



Existencia, unicidad y aproximación numérica para un modelo de ondas dispersivas en un canal con bifurcación

David Salvador Alpala Canacuan

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2019

Existencia, unicidad y aproximación numérica para un modelo de ondas dispersivas en un canal con bifurcación

David Salvador Alpala Canacuan

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar por el título de:
Matemático

Director
Juan Carlos Muñoz, PhD

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2019

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mis padres, Gonzalo Alpala y Maria Canacuan por haber sido el apoyo durante toda mi carrera universitaria y a lo largo de mi vida.

A mis hermanos Graciela y Fredy por su apoyo incondicional.

Resumen

En este trabajo se establece la existencia y unicidad del problema de valor inicial-frontera asociado a la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad (\text{BBM})$$

en la semirrecta real, y de un sistema de ecuaciones BBM en la semirrecta, el cual es un modelo asociado a la propagación de ondas en una Y -unión con aristas semi-infinitas. Además, el desarrollo de este trabajo permitirá al autor iniciar su estudio en el tema de las ecuaciones diferenciales de evolución de tipo dispersivo tanto del punto de vista analítico como numérico. Se realizará un estudio detallado, siguiendo los resultados desarrollados en [2], e incluyendo los detalles en las demostraciones de los resultados que no se encuentran directamente en los artículos de referencia, junto con la teoría necesaria en el estudio de los problemas de valor inicial-frontera considerados. Además, se realiza una exploración numérica de los modelos considerados mediante el uso de las rutinas del software Mathematica de Wolfram para aproximar soluciones de problemas de valor inicial-frontera asociados a ecuaciones diferenciales parciales.

PALABRAS CLAVES Existencia y unicidad, Ecuación BBM, Modelo de ondas dispersivas, Canal con bifurcación, Aplicación del teorema punto fijo de Banach

Contenido

1	Introducción	1
2	PRELIMINARES	5
2.1	Operadores lineales	5
2.2	Espacios de Banach	7
2.3	Espacios L^p	7
2.4	Teorema punto fijo de Banach	8
2.5	Desigualdades útiles	8
2.6	Espacios de Sobolev en dimensión uno	10
2.7	Espacios de funciones	11
3	Ecuación BBM en la semirrecta	13
3.1	Ecuación integral asociada	13
3.2	Existencia local en la semirrecta	17
3.3	Unicidad	19
4	Modelo para propagación de ondas en un canal con bifurcación	21
4.1	Existencia local	24
4.2	Unicidad	33
5	Experimentos numéricos	39
5.1	Simulación de la ecuación BBM en una semirrecta	39
5.2	Simulación con el modelo para la propagación de ondas en una bifurcación	41
6	Conclusiones	45
	Bibliografía	47

Capítulo 1

Introducción

Los objetivos principales de este trabajo son establecer la existencia y unicidad del problema de valor inicial-frontera asociado a la ecuación de Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \quad (\text{BBM})$$

en la semirrecta real, y de un sistema de ecuaciones BBM en la semirrecta, el cual es un modelo asociado a la propagación de ondas en una Y -unión con aristas semi-infinitas, como se muestra en la figura (1.1). Además, el desarrollo de este trabajo permitirá al autor iniciar su estudio en el tema de las ecuaciones diferenciales de evolución de tipo dispersivo tanto del punto de vista analítico como numérico.

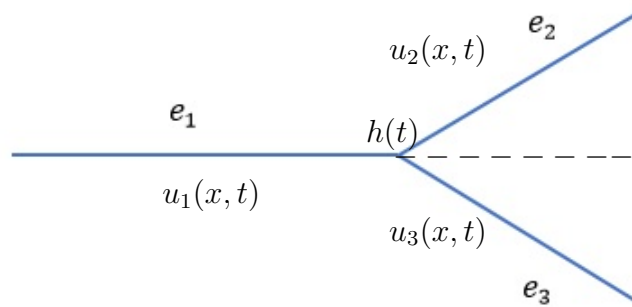


Figura 1.1. Canal con una bifurcación en forma de Y .

La ecuación (BBM) está relacionada con la conocida ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (\text{KdV})$$

que es un sistema totalmente integrable, con mucho desarrollo e interés en la literatura, por sus variadas aplicaciones, y que admite las llamadas soluciones onda solitaria que se trasladan sin deformarse en un medio no lineal. En la modelación de la propagación de ondas sobre distancias finitas, la ecuación BBM ha mostrado ser un modelo matemático más adecuado, debido al número de condiciones de frontera menor (con respecto a la KdV) que se requiere para el problema de valor inicial-frontera esté bien propuesto sobre un intervalos finito [6] , [7]. Además, se ha mostrado en [8] que las soluciones de los dos modelos permanecen cerca entre sí (con respecto a una norma apropiada), durante intervalos de tiempo relativamente largos.

En [2], Bona y Cascaval proponen un modelo que consta de 3 ecuaciones de tipo BBM acopladas para describir la propagación de ondas en un canal con bifurcación, y se demuestra que el problema está bien propuesto. Para esto, se aplica el principio clásico de punto fijo de Banach a la formulación integral correspondiente.

En este trabajo se realizará un estudio monográfico detallado, siguiendo los resultados desarrollados en [2], e incluyendo los detalles en las demostraciones de los resultados que no se encuentran directamente en los artículos de referencia, junto con la teoría necesaria en el estudio de los problemas de valor inicial-frontera considerados. Además, se realiza una exploración numérica de los modelos considerados mediante el uso de las rutinas del software Mathematica de Wolfram para aproximar soluciones de problemas de valor inicial-frontera asociados a ecuaciones diferenciales parciales.

En este documento en primer lugar se considera el problema de valor inicial-frontera

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, & x \geq 0, t \geq 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \geq 0, \\ u(0, t) = h(t), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

para $t \geq 0$ y $x \geq 0$, donde se conoce los valores de g y h , que satisfacen la condición de consistencia $u(0, 0) = g(0) = h(0)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Un sistema físico para el cual (1.1) puede servir como un modelo es el caso de la propagación de ondas en un canal semi-abierto representado por la semirrecta $[0, \infty)$ que contiene agua y con un generador de ondas ubicado en el extremo $x = 0$ [3].

En segundo lugar, se considera el problema de valor inicial- frontera [2] para el siguiente sistema de ecuaciones BBM en un intervalo semi-infinito:

$$\begin{cases} u_{i,t} - u_{i,xxt} + \sigma_i u_{i,x} + \sigma_i u_i u_{i,x} = 0 & x \in \mathbb{R}^+, t \geq 0 \\ u_1 = u_2 = u_3, u_{1,x} + u_{2,x} + u_{3,x} = 0 & x = 0, t \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u_i(x, t) = 0 & t \geq 0 \\ u_i(x, 0) = g_i(x), & x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (1.2)$$

para $i = 1, 2, 3$, $t \geq 0$ y $x \geq 0$, donde $\sigma_1 = -1, \sigma_2 = \sigma_3 = +1$. Además supondremos que las condiciones iniciales satisfacen las condiciones de compatibilidad

$$g_1(0) = g_2(0) = g_3(0), \quad (1.3)$$

$$g_{1,x}(0) + g_{2,x}(0) + g_{3,x}(0) = 0. \quad (1.4)$$

Se ha dividido el trabajo en cinco capítulos. En el primer capítulo se dan algunas definiciones y propiedades de los operadores lineales en espacios normados, y además, se introduce la definición de espacios de Banach y espacios L^p . En el desarrollo de este capítulo se hace una demostración detallada del teorema punto fijo de Banach, el cual es esencial para el estudio de los problemas de valor de frontera que serán analizados en el presente trabajo. En el segundo capítulo se considera el problema de valor inicial-frontera asociado a la ecuación BBM en una semirrecta (1.1), donde se procede a demostrar la existencia de una solución durante un intervalo de tiempo suficientemente pequeño. Esto se hace mediante la reformulación de (3.1) en forma de una ecuación integral, y aplicando el teorema punto fijo de Banach y la desigualdad de Gronwall.

En el tercer capítulo se considera el problema de valor inicial- frontera asociado al modelo para propagación de ondas en un canal en forma de una Y- unión (1.2). Se demuestra la existencia y unicidad del sistema de tres ecuaciones acopladas tipo BBM, aplicando de nuevo el teorema punto fijo de Banach y la desigualdad de Gronwall.

En el cuarto capítulo se ilustran algunas soluciones numéricas del problema de valor inicial asociado al ecuación BBM en la semirrecta, y al modelo para el canal con bifurcación mediante el uso del software Mathematica de Wolfram.

Finalmente en el quinto capítulo se dan algunas conclusiones de los aspectos más relevantes del trabajo y señalando futuros estudios.

Capítulo 2

PRELIMINARES

En este capítulo se presentan las principales definiciones y resultados que se emplearán a lo largo de este trabajo.

Definición 2.1. Una aplicación $||\cdot|| : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una norma sobre X si ella satisface las siguientes propiedades

- (i) $||x|| \geq 0 \quad \forall x \in X$ y $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- (ii) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X$.
- (iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in X$.

El espacio X provisto de la norma $||\cdot||$ recibe el nombre de espacio vectorial normado y se denota por $(X, ||\cdot||)$.

Ejemplo 2.1. Para cada número real p con $1 \leq p \leq \infty$ la cantidad $||\cdot||_p$ definida por

$$||\mathbf{x}||_p = [|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p]^{1/p},$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.2. Sea X un espacio vectorial y sea $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ dos normas en X . La norma $||\cdot||_2$ es equivalente a la norma $||\cdot||_1$, si existen constantes $M, m > 0$ tal que para todo $x \in X$

$$m||x||_1 \leq ||x||_2 \leq M||x||_1.$$

2.1. Operadores lineales

Sean $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ espacios vectoriales normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, con vectores nulos θ_X y θ_Y , respectivamente. Una aplicación $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ que asigna a cada $x \in D(A)$ un único vector $y \in Y$ se le llama un operador de X en Y . El conjunto $D(A)$ sobre el cual actúa se le llama el dominio del operador. Remitimos al lector para más detalles en [12].

Definición 2.3. Se dice que un operador $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ es lineal si

- (i) $D(A)$ es un subespacio de X .
- (ii) $A(\alpha x + \beta z) = \alpha A(x) + \beta A(z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, z \in D(A)$.

El conjunto de todos los operadores lineales y acotados de X en Y se designa por $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definición 2.4. Se dice que un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ es acotado si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in D(A).$$

Teorema 2.1. Continuidad y acotamiento Sea $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal, donde $D(X) \subseteq X$ y X, Y son espacios normados. Entonces

- (i) A es continuo si y solo si T es acotada.
- (ii) Si A es continuo en un solo punto, entonces A es continuo en todo punto.

Demostración. (i) Si $A = 0$ la afirmación es trivial. Ahora supongamos $A \neq 0$, entonces $\|A\| \neq 0$. Primero supongamos que A es acotado y consideremos $x_0 \in D(A)$ arbitrario. Sea $\epsilon > 0$ dado. Entonces, como A es lineal, para $x \in D(A)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{donde} \quad \delta = \frac{\epsilon}{\|A\|},$$

obtenemos

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\| \|x - x_0\| < \|A\| \delta = \epsilon.$$

Como x_0 es arbitrario, lo anterior muestra que A es continuo. Ahora, supongamos que A es continuo, entonces para $x_0 \in D(A)$ arbitrario, así, para $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Ax - Ax_0\| \leq \epsilon, \quad \forall x \in D(A) \quad \text{tal que} \quad \|x - x_0\| \leq \delta.$$

Sea $y \neq 0$ en $D(A)$ y definimos $x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|}y$. Entonces, si $\|x - x_0\| = \delta$, por la continuidad y la linealidad de A tenemos que

$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\| = \left\| A \left(\frac{\delta}{\|y\|} y \right) \right\| = \frac{\delta}{\|y\|} \|Ay\| \leq \epsilon.$$

Lo anterior puede ser escrito de la forma $\|Ay\| \leq C\|y\|$, donde $C = \epsilon/\delta$ lo que prueba que A es acotado.

(ii) Vemos que la continuidad de A en un punto implica que A es acotado por la segunda parte de la prueba del anterior literal, lo cual implica la continuidad de A en todo punto por (i). $\square$

2.2. Espacios de Banach

En el desarrollo teórico de este trabajo se utilizan los espacios de Banach.

Definición 2.5. (Espacios de Banach). Un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si es completo con respecto a la topología inducida por la norma.

Ejemplo 2.2. Sea X un conjunto, entonces

$$B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\}$$

con la norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.3. El espacio $C^1([0, T])$ de funciones continuas y diferenciables en $[0, T]$ con la norma

$$\|f\|_{C^1([0, T])} = \max\{\|f\|_{\infty}, \|f'\|_{\infty}\}$$

es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.4. Sean X y Y espacios de Banach, entonces el producto $X \times Y$ es un espacio de Banach, con las normas

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \|x\| + \|y\|, \\ \|(x, y)\|_p &= (\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{1/p}, \\ \|(x, y)\|_{\infty} &= \max\{\|x\|, \|y\|\}, \end{aligned}$$

las cuales son equivalentes.

2.3. Espacios L^p

Definición 2.6. El espacio $L^p = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ es el conjunto de todas las funciones medibles de valor real, cuyas potencias p son integrables sobre $\mathbb{R}$, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty.$$

La norma usual en este espacio es denotada por $\|f\|_{L^p}$ y está definida por

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Similarmente, se define $L^2(a, b)$ el cual es el espacio que describe las funciones medibles cuadrado integrables $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con norma

$$\|f\|_{L^2(a, b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

L^p es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{L^p}$.

2.4. Teorema punto fijo de Banach

Definición 2.7 (Contracción). Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach. Decimos que una aplicación $T : X \rightarrow X$ es una *contracción* si existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\|_X \leq \theta \|x - y\|_X, \quad \text{para todos } x, y \in X.$$

Teorema 2.2. (Punto fijo de Banach) *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ espacio de Banach. Si $T : X \rightarrow X$ es una contracción, entonces existe un único punto fijo en X , es decir, un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.*

Demostración. Escojamos un $x_0 \in X$ arbitrario. Definamos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $T(x_n) = x_{n+1}$ para $n \geq 0$. Si C es la constante de contracción, notemos que

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X = \|T(x_n) - T(x_{n-1})\|_X \leq C \|x_n - x_{n-1}\|_X.$$

Iterando la desigualdad, deducimos que

$$\|x_{n+1} - x_n\|_X \leq C^n \|x_1 - x_0\|_X.$$

Puesto que $C < 1$, de la última desigualdad, se tiene que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Por la completez de X , la sucesión es convergente, digamos a un $x \in X$, es decir, $x_n \rightarrow x \in X$ si $n \rightarrow \infty$. Mostremos que $T(x) = x$.

$$\begin{aligned} \|T(x) - x\|_X &\leq \|T(x) - T(x_n)\|_X + \|T(x_n) - x\|_X \\ &\leq C(\|x - x_n\|_X + \|x_n - x\|_X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De aquí que $T(x) = x$. Finalmente para mostrar la unicidad, supongamos que $T(x) = x$ y $T(y) = y$ para $x, y \in X$. Entonces

$$\|x - y\|_X = \|T(x) - T(y)\|_X \leq C \|x - y\|_X,$$

lo cual implica que

$$(1 - C)\|x - y\|_X \leq 0,$$

de lo cual se concluye que $x = y$ pues $C < 1$. □

2.5. Desigualdades útiles

Teorema 2.3. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*) *El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ satisface*

$$|x \cdot y| \leq |x| |y|, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Teorema 2.4. (*Desigualdad de Holder forma integral*) *Sean $f \in L^p$ y $g \in L^q$ donde $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces tenemos*

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

En particular si $p = q = 2$, entonces la desigualdad es llamada, desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema 2.5. (*Desigualdad Integral de Minkowski*) Sean $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. Si $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se sigue que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f + g|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p dx \right)^{1/p} \right) \\ &= \|f + g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p-1} (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6. (*Desigualdad de Gronwall en forma integral*) Sea $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua y positiva, y supongamos que existen constantes C_1, C_2 no negativas que satisfacen la desigualdad integral

$$g(t) \leq C_2 + C_1 \int_0^t g(s) ds \quad t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

Entonces,

$$g(t) \leq C_2 e^{C_1 t} \quad \text{para } t \in [0, T].$$

Demostración. Se define en primer lugar la función

$$G(t) = C_2 + C_1 \int_0^t g(s) ds.$$

Entonces la función $G(t)$ es una función diferenciable y esta satisface

$$(i) \quad g(t) \leq G(t)$$

$$(ii) \quad G'(t) = C_1 g(t).$$

Aplicando la regla de Leibniz para la diferencia del producto $e^{-C_1 t} G(t)$, y por (i), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{-C_1 t} G(t)] &= e^{-C_1 t} C_1 g(t) - C_1 e^{-C_1 t} G(t) \\ &= C_1 e^{-C_1 t} [g(t) - G(t)] \leq 0. \end{aligned}$$

Entonces, $e^{-C_1 t} G(t)$ es decreciente, así $e^{-C_1 t} G(t) \leq G(0) = C_2$. Ahora por (i), se deduce que

$$g(t) \leq G(t) \leq C_2 e^{C_1 t}.$$

□

2.6. Espacios de Sobolev en dimensión uno

En esta sección daremos una breve introducción a los espacios de Sobolev en dimensión uno con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no necesariamente acotado. Estos espacios miden el tipo de diferenciabilidad de las funciones en $L^2(I)$. Remetimos a [11] para más detalles.

Denotaremos por $C_0^1(\bar{I})$ al espacio de funciones continuas con soporte compacto en $\bar{I}$.

Definición 2.8. Dado $v \in L^p(I)$, decimos que z es la derivada débil (o derivada distribucional) de v si se satisface que

$$\int_I u \varphi' dx = - \int_I z \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\bar{I}),$$

y en tal caso se escribe que $v' := z$.

Definición 2.9. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $p \in \mathbb{R}$ con $1 < p < +\infty$. Se define el espacio de Sobolev $W^{1,p}(I)$ por

$$W^{1,p}(I) := \{u \in L^p(I) : u' \text{ existe en el sentido débil y esta en } L^p(I)\}.$$

En particular, denotaremos

$$H^1(I) := W^{1,2}(I).$$

Definición 2.10. En el espacio $W^{1,p}(I)$ se define la norma

$$\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)} : W^{1,p}(I) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

y está dada por

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \left(\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p \right)^{1/p} = \left(\int_a^b |u(t)|^p dt + \int_a^b |u'(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

El espacio $H^1(I)$ está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + (u', v')_{H^1(I)} = \int_a^b u(t)v(t)dt + \int_a^b u'(t)v'(t)dt,$$

y por tanto, de la norma correspondiente

$$\|u\|_{H^1(I)} = \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |u(t)|^2 dt + \int_a^b |u'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Teorema 2.7. Si $H^1(\mathbb{R})$ está continuamente sumergido en $C_b(\mathbb{R})$, el espacio de funciones continuas y acotadas. En otras palabras, si $f \in H^1(\mathbb{R})$, entonces $f \in C_b(\mathbb{R})$ y

$$\|f\|_\infty \leq C \|f\|_{H^1}.$$

Demostración. Para detalles de la demostración ver ([5], p. 47, teorema 3.2) □

Definición 2.11. Una función $f \in C_b(\mathbb{R}^+)$ es asintóticamente nula si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Proposición 2.8. $H^1(\mathbb{R}^+)$ está continuamente sumergido en $C_b(\mathbb{R}^+)$ (espacio de funciones continuas y acotadas definidas en $\mathbb{R}^+$). Además, cuando $H^1(\mathbb{R}^+)$ se identifica como un subespacio de $C_b(\mathbb{R}^+)$, entonces $f \in H^1(\mathbb{R}^+)$ implica que f es asintóticamente nula y que

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}. \quad (2.3)$$

Demostración. Sea g la extensión de f a $\mathbb{R}$ obtenido reflejando a f sobre el origen. Entonces se tiene que $g \in H^1(\mathbb{R})$. Así que el resultado de inclusión se tiene del teorema (2.7) lo que implica que g es continua, acotada y asintóticamente nula y se sigue que para $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f^2(x) = -2 \int_x^\infty f(y)f'(y)dy \leq \int_0^\infty [(f(y))^2 + (f'(y))^2]dy = \|f\|_{H^1}^2,$$

por lo tanto $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{H^1}$. □

2.7. Espacios de funciones

Definición 2.12. Definimos $C^k([a, b])$ como el espacio de Banach de las funciones definidas en el intervalo $[a, b]$ y con valores reales, cuyas derivadas hasta orden k son continuas. En este espacio podemos definir la norma

$$\|f\|_{C^k([a, b])} = \sup_{\substack{x \in [a, b] \\ 0 \leq j \leq k}} |f^{(j)}(x)|. \quad (2.4)$$

Denotamos $\|f\|_{C^0([a, b])}$ por $\|f\|_{C([a, b])}$.

Definición 2.13. Sea $\mathbb{R}^+$ los números reales no negativos. Se define $C_b^k(\mathbb{R}^+)$ como el conjunto de las funciones en $\mathbb{R}^+$ cuyas primeras k derivadas son acotadas y continuas. Este es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^+)} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 \leq j \leq k}} |f^{(j)}(x)|. \quad (2.5)$$

También se consideran espacios de funciones de dos variables análogas a los espacios unidimensionales que se acaban de definir anteriormente.

Definición 2.14. Se define el espacio $C([0, T]; X)$, para cualquier espacio de Banach X (por ejemplo $X = C^k$ (o) H^k), es el espacio de Banach de funciones continuas $u : [0, T] \rightarrow X$ con la norma

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_X.$$

Definición 2.15. Para $T > 0$, se define el espacio de Banach de funciones continuas acotadas $u : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ con la norma,

$$\|u\|_{X_T} = \sup_{T \geq t \geq 0} \sup_{x \geq 0} |u(x, t)|,$$

se denota por $X_T = C_b(\mathbb{R}^+ \times [0, T], \mathbb{R})$.

Capítulo 3

Ecuación BBM en la semirrecta

En este capítulo veremos que el problema de valor inicial- frontera de la ecuación Benjamin-Bona-Mahony (BBM) en la semirrecta está bien formulado localmente. Para ello primero se reescribe el modelo para tener una ecuación diferencial ordinaria para u_t la cual se reescribe utilizando la función de Green correspondiente para llegar a una ecuación integral asociada, la cual se estudia a través del teorema del punto fijo de Banach. Posteriormente se emplea el lema de Gronwall para demostrar que la solución es única.

3.1. Ecuación integral asociada

El problema de valor inicial- frontera de la ecuación Benjamin-Bona-Mahony (BBM) en la semirrecta,

$$(BBM)_L = \begin{cases} u_t - \alpha^2 u_{xxt} + \beta u_x + \gamma u u_x = 0, & x \in \mathbb{R}^+, t \geq 0 \\ u(0, t) = h(t), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = g(x), & x \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (3.1)$$

Para $t \geq 0$ y $x \geq 0$ donde se especifican las condiciones del problema de valor inicial, el valor de h y g , donde se cumple que $u(0, 0) = g(0) = h(0)$. Observe en la Figura 3.1 el esquema del problema. Por simplicidad, en esta sección supondremos que las constantes en la ecuación BBM son iguales a 1.

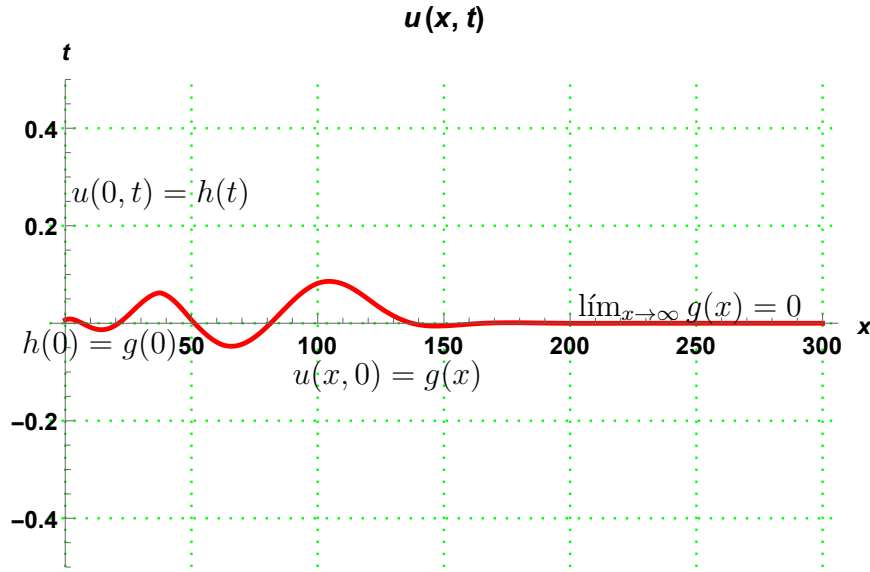


Figura 3.1. BBM en una semirrecta

El problema de valor inicial-frontera $(BBM)_L$ reescalado se puede reescribir como

$$u_t - u_{xxt} = -(u_x + uu_x), \quad (3.2)$$

donde se tiene una ecuación diferencial ordinaria para u_t para llegar a la forma integral de esta ecuación se procede mediante el método de variación de parámetros a la ecuación

$$(\partial_x^2 - I)u_t = f, \quad (3.3)$$

donde $f(x) = (u_x + uu_x)$. Así que esta ecuación se puede ver como la ecuación diferencial ordinaria no homogénea

$$(\partial_x^2 - I)z = f, \quad (3.4)$$

donde $z = u_t$.

En primer lugar, analizamos la ecuación homogénea asociada $(\partial_x^2 - I)z = 0$. Tenemos que la ecuación característica correspondiente es

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$

En consecuencia, tenemos que la solución de la ecuación homogénea es:

$$z_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Sean $z_1 = e^x$ y $z_2 = e^{-x}$. Para encontrar una expresión para la solución de la ecuación no homogénea (3.4), buscamos una solución particular z_p de la forma

$$z_p = U_1 z_1 + U_2 z_2.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para las incógnitas U_1 y U_2 y empleando la regla de Cramer, donde $W(x)$ denota el Wronskiano $W(z_1, z_2)(x)$

$$W(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2,$$

tenemos

$$U_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & z_2 \\ f(x) & z_2' \end{vmatrix}}{W(z_1, z_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ f(x) & -e^{-x} \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{2}f(x)e^{-x}, \quad (3.5)$$

$$U_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & f(x) \end{vmatrix}}{W(z_1, z_2)} = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & f(x) \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2}f(x)e^x. \quad (3.6)$$

De (3.5) y (3.6) tenemos

$$U_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{-y}dy, \quad U_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^ydy.$$

Así que la solución particular buscada está dada por

$$z_p = \frac{e^x}{2} \int_0^x f(y)e^{-y}dy - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x f(y)e^ydy.$$

Se tiene que la solución de la ecuación homogénea (3.4) se puede escribir como

$$\begin{aligned} z &= z_h + z_p, \\ &= c_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{e^x}{2} \int_0^x f(y)e^{-y}dy - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x f(y)e^ydy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Con las condiciones de $z(0) = h'(t)$ y que z tiende a cero cuando x tiende a infinito, entonces deducimos que

$$z(0) = c_1 + c_2 = h'(t), \quad \text{lo que implica que} \quad c_2 = h'(t) - c_1.$$

Ahora, si dividimos a ambos lados de la ecuación por e^x se tiene

$$\frac{z(x)}{e^x} = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{-y}dy - \frac{e^{-2x}}{2} \int_0^x f(y)e^ydy,$$

y haciendo que z tienda a cero cuando x tiende a infinito, se tiene que

$$0 = c_1 + \frac{1}{2} \int_0^\infty f(y)e^{-y}dy \quad \text{implica que} \quad c_1 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty f(y)e^{-y}dy.$$

Remplazando en (3.7) tenemos

$$\begin{aligned} z(x) &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty f(y)e^{-y}dye^x + (h'(t) - c_1)e^{-x} + \frac{e^x}{2} \int_0^x f(y)e^{-y}dy - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x f(y)e^ydy \\ &= h'(t)e^x + \frac{1}{2} \int_0^\infty f(y)e^{-(x+y)}dy - \frac{1}{2} \int_0^\infty f(y)e^{x-y}dy + \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{x-y}dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{y-x}dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h'(t)e^x + \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{-(x+y)} dy + \frac{1}{2} \int_x^\infty f(y)e^{-(x+y)} dy - \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{x-y} dy \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_x^\infty f(y)e^{x-y} dy + \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{x-y} dy - \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{y-x} dy \\
&= h'(t)e^x + \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{-(x+y)} dy + \frac{1}{2} \int_x^\infty f(y)e^{-(x+y)} dy - \frac{1}{2} \int_x^\infty f(y)e^{x-y} dy \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^x f(y)e^{y-x} dy \\
&= h'(t)e^x + \frac{1}{2} \int_0^x (e^{-(x+y)} - e^{-(x-y)}) f(y) dy + \frac{1}{2} \int_x^\infty (e^{-(x+y)} - e^{x-y}) f(y) dy \\
&= h'(t)e^x + \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{-(x+y)} - e^{-|x-y|}) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Se concluye de lo anterior que u_t en la ecuación (3.3) se puede escribir como

$$u_t(x, t) = h'(t)e^{-x} + \int_0^\infty P(x, y)[u_y + uu_y](y, t) dy, \quad (3.8)$$

donde $P(x, y) = \frac{1}{2}(e^{-(x+y)} - e^{|x-y|})$. Ahora haciendo integración por partes, obtenemos

$$u_t(x, t) = h'(t)e^{-x} + \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{u^2}{2} \right] (y, t) dy, \quad (3.9)$$

donde $K(x, y) = \frac{1}{2}(e^{-(x+y)} + \operatorname{sgn}(x-y)e^{-|x-y|})$. Ahora integrando con respecto al tiempo y teniendo en cuenta las condiciones inicial y de frontera $u(x, 0) = g(x)$, $u(0, t) = h(t)$, se sigue

$$u(x, t) = g(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{u^2}{2} \right] (y, s) dy ds.$$

Por lo tanto se tiene que la ecuación integral asociada al problema (3.1) está dada por

$$u(x, t) = g(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \mathbb{B}(u)(x, t), \quad (3.10)$$

donde

$$\mathbb{B}(u)(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{u^2}{2} \right] (y, s) dy ds.$$

Definimos el operador A como la parte derecha de la ecuación (3.10):

$$(Au)(x, t) = g(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \mathbb{B}(u)(x, t). \quad (3.11)$$

Observación 3.1. Aquí se supone que $g \in C_b(\mathbb{R}^+)$ y que $h \in C([0, T])$. Demostraremos a continuación que el operador A es una aplicación que va de una bola cerrada en X_T en si misma y si T es elegido lo suficientemente pequeño, A es además una aplicación de contracción en esa bola. Con esto, tendremos usando el teorema de punto fijo de Banach que el operador A tiene un punto fijo y por tanto, existe una solución u en el espacio X_S de la ecuación integral (3.10).

3.2. Existencia local en la semirrecta

Teorema 3.1. Sean $T > 0$, $g \in C_b(\mathbb{R}^+)$ y $h \in C([0, T])$. Entonces existe una constante positiva

$$S = S(\|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)}, \|h\|_{C([0, T])}),$$

con $0 < S \leq T$, dependiendo solo de g y h tal que la ecuación integral (3.10) tiene una única solución $u \in X_S$.

Demostración. Sea $R > 0$ y se considere el operador no lineal

$$Au = g(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{u^2}{2} \right] (y, s) dy ds,$$

que se define en el espacio métrico completo

$$\overline{B(0, R)} = \{v \in X_S : \|v\|_{X_S} \leq R\},$$

donde $X_S = C_b(\mathbb{R}^+ \times [0, T]; \mathbb{R})$.

Primero demostremos que A aplica la bola cerrada $\overline{B(0, R)} \subset X_S$ en ella misma para R grande y S suficientemente pequeño. Sea $u \in \overline{B(0, R)}$, y demostremos que $Au \in \overline{B(0, R)}$. Tenemos el estimativo

$$\begin{aligned} \|Au\|_{X_S} &= \left\| g(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right] (y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\ &\leq \|g(x)\|_{X_S} + \|(h(t) - h(0))e^{-x}\|_{X_S} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right] (y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} |g(x)| + \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} |(h(t) - h(0))e^{-x}| \\ &\quad + \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} \left| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right] (y, s) dy ds \right| \\ &\leq \sup_{x \geq 0} |g(x)| + \sup_{S \geq t \geq 0} |h(t) - h(0)| + \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} \int_0^t \left| \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right] (y, s) dy \right| ds \\ &\leq \sup_{x \geq 0} |g(x)| + \sup_{S \geq t \geq 0} |h(t)| + \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} \int_0^t \left| \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right] (y, s) dy \right| ds \\ &\leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0, S])} + \sup_{x \geq 0} S \sup_{S \geq s \geq 0} \left| \int_0^\infty K(x, y) \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right] (y, s) dy \right| \\ &\leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0, S])} + S \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \sup_{y \geq 0} \sup_{S \geq s \geq 0} \left| \left[u + \frac{1}{2}u^2 \right] (y, s) \right| dy \\ &\leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0, S])} + S \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| dy \right) \|u + \frac{1}{2}u^2\|_{X_S} \\ &\leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0, S])} + S \|u(1 + \frac{1}{2}u)\|_{X_S} \\ &\leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0, S])} + S (\|u\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2}\|u\|_{X_S})) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0,S])} + S(\|u\|_{X_S}(1 + \|u\|_{X_S})).$$

Aquí hemos utilizado el resultado,

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| dy &= \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty \left| \frac{1}{2}(e^{-(x+y)} + \operatorname{sgn}(x-y)e^{-|x-y|}) \right| dy \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \left(\int_0^x \left(\frac{1}{2}(e^{-(x+y)} + e^{y-x}) \right) dy + \int_x^\infty \frac{1}{2} |e^{-(x+y)} - e^{x-y}| dy \right) \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \frac{1}{2} \left(\int_0^x (e^{-(x+y)} + e^{y-x}) dy + \int_x^\infty (e^{-(x+y)} + e^{x-y}) dy \right) \quad (3.13) \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \frac{1}{2} \left((-e^{-(x+y)} + e^{y-x}) \Big|_0^x + ((-e^{-(x+y)} - e^{x-y}) \Big|_x^\infty) \right) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|Au\|_{X_S} \leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0,S])} + S[\|u\|_{X_S}(1 + \|u\|_{X_S})]. \quad (3.14)$$

Si $u \in \overline{B(0, R)}$, entonces $\|u\|_{X_S} \leq R$, y se sigue

$$\|Au\|_{X_S} \leq \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0,S])} + SR(1 + R).$$

Sea $\delta = \|g(x)\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|h(t)\|_{C([0,S])}$ y escojamos $R > 0$ lo suficientemente grande a fin que $2\delta \leq R$. Por lo tanto,

$$\|Au\|_{X_S} \leq \delta + SR(1 + R) \leq \frac{1}{2}R + SR(1 + R).$$

Así que podemos escoger $S > 0$ lo suficientemente pequeño a fin que $\frac{1}{2}R + SR(1 + R) \leq R$, lo cual es posible tomando por ejemplo

$$SR(1 + R) \leq \frac{1}{2}R,$$

o equivalentemente

$$S \leq \frac{1}{2(1 + 2R)} \leq T. \quad (3.15)$$

En consecuencia, tenemos que $Au \in \overline{B(0, R)}$.

Mostremos ahora que A es una aplicación contractiva en la bola cerrada $\overline{B(0, R)}$. Para ver esto, sean $u, v \in X_S$.

$$\begin{aligned} \|Au - Av\|_{X_S} &= \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left(u + \frac{1}{2}u^2 \right) (y, s) dy ds - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left(v + \frac{1}{2}v^2 \right) (y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\ &= \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left(\left(u + \frac{1}{2}u^2 \right) - \left(v + \frac{1}{2}v^2 \right) \right) (y, s) dy ds \right\|_{X_S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v)) (y, s)) dy ds \right\|_{X_S} \\
&= \sup_{x \geq 0} \sup_{s \geq t \geq 0} \left| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v)) (y, s)) dy ds \right| \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \sup_{s \geq t \geq 0} \int_0^t \left| \int_0^\infty K(x, y) ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v)) (y, s)) dy \right| ds \\
&\leq S \sup_{x \geq 0} \sup_{s \geq t \geq 0} \left| \int_0^\infty K(x, y) ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v)) (y, s)) dy \right| \\
&\leq S \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \sup_{y \geq 0} \sup_{s \geq 0} |((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v)) (y, s))| dy \\
&\leq S \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \left\| ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v))) \right\|_{X_S} dy \\
&\leq S \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| dy \right) \left\| ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v))) \right\|_{X_S} \\
&\leq S \left\| ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v))) \right\|_{X_S} \\
&\leq S \|u - v\|_{X_S} \left\| (1 + \tfrac{1}{2}(u + v)) \right\|_{X_S} \\
&\leq S \|u - v\|_{X_S} \{1 + \tfrac{1}{2}(\|u\|_{X_S} + \|v\|_{X_S})\}.
\end{aligned}$$

Entonces si $u, v \in \overline{B(0, R)}$ y de la ecuación (3.15), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|Au - Av\|_{X_S} &\leq S \|u - v\|_{X_S} \{1 + \tfrac{1}{2}(\|u\|_{X_S} + \|v\|_{X_S})\} \\
&\leq S(1 + R) \|u - v\|_{X_S} \\
&\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{X_S}.
\end{aligned}$$

Entonces A es una contracción. El teorema punto fijo de Banach garantiza un único punto fijo de A en $B(0, R)$, por lo tanto existe una solución u en X_S de la ecuación integral (3.10). $\square$

3.3. Unicidad

Teorema 3.2. *La solución de la ecuación integral (3.10) es única en el espacio X_S .*

Demostración. Supongamos que u y v son dos soluciones en X_S de (3.10). Entonces

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_{X_S} &\leq \|Au - Av\|_{X_S} \\
&\leq \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) ((u + \tfrac{1}{2}u^2) - (v + \tfrac{1}{2}v^2)) (y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
&\leq \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) ((u - v) + \tfrac{1}{2}(u^2 - v^2)) (y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
&\leq \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) ((u - v)(1 + \tfrac{1}{2}(u + v)) (y, s)) dy ds \right\|_{X_S}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{x \geq 0} \sup_{s \geq t \geq 0} \left| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left((u - v) \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) (y, s) \right) dy ds \right| \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \sup_{s \geq t \geq 0} \int_0^t \left| \int_0^\infty K(x, y) \left((u - v) \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) (y, s) \right) dy \right| ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{x \geq 0} \sup_{s \geq s \geq 0} \left| \int_0^\infty K(x, y) \left((u - v) \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) (y, s) \right) dy \right| ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \sup_{y \geq 0} \sup_{s \geq s \geq 0} \left| \left((u - v) \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) (y, s) \right) \right| dy ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \left\| (u - v) \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) \right\|_{X_S} dy ds \\
&\leq \int_0^t \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| dy \right) \left\| (u - v) \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) \right\|_{X_S} ds \\
&\leq \int_0^t \left\| (u - v) \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) \right\|_{X_S} ds \\
&\leq \int_0^t \| (u - v) \|_{X_S} \left\| \left(1 + \frac{1}{2}(u + v) \right) \right\|_{X_S} ds \\
&\leq \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\|u\|_{X_S} + \|v\|_{X_S}) \right\} \int_0^t \|u - v\|_{X_S} ds.
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (2.6) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_{X_S} &\leq \|Au - Av\|_{X_S} \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

entonces $u = v$ para todo $t \in [0, T]$, y por lo tanto la solución de la ecuación integral (3.10) es única en X_T . $\square$

Capítulo 4

Modelo para propagación de ondas en un canal con bifurcación

En este capítulo consideraremos el problema de valor inicial-frontera asociado al modelo propuesto en [2] para describir la propagación de ondas en un canal en forma de una Y-uni3n con aristas semi-infinitas (ver Figura (4.1)), dado por

$$\mathcal{Y} = e_1 \cup e_2 \cup e_3 = (-\infty_1, 0] \cup [0, \infty_2) \cup [0, \infty_3). \quad (4.1)$$

Aqu3 $\bar{u}_i = \bar{u}_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$ representa la amplitud de la onda en la secci3n i , x la posici3n, y $t \geq 0$, representa el tiempo. La notaci3n ∞_i indica la arista ($i = 1, 2, 3$) donde ∞ es considerado.

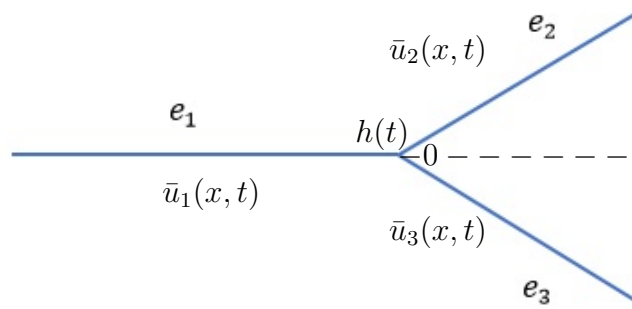


Figura 4.1. Canal en forma de Y. La funci3n $h(t)$ es el valor com3n (que es desconocido) de las funciones $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ en el tiempo t en la interface $x = 0$.

De acuerdo a [2], consideramos el siguiente modelo para describir la propagaci3n de ondas en un canal de la forma indicada:

$$\bar{u}_{1,t} - \bar{u}_{1,\bar{x}\bar{x}t} + \bar{u}_{1,\bar{x}} + \bar{u}_1 \bar{u}_{1,\bar{x}} = 0, \quad x \leq 0, \quad (4.2)$$

$$\bar{u}_{2,t} - \bar{u}_{2,\bar{x}\bar{x}t} + \bar{u}_{2,\bar{x}} + \bar{u}_2\bar{u}_{2,\bar{x}} = 0, \quad x \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\bar{u}_{3,t} - \bar{u}_{3,\bar{x}\bar{x}t} + \bar{u}_{3,\bar{x}} + \bar{u}_3\bar{u}_{3,\bar{x}} = 0, \quad x \geq 0, \quad (4.4)$$

sujeta a las siguientes condiciones de continuidad y balance de flujo en el punto $\bar{x} = 0$, donde se encuentra la bifurcación del canal:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(0, t) &= \bar{u}_2(0, t) = \bar{u}_3(0, t), \\ \bar{u}_{1,\bar{x}}(0, t) &= \bar{u}_{2,\bar{x}}(0, t) + \bar{u}_{3,\bar{x}}(0, t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Haciendo cambio de variable $\bar{x} \rightarrow x = -\bar{x}$ para $\bar{u}_1$, obtenemos el problema de valor inicial-frontera con tres ecuaciones de BBM para $u_i = u_i(x, t) [= \bar{u}_i(\bar{x}, t)]$ en $\mathbb{R}^+$ ($i = 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned} u_{i,t} - u_{i,xx} + \sigma_i u_{i,x} + \sigma_i u_i u_{i,x} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, t \geq 0, \\ u_1 &= u_2 = u_3, \quad u_{1,x} + u_{2,x} + u_{3,x} = 0, \quad x = 0, t \geq 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u_i(x, t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u_i(x, 0) &= g_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde $\sigma_1 = -1, \sigma_2 = \sigma_3 = +1$. Además supondremos que las condiciones iniciales (en $t = 0$) satisfacen las condiciones de compatibilidad

$$g_1(0) = g_2(0) = g_3(0), \quad g_{1,x}(0) + g_{2,x}(0) + g_{3,x}(0) = 0, \quad (4.7)$$

con g_1, g_2, g_3 tendiendo a cero cuando $x \rightarrow \infty$. Adicionalmente, denotaremos por $h(t)$ al valor común de u_1, u_2, u_3 (el cual es desconocido) en la interface $x = 0$, es decir,

$$h(t) = u_1(0, t) = u_2(0, t) = u_3(0, t). \quad (4.8)$$

Procediendo similarmente a lo realizado en el capítulo anterior para la ecuación BBM, obtenemos la siguiente formulación integral para cada componente u_i , $i = 1, 2, 3$

$$u_i(x, t) = g_i(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \sigma_i \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) [u_i + \frac{1}{2}u_i^2](y, s) dy ds, \quad (4.9)$$

donde el kernel de la integral anterior tiene la forma

$$K(x, y) = \frac{1}{2}(e^{-(x+y)} + \operatorname{sgn}(x-y)e^{-|x-y|}), \quad x, y \geq 0.$$

Observe que esta función está relacionada con la función de Green correspondiente al operador $\partial_x^2 - I$ en el intervalo $(0, \infty)$.

Ahora usamos la condición de balance de flujo en (4.7) para determinar el término $h(t) - h(0)$, y de (3.8), obtenemos

$$u_{i,xt}(0, t) = -h'(t) - \sigma_i \int_0^\infty e^{-y} [u_{i,y} + u_i u_{i,y}](y, s) dy ds.$$

Por lo tanto, la condición de balance de flujo se convierte en

$$0 = \sum_{i=1}^3 u_{i,xt}(0, t) = -3h'(t) - \int_0^\infty e^{-y} [u_{i,y} + u_i u_{i,y}](y, s) dy ds.$$

En otras palabras, la función desconocida $h(t)$ debe satisfacer

$$h(t) - h(0) = \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(1 + u_1)u_{1,y} - (1 + u_2)u_{2,y} - (1 + u_3)u_{3,y}](y, s) dy ds. \quad (4.10)$$

Para analizar el problema de valor inicial-frontera que estamos considerando, necesitamos encontrar una expresión equivalente para $h(t)$. Haciendo integración por partes al lado derecho de la ecuación (4.10) y usando que $u_1 = u_2 = u_3$ en $x = 0$ se tiene que

$$h(t) = h(0) - \frac{1}{3} \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s)) ds + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s) dy ds. \quad (4.11)$$

donde $h(0) = g_i(0)$ es una constante para $i = 1, 2, 3$.

Combinando (4.11) con el sistema de ecuaciones (4.9) obtenemos

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= g_1(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) [u_1 + \frac{1}{2}u_1^2](y, s) dy ds \\ u_2(x, t) &= g_2(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) [u_2 + \frac{1}{2}u_2^2](y, s) dy ds \\ u_3(x, t) &= g_3(x) + (h(t) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) [u_3 + \frac{1}{2}u_3^2](y, s) dy ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$h(t) = h(0) - \frac{1}{3} \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s)) ds + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s) dy ds.$$

Ahora, sea $\mathbf{C}$ es el operador definido para $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, h)^T$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{u}) &= h(0) - \frac{1}{3} \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s)) ds \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s) dy ds. \end{aligned}$$

Observe que el problema se ha reducido a encontrar la solución (u_1, u_2, u_3, h) de las ecuaciones (4.12) y

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = h(t). \quad (4.13)$$

Ahora se define el espacio Y_T , puesto que en el trabajo se considerarán sistemas de ecuaciones, se requerirá el espacio producto

$$Y_T = \{(u_1, u_2, u_3, h) \in X_T \times X_T \times X_T \times C([0, T]), u_i(0, 0) = h(0) = g_i(0) \text{ para } i = 1, 2, 3\} \quad (4.14)$$

con la norma

$$\|(u_1, u_2, u_3, h)\|_{Y_T} = \|u_1\|_{X_T} + \|u_2\|_{X_T} + \|u_3\|_{X_T} + \|h\|_{C([0, T])}. \quad (4.15)$$

4.1. Existencia local

Teorema 4.1. *Sean $T > 0$ y $R > 0$. Entonces existe una constante $k > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C(0, T)} \leq k \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_T},$$

para todo $w, v \in B(0, R) \subset Y_T$.

Demostración. Sea $v = (v_1, v_2, v_3, \tilde{h})$ y $w = (w_1, w_2, w_3, h)$ y se considera el operador $\mathbf{C}$ definido en el espacio de Banach

$$B(0, R) = \{\mathbf{u} \in Y_T : \|\mathbf{u}\|_{Y_T} \leq R\}$$

donde

$$Y_T = X_T \times X_T \times X_T \times C([0, T]),$$

con la norma

$$\|(u_1, u_2, u_3, h)\|_{Y_T} = \|u_1\|_{X_T} + \|u_2\|_{X_T} + \|u_3\|_{X_T} + \|h\|_{C([0, T])}.$$

Tenemos que,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C(0, T)} &= \left\| -\frac{1}{3} \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2 - \tilde{h} - \frac{1}{2}\tilde{h}^2)ds + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(w_1 + \frac{1}{2}w_1^2) \right. \\ &\quad \left. - (\frac{1}{2}w_2^2 + v_2^2) - (w_3^2 + \frac{1}{2}w_3^2) - (v_1 + \frac{1}{2}v_1^2) + (v_2 + \frac{1}{2}v_2^2) + (v_3^2 + \frac{1}{2}v_3^2)](y, s) dy ds \right\|_{X_T} \\ &\leq \left\| -\frac{1}{3} \int_0^t (h + \frac{1}{2}h^2 - \tilde{h} - \frac{1}{2}\tilde{h}^2)ds \right\|_{X_T} + \left\| \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(w_1 + \frac{1}{2}w_1^2) \right. \\ &\quad \left. - (\frac{1}{2}w_2^2 + v_2^2) - (w_3^2 + \frac{1}{2}w_3^2) - (v_1 + \frac{1}{2}v_1^2) + (v_2 + \frac{1}{2}v_2^2) + (v_3^2 + \frac{1}{2}v_3^2)](y, s) dy ds \right\|_{X_T} \\ &\leq \left\| \frac{1}{3} \int_0^t ((h - \tilde{h})(1 + \frac{1}{2}\{h + \tilde{h}\}))ds \right\|_{X_T} + \left\| \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(w_1 - v_1)(1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\}) \right. \\ &\quad \left. - (w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\}) - (w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\})](y, s) dy ds \right\|_{X_T} \\ &\leq \sup_{x \geq 0} \sup_{T \geq t \geq 0} \left| \frac{1}{3} \int_0^t ((h(s) - \tilde{h}(s))(1 + \frac{1}{2}\{h(s) + \tilde{h}(s)\}))ds \right| + \sup_{x \geq 0} \sup_{T \geq t \geq 0} \left| \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y} [(w_1 - v_1) \right. \\ &\quad \left. (1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\}) - (w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\}) - (w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\})](y, s) dy ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{3} \sup_{T \geq t \geq 0} \int_0^t \left| ((h(s) - \tilde{h}(s))(1 + \frac{1}{2}\{h(s) + \tilde{h}(s)\})) \right| ds + \frac{1}{3} \sup_{x \geq 0} \sup_{T \geq t \geq 0} \int_0^t \left| \int_0^\infty e^{-y} [(w_1 - v_1) \right. \\
&\quad \left. (1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\} - (w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\}) - (w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\}))](y, s) dy \right| ds \\
&\leq \frac{T}{3} \sup_{T \geq s \geq 0} |((h(s) - \tilde{h}(s))(1 + \frac{1}{2}\{h(s) + \tilde{h}(s)\}))| + \frac{T}{3} \sup_{x \geq 0} \sup_{T \geq s \geq 0} \left| \int_0^\infty e^{-y} [(w_1 - v_1)(1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\} - (w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\}) - (w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\}))](y, s) dy \right| \\
&\leq \frac{T}{3} \sup_{T \geq s \geq 0} |((h(s) - \tilde{h}(s))(1 + \frac{1}{2}\{h(s) + \tilde{h}(s)\}))| + \frac{T}{3} \sup_{x \geq 0} \sup_{T \geq s \geq 0} \int_0^\infty \left| e^{-y} [(w_1 - v_1)(1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\} - (w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\}) - (w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\}))](y, s) \right| dy \\
&\leq \frac{T}{3} \sup_{T \geq s \geq 0} |((h(s) - \tilde{h}(s))(1 + \frac{1}{2}\{h(s) + \tilde{h}(s)\}))| + \frac{T}{3} \left(\int_0^\infty |e^{-y}| dy \right) \sup_{y \geq 0} \sup_{T \geq s \geq 0} \left| [(w_1 - v_1)(1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\}) - (w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\}) - (w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\}))](y, s) \right| \\
&\leq \frac{T}{3} \|((h - \tilde{h})(1 + \frac{1}{2}\{h + \tilde{h}\}))\|_{C([0, T])} + \frac{T}{3} \|[(w_1 - v_1)(1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\} - (w_2 - v_2)(1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\}) - (w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\}))]\|_{X_T} \\
&\leq \frac{1}{3} T \|((h - \tilde{h})(1 + \frac{1}{2}\{h + \tilde{h}\}))\|_{C([0, T])} + \frac{1}{3} T \|[(w_1 - v_1)(1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\})\|_{X_T} \\
&\quad + \frac{1}{3} T \|(w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\})\|_{X_T} + \frac{1}{3} T \|(w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\})\|_{X_T} \\
&\leq \frac{1}{3} T \|h - \tilde{h}\|_{C([0, T])} (1 + \frac{1}{2}\{\|h\|_{C([0, T])} + \|\tilde{h}\|_{C([0, T])}\}) + \frac{1}{3} T \|w_1 - v_1\|_{X_T} (1 + \frac{1}{2}\{\|w_1\|_{X_T} \\
&\quad + \|v_1\|_{X_T}\}) + \frac{1}{3} T \|w_2 - v_2\|_{X_T} (1 + \frac{1}{2}\{\|w_2\|_{X_T} + \|v_2\|_{X_T}\}) \\
&\quad + \frac{1}{3} T \|w_3 - v_3\|_{X_T} (1 + \frac{1}{2}\{\|w_3\|_{X_T} + \|v_3\|_{X_T}\}).
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que v, w pertenecen a la bola cerrada $\overline{B(0, R)}$ de radio R y centro en

0 en Y_T . Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C(0,T)} &\leq \frac{1}{3}T(1+R)\|h - \tilde{h}\|_{C([0,T])} + \frac{1}{3}T(1+R)\|w_1 - v_1\|_{X_T} \\
&\quad + \frac{1}{3}T(1+R)\|w_2 - v_2\|_{X_T} + \frac{1}{3}T(1+R)\|w_3 - v_3\|_{X_T} \\
&= \frac{1}{3}T(1+R)(\|h - \tilde{h}\|_{C([0,T])} + \|w_1 - v_1\|_{X_T} \\
&\quad + \|w_2 - v_2\|_{X_T} + \|w_3 - v_3\|_{X_T}) \\
&\leq \frac{1}{3}T(1+R)\|(w_1, w_2, w_3, h) - (v_1, v_2, v_3, \tilde{h})\|_{Y_T}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $k = \frac{1}{3}T(1+R)$, se tiene

$$\|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C(0,T)} \leq k\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_T}.$$

□

Teorema 4.2. Sean $T > 0$ y $g_i \in C_b(\mathbb{R}^+)$, para $i = 1, 2, 3$. Entonces existen un S en $[0, T]$, y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, h) \in Y_S$ que satisface el sistema de ecuaciones integrales (4.12)-(4.13).

Demostración. Sea $\mathbf{B}$ el operador definido para $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, h)^T$ como

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} g_1(x) + (\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x} - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_1 + \frac{1}{2}u_1^2](y, s)dyds \\ g_2(x) + (\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_2 + \frac{1}{2}u_2^2](y, s)dyds \\ g_3(x) + (\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_3 + \frac{1}{2}u_3^2](y, s)dyds \\ \mathbf{C}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Entonces el problema se reduce a demostrar la existencia de un punto fijo del operador $\mathbf{B}(\mathbf{u})$, lo cual se realizará utilizando el teorema de punto fijo de Banach en una bola cerrada en el espacio de Banach X_S , para S suficientemente pequeño. Demostremos que $\mathbf{B}$ aplica la bola cerrada $\overline{B(0, R)} \subset Y_S$ en ella misma para S y R apropiados. Sea $\mathbf{u} \in \overline{B(0, R)}$ y demostremos que $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \overline{B(0, R)}$. Tenemos los siguientes estimativos:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}(\mathbf{u})\|_{Y_S} &= \left\| g_1(x) + (\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x} - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_1 + \frac{1}{2}u_1^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&\quad + \left\| g_2(x) + (\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_2 + \frac{1}{2}u_2^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&\quad + \left\| g_3(x) + (\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x} + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_3 + \frac{1}{2}u_3^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&\quad + \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0,T])}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|g_1(x)\|_{X_S} + \|(\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x}\|_{X_S} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_1 + \frac{1}{2}u_1^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&+ \|g_2(x)\|_{X_S} + \|(\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x}\|_{X_S} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_2 + \frac{1}{2}u_2^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&+ \|g_3(x)\|_{X_S} + \|(\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))e^{-x}\|_{X_S} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_3 + \frac{1}{2}u_3^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&+ \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0, S])} \\
&\leq \|g_1(x)\|_{X_S} + \|(\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))\|_{X_S} \|e^{-x}\|_{X_S} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_1 + \frac{1}{2}u_1^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&+ \|g_2(x)\|_{X_S} + \|(\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))\|_{X_S} \|e^{-x}\|_{X_S} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_2 + \frac{1}{2}u_2^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&+ \|g_3(x)\|_{X_S} + \|(\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0))\|_{X_S} \|e^{-x}\|_{X_S} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[u_3 + \frac{1}{2}u_3^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
&+ \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0, S])}.
\end{aligned}$$

Ahora utilizando algunos resultados como (3.13) y los estimativos que se realizaron para una sola ecuación BBM en (3.12), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}(\mathbf{u})\|_{Y_S} &\leq \|g_1\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_2\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_3\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + 3\|\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0)\|_{X_S} \\
&+ S \left\| \int_0^\infty K(x, y)[u_1 + \frac{u_1^2}{2}](y, s)dy \right\|_{X_S} + S \left\| \int_0^\infty K(x, y)[u_2 + \frac{u_2^2}{2}](y, s)dy \right\|_{X_S} \\
&+ S \left\| \int_0^\infty K(x, y)[u_3 + \frac{u_3^2}{2}](y, s)dy \right\|_{X_S} \\
&+ \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0, S])} \\
&\leq \|g_1\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_2\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_3\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + 3\|\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0)\|_{X_S} \\
&+ S \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)|dy \right) \left\| u_1 + \frac{u_1^2}{2} \right\|_{X_S} + S \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)|dy \right) \left\| u_2 + \frac{u_2^2}{2} \right\|_{X_S} \\
&+ S \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)|dy \right) \left\| u_3 + \frac{u_3^2}{2} \right\|_{X_S} \\
&+ \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0, S])} \\
&\leq \|g_1\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_2\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_3\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + 3\|\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0)\|_{X_S} \\
&+ S \left\| u_1 + \frac{1}{2}u_1^2 \right\|_{X_S} + S \left\| u_2 + \frac{1}{2}u_2^2 \right\|_{X_S} + S \left\| u_3 + \frac{1}{2}u_3^2 \right\|_{X_S} \\
&+ \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0, S])} \\
&\leq \|g_1\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_2\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_3\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + 3\|\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0)\|_{X_S}
\end{aligned}$$

$$+ S(\|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})) \\ + \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0,S])}.$$

Antes de continuar se calcula los estimativos de $\|\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0)\|_{X_S}$ y $\|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0,S])}$.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0)\|_{X_S} &= \left\| h(0) - \frac{1}{3} \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s))ds + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y}[(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) \right. \\ &\quad \left. - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s)dyds - h(0) \right\|_{X_S} \\ &= \left\| -\frac{1}{3} \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s))ds + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y}[(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) \right. \\ &\quad \left. - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\ &\leq \frac{1}{3} \left\| \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s))ds \right\|_{X_S} \\ &\quad + \frac{1}{3} S \left\| \int_0^\infty e^{-y}[(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s)dy \right\|_{X_S} \\ &\leq \frac{1}{3} S \|h + \frac{1}{2}h^2\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3} S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2)(y, s)dy \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-y}(u_2 + \frac{1}{2}u_2^2)(y, s)dy - \int_0^\infty e^{-y}(u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} \\ &\leq \frac{1}{3} S \|h + \frac{1}{2}h^2\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3} S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} \\ &\quad + \frac{1}{3} S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_2 + \frac{1}{2}u_2^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} + \frac{1}{3} S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} \\ &\leq \frac{1}{3} S \|h + \frac{1}{2}h^2\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3} S \left(\int_0^\infty |e^{-y}|dy \right) \left\| u_1 + \frac{1}{2}u_1^2 \right\|_{X_S} \\ &\quad + \frac{1}{3} S \left(\int_0^\infty |e^{-y}|dy \right) \left\| u_2 + \frac{1}{2}u_2^2 \right\|_{X_S} + \frac{1}{3} S \left(\int_0^\infty |e^{-y}|dy \right) \left\| u_3 + \frac{1}{2}u_3^2 \right\|_{X_S} \\ &\leq \frac{1}{3} S \|h(1 + \frac{1}{2}h)\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3} S \|u_1(1 + \frac{1}{2}u_1)\|_{X_S} \\ &\quad + \frac{1}{3} S \|u_2(1 + \frac{1}{2}u_2)\|_{X_S} + \frac{1}{3} S \|u_3(1 + \frac{1}{2}u_3)\|_{X_S} \\ &\leq \frac{1}{3} S \|h\|_{C([0,S])} (1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) + \frac{1}{3} S \|u_1\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}S\|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \frac{1}{3}S\|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S}) \\
& \leq \frac{1}{3}S(\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) + \|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) \\
& \quad + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})).
\end{aligned}$$

Y para $\|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0,S])}$ se hace los estimativos de manera similar a lo anterior, donde $m = |h(0)|$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0,S])} & \leq \left\| h(0) - \frac{1}{3} \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s))ds + \frac{1}{3} \int_0^t \int_0^\infty e^{-y}[(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) \right. \\
& \quad \left. - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s)dyds \right\|_{X_S} \\
& \leq m + \frac{1}{3} \left\| \int_0^t (h(s) + \frac{1}{2}h^2(s))ds \right\|_{X_S} \\
& \quad + \frac{1}{3}S \left\| \int_0^\infty e^{-y}[(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2) - (u_2 + \frac{1}{2}u_2^2) - (u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)](y, s)dy \right\|_{X_S} \\
& \leq m + \frac{1}{3}S \|h + \frac{1}{2}h^2\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3}S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2)(y, s)dy \right. \\
& \quad \left. - \int_0^\infty e^{-y}(u_2 + \frac{1}{2}u_2^2)(y, s)dy - \int_0^\infty e^{-y}(u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} \\
& \leq m + \frac{1}{3}S \|h + \frac{1}{2}h^2\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3}S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_1 + \frac{1}{2}u_1^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} \\
& \quad + \frac{1}{3}S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_2 + \frac{1}{2}u_2^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} + \frac{1}{3}S \left\| \int_0^\infty e^{-y}(u_3 + \frac{1}{2}u_3^2)(y, s)dy \right\|_{X_S} \\
& \leq m + \frac{1}{3}S \|h + \frac{1}{2}h^2\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3}S \left(\int_0^\infty |e^{-y}|dy \right) \left\| u_1 + \frac{1}{2}u_1^2 \right\|_{X_S} \\
& \quad + \frac{1}{3}S \left(\int_0^\infty |e^{-y}|dy \right) \left\| u_2 + \frac{1}{2}u_2^2 \right\|_{X_S} + \frac{1}{3}S \left(\int_0^\infty |e^{-y}|dy \right) \left\| u_3 + \frac{1}{2}u_3^2 \right\|_{X_S} \\
& \leq m + \frac{1}{3}S \|h(1 + \frac{1}{2}h)\|_{C([0,S])} + \frac{1}{3}S\|u_1(1 + \frac{1}{2}u_1)\|_{X_S} \\
& \quad + \frac{1}{3}S\|u_2(1 + \frac{1}{2}u_2)\|_{X_S} + \frac{1}{3}S\|u_3(1 + \frac{1}{2}u_3)\|_{X_S} \\
& \leq m + \frac{1}{3}S\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) + \frac{1}{3}S\|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) \\
& \quad + \frac{1}{3}S\|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \frac{1}{3}S\|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq m + \frac{1}{3}S(\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) + \|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) \\ &\quad + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})). \end{aligned}$$

Así, de lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mathbf{u})\|_{Y_S} &\leq \|g_1\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_2\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_3\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + 3\|\mathbf{C}(\mathbf{u}) - h(0)\|_{X_S} \\ &\quad + S(\|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})) \\ &\quad + \|\mathbf{C}(\mathbf{u})\|_{C([0,S])} \\ &\leq \|g_1\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_2\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + \|g_3\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} + 3(\frac{S}{3}(\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) \\ &\quad + \|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S}))) \\ &\quad + S(\|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})) \\ &\quad + m + \frac{1}{3}S(\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) + \|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) \\ &\quad + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})) \\ &\leq \|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)^3} + m + 2S((\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) \\ &\quad + \|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S}))) \\ &\quad + S(\|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S})) \\ &\leq \|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)^3} + m + 3S((\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}\|h\|_{C([0,S])}) + \|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_1\|_{X_S}) \\ &\quad + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_2\|_{X_S}) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}\|u_3\|_{X_S}))). \end{aligned}$$

Aquí $m = |h(0)|$. Suponiendo que $\mathbf{u} \in \overline{B(0, R)}$ se tiene que $\|\mathbf{u}\|_{Y_S} \leq R$ para $R > 0$, lo suficientemente grande y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mathbf{u})\|_{Y_S} &\leq \|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)^3} + m + 3S((\|h\|_{C([0,S])}(1 + \frac{1}{2}R) + \|u_1\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}R) \\ &\quad + \|u_2\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}R) + \|u_3\|_{X_S}(1 + \frac{1}{2}R))) \\ &\leq \|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)^3} + m + 3S(1 + \frac{1}{2}R)((\|h\|_{C([0,S])} + \|u_1\|_{X_S} + \|u_2\|_{X_S} + \|u_3\|_{X_S})) \\ &\leq \|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)^3} + m + 3SR(1 + R). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{u})\|_{Y_S} \leq \|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)^3} + m + 3SR(1 + R). \quad (4.17)$$

De acuerdo a (4.17), $\mathbf{B}$ aplica la bola cerrada de radio R con centro en 0 en si misma. Sea $\varepsilon = \|g\|_{C_b(\mathbb{R}^+)^3} + m \leq \frac{1}{2}R$, se escoge a $R > 0$ lo suficientemente grande de tal manera que $2\varepsilon \leq R$. Por lo tanto

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{u})\|_{Y_S} \leq \epsilon + 3SR(1+R) \leq \frac{1}{2}R + 3SR(1+R).$$

Ahora, escogemos el valor de S positivo, lo suficientemente pequeño, tal que $\frac{1}{2}R + 3SR(1+R) \leq R$, lo que nos permite tomar

$$3SR(1+R) \leq \frac{1}{2}R$$

o equivalentemente

$$S \leq \frac{1}{6(1+R)} \leq T. \quad (4.18)$$

Por lo tanto, tenemos que $\mathbf{B}u \in \overline{B(0, R)}$.

Mostremos ahora que $\mathbf{B}$ es una aplicación contractiva donde $u = (u_1, u_2, u_3, h)$. Las funciones g_1, g_2 y g_3 se asume que están en $C_b(\mathbb{R}^+)$, y sean $v = (v_1, v_2, v_3, \tilde{h})$ y $w = (w_1, w_2, w_3, h)$ pertenecientes a Y_S . Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\mathbf{w}) - \mathbf{B}(\mathbf{v})\|_{Y_S} &= \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[w_1 + \frac{1}{2}w_1^2 \right. \\ &\quad \left. - v_1 - \frac{1}{2}v_1^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[w_2 + \frac{1}{2}w_2^2 \right. \\ &\quad \left. - v_2 - \frac{1}{2}v_2^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[w_3 + \frac{1}{2}w_3^2 \right. \\ &\quad \left. - v_3 - \frac{1}{2}v_3^2](y, s)dyds \right\|_{X_S} + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\ &= \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_1 - v_1)(1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\})(y, s)dyds \right\|_{X_S} \\ &\quad + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\})(y, s)dyds \right\|_{X_S} \\ &\quad + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\})(y, s)dyds \right\|_{X_S} \\ &\quad + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\ &\leq \|e^{-x}\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_1 - v_1)(1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\})(y, s)dyds \right\|_{X_S} \\ &\quad + \|e^{-x}\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\})(y, s)dyds \right\|_{X_S} \\ &\quad + \|e^{-x}\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& \leq \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_1 - v_1)(1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])}.
\end{aligned}$$

Ahora, en vista del resultado (3.13), tenemos

$$\begin{aligned}
& = \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) ((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v)))(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& = \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} \left| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) ((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v)))(y, s) dy ds \right| \\
& \leq \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} \int_0^t \left| \int_0^\infty K(x, y) ((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v)))(y, s) dy \right| ds \\
& \leq S \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq s \geq 0} \left| \int_0^\infty K(x, y) ((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v)))(y, s) dy \right| \\
& \leq S \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \sup_{y \geq 0} \sup_{S \geq s \geq 0} |((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v)))(y, s)| dy \\
& \leq S \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \left\| ((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v))) \right\|_{X_S} dy \\
& \leq S \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| dy \right) \left\| ((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v))) \right\|_{X_S} \\
& \leq S \left\| ((w - v)(1 + \frac{1}{2}(w + v))) \right\|_{X_S}.
\end{aligned}$$

Por tanto, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}(\mathbf{w}) - \mathbf{B}(\mathbf{v})\|_{Y_S} & \leq \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + S \|(w_1 - v_1)(1 + \frac{1}{2}\{w_1 + v_1\})\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + S \|(w_2 - v_2)(1 + \frac{1}{2}\{w_2 + v_2\})\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + S \|(w_3 - v_3)(1 + \frac{1}{2}\{w_3 + v_3\})\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& \leq \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + S \|w_1 - v_1\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2}\{\|w_1\|_{X_S} + \|v_1\|_{X_S}\}) \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + S \|w_2 - v_2\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2}\{\|w_2\|_{X_S} + \|v_2\|_{X_S}\})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0,S])} + S\|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + \tfrac{1}{2}\{\|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S}\}) \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0,S])} \\
& \leq 4\|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0,S])} + S\|w_1 - v_1\|_{X_S} (1 + \tfrac{1}{2}\{\|w_1\|_{X_S} + \|v_1\|_{X_S}\}) \\
& + S\|w_2 - v_2\|_{X_S} (1 + \tfrac{1}{2}\{\|w_2\|_{X_S} + \|v_2\|_{X_S}\}) \\
& + S\|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + \tfrac{1}{2}\{\|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S}\}).
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ pertenecen a la bola cerrada $\overline{B(0, R)}$ de radio R y centro en 0 en Y_S . Entonces se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}(\mathbf{w}) - \mathbf{B}(\mathbf{v})\|_{Y_S} & \leq 4\|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0,S])} + S\|w_1 - v_1\|_{X_S} (1 + R) \\
& + S\|w_2 - v_2\|_{X_S} (1 + R) + S\|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + R) \\
& = 4\|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0,S])} + S(1 + R)(\|w_1 - v_1\|_{X_S} + \|w_2 - v_2\|_{X_S} \\
& + \|w_3 - v_3\|_{X_S}).
\end{aligned}$$

Por teorema (4.1) y de la ecuación (4.18) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{B}(\mathbf{w}) - \mathbf{B}(\mathbf{v})\|_{Y_S} & \leq \tfrac{4}{3}S(1 + R)(\|h - \tilde{h}\|_{C([0,S])} + \|w_1 - v_1\|_{X_S} + \|w_2 - v_2\|_{X_S} \\
& + \|w_3 - v_3\|_{X_S}) + S(1 + R)(\|w_1 - v_1\|_{X_S} + \|w_2 - v_2\|_{X_S} \\
& + \|w_3 - v_3\|_{X_S}) \\
& \leq 3S(1 + R)(\|h - \tilde{h}\|_{C([0,S])} + \|w_1 - v_1\|_{X_S} + \|w_2 - v_2\|_{X_S} \\
& + \|w_3 - v_3\|_{X_S}) \\
& \leq 3S(1 + R)\|(w_1, w_2, w_3, h) - (v_1, v_2, v_3, \tilde{h})\|_{Y_S} \\
& \leq 3\frac{1}{6(1 + R)}(1 + R)\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S} \\
& \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S}.
\end{aligned}$$

Para los valores de S, R seleccionados, $\mathbf{B}$ es una contracción. Así, el teorema punto fijo de Banach garantiza un único punto fijo de $\mathbf{B}$ en $B(0, R)$, por lo tanto existe una solución (u_1, u_2, u_3, h) en Y_S al sistema de ecuaciones integrales (4.12), (4.13). $\square$

4.2. Unicidad

Teorema 4.3. *El punto fijo obtenido en el teorema anterior es único en el espacio Y_S .*

Demostración. Sean $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, h)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \tilde{h})$ en Y_S . Entonces

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S} \leq \|\mathbf{B}(\mathbf{w}) - \mathbf{B}(\mathbf{v})\|_{Y_S} \\
& \leq \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[w_1 + \tfrac{1}{2}w_1^2 - v_1 - \tfrac{1}{2}v_1^2](y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[w_2 + \tfrac{1}{2}w_2^2 - v_2 - \tfrac{1}{2}v_2^2](y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)[w_3 + \tfrac{1}{2}w_3^2 - v_3 - \tfrac{1}{2}v_3^2](y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& = \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) - \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_1 - v_1)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_1 + v_1\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_2 - v_2)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_2 + v_2\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \left\| e^{-x}(\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}))(t) + \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_3 - v_3)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_3 + v_3\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& \leq \|e^{-x}\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& \quad + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_1 - v_1)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_1 + v_1\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|e^{-x}\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& \quad + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_2 - v_2)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_2 + v_2\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|e^{-x}\|_{C_b(\mathbb{R}^+)} \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& \quad + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_3 - v_3)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_3 + v_3\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} \\
& \leq \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_1 - v_1)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_1 + v_1\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_2 - v_2)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_2 + v_2\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])} + \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y)(w_3 - v_3)(1 + \tfrac{1}{2}\{w_3 + v_3\})(y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
& + \|\mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v})\|_{C([0, S])},
\end{aligned}$$

haciendo uso de (3.13) se estima la siguiente norma

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left((w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right) (y, s) dy ds \right\|_{X_S} \\
&= \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} \left| \int_0^t \int_0^\infty K(x, y) \left((w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right) (y, s) dy ds \right| \\
&\leq \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq t \geq 0} \int_0^t \left| \int_0^\infty K(x, y) \left((w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right) (y, s) dy \right| ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{x \geq 0} \sup_{S \geq s \geq 0} \left| \int_0^\infty K(x, y) \left((w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right) (y, s) dy \right| ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \sup_{y \geq 0} \sup_{S \geq s \geq 0} \left| \left((w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right) (y, s) \right| dy ds \\
&\leq \int_0^t \sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| \left\| (w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right\|_{X_S} dy ds \\
&\leq \int_0^t \left(\sup_{x \geq 0} \int_0^\infty |K(x, y)| dy \right) \left\| (w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right\|_{X_S} ds \\
&\leq \int_0^t \left\| (w - v) \left(1 + \frac{1}{2}(w + v) \right) \right\|_{X_S} ds,
\end{aligned}$$

de lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{w} - \mathbf{v} \|_{Y_S} &\leq \| \mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}) \|_{C([0, S])} + \int_0^t \| (w_1 - v_1) \left(1 + \frac{1}{2} \{ w_1 + v_1 \} \right) \|_{X_S} ds \\
&\quad + \| \mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}) \|_{C([0, S])} + \int_0^t \| (w_2 - v_2) \left(1 + \frac{1}{2} \{ w_2 + v_2 \} \right) \|_{X_S} ds \\
&\quad + \| \mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}) \|_{C([0, S])} + \int_0^t \| (w_3 - v_3) \left(1 + \frac{1}{2} \{ w_3 + v_3 \} \right) \|_{X_S} ds \\
&\quad + \| \mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}) \|_{C([0, S])} \\
&\leq 4 \| \mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}) \|_{C([0, S])} + \int_0^t (\| w_1 - v_1 \|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \| w_1 \|_{X_S} + \| v_1 \|_{X_S} \}) \\
&\quad + \| w_2 - v_2 \|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \| w_2 \|_{X_S} + \| v_2 \|_{X_S} \}) \\
&\quad + \| w_3 - v_3 \|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \| w_3 \|_{X_S} + \| v_3 \|_{X_S} \})) ds,
\end{aligned}$$

ahora utilizaremos el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{C}(\mathbf{w}) - \mathbf{C}(\mathbf{v}) \|_{C([0, S])} &\leq \frac{1}{3} \int_0^t \| h - \tilde{h} \|_{C([0, S])} (1 + \frac{1}{2} \{ \| h \|_{C([0, S])} + \| \tilde{h} \|_{C([0, S])} \}) ds \\
&\quad + \frac{1}{3} \int_0^t \| w_1 - v_1 \|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \| w_1 \|_{X_S} + \| v_1 \|_{X_S} \}) ds \\
&\quad + \frac{1}{3} \int_0^t \| w_2 - v_2 \|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \| w_2 \|_{X_S} + \| v_2 \|_{X_S} \}) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \int_0^t \|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S} \}) ds \\
& \leq \frac{1}{3} \int_0^t \left(\|h - \tilde{h}\|_{C([0,S])} (1 + \frac{1}{2} \{ \|h\|_{C([0,S])} + \|\tilde{h}\|_{C([0,S])} \}) \right. \\
& \quad + \|w_1 - v_1\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_1\|_{X_S} + \|v_1\|_{X_S} \}) \\
& \quad + \|w_2 - v_2\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_2\|_{X_S} + \|v_2\|_{X_S} \}) \\
& \quad \left. + \|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S} \}) \right) ds,
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S} & \leq \frac{4}{3} \int_0^t \left(\|h - \tilde{h}\|_{C([0,S])} (1 + \frac{1}{2} \{ \|h\|_{C([0,S])} + \|\tilde{h}\|_{C([0,S])} \}) \right. \\
& \quad + \|w_1 - v_1\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_1\|_{X_S} + \|v_1\|_{X_S} \}) \\
& \quad + \|w_2 - v_2\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_2\|_{X_S} + \|v_2\|_{X_S} \}) \\
& \quad \left. + \|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S} \}) \right) ds \\
& + \int_0^t \left(\|w_1 - v_1\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_1\|_{X_S} + \|v_1\|_{X_S} \}) \right. \\
& \quad + \|w_2 - v_2\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_2\|_{X_S} + \|v_2\|_{X_S} \}) \\
& \quad \left. + \|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S} \}) \right) ds \\
& \leq 3 \int_0^t \left(\|h - \tilde{h}\|_{C([0,S])} (1 + \frac{1}{2} \{ \|h\|_{C([0,S])} + \|\tilde{h}\|_{C([0,S])} \}) \right. \\
& \quad + \|w_1 - v_1\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_1\|_{X_S} + \|v_1\|_{X_S} \}) \\
& \quad + \|w_2 - v_2\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_2\|_{X_S} + \|v_2\|_{X_S} \}) \\
& \quad \left. + \|w_3 - v_3\|_{X_S} (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S} \}) \right) ds.
\end{aligned}$$

Defina las constantes

$$\begin{aligned}
a &= (1 + \frac{1}{2} \{ \|h\|_{C([0,S])} + \|\tilde{h}\|_{C([0,S])} \}) \\
b &= (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_1\|_{X_S} + \|v_1\|_{X_S} \}) \\
c &= (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_2\|_{X_S} + \|v_2\|_{X_S} \}) \\
d &= (1 + \frac{1}{2} \{ \|w_3\|_{X_S} + \|v_3\|_{X_S} \}),
\end{aligned}$$

y $G = \max\{a, b, c, d\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S} &\leq 3G \int_0^t \left(\|h - \tilde{h}\|_{C([0,s])} + \|w_1 - v_1\|_{X_S} + \|w_2 - v_2\|_{X_S} + \|w_3 - v_3\|_{X_S} \right) ds \\ &\leq 3G \int_0^t \left(\|(w_1, w_2, w_3, h) - (v_1, v_2, v_3, \tilde{h})\|_{Y_S} \right) ds \\ &\leq 3G \int_0^t \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S} ds. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la desigualdad de Gronwall (2.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S} &\leq \|\mathbf{B}(\mathbf{w}) - \mathbf{B}(\mathbf{v})\|_{Y_S} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Entonces $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{Y_S} = 0$, de donde $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, para todo $t \in [0, T]$ y por lo tanto la solución es única en Y_T . $\square$

Capítulo 5

Experimentos numéricos

En este capítulo presentamos los resultados de algunas simulaciones realizados con los problemas de valor inicial-frontera estudiados en el presente trabajo.

5.1. Simulación de la ecuación BBM en una semi-recta

Para ilustrar las soluciones del problema de valor inicial asociado a la ecuación BBM, calculamos numéricamente mediante la utilización del software Mathematica de Wolfram, haciendo uso de la rutina **NDSolve**, la cual nos permite aproximar la solución del problema de valor inicial-frontera (3.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t + \beta u_x + \gamma u u_x - \alpha^2 u_{xxt} = 0 \quad x \in [0, L] \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = \text{sen}(0.5t) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \end{array} \right.$$

donde $\alpha = 1, \gamma = 1, \beta = 1$, y con $t \in [0, 160]$. Los resultados se encuentran en la Figura 5.1. Observe que el movimiento es producido por el generador de ondas de tipo sinusoidal colocado en el extremo del canal $x = 0$. Luego conforme pasa el tiempo, la onda va propagándose hacia la derecha y se presentan una secuencia de oscilaciones típicas en las ecuaciones del tipo dispersivo tal como la ecuación BBM. La rutina **NDSolve** de Mathematica utiliza el método de líneas para transformar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales dado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de los valores de la función $u(x, t)$ en una malla de puntos x en el intervalo $[0, L]$. La condición de decaimiento en infinito para $u(x, t)$ se implementa como $u(L, t) = 0$, donde parámetro L se escoge suficientemente grande. En este caso se toma $L = 300$.

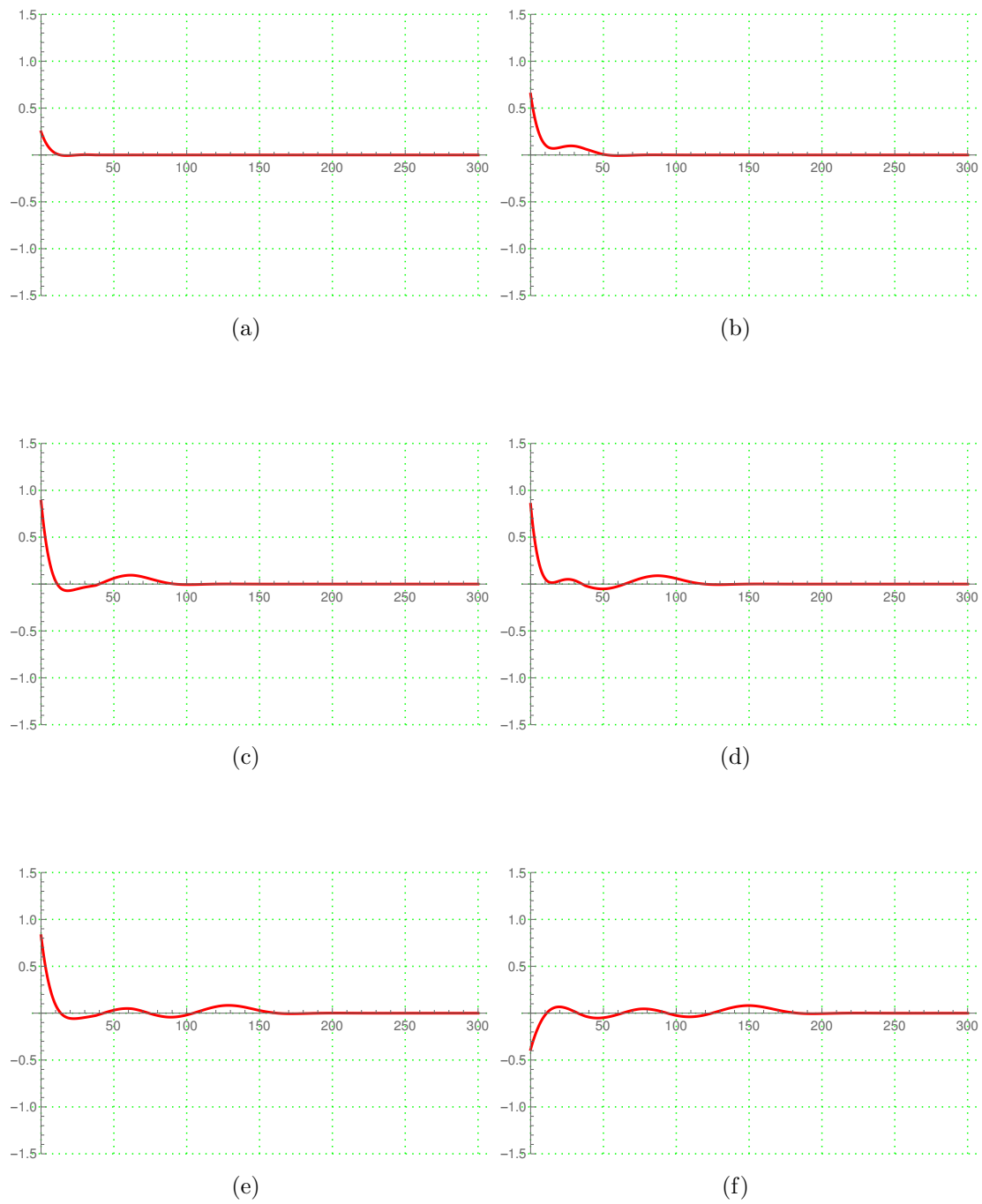


Figura 5.1. Solución numérica $u(x, t)$ de la ecuación BBM en la semirrecta en los tiempos $t = 0.5$, $t = 30$, $t = 65$, $t = 90$, $t = 130$, $t = 150$.

5.2. Simulación con el modelo para la propagación de ondas en una bifurcación

En esta sección, exploramos del punto de vista numérico la solución del sistema

$$\begin{aligned} u_{i,t} - u_{i,txt} + \sigma_i u_{i,x} + \sigma_i u_i u_{i,x} &= 0, \quad x \geq 0, t \geq 0, \\ u_1 &= u_2 = u_3, \quad u_{1,x} + u_{2,x} + u_{3,x} = 0, \quad \text{en } x = 0, t \geq 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u_i(x, t) &= 0, \\ u_i(x, 0) &= g_i(x), \quad x \geq 0, t \geq 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

para $i = 1, 2, 3$, $\sigma_1 = -1, \sigma_2 = \sigma_3 = +1$, cuya existencia y unicidad fue establecida en el capítulo anterior. Consideramos el caso particular en que $g_1(x) = g(x), g_2(x) = g_3(x) = 0$, donde $g(x)$ (elevación en el canal de entrada) es la función con soporte compacto dada por

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(x-20)^2-1}\right), & |x-20| < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para la implementación numérica, es conveniente introducir la siguiente variable

$$U = u_1 + u_2 + u_3.$$

Es claro que mediante este cambio de variable, una vez encontrados u_1, u_2, U , podemos calcular la componente u_3 .

Con esto el sistema (5.1) en las variables u_1, u_2, U puede escribirse como

$$\begin{aligned} u_{1,t} - u_{1,txt} - u_{1,x} - u_1 u_{1,x} &= 0, \\ u_{2,t} - u_{2,txt} + u_{2,x} + u_2 u_{2,x} &= 0, \\ U_t - u_{1,t} - u_{2,t} + U_x - u_{1,x} - u_{2,x} + (U - u_1 - u_2)(U_x - u_{1,x} - u_{2,x}) - \\ &\quad (U_{txt} - u_{1,txt} - u_{2,txt}) = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

para $x \geq 0, t \geq 0$, sujeto a las condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= g(x), \quad u_2(x, 0) = 0, \quad U(x, 0) = g(x), \quad x \geq 0, \\ U_x &= 0, \quad u_1 = u_2, \quad U = 3u_1, \quad x = 0, t \geq 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u_1(x, t) &= \lim_{x \rightarrow \infty} u_2(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Es importante destacar que la condición de frontera de balance de flujo en la formulación original (5.1) introduce fuerte inestabilidad numérica que se origina en la interface $x = 0$. En contraste, la formulación dada en (5.2)-(5.3) puede resolverse sin dificultad numérica usando la rutina **NDSolve**. Análogamente a lo que se hizo con la ecuación BBM escalar, la condición de decaimiento cuando $x \rightarrow \infty$ que se exige en las componentes u_1, u_2, U se implementan numéricamente como

$$u_1(L, t) = u_2(L, t) = U(L, t) = 0,$$

con $L > 0$ suficientemente grande. En ese experimento numérico se tomó $L = 70$. Así, el dominio espacial computacional es el intervalo $[0, 70]$.

En las Figuras 5.2, 5.3, se presentan los resultados de las simulaciones en diferentes tiempos. Observe que aquí se están graficando las variables originales en el problema, es decir, $\bar{u}_1(x, t) = u_1(-x, t)$ junto con $\bar{u}_2(x, t) = u_2(x, t)$. Por simetría, tenemos que $\bar{u}_3(x, t) = \bar{u}_2(x, t)$.

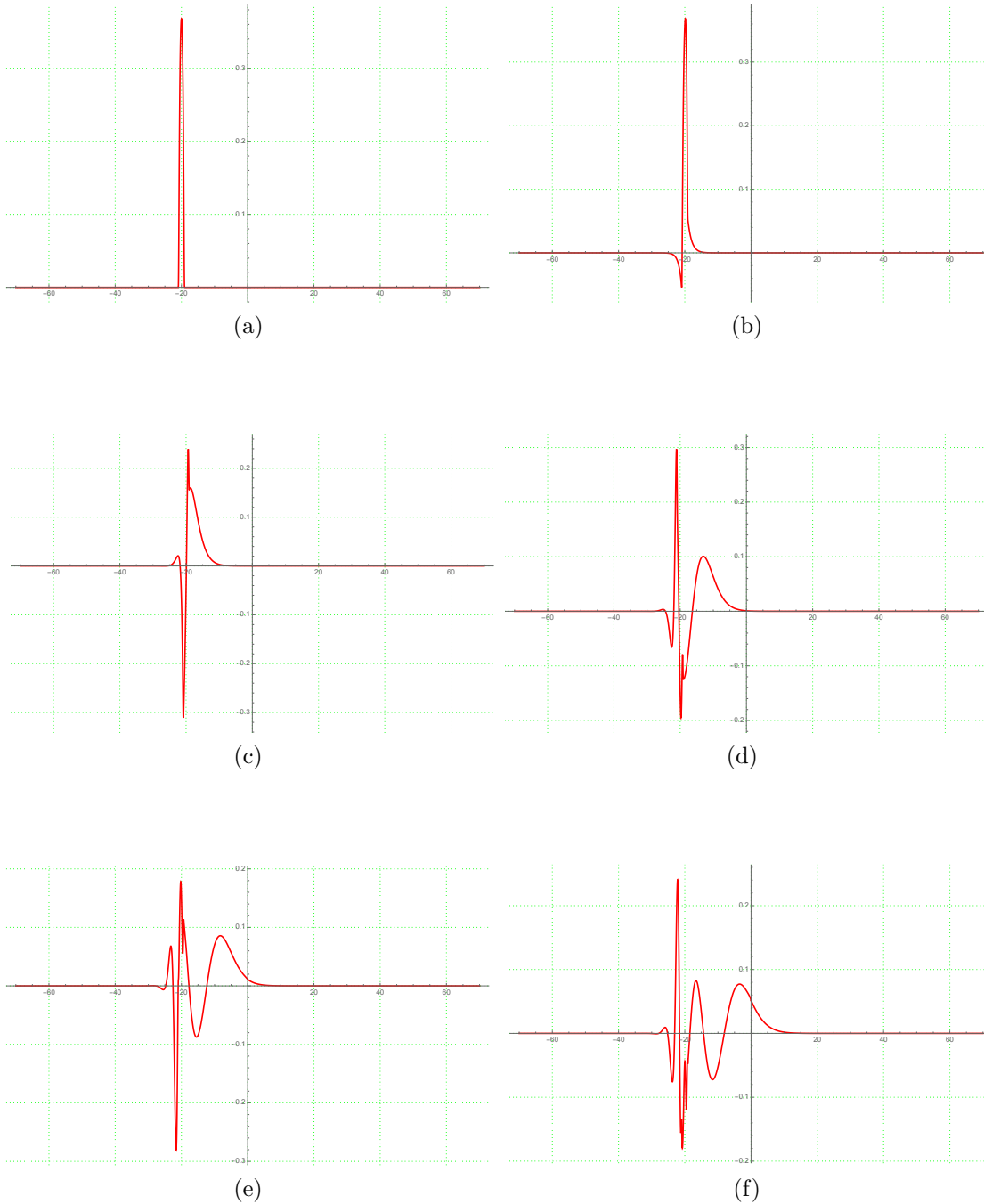


Figura 5.2. Solución numérica del modelo de BBMs en una bifurcación en los tiempos $t = 0$, $t = 0.5$, $t = 4$, $t = 10$, $t = 15$, $t = 20$. En cada gráfica, en $x \leq 0$ se encuentra la componente $\bar{u}_1(x, t)$ y en $x \geq 0$ se encuentra la componente $\bar{u}_2(x, t) = \bar{u}_3(x, t)$.

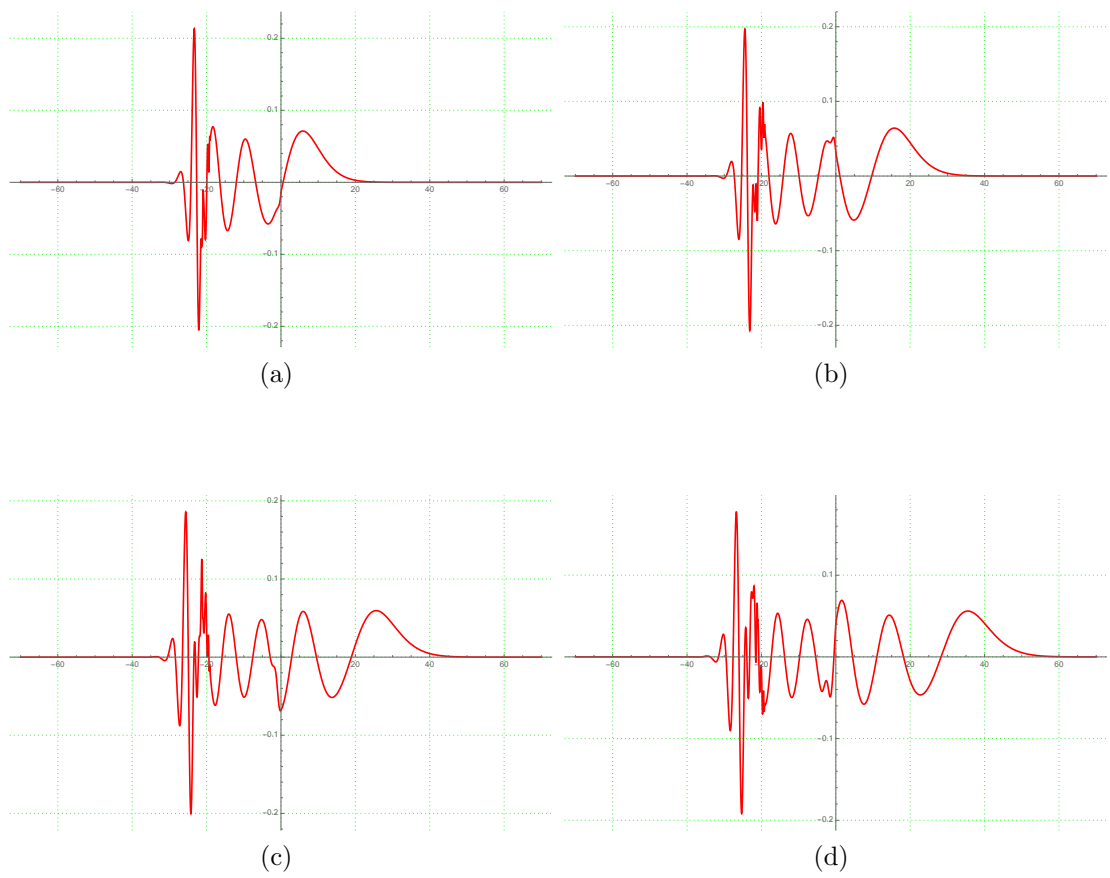


Figura 5.3. Solución numérica del modelo de BBMs en una bifurcación en los tiempos $t = 30$, $t = 40$, $t = 50$, $t = 60$. En cada gráfica, en $x \leq 0$ se encuentra la componente $\bar{u}_1(x, t)$ y en $x \geq 0$ se encuentra la componente $\bar{u}_2(x, t) = \bar{u}_3(x, t)$.

Capítulo 6

Conclusiones

1. Se realizó un estudio introductorio del punto de vista analítico y numérico de dos modelos uni-dimensionales para la propagación de ondas en un canal, considerando efectos dispersivos y no lineales.
2. Ambos problemas considerados permitieron ser reformulados en una forma integral, aprovechando las buenas propiedades del operador diferencial $I - \partial_x^2$ en un intervalo del cual es posible calcular explícitamente la correspondiente función de Green.
3. Utilizamos el teorema punto fijo de Banach para establecer la existencia y unicidad de los problemas de valor de frontera estudiados en el presente trabajo, aplicándolo a la correspondiente formulación integral del modelo.
4. Se realizó una exploración numérica preliminar con los modelos utilizando el software Mathematica de Wolfram el cual demostró ser muy eficiente en la aproximación numérica de problemas de valor inicial-frontera asociados a ecuaciones diferenciales parciales en una dimensión. Un posible trabajo futuro sería comparar la solución numérica en el caso del modelo uni-dimensional para el canal con bifurcación con otros modelo Boussinesq 2-dimensionales conocidos en el caso con simetría considerado. En el caso del canal con bifurcación, destacamos la dificultad numérica que surgió, relativa a las condiciones de frontera prescritas en la interface $x = 0$, las cuales provocan la aparición temprana de inestabilidad numérica. Esto fue resuelto realizando una formulación apropiada del sistema.

Bibliografía

- [1] T. B. Benjamin, J. L. Bona and J. J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, 272 (1972), 47–78.
- [2] J. L. Bona and R. C. Cascaval. Nonlinear Dispersive Waves on trees, *Canadian Applied Math. Quarterly*, vol. 16, No. 1, (2008), pp. 1-18.
- [3] J. L. Bona, P. J. Bryant, A mathematical model for long wave generated by wave-makers in nonlinear systems, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 73 (1973), 391–405.
- [4] L. C. Evans (1997). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, pp. 412-424.
- [5] F. Linares, G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equation Second Edition* December 15 del 2014
- [6] J.L. Bona and V.A. Dougalis, An initial-and boundary-value problem for a model equation for propagation of long waves, *J. Math. Anal. Appl.* 75 (1980), pp. 503-522.
- [7] J.L. Bona, S.M. Sun and B.-Y. Zhang. A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, *Comm. PDE* 28(7 & 8)(2003), pp. 1391-1436.
- [8] J.L. Bona, W. G. Pritchard, L. R. Scott, A comparison of solutions of two model equations for long waves, *Lectures in Applied Math.* 20 (1983), pp. 235-267.
- [9] K. El Dika and Y. Martel, Stability of N solitary waves for the generalized BBM equation, 1(4) (2004), pp. 4
- [10] J. L. Bona, H. Chen, S. M. Sun, B.-Y. Zhang, Comparison of quarter-plane and two point boundary value problems: The BBM-Equation, *Discrete and Cont. Dyn. Sys.* 13(4) (2005), 921–940.
- [11] H. Brézis: *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, (1984).
- [12] Gabriel N. Gatica: *Introducción al Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*, Editorial Reverte, (2014).

- [13] Kreyszig, E. Introductory functional analysis with applications, vol. 1. wiley New York, 1978.