del grado sexto de básica secundaria, su distribución y los desempeños que se esperan que cumplan al finalizar las 4 actividades que se proponen.

3.1.1. Sobre la propuesta de aula.

En este apartado se presenta la propuesta de aula diseñada para favorecer la construcción de algunos aspectos conceptuales y procedimentales de los números enteros, a través del uso de recursos pedagógicos manipulativos y tecnológicos.

A continuación, se presenta la propuesta de aula con sus 2 situaciones y las 4 actividades que se implementaron con los estudiantes.

SITUACIÓN 1: LA MINERÍA SUBTERRÁNEA Y LOS AEROGENERADORES PARA LA CONTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DEL NÚMERO ENTERO

Lee detenidamente el siguiente texto, y ten en cuenta los datos que en ella se exponen para que resuelvas las actividades siguientes, en las hojas anexas que se te entregaron. Ten en cuenta que, debes escribir todos los procedimientos utilizados para llegar a cada respuesta.

METAL PRECIOSO EL ORO

Alrededor del mundo se considera que uno de los detalles (materiales) más preciados y apetecidos es recibir como regalo una pulsera, una cadena o un anillo que sea 100 % de oro, o no te ha sucedido que alguien lleva alguna de estos accesorios de color dorado y lo primero que te preguntas es: ¿eso es de oro real? ¿Es bañada en oro? Socialmente, causa curiosidad, puesto que este metal tanpreciado y anhelado por la humanidad es realmente precioso, brillante y por supuesto, es costoso. Para tener una idea de lo valioso que es este metal, se debe tener en cuenta que su valor se establece por gramos, un solo gramo de oro fino o puro puede llegar a costar aproximadamente \$230.000 (doscientos treinta mil) pesos colombianos.

¿Por qué su precio se establece por gramos? ¿Por qué es tan costoso?

Para responder estas preguntas, se deben considerar 2 situaciones, la primera, es que es un metal que es muy escaso y la segunda, la manera cómo se obtiene es una de las actividades más riesgosas y temidas mundialmente por medio de **la minería**.

La minería es una de las actividades más antiguas de la humanidad, consiste en la obtención selectiva de minerales para la fabricación de herramientas. Se puede decir que la minería surgió cuando los predecesores del Homo Sapiens empezaron a recuperar determinados tipos de rocas para tallarlas y fabricar herramientas. A medida que se vaciaban los yacimientos de la superficie, las excavaciones se hacían más profundas, hasta que empezó la minería subterránea. (Ministerio de Minas y Energía de Ecuador, 2003)

La minería subterránea

Como se mencionó anteriormente, las excavaciones al principio no eran tan profundas, sin embargo, llegó un momento en el cual no se podían extraer metales, por esto se llegó a la minería subterránea, en efecto, se establecen algunas condiciones para determinar si es posible comenzar alguna de las minas, puesto que en cualquier lugar no se encontrarán las rocas que contienen estos yacimientos de metales preciosos.

Las minas más profundas que hay en el planeta tierra se pueden encontrar en el continente africano, específicamente, en Sudáfrica. Cabe resaltar que, cada una de estas las ubican teniendo en cuenta como punto referencia la ciudad más poblada que es Johannesburgo.

Ahora bien, observa a continuación con mucho detalle las profundidades (aproximadas) que se han alcanzado en las 7 minas más profundas que hay en el mundo para extraer este metal precioso, **el oro**.

Tabla 1. Profundidades de las minas

Mina	Profundidad
Kusasaletu	3.276 m
Taitona	3.900 m
Moab Khotsong	3.054 m
South Deep	2.995 m
Mponeng	4.000 m
Savuka	3.700 m
Driefontein	3.400 m

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta la tabla 1, si comparamos la mina South Deep con la Torre de Cali (edificio más alto de la ciudad de Santiago de Cali mide 183 m), sería aproximadamente 16 veces lo que mide esta Torre, ¿te imaginas estar a esa profundidad? ¿Cómo se sentirá respirar? ¿Hará calor o frío?

La temperatura a estas profundidades puede llegar a 65 °C, en efecto, se necesitan túneles que funcionan como enfriadores de aire. En algunas minas, se han utilizado aerogeneradores para convertir la energía cinética producida por el viento, energía mecánica y así poder utilizarla. La industria ha llegado a construir aerogeneradores hasta de 260 metros aproximadamente. Sin embargo, algunos miden 80 m, 178 m y 200 m. Cabe resaltar que entre más alto sea, más energía se logra transformar.

ACTIVIDAD 1: USANDO LOS NÚMEROS ENTEROS EN LAS ALTURAS Y PROFUNDIDADES

Teniendo en cuenta la información del texto, responde las siguientes preguntas:

1. Escribe el nombre y la profundidad de la mina más profunda que se puede encontrar a nivel mundial.
2. Escribe el nombre y la profundidad de la mina menos profunda de la tabla 1.
3. Ordena las minas de menor a mayor, según su profundidad.
4. Escribe cuál es la diferencia entre la mina más profunda y la menos profunda.
5. Indica la altura del aerogenerador más alto del mundo.
6. Si un minero se encuentra al final de la mina más profunda y desea subir a la parte más alta del aerogenerador con mayor altura del mundo, indica cuántos metros tendría que recorrer.
7. Escribe cómo diferenciarías las alturas y las profundidades, puesto que están por encima del suelo y por debajo del suelo respectivamente.
8. Camilo es un estudiante de séptimo del Colegio Gimnasio Moderno del Valle; en la clase de Matemáticas les aconsejó a sus compañeros para facilitar la solución de las anteriores preguntas pensarán en lo siguiente: “Las profundidades y las alturas están desde diferentes perspectivas si estamos en el suelo, entonces, las alturas pueden estar representadas con números que tengan el símbolo +, dado que están por encima del suelo y las profundidades con números que tengan el símbolo -, debido a que están por debajo del suelo”
 - a) Escribe si consideras apropiada esta nomenclatura para diferenciarlos. Si no estás de acuerdo, describe cuál sería tu propuesta.
 - b) Indica qué signo o nomenclatura tendría el valor que representa el suelo.

ACTIVIDAD 2: LAS ALTURAS Y LAS PROFUNDIDADES PARA IDENTIFICAR EL VALOR ABSOLUTO Y LOS NÚMEROS OPUESTOS

Teniendo en cuenta la información del texto sobre el metal precioso, responde, individualmente, las preguntas y realiza lo que se te indica en cada ítem.

2. Utilizando GeoGebra haz lo siguiente:

- a. Ubica en la recta numérica los valores de las profundidades de las minas y las alturas de los aerogeneradores.
- b. Ordena de menor a mayor las distancias a las que se encuentran en la recta numérica las profundidades y las alturas.
- c. Escribe qué tuviste en cuenta para determinar el orden de los valores de las profundidades y las alturas.

3. Recordemos lo que dijo Camilo en su clase de Matemáticas:

“Las profundidades y las alturas están desde diferentes perspectivas si estamos en el suelo, entonces, las alturas pueden estar representadas con números que tengan el símbolo +, dado que están por encima del suelo y las profundidades con números que tengan el símbolo -, debido a que están por debajo del suelo”

Ahora bien, Camilo hace referencia que las alturas y las profundidades están por encima y por debajo del suelo, respectivamente, es decir que hay un **punto de referencia** para determinar que está por “arriba de” y por “debajo de”, en este caso, es el **suelo**”.

Teniendo en cuenta lo anterior:

- a) Indica dónde se ubicaría el punto de referencia en la recta numérica para las alturas y los valores de las profundidades que ubicaste.

- b) Camilo afirma que: “El punto de referencia es único en la recta numérica, puesto que, si se ubican la altura de un aerogenerador de 100 m y la profundidad de una mina de 100 m, estarán a la misma distancia de ese número”

Escribe si estás de acuerdo con Camilo.

- c) Escribe las diferencias y similitudes que encuentras al ubicar la altura de 100m y la profundidad de 100 m.

Instrucciones

- Abre el archivo que está en el escritorio nombrado “S1A2P3”

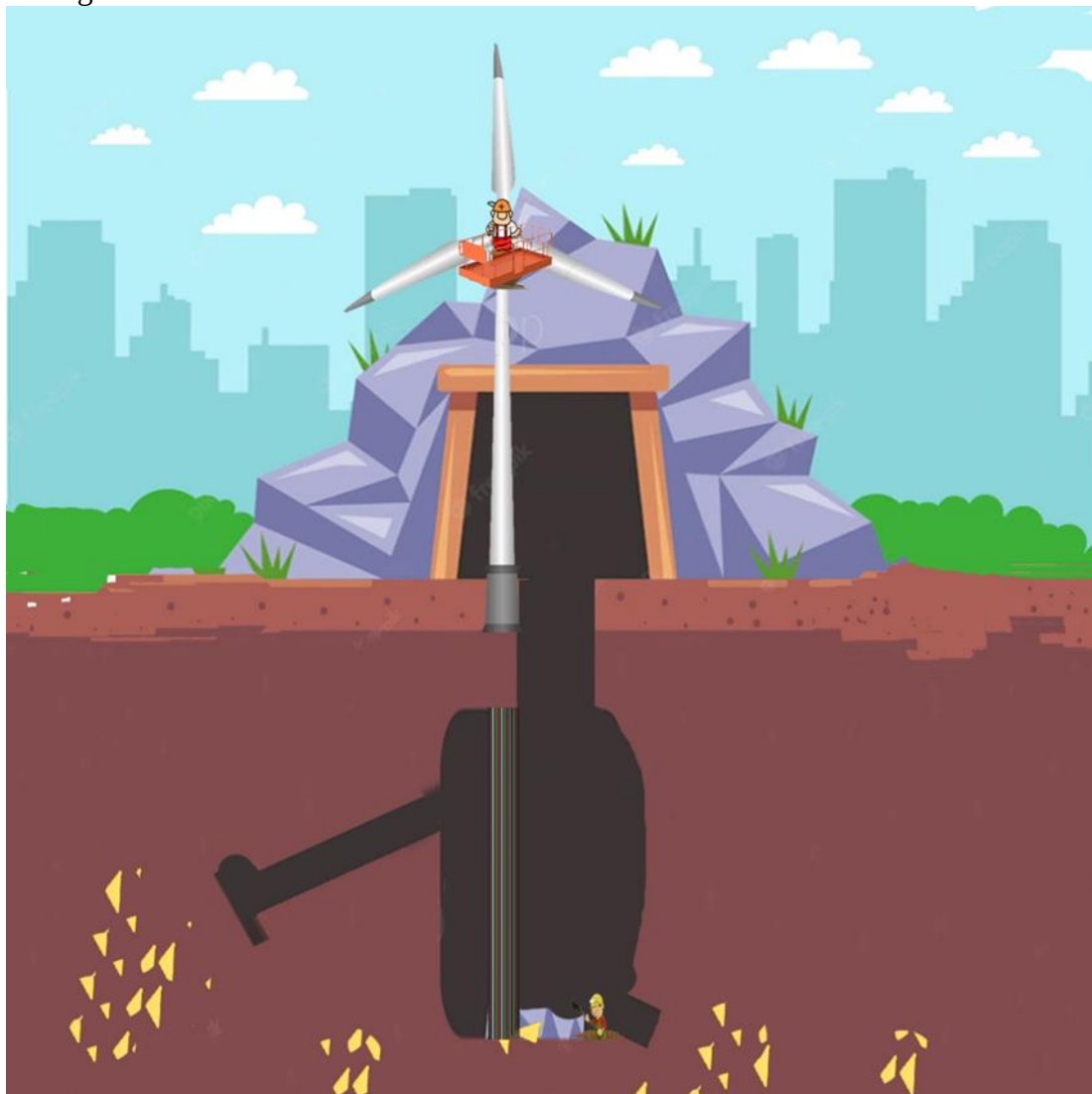


- Utiliza la herramienta “distancia o longitud”, selecciona el punto M y luego, otro de los puntos ubicados en la recta numérica. (Haz esto con cada uno de los puntos)

3) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos.

- a) Escribe qué aspectos o características tendrías en cuenta para relacionar los puntos.
- b) Indica las parejas de puntos que están relacionadas, después de haber utilizado la herramienta “distancia o longitud”.

Figura 8. Minería subterránea.



Fuente: Elaboración propia.

Para transportarse de un lugar a otro dentro de la mina y al aerogenerador los mineros utilizan ascensores. Un día estaban Sebastián y Diego trabajando, justamente en un aerogenerador con una altura de 250 m y en una mina con una profundidad de 250 m,

respectivamente, como se muestra en la figura 8. Teniendo en cuenta, lo anterior, responde individualmente las siguientes preguntas:

- 4) Escribe si alguno de ellos está más cerca del suelo.
- 5) Indica cuántos metros tendría que recorrer Sebastián para llegar a donde está Diego, el otro minero.
- 6) En caso de que Sebastián se quede quieto, escribe si Diego tendría que recorrer una distancia igual, menor o mayor a la anterior, para encontrarse con Sebastián.
- 7) Cuando cada uno finalizó su labor, en un instante, ambos habían recorrido 170m, como se muestra en la figura 9.

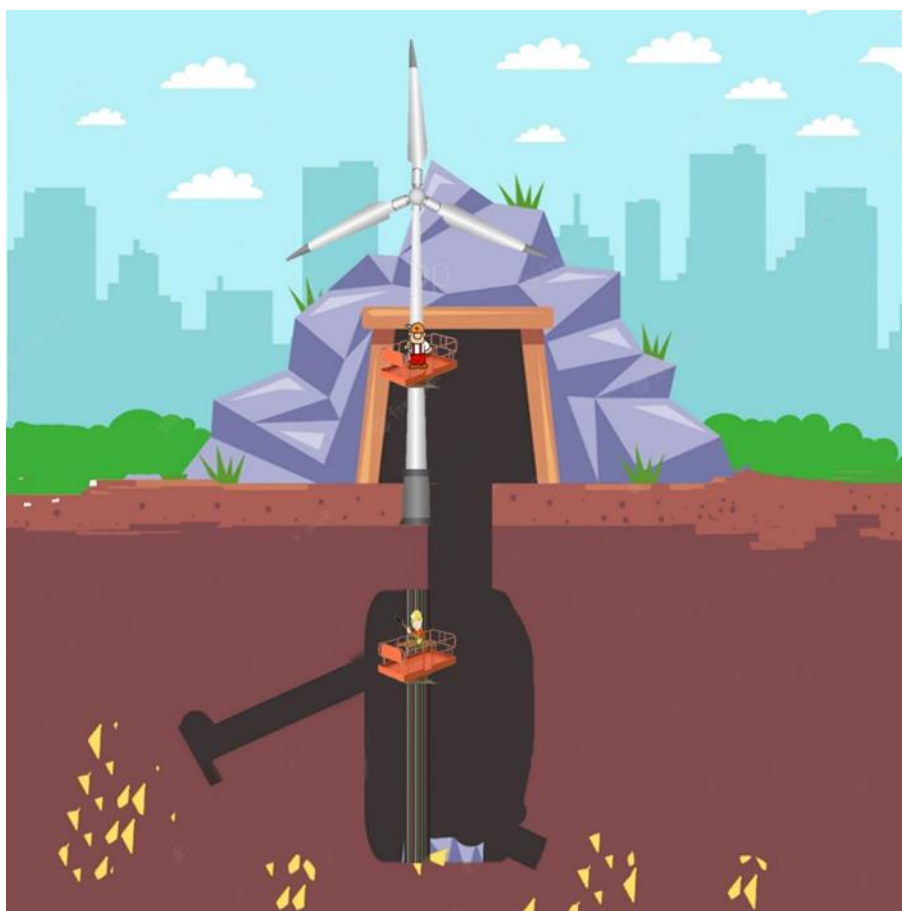


Figura 9. Mineros y la distancia.
Fuente: Elaboración propia.

- a. Escribe a qué distancia está cada uno del suelo.
- b. Si se mueven hacia el suelo hacia arriba y hacia abajo, respectivamente, 25m más, ¿a qué distancia estará cada uno del suelo en este caso?
- c. Dibuja en la hoja que se te entregó, una recta numérica y ubica las posiciones de Sebastián y Diego en ese momento.

Lee la siguiente afirmación.

“Los números negativos y los números positivos se representan en la recta, pero **el valor de las distancias** en las que estaban Sebastián y Diego **no cambiaban**, solamente se encontraban en direcciones opuestas, entonces, ese **valor de la distancia** representa el **valor absoluto**, que no sería en ningún caso negativo, puesto que las distancias negativas no existen. Además, en la recta numérica se observa que el **cero** sería el punto de referencia, en este caso, el suelo sería el punto de referencia”

- 8) Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado.

Escribe el opuesto de $-120 \rightarrow$ _____.

Escribe el opuesto de $-247 \rightarrow$ _____.

Escribe el opuesto de $-45 \rightarrow$ _____.

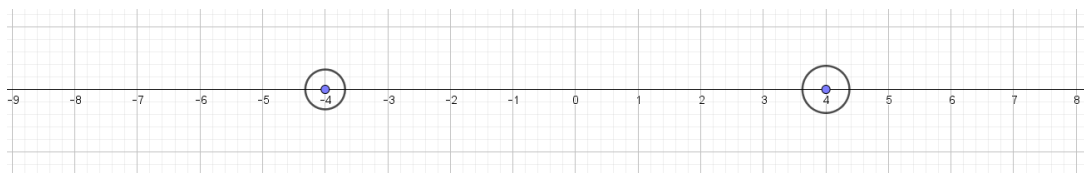
- 9) Utilizando la calculadora, indica los resultados de la suma de los anteriores números y sus opuestos.

-
-
- 10) Teniendo en cuenta, los puntos anteriores:

- a) Escribe qué características tienen los números opuestos.
- b) Indica qué sucede siempre que sumamos números que son opuestos.

Lee la siguiente afirmación.

Como se mencionó anteriormente, el **valor absoluto**, geométricamente, de un número se puede interpretar como la distancia del número al cero. Esta idea se extiende a la distancia entre dos números.



En la gráfica la distancia de 0 a 4 es igual a la de 0 a -4, es decir, $|-4| = 4$ y $|4| = 4$.

En este sentido, el valor absoluto se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ -a, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

11) Teniendo en cuenta la información anterior, responde:

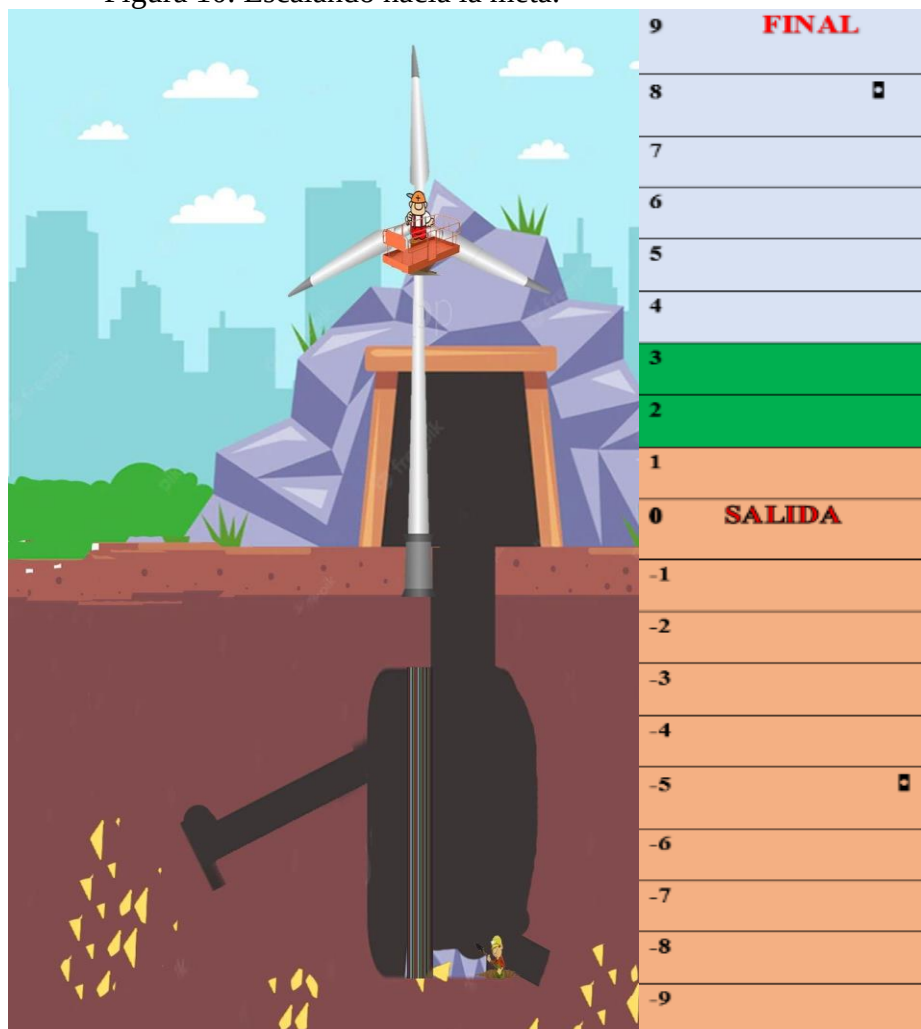
- a) $|-5| =$
- b) $|5| =$
- c) $|25| =$
- d) $|-41| =$
- e) $|-19| =$

SITUACIÓN 2: ESTRUCTURA ADITIVA CON NÚMEROS TENIENDO COMO REFERENCIA ALTURAS Y PROFUNDIDADES

ACTIVIDAD 1: JUGANDO A ESCALAR EN LAS PROFUNDIDADES Y ALTURAS

A continuación, se presenta el tablero que se utilizará para jugar “escalando hacia la meta”, ten en cuenta las reglas que se especifican debajo de este para jugarlo:

Figura 10. Escalando hacia la meta.



Fuente: Elaboración propia

A continuación, se plantean las reglas e instrucciones del juego “Jugando a escalar hacia la meta”, lean atentamente para jugar y divertirse mientras aprenden asumir los números enteros.

Instrucciones:

- Pueden jugar 2 o más compañeros.
- Cada uno toma una ficha de distintos colores. Es libre la elección de quién empieza.
- Comienza lanzando los dados y para ejecutar los movimientos, se procede de la siguiente manera:
- uno de los dados está marcado con los números 0,1,-2,3,-4,5 y el otro, está marcado con 0,-1,2,-3,4,-5, en caso de que sea un número positivo hará avanzar en la dirección positiva, en caso contrario, hará avanzar hacia dirección negativa. En el caso del 0, no hay avance.
- Cuando se encuentre con el espacio marcado con ■, se debe lanzar el dado, luego avanzar o retroceder según indique el dado.

1) En cada lanzamiento los jugadores deben rellenar una tabla como la siguiente:

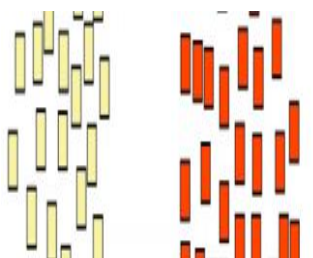
Nivel de origen	Resultado dado 1	Resultado dado 2	Suma	Nivel de llegada
5	3	-5	$3+(-5)=-2$	3

--	--	--	--	--

- 2) Teniendo en cuenta la experiencia con el juego de “escalando hacia la meta”, responde individualmente, las siguientes actividades:
- a) Si en un dado obtienes el número -3 y en el otro el número 5, describe el movimiento que tendrías que hacer y la posición en la que quedarías.
 - b) Si obtienes en ambos dados números negativos, describe el movimiento para ir a su posición de llegada.
 - c) Describe el movimiento que tendrías que hacer, si obtienes dos números positivos.
 - d) Indica qué sucede en los casos que se obtienen 2 números que son opuestos.
- 3) Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, indica cómo podrías determinar cómo sumarías los valores obtenidos para ubicarte en la posición de llegada, sin tener que hacer dos movimientos con tu ficha.

ACTIVIDAD 2: MATERIAL BICOLOR PARA REALIZAR LA SUMA CON NÚMEROS ENTEROS.

Figura 11. Palitos bicolores.



Fuente: Elaboración propia.

Teniendo en cuenta los palitos bicolores que te entregó tu docente, responde lo siguiente:

- 1) Escribe qué interpretación le puedes asignar.
- 2) Camilo en su clase de Matemáticas tomó 3 palitos de color natural y 3 palitos rojos, pensó, que como eran de distinto color, era como no tener ninguno, debido a que se cancelaban entre ellos.
 - a) Escribe qué piensas sobre la afirmación de Camilo.
 - b) Si se tiene que relacionar la afirmación de Camilo con un número, cuál consideras que debería ser ese número.

Lee la siguiente afirmación.

Si se tienen la misma cantidad de palitos de color natural y rojos, entonces, tendremos un **equilibrio**, que numéricamente podría representar o traducirse como el cero en los números enteros, puesto que no hay mayor cantidad de palitos de un color ni del otro.

Teniendo en cuenta la afirmación anterior, responde:

- 3) Indica y escribe cuántas formas posibles se pueden organizar los palitos bicolores para obtener el equilibrio.
- 4) Escribe cómo identificarías a los palitos de color natural y los palitos rojos, para no llamarlos “palitos de color natural” y “palitos rojos”.
- 5) Junta 5 palitos de color natural con 8 palitos rojos, quita el equilibrio e indica el resultado.

Palitos bicolores

Después de haber manipulado los palitos bicolores, se enuncian las siguientes reglas que se utilizarán para lograr resolver sumas con los números enteros, que estarán representadas con los palitos utilizando dos colores distintos. Lee atentamente para que puedas resolver las actividades que se plantean después de estas.

- Para representar las cantidades positivas se utilizarán los palitos de color rojo y para las cantidades negativas los palitos de color natural.
- Siempre se debe retirar el equilibrio de la mesa de trabajo, si existe.
- Si tienes palitos del mismo color, debes sumar la cantidad que representan e indicar el resultado, con el signo según el color que quede.

6) Utilizando los palitos bicolores, resuelve las siguientes sumas:

- a) $(+10) + (+8) =$
- b) $(+12) + (-9) =$
- c) $(-18) + (+8) =$
- d) $(-12) + (-5) =$

7) Considerando los resultados obtenidos, responde lo siguiente:

- a) Escribe cómo se debe resolver la suma si se tienen 2 números positivos.
- b) Indica cómo se debe proceder para resolver la suma entre 2 números negativos.
- c) Escribe qué conclusión podrías establecer al sumar una cantidad positiva a otra negativa.

Regla para sumar teniendo en cuenta el valor absoluto

Suma de números enteros con el mismo signo

Para sumar dos o más números enteros del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le pone el mismo signo de los sumandos.

Ejemplo 1.

$$(-40) + (-35) = -(|-40| + |-35|) = -(40 + 35) = -75$$

Suma de números enteros de distinto signo

Para sumar dos o más números enteros de distinto signo, primero se hallan sus valores absolutos, después se resta del mayor el menor y al resultado se le pone el signo del sumando que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplo 2.

$$(-28) + (+17) = -(|-28| - |17|) = -(28 - 17) = -11$$

Ejemplo 3.

$$(-35) + (+56) = +(|56| - |-35|) = +(56 - 35) = +21$$

8) Teniendo en cuenta, la regla que se mencionó anteriormente y las actividades que realizaste previamente, responde las siguientes sumas con números enteros:

a) $(+15) + (-10) =$

b) $(-13) + (+7) =$

c) $(+12) + (-17) =$

d) $(-25) + (-19) =$

Capítulo 4: Resultados y Análisis de los Resultados

En este apartado, se presenta la organización en tipos de respuesta de los estudiantes a las preguntas diseñadas en la propuesta de aula para los estudiantes del grado sexto del Colegio Taller de María. Ahora bien, la primera situación 1 denotada S1 con dos actividades S1A1 y S1A2, también la situación 2 con las actividades S2A1 y S2A2. En este sentido, posterior a la implementación se organizaron los datos en tablas para su posterior análisis.

Las tablas contienen la siguiente codificación:

Tipo de respuesta: Se denota con R1, R2, R3, R4 y R5, cada una se refiere a las distintas respuestas dadas por los estudiantes a una pregunta.

Frecuencia absoluta: Se denota con F.A.

Frecuencia relativa: Se denota con F.R.

Estudiantes: Para los estudiantes se utiliza la E_n , donde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$, indicando los 13 estudiantes que participaron de la implementación.

Pregunta: se representará con P_n indicando la pregunta que se está respondiendo.

4.1. Resultados y análisis de los resultados de la situación 1: La minería subterránea y los aerogeneradores para la construcción del concepto del número entero

A continuación, se presentan los resultados y análisis de resultados que surgieron de las respuestas de los estudiantes tras la implementación de la propuesta a 13 estudiantes del Colegio Taller de María ubicado en Jamundí. Estos resultados se muestran teniendo en cuenta a tipificación de los datos obtenidos en cada una de las actividades planteadas en el aula. Cada tipología describe la forma en general cómo los estudiantes resolvieron las preguntas, también se muestra la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de las respuestas. Por último, es importante resaltar que los análisis de los resultados se realizan a partir del marco de referencial conceptual mencionado en el capítulo 2.

- **Situación 1, actividad 1.**
- **Población:** 13 estudiantes.

Tabla 4. Tipificación S1A1P1P2.

Preguntas 1 Y 2

Escribe el nombre y la profundidad de la mina más profunda que se puede encontrar a nivel mundial.

Escribe el nombre y la profundidad de la mina menos profunda de la tabla 1.

Respuesta

Alrededor del 92 % de los estudiantes respondieron acertadamente las preguntas escribiendo el nombre y la profundidad de la mina más profunda y de las menos profundas.

Sin embargo, un estudiante (E8) no la responde acertadamente, dado que escribe todos los nombres y las profundidades de las minas sin especificar cuáles eran las minas por las que se preguntaban.

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta la tabla 4, a excepción de un estudiante, se puede decir que la mayoría de los estudiantes comprenden la situación planteada y logran comprender la información que se plantea en la tabla 1 de la situación 1 en la actividad 1, dado que indican correctamente las profundidades y los nombres de la mina más profunda y la menos profunda que se le presenta. Por otro lado, es posible deducir que el estudiante E8 no interpretó correctamente las preguntas 1 y 2, dado que sus respuestas no fueron acertadas y no tenían relación alguna con lo que esta solicitaba.

Tabla 5 Tipificación S1A1P3.

Pregunta 3			
Ordena las minas de menor a mayor, según su profundidad.			
Tipo De Respuesta		F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que organizan acertada de menor a mayor las profundidades de las minas y escriben al frente su respectivo nombre. E1, E2, E4, E5, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13.		11	84,6%
R2. Estudiantes que organizan de manera contraria lo solicitado, es decir, de mayor a menor las profundidades de las minas. E3.		1	7,7%
R3. Estudiantes que organizan de menor a mayor las profundidades de las minas teniendo 2 errores en su organización. E6.		1	7,7%

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta la información de tabla 5, aproximadamente el 85% de los estudiantes organizaron de manera adecuada las profundidades de las minas de menor a mayor, solo un estudiante (E3) las organizó de mayor a menor, pero se equivoca al hacer la lectura de lo que se le indicaba, y un estudiante (E6) se equivoca en la organización de las profundidades.

Aquí se puede apreciar que, los estudiantes pueden organizar números de menor a mayor y viceversa, por lo que comprenden el orden de los números enteros positivos, lo que es importante puesto que, “el orden en un conjunto nos permite comparar sus elementos” (Castaño, 2019, p. 8). Esto es concordante con el hecho de que, el orden es uno de los conceptos que permiten la transición de identificar u operar números positivos a empezar este proceso, también con los números negativos junto a los positivos.

Tabla 6. Tipificación S1A1P4.

Pregunta 4			
Escribe cuál es la diferencia entre la mina más profunda y la menos profunda.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indican la operación necesaria para encontrar la diferencia, pero no la resuelve para indicar el valor. E3.	1	7.7%	
R2. Estudiantes que indican el nombre o la profundidad de la mina más profunda y la menos profunda, pero no realizan la diferencia. E12, E13, E2, E4, E6, E10, E1, E8, E5, E7, E9.	11	84,6%	
R3. Estudiantes que responden teniendo en cuenta otros aspectos (tales como la temperatura). E11.	1	7,7%	

Fuente: Elaboración propia

Según la información de la tabla 6, el 92,3% de los estudiantes no logran identificar el concepto de diferencia de manera matemática, puesto que solo indicaron el nombre, la profundidad u otros aspectos que se pueden tener de la mina. Solo un estudiante (E3) fue el único que al menos planteó una operación de forma correcta, pero no la resolvió para indicar la diferencia. En este sentido, se puede deducir que los estudiantes no tienen una conceptualización de lo que significa “diferencia” en el contexto matemático o no la relacionan con la sustracción; lo interpretan teniendo en cuenta la cualidad de ser diferente, por consiguiente, se recomienda utilizar en el discurso del docente los conceptos matemáticos como deben ser y lo que significan en el contexto matemático, en particular, que la diferencia hace referencia a la resta o sustracción de dos números.

Tabla 7. Tipificación S1A1P5.

Pregunta 5			
Indica la altura del aerogenerador más alto del mundo.			
Tipo De Respuesta		F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indican la altura del aerogenerador más alto del mundo. E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E12, E13, E5, E9.		12	92,3%
R2. Estudiantes que indican una altura que no corresponde al aerogenerador más alto del mundo. E11.		1	7,7%

Fuente: Elaboración propia

En relación con la tabla 7, la mayoría de los estudiantes identificaron correctamente la altura del aerogenerador más alto del mundo, a excepción de uno (E11) que indicó una que no corresponde a este; además no se encuentra en el texto. Nuevamente, se aprecia que la

mayoría de los estudiantes identifican en un conjunto de datos dados el valor que es mayor, por esto se puede deducir que aquellos estudiantes que lo logran tienen en sus conocimientos previos el orden de los números naturales.

Tabla 8. Tipificación S1A1P6.

Pregunta 6			
Si un minero se encuentra al final de la mina más profunda y desea subir a la parte más alta del aerogenerador con mayor altura del mundo, indica cuántos metros tendría que recorrer.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indican los metros que tendría que recorrer utilizando la adición para encontrar esta distancia. E2, E4, E5, E7, E8.	5	38,5%	
R2. Estudiantes que restan el valor numérico de la profundidad de la mina con la altura del aerogenerador. E1, E3, E6, E9, E10, E11, E12, E13.	8	61,5%	

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados a la pregunta 6, alrededor del 38% de los estudiantes indicaron la distancia que debe recorrer el minero, expresando la operación y resolviéndola correctamente. Asimismo, aproximadamente el 62%, consideró que la altura del aerogenerador con la profundidad de la mina se tenía que restar para encontrar la distancia total recorrida. En este sentido, la mayor parte de ellos consideraron que si dos distancias están en direcciones opuestas a un punto de referencia (en este caso el suelo), entonces deben restarse porque una está por debajo del suelo y la otra por encima del suelo; menos de la mitad identificaron que dos distancias se suman así estén o se hayan desplazado hacia diferentes direcciones.

Ahora bien, se puede deducir que la mayoría de los estudiantes utilizan incorrectamente la noción de valor absoluto entre los valores que se indicaron de la mina y la altura del aerogenerador, en efecto, se debe tener en cuenta que al momento de enseñarles la distancia, indicarles que si ellos avanzan 2 metros hacia la derecha y luego, 2 metros hacia la izquierda, los pasos que realizaron en total no será 0, dado que es diferente la posición neutra en la que se queda y por otra parte, la cantidad de pasos realizados para volver a quedar en esa posición.

Tabla 9. Tipificación S1A1P7.

Pregunta 7			
Escribe cómo diferenciarías las alturas y las profundidades, puesto que están por encima del suelo y por debajo del suelo respectivamente.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que utilizan los signos que representan el positivo y el negativo usualmente para diferenciar las alturas y profundidades, respectivamente. E1, E2, E3, E4, E6, E9, E10, E11, E12, E13.	10	76,9%	
R2. Estudiantes que escribieron que las diferenciarían teniendo en cuenta algunas cualidades o características, por ejemplo, que entre mayor altura sentirían más frío o entre más profunda sean las minas menos oxígeno tendrían, entonces sería más difícil respirar. E7, E5, E8.	3	23,1%	

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta la tabla 9, aproximadamente el 77% de los estudiantes utilizaron los signos que comúnmente se utilizan en clase, y alrededor del 23% escribieron las diferencias teniendo en cuenta las características físicas o ambientales. De forma que, los

estudiantes utilizan su experiencia para resolver las preguntas que se les plantean, además hay un punto de referencia que implícitamente se puede reconocer, el suelo, dado que usualmente lo positivo es hacia arriba (o hacia la derecha), particularmente, la temperatura hace parte de la vida diaria de los estudiantes, esta se tiene presente ya sea por el calor o por el frío, se indica que aumenta o disminuye respectivamente, asimismo, pueden reconocer que en otros países o algunas regiones de nuestro país las temperaturas alcanzan valores bajo cero y que esto indica que hace frío, o también, pueden experimentarlo en sus casas con el uso de los congeladores, teniendo en cuenta que el agua pasa a su estado sólido si llega a 0°C o menos, en efecto, se identifica en la mayoría de estudiantes el uso de su intuición que permea su conocimiento y les permite relacionarlo en el contexto propiamente matemático.

Tabla 10. Tipificación S1A1P8.

Pregunta 8
8. Camilo es un estudiante de séptimo del Colegio Gimnasio Moderno del Valle; en la clase de Matemáticas les aconsejó a sus compañeros para facilitar la solución de las anteriores preguntas pensarán en lo siguiente: “Las profundidades y las alturas están desde diferentes perspectivas si estamos en el suelo, entonces, las alturas pueden estar representadas con números que tengan el símbolo +, dado que están por encima del suelo y las profundidades con números que tengan el símbolo -, debido a que están por debajo del suelo”. a) Escribe si consideras apropiada está nomenclatura para diferenciarlos. Si no estás de acuerdo, describe cuál sería tu propuesta.
Tipo De Respuesta
Todos los estudiantes escribieron que estaban de acuerdo con la nomenclatura utilizada para diferenciar los valores numéricos de las alturas y las profundidades, algunos mencionaron que era debido a que una era hacía arriba y la otra era hacía abajo respectivamente.
b) Indica qué signo o nomenclatura tendría el valor que representa el suelo.

Tipo De Respuesta

Todos los estudiantes indicaron diferentes signos para el valor que representaba el suelo, algunos escribieron signos que usualmente se utilizan en las clases de matemáticas para representarlo, tales como: el igual ($=$), el de la suma ($+$), la resta ($-$) o la división ($\div$), también fusionaron los signos para crear sus propios símbolos.

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados de la pregunta 8, los estudiantes tienden a utilizar los símbolos o signos que se les asignan a los elementos matemáticos que se estudian, además, sobre la pregunta realizada para que propusieran un signo para el valor que representa el suelo, todos tienden a utilizar símbolos o signos que han utilizado durante las clases. Esto resalta con el planteamiento del MEN (1998) cuando expone que, “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos” (p. 35). En este sentido, los estudiantes utilizan su contexto o la experiencia que tienen al momento de potenciar su conocimiento, puesto que todos estuvieron de acuerdo con la afirmación de Camilo; además todos utilizaron signos que son usualmente usados en las clases de matemáticas. Además, ninguno de los estudiantes indicó que representaría el punto de referencia con el cero, todos tuvieron una tendencia a asignarle el signo que acompañaría al valor que representa el punto de referencia, pero no lo indican.

A continuación, se presentan los resultados de la actividad 2 de la situación 1. En esta actividad participaron 11 estudiantes de los 13 que habían participado en la actividad 1.

Tabla 11. Tipificación S1A2P1.

Pregunta 1a

1.Utilizando GeoGebra haz lo siguiente:

a. Ubica en la recta numérica los valores de las profundidades de las minas y las alturas de los aerogeneradores.

Tipo De Respuesta

Todos los estudiantes que participaron de la actividad ubicaron en la recta numérica correctamente los valores de las minas y las alturas de los aerogeneradores utilizando el eje vertical en GeoGebra.

Pregunta 1b

1.Utilizando GeoGebra haz lo siguiente:

b. Ordena de menor a mayor las distancias que se encuentran en la recta numérica las profundidades y las alturas.

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Los estudiantes que ordenaron los valores de menor a mayor. E10, E12, E2, E3, E4, E9, E11, E13	8	72,7%
R2. Los estudiantes que indican los valores sin tener en cuenta el orden. E6, E7, E8.	3	27,3%

Pregunta 1c

1.c. Escribe qué tuviste en cuenta para determinar el orden de los valores de las profundidades y las alturas.

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que tuvieron en cuenta los valores que se ubicaban en la parte superior al cero para las alturas y en la parte inferior las profundidades. Es decir, escribieron primero el que estaba más abajo y fueron subiendo en el plano hasta llegar al último valor que habían ubicado en la recta numérica. E13, E10, E11, E2, E3, E4, E9.	7	63,6%
R2. Estudiantes que escribieron que tuvieron en cuenta la tabla y el texto para determinar el orden de los valores, pero no especifica la razón. E12.	1	9,1%
R3. Estudiantes que escribieron que tuvieron en cuenta el orden, pero no especifican cuál orden. E6, E8, E7.	3	27,3%

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados de la pregunta 1 expuestos en la tabla 11, se logró identificar que, utilizando GeoGebra los estudiantes ubicaron correctamente los valores de las profundidades de las minas y alturas que se presentaban en el texto. Además, alrededor del 73% ordenaron de menor a mayor correctamente, el restante 27% no los ordenaron de menor a mayor y viceversa. No dan una razón ni justifican su respuesta. Cabe aclarar que, los valores que tenían los aerogeneradores y las profundidades de las minas requerían de diferentes escalas, dado que los valores tenían un rango amplio.

En efecto, los estudiantes antes de ubicar correctamente el valor de las profundidades y de las alturas, reconocieron que en el plano debían modificar la escala de la recta numérica para lograrlo, también que intuitivamente las alturas, al estar por encima del suelo, lo representarían con los números positivos y respecto al valor de las profundidades, los números negativos. Además, se puede intuir que la mayoría de los estudiantes reconocen que los valores que son mayores están por encima del suelo y los que son menores están por debajo del suelo y se tiene en cuenta que el punto de referencia es el cero.

También, se deduce que los estudiantes se apropiaron de GeoGebra transformándolo en su recurso pedagógico, puesto que para ubicar los distintos valores necesitaban de diferentes escalas y GeoGebra les permitió ubicarlos sin tener que utilizar rectas, en las cuales los valores estuvieran desproporcionales.

Por otro lado, aproximadamente el 64% de los estudiantes justificó el orden de los números enteros teniendo en cuenta que la recta vertical permite organizarlos de menor a mayor, identificando cada valor desde el que está en la parte inferior, hasta el que está en la parte superior.

Pregunta 2a

2.Recordemos lo que dijo Camilo en su clase de Matemáticas: [...]

a) Indica dónde se ubicaría el punto de referencia en la recta numérica para las alturas y los valores de las profundidades que ubicaste.

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indicaron que el punto de referencia lo ubicarían en el cero. E11, E7,E2,E3,E4,E9.	6	54,5%
R2. Estudiantes que indicaron que el punto de referencia lo ubicarían en el medio o el centro de la recta. (Escribieron o lo representaron gráficamente) E6, E8, E13, E10.	4	36,4%
R3. Estudiantes que no indicaron el lugar en el que ubicarían el punto de referencia. E12.	1	9,1%

Pregunta 2b

2.Recordemos lo que dijo Camilo en su clase de Matemáticas: [...]

b) Camilo afirma que: “El punto de referencia es único en la recta numérica, puesto que, si se ubican la altura de un aerogenerador de 100 m y la profundidad de una mina de 100 m, estarán a la misma de distancia de ese número”

Escribe si estás de acuerdo con Camilo.

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indicaron que están de acuerdo con Camilo, debido a que tienen el mismo valor numérico. E6, E2,E3,E4, E9	5	45,5%
R2. Estudiantes que indicaron que no estarían a la misma distancia. E13.	1	9 %
R3. Estudiantes que indicaron que están de acuerdo con Camilo, pero no escriben una razón. E11, E10, E12, E7, E8.	5	45,5%

Pregunta 2c

2.Recordemos lo que dijo Camilo en su clase de Matemáticas: [...]

c) Escribe las diferencias y similitudes que encuentras al ubicar la altura de 100m y la profundidad de 100 m.

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
--------------------------	-------------	-------------

R1. Estudiantes que escribieron que un valor estaría ubicado arriba del cero y el otro por debajo, es decir, uno estaría ubicado en los positivos y el otro en los negativos. Además, que estarían ubicados a la misma distancia del punto de referencia o del cero. E10, E6,E13, E11, E2,E3,E4,E9,E12.	9	81,8%
R2. Estudiantes que no escribieron las diferencias ni las similitudes entre la altura de 100 m y la profundidad de 100 m. E7, E8	2	18,2%

Fuente: Elaboración propia

En consecuencia, de las respuestas de la pregunta 2a, se reconoce que al menos el 54% de los estudiantes ubicó el punto de referencia en el cero y alrededor del 36% identificó la posición en la cual debería estar (dibujan una recta y encierran o señalan la posición). Solamente un estudiante (E12) indicó una respuesta. Además, con la respuesta 2b se identificó que el 91% consideró que estarían a la misma distancia, y solo estudiante (E13), que representa el 9%, no consideró que estuvieran a la misma distancia del suelo (que es el punto de referencia en este contexto). Por último, en las respuestas a la 2c, el 81,8% indicó que, esa misma distancia se da en ambos sentidos teniendo en cuenta el punto de referencia

Por lo tanto, se expone que, para aproximadamente el 90 % de los estudiantes el punto de referencia sería el cero, dado que en el plano cartesiano de GeoGebra usualmente el cero está en la mitad de la pantalla, en efecto, es muy interesante y se utilizó para la primera noción de valor absoluto, dado que para comprender el concepto gráficamente se debe reconocer que la distancia desde el cero hasta la posición del número que se elige ese será el valor absoluto del número.

En este sentido, se puede deducir que los estudiantes identificaron que las distancias pueden ser iguales, aunque estén en diferentes sentidos, puesto que la mayoría justifica o

argumenta lo que piensa, ya sea matemáticamente o teniendo en cuenta su experiencia, por lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes identifican el valor absoluto teniendo en cuenta la distancia que hay desde el cero hasta un punto cualquiera y que el opuesto tendrá la misma distancia y esta será positiva también.

Tabla 12. Tipificación S1A2P3.

Pregunta 3a			
3) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos.			
a) Escribe qué aspectos o características tendrías en cuenta para relacionar los puntos.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que escribieron que tendrían en cuenta la distancia a la que están del punto de referencia o el cero. E10, E2,E3,E4, E9	5	45,4%	
R2. Estudiantes que escribieron que tendrían en cuenta los que están más cerca uno del otro. E11.	1	9,1%	
R3. Estudiantes que escribieron que relacionarían los puntos teniendo en cuenta el que sigue. E12.	1	9,1%	
R4. Estudiantes que escribieron que relacionarían los puntos uniéndolos con la herramienta “distancia” de GeoGebra. E7	1	9,1%	
R5. Estudiantes que no indicaron aspectos ni características. E6, E8, E13	3	27,3%	
Pregunta 3b			
3) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos.			
b) Indica las parejas de puntos que están relacionadas, después de haber utilizado la herramienta “distancia o longitud”.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indicaron las parejas de puntos que estaban a la misma distancia del cero, es decir, que tenían el mismo valor absoluto. E2, E10, E3, E4, E9.	5	45,4%	
R2. Estudiantes que indicaron diferentes parejas de puntos estableciendo otras relaciones tales como: el consecutivo, cercanía o no	6	54,6%	

escribieron ningún aspecto ni característica. E6, E11, E12, E13, E7, E8.

Fuente: Elaboración propia

En efecto, a la tabla anterior que muestra los resultados de la pregunta 3a, muestra que el 45,4% indican que tendrían en cuenta las distancias de los puntos para establecer una relación entre estos, además el resto que representan alrededor del 64,6% indicaron otros aspectos, en particular, un estudiante (E7) describe que será con la herramienta de GeoGebra que los relaciona.

También, en respuesta a la pregunta 3b, se mantuvo la misma relación que es el 45,4% de los estudiantes que respondieron tener en cuenta la distancia, y relacionaron los puntos que se encontraban a la misma distancia. En este sentido, es posible deducir que el 45,4% de los estudiantes tienen en cuenta que la distancia no puede ser negativa y que, si dos puntos o más están en distintos sentidos, pero se encuentran a la misma distancia, entonces estarán relacionados, con una tendencia a pensar o a conceptualizar el valor absoluto.

También, el uso de GeoGebra con la herramienta “distancia o longitud” permitió que los estudiantes identificaran que se puede indicar el valor absoluto de cualquier número sea positivo o negativo, cabe aclarar que se amplía el concepto, gracias a que la aplicación permite seleccionar valores en diferentes escalas, identificando y reconociendo valores que con el uso de lápiz y papel sería más complejo o que el estudiante no indicaría en su recta numérica, puesto que en ocasiones son valores muy pequeños o muy grandes y de este modo conocer que la distancia siempre es positiva. Sin embargo, se genera un obstáculo que en este caso se presentó con un estudiante (E7) que interpretó relacionar hacía referencia a la

herramienta que se utilizó, por esto, se debe indicar a los estudiantes que es relacionar conceptualmente.

Tabla 13. Tipificación S1A2P4.

Pregunta 4			
Para transportarse de un lugar a otro dentro de la mina y al aerogenerador los mineros utilizan ascensores. Un día estaban Sebastián y Diego trabajando, justamente en un aerogenerador con una altura de 250 m y en una mina con una profundidad de 250 m, respectivamente, como se muestra en la figura 8. Teniendo en cuenta, lo anterior, responde individualmente las siguientes preguntas:			
4) Escribe si alguno de ellos está más cerca del suelo.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que escriben que están a la misma distancia. E2, E4, E7, E8, E9, E13	6	54,5%	
R2. Estudiantes que escriben que no están a la misma distancia. E3, E10	2	18,2%	
R3. Estudiantes que no responden la pregunta. E6, E11, E12	3	27,3%	

Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la tabla anterior evidencian que, el 54,5% de los estudiantes estuvieron de acuerdo que los mineros se encontraban a la misma distancia, es decir, que ninguno estaba más cerca al suelo. Sin embargo, dos estudiantes (18,2%) indicaron que estaban a diferentes distancias y 3 estudiantes no escribieron ni indicaron una respuesta. Por consiguiente, la mayoría de los estudiantes no tienen problema con la noción de distancia, ya que pudieron identificar que los mineros estaban a la misma distancia del suelo, sin que la altura o la profundidad de la mina fuese una característica que aumentara o disminuyera esta distancia, en este caso particular de 250 metros, en este sentido, se identifica que la experiencia de los estudiantes tiende a que la posición opuesta de dos valores no implica un

cambio en la distancia, entonces, se puede intuir que los estudiantes en la recta numérica ubicarían a la misma distancia el 250 y el -250.

Tabla 14. Tipificación S1A2P5.

Pregunta 5			
Para transportarse de un lugar a otro dentro de la mina y al aerogenerador los mineros utilizan ascensores. Un día estaban Sebastián y Diego trabajando, justamente en un aerogenerador con una altura de 250 m y en una mina con una profundidad de 250 m, respectivamente, como se muestra en la figura 8. Teniendo en cuenta, lo anterior, responde individualmente las siguientes preguntas:			
5)Indica cuántos metros tendría que recorrer Sebastián para llegar a donde está Diego, el otro minero.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indican la distancia que debe recorrer Sebastián (500m). E2, E3,E4,E6,E7,E10,E11,E12.	8	72,7%	
R2. Estudiantes que indican otra distancia y no realizan procedimiento. E8,E9,E13.	3	27,3%	

Tabla 15. Tipificación S1A2P6.

Pregunta 6			
6) En caso de que Sebastián se quede quieto, escribe si Diego tuviese que recorrer una distancia igual, menor o mayor a la anterior, para encontrarse con Sebastián.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que escriben que debe recorrer la misma distancia. E2, E3, E6,E7,E9,E10,E11, E12, E13.	9	81,8%	
R2. Estudiantes que escriben que debe quedarse quieto. E4.	1	9,1%	
R3. Estudiantes que escriben que debe recorrer una mayor distancia. E8.	1	9,1%	

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuentas las anteriores tablas 14 y 15, se reconoce que aproximadamente el 82% de los estudiantes comprenden la distancia a la que se encuentran los mineros (500 metros), además de que si cambia el sentido hacia donde debe avanzar, esto no implica que aumente o disminuya la distancia. Esto permite deducir que, los estudiantes pueden construir su noción de valor absoluto por medio del contexto que se les está presentado, puesto que se les planteó una situación en la que un minero sube y el otro baja, pero logran identificar que esta distancia no cambia, en otras palabras, se reconoce un punto de referencia (el suelo) al cual se miden dos distancias teniendo en cuenta otros dos puntos (posiciones de los mineros), en efecto se favoreció la construcción de una definición o una noción geométrica del valor absoluto por parte de los estudiantes.

Tabla 16. Tipificación S1A2P7.

Pregunta 7a			
7) Cuando cada uno finalizó su labor, en un instante, ambos habían recorrido 170m, como se muestra en la figura 9.			
A) Escribe a qué distancia está cada uno del suelo.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes indican la respuesta acertada, es decir, que los mineros están a 80 m del suelo. E2, E3, E4, E6, E8, E9, E10, E11, E12, E13.	10	90,9%	
R2. Estudiantes que indican una respuesta que no es acertada, es decir, que están a 170 m del suelo. E7	1	9,1%	
Pregunta 7b			
7) B) Si se mueven hacia el suelo hacia arriba y hacia abajo, respectivamente, 25m más, ¿a qué distancia estará cada uno del suelo en este caso?			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que escribieron la respuesta correctamente y restaron para llegar al resultado (55 m) E2 E3 E4 E6 E7 E8 E9 E10 E11 E12	10	90,9%	

R2. Estudiantes que no indicaron la respuesta correctamente, además del procedimiento para llegar al resultado (225 m) E13	1	9,1%
--	---	------

Pregunta 7c

7)

C) Dibuja en la hoja que se te entregó, una recta numérica y ubica las posiciones de Sebastián y Diego en ese momento.

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que ubicaron ambos puntos en la recta, además tuvieron en cuenta que debía estar a una misma distancia. E2 E3 E6 E9 E10 E12	6	54,5%
R2. Estudiantes que ubicaron los puntos en los cuales no se precisaba qué estaban respondiendo. E4, E11.	2	18,2%
R3. Estudiantes que no ubicaron puntos en la recta E7, E8, E13.	3	27,3%

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la tabla 16 que muestra los resultados de las preguntas 7a y 7b, permitieron observar que aproximadamente el 91% de los estudiantes responden correctamente, y solamente de un estudiante en ambas preguntas indican valores incorrectos en el primer caso el estudiante E7 indica la distancia que estaba en el enunciado de la pregunta 7a, sin tener en cuenta que había un cambio en esta debido a que el minero se desplazaba y el estudiante E13 indica un valor incorrecto (225 m) en la pregunta 7b, sin presentar la operación que realizó. Respecto a las respuestas a la pregunta 7c se observó que, 6 estudiantes de los 11 participantes resolvieron correctamente la respuesta, sin embargo 5 estudiantes no lo lograron.

En efecto, existe una noción de la mayoría de los estudiantes respecto a que se reduce la distancia, lo que permite introducir el concepto de valor absoluto, ya sea geométricamente o construir la definición utilizando el contexto que se establece en la actividad, así como lo

recomienda el MEN en los lineamientos curriculares de Matemáticas; también se puede deducir que se tiene en cuenta los números relativos, puesto que en las preguntas 7a y 7b hubo un cambio del punto de referencia.

Por otro lado, las respuestas de la pregunta 7c indicaron que, aproximadamente la mitad de los estudiantes responden correctamente, permitiendo exponer que, al utilizar la recta y que ubicaran los puntos en los cuales estarían a la misma distancia, además, se utiliza la propuesta de aula como un recurso pedagógico dado que los estudiantes tenían a su disposición imágenes que permitían analizar gráficamente las posiciones de los mineros y estos se encontraban a la misma distancia del suelo.

Por otro lado, es importante que los estudiantes que no respondieron correctamente, enfatizarles en el uso de los recursos pedagógicos que estaban a su disposición para lograr favorecer la construcción de sus conocimientos.

Tabla 17. Tipificación S1A2P8.

Pregunta 8		
Lee la siguiente afirmación.		
“Los números negativos y los números positivos se representan en la recta, pero el valor de las distancias en las que estaban Sebastián y Diego no cambiaban, se encontraban en direcciones opuestas, entonces, ese valor de la distancia representa el valor absoluto, que no sería en ningún caso negativo, puesto que las distancias negativas no existen. Además, en la recta numérica se observa que el cero sería el punto de referencia, en este caso, el suelo sería el punto de referencia”.		
8) Escribe el opuesto de -120 → ____.		
Escribe el opuesto de -247 → ____.		
Escribe el opuesto de -45 → ____.		
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.

R1. Estudiantes que escribieron el opuesto de los números correctamente. E2, E3, E4, E6, E7, E10, E11, E12, E13.	9	81,8%
R2. Estudiantes que solo respondieron una correctamente. E9	1	9,1%
R3. Estudiantes que no respondieron la pregunta. E8	1	9,1%

Fuente: Elaboración propia

En relación con la tabla 17, 9 estudiantes de los 11 escribieron correctamente el opuesto de los números que se les presentaron, un estudiante (E9) indicó un opuesto de los 3 que se solicitaban, y, por último, el estudiante E8 no respondió la pregunta. Por esto, es posible concluir que la mayoría tuvieron en cuenta las indicaciones, donde leyeron la afirmación. Además, se puede mencionar que comprendieron la misma puesto que representan alrededor del 82% de los estudiantes que participaron en esta actividad. Así, se permite empezar a tener en cuenta la noción del opuesto aditivo de los números enteros que se trabaja cuando se les presentan las propiedades de la suma.

Tabla 18. Tipificación S1A2P9.

Pregunta 9		
9)Utilizando la calculadora, indica los resultados de la suma de los anteriores números y sus opuestos.		
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indicaron que el resultado es 0. E2 E3 E4 E6 E7 E10 E11 E12 E13	9	81,8%
R2. Estudiantes que no respondieron E8	1	9,1%
R3. Estudiantes que obtuvieron solo una respuesta correcta. E9	1	9,1%

Fuente: Elaboración propia

Conforme la tabla 18, donde se muestra las respuestas a la pregunta 9, permite analizar que la mayoría de los estudiantes indicaron el resultado correcto que es 0, y dos

estudiantes tuvieron unos casos en particular. El primero no responde ninguna de las preguntas, y el segundo obtiene un resultado correcto; se pensó que fue debido a que en la pregunta 8 solamente escribió un número opuesto de los tres que se solicitaban. Por consiguiente, la mayoría de los estudiantes lograron verificar correctamente que si se tienen sumandos que son opuestos aditivos, entonces el resultado será cero.

Tabla 19. Tipificación S1A2P10A

Pregunta 10a			
10)			
A) Escribe qué características tienen los números opuestos			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Los estudiantes indicaron que unos son positivos y los otros negativos, pero con el mismo valor absoluto. E7 E8 E11	3	27,7%	
R2. Los estudiantes escribieron que su característica es ser iguales. E2 E10 E13	3	27,7%	
R3. Los estudiantes escribieron que al sumarlos su resultado es 0. E4	1	9,1%	
R4. Estudiantes que no respondieron E3 E6 E9 E12	4	35,5%	

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados de la tabla 19 de la pregunta 10a, 7 de los 11 estudiantes escribieron características que lograron identificar de los números opuestos, que fueron las siguientes:

- Tienen el mismo valor absoluto (también, hacían referencia a que estuvieran a la misma distancia del cero) y tenían signos contrarios.
- Tenían que ser iguales, pero no aclararon sobre el signo que debían tener.
- Al sumarlos el resultado sea cero.

Por otro lado, alrededor del 36 % de los estudiantes no respondieron la pregunta.

En este sentido, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes lograron identificar con las actividades planteadas el valor absoluto, teniendo en cuenta que construyeron sus propias conjeturas que eran diferentes, puesto que se favoreció el conocimiento previo de los estudiantes y su experiencia. Además, surge una necesidad de los negativos por parte de algunos estudiantes, dado que identifican que se deben sumar dos números y que la suma sea cero o que se considere que los números tengan signos contrarios. Por último, se identifica que los estudiantes construyeron una noción de lo que es el inverso aditivo cuando expresan que se deben sumar dos números y que el resultado sea cero.

Tabla 20. Tipificación S1A2P10B.

Pregunta 10b			
10)			
B) Indica qué sucede siempre que sumamos números que son opuestos.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Los estudiantes que indican que el resultado siempre es 0. E2, E3, E4, E6, E10,E11.	6	54,5%	
R2. Los estudiantes que indican que unos suman y otros restan. E7,E8	2	18,2%	
R3. Los Estudiantes que no indicaron una respuesta. E9,E12,E13.	3	27,3%	

Fuente: Elaboración propia

Los resultados expuestos en la tabla 20 frente a la pregunta 10b, evidencian que el 54,5% de los estudiantes reconoce que el resultado siempre será 0. El resto de los estudiantes (45,5%) no indican una respuesta correcta o no responden la pregunta. Esto lleva a deducir que, un poco más de la mitad tienen en cuenta la pregunta 9 que se había planteado, en la cual utilizaron la calculadora para verificar la suma de los números opuestos, dado que en la pregunta 9 alrededor del 82% verificaron que el resultado era 0. Sin embargo, en la pregunta

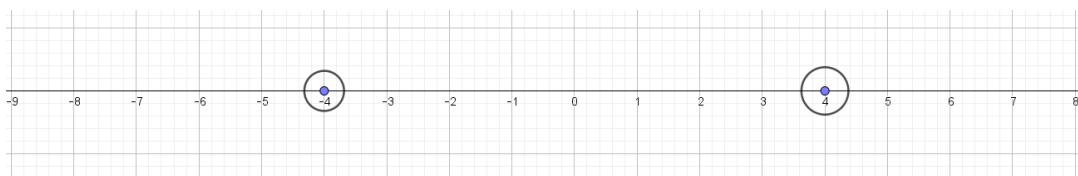
10b disminuyó al 54,5% (4 estudiantes menos) por lo que es importante enfatizar en los estudiantes que de lo particular se puede llegar a lo general, por ejemplo, a la propiedad del inverso aditivo que se propusieron en la pregunta 9 y 10b.

Además, es relevante que se enfatice que los recursos pedagógicos favorezcan a la abstracción de las propiedades que se quieren transmitir, en este caso, por ejemplo, solamente 6 de los 11 estudiantes que participaron lograron construir una noción o definición de la propiedad del inverso aditivo.

Tabla 21. Tipificación S1A2P11.

Pregunta 11

Como se mencionó anteriormente, el valor absoluto, geométricamente, de un número se puede interpretar como la distancia del número al cero. Esta idea se extiende a la distancia entre dos números.



En la gráfica la distancia de 0 a 4 es igual a la de 0 a -4, es decir, $|-4| = 4$ y $|4| = 4$.

En este sentido, el valor absoluto se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ -a, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

11) Teniendo en cuenta la información anterior, responde:

- a) $|-5| =$
 - b) $|5| =$
 - c) $|25| =$
 - d) $|-41| =$
 - e) $|-19| =$
-

Los 11 estudiantes que participaron de la actividad respondieron indicaron correctamente los valores absolutos que se indicaban en la pregunta 11, además, algunos estudiantes escribían el otro valor absoluto que era equivalente al que se les presentaba.

Por ejemplo, en la c “ $|25| = 25$ y agregaban $|-25| = 25$.

Fuente: Elaboración propia

Con los resultados de la pregunta 11 se infiere que, los estudiantes comprenden la información sobre el valor absoluto, además agregaron en los diferentes ítems información adicional utilizando el ejemplo que se planteaba en la definición del valor absoluto.

Para cerrar este apartado, la situación 1 permitió identificar que, al cambiar la modalidad de presentar las actividades a los estudiantes, es posible que se motiven y se interesen en crear diferentes estrategias para resolver los ejercicios, al igual que con el igualmente el uso de las imágenes y un contexto en particular. También se observó que, la mayoría indicaron que las distancias se suman así estuvieran en direcciones opuestas respecto a punto de referencia que era el suelo. Además, indicaron la suma y daban la razón por la cual sumaban, es decir, que el concepto de distancia en un contexto de la vida real se comprendi

Sin embargo, hay que crear estrategias que permitan a que puedan plasmarlo en la recta numérica, dado que los estudiantes pasaron de 9 y 10 de comprender las distancias en un contexto de la vida real a solo 6. Al presentarlo matemáticamente se debe crear, posiblemente, otras actividades u otras estrategias que permitan que la transición de lo cotidiano (concreto para el estudiante) a lo matemático (abstracto) sea palpable y sutil, enfatizando en que logre adquirir el conocimiento que se quiere transmitir.

Por último, permitió identificar que los estudiantes dependiendo de la manera que se les cuestione por el opuesto aditivo de un número entero logran reconocerlo, debido a que en las preguntas que hacían referencia a este concepto, 9 de los 13 estudiantes lo definían de tal

manera que se comprendían y finalmente, el valor absoluto, los 13 estudiantes respondieron correctamente las preguntas en las que se evidenciaba este concepto.

4.2. Resultados y análisis de los resultados, situación 2: Estructura aditiva con números enteros teniendo como referencia alturas y profundidades.

A continuación, se presentan los resultados y análisis de los resultados de las 2 actividades de la situación 2, la primera, es una introducción a la suma con números enteros, utilizando el juego como recurso pedagógico y la segunda, es el uso de material manipulativo con palitos bicolores y la regla del valor absoluto para resolver sumas con este conjunto numérico.

La siguiente es la actividad 1 de la situación 2, en la cual participaron los 13 estudiantes del grado sexto de la básica secundaria del Colegio Taller de María.

Tabla 22. Tipificación S2A1P1.

Pregunta 1		
A continuación, se plantean las reglas e instrucciones del juego “Jugando a escalar hacia la meta”, lean atentamente para jugar y divertirse mientras aprender a sumar los números enteros.		
Instrucciones: [...]		
1.En cada lanzamiento los jugadores deben completar una tabla como la siguiente:		
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que asumen las reglas del juego, realizan entre 1 y 5 lanzamientos y llegan a la meta. Además, responden correctamente las sumas. E4, E6	2	15,4%

R2. Estudiantes que asumen las reglas del juego, realizan entre 5 y 10 lanzamientos y llegan a la meta. Además, responden correctamente las sumas. E1, E2.	2	15,4%
R3. Estudiantes que asumen las reglas del juego, realizan diferente cantidad de lanzamientos y resuelven correctamente las sumas. Sin embargo, no llegan a la meta. E11, E3, E10, E12.	4	30,8%
R4. Estudiantes que realizan diferentes lanzamientos, pero no realizan correctamente las sumas. E13, E7, E8, E9, E5.	5	38,4%

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con los resultados a la pregunta 1 que se observa en la tabla 22, alrededor del 61% de los estudiantes logró asumir las instrucciones que se indicaron, además avanzaron durante el juego “escalando hacia la meta”, indicando las operaciones que debían realizar dependiendo de los valores que obtenían con los dados; de ese 61% el 30,8% terminó el juego, llegando a la meta.

Por otro lado, aproximadamente el 38% de los estudiantes no asumieron las instrucciones, puesto que no escribían las operaciones o escribían los sumandos y no las resolvían. En este sentido, algunos estudiantes resolvieron varias operaciones en un rango $[-5,5]$, otros resolvieron más de 5 operaciones, pero al final no hubo descontento y los estudiantes estuvieron animados aprendiendo sobre la base de un juego.

Tabla 23. Tipificación S2A1P2A

Pregunta 2a
2) Teniendo en cuenta la experiencia con el juego de “escalando hacia la meta”, responde individualmente, las siguientes actividades:
a) Si en un dado obtienes el número -3 y en el otro el número 5, describe el movimiento que tendrías que hacer y la posición en la que quedarías.

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indican que bajan 3 y subirían 5 espacios o escriben directamente la posición en la que quedarían ubicados correctamente (casilla del 2). E1 E2 E3 E5 E7 E9 E10 E12	8	61,5%
R2. Estudiantes que suman los valores dados e indican la posición en la que quedarían correctamente (casilla del 2). E4 E11 E13	3	23,1%
R3. Estudiantes que plantean una suma entre los valores dados, pero no la resuelven correctamente. E6 E8	2	15,4%

Fuente: Elaboración propia

Con los resultados a la pregunta 2a en la tabla 23 se puede decir que, 11 de los 13 estudiantes identificaron la casilla en la que quedaría la ficha correctamente, aunque solo 3 de ellos escriben la operación necesaria para indicar cuál sería la posición en la que quedaría. También se observa que, únicamente 2 estudiantes no indicaron correctamente la posición final, pero plantearon una suma que resolvieron erróneamente. En efecto, se puede pensar que la experiencia del juego “escalando hacia a la meta” guio en la utilización de la suma para encontrar la posición final. Por ende, se observa que al menos 50% quisieron utilizar la suma nuevamente, como se les planteó en la pregunta 1.

También se puede exponer que, los estudiantes utilizaron la suma con números negativos en un contexto distinto al matemático, esperando que haya sido significativo en el caso de los que resolvieron correctamente, que se haya logrado el aprendizaje significativo, y que los estudiantes se motivaran a intentarlo utilizando diferentes estrategias en el juego. Por consiguiente, si se utiliza por más tiempo en clase, puesto que se jugó una sola vez, se

podrían asignar monitores o al mismo docente para verificar cada lanzamiento, ya que no se comprendió, pero sí se evidenció que quisieron utilizar la suma.

Tabla 24. Tipificación S2A1P2B.

Pregunta 2b			
2) Teniendo en cuenta la experiencia con el juego de “escalando hacia la meta”, responde individualmente, las siguientes actividades:			
b) Si obtienes en ambos dados números negativos, describe el movimiento para ir a su posición de llegada.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indican los valores se suman o que el movimiento que debe ser hacia abajo. E1E5 E4 E3 E2 E7 E8 E9 E10 E12	10	76,9%	
R2. Estudiantes que escriben que el valor sería igual a cero o que se quedaría en la misma casilla. E6 E11 E13	3	23,1%	

Fuente: Elaboración propia

Frente a la tabla 24, que muestra los resultados a la pregunta 2b, se puede decir que alrededor del 77% de los educandos indicaron correctamente la operación o el movimiento que se debía hacer si obtuviesen dos valores negativos con los dados, sin embargo, aproximadamente el 23%, escribieron que era 0 o que no había movimiento. En este sentido, la mayoría de estudiantes utilizan la adición con los números naturales para relacionarlo con la adición de números negativos, el recurso pedagógico favoreció esta estrategia o alternativa de los estudiantes, debido a que permitía que bajaran la cantidad de casillas que les indica la suma que realizaban. Lo anterior, muestra la importancia del uso de recursos pedagógicos dentro del aula de clase, puesto que, si no se hubiese implementado, no se podría haber desarrollado esta habilidad de relacionarlo “con bajar” que es un término que se utiliza en

contextos cotidianos y sin olvidar que lograron resolver más de tres sumas con números enteros antes de presentarles un método formal. Puede anotarse que, se debe plantear una alternativa para que los sumandos no estén tan limitados, dado que el intervalo solamente era $[-5,5]$.

Tabla 25. Tipificación S2A1P2C.

Pregunta 2c
2) Teniendo en cuenta la experiencia con el juego de “escalando hacia la meta”, responde individualmente, las siguientes actividades: c) Describe el movimiento que tendrías que hacer, si obtienes dos números positivos.
Tipo De Respuesta
Todos los estudiantes describieron que primero deben realizar una suma entre los dos números positivos y luego, subir la cantidad de casillas que indique la suma. Algunos realizaron ejemplos, tales como: E2: “Estoy en (-8) y sale $5 + 1 = 6$ entonces quedo en (-2) ”. También, simplemente escribían dos valores, los sumaban e indicaban que subían ese valor que le indicaba la suma.

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta la información de la Tabla 25, se puede deducir que hay una ampliación de los conocimientos de los estudiantes, dado que se tiene en cuenta el uso de los números naturales y el recurso pedagógico para resolver sumas con los números enteros, pero enfatizando en la construcción de métodos propios de los estudiantes, lo anterior se evidencia en que los estudiantes resuelven la operación y suben la cantidad de unidades que le indica el resultado, sin necesidad de resolver obligatoriamente la operación, en particular, el ejemplo que se menciona sería resolver $(-8) + 6$, pero el estudiante solamente toma su ficha, sube los 6 y llega a la posición del -2 , si no se usa el recurso, posiblemente no se pensaría en este método para llegar a la solución, por lo tanto, se genera una ampliación a las estrategias y

alternativas que pueden generar los estudiantes en su aprendizaje, además, de las que pueden utilizar los docentes para la enseñanza.

Tabla 26. Tipificación S2A1P2D

Pregunta 2d			
2) Teniendo en cuenta la experiencia con el juego de “escalando hacia la meta”, responde individualmente, las siguientes actividades:			
d) Indica qué sucede en los casos que se obtienen 2 números que son opuestos.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indican que la suma es cero o quedan en la misma casilla en la que se encuentra la ficha. E2 E9 E6 E7 E10 E12 E3 E1	8	61,5%	
R2. Estudiantes que indican dos números que no son opuestos y realizan la suma de estos. E5 E8 E11 E13	4	30,8%	
R3. Estudiantes que indican que se deben restar los valores y mover la cantidad que indique el resultado. E4	1	7,7%	

Fuente: Elaboración propia

En consecuencia, a la información de la tabla 26, que muestra los resultados de la pregunta 2d, se puede afirmar que 8 de los 13 estudiantes indicaron correctamente el resultado de la misma y la posición, y un estudiante (E4) interpreta que se debe restar y moverse según el resultado. Asimismo, 4 de los 13 estudiantes utilizaron ejemplos que no correspondían a lo que se indica en la pregunta. De tal forma que, alrededor del 62% de los estudiantes utilizaron su experiencia en el juego y sus conocimientos previos para indicar que el resultado era cero, sin embargo, el estudiante (E4) escribió que se debía utilizar la resta.

Entonces se puede suponer que, al operar la suma será 0, obteniendo la respuesta correcta, siendo así, sería aproximadamente el 70% de los estudiantes que lograron reconocerlo, es decir, que el juego podría potenciar los saberes previos de los estudiantes.

Tabla 27. Tipificación S2A1P3.

Pregunta 3			
3) Teniendo en cuenta las respuestas anteriores, indica cómo podrías determinar cómo sumarías los valores obtenidos para ubicarte en la posición de llegada, sin tener que hacer dos movimientos con tu ficha.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indican que deben sumar los valores dados y luego, mover hacia arriba o hacia abajo teniendo en cuenta el valor de la suma. E1 E4 E3 E12 E10 E7 E5 E9 E2	9	69,2%	
R2. Estudiantes que no indican una respuesta. E11 E8 E6 E13	4	30,8%	

Fuente: Elaboración propia

A partir de los datos registrados en la tabla 27 se puede decir que, aproximadamente el 69% de los educandos utilizaron el método de la suma para realizar un único movimiento, mientras que alrededor del 31% no respondieron la pregunta. Por consiguiente, se puede inferir que la mayoría empezaron con el juego a construir una noción del uso de la suma con números enteros, dado que 9 de los 13 estudiantes indicaron primero realizarla para poder saber si avanzaban o retrocedían.

A continuación, se presentan las respuestas a la actividad 2 de la situación 2 que consta de 10 preguntas, en esta actividad participaron los 13 estudiantes.

Tabla 28, Tipificación S2A2P1.

Pregunta 1

Teniendo en cuenta los palitos bicolores que te entregó tu docente, responde individualmente lo siguiente:

1. Escribe que interpretación le puedes asignar

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que lo interpretaron desde un punto de vista matemático (números positivos y negativos, empezaron a formar conjuntos con los palitos). E1, E4, E11, E2, E3, E8, E10, E12.	8	61,5%
R2. Estudiantes que le asignaron otros dos colores o los llamaron propiamente por los colores que tenían, por ejemplo, palitos de color natural y palitos de color rojo o palitos de color negro (representaban los números positivos) y color blanco (representaban los números negativos). E5, E6, E7, E9.	4	30,7%
R3. Estudiantes que lo interpretaron teniendo en cuenta otras ciencias (glóbulos rojos haciendo referencia a los palitos rojos y glóbulos blancos haciendo referencia a los palitos de color natural) E13	1	7,8%

Fuente: Elaboración propia

Las tablas anteriores muestran que, aproximadamente el 61% de los estudiantes utilizó el material manipulativo que se les presentó. En primer lugar, les pareció correcto relacionarlo con los números negativos y positivos, y en segundo lugar, alrededor del 38%, tuvo en cuenta el color, en cambiar el mismo para tener una referencia o tuvieron en cuenta sus conocimientos sobre biología, dado que un estudiante (E13) lo interpretó como si estos fueron los glóbulos. Por consiguiente, los estudiantes si hicieron uso de sus conocimientos previos en matemáticas y de su contexto para asignar una representación a los palitos con los números negativos y positivos, sin embargo es posible que el color desviara la atención de lo que se quería lograr, puesto que aproximadamente el 31% de ellos enfatizó en el color.

Tabla 29. Tipificación S2A2P2.

Pregunta 2a			
2. Camilo en su clase de Matemáticas tomó 3 palitos de color natural y 3 palitos rojos, pensó, que como eran de distinto color, era como no tener ninguno, debido a que se cancelaban entre ellos.			
2. A) Escribe que piensas sobre la afirmación de Camilo			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que estuvieron de acuerdo con la afirmación, además lo relacionan con el número cero o con los números negativos y positivos. E1, E10, E12, E13, E3, E6, E7.	7	53,8%	
R2. Estudiantes que no estuvieron de acuerdo con la afirmación y no relacionaron los palitos en el contexto propio matemático. E2, E4,E5,E8,E9,E11.	6	46,2%	
Pregunta 2b			
2) B) Si se tiene que relacionar la afirmación de Camilo con un número, cuál consideras que debería ser ese número.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que lo relacionan numéricamente con el 0. E1, E2, E3, E5, E7, E8, E10, E12, E13.	9	69,2%	
R2. Estudiantes que lo relacionan con un número diferente al 0. En otras palabras, escogían un número aleatoriamente. E4, E6, E9, E11.	4	30,8%	

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados a las preguntas 2a y 2b de la situación 2 se observa que, 7 de 13 estudiantes estuvieron de acuerdo con la afirmación de Camilo respecto a la relación que tenían los palitos que representaban valores negativos y positivos; relacionándolo inmediatamente con el cero. Luego, en la pregunta 2b, aumenta a 9 estudiantes

(aproximadamente el 69%) los que relacionan la afirmación de Camilo numéricamente con el cero.

En consecuencia, se puede intuir que, a los estudiantes se les debe socializar sobre los recursos manipulativos que se utilizarán, aclarando sus propósitos o el uso que tendrán durante la clase y que no son el fin último, sino que es la adquisición o ampliación de conocimientos para favorecer sus estrategias. Por otro lado, hay un reconocimiento del número cero como el resultado al representar la misma cantidad pero con distintos significados, aunque, en este caso, no se presentan los números negativos y positivos, pero se comprende que aumentará el valor, sino que se anulará y que esta anulación estará representada numéricamente con el cero.

Tabla 30. Tipificación S2A2P3.

Pregunta 3			
Lee la siguiente afirmación.			
“Si se tienen la misma cantidad de fichas de color natural y rojas, entonces, tendremos un equilibrio, es decir, el cero en los números enteros, puesto que no hay más fichas de un color ni del otro.”			
3. Indica y escribe cuántas formas posibles se pueden organizar los palitos bicolores para obtener el equilibrio.			
Tipo De Respuesta		F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indicaron la misma cantidad de palitos rojos y cantidad de palitos de color natural o las posibles formas de organizar teniendo en cuenta la cantidad de palitos que tenían (20 formas). E1, E6, E7, E9, E11, E12, E13, E2, E3, E4, E8, E10.		12	92,3%
R2. Estudiantes que indicaron diferentes cantidades de palitos para cada color, en efecto no formaron el equilibrio. E5		1	7,7%

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta los resultados a la pregunta 3 se identificó que, un estudiante (E5) no respondió acertadamente, los demás sí lo hicieron teniendo en cuenta la afirmación “Si se tienen la misma cantidad de fichas amarillas y rojas, entonces, tendremos un equilibrio, es decir, el cero en los números enteros, puesto que no hay más fichas de un color ni del otro”. Siendo así, alrededor del 92% cumplieron con el objetivo que era identificar cómo obtener el equilibrio. En efecto, la mayoría logró comprender la afirmación, sin embargo es posible que se limitaran a lo que es el equilibrio debido a que, podrían formarlo teniendo en cuenta la cantidad de palitos que estaban disponibles; en este caso 20 palitos de cada color, lo que limitó su respuesta porque solo habían 20 formas posibles de obtener el equilibrio.

Tabla 31. Tipificación S2A2P4.

Pregunta 4			
Lee la siguiente afirmación.			
“Si se tienen la misma cantidad de fichas amarillas y rojas, entonces, tendremos un equilibrio, es decir, el cero en los números enteros, puesto que no hay más fichas de un color ni del otro.”			
4. Escribe cómo identificarías a los palitos de color natural y los palitos rojos, para no llamarlos “palitos de color natural” y “palitos rojos”.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que los identificaron teniendo en cuenta los números positivos y negativos. E1, E2, E3, E10, E12	5	38,5%	
R2. Estudiantes que los identificaron con los colores asignados u otros 2 colores. (negro positivos y blancos para los negativos o en viceversa, o utilizaban otros colores) E4, E5, E6, E7, E8, E9, E11.	7	53,8%	
R3. Estudiantes que los identificaron como los glóbulos rojos y blancos. E13.	1	7,7%	

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes a la pregunta 4, la mayor parte (7 de los 13) identificaron los palitos bicolores, asignándoles otros colores, y alrededor del 39% de los estudiantes tuvieron en cuenta o lo relacionaron con los números negativos y positivos; solo estudiante (E13) lo relacionó con un tema del área de ciencias naturales. Por lo anterior, la atención de los estudiantes respecto al recurso se prioriza en el color de este, pues más de la mitad respondieron teniendo en cuenta el color y no los valores que podrían representar.

Sin embargo, aproximadamente el 39% de los estudiantes los identificaron como la representación de los números negativos y positivos, por lo que para el docente que decide utilizar este recurso con este grupo, sería potenciar lo que están reconociendo y establecer las reglas que permitan la construcción de su conocimiento utilizándolo correctamente el material manipulativo.

Tabla 32. Tipificación S2A2P5.

Pregunta 5			
Lee la siguiente afirmación.			
“Si se tienen la misma cantidad de fichas de color natural y rojas, entonces, tendremos un equilibrio, es decir, el cero en los números enteros, puesto que no hay más fichas de un color ni del otro.”			
5. Junta 5 palitos de color natural con 8 palitos rojos, quita el equilibrio e indica el resultado.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indicaron el resultado correctamente (3 palitos rojos). E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E11, E12, E13.	10	76,9%	
R2. Estudiantes que indicaron resultados incorrectos. E1, E5.	2	15,4%	
R3. Estudiantes que lo relacionaron con el peso de los palitos bicolores. E9.	1	7,7%	

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con los resultados presentados en la tabla 32, 10 de los 13 estudiantes lograron utilizar el material manipulativo para resolver los ejercicios que se les indicó formando el equilibrio, mientras que solo 3 estudiantes no lograron responder correctamente; en particular, un estudiante (E9) respondió teniendo en cuenta el peso del recurso. En este sentido, el concepto de equilibrio para la mayoría de los estudiantes no fue complejo, puesto que se debe tener en cuenta que no es el aspecto físico del recurso lo que se les debe decir a los estudiantes, sino en lo que está representando; en este caso, cantidades opuestas.

Tabla 33. Tipificación S2A2P6.

Pregunta 6		
Palitos bicolores		
Después de haber manipulado los palitos bicolores, se enuncian las siguientes reglas que se utilizarán para lograr resolver sumas con los números enteros, que estarán representadas con los palitos utilizando dos colores distintos. Lee atentamente para que puedas resolver las actividades que se plantean después de estas.		
• Para representar las cantidades positivas se utilizarán los palitos de color rojo y para las cantidades negativas los palitos de color natural. • Siempre se debe retirar el equilibrio de la mesa de trabajo, si existe. • Si tienes palitos del mismo color, debes sumar la cantidad que representan e indicar el resultado, con el signo según el color que quede.		
6.Utilizando los palitos bicolores, resuelve las siguientes sumas:		
a) $(+10) + (+8) =$		
b) $(+12) + (-9) =$		
c) $(-18) + (+8) =$		
d) $(-12) + (-5) =$		
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que resuelven correctamente las operaciones. E2, E3, E4, E10, E11, E12.	6	46,1%

R2. Estudiantes que resuelven las operaciones con el mismo signo. E1, E9.	2	15,4%
R3. Estudiantes que no resolvieron las operaciones. E5, E6, E7, E8, E13.	5	38,5%

Fuente: Elaboración propia

Según los resultados a la pregunta 6, el 46% de los estudiantes logró resolver todas las operaciones utilizando los palitos bicolores, 2 estudiantes resolvieron las sumas con sumandos que tienen el mismo signo, y el 38,5% de ellos no pudieron resolver ninguna de las operaciones ni indicaron una razón. Así, 6 de los 13 estudiantes comprendieron el uso del material manipulativo, sin embargo, frente a los 2 estudiantes (E1, E9) que resolvieron las del mismo signo, es posible que no hayan tenido en cuenta el concepto de equilibrio que se les había presentado anteriormente. Por esto, se tendría que hacer énfasis en que debe retirar el equilibrio y que existe si se proponen sumas con sumandos negativos y positivos.

Tabla 34. Tipificación S2A2P7.

Pregunta 7a		
7. Considerando los resultados obtenidos, responde lo siguiente.		
7.A) Escribe cómo se debe resolver la suma si se tienen 2 números positivos.		
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que resuelven teniendo en cuenta la suma con números naturales. E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11.	10	76,9%
R2. Estudiantes que escribieron que se debe restar el número mayor con el menor o que se debe quitar el equilibrio (cabe aclarar que en estos casos no se utiliza el equilibrio para resolver las operaciones) E3, E12, E13.	3	23,1%
Pregunta 7b		
7.B) Indica cómo se debe proceder para resolver la suma entre 2 números negativos.		

TIPO DE RESPUESTA	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indicaron que se debe proceder relacionándolo con la suma de los números naturales (o se suma el valor absoluto y se mantiene el signo). E1, E2, E5, E9, E10, E11.	6	46,2%
R2. Estudiantes que indican que se debe proceder restando los sumandos. E4, E8, E13.	3	23,1%
R3. Estudiantes que no indicaron cómo proceder para resolver una suma entre 2 números negativos. E3, E6, E7, E12.	4	30,7%
Pregunta 7c		
7.C) Escribe qué conclusión podrías establecer al sumar una cantidad positiva a otra negativa.		
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
Estudiantes que concluyen que se deben restar los valores absolutos para obtener la suma o describen lo que se debe hacer para resolverlo usando los palitos bicolores. E10, E12, E4, E9, E2.	5	38,4%
Estudiantes que concluyen que se obtendrá un número negativo. E13.	1	7,7%
Estudiantes que concluyen que se obtendrá un número positivo. E1, E5	2	15,4%

Fuente: Elaboración propia

En relación con los resultados de los 13 estudiantes, el 76,9% de ellos describió correctamente el procedimiento para resolver las sumas con sumandos positivos, el 46,2% lo hicieron si ambos sumandos eran negativos, y el 38,4% describió un procedimiento correcto en los casos que los sumandos son uno negativo y el otro positivo. De esta manera, es importante resaltar o hacer énfasis en el uso del material manipulativo o la regla general utilizando el valor absoluto para resolver las operaciones que contienen los números negativos, dado que es evidente la disminución de aciertos por parte de los estudiantes en el momento que se le plantean operaciones que los contienen.

Ahora bien, es posible que si se utilizan otras sesiones para el uso del material lo resuelvan, puesto que las clases tradicionales, usualmente, no utilizan este tipo de recursos, por eso los estudiantes no estaban adaptados a utilizarlos, que también puede ser considerado un factor distractor a lo que se quería con esta implementación. Cabe resaltar que, en la documentación presentada en el marco conceptual se muestra que, siempre ha existido un rechazo hacia los números negativos y se puede intuir que en esta actividad se evidenció.

Tabla 35. Tipificación S2A2P8.

Pregunta 8
Regla para sumar teniendo en cuenta el valor absoluto
Suma de números enteros con el mismo signo Para sumar dos o más números enteros del mismo signo, se suman los valores absolutos y al resultado se le pone el mismo signo de los sumandos. Ejemplo 1. $(-40) + (-35) = -(-40 + -35) = -(40 + 35) = -75$ Suma de números enteros de distinto signo Para sumar dos o más números enteros de distinto signo, primero se hallan sus valores absolutos, después se resta del mayor el menor y al resultado se le pone el signo del sumando que tenga mayor valor absoluto. Ejemplo 2. $(-28) + (+17) = -(-28 - 17) = -(28 - 17) = -11$ Ejemplo 3. $(-35) + (+56) = +(56 - -35) = +(56 - 35) = +21$

8) Teniendo en cuenta, la regla que se mencionó anteriormente y las actividades que realizaste previamente, responde las siguientes sumas con números enteros:

- a) $(+15) + (-10) =$
- b) $(-13) + (+7) =$
- c) $(+12) + (-17) =$
- d) $(-25) + (-19) =$

Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que resuelven las operaciones. E2, E3, E7, E8, E12	5	38,5%
R2. Estudiantes que resuelven las operaciones con diferente signo. E1, E4, E5, E6, E9, E10, E11, E13.	8	61,5%

Fuente: Elaboración propia

Teniendo en cuenta los resultados a la pregunta 8 de la actividad 2 en la situación 2, se evidencia que el 5 de los 13 estudiantes resolvieron las 4 sumas que se les planteó, donde el 61,5% resolvieron las operaciones que tenían distintos signos. Los resultados permitieron inferir que, la mayoría tuvieron en cuenta la regla de “suma de número enteros con distinto signo”, dado que hicieron el proceso de resta como se indicó en los ejemplos 2 y 3, sin embargo hubo 5 estudiantes (el 38,5%) que logró resolver correctamente las 4 operaciones. En este sentido, es posible que logre potenciar el conocimiento de los estudiantes si se enfatiza más en que pueden utilizar el método que consideren necesario o menos complejo, de manera que aumenten los aciertos para ellos y adquieren el conocimiento que se quiere transmitir.

Tabla 36. Tipificación S2A2P9.

Pregunta 9a			
9)A) Pitágoras, famoso filósofo y matemático griego, nació en el año 569 a.C. Según la historia, este personaje murió a los 85 años. Teniendo en cuenta la información anterior sobre Pitágoras, indica en qué año murió y la operación que se debe utilizar para determinarlo.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	
R1. Estudiantes que indicaron el año (484 a.C.) y la operación que se utiliza para determinarlo. E2, E3, E7, E8, E9,E10,E12.	7	53,8%	
R2. Estudiantes que indicaron un año distinto. E1, E4, E6, E13.	4	30,8%	
R3. Estudiantes que no resolvieron la pregunta. E5, E11.	2	15,4%	
Pregunta 9b			
9) B) Un avión vuela a 12000 m y un submarino está a 870 m. Indica la distancia que separa a los medios de transporte anteriormente mencionados.			
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.	

R1. Estudiantes que indican la distancia que separa los medios de transporte (12.870 m). E2, E3, E4, E6, E8, E9, E10, E12.	8	61,5%
R2. Estudiantes que indican una distancia distinta. E1, E7, E13.	3	23,1%
R3. Estudiantes que no respondieron la pregunta. E5, E11.	2	15,4%

Fuente: Elaboración propia

Los resultados de la tabla 36 mostraron que, el 53,8% de los estudiantes resolvió correctamente la pregunta sobre el año en que murió Pitágoras y, en el segundo caso, el 61,5% respondió correctamente la distancia que separaba a los medios de transporte. Por ejemplo, hubo dos estudiantes (E5 y E11) que no resolvieron ninguna de las dos preguntas, ni indicaron la razón. Por último, un 30,8% y 23,1% de los estudiantes en las preguntas 9a y 9b respectivamente, hicieron algún procedimiento pero no indicaron las respuestas correctas.

En efecto, la mayor parte de los estudiantes logran interpretar los ejercicios que se plantean en otros contextos, por lo que se pueden sugerir más contextos para lograr potenciar el dominio de las operaciones con los números enteros, pues dependiendo de la realidad del estudiante es posible que la pregunta sea más o menos compleja.

Tabla 37. Tipificación S2A2P10.

Pregunta 10		
10) A modo de conclusión, escribe las estrategias que lograste identificar y aprender durante las actividades propuestas para resolver sumas con números enteros e indica cuál consideras que es la menos compleja.		
Tipo De Respuesta	F.A.	F.R.
R1. Estudiantes que indicaron que el procedimiento menos complejo es utilizar los palitos bicolores. E9, E13.	2	15,4%
R2. Estudiantes que indicaron que el procedimiento menos complejo es utilizando el valor absoluto. E3, E7, E10, E6, E4	5	38,4%

R3. Estudiantes que no respondieron la pregunta. E1, E8, E12, E5, E11.	5	38,4%
R4. Estudiantes que respondieron que los dos métodos le parecieron sencillos o fáciles. E2.	1	7,7%

Fuente: Elaboración propia

Según resultados de los estudiantes en la tabla anterior, se identificó que para 2 de los 13 estudiantes es menos complejo el procedimiento con los palitos bicolores, 5 de los 13 prefieren el método del valor absoluto, un estudiante (E2) consideró que ambos métodos le facilitan resolver las operaciones, y 5 estudiantes no resolvieron la pregunta ni indicaron una razón. En este sentido, en la mayor parte de ellos el método menos complejo fue el uso del valor absoluto, posiblemente porque el material manipulativo no es común en el aula de clases, y adaptarse a su uso es distinto a si se coloca un ejemplo y lo hacen como observan en el ejemplo que es lo más común en las clases.

Finalmente, el juego con los dados que tienen números positivos, negativos y el cero permitieron que los estudiantes resolvieran varias operaciones y utilizaran sus conocimientos previos para crear estrategias o procedimientos que le permitieran resolver sumas con números enteros, por ejemplo, 9 de los 13 estudiantes identificaron que con los números opuestos no se movían hacia arriba ni hacia abajo, por lo que se puede intuir que por eso lo relacionaron con el cero.

Ahora bien, respecto al uso del material manipulativo (palitos bicolores) se debe enfatizar en la importancia de lo que están representando y no tanto lo que son físicamente, dado que en algunos momentos los estudiantes respondían teniendo en cuentas las características propias del recurso y no lo que representaba, también, al indicar el equilibrio se debe ampliar el concepto, puesto que 12 de los 13 estudiantes resolvieron correctamente

pero condicionados por la cantidad de material que tenían, además el uso de un contexto o varios contextos permite identificar que dependiendo de si lo reconocen o no sus respuestas serán acertadas o no, ya que se observó que con un contexto disminuyó la asertividad y con otro aumentó, en este caso, se puede considerar un factor importante en la creación de nuevas actividades.

Al respecto conviene decir que, al finalizar la propuesta de aula se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes lograron comprender algunos conceptos importantes de los números enteros y su estructura aditiva, por ejemplo, el valor absoluto, dado que los estudiantes indicaron correctamente el valor absoluto que se les presentaba, además, utilizando el recurso de GeoGebra lo relacionaron con la distancia, en efecto, fue relevante el hecho de que la distancia de un punto al cero no tiene que cambiar si esta hacia arriba o hacia abajo, sino que se tiene en cuenta la cantidad de unidades que hay entre estos.

Se puede agregar que, al utilizar diferentes recursos pedagógicos y contextos de la vida real, permitió que los estudiantes evidenciaran sus conocimientos y que los potenciarán, dado que se observó que algunos estudiantes lograban identificar la estructura aditiva con los números enteros utilizando el material manipulativo, pero otros consideraron, y también, se mostró que preferían el uso de la regla con el valor absoluto, es decir, que al presentarle a los estudiantes un mismo concepto pero con diferentes situaciones, recursos pedagógicos o contextos se favorece a que sean más los estudiantes que comprendan lo que se quiere enseñar, puesto que si se hubiese utilizado solamente un recurso pedagógico y no se les muestra otro camino para solucionarlo, es probable que se hubiese considerado que los estudiantes que comprendieron solamente utilizando la regla del valor absoluto, no se hubiesen tenido en cuenta como estudiantes que comprendieron la estructura aditiva con los números enteros, asimismo, con los otros recursos pedagógicos y contextos que se utilizaron.

Por último, la propuesta de aula permitió identificar que se deben utilizar diferentes estrategias y recursos pedagógicos para presentarle los conceptos matemáticos a los estudiantes, puesto que estos permiten que los estudiantes utilicen sus propias alternativas y no se limiten a estudiarlos solamente por un solo camino. También, se evidenció que es pertinente hacer énfasis a los estudiantes que los recursos pedagógicos que se utilizan en clase no son el fin de lo que se quiere enseñar, además, el docente que lo presente debe guiarlos en la construcción del concepto matemático, sin embargo, algunos estudiantes con los materiales manipulativos tendían a relacionarlos solamente con sus características físicas, lo que les causaba confusión, la solución para una parte de ellos fue comprenderlo utilizando un método tradicional que fue presentándoles la regla de la suma utilizando el valor absoluto.

Conclusiones generales

A continuación, se presentan algunas conclusiones generales y reflexiones didácticas que se manifiestan desde el diseño hasta los resultados y análisis de los resultados de la propuesta de aula. Teniendo en cuenta, el objetivo general y los objetivos específicos que se mencionaron en el capítulo 1, en este sentido, se presentan las siguientes conclusiones.

El estudio del concepto del número entero se fundamentó a partir de los elementos que establece el Ministerio de Educación Nacional, permitiendo que se identificarán las estrategias o las propuestas que tiene el MEN para los estudiantes del grado sexto de la educación básica secundaria, en este sentido, se utilizaron algunas estrategias que permitieron identificar a los estudiantes qué les favorecía, dado que la invitación del MEN es a utilizar nuevas estrategias, el uso de contextos cotidianos y la implementación de la tecnología (como la calculadora o el uso de GeoGebra).

La perspectiva didáctica permitió establecer las estrategias que se utilizarían con los estudiantes, fundamentando, también el uso de contextos, los recursos pedagógicos que se implementaron con los estudiantes, e identificando algunos errores, obstáculos y problemas que hay en la enseñanza-aprendizaje de los números enteros, así mismo, las estrategias y alternativas que posiblemente se podían evidenciar según Bofferding & Richardson (2013) Ural (2016) Bishop et al., (2011) González & Ponce (2017), teniendo en cuenta que algunas que utilizaban la memorización no permitían totalmente potenciar el pensamiento matemático del estudiante, por lo tanto, no lograban utilizar los conceptos matemáticos en otros contextos.

La perspectiva matemática fundamentó la importancia de los hechos históricos, principalmente, de la construcción del concepto de número y en particular, la aceptación del

número negativo, dado que en muchas ocasiones los matemáticos estuvieron limitados, debido a que no aceptaban los números negativos, pero, por ejemplo, al resolver algunas ecuaciones era necesario el uso de estos, ahora bien, esto permitió que en esta investigación se reconociera que los docentes de Matemáticas pretenden o quieren que los estudiantes comprendan el concepto del número entero, en algunas sesiones de clase o algunos meses, cuando se evidencia que para humanidad fue un proceso de años, incluso, siglos.

Por otro lado, la propuesta de aula permitió evidenciar las alternativas o estrategias, además de los obstáculos, errores y dificultades entorno al número entero, que se habían descrito en el capítulo 2 de este trabajo, también, el uso de diferentes recursos pedagógicos como lo fueron el juego “escalando hacia la meta”, el uso de GeoGebra, los palitos bicolores y el uso de distintos contextos en los que se propusieron para potenciar el conocimiento de los estudiantes respecto a los números enteros, se considera que generó un amplio panorama respecto a las propuestas que se deben llevar al aula de clase, dado que en algunos casos se logró deducir que los estudiantes habían comprendido el concepto que se quería transmitir, sin embargo, cuando se les preguntaba por el mismo concepto de manera distinta las respuestas acertadas variaban.

Lo anterior, permite inferir que, si se utilizan diferentes métodos de enseñanza, se lograría percibir cómo el estudiante aprende, ya sea utilizando material manipulativo, tecnológico o preguntas que estén en un contexto de la vida cotidiana, en efecto, fortalecer sus estrategias o procedimientos para que los logre utilizar en la vida cotidiana u otros contextos.

La articulación que se realizó en un contexto y el uso de recursos pedagógicos, permitió que los estudiantes tuvieran un acercamiento al concepto del número entero y su estructura aditiva, cabe resaltar que, algunos estudiantes deben potenciar los conocimientos

que adquirieron en la implementación de esta propuesta, para que logren utilizarlos en otros contextos como lo propone el Ministerios de Educación en los lineamientos curriculares. Particularmente, en la situación 1 se reconoció que los estudiantes con el direccionamiento que hacía la propuesta de aula, permitió que los estudiantes reconocieran el número relativo teniendo en cuenta el contexto de la minería subterránea, implementaron el uso de la recta numérica con GeoGebra e identificaron la posición de los números enteros en esta, también la mayor parte de los estudiantes lograron ordenar correctamente los números enteros, reconocer el valor absoluto desde una perspectiva geométrica con el uso de GeoGebra y por último, lograron una noción de la estructura aditiva con los números opuestos.

Por otro lado, en la situación 2 los recursos pedagógicos fueron relevantes para la construcción y la práctica de la estructura aditiva con los números enteros, en particular, en la aplicación con los números naturales, puesto que se analizó que la mayor parte de los estudiantes tienden a utilizar sus conocimientos previos para lograr las nuevas nociones, definiciones o estrategias que son necesarios para comprender los números enteros y su estructura aditiva.

El uso del material manipulativo en la situación 2, permitió que los estudiantes explorarán sus ideas respecto a cómo creían que debían responder las preguntas, pero se debe enfatizar en lo que representan, dado que los resultados permitieron observar que el mismo recurso causa obstáculos, puesto que se tiene en cuenta el peso, el color o la forma del material manipulativo, en otras palabras, se pierde de vista el concepto matemático que se quiere presentar.

El uso de la calculadora y GeoGebra le permitió a la mayoría de estudiantes reconocer la ubicación de un valor numérico en la recta, identificar los números opuestos (que si los suman el resultado siempre será 0), el punto de referencia respecto al número relativo y el

valor absoluto (desde un punto de vista geométrico relacionado con la distancia), sin embargo, se debe tener en cuenta que la adquisición del conocimiento se pueda reflejar sin causar una dependencia de los recursos, lo anterior se evidenció en la actividad 2 de la situación 1 al momento de solicitarle a los estudiantes que dibujaran la recta numérica y ubicaran dos valores, en este caso, la mayor parte no respondieron correctamente, por esto es importante enfatizar en esa transición de lo conocido para el estudiante a lo abstracto para lograr potenciar su conocimiento.

El juego “escalando hacia la meta” permitió que los estudiantes practicasen y crearan sus propias estrategias para resolver sumas con números enteros en un rango determinado. La mayor parte de los estudiantes resolvieron al menos 3 sumas utilizando números negativos correctamente, antes de que se les presentara un método tradicional o una regla, en este sentido, la exploración permite que los estudiantes utilicen alternativas que potencian sus conocimientos, además que esta actividad enfatizaba en jugar mientras aprendían y se cumplió. En otras palabras, el uso del juego en la actividad 1 de la situación 2 favoreció en algunos procedimientos iniciales de los estudiantes respecto a la estructura aditiva con los números enteros, dado que generaron sus propias estrategias intuitivamente con el uso de las fichas y la socialización con sus compañeros que verificaban o validaban sus cálculos o procedimientos.

Sin embargo, se deben implementar estrategias que permitan ampliar el intervalo con los que los estudiantes puedan explorar sus conocimientos previos para adquirir los nuevos conceptos que el docente quiere transmitir.

Respecto a los aportes a las reflexiones sobre la construcción del concepto del número entero y su estructura aditiva es posible mencionar que, no se utilizaron muchos materiales manipulativos y tecnológicos, sin embargo, el que se usó permitió que los estudiantes se

animaran y cuestionaran más sus procesos de aprendizaje, pero la adquisición de los conocimientos matemáticos es lo primordial, en efecto se deben fortalecer las estrategias que permitan pasar de lo concreto a lo abstracto.

Así, teniendo en cuenta, los aspectos mencionados anteriormente, se puede afirmar que: la propuesta de aula permitió favorecer a la construcción de los siguientes aspectos conceptuales y procedimentales de los números enteros: identificar los números enteros en distintos contextos y en diferentes representaciones; la adquisición del concepto de valor absoluto de los números enteros, utilizando la herramienta “distancia o longitud” en GeoGebra, permitió que los estudiantes reconocieran la definición que se presentó geométricamente; la introducción a la resolución de sumas con números enteros, utilizando sus propias estrategias o con el uso de la regla del valor absoluto; reconocer el cero y el cero relativo teniendo en cuenta la distancia a la que se encuentran cualquier par de números; con el uso del material manipulativo, se logró evidenciar que los estudiantes resolvieran sumas con números enteros en un intervalo que depende de la cantidad o disposición que haya del material.

Referencias

- Alsina, C. C., Burgués F.C., Fortuny J. M. (1999) *Materiales para construir la Geometría*. En: *Matemáticas Cultura y Aprendizaje*. Vol. 6. Madrid, España: Ed. Síntesis.
- Bofferding, L., y Richardson, S. (2013). Investigating Integer Addition and Subtraction: A Task Analysis. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. <https://eric.ed.gov/?id=ED584472>
- Ruiz, C. J. G., & Alemán, E. C. (2019). Análisis de materiales didácticos digitales ofertados desde un portal de contenidos abiertos: el caso de Canarias. *Educación en Revista*, 35(77), 19-36. http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S0104-40602019000500019&script=sci_arttext
- Bohórquez, S. (2019). *Reflexionando sobre mi experiencia docente con los números enteros a través de narrativas*. <http://hdl.handle.net/20.500.12209/10885>.
- Bruno, A. y Martinón, A. (1997). *Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos*. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 249-258. <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21495/93535>
- Bruno, A. (2000). Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. En: Climent, Nuria de los Ángeles; Contreras, Luis Carlos; Carrillo, José (Eds.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 119-130). Huelva, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

- Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4(1), 415-427.
http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME_2001_04_2_05.pdf
- Caicedo, B., Colorado, Y. y Hinestroza, M. (2019). *Propuesta para favorecer la comprensión del concepto de número entero a través de situaciones problemas del contexto propio de los estudiantes de grado 7º de la Institución Educativa José María Cabal del Distrito de Buenaventura*. [Trabajo de Pregrado, Universidad del Valle]. Biblioteca Digital Univalle. <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/13043>
- Camargo, L. (2018). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática: Recursos para la captura de información y análisis*. Colombia: Universidad de Antioquia.
- Carabalí, H. y Campo J. (2018). *Un estudio filosófico sobre la naturaleza de los números enteros en libros de textos escolares de matemáticas de grado séptimo*. [Trabajo de Pregrado, Universidad del Valle]. Biblioteca Digital Univalle.
<https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/20692>
- Carazo, A. F. y Brey, R. (2012). Errores en el aprendizaje de las matemáticas financieras. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), 73-92.
<http://funes.uniandes.edu.co/21959/>
- Castaño, J. (2019). *Notas de clase del curso de álgebra moderna*. Universidad del Valle.
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Boletín del SI-IDM*, 10.

- Echeverri, D. A. C. (2021). Categorización de dificultades asociadas al aprendizaje de los números enteros. *Revista Oratores*, (14), 91-110.
<https://revistas.umecit.edu.pa/index.php/oratores/article/view/537>
- Flores, P., Lupiáñez, J. L., Berenguer, L., Marín, A. y Molina, M. (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Garzón, D., Pabón, O., & Vega, M. (2013). *Recursos pedagógicos y gestión didáctica del profesor de matemáticas*.
- González, J. L., Iriarte, M., Jimeno, M., Ortiz, A., Sanz, E. y Vargas-Machuca, I. (1999). Números Enteros. En: *Matemáticas Cultura y Aprendizaje*. Vol. 6 Madrid, España: Ed. Síntesis.
- González, W. y Ponce, W. (2017). Las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la Matemática en el segundo año de Educación Media. *Educere*, 21(70), 653-667.
<https://www.redalyc.org/journal/356/35656000013/35656000013.pdf>
- Goñi, J. M. (Coord.) (2011). *Didáctica de las matemáticas*. Barcelona, España: GRAÓ, de IRIF, S.L.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.
- MEN (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Bogotá D.C., Colombia: Ed. MEN
- MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En: *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. (pp. 46 - 94). Bogotá D.C., Colombia: Ed. MEN
- MEN (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. <http://is.gd/SMxhPP>

MEN (2018). Estándares Básicos de Competencia.

<https://www.mineducacion.gov.co/portal/micrositios-preescolar-basica-y-media/Direccion-de-Calidad/Referentes-de-Calidad/244735:Estandares-Basicos-de-Competencia>

Navia, N. y Orozco, V. (2012). *Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica*. [Trabajo de Pregrado, Universidad de los Andes]. Funes.

<http://funes.uniandes.edu.co/11259/1/Navia2012Una.pdf>

Polanco, C. (2020). *Mediación del aprendizaje de números enteros a través del uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) con estudiantes de 7° grado de básica secundaria de la Institución Educativa José Manuel Salcedo sede Cárdenas del Bolo San Isidro de Palmira valle*. [Tesis de Pregrado, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL.

<https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78663>

Requena, L. (2018). *Adaptación de las regletas de Cuisenaire para la didáctica de la aritmética de los números enteros*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional José Faustino Sanchez Carrión]. Repositorio Institucional UNJFSC.

<http://repositorio.unjfsc.edu.pe/handle/20.500.14067/2866>

Rubio, G. (2013). *Proceso de estudio de la factorización de polinomios mediante el uso de Algebloks desde la Tad*. [Trabajo de Pregrado, Universidad de los Andes]. Funes.

<http://funes.uniandes.edu.co/10855/>

Shanty, N. (2016). Investigating students' development of learning integer concept and integer addition. *Journal on Mathematics Education*, 7(2), 57-72.

<https://ejournal.unsri.ac.id/index.php/jme/article/view/3538>

-
- Suárez-Restrepo, L. F. & Castro-Gordillo, W. F. (2016). *Génesis instrumental en el proceso de aprendizaje: el software wxMaxima y la función polinómica*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 50, 106-125. Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/815/1333>
- Torres, N. (2016). *Aplicación de material concreto para mejorar la resolución de problemas de adición y sustracción con Números enteros de los estudiantes del primer grado de Secundaria de la i.e. "José Olaya balandra" Huaracilla*. [Trabajo de Pregrado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional UPN. <https://repositorio.ucv.edu.pe/handle/20.500.12692/27928>
- Ural, A. (2016). 7th grade students understandings of negative integer. *Journal of Studies in Education*, 6(2), 170-179. https://www.researchgate.net/profile/Alattin-Ural-2/publication/303291966_7th_Grade_Students'_Understandings_of_Negative_Integer/links/5d3787294585153e591c4817/7th-Grade-Students-Understandings-of-Negative-Integer.pdf?sg%5B0%5D=started_experiment_milestone&origin=journalDetail
- Whitacre, I., Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Schappelle, B., y Lewis, M. (2012). Happy and sad thoughts: An exploration of children's integer reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 356–365. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.03.001>