



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CIUDAD UNIVERSITARIA MELÉNDEZ

PROPIEDADES ÓPTICAS DE CRISTALES FOTÓNICOS ANULARES, TERNARIOS CON COMPONENTES SUPERCONDUCTORES Y DIELÉCTRICOS

JORGE MARIO ESCOBAR AGUDELO

PROYECTO DE TRABAJO DE GRADO
PRESENTADO AL PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

SANTIAGO DE CALI, COLOMBIA
31 DE MARZO DE 2023



**Universidad
del Valle**

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CIUDAD UNIVERSITARIA MELÉNDEZ

PROPIEDADES ÓPTICAS DE CRISTALES FOTÓNICOS ANULARES, TERNARIOS CON COMPONENTES SUPERCONDUCTORES Y DIELECTRICOS

JORGE MARIO ESCOBAR AGUDELO

PROYECTO DE TRABAJO DE GRADO

PRESENTADO AL PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

Director:

Dr. Jesús María Calero Quintero
Universidad del Valle, Colombia

Co-Director:

Brayan Fernando Díaz
Universidad del Valle, Colombia

SANTIAGO DE CALI, COLOMBIA
31 DE MARZO DE 2023

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

To my inner child

Agradezco a mis padres y hermana por el apoyo y todos los sacrificios que hacen por mí, soy afortunado de tener a mi lado a una valiosa familia que ha contribuido inmensamente a que pueda alcanzar cada sueño y objetivo en mi vida. Agradezco a Tommy, quien lastimosamente ya no está con nosotros, por su compañía durante tantos años, me llenó de felicidad, mucho valor y supo confortarme como nadie más. A mis familiares con quienes puedo contar, gracias por estar presentes, por cada palabra de aliento y por confiar en mí.

Especialmente quiero dedicar este y cada triunfo a mis amigos, a quienes les debo tanto, empezando por mi mejor amiga Mayra con quien siempre puedo contar y ha permanecido por tanto tiempo a mi lado, a Melissa e Isabella por haberse convertido en parte indispensable de todo este proceso, a Daniel por brindarme el privilegio de su compañía y pasar junto a mí tanto los momentos buenos como los difíciles, a cada miembro del “GEF”, la “Real Sociedad” y sobretodo a “QOMOLOMO”, es por cada uno de ustedes que he crecido y aprendido tanto, son mi espacio seguro, mi red de apoyo. Atesoro cada momento con ustedes, nunca los olvidaré y de todos me llevo invaluable aportes.

También quiero agradecer enormemente a mi director Jesús María Calero, quien es una gran inspiración para mí, me apoyó activamente en este proceso y ha sido un ejemplar orientador tanto en los cursos como en el proyecto de investigación. Gracias a los miembros del Grupo de Física Teórica del Estado Sólido por haber sido un ameno equipo de trabajo durante todo este tiempo, a cada compañero que conocí durante la carrera y a la Universidad del Valle por la formación, nunca olvidaré mi paso por mi alma mater.

RESUMEN

En el presente trabajo de grado se pretende estudiar las propiedades ópticas de cristales fotónicos ternarios con geometría anular, conformados por cortezas cilíndricas coaxiales de materiales superconductores y dieléctricos alternadas.

Para caracterizar la dependencia de estas propiedades con respecto a parámetros externos, tales como la temperatura y geometría del cristal, se obtendrá la ecuación maestra para los campos eléctrico y magnético a partir de las ecuaciones de Maxwell, llegando de esta forma a un problema de valores propios, cuyas soluciones serán calculadas numéricamente usando el método de la matriz de transferencia. Los superconductores serán introducidos en el sistema a partir del modelo de los dos fluidos. De esta forma, es posible estudiar propiedades tales como transmitancia o reflectancia en función de la frecuencia de la radiación incidente, y construir la estructura de bandas fotónicas del cristal.

La respuesta óptica observada permite diferenciar los efectos para polarización TE y TM, en donde en este último caso se presentan nuevas brechas fotónicas, una asociada a cada superconductor. Estas responden a cambios de temperatura variando su posición en el espectro electromagnético, además su ancho puede ser modificado variando parámetros como el número azimutal, el radio interno del cristal, el índice de refracción del dieléctrico y el grosor de las capas superconductoras y dieléctricas.

Palabras clave: cristales fotónicos, brecha de bandas fotónicas, matriz transferencia, superconductores, ondas electromagnéticas.

ÍNDICE GENERAL

1. Introducción	1
2. Método de la Matriz Transferencia en Sistemas Planos Unidimensionales	4
2.1. Ondas electromagnéticas en la frontera entre dos medios	4
2.2. Coeficientes de reflexión y transmisión	6
2.2.1. Polarización TE	6
2.2.2. Polarización TM	8
2.3. Incidencia en un arreglo multicapa	9
2.3.1. Placa entre dos medios distintos	9
2.3.2. Propagación en un sistema periódico	11
3. Propagación en un Medio con Geometría Anular	13
3.1. Ecuaciones maestras en coordenadas cilíndricas	14
3.2. Solución de la ecuación maestra por separación de variables	15
3.2.1. Funciones de Bessel	15
3.3. Construcción de la matriz transferencia	17
3.4. Matriz transferencia en la base de ondas propagantes.	18
3.4.1. Coeficientes de reflexión y transmisión	20
3.4.2. Coeficientes de reflexión y transmisión para estructuras cilíndricas en capas	20
3.5. Implementación del modelo en el método numérico	22
4. Descripción de los Superconductores	24
4.1. Modelo de los dos fluidos	24
4.2. Ecuaciones de London-London	26
4.3. Superconductor en un campo magnético	27
4.3.1. Campo perpendicular al superconductor	27
4.3.2. Campo paralelo al superconductor	27
4.4. Teoría de Ginzburg-Landau	28
4.5. Índice de refracción de un superconductor	30
4.6. Brecha energética superconductora	30
4.7. Anisotropía	31

5. Resultados	32
5.1. Cristal compuesto por YBCO, SrTiO ₃ y BSCCO	32
5.1.1. Comparación sistema plano y anular	33
5.1.2. Variación del número azimutal m	34
5.1.3. Variación del radio del centro del cilindro ρ_0	35
5.1.4. Variación del índice de refracción del dieléctrico n_D	36
5.1.5. Variación de la temperatura T	37
5.1.6. Variación del espesor de las capas d	38
5.2. Cristal compuesto por YBCO, SrTiO ₃ y Hg-1223	39
5.2.1. Variación del radio del centro del cilindro ρ_0	39
5.2.2. Variación del índice de refracción del dieléctrico n_D	40
5.2.3. Variación de la temperatura T	41
5.2.4. Variación del espesor de las capas d	42
6. Conclusiones y perspectivas	44

CAPÍTULO

1

INTRODUCCIÓN

Los cristales fotónicos son estructuras cuyo índice de refracción varía periódicamente en el espacio en una, dos o tres dimensiones; en el caso unidimensional la estructura puede construirse a partir de láminas delgadas cuyo grosor puede también obedecer a una variación periódica [1].

Dicha periodicidad rompe la simetría de traslación continua produciendo efectos no triviales sobre la propagación de ondas electromagnéticas a través del cristal. Este comportamiento presenta características análogas al transporte de electrones a través de materiales cristalinos [2], el cual ha sido ampliamente estudiado desde la mecánica cuántica con base en el teorema de Bloch, describiendo la función de onda del electrón como el producto entre una función asociada a la periodicidad de la red y una onda plana [3]. De esta forma, como se presentan bandas permitidas y brechas energéticas prohibidas para el transporte electrónico en un material cristalino, existen también ciertos rangos de frecuencia en los cuales no se propaga la radiación electromagnética para cristales fotónicos en los cuales las diferencias entre los valores de los índices de refracción son lo suficientemente grandes, estos rangos se denominan *gaps* o *brechas fotónicas*. Esto significa que en los cristales fotónicos es posible introducir el concepto de *estructura de bandas fotónicas*, tal como ocurre con la estructura de bandas energéticas en un cristal [2].

Debido a que la respuesta óptica de los cristales fotónicos es altamente sensible a las variaciones de parámetros geométricos y externos como temperatura y campo magnético aplicado, entre otros, es posible tener cierto grado de control operacional sobre las brechas entre bandas fotónicas al variar dichos mecanismos externos. Además, estas estructuras pueden estar formadas por dieléctricos, superconductores, fluidos magnéticos, semiconductores, grafeno, entre otros, de forma que puedan ser usadas las propiedades de los materiales constituyentes para modificar su respuesta óptica [1]. El interés en este tipo de sistemas no solo se da desde el punto de vista de la investigación científica, sino también en la implementación y desarrollo de tecnologías en diversos campos como la medicina, química, telecomunicaciones y muchos más, debido al control que los cristales permiten sobre las ondas electromagnéticas, muy útil en la construcción de reflectores y filtros ópticos, especialmente en el caso unidimensional debido a que son más factibles en su fabricación que sus análogos bi o tridimensionales [4, 5, 6, 7].

Este tipo de estructuras empezaron a estudiarse desde 1888, cuando Lord Rayleigh mostró la

existencia de las brechas en los cristales fotónicos unidimensionales [8]. El término cristal fotónico no fue usado oficialmente por la comunidad científica sino hasta 1987, cuando Eli Yablonovitch [9] y Sajeev John [10] publicaron sus artículos, independientemente, introduciendo el concepto. Gracias a estos resultados se produjo un notable interés científico motivado por las potenciales ventajas tecnológicas que prometía el control fotónico en materiales sólidos. Además, se han desarrollado investigaciones con distintas geometrías y combinaciones de materiales, las cuales por mucho tiempo se limitaban a lo teórico debido a la compleja elaboración de estas estructuras. Los primeros resultados experimentales fueron obtenidos hasta 1991 por el mismo Yablonovitch y sus compañeros, quienes mostraron la primera brecha fotónica en tres dimensiones [11].

En particular, un cristal fotónico con geometría cilíndrica permitiría confinar una onda electromagnética dentro de la estructura, como en un reflector de Bragg, si su frecuencia se encuentra dentro de una brecha fotónica. A finales de los años 90, Kaliteevski *et. al.* desarrollaron el método de la matriz transferencia para ondas electromagnéticas cilíndricas en reflectores de Bragg, añadiendo el número azimutal m como un parámetro del sistema. Así, la estructura de bandas fotónicas puede ser estudiada a partir del espectro de reflectancia [12]. Desde la publicación de ese trabajo se ha venido usando dicho método en gran cantidad de investigaciones recientes:

En 2009 Mei-Soong Chen y sus compañeros añadieron una capa superconductora a un cristal anular binario con un material dieléctrico, encontrando una brecha fotónica adicional alrededor de la zona de permitividad cero cuando la onda electromagnética estaba en polarización TM, esto debido a la interacción entre el componente eléctrico de la onda y los superelectrones del superconductor. Dicha brecha no aparecía en el sistema planar análogo ni en el anular con polarización TE, además encontraron que las brechas fotónicas en las estructuras cilíndricas coinciden con las de un cristal fotónico planar cuando el número azimutal es cero [13]. La incorporación de este tipo de materiales empezó a interesar a los investigadores desde 1999 [14] debido a sus potenciales aplicaciones tecnológicas, ya que en los superconductores el índice de refracción es sensible a parámetros externos como la temperatura o la frecuencia de la onda electromagnética incidente. El índice de refracción de un material superconductor puede ser descrito a partir del modelo de los dos fluidos [15].

Para principios del 2016, Srivastava y Aghajamali añadieron una tercera capa, de material dieléctrico, a la estructura anular, ampliando la cantidad de parámetros geométricos que pueden ser variados [16]. Un año después, en 2017, Sreejith y sus compañeros consideraron cristales fotónicos ternarios unidimensionales, con geometría plana, con una celda unitaria compuesta por una capa de dieléctrico y dos capas superconductoras de diferente temperatura crítica, evidenciando la sensibilidad de las brechas fotónicas a características como el ancho de las capas constituyentes [17]. El objetivo de nuestro trabajo de grado es continuar en esta línea de investigación; en el grupo de Física Teórica del Estado Sólido en la Universidad del Valle se han estudiado sistemas anulares binarios con un superconductor y un dieléctrico [18] y cristales 2D con superconductores [19], con base en estos trabajos previos se modela la configuración de dos superconductores y un dieléctrico a un sistema anular ternario como el mostrado en la figura 1.1.

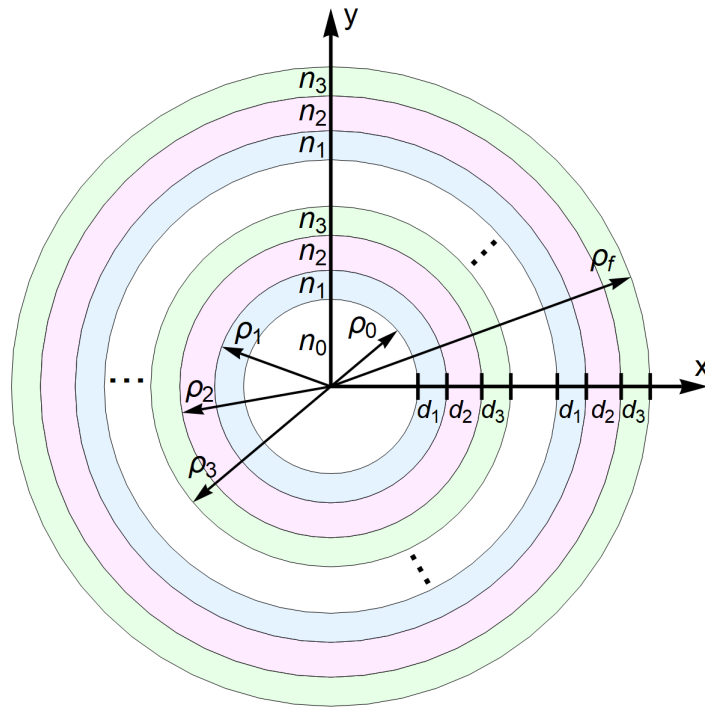


Figura 1.1: Esquema del cristal fotónico coaxial. Se analizará un sistema en donde la periodicidad está dada por tres capas cilíndricas de materiales con índices de refracción distintos entre sí, en donde se estudiarán distintas combinaciones de superconductores y dieléctricos [16].

El cristal fotónico anular se construye a partir de tres capas cilíndricas delgadas en un arreglo coaxial en donde la variación periódica del índice de refracción es en función de la coordenada radial ρ . La periodicidad se establecerá con base en tres materiales: un dieléctrico con índice de refracción n_2 de ρ_1 a ρ_2 y dos superconductores con índice de refracción n_1 y n_3 de ρ_0 a ρ_1 y de ρ_2 a ρ_3 , respectivamente. El centro del cilindro se tomará con el índice de refracción del vacío n_0 al igual que el exterior.

El objetivo de nuestro trabajo es estudiar cómo varían las brechas fotónicas al cambiar los parámetros externos y geométricos de nuestro cristal. Dichas brechas pueden ser estudiadas a partir del espectro de reflectancia, el cual se obtiene estudiando el comportamiento de las ondas electromagnéticas en cada interfaz, concepto que se desarrollará en el próximo capítulo. Sin embargo, los sistemas anulares requieren un formalismo y consideraciones distintas, por lo que en el capítulo 3 se estudiará cómo obtener teórica y numéricamente el espectro de reflectancia en coordenadas cilíndricas. Los materiales superconductores tienen propiedades que deben ser introducidas en el modelo, estas serán desarrolladas en el capítulo 4. Por último, se analizarán los resultados y conclusiones al modelar numéricamente los cristales fotónicos ternarios, anulares con distintos componentes superconductores y dieléctricos, variando el número azimutal, el radio del centro del cilindro, la temperatura, el índice de refracción del dieléctrico y los espesores de las tres capas para polarización TE y TM en cada caso. La pregunta de investigación que pretende responder nuestro trabajo a partir de la modelación del sistema es ¿cómo se modifican las brechas fotónicas de los cristales fotónicos previamente descritos ante la variación de mecanismos externos de control tales como la composición, geometría y temperatura?

CAPÍTULO

2

MÉTODO DE LA MATRIZ TRANSFERENCIA EN SISTEMAS PLANOS UNIDIMENSIONALES

Si una onda electromagnética busca entrar a un cristal fotónico, pero su frecuencia se encuentra dentro de una brecha en la estructura de bandas fotónicas, no podría propagarse en el material viéndose reflejada, su longitud de penetración se estudiará en el capítulo 4 y si no hay pérdidas energéticas se asume reflexión total en las brechas. Este hecho nos permite estudiar en su totalidad las brechas entre bandas fotónicas dependiente de la frecuencia a partir de la reflectancia, la cual puede ser calculada con base en el coeficiente de reflexión usando los componentes de la matriz transferencia. En este capítulo se construirá dicha matriz en una interfaz, luego se añadirá una placa de longitud finita entre dos medios para construir la matriz al presentarse más de un cambio de propiedades en el sistema, para finalizar generalizando por completo el problema hallando la matriz en una estructura periódica plana.

2.1. Ondas electromagnéticas en la frontera entre dos medios

Las ondas electromagnéticas al incidir en los cristales fotónicos deben atravesar la interfaz entre medios con propiedades distintas, como lo son sus permitividades eléctricas ϵ_1 y ϵ_2 , y permeabilidades magnéticas μ_1 y μ_2 . Es posible describir los campos eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$;

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]}, \quad (2.1.1a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t]}. \quad (2.1.1b)$$

Donde $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ son las amplitudes y la direcciones de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, respectivamente, k es el número de onda y ω su frecuencia. Dadas las condiciones de la figura 2,1 el vector de onda tiene solamente dos componentes en coordenadas cartesianas: $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$.

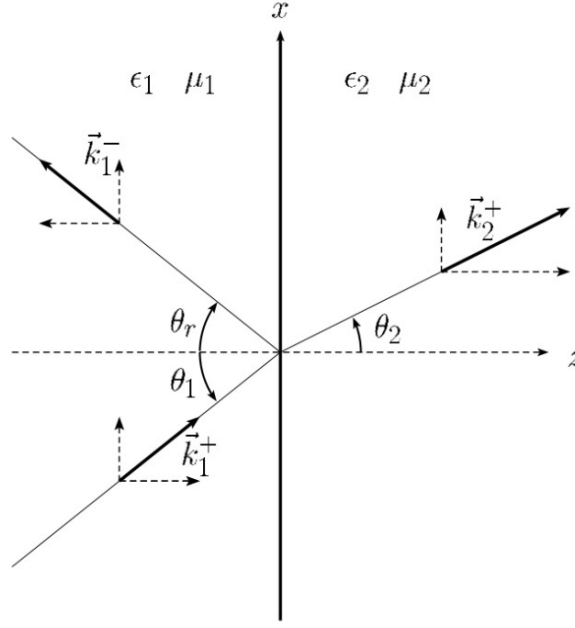


Figura 2.1: Incidencia de una onda electromagnética desde un medio con permitividad ϵ_1 y permeabilidad μ_1 hacia otro con permitividad ϵ_2 y permeabilidad μ_2 [20].

Con el objetivo de analizar el comportamiento de las ondas en la interfaz se usan las condiciones de frontera de la componente tangencial de los campos eléctrico y magnético,

$$\mathbf{E}_1^\perp = \mathbf{E}_2^\perp, \quad (2.1.2a)$$

$$\mathbf{H}_1^\perp = \mathbf{H}_2^\perp, \quad (2.1.2b)$$

respectivamente. Por lo que la componente x del vector de onda debe ser igual en la frontera entre ambos medios, así que

$$k_{x1} = k_{x2} = k_x. \quad (2.1.3)$$

Sustituyendo (2.1.1) en las ecuaciones de Maxwell puede establecerse la relación entre el número de onda y su frecuencia, obteniendo la relación de dispersión

$$k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}. \quad (2.1.4)$$

Dicha relación juega un papel importante en la descripción de las brechas fotónicas¹, por ahora describiremos la relación de dispersión en ambos medios

$$\frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} = k_1^2 = k_x^2 + k_{z1}^2, \quad (2.1.5a)$$

$$\frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} = k_2^2 = k_x^2 + k_{z2}^2, \quad (2.1.5b)$$

donde $n_j = \sqrt{\mu_j \epsilon_j}$. De acuerdo a la figura 2.1, es posible ahora definir un ángulo de incidencia θ_1 y uno de refracción θ_2 a partir de las relaciones:

¹Esta está relacionada con los valores propios de las ecuaciones maestras que se desarrollarán en el capítulo 3. Además clasificando los números de bandas de las ondas y estudiando el diagrama de bandas a partir del gráfico del vector de onda frente a la frecuencia del modo, pueden observarse gráficamente las brechas como discontinuidades en las bandas, este enfoque se analiza a mayor profundidad en el capítulo 3 del libro de Joannopoulos [2].

$$\tan \theta_1 = \frac{k_x}{k_{z1}}, \quad (2.1.6a)$$

$$\tan \theta_2 = \frac{k_x}{k_{z2}}. \quad (2.1.6b)$$

Una vez definidos estos ángulos, se usan (2.1.3) y (2.1.5) para obtener la razón

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}, \quad (2.1.7)$$

conocida como ley de Snell, a partir de la cuál se obtendrán los coeficientes de reflexión y transmisión.

Para hallar el ángulo de reflexión se toma en cuenta que para que se cumpla la condición de frontera de la componente tangencial en todo el plano $z = 0$, las tres ondas deben tener la misma fase, por lo que $k_x^+ = k_x^-$, lo que por ley de Snell y relación de dispersión nos permite escribir.

$$k_1 \sin \theta_1 = k_1 \sin \theta_r, \quad (2.1.8)$$

y así $\theta_1 = \theta_r$, por lo que k_{z1}^+ y k_{z1}^- son iguales en valor absoluto pero en dirección opuesta.

2.2. Coeficientes de reflexión y transmisión

De forma general, los vectores de campo presentes en las ondas electromagnéticas pueden describirse como combinación lineal de componentes paralelas y perpendiculares al plano de incidencia, por lo que el caso en el que el campo eléctrico sea perpendicular a dicho plano, *polarización transversal eléctrica* (TE), y cuando sea el campo magnético el perpendicular, *polarización transversal magnética* (TM), conforman una base a partir de la cual puede describirse cualquier onda electromagnética arbitraria. Es por esto que vale la pena analizar ambos casos de forma independiente para describir nuestro sistema de la forma más general posible.

2.2.1. Polarización TE

En este caso, es posible describir el campo eléctrico de forma $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ y al campo magnético como $\mathbf{H} = H_x\hat{\mathbf{x}} + H_z\hat{\mathbf{z}}$. Como puede verse en la figura 2.2, se han denotado con $+$ las ondas que se propagan de izquierda a derecha y con $-$ las que se propagan en dirección contraria.

Debido a (2.1.2) debe cumplirse

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-, \quad (2.2.1a)$$

$$H_{x1}^+ + H_{x1}^- = H_{x2}^+ + H_{x2}^-. \quad (2.2.1b)$$

Usando la ley de Faraday descrita en la forma

$$\mathbf{H} = \frac{c}{\mu\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (2.2.2)$$

es posible reescribir la ecuación (2.2.1b) como:

$$-\frac{k_{z1}c}{\mu_1\omega}E_1^+ + \frac{k_{z1}c}{\mu_1\omega}E_1^- = -\frac{k_{z2}c}{\mu_2\omega}E_2^+ + \frac{k_{z2}c}{\mu_2\omega}E_2^-, \quad (2.2.3)$$

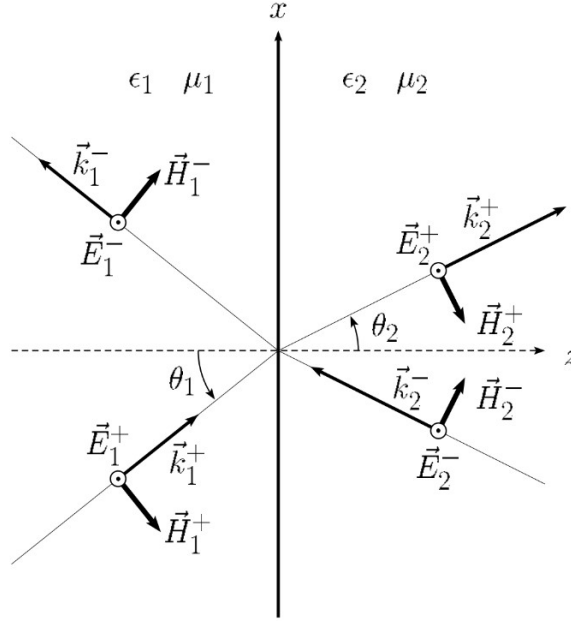


Figura 2.2: Incidencia de la onda electromagnética con polarización TE [20].

a partir de la cual, junto con la ecuación (2.2.1a), puede plantearse el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k_{z1}}{\mu_1} & \frac{k_{z1}}{\mu_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k_{z2}}{\mu_2} & \frac{k_{z2}}{\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix}. \quad (2.2.4)$$

Multiplicando ambas partes de la ecuación a la izquierda por la inversa de la primera matriz, la ecuación queda escrita finalmente:

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{k_{1z}\mu_2}{k_{2z}\mu_1} & 1 - \frac{k_{1z}\mu_2}{k_{2z}\mu_1} \\ 1 - \frac{k_{1z}\mu_2}{k_{2z}\mu_1} & 1 + \frac{k_{1z}\mu_2}{k_{2z}\mu_1} \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}^{TE}} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Se define a $\mathbb{M}^{TE}$ como la *matriz transferencia* entre ambos medios en polarización TE. Esta nos permite describir teóricamente el paso de la onda electromagnética del medio 1 a la región siguiente a partir de las componentes del campo eléctrico y las propiedades de los medios entre los que se está propagando la onda. Esta herramienta es muy útil y ha sido ampliamente usada, como en el caso de la obtención de la ecuación para los estados acotados de un pozo de potencial y su coeficiente de transmisión [21].

En este caso, se usarán las componentes de dicha matriz para hallar los coeficientes de reflexión y transmisión, escribiéndola en la forma:

$$\mathbb{M}^{TE} = \begin{pmatrix} M_{11}^{TE} & M_{12}^{TE} \\ M_{21}^{TE} & M_{22}^{TE} \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Es sabido que cuando la onda E_1^+ incide sobre la interfaz, una parte es reflejada y la otra es transmitida, de aquí que $E_2^- = 0$. Así, pueden usarse (2.2.5) y (2.2.6) para escribir:

$$E_2^+ = M_{11}^{TE} E_1^+ + M_{12}^{TE} E_1^-, \quad (2.2.7a)$$

$$E_2^- = M_{21}^{TE} E_1^+ + M_{22}^{TE} E_1^- = 0. \quad (2.2.7b)$$

Las amplitudes de transmisión t_{TE} y reflexión r_{TE} pueden definirse, entonces, como:

$$t_{TE} = \frac{E_2^+}{E_1^+}, \quad (2.2.8a)$$

$$r_{TE} = \frac{E_1^-}{E_1^+}, \quad (2.2.8b)$$

respectivamente. De esta forma, usando (2.2.7) se obtiene

$$t_{TE} = \frac{\det \mathbb{M}^{TE}}{M_{22}^{TE}}, \quad (2.2.9a)$$

$$r_{TE} = \frac{M_{21}^{TE}}{M_{22}^{TE}}. \quad (2.2.9b)$$

El coeficiente de transmisión T_{TE} está dado por la razón entre los flujos de energía de los dos medios [20], dado por la amplitud del vector de Poynting, de forma que:

$$S_1 = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\mathbf{E}_1^+ \times \mathbf{H}_1^{+*}] = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [E_1^+ H_{x1}^{+*}] = \frac{c^2}{8\pi} \frac{\text{Re} k_{z1}}{\mu_1 \omega} |E_1^+|^2, \quad (2.2.10a)$$

$$S_2 = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [\mathbf{E}_2^+ \times \mathbf{H}_2^{+*}] = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [E_2^+ H_{x2}^{+*}] = \frac{c^2}{8\pi} \frac{\text{Re} k_{z2}}{\mu_2 \omega} |E_2^+|^2. \quad (2.2.10b)$$

Así

$$T_{TE} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\text{Re} k_{z2}}{\text{Re} k_{z1}} |t_{TE}|^2. \quad (2.2.11)$$

Por otro lado, el coeficiente de reflexión R_{TE} puede obtenerse de

$$R_{TE} = |r_{TE}|^2, \quad (2.2.12)$$

de forma que

$$T_{TE} + R_{TE} = 1. \quad (2.2.13)$$

Por lo que se trabajará con (2.2.12) para obtener el espectro de reflectancia y estudiar las brechas fotónicas del cristal. Al depender esta constante de las propiedades de la onda electromagnética, su valor va a ser distinto para cada frecuencia. Así, para los valores de ω en los que $R_{TE} = 1$ se puede decir que hay una brecha fotónica, y en los casos en los que $R_{TE} < 1$ hay transmisión, por lo que la onda puede propagarse parcial o totalmente por el material.

2.2.2. Polarización TM

Para el caso de la polarización transversal magnética el campo eléctrico se describe como $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_z \hat{\mathbf{z}}$ y el campo magnético con su único componente $\mathbf{H} = H_y \hat{\mathbf{y}}$ como se muestra en la figura 2.3.

Siguiendo el mismo procedimiento que en la sección anterior, usando la ley de Ampère en vez de la de Faraday en el paso análogo a (2.2.2), se llega a la matriz transferencia

$$\begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^- \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{k_{1z}\epsilon_2}{k_{2z}\epsilon_1} & 1 - \frac{k_{1z}\epsilon_2}{k_{2z}\epsilon_1} \\ 1 - \frac{k_{1z}\epsilon_2}{k_{2z}\epsilon_1} & 1 + \frac{k_{1z}\epsilon_2}{k_{2z}\epsilon_1} \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}^{TM}} \begin{pmatrix} H_1^+ \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad (2.2.14)$$

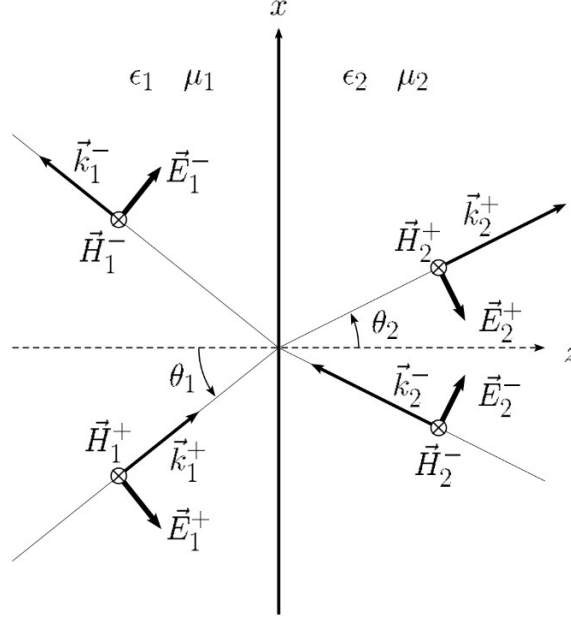


Figura 2.3: Incidencia de la onda electromagnética con polarización TM [20].

a partir de la cual se obtienen las amplitudes de transmisión y reflexión

$$t_{TM} = \frac{\det \mathbb{M}^{TM}}{M_{22}^{TM}}, \quad (2.2.15a)$$

$$r_{TM} = \frac{M_{21}^{TM}}{M_{22}^{TM}}, \quad (2.2.15b)$$

respectivamente, y los coeficientes de transmisión y reflexión

$$T_{TM} = \frac{\epsilon_1 \operatorname{Re} k_{z2}}{\epsilon_2 \operatorname{Re} k_{z1}} |t_{TM}|^2, \quad (2.2.16a)$$

$$R_{TM} = |r_{TM}|^2, \quad (2.2.16b)$$

respectivamente. De esta forma también es posible estudiar las brechas fotónicas en esta polarización. Cualquier onda electromagnética con dirección distinta puede ser descrita como combinación lineal de estos dos casos de polarización, experimentalmente es más conveniente tener la onda polarizada en una sola dirección por lo que a partir de ahora supondremos que lo están y continuaremos analizando ambos casos de forma independiente.

2.3. Incidencia en un arreglo multicapa

En un cristal fotónico las ondas electromagnéticas deben pasar de un medio material a otro en repetidas ocasiones, por lo que es importante modelar los pasos entre las distintas regiones. Iniciamos describiendo el sistema como una placa de longitud ℓ entre dos medios distintos para luego generalizar al sistema periódico de múltiples capas de distinta longitud.

2.3.1. Placa entre dos medios distintos

Analizaremos el sistema descrito en la figura 2.4 en el que se tiene una placa de longitud ℓ con permitividad ϵ_2 y permeabilidad μ_2 en medio de dos regiones con permitividades (ϵ_1, ϵ_3) y permeabilidades (μ_1, μ_3) distintas.

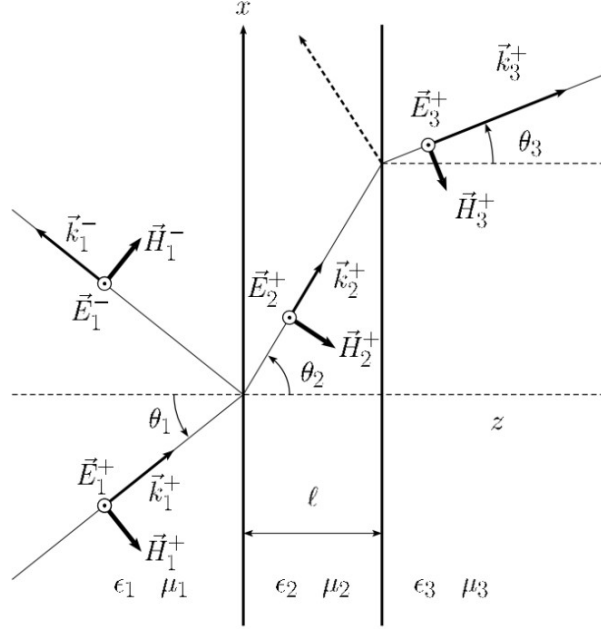


Figura 2.4: Incidencia de una onda electromagnética en una estructura multicapa, en donde se tiene una placa de longitud ℓ en medio de dos medios distintos, se muestra el caso con polarización TE [20].

Calcular los coeficientes de transmisión y reflexión en este caso puede parecer altamente complejo ya que, como se observa en la figura 2.5, se tienen efectos de dispersión dentro de la placa. Esta es una de las ventajas del método de la matriz transferencia, ya que dicha matriz contiene dentro de sí todas las contribuciones de transmisión y reflexión en el sistema [20].

Con el objetivo de construir la matriz transferencia para este sistema recordamos del resultado (2.2.5) que, en polarización TE, el paso de la onda del primer medio a la placa se describe como:

$$\begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix} = \mathbb{M}_{12}^{TE} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}, \quad (2.3.1)$$

denotando $\mathbb{M}_{12}^{TE}$ como la matriz en la interfaz entre el primer y el segundo medio². Una vez la onda cruza la frontera su propagación por el medio homogéneo de espesor ℓ entre las interfaces, puede ser descrita por la matriz

$$\begin{pmatrix} e^{ik_z l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z l} \end{pmatrix}. \quad (2.3.2)$$

Por lo que la propagación hasta el medio 3 quedaría completamente descrita por

$$\begin{pmatrix} E_3^+ \\ E_3^- \end{pmatrix} = \mathbb{M}_{23}^{TE} \begin{pmatrix} e^{ik_z l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z l} \end{pmatrix} \mathbb{M}_{12}^{TE} \begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix}, \quad (2.3.3)$$

de donde es posible obtener

$$\mathbb{M}_{\text{placa}}^{TE} = \mathbb{M}_{23}^{TE} \begin{pmatrix} e^{ik_z l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z l} \end{pmatrix} \mathbb{M}_{12}^{TE} \quad (2.3.4)$$

²No confundir con M_{12}^{TE} que refiere a la componente 12 de la matriz $\mathbb{M}^{TE}$.

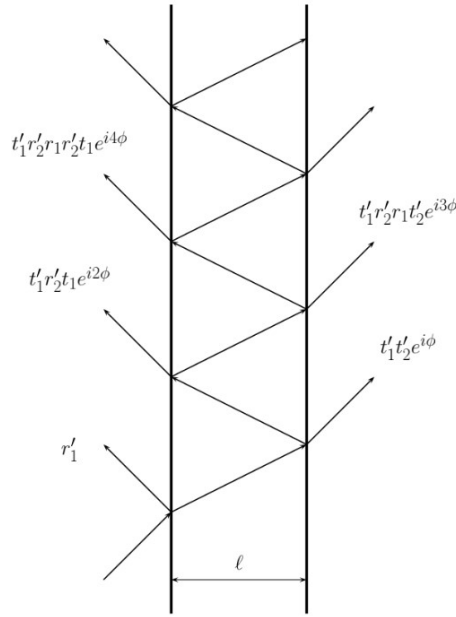


Figura 2.5: Proceso de dispersión de la onda electromagnética incidente en la placa de longitud ℓ entre dos mmedios distintos [20].

como la matriz transferencia que describe el paso de la onda por la placa. De esta forma, es posible obtener las amplitudes y los coeficientes de transmisión y reflexión:

$$T_{TE} = \frac{\mu_1 \operatorname{Re} k_{z3}}{\mu_3 \operatorname{Re} k_{z1}} |t_{TE}|^2 = \frac{\mu_1 \operatorname{Re} k_{z3}}{\mu_3 \operatorname{Re} k_{z1}} \left| \frac{\det M_{\text{placa}}^{TE}}{M_{\text{placa}22}^{TE}} \right|^2, \quad (2.3.5a)$$

$$R_{TE} = |r_{TE}|^2 = \left| \frac{M_{\text{placa}21}^{TE}}{M_{\text{placa}22}^{TE}} \right|^2. \quad (2.3.5b)$$

2.3.2. Propagación en un sistema periódico

En el caso de un sistema en el que se tenga un número κ de medios de espesor ℓ_s que se repiten periódicamente N veces, como en un cristal fotónico, es posible aplicar el mismo método de la placa pero en este caso para definir una *celda unitaria*, para la cual la permitividad eléctrica cumple $\epsilon(z + d) = \epsilon(z)$, con $d = \sum_{s=1}^{\kappa} \ell_s$. El esquema se muestra en la figura 2.6.

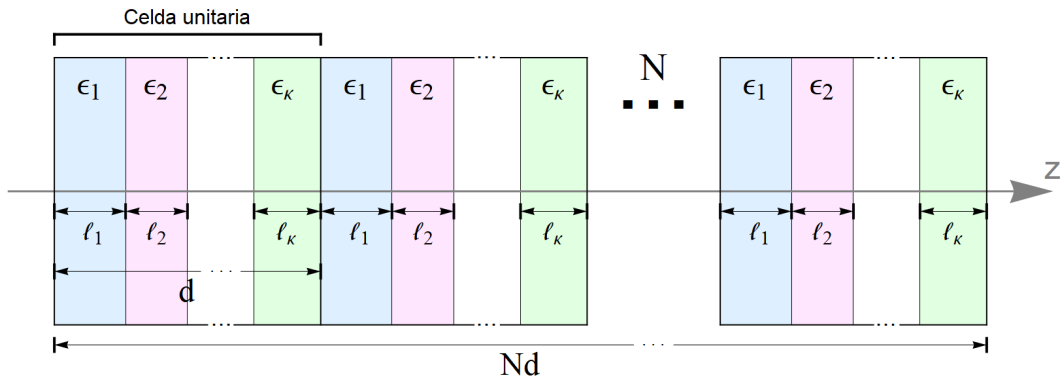


Figura 2.6: Definición de la celda unitaria en un cristal fotónico plano en el que κ medios se repiten N veces.

Así, la onda electromagnética se propagaría en el medio s -ésimo describiéndose con una matriz de la forma (2.3.2), a la cual denominaremos *matriz de propagación* del medio s :

$$\mathbb{P}_s = \begin{pmatrix} e^{ik_{zs}\ell_s} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{zs}\ell_s} \end{pmatrix}. \quad (2.3.6)$$

Al llegar a la frontera, la propagación se describe a partir de la matriz transferencia entre el medio s y el medio $s + 1$, una vez más se tiene la matriz de propagación pero del medio $s + 1$ y así continúa el método hasta la última transición del medio κ al medio 1. De esta forma la matriz de la celda unitaria $\mathbb{U}$ puede escribirse como:

$$\mathbb{U} = \mathbb{M}_{\kappa 1} \mathbb{P}_\kappa \prod_{s=1}^{\kappa-1} \mathbb{M}_{(\kappa-s)(\kappa-s+1)} \mathbb{P}_{\kappa-s}. \quad (2.3.7)$$

Por lo tanto, si el cristal se encuentra entre dos medios materiales, (ϵ_0, μ_0) y (ϵ_f, μ_f) , la matriz transferencia de toda la propagación $\mathbb{M}$ queda descrita de la forma:

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_{\kappa f} (\mathbb{M}_{\kappa 1})^{-1} \mathbb{U}^N \mathbb{M}_{01}. \quad (2.3.8)$$

Por medio de la cual, usando (2.3.5), pueden calcularse finalmente los coeficientes de transmisión y reflexión para todo el cristal en ambas polarizaciones:

$$T = \frac{\mu_0 \operatorname{Re} k_{zf}}{\mu_f \operatorname{Re} k_{z0}} \left| \frac{\det \mathbb{M}}{M_{22}} \right|^2, \quad (2.3.9a)$$

$$R = \left| \frac{M_{21}}{M_{22}} \right|^2. \quad (2.3.9b)$$

Los cuales pueden ser usados para estudiar las brechas fotónicas de la estructura plana periódica. En nuestro caso nos interesa conocer la matriz transferencia de un sistema con geometría cilíndrica, para el cual existen consideraciones que cambian aspectos importantes del cálculo y, por lo tanto, los resultados. A continuación extendaremos esta idea y construiremos la matriz transferencia para un sistema anular.

CAPÍTULO

3

PROPAGACIÓN EN UN MEDIO CON GEOMETRÍA ANULAR

El sistema descrito en la figura 1.1 difiere geoméricamente del solucionado en el anterior capítulo. En este caso estamos interesados en la propagación de ondas cilíndricas desde el origen de coordenadas en dirección radial, en un sistema con simetría angular.

La primera diferencia relevante es que en este caso no es posible tener incidencia oblicua de las ondas electromagnéticas, ya que al tenerse propagación radial, las ondas electromagnéticas impactan perpendicularmente las capas de la estructura, por esto se hace necesario redefinir la polarización. Es conveniente hacerlo en términos del campo que se encuentre en dirección al eje de simetría. Se denomina así TE a aquellas ondas con el campo eléctrico en dirección z y TM a aquellas en las que es el campo magnético el que tiene esta dirección, como se muestra en la figura 3.1, de forma que se sigue cumpliendo que cualquier onda electromagnética cilíndrica arbitraria podrá describirse como combinación lineal de ambas polarizaciones sin pérdida de generalidad.

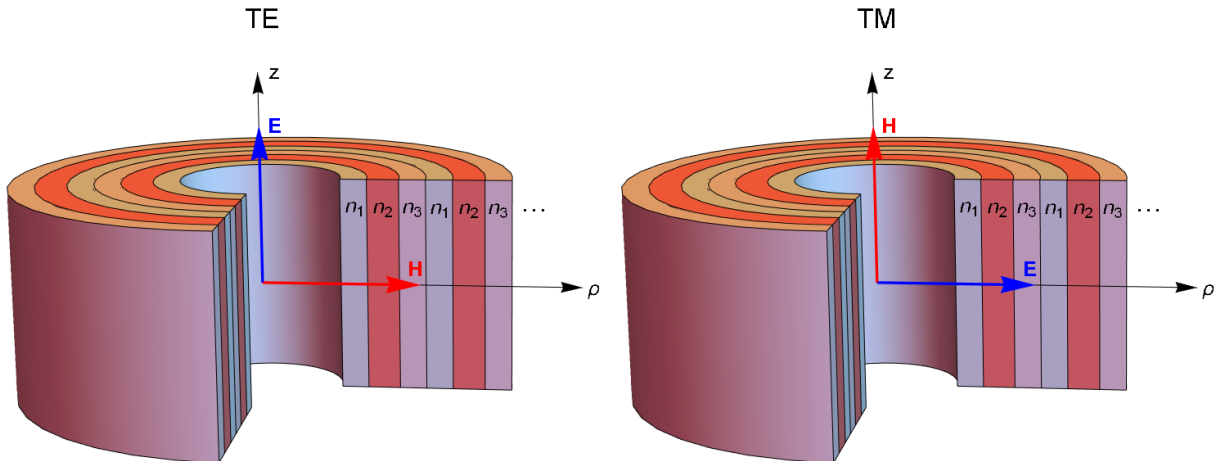


Figura 3.1: Redefinición de la polarización TE y TM en geometría anular en función del campo que se encuentra en dirección $\hat{z}$.

Así, se empieza a construir la matriz transferencia desde un enfoque distinto al anterior: solucionando las ecuaciones maestras para cristales fotónicos [2] y aplicando condiciones de frontera de forma que se puedan obtener las componentes de la matriz a partir de las soluciones de la ecuación de valores propios que describe el sistema.

3.1. Ecuaciones maestras en coordenadas cilíndricas

Los cristales fotónicos, al ser arreglos periódicos en función del vector posición $\mathbf{r}$, pueden ser modelados a partir de un conjunto de regiones en las que cada material tiene constante dieléctrica ϵ homogénea. Dependiendo de la característica dispersiva de cada medio, dicha constante puede, o no, estar en función de la frecuencia de la onda transmitida ω . Tomando en cuenta estas dependencias, la constante dieléctrica del cristal debe ser descrita como $\epsilon(\omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega)$. En nuestro modelo teórico no hay presencia de cargas libres, $\rho = 0$, ni corrientes de conducción, $\mathbf{J} = 0$, también se considera compuesto por materiales macroscópicos e isotrópicos, por lo tanto $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Considerando materiales no magnéticos, de forma que $\mu = \mu_0$ en todo el cristal, el índice de refracción queda descrito como $n(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)}$ y las ecuaciones de Maxwell en nuestra heteroestructura adoptan la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= 0, & \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Haciendo uso de la linealidad de estas ecuaciones, las dependencias temporales y espaciales son separadas expandiendo los campos en un conjunto de funciones armónicas. Se describen así los campos en la forma $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ y $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, por lo que la parte rotacional de las ecuaciones (3.1.1) nos permite escribir:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.1.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.1.2b)$$

En donde al calcular el rotacional de la ecuación (3.1.2a) se puede llegar a una expresión de la ecuación maestra para el campo eléctrico:

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3.1.3)$$

En el caso en que se tome el rotacional de la ecuación (3.1.2b) se llega también a una expresión de la ecuación maestra pero en este caso para el campo magnético.

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (3.1.4)$$

las cuales son ecuaciones de valores propios para sus respectivos campos y su valor propio puede ser asociado a la relación de dispersión descrita en la ecuación (2.1.4). Con el objetivo de describir nuestro sistema de transmisión unidimensional con geometría anular, se expresa el campo electromagnético a partir de sus componentes en coordenadas cilíndricas: $\mathbf{E} = E_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + E_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + E_z \hat{\mathbf{e}}_z$ y $\mathbf{H} = H_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + H_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi + H_z \hat{\mathbf{e}}_z$.

Debido a la redefinición de la polarización, es necesario analizar cómo se construye la matriz transferencia para el caso anular. Consideraremos inicialmente las ondas TE, las cuales se encuentran polarizadas con el campo eléctrico en dirección z . Los campos se describen en términos de sus únicas componentes no nulas: $\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{e}}_z$ y $\mathbf{H} = H_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + H_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$. De esta forma, la ecuación (3.1.3) adopta la forma:

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)} \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] E_z(\mathbf{r}) = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 E_z(\mathbf{r}). \quad (3.1.5)$$

Siendo esta la ecuación maestra en coordenadas cilíndricas para la componente z del campo eléctrico. Ahora, tomando en cuenta la polarización TM los campos quedan descritos únicamente en sus componentes $\mathbf{E} = E_\rho \hat{\mathbf{e}}_\rho + E_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi$ y $\mathbf{H} = H_z \hat{\mathbf{e}}_z$, en este caso se obtiene la ecuación maestra en coordenadas cilíndricas para la componente z del campo magnético:

$$\left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{1}{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right] H_z(\mathbf{r}) = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 H_z(\mathbf{r}). \quad (3.1.6)$$

Ambas son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, por lo que el objetivo ahora es hallar sus soluciones.

3.2. Solución de la ecuación maestra por separación de variables

Con el objetivo de hallar las soluciones de la ecuación maestra en polarización TE, (3.1.5), se observa que la dependencia espacial de la constante dieléctrica dificulta el proceso, por lo que se analizará una sola capa del cilindro con constante dieléctrica homogénea, esto es $\epsilon(\omega)$. Por el método de separación de variables suponemos una solución de la forma: $E_z(\rho, \phi) = V(\rho)\Phi(\phi)$, así, la ecuación maestra se escribe:

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + \frac{1}{V(\rho)} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \rho \epsilon(\omega) = 0, \quad (3.2.1)$$

por lo que cada término debe ser igual a una constante para que la ecuación diferencial siempre sea nula. En el caso azimutal dicha constante debe cumplir ciertas condiciones para respetar la física del modelo: primero, debe ser siempre un número real no positivo para que la solución sea periódica, por eso se describe como $-m^2 \leq 0$ para todo m real. Por otro lado, m debe ser siempre un número entero para asegurar que se vuelve al mismo punto al finalizar cada ciclo, es decir, su período es múltiplo entero de 2π , por lo que $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ se denomina número o modo azimutal. De esta forma

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} = -m^2, \quad (3.2.2a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\phi)}{\partial \phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0. \quad (3.2.2b)$$

así $\Phi(\phi) = e^{im\phi}$ es una solución particular. Por último, reemplazando (3.2.2a) en (3.2.1), teniendo que (2.1.4) puede reescribirse como $k^2 = \epsilon(\omega)\omega^2/c^2$ y definiendo $u = k\rho$, se llega a la expresión:

$$u^2 \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + u \frac{\partial V}{\partial u} + (u^2 - m^2) V = 0, \quad (3.2.3)$$

la cual es una ecuación conocida como ecuación diferencial de Bessel de orden m [22].

3.2.1. Funciones de Bessel

La ecuación diferencial

$$x^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial f(x)}{\partial x} + (x^2 - \nu^2) f(x) = 0, \quad (3.2.4)$$

se conoce como ecuación diferencial de Bessel de orden ν [23]. Al ser una ecuación diferencial de segundo orden, tiene dos soluciones linealmente independientes, al primer tipo de soluciones se les denomina *funciones de Bessel de primera especie de orden ν* :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (3.2.5)$$

las cuales son finitas en el origen para ν no entero no negativo, y divergen en el límite $x \rightarrow 0$ para ν negativo no entero. Si ν no es un entero, entonces J_ν y $J_{-\nu}$ son linealmente independientes, por lo que la solución de la ecuación diferencial de Bessel es una combinación lineal de ambas funciones. En caso contrario, ν coeficiente entero, se cumple $J_{-\nu} = (-1)^\nu J_\nu$, por lo que la solución no puede estar dada por funciones linealmente dependientes. En este caso se introducen las *funciones de Bessel de segunda especie de orden ν* :

$$\begin{aligned} Y_\nu(x) &= \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \notin \mathbb{N} \\ Y_n(x) &= \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

también denominadas funciones de Neumann o Weber, las cuales divergen en el origen $x = 0$. Así, para ν entero, la solución de la ecuación diferencial de Bessel es una combinación lineal de funciones de Bessel y Neumann: $f(x) = A_\nu J_\nu(x) + B_\nu Y_\nu(x)$, siendo A_ν y B_ν constantes que dependen de las condiciones iniciales. Ambas funciones tienen como propiedad la identidad de Abel, según la cual su wronskiano es igual a

$$W[J_\nu(x), Y_\nu(x)] = J_\nu(x)Y'_\nu(x) - J'_\nu(x)Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi x}. \quad (3.2.7)$$

De esta base del espacio de soluciones de la ecuación de Bessel pueden describirse soluciones particulares denominadas *funciones de Hankel* o *funciones de Bessel de tercera especie de orden ν* , definidas de la forma:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad (3.2.8a)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x). \quad (3.2.8b)$$

Estas soluciones son comúnmente usadas para ecuaciones de ondas convergentes y divergentes en sistemas cilíndricos simétricos, como es nuestro caso. Es fácil mostrar a partir de la propiedad (3.2.7) que el wronskiano de las funciones de Hankel es igual a:

$$W[H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x)] = H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)'}(x) - H_\nu^{(1)'}(x)H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{4i}{\pi x}. \quad (3.2.9)$$

Así, la parte radial del campo eléctrico $V(\rho)$ tiene dos soluciones linealmente independientes, como m es una constante entera estas soluciones son combinación lineal de funciones de Bessel $J_m(k\rho)$ y funciones de Neumann $Y_m(k\rho)$, por lo que la solución total para el campo eléctrico polarizado transversalmente puede escribirse de la forma:

$$E_z(\rho, \phi) = V(\rho)\Phi(\phi) = [AJ_m(k\rho) + BY_m(k\rho)]e^{im\phi}, \quad (3.2.10)$$

siendo A y B constantes determinadas por las condiciones de frontera. Siguiendo este mismo orden de ideas, se puede probar que la solución de la ecuación maestra (3.1.6) para el caso de la polarización TM puede escribirse como:

$$H_z(\rho, \phi) = [CJ_m(k\rho) + DY_m(k\rho)]e^{im\phi}, \quad (3.2.11)$$

con C y D también constantes dadas por las condiciones de frontera.

3.3. Construcción de la matriz transferencia

La solución para el campo eléctrico tiene la forma: $E_z(\rho, \phi) = V(\rho)e^{im\phi}$, siendo $V(\rho)$ una combinación lineal de funciones de Bessel y Neumann. Escribiendo la ecuación (3.1.2a) en coordenadas cilíndricas, y recordando que se describe la transmisión de las ondas de forma perpendicular al eje de simetría por lo que se anulan todas las derivadas con respecto a z , se llega a las ecuaciones:

$$H_\rho = -\frac{i}{\omega\mu_0\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi}, \quad H_\phi = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial \rho}, \quad (3.3.1)$$

a partir de las cuales es posible obtener todas las componentes de la onda electromagnética en el cristal en función de la solución de E_z . Para construir la matriz transferencia se reemplaza la solución obtenida por separación de variables en (3.3.1), obteniendo:

$$H_\rho = \frac{m}{\omega\mu_0\rho} V(\rho)e^{im\phi}, \quad (3.3.2a)$$

$$H_\phi = \left(\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \right) e^{im\phi} = U(\rho)e^{im\phi}, \quad (3.3.2b)$$

siendo

$$U(\rho) = ip [AJ'_m(k\rho) + BY'_m(k\rho)] \quad (3.3.3)$$

linealmente independiente a $V(\rho)$, con $p = \sqrt{\varepsilon/\mu}$ la admitancia intrínseca de la capa y ε la permitividad eléctrica del material; es importante notar que en este caso, la notación $J'_m(k\rho)$ se refiere a derivación con respecto a $k\rho$, esto es $\partial J_m(k\rho)/\partial k\rho$. Es posible deducir de (3.3.2a) que para $m \neq 0$ la componente radial del campo magnético es diferente de cero, por lo que al flujo enérgico en dirección radial se le adiciona un flujo de energía que circula al rededor del cristal [24].

Al ser $V(\rho)$ y $U(\rho)$ soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, pueden ser escritas como combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes: $V_1(\rho_0)$, $V_2(\rho_0)$ y $U_1(\rho_0)$, $U_2(\rho_0)$, con los siguientes valores definidos en un punto ρ_0 del cristal.

$$\begin{pmatrix} V_1(\rho_0) \\ U_1(\rho_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_2(\rho_0) \\ U_2(\rho_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.4)$$

De forma que para obtener las soluciones de $V(\rho)$ y $U(\rho)$, en cualquier punto ρ del cristal, bastaría con multiplicar la matriz de las soluciones de (3.3.4) por una matriz columna de los valores iniciales, esto es

$$\begin{pmatrix} V(\rho) \\ U(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ U_1 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(\rho_0) \\ U(\rho_0) \end{pmatrix} = \mathbb{M}^{TE} \begin{pmatrix} V(\rho_0) \\ U(\rho_0) \end{pmatrix}, \quad (3.3.5)$$

siendo $\mathbb{M}^{TE}$ la matriz transferencia de nuestro sistema cilíndrico con polarización TE. Debido a que las soluciones de las funciones $V(\rho)$ y $U(\rho)$ fueron previamente obtenidas por funciones de Bessel, bastaría reemplazar las condiciones definidas en ρ_0 para determinar todos los componentes de la matriz transferencia, en una sola capa, entre un punto ρ_0 y otro ρ del cristal. Primero, la condición inicial a la izquierda de (3.3.4),

$$\begin{cases} A_1 J_m(k\rho_0) + B_1 Y_m(k\rho_0) = 1 \\ ip [A_1 J'_m(k\rho_0) + B_1 Y'_m(k\rho_0)] = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Usando la propiedad (3.2.7), es fácil verificar que:

$$A_1 = \frac{\pi}{2} k\rho_0 Y'_m(k\rho_0), \quad B_1 = -\frac{\pi}{2} k\rho_0 J'_m(k\rho_0). \quad (3.3.7)$$

De igual forma para la condición inicial de la derecha de (3.3.4),

$$\begin{cases} A_2 J_m(k\rho_0) + B_2 Y_m(k\rho_0) = 0 \\ ip [A_2 J'_m(k\rho_0) + B_2 Y'_m(k\rho_0)] = 1 \end{cases}, \quad (3.3.8)$$

se obtienen las constantes:

$$A_2 = i\frac{\pi}{2}\frac{k}{p}\rho_0 Y_m(k\rho_0), \quad B_2 = -i\frac{\pi}{2}\frac{k}{p}\rho_0 J_m(k\rho_0), \quad (3.3.9)$$

por lo que las componentes de la matriz transferencia son:

$$\begin{aligned} V_1 &= M_{11}^{TE} = \frac{\pi}{2}k\rho_0 [Y'_m(k\rho_0)J_m(k\rho) - J'_m(k\rho_0)Y_m(k\rho)], \\ V_2 &= M_{12}^{TE} = -i\frac{\pi}{2}\frac{k}{p}\rho_0 [J_m(k\rho_0)Y_m(k\rho) - Y_m(k\rho_0)J_m(k\rho)], \\ U_1 &= M_{21}^{TE} = i\frac{\pi}{2}kp\rho_0 [Y'_m(k\rho_0)J'_m(k\rho) - J'_m(k\rho_0)Y'_m(k\rho)], \\ U_2 &= M_{22}^{TE} = \frac{\pi}{2}k\rho_0 [J_m(k\rho_0)Y'_m(k\rho) - Y_m(k\rho_0)J'_m(k\rho)]. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Es posible probar que para polarización TM se llega al mismo resultado para la matriz transferencia, solo que en dicho caso se alternan $\mu \leftrightarrow \epsilon$, por lo que $p = \sqrt{\mu/\epsilon}$ y en este caso se denomina impedancia intrínseca [25]. Como se aclaró al principio, esta es la matriz transferencia para una sola capa uniforme, debido a la continuidad entre capas uniformes de los componentes perpendiculares a la transmisión, estos son E_z y H_ϕ , la matriz transferencia a lo largo del cristal fotónico se obtiene mediante el producto de las matrices transferencia de cada capa, esta operación se llevará a cabo a continuación en la base de ondas propagantes, sin embargo se calculará primero el determinante de $\mathbb{M}^{TE}$. Para esto es necesario usar la propiedad (3.2.7), obteniendo:

$$\det [\mathbb{M}^{TE}] = M_{11}^{TE} M_{22}^{TE} - M_{12}^{TE} M_{21}^{TE} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (3.3.11)$$

lo cual refleja que, en nuestro sistema cilíndrico, se conserva la energía total transportada por la onda transmitida en el cristal a medida que aumenta el radio y disminuye la amplitud [24].

3.4. Matriz transferencia en la base de ondas propagantes.

Como fue discutido anteriormente, las funciones de Hankel son solución de la ecuación diferencial de Bessel, siendo estas particularmente útiles en la descripción divergente y convergente de las ondas electromagnéticas en el cristal fotónico cilíndrico. Así, es posible describir las componentes de los campos en el caso divergente como:

$$\begin{cases} E_z^+ = AH_m^{(1)}(k\rho)e^{im\phi} \\ H_\phi^+ = ipAH_m'^{(1)}(k\rho)e^{im\phi} \end{cases}, \quad (3.4.1)$$

y el caso convergente se escribe:

$$\begin{cases} E_z^- = AH_m^{(2)}(k\rho)e^{im\phi} \\ H_\phi^- = ipAH_m'^{(2)}(k\rho)e^{im\phi} \end{cases}. \quad (3.4.2)$$

De forma que las componentes E_z y H_ϕ pueden escribirse como superposición de estas soluciones, obteniendo:

$$E_z = E_z^+ + E_z^-, \quad (3.4.3a)$$

$$H_\phi = ip[C_m^{(1)}E_z^+ + C_m^{(2)}E_z^-], \quad (3.4.3b)$$

siendo $C_m^{(1,2)} = H_m'^{(1,2)}(k\rho)/H_m^{(1,2)}(k\rho)$, soluciones a partir de las cuales puede plantearse la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} E_z \\ H_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ipC_m^{(1)} & ipC_m^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z^+ \\ E_z^- \end{pmatrix} = \mathbb{W}^{TE} \begin{pmatrix} E_z^+ \\ E_z^- \end{pmatrix}, \quad (3.4.4)$$

con $\mathbb{W}^{TE}$ la matriz transferencia en la base de ondas propagantes con polarización TE. Más adelante será necesario conocer la inversa de esta matriz, la cual puede calcularse de la forma:

$$(\mathbb{W}^{TE})^{-1} = \begin{pmatrix} W_{11}^{TE} & W_{12}^{TE} \\ W_{21}^{TE} & W_{22}^{TE} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det[\mathbb{W}^{TE}]} \begin{pmatrix} W_{22}^{TE} & -W_{12}^{TE} \\ -W_{21}^{TE} & W_{11}^{TE} \end{pmatrix}, \quad (3.4.5)$$

por lo que para hallarla primero se obtiene su determinante usando el wronskiano de la ecuación (3.2.9) en el proceso, se tiene así:

$$\det[\mathbb{W}^{TE}] = \frac{4}{\pi} \frac{1}{k_0 \rho} \frac{1}{H_m^{(1)}(k\rho) H_m^{(2)}(k\rho)}, \quad (3.4.6)$$

con $k_0 = k/p = \omega\mu_0/\sqrt{\epsilon_0}$. Por lo que la inversa de la matriz transferencia es:

$$(\mathbb{W}^{TE})^{-1} = \frac{\pi}{4} k_0 \rho H_m^{(1)}(k\rho) H_m^{(2)}(k\rho) \begin{pmatrix} ipC_m^{(2)} & -1 \\ -ipC_m^{(1)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.7)$$

Ahora consideramos el caso en el que una onda electromagnética pasa de una capa l a la siguiente, $l+1$, la transformación del campo al atravesar la frontera obedece la condición de continuidad de los componentes tangenciales, esto es $(E_z^l, H_\phi^l)^T = (E_z^{(l+1)}, H_\phi^{(l+1)})^T$, la cual puede escribirse en términos de la ecuación (3.4.4) como:

$$\mathbb{W}_l^{TE} \begin{pmatrix} E_{zl}^+ \\ E_{zl}^- \end{pmatrix} = \mathbb{W}_{(l+1)}^{TE} \begin{pmatrix} E_{z(l+1)}^+ \\ E_{z(l+1)}^- \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} E_{z(l+1)}^+ \\ E_{z(l+1)}^- \end{pmatrix} = (\mathbb{W}_{(l+1)}^{TE})^{-1} \times \mathbb{W}_l^{TE} \begin{pmatrix} E_{zl}^+ \\ E_{zl}^- \end{pmatrix} = \mathbb{N}_l^{TE} \begin{pmatrix} E_{zl}^+ \\ E_{zl}^- \end{pmatrix}. \quad (3.4.8)$$

Identificamos a $\mathbb{N}_l^{TE}$ como la matriz transferencia al pasar de la capa l a la capa siguiente $l+1$, en la base de ondas propagantes. Usando (3.4.4) y (3.4.7) no es difícil hallar

$$\mathbb{N}_l^{TE} = i \frac{\pi}{4} k_0 \rho H_m^{(1)}(k_{(l+1)}\rho) H_m^{(2)}(k_{(l+1)}\rho) \begin{pmatrix} p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(2)} - p_l C_{ml}^{(1)} & p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(2)} - p_l C_{ml}^{(2)} \\ p_l C_{ml}^{(1)} - p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(1)} & p_l C_{ml}^{(2)} - p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (3.4.9)$$

con $k_l = \sqrt{\epsilon_l(\omega)}\omega/c$ el número de onda en la capa l y $C_{ml}^{(n)} = H_m'^{(n)}(k_l\rho)/H_m^{(n)}(k_l\rho)$.

Para finalizar, en el caso en el que se quiera estudiar la propagación de una onda en una capa uniforme en la base de ondas propagantes, se tendría que solucionar un sistema de la forma:

$$\begin{pmatrix} E_z^+(\rho) \\ E_z^-(\rho) \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} E_z^+(\rho_0) \\ E_z^-(\rho_0) \end{pmatrix}, \quad (3.4.10)$$

donde $\mathbb{T}$ se define como la matriz transferencia a través de una capa uniforme desde ρ_0 hasta ρ . Usando las ecuaciones para el campo eléctrico en (3.4.1) y (3.4.2) es fácil verificar que:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \frac{H_m^{(1)}(k\rho)}{H_m^{(1)}(k\rho_0)} & 0 \\ 0 & \frac{H_m^{(2)}(k\rho)}{H_m^{(2)}(k\rho_0)} \end{pmatrix}. \quad (3.4.11)$$

3.4.1. Coeficientes de reflexión y transmisión

Suponemos la transmisión de una onda divergente de amplitud 1 que atraviesa el cristal de la capa l a la capa $l + 1$, esto produce una onda transmitida de amplitud t_d y otra parte, con amplitud r_d , se refleja como se muestra en la figura 3.2.

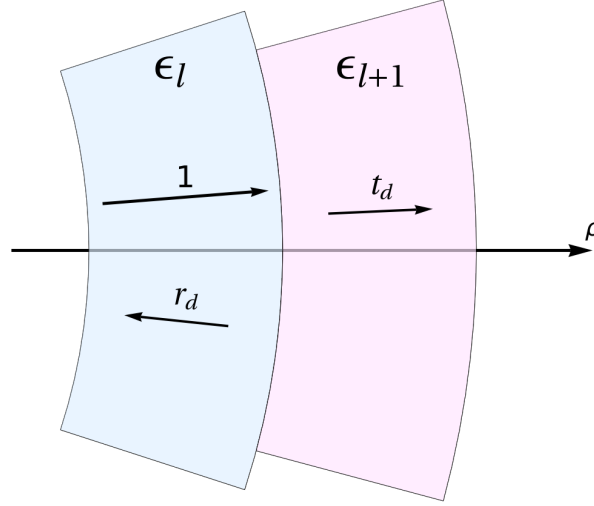


Figura 3.2: Transmisión de una onda electromagnética en un medio conformado por capas cilíndricas, al pasar de un medio l al siguiente $l + 1$, una parte se transmite t_d y la otra se refleja r_d .

La representación matricial de la forma (3.4.4) para este caso es:

$$\begin{pmatrix} t_d \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbb{N}_l^{TE} \begin{pmatrix} 1 \\ r_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{l11}^{TE} & N_{l12}^{TE} \\ N_{l21}^{TE} & N_{l22}^{TE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_d \end{pmatrix}, \quad (3.4.12)$$

de forma que los coeficientes de transmisión y reflexión son

$$t_d = \frac{\det [\mathbb{N}_l^{TE}]}{N_{l22}^{TE}} = \frac{4i}{\pi k_0 \rho H_m^{(1)}(k_l \rho) H_m^{(2)}(k_l \rho) \left(p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(1)} - p_l C_{ml}^{(2)} \right)}, \quad (3.4.13a)$$

$$r_d = -\frac{N_{l21}^{TE}}{N_{l22}^{TE}} = \frac{p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(1)} - p_l C_{ml}^{(1)}}{p_l C_{ml}^{(2)} - p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(1)}}, \quad (3.4.13b)$$

respectivamente. Del caso análogo para una onda convergente se obtiene:

$$t_c = \frac{\det [\mathbb{N}_l^{TE}]}{N_{l22}^{TE}} = \frac{4i}{\pi k_0 \rho H_m^{(1)}(k_{(l+1)} \rho) H_m^{(2)}(k_{(l+1)} \rho) \left(p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(1)} - p_l C_{ml}^{(2)} \right)}, \quad (3.4.14a)$$

$$r_c = -\frac{N_{l21}^{TE}}{N_{l22}^{TE}} = \frac{p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(2)} - p_l C_{ml}^{(2)}}{p_l C_{ml}^{(2)} - p_{(l+1)} C_{m(l+1)}^{(1)}}, \quad (3.4.14b)$$

3.4.2. Coeficientes de reflexión y transmisión para estructuras cilíndricas en capas

El cristal fotónico cilíndrico a evaluar se encuentra sumergido entre dos medios, un medio inicial para valores $0 < \rho < \rho_0$ con índice de refracción n_0 y un medio final para $\rho_f < \rho < \infty$, siendo ρ_f el radio total del cristal cilíndrico, con índice de refracción n_f . Dicho sistema se representa en la figura 3.3.

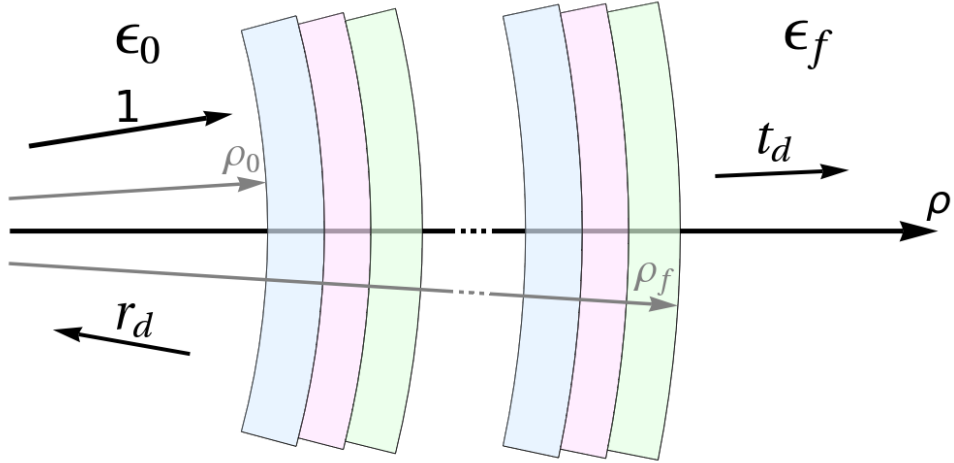


Figura 3.3: Transmisión de una onda electromagnética de amplitud 1 en un cristal cilíndrico desde el centro del cristal, con índice de refracción ϵ_0 , hasta el medio externo, con índice de refracción ϵ_f . Una parte de dicha onda se transmite t_d y la otra se refleja r_d .

El último cálculo teórico se centra en obtener los coeficientes de reflexión y transmisión de todo el cristal, con este objetivo se describe la onda incidente y la reflejada en el medio inicial con ayuda de la ecuación (3.4.4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ip_0 C_{m0}^{(1)} & ip_0 C_{m0}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + r_d \\ ip_0 C_{m0}^{(1)} + ip_0 C_{m0}^{(2)} r_d \end{pmatrix}, \quad (3.4.15)$$

de igual forma para la onda transmitida en el medio final:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ip_f C_{mf}^{(1)} & ip_f C_{mf}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_d \\ ip_f C_{mf}^{(1)} t_d \end{pmatrix}, \quad (3.4.16)$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 + r_d \\ ip_0 C_{m0}^{(1)} + ip_0 C_{m0}^{(2)} r_d \end{pmatrix} = (\mathbb{M}^{TE})^{-1} \begin{pmatrix} t_d \\ ip_f C_{mf}^{(1)} t_d \end{pmatrix}. \quad (3.4.17)$$

Usando (3.4.5) se puede obtener $(\mathbb{M}^{TE})^{-1}$ y, a partir de la derivación de los coeficientes de transmisión y reflexión para la onda divergente en (3.4.13), se puede llegar a la solución:

$$t_d = \frac{\det[(\mathbb{M}^{TE})^{-1}]}{M'_{22}} = \frac{4 \left(\pi k_f \rho H_m^{(1)}(k_0 \rho) H_m^{(2)}(k_0 \rho) \right)^{-1}}{\left(ip_0 C_{m0}^{(2)} M'_{11} - M'_{21} \right) + ip_f C_{mf}^{(1)} \left(ip_0 C_{m0}^{(2)} M'_{12} - M'_{22} \right)}, \quad (3.4.18a)$$

$$r_d = -\frac{M'_{21}}{M'_{22}} = \frac{\left(M'_{21} - ip_0 C_{m0}^{(1)} M'_{11} \right) + ip_f C_{mf}^{(1)} \left(M'_{22} - ip_0 C_{m0}^{(1)} M'_{12} \right)}{\left(ip_0 C_{m0}^{(2)} M'_{11} - M'_{21} \right) + ip_f C_{mf}^{(1)} \left(ip_0 C_{m0}^{(2)} M'_{12} - M'_{22} \right)}. \quad (3.4.18b)$$

De forma análoga es posible hallar los coeficientes para la onda convergente. Para obtener los coeficientes en polarización TM solo es necesario hacer los intercambios $i \leftrightarrow -i$ y $\mu \leftrightarrow \epsilon$ [25].

3.5. Implementación del modelo en el método numérico

Usando las construcciones anteriores, es posible tener una imagen clara de los detalles fenomenológicos de nuestro sistema. Sin embargo, para llevar a cabo el estudio numérico es importante optimizar lo máximo posible la descripción teórica para minimizar el tiempo y la complejidad del cálculo. Con este fin en mente, volvemos a las ecuaciones (3.3.1), que en polarización TM tendrían la forma:

$$E_\rho = \frac{i}{\omega\epsilon\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi}, \quad E_\phi = -\frac{i}{\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho}. \quad (3.5.1)$$

El siguiente paso es aplicar la condición de frontera de la continuidad de las componentes tangenciales, para esto usamos las soluciones de la ecuación parcial diferencial de Bessel en polarización TE y TM en la base de ondas propagantes para la capa j -ésima.

$$(E_z)_j = \left[A_j H_m^{(1)}(k_j \rho) + B_j H_m^{(2)}(k_j \rho) \right] e^{im\phi}, \quad (3.5.2a)$$

$$(H_z)_j = \left[C_j H_m^{(1)}(k_j \rho) + D_j H_m^{(2)}(k_j \rho) \right] e^{im\phi}. \quad (3.5.2b)$$

En el caso de la componente ϕ aplicamos la relación de dispersión a las componentes H_ϕ de (3.3.1) y E_ϕ de (3.5.1) y remplazamos las soluciones (3.5.2), obteniendo

$$(H_\phi)_j = i\omega \frac{n_j^2}{k_j} \left[A_j H_m'^{(1)}(k_j \rho) + B_j H_m'^{(2)}(k_j \rho) \right] e^{im\phi}, \quad (3.5.3a)$$

$$(E_\phi)_j = i\omega\mu_0 \frac{1}{k_j} \left[C_j H_m'^{(1)}(k_j \rho) + D_j H_m'^{(2)}(k_j \rho) \right] e^{im\phi}, \quad (3.5.3b)$$

donde en este caso ' denota la derivada sobre ρ . Así, por la condición de frontera de las componentes perpendiculares, se debe cumplir para las ecuaciones (3.5.2a) y (3.5.3a) que para polarización TE es

$$A_j H_m^{(1)}(k_j \rho) + B_j H_m^{(2)}(k_j \rho) = A_{j+1} H_m^{(1)}(k_{j+1} \rho) + B_{j+1} H_m^{(2)}(k_{j+1} \rho), \quad (3.5.4a)$$

$$\frac{n_j^2}{k_j} A_j H_m'^{(1)}(k_j \rho) + \frac{n_j^2}{k_j} B_j H_m'^{(2)}(k_j \rho) = \frac{n_{j+1}^2}{k_{j+1}} A_{j+1} H_m'^{(1)}(k_{j+1} \rho) + \frac{n_{j+1}^2}{k_{j+1}} B_{j+1} H_m'^{(2)}(k_{j+1} \rho), \quad (3.5.4b)$$

y para las ecuaciones (3.5.2b) y (3.5.3b) que para polarización TM es

$$C_j H_m^{(1)}(k_j \rho) + D_j H_m^{(2)}(k_j \rho) = C_{j+1} H_m^{(1)}(k_{j+1} \rho) + D_{j+1} H_m^{(2)}(k_{j+1} \rho), \quad (3.5.5a)$$

$$\frac{1}{k_j} C_j H_m'^{(1)}(k_j \rho) + \frac{1}{k_j} D_j H_m'^{(2)}(k_j \rho) = \frac{1}{k_{j+1}} C_{j+1} H_m'^{(1)}(k_{j+1} \rho) + \frac{1}{k_{j+1}} D_{j+1} H_m'^{(2)}(k_{j+1} \rho), \quad (3.5.5b)$$

que puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_j \rho) & H_m^{(2)}(k_j \rho) \\ \frac{n_j^2}{k_j} H_m'^{(1)}(k_j \rho) & \frac{n_j^2}{k_j} H_m'^{(2)}(k_j \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_{j+1} \rho) & H_m^{(2)}(k_{j+1} \rho) \\ \frac{n_{j+1}^2}{k_{j+1}} H_m'^{(1)}(k_{j+1} \rho) & \frac{n_{j+1}^2}{k_{j+1}} H_m'^{(2)}(k_{j+1} \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{j+1}, \quad (3.5.6a)$$

$$\begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_j \rho) & H_m^{(2)}(k_j \rho) \\ \frac{1}{k_j} H_m'^{(1)}(k_j \rho) & \frac{1}{k_j} H_m'^{(2)}(k_j \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_j = \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_{j+1} \rho) & H_m^{(2)}(k_{j+1} \rho) \\ \frac{1}{k_{j+1}} H_m'^{(1)}(k_{j+1} \rho) & \frac{1}{k_{j+1}} H_m'^{(2)}(k_{j+1} \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}_{j+1}. \quad (3.5.6b)$$

De forma que, siguiendo la lógica de los cálculos anteriores, puede obtenerse las matrices transferencia en la capa j efectuando

$$\mathbb{M}_j^{TE} = \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_{j+1}\rho) & H_m^{(2)}(k_{j+1}\rho) \\ \frac{n_{j+1}^2}{k_{j+1}} H_m'^{(1)}(k_{j+1}\rho) & \frac{n_{j+1}^2}{k_{j+1}} H_m'^{(2)}(k_{j+1}\rho) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_j\rho) & H_m^{(2)}(k_j\rho) \\ \frac{n_j^2}{k_j} H_m'^{(1)}(k_j\rho) & \frac{n_j^2}{k_j} H_m'^{(2)}(k_j\rho) \end{pmatrix}, \quad (3.5.7a)$$

$$\mathbb{M}_j^{TM} = \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_{j+1}\rho) & H_m^{(2)}(k_{j+1}\rho) \\ \frac{1}{k_{j+1}} H_m'^{(1)}(k_{j+1}\rho) & \frac{1}{k_{j+1}} H_m'^{(2)}(k_{j+1}\rho) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_m^{(1)}(k_j\rho) & H_m^{(2)}(k_j\rho) \\ \frac{1}{k_j} H_m'^{(1)}(k_j\rho) & \frac{1}{k_j} H_m'^{(2)}(k_j\rho) \end{pmatrix}. \quad (3.5.7b)$$

Así, según la subsección 2.3.2, el siguiente paso es definir una celda unitaria, mas en este caso no es posible ya que las propiedades de las capas varían al aumentar el radio como es propio de las estructuras con geometría cilíndrica. Esto añade un grado de complejidad al método numérico ya que se deben calcular tantas matrices transferencia como capas hayan en nuestro sistema, sin embargo se tiene a favor el hecho de que no es necesario incluir en este caso las matrices de propagación ya que las componentes de estas nuevas matrices transferencia incluyen funciones de Hankel, como puede verse en (3.4.11), las cuales, en su dependencia radial, describen tanto la propagación como la transición entre capas [24]. Así, la matriz transferencia de un cristal anular en el que se tiene una periodicidad de κ materiales repitiéndose N veces, se calcula como:

$$\mathbb{M}^{TE} = \prod_{j=0}^{\kappa N} \mathbb{M}_{\kappa N-j}^{TE}, \quad \mathbb{M}^{TM} = \prod_{j=0}^{\kappa N} \mathbb{M}_{\kappa N-j}^{TM}. \quad (3.5.8)$$

y a partir de esta se obtienen los coeficientes de reflexión usando (2.2.12) en polarización TE y (2.2.16b) en polarización TM.

CAPÍTULO

4

DESCRIPCIÓN DE LOS SUPERCONDUCTORES

Los materiales superconductores son aquellos que por debajo de cierta temperatura crítica T_c presentan dos propiedades características: cero resistencia eléctrica y diamagnetismo perfecto. Este fenómeno fue descubierto por H. Kamerlingh Onnes en 1908 al observar que bajo $4,15K$ la resistencia ohmica del mercurio se desvanecía por completo, iniciando el campo de estudio de los superconductores [26]. A partir de este hallazgo se han encontrado materiales con temperaturas críticas cada vez más altas, este es el caso de los compuestos de cobre como el $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ (YBCO), el cual fue el primer material encontrado cuyas propiedades superconductoras empiezan a aparecer por encima de la temperatura de condensación del nitrógeno [27], abriendo el paso al campo de los superconductores de alta temperatura.

Comprender este tipo de materiales es crucial para una correcta descripción e incorporación al modelo que sea usado para estudiar nuestro cristal fotónico. Se iniciará describiendo el modelo de los dos fluidos, usado como marco teórico para empezar a plantear las ecuaciones que describen la interacción entre campos electromagnéticos y superconductores, como lo son las ecuaciones de London y la teoría de Ginzburg-Landau. Por último, se obtiene el índice de refracción de los superconductores ya que este debe ser incluido dentro de la matriz transferencia previamente construida para estudiar las brechas fotónicas del cristal.

4.1. Modelo de los dos fluidos

Un superconductor puede ser modelado como un material compuesto por una mezcla de dos fluidos de electrones con propiedades distintas: el primer fluido es de electrones normales y el segundo de electrones superconductores o *superelectrones*; estos últimos con carga e^* , masa efectiva m^* y densidad η_s^* dados por las relaciones:

$$e^* = 2e, \quad (4.1.1a)$$

$$m^* = 2m, \quad (4.1.1b)$$

$$\eta_s^* = \frac{1}{2}\eta_s. \quad (4.1.1c)$$

Siendo e y m la carga y masa de los electrones normales¹, respectivamente, y η_s la densidad electrónica de los superelectrones; debido a fluctuaciones en η_s se tendría que la forma general de (4.1.1c) es $\eta_s^* \leq \frac{1}{2}\eta_s$ y la igualdad se da en el límite $T = 0$ [27].

Estos dos fluidos coexisten y están mezclados en el material pero no interactúan entre ellos. La densidad electrónica total η en el superconductor sería entonces la suma de las densidades de los electrones normales η_n y los superelectrones η_s . Muy por encima de la temperatura crítica todos los electrones se comportan normalmente, por lo que $\eta = \eta_n$, siendo $\eta_s = 0$, pero al disminuir la temperatura por debajo de su valor crítico los electrones empiezan a transformarse gradualmente en superelectrones, lo que describe una dependencia de la densidad en función de la temperatura de forma que:

$$\eta = \eta_n(T) + \eta_s(T), \quad (4.1.2)$$

siendo η constante. Se tendría así que a $T = 0$ todos los electrones se comportan como superelectrones por lo que $\eta = \eta_s$, siendo $\eta_n = 0$. Esta dependencia se encuentra esquematizada en la figura 4.1 y puede ser estudiada a partir de las ecuaciones de London y la teoría de Ginzburg Landau.

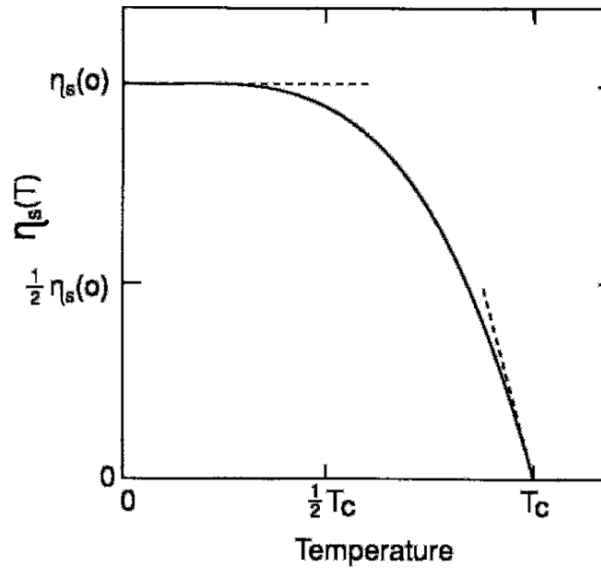


Figura 4.1: Densidad de los superelectrones η_s en función de la temperatura T . $\eta_s(0)$ es igual a η , esta disminuye a medida que aumenta la temperatura anulándose en $T = T_c$. Las líneas punteadas muestran el comportamiento de $\partial\eta_s/\partial T$, en $T = 0$ se anula y en $T = T_c$ toma un valor negativo que aumenta con η y disminuye con T_c , ambas constantes asociadas al material superconductor [27].

¹Esta imagen clásica de los superelectrones, desarrollada en 1950, fue descrita cuánticamente por la teoría BCS, 7 años después, a partir de pares de electrones, denominados pares de Cooper. Ambas teorías coinciden en las magnitudes de la masa, carga y densidad de los superelectrones/pares de Cooper, sin embargo, para nuestro caso vamos a quedarnos con la descripción clásica ya que es el marco teórico en el que está modelado nuestro sistema.

4.2. Ecuaciones de London-London

Dentro de un superconductor no pueden existir campos magnéticos constantes ya que estos materiales son diamagnéticos, por lo que las líneas de campo rodearán el superconductor en vez de penetrarlo; este fenómeno es conocido como *efecto Meissner*, figura 4.2, y fue descrito en 1933 por Meissner y Ochsenfeld [28]. En 1935 los hermanos Fritz y Heinz London trabajaron en una descripción de los fenómenos magnéticos en superconductores obteniendo como resultado las ecuaciones de London-London.

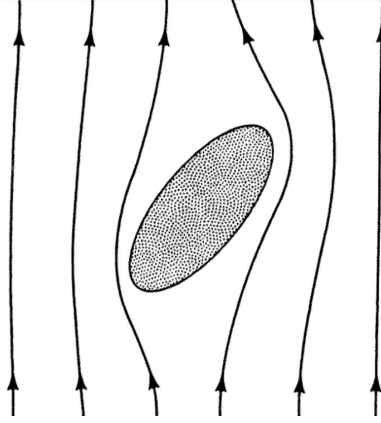


Figura 4.2: Representación de un material superconductor en presencia de un campo magnético estático, las líneas de campo rodearán al cuerpo y no lo penetrarán debido al efecto Meissner [26].

Se inicia modelando la interacción entre un campo eléctrico $\mathbf{E}$ y una carga e^* con masa efectiva m^* y velocidad $\mathbf{v}$ en un metal, esta dinámica se describe a partir de la ecuación de Drude-Lorentz la cual es la ley de Newton para el electrón cuya constante de amortiguamiento es τ , así:

$$m^* \left(\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v} \right) = e^* \mathbf{E}, \quad (4.2.1)$$

despreciando el segundo término ya que para un conductor perfecto $\tau \rightarrow \infty$. Teniendo la densidad de corriente superconductora $\mathbf{J}_s = \eta_s e^* \mathbf{v}$, (4.2.1) puede reescribirse de la forma.

$$\dot{\mathbf{J}}_s = \frac{\eta_s e^{*2}}{m^*} \mathbf{E}, \quad (4.2.2)$$

a la cual se le conoce como *primera ecuación de London*. Luego se calcula el rotacional de la derivada temporal de la ley de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{H}}) = \nabla \times \dot{\mathbf{J}}_s + \nabla \times \ddot{\mathbf{D}} \quad (4.2.3)$$

y, a continuación, se reemplaza (4.2.2) en (4.2.3) y se usa la ley de Faraday para obtener

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{H}}) = - \left(\frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \dot{\mathbf{H}}, \quad (4.2.4)$$

definiendo

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m^*}{\mu_0 \eta_s e^{*2}}} \quad (4.2.5)$$

como la *longitud de penetración de London*. Integrando (4.2.4) una vez con respecto al tiempo, se llega a la segunda ecuación de London, mejor conocida simplemente como *ecuación de London*:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \left(\frac{1}{\lambda_L^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = 0. \quad (4.2.6)$$

Una derivación alternativa puede llevarse a cabo calculando la energía libre del superfluido descrito en la sección 4.1 [29]. En el caso no dependiente del tiempo se anula la derivada temporal, quedando con la ecuación de London:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{H} = 0. \quad (4.2.7)$$

4.3. Superconductor en un campo magnético

Usaremos el resultado anterior para analizar el comportamiento de un campo magnético dentro de un superconductor. Para este fin descomponemos las componentes del campo en sus partes perpendicular y paralela a la superficie superconductora como muestra la figura 4.3.

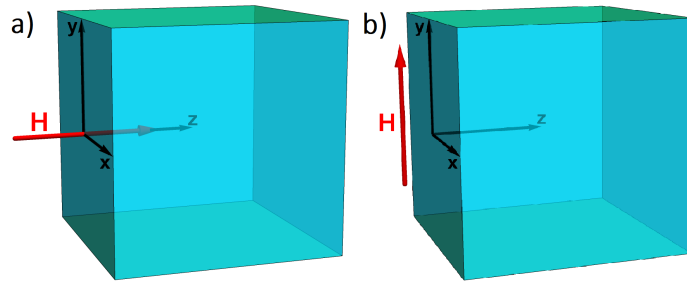


Figura 4.3: Incidencia de un campo magnético $\mathbf{H}$, a) perpendicular y b) paralelo a la superficie del superconductor.

4.3.1. Campo perpendicular al superconductor

Como se observa en la figura 4.3a, el campo incide perpendicular al plano xy . Por la ley de monopolos magnéticos $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, por lo que $\partial H_z / \partial z = 0$, de forma que H_z es constante. De la ley de Ampère-Maxwell $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ se tiene que el primer término de la ecuación (4.2.7) se anula, por lo que $\mathbf{H}$ no tiene otra alternativa más que hacerse cero, esto significa que en un superconductor no es posible tener la incidencia perpendicular de un vector de campo magnético [29].

4.3.2. Campo paralelo al superconductor

En el caso de la figura 4.3b, el campo magnético tiene la forma funcional $\mathbf{H} = H(z)\hat{\mathbf{y}}$. Usando la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{H}$, (4.2.7) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{H} &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} H_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Cuya solución es:

$$\mathbf{H}(z) = H_y(0) e^{-\frac{z}{\lambda_L}} \hat{\mathbf{y}}, \quad (4.3.2)$$

con $H_y(0)$ la intensidad del campo en la superficie del superconductor. Este resultado muestra que, a pesar del efecto Meissner, se tiene la incidencia de un campo magnético estático paralelo

a la superficie del superconductor, sin embargo tiene forma de onda evanescente con tasa de decaimiento dada por λ_L [29], este efecto se esquematiza en la figura 4.4.

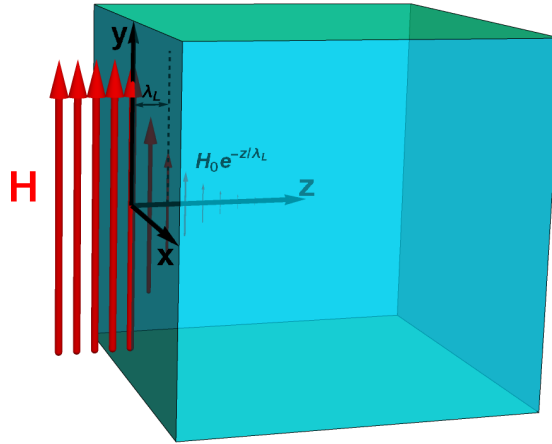


Figura 4.4: Onda evanescente del campo magnético al ingresar a un superconductor. El decaimiento exponencial está mediado por la tasa de decaimiento λ_L .

Por lo tanto, esta constante definida en (4.2.5) es una medida de qué tanto puede incidir un campo magnético en el material superconductor, teniendo generalmente valores que no superan los cientos de nanómetros [27], por lo que puede ser despreciada a menos que se estudie el comportamiento en la frontera o se tengan capas superconductoras delgadas cuyo espesor sea del orden de λ_L . Ahora bien, debido a la ecuación (4.1.2) el apantallamiento del campo debería verse afectado ante cambios de temperatura, puesto que a medida que nos acercamos a la temperatura crítica el material empezaría a perder sus propiedades superconductoras, permitiendo que el campo magnético tenga una incidencia más profunda en el material; de aquí que $\lambda_L = \lambda_L(T)$. Esta dependencia ha sido ampliamente estudiada a partir de leyes empíricas y datos experimentales [29, 30, 31], a continuación desarrollamos el planteamiento llevado a cabo en la teoría de Ginzburg-Landau para describir dicha dependencia.

4.4. Teoría de Ginzburg-Landau

En el modelo de Landau (1936), el cual se usa para describir transiciones de fase de segundo orden (sin calor latente), se asume que estas se describen en términos de un parámetro de orden que se anula por encima de la temperatura crítica pero toma valores distintos de cero para los valores de temperatura en los que se da la transición [32]. Este modelo fue usado inicialmente para estudiar transiciones ferromagnéticas, sin embargo en 1950, Ginzburg y Landau aprovecharon este enfoque para estudiar la dependencia con la temperatura en sistemas superconductores, dado que la transición de fase de estos es de segundo orden [29]. Se asume así, que el parámetro de orden es una cierta función de onda macroscópica compleja ψ y, a partir de esta, se expande hasta cuarto orden la energía libre de Gibbs del sistema,

$$F = F(T) + \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4. \quad (4.4.1)$$

Generalizando esta expresión, teniendo en cuenta gradientes de energía, campo magnético aplicado e interacción entre las cargas y el campo electromagnético, la minimización de la energía libre nos conduce a las dos ecuaciones de Ginzburg-Landau:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\nabla - \frac{ie^*}{\hbar} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right]^2 \psi(\mathbf{r}) + \alpha\psi(\mathbf{r}) + \beta|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.4.2a)$$

$$-\frac{ie^*\hbar}{2m^*} [\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})] - \frac{e^{*2}}{m^*} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (4.4.2b)$$

En el caso de un superconductor uniforme sin presencia de campo magnético, la ecuación (4.4.2a) tiene como soluciones: $|\psi| = 0$ y $|\psi| = (-\alpha/\beta)^{1/2}$. Para modelar la transición de fase superconductora, β puede ser una constante positiva y se exige que $\alpha = \alpha(T)$ sea una función cuyo signo cambie en $T = T_c$, así:

$$\alpha = a(T - T_c), \quad (4.4.3)$$

con a constante, por lo que las soluciones quedan de la forma:

$$|\psi| = \begin{cases} 0 & , \quad T > T_c \\ \left(\frac{a(T_c - T)}{\beta} \right)^{1/2} & , \quad T < T_c \end{cases}. \quad (4.4.4)$$

De la ecuación (4.4.2b) se tiene que para un superconductor uniforme

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{e^{*2}}{m^*} |\psi(\mathbf{r})|^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad (4.4.5)$$

pero usando la ley de Ampère-Maxwell en el primer término de la ecuación de London (4.2.7), y $\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ en el segundo término, puede llegarse a

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -\frac{e^{*2}}{m^*} \eta_s \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (4.4.6)$$

Comparando estos últimos dos resultados, se llega a que el módulo al cuadrado del parámetro de orden es la densidad superelectrónica y por tanto, según (4.2.5), la dependencia con la temperatura de λ_L estaría dada por:

$$\lambda_L(T) = \left(\frac{m^* \beta}{\mu_0 e^{*2} a T_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.4.7)$$

Tomando su valor mínimo en $T = 0$ y divergiendo en $T = T_c$, lo que da cuenta de la pérdida total del diamagnetismo en el material [29]. Debido a que la expresión (4.4.3) es completamente arbitraria, pueden ser usadas otras expresiones empíricas que se ajusten mejor a los resultados experimentales debido a que se ha observado que la dependencia temporal de $\lambda_L(T)$ está supeditada a las propiedades del material [33]. En el modelo de Gorter-Casimir para superconductores convencionales se propone:

$$\lambda_L(T) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^p}}, \quad (4.4.8)$$

donde λ_0 es la longitud de penetración de London a $T = 0$, p es igual a 2 para superconductores de alta temperatura² ($T_c > 77K$) e igual a 4 para los de baja temperatura ($T_c < 77K$) [31]. No obstante, trabajar con $p = 4$ para superconductores de alta temperatura es un muy buen ajuste dados ciertos parámetros [17]. Otros autores incluso operan con $p = 3$ [6].

²Los superconductores cuya temperatura es superior a las $77K$ son denominados de alta temperatura, ya que a este valor el nitrógeno alcanza su punto de ebullición, por lo que es posible mantener un material en estado superconductor en un baño de nitrógeno líquido.

4.5. Índice de refracción de un superconductor

Dado el marco teórico presentado hasta ahora, es posible describir la propagación de las ondas electromagnéticas en un medio dispersivo. En el caso superconductor, se ha modelado como un fluido de partículas cargadas donde los portadores de carga son superelectrones, por lo que es posible establecer la analogía con la propagación electromagnética en un plasma [34].

Si las longitudes de onda son lo suficientemente largas como para que contengan muchas distancias interatómicas entonces es posible estudiar la dependencia del índice de refracción superconductor n_s a partir de una descripción clásica. La fuerza que actúa sobre cada superelectrón en el límite no relativista está dada por $e^*\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = m^*\dot{\mathbf{v}}$. Así, usando la definición de $\mathbf{J}_s$, la ley de Ohm y la ecuación (4.2.5), puede deducirse de (2.1.1a) que la conductividad del superconductor se expresa como:

$$\sigma = i \frac{1}{\mu_0 \omega \lambda_L^2}, \quad (4.5.1)$$

donde ω es la frecuencia de la onda electromagnética. Así, el índice de refracción complejo

$$n(\omega) = c\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\epsilon\omega}} \quad (4.5.2)$$

para el material superconductor, dependiente de la longitud de onda, queda descrito de la forma:

$$n_s(\lambda) = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi\lambda_L} \right)^2}. \quad (4.5.3)$$

De esta expresión es importante resaltar dos resultados: el índice de refracción depende de λ_L , y esta a su vez es una función de la temperatura como se discutió en la sección anterior, por lo que $n(\lambda) = n(\lambda, T)$. Por último, se puede notar que a temperatura fija existe una longitud de onda $\lambda = 2\pi\lambda_L$ en la cual el índice de refracción se anula y, a partir de allí, empieza a tomar valores complejos. Este valor se denomina λ_{th} , por su nombre en inglés *lambda threshold*, y tendrá importantes efectos en los espectros de reflectancia.

4.6. Brecha energética superconductora

Aunque la teoría de Ginzburg-Landau describe apropiadamente los fenómenos macroscópicos de la superconductividad, es necesario describir estos materiales desde un punto de vista microscópico para entender ciertos fenómenos. De esto se encargaron John Bardeen, Leon Cooper y John Robert Schrieffer al desarrollar la teoría BCS de la superconductividad en 1957 [35].

En el estado base normal, los electrones ocupan por completo todos los estados por debajo de la energía de Fermi, cuando estos no interactúan entre ellos se tiene el mar de Fermi, en el cual pequeñas excitaciones arbitrarias tienen lugar permitiendo que un electrón esté por encima de la superficie de Fermi. La teoría BCS supone una interacción atractiva entre electrones, la cual produce que este nuevo estado base esté separado de los estados excitados por una brecha energética de valor E_g [36].

De esta forma, la ocupación de los estados se da en forma que si el estado con vector de onda $\mathbf{k}$ y spin up está ocupado, entonces el orbital con vector de onda $-\mathbf{k}$ y spin down también lo está, y viceversa. Esta configuración en dúos de electrones se denomina formación de *pares de Cooper*, los cuales al tener spin nulo obedecen la estadística de Bose-Einstein [36]. El estado

fundamental de pares de Cooper tiene una energía menor que el estado fundamental normal, por eso este último se dice inestable con respecto a la formación de pares de Cooper y en $T = 0$ la banda más baja se encuentra completamente ocupada por estos pares. Sin embargo, para $T > 0$ se producen excitaciones promoviendo los electrones a estados más energéticos, mas para poder ocupar estos estados es necesario que el par de Cooper se rompa quedando finalmente dicha banda con dos nuevos electrones normales individuales y no interactuantes [27].

En este orden de ideas, una radiación incidente con energía superior a E_g rompería los pares de Cooper del material destruyendo localmente el estado superconductor [37]. Esto podría representar un problema relevante ya que de la razón adimensional de la teoría BCS se tiene la aproximación $E_g \approx 3,528k_B T$ [27]. Para superconductores de alta temperatura como el YBCO dicho valor se encuentra al rededor de los $30meV$ y la energía de radiación de un laser en el espectro visible es del orden de $3eV$, esto es 100 veces mayor a la energía necesaria para romper los pares de Cooper [38]. Sin embargo, experimentalmente pueden tomarse dos consideraciones en cuenta para evitar este problema:

La muestra puede ser irradiada con un laser de potencia menor a cierto valor que permita al material mantenerse en el estado superconductor, esta fue la estrategia usada por Luz E. González y su equipo al trabajar experimentalmente con cristales fotónicos con componentes superconductores siendo radiados por un laser en el espectro visible, observando que no se tienen más que fluctuaciones térmicas y, para una potencia menor a $10mW$, la interacción radiación-materia no altera la superconductividad del YBCO permitiendo que el cristal fotónico radiado conserve sus propiedades superconductoras [38]. Por último, es importante garantizar que el material se mantenga en un baño térmico de forma que la temperatura se mantenga constante y por debajo de su valor crítico. De esta forma, aunque se tenga la energía necesaria para romper los pares de Cooper, las condiciones experimentales promueven que los pares rotos vuelvan a unirse, por lo que el estado superconductor se mantiene. Es importante recordar del modelo de los dos fluidos que por encima de $T = 0$ existen electrones normales y superelectrones, por lo que es inevitable que los pares se rompan, mas estos pueden volver a formarse.

4.7. Anisotropía

Por último, es importante resaltar otra característica importante de los compuestos superconductores y es su anisotropía, las propiedades del mismo dependen de su orientación. En el caso del YBCO, su resistividad es dos órdenes de magnitud superior en el eje de anisotropía c que paralelo al plano ab , perpendicular a ese eje [27]. La dependencia angular de estas propiedades, como la resistividad ρ , sigue la función

$$\rho(\theta) = \rho_{ab} \sin^2 \theta + \rho_c \cos^2 \theta, \quad (4.7.1)$$

siendo θ igual al ángulo con respecto al eje c . Este comportamiento se observa también en la longitud de penetración de London λ_L del material, por lo que es importante considerar este efecto en la construcción del cristal y al definir sus parámetros.

CAPÍTULO

5

RESULTADOS

En el siguiente capítulo se mostrarán y analizarán los resultados obtenidos al estudiar la respuesta óptica de un cristal fotónico anular ternario con la configuración superconductor, dieléctrico, superconductor.

Los parámetros a variar son el número azimutal m introducido en las ecuaciones de Bessel, el radio del centro del cilindro ρ_0 en el cual se tiene el vacío, el índice de refracción del dieléctrico n_D que al ser una constante será considerado como uno de los parámetros del sistema, la temperatura T la cual se toma como la del baño térmico en el que se encuentra el cristal y por último, los espesores d de las capas tanto de los superconductores como del dieléctrico.

Además, se analizarán los resultados para las dos polarizaciones anulares descritas en el capítulo 3, tanto la transversal eléctrica (TE) como la magnética (TM). También se variará el material superconductor de la tercera capa para estudiar la dependencia del material en la respuesta óptica.

5.1. Cristal compuesto por YBCO, SrTiO₃ y BSCCO

Inicialmente consideraremos para la segunda capa del cristal un dieléctrico con espesor $d_D = 120nm$ e índice de refracción igual al del SrTiO₃, esto es $n_D = 2,437$, se modelará dicho valor teóricamente constante a cambios de otros parámetros en el sistema. A los lados de este se ubicarán dos capas superconductoras de espesor $d_{S1} = d_{S2} = 70nm$ de los siguientes materiales:

- | | |
|--|--|
| ■ Primera capa: YBa ₂ Cu ₃ O ₇ (YBCO) | ■ Tercera capa: Bi ₂ Sr ₂ CaCu ₃ O ₈ (BSCCO) |
| • $T_c = 92K$ | • $T_c = 95K$ |
| • $\lambda_0 = 140nm$ | • $\lambda_0 = 150nm$ |

Cuyas propiedades se toman, para el YBCO de [27, 39] y para el BSCCO de [16]. Ambos superconductores de alta temperatura crítica cuyos valores se encuentran muy cerca entre sí, solo $3K$ de diferencia.

El cristal se encuentra inmerso en un medio con índice de refracción $n_0 = n_f = 1$ el cual, además, cumple la función de baño térmico manteniendo el cristal a una temperatura de $77K$. Con este valor de temperatura se usa la ecuación (4.4.8) con $p = 4$ [17] para calcular la longitud de penetración de London λ_L de los superconductores y, a partir de este resultado, se calcula la longitud de onda umbral λ_{th} para ambos usando (4.5.3), obteniendo:

■ YBCO a $77K$

- $\lambda_L = 196,173nm$
- $\lambda_{th} = 1232,59nm$

■ BSCCO a $77K$

- $\lambda_L = 198,957nm$
- $\lambda_{th} = 1250,08nm$

Con el objetivo de estudiar la estructura de bandas fotónicas de este cristal, se graficará la reflectancia en función de la longitud de onda, esta se obtiene a partir de la matriz transferencia del sistema construida en (3.5.8), para la cual $\kappa = 3$ y N puede ser escogido a conveniencia de forma que permita obtener resultados óptimos sin extender demasiado el tiempo de cómputo, por lo que se trabajará con $N = 6$ quedando así con el producto de 18 matrices transferencia. Al discutir el software en el que se implementaría el método numérico se decidió usar *Wolfram Mathematica 13.1* ya que era el lenguaje en el que se han desarrollado los estudios anteriores en el grupo de investigación.

5.1.1. Comparación sistema plano y anular

Para verificar que el sistema haya sido descrito correctamente, primero se reproducen los resultados obtenidos para el cristal anular en el artículo [39], obteniendo los mismos resultados en nuestro modelo. Después de esta comprobación se reescribe el código para modelar nuestro sistema anular ternario y se inicia un estudio equivalente con nuestro cristal: Primero, en polarización TM, se comparan los espectros del cristal anular para $m = 0$ con el sistema plano equivalente, este último conserva los mismos parámetros y la incidencia de la radiación electromagnética es normal. En la figura 5.1 se presentan espectros de reflectancia correspondientes a los dos tipos de cristales fotónicos.

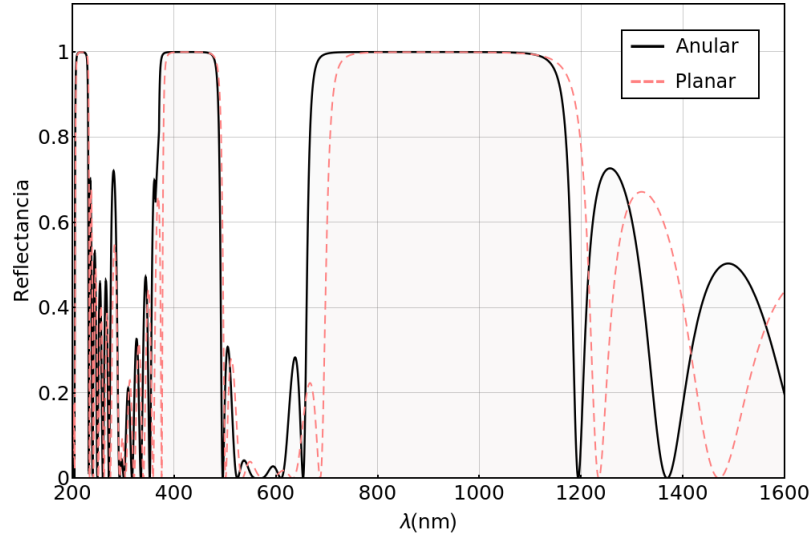


Figura 5.1: Comparación de los espectros de reflectancia en función de la longitud de onda λ entre un cristal fotónico anular (línea continua) y uno plano (línea discontinua). Para ambos se usaron los parámetros $N = 6$, $d_{S1} = 70nm$, $d_D = 120nm$, $d_{S2} = 70nm$, $T = 77K$, en el caso anular se tiene $\rho_0 = 1000nm$ y $m = 0$, mientras que en el caso plano el ángulo de incidencia $\theta_{inc} = 0$.

Puede observarse que la respuesta óptica en ambos casos es equivalente, salvo un notable corrimiento hacia longitudes de onda más altas en el sistema plano. Este resultado permite establecer una relación entre el comportamiento planar y el anular para $m = 0$, el cual puede explicarse recordando que el número azimutal da cuenta de la periodicidad angular de las ondas cilíndricas, al anularse se dejan de considerar las propiedades cilíndricas quedando con un sistema que se comporta como un cristal fotónico plano.

En este espectro de reflectancia se observa una delgada brecha fotónica cerca a $200nm$, en el ultravioleta; para estos valores los resultados dejan de ser confiables ya que al usar un modelo clásico se debe garantizar que las longitudes de onda sean mucho mayores a las distancias interatómicas, por lo que nos centraremos en los resultados del espectro visible en adelante. La siguiente brecha es un poco más extensa abarcando desde parte del ultravioleta hasta tonos entre el azul y el verde en el espectro visible. La última brecha, la más extensa de todas, se encuentra en el rojo del espectro visible pero la mayor parte de esta se ubica en el infrarrojo. En valores por encima de esta brecha se tiene la zona de permitividad cero de ambos superconductores, dada por λ_{th} ; por esto, es conveniente estudiar el espectro de reflectancia en un rango de λ entre $200nm$ y $1600nm$.

5.1.2. Variación del número azimutal m

Manteniendo los parámetros anteriores, salvo por el radio del centro $\rho_0 = 500nm$, se analizará ahora el efecto que tiene el número azimutal m en el sistema, este da cuenta de la periodicidad angular de nuestro sistema anular. En la figura 5.2 se muestran los espectros de reflectancia, en polarización TE y TM, para distintos valores de m ; recordando que este valor debe ser estrictamente entero.

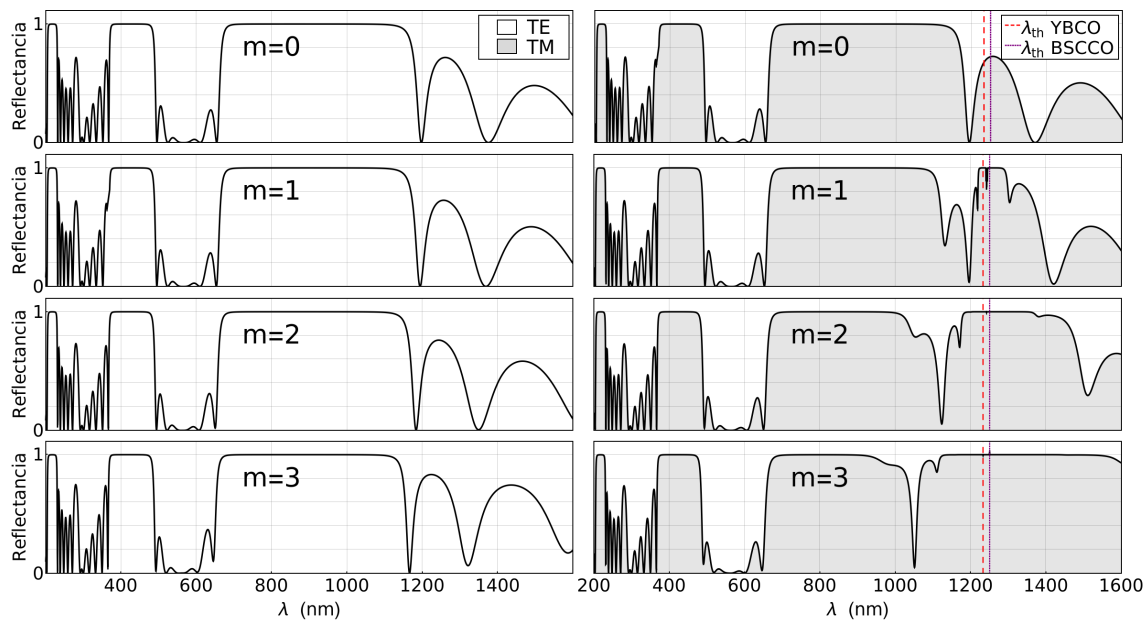


Figura 5.2: Espectros de reflectancia al variar el número azimutal m en un cristal fotónico anular para polarización TE (blanca) y TM (sombreada). Los parámetros usados son $N = 6$, $d_{S1} = 70nm$, $d_D = 120nm$, $d_{S2} = 70nm$, $T = 77K$ y $\rho_0 = 500nm$.

En polarización TE no se tienen variaciones considerables, además se da un comportamiento equivalente al de la figura 5.1. No hay una razón por la que la propagación de las ondas se vea afectada por el número azimutal, ya que para ambas polarizaciones no cambia la periodicidad ni la estructura de nuestro sistema, únicamente el estado de momento angular se ve modificado.

No obstante, se observa que el comportamiento de las brechas cambia en polarización TM a partir de $m = 1$. En este caso, el efecto de la interacción de la componente radial del campo eléctrico E_ρ de la radiación incidente con los superelectrones de los superconductores en el sistema es la responsable de estas dos nuevas brechas. De la ecuación (3.3.2a), se tiene una dependencia lineal de la componente radial del campo con m , por lo que la variación del número azimutal tiene efectos en la interacción modificando el tamaño de la brecha, esto se hace evidente al notar que dicha brecha aparece en la zona de permitividad cero de cada superconductor. Al no existir esta interacción en polarización TE el espectro no cambia.

A partir de este momento vamos a identificar estas nuevas brechas como *brechas fotónicas superconductoras*¹, es notable que el ancho de estas aumenta drásticamente con m , por lo que en este caso los cristales anulares son altamente sensibles al estado de momento angular de las ondas. Retomando la discusión con respecto a la ecuación (3.3.2a), en donde se evidencia que la variación de m tiene efectos directos en la componente lineal del campo para modos no nulos, se tiene que la interacción responsable de la brecha se intensifica al aumentar m ampliando su ancho. Esto también explica por qué el caso $m = 0$ es equivalente al caso TE, ya que esto anula la interacción quedando con un sistema que no evidencia presencia superconductora.

Esta nueva brecha fotónica superconductora ya había sido observada anteriormente al introducir un superconductor en el cristal [6, 7, 14, 16, 17, 31, 39]. Sin embargo, se obtiene como nuevo resultado que se genera una brecha por superconductor y su posición en el espectro es fácil de predecir ya que solo es necesario conocer la longitud de onda umbral λ_{th} del material.

5.1.3. Variación del radio del centro del cilindro ρ_0

Una forma de seguir evidenciando esta equivalencia entre el sistema plano y en el que se tiene $m = 0$, es variando el radio del centro ρ_0 . Fijando $m = 1$ y manteniendo todos los parámetros anteriores iguales. Los resultados se muestran en la figura 5.3.

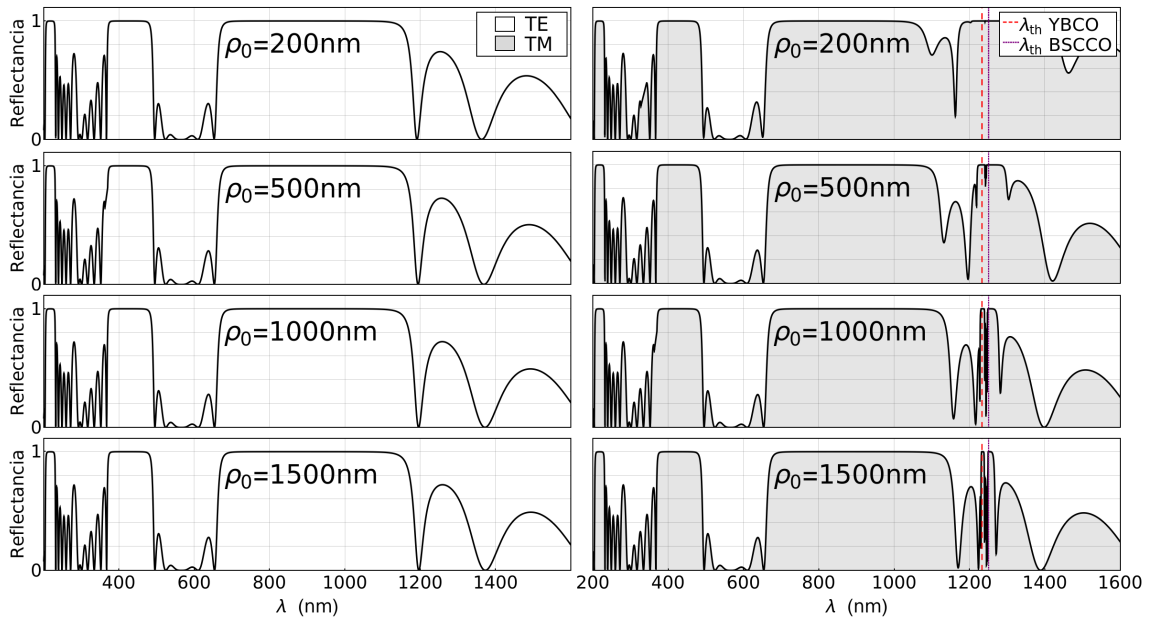


Figura 5.3: Respuesta óptica del cristal fotónico anular al modificar el radio del centro ρ_0 para polarización TE (blanca) y TM (sombreada). Manteniendo $N = 6$, $d_{S1} = 70\text{nm}$, $d_D = 120\text{nm}$, $d_{S2} = 70\text{nm}$, $T = 77\text{K}$ y $m = 1$.

¹No confundir con la brecha energética superconductora descrita en la sesión 4.6

Una vez más, no se muestra una dependencia considerable de las brechas fotónicas con el radio del centro para polarización TE, pero en el caso TM se nota un adelgazamiento en las brechas fotónicas superconductoras al aumentar el radio. Esto podría explicarse al notar que a medida que ρ_0 aumenta el cristal va perdiendo su caracter anular y puede empezar a ser visto como un sistema plano para efectos prácticos, provocando que su estructura de bandas fotónicas se asemeje al de un cristal plano, disminuyendo el grosor de sus brechas hasta parecerse a las obtenidas en polarización TE. Este efecto de brechas delgadas puede llegar a ser muy valioso en la construcción de *narrow band filters*.

5.1.4. Variación del índice de refracción del dieléctrico n_D

Hasta ahora se ha usado el dieléctrico SrTiO₃, sin embargo, dado que la existencia de las brechas se asocia con las condiciones de periodicidad del material, se hace interesante variar el índice de refracción del dieléctrico para afectar directamente las propiedades del cristal. Fijamos $d_{S1} = 45nm$, $d_D = 90nm$ y $d_{S2} = 45nm$ para apreciar mejor los efectos, reportando los resultados de la figura 5.4.

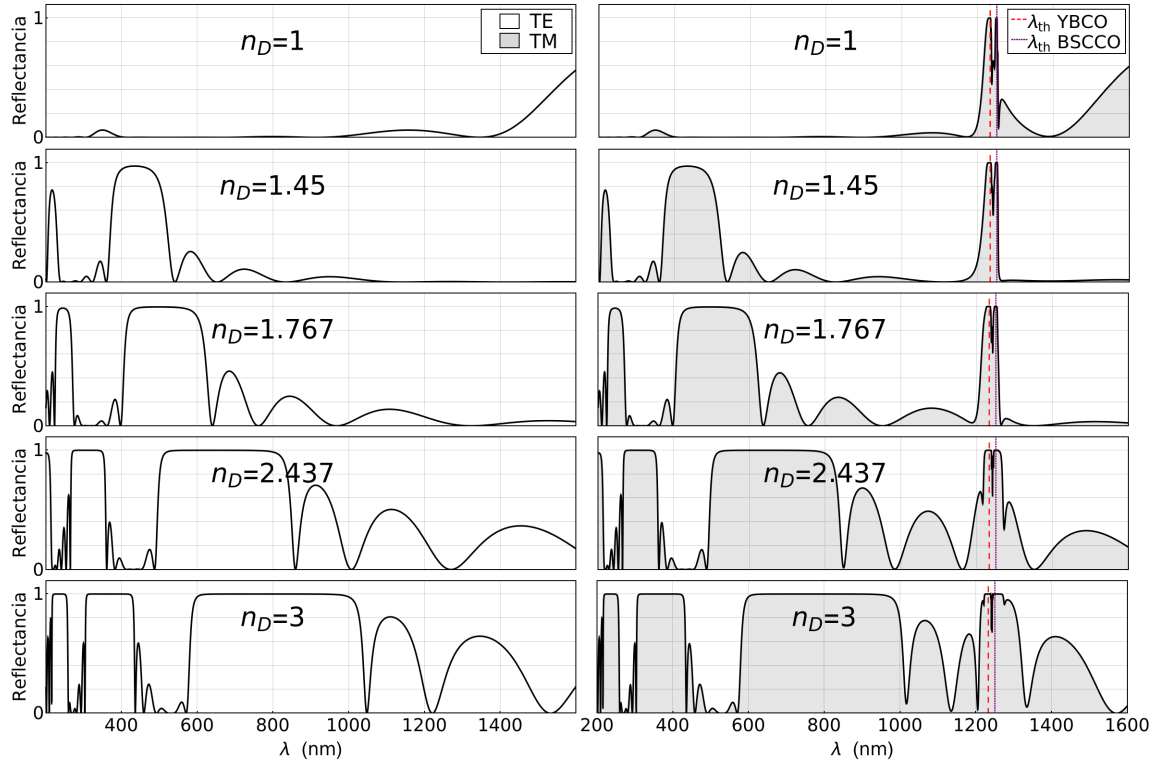


Figura 5.4: Efecto de la variación del índice de refracción del dieléctrico n_D en el espectro de reflectancia del cristal fotónico anular para ondas TE (blanca) y TM (sombreada). Con $N = 6$, $d_{S1} = 45nm$, $d_D = 90nm$, $d_{S2} = 45nm$, $\rho_0 = 500nm$ y $m = 1$.

Analizando primero los resultados para polarización TE, se observa que para $n_D = 1$ no existe ninguna brecha fotónica dentro de la porción del espectro estudiada, esto se debería a que, según la ecuación (4.5.3), el índice de refracción de un superconductor n_S es una función que puede ser igual a uno como máximo, por lo que si n_D es igual a uno el sistema no tendría una periodicidad tan marcada. Según [2], el ancho de las bandas fotónicas está dado por la razón entre el rango de las frecuencias de la brecha $\Delta\omega$ y la frecuencia de su punto medio ω_{mid} , denominada *gap-midgap ratio*:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_{mid}} = \frac{4}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2} \right), \quad (5.1.1)$$

esta mide el ancho de la brecha en un cristal en el que se tienen dos materiales con índices de refracción n_1 y n_2 . Es claro, a partir de aquí, que a mayor diferencia entre los índices de refracción mayor es el ancho de la brecha, así que lo que determina qué tan extensa es la brecha sería el contraste entre las propiedades de los materiales. Por este motivo, cuando $n_D = 1$ las brechas no son apreciables porque los valores de los índices de refracción en el sistema son lo suficientemente similares entre sí como para que no se experimenten efectos debido a la periodicidad. A medida que aumenta n_D se acentúa el contraste entre las propiedades de los materiales, lo que produce que empiecen a aparecer las brechas y se hagan cada vez más anchas, presentando además un corrimiento hacia longitudes de ondas mayores.

En polarización TM se observa el mismo comportamiento salvo por las brechas fotónicas superconductoras, las cuales permanecen en el sistema aún cuando la periodicidad no es lo suficiente marcada. Esto se debe a que la existencia de estas brechas está asociada con la presencia de superconductores en el sistema, aún cuando el valor del índice de refracción de estos sea muy similar al del dieléctrico, la interacción radiación-superconductor sigue ocurriendo, por lo que las brechas permanecen. No obstante, estas sí se ven afectadas por el gap-midgap ratio en cuanto a que a medida que aumenta la diferencia entre índices de refracción, aumenta también el grosor de estas brechas.

5.1.5. Variación de la temperatura T

Una vez modificado el ancho de las brechas podemos preguntarnos si es también posible modificar a conveniencia su posición en el espectro electromagnético. Debido a que las brechas asociadas a los superconductores se encuentran centradas en λ_{th} , al variar su valor podríamos cambiar las brechas de posición. Dado que λ_{th} depende de λ_L y esta, a su vez, depende de la temperatura, como se mostró en (4.4.8), entonces al variar T la posición de las brechas cambiaría. Los espectros obtenidos se muestran en la figura 5.5.

Puede observarse que en polarización TE no se observan cambios, debido a que la temperatura no está relacionada con la periodicidad del material y, además, las brechas que deben responder a cambios de temperatura son las superconductoras, las cuales no aparecen en el caso TE. En cambio, para polarización TM se observa claramente cómo la posición de las brechas cambia. No es difícil hallar la función que describe esta dinámica, usando la definición de λ_{th} y la ecuación (4.4.8) se llega a que la posición de la brecha está dada por:

$$\lambda_{th}(T) = 2\pi \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4}}, \quad (5.1.2)$$

de forma que es posible predecir la posición de la brecha fotónica superconductora para una temperatura y superconductor dado. Sumado a esto, puede verse como las brechas se van acercando hasta llegar a una temperatura en la que los valores de λ_{th} son iguales, por lo que las dos brechas se comportan como una sola. Igualando las longitudes de onda umbrales de ambos superconductores puede hallarse la temperatura en la que esto ocurre, obteniendo:

$$T^4 = \frac{(T_{c1}T_{c2})^4 (\lambda_{01}^2 - \lambda_{02}^2)}{\lambda_{01}^2 T_{c1}^4 - \lambda_{02}^2 T_{c2}^4}, \quad (5.1.3)$$

con T_{cj} la temperatura crítica y λ_{0j} la longitud de penetración de London a $T = 0$ del superconductor j , obteniéndose $T = 79,272K$ para el caso del YBCO y el BSCCO.

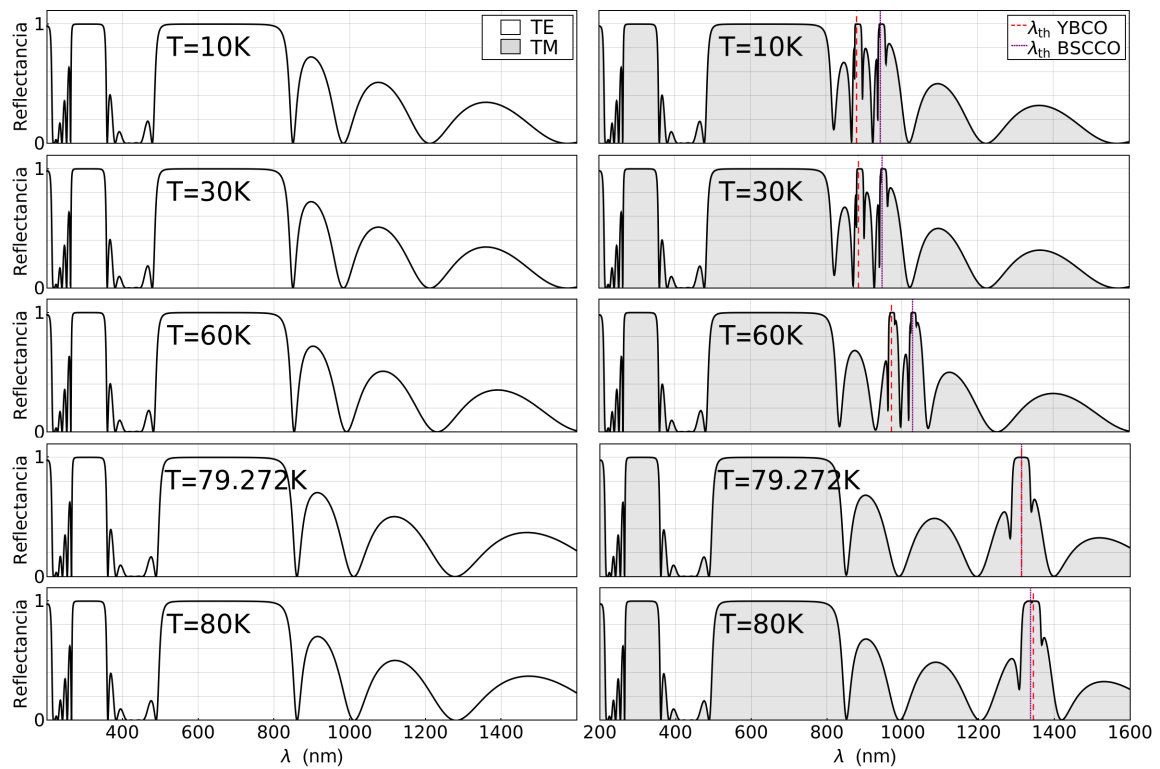


Figura 5.5: Reflectancia del cristal fotónico anular en función de la longitud de onda para cambios de temperatura en el sistema con ondas TE (blanca) y TM (sombreada). Para $N = 6$, $d_{S1} = 45nm$, $d_D = 90nm$, $d_{S2} = 45nm$, $\rho_0 = 500nm$ y $m = 1$.

A partir de esta temperatura las brechas vuelven a separarse, sin embargo no se sigue aumentando más el valor de T ya que no es conveniente acercarnos a la temperatura crítica de los superconductores. Volveremos a este problema más adelante.

5.1.6. Variación del espesor de las capas d

Por último, se analizará la dependencia que tienen las brechas fotónicas ante cambios de espesores de las capas cilíndricas en la figura 5.6.

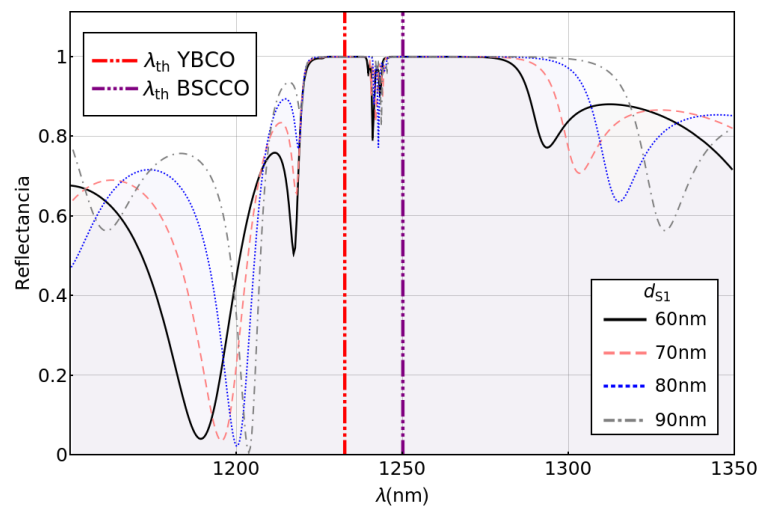


Figura 5.6: Reflectancia para cambios de d_{S1} en polarización TM con los parámetros $N = 6$, $d_D = 120nm$, $d_{S2} = 70nm$, $T = 77K$, $\rho_0 = 500nm$ y $m = 1$.

En particular se varía el espesor de la primera capa superconductora notando que el sistema no es muy sensible a estas variaciones ya que los cambios no son fácilmente reconocibles en las gráficas obtenidas. Por este motivo se decide estudiar el espectro de reflectancia para polarización TM en un rango de longitudes de onda entre $1130nm$ y $1350nm$, donde se encuentran las brechas fotónicas superconductoras.

Aún así puede verse que, aunque hay un aumento en el grosor de las brechas al aumentar el espesor de la capa, estas se encuentran muy cerca entre sí debido a que las propiedades de los superconductores son muy similares. Por esto, es conveniente cambiar la tercera capa superconductora por una de un material con características que difieran más del YBCO.

5.2. Cristal compuesto por YBCO, $SrTiO_3$ y Hg-1223

El $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{10}$ (Hg-1223) es un superconductor de alta temperatura cuyas propiedades son [31]:

- $HgBa_2Ca_2Cu_3O_{10}$ (Hg-1223) a $77K$
 - $T_c = 135K$
 - $\lambda_0 = 177nm$
 - $\lambda_L = 187,182nm$
 - $\lambda_{th} = 1176,10nm$

Debido a que su temperatura crítica difiere más del YBCO que el BSCCO, se esperaría que las brechas fotónicas superconductoras de ambos materiales estén más distanciadas entre sí.

5.2.1. Variación del radio del centro del cilindro ρ_0

Para comenzar, se retoma el estudio del radio del centro ρ_0 reportando los resultados en la figura 5.7.

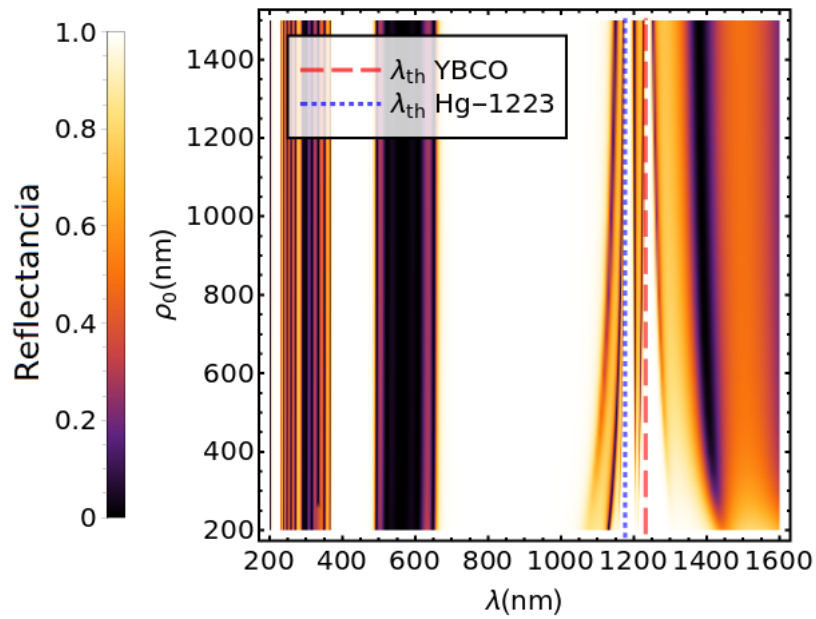


Figura 5.7: Espectro de reflectancia para ondas TM en el cristal fotónico anular con YBCO y Hg-1223 para cambios de ρ_0 . Los parámetros son $N = 6$, $d_{S1} = 70nm$, $d_D = 120nm$, $d_{S2} = 70nm$, $T = 77K$ y $m = 1$.

Ahora el espectro de reflectancia se estudiará usando mapas de calor y debido a que en TE no se tienen cambios asociados al superconductor se analiza solo el caso con polarización TM. En este caso el valor de reflectancia se tiene en la barra de color por lo que las brechas fotónicas se encuentran en las zonas en las que el mapa de calor se torna blanco.

Puede observarse claramente como para los valores más bajos de radio las brechas asociadas a los superconductores son más anchas. A medida que este radio aumenta las brechas se hacen más estrechas, acercándose cada vez más al comportamiento planar en donde no se tienen dichas brechas, caso equivalente a cuando se tiene polarización TE. Además se tiene una mayor separación entre las brechas, permitiendo que se diferencia mejor cada una de estas que en el caso de la figura 5.3. Sin embargo, para valores más bajos de ρ_0 es inevitable que ambas, al hacerse más anchas, vuelvan a juntarse pareciendo una sola brecha.

También es importante notar que este crecimiento, al disminuir ρ_0 , se da hacia la derecha de λ_{th} , que es donde el índice de refracción de los superconductores toma valores imaginarios. Lo que refuerza el supuesto de que estas brechas existen debido a la presencia de superconductores en los cristales y que es su carácter dispersivo, y la existencia de su zona de permitividad cero, lo que produce la brecha fotónica superconductora.

5.2.2. Variación del índice de refracción del dieléctrico n_D

Ahora, volvemos a analizar para el nuevo material el efecto que el índice de refracción del dieléctrico produce en las propiedades ópticas del cristal. En la figura 5.8 se analiza el espectro de reflectancia en este caso.

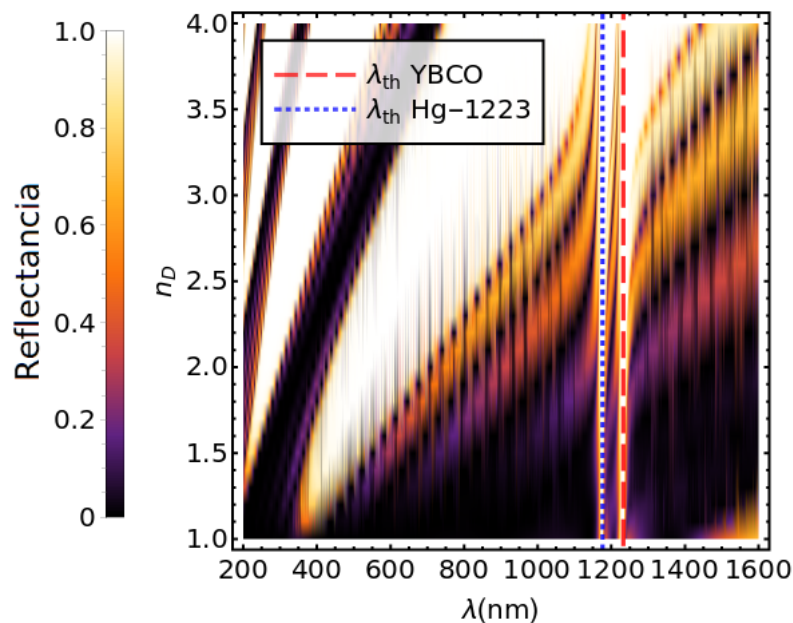


Figura 5.8: Respuesta óptica ante variaciones del índice de refracción del dieléctrico en el cristal fotónico anular para polarización TM. Se fijan $N = 6$, $d_{S1} = 70nm$, $d_D = 120nm$, $d_{S2} = 70nm$, $T = 77K$, $\rho_0 = 500nm$ y $m = 1$.

En este mapa de calor se aprecia el determinante efecto que tiene la periodicidad del cristal en las brechas. Para $n_D = 1$ no se presentan brechas al igual que en los resultados de la figura 5.4, puede verse que el espectro es completamente oscuro lo que permite la transmisión de ondas electromagnéticas de todas las longitudes de onda dentro de nuestro intervalo. Sin embargo, a medida que n_D va aumentando, las brechas empiezan a aparecer, se hacen cada vez más anchas

y presentan corrimiento a valores más altos de longitud de onda, al igual que en el caso anterior porque el contraste entre los índices de refracción del dieléctrico y el de los superconductores tiene efectos en el ancho de las bandas, según la ecuación (5.1.1).

No obstante, hay dos brechas que permanecen en la misma posición para todo valor de n_D , y como estas se ubican justo en la zona de permitividad cero de cada superconductor podemos deducir que se trata de las brechas fotónicas superconductoras. Aunque su posición permanece constante, su grosor aumenta con n_D obedeciendo también la relación (5.1.1). Se confirma en general que el índice de refracción afecta la posición y ancho de las brechas fotónicas asociadas a la periodicidad, pero solo el ancho de las asociadas a los superconductores.

5.2.3. Variación de la temperatura T

Estudiamos ahora el espectro de reflectancia ante variaciones de la temperatura obtenido en la figura 5.9.

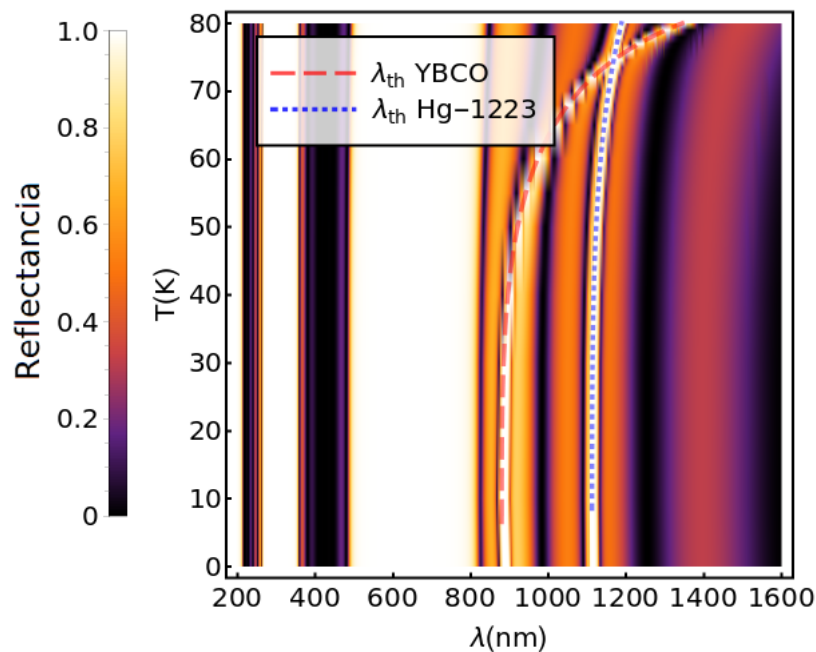


Figura 5.9: Efecto de los cambios de temperatura en el espectro de reflectancia con ondas TM. Para $N = 6$, $d_{S1} = 70nm$, $d_D = 120nm$, $d_{S2} = 70nm$, $\rho_0 = 500nm$ y $m = 1$.

Ahora las brechas asociadas a la periodicidad del cristal permanecen en la misma posición y con el mismo ancho, sin embargo, las brechas fotónicas superconductoras se tornan dinámicas, justo lo contrario a lo que se obtuvo al variar n_D en el caso anterior. Para bajas temperaturas no hay efectos apreciables, esto dado que (5.1.2) describe funciones cuyos cambios notables se empiezan a dar a medida que los superconductores se acercan a su temperatura crítica. Esto explica por qué la brecha asociada al YBCO presenta cambios más pronunciados y la del Hg-1223 no, debido a que la temperatura crítica de este último está aún lejos de ser alcanzada.

Puede también calcularse el punto de corte entre ambas brechas usando (5.1.3), obteniendo que este se da a $74,620K$, lo que se ajusta a los resultados obtenidos. Debido a este efecto podemos decir que los cristales fotónicos anulares con presencia de superconductores, para polarización TM, son sistemas altamente sensibles a variaciones de temperatura.

5.2.4. Variación del espesor de las capas d

Finalmente, se hace el respectivo análisis de la respuesta óptica ante variaciones de los grosores de las capas. Con la combinación anterior de superconductores era difícil apreciar los efectos entre las brechas ya que estas se encontraban muy cerca entre sí, ahora que se tienen brechas más separadas estos efectos pueden ser estudiados.

Sumado a esto, se busca también responder la pregunta de si el orden de los materiales tiene algún efecto en los resultados, por lo que se invierte el orden de los superconductores ubicando el Hg-1223 en la primera capa y el YBCO en la tercera.

Se varían, así, inicialmente los anchos de la capa d_{S1} siendo este el YBCO, la capa d_D del dieléctrico y la d_{S2} del Hg-1223, reportando los resultados en la parte superior de la figura 5.10. La inversión de este orden se reporta en la parte inferior de esta misma figura. Al igual que en la figura 5.6. Analizando una sola capa a la vez, para los superconductores se hacen variaciones de $50nm$ a $100nm$ y en el dieléctrico de $100nm$ a $150nm$ ya que en estos intervalos es donde mejor se observa el fenómeno.

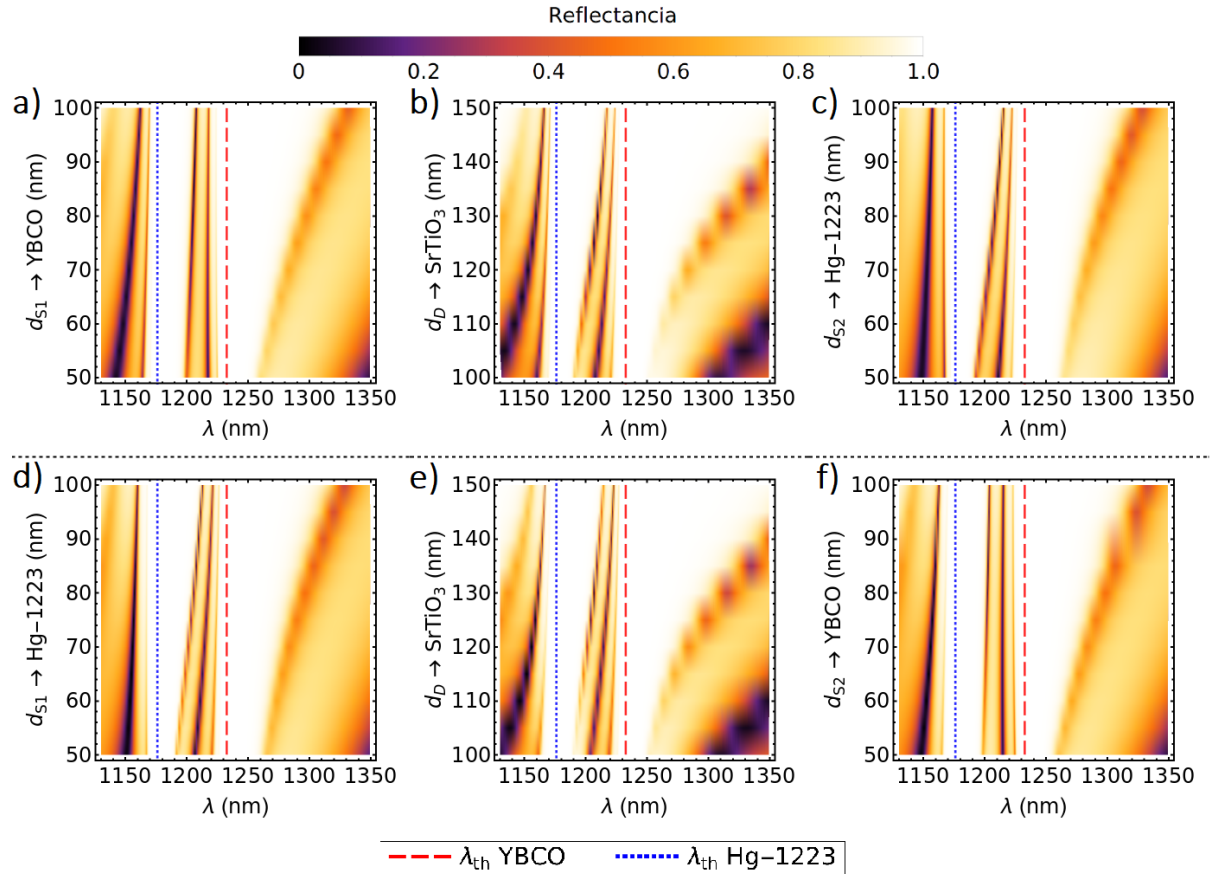


Figura 5.10: Respuesta óptica del cristal fotónico anular con ondas TM ante variaciones del grosor de las capas. En las gráficas superiores se muestra la variación de a) la primera capa superconductor de YBCO, b) el dieléctrico y c) la tercera capa que es el superconductor Hg-1223. En las gráficas inferiores se alterna el orden de los superconductores para verificar el efecto de las posiciones de los materiales, por lo que d) es la primera capa superconductoras de Hg-1223 e) sigue siendo el dieléctrico y f) es el YBCO. Los parámetros que se mantienen fijos son $N = 6$, $T = 77K$, $\rho_0 = 500nm$ y $m = 1$. Al variar una capa las otras se mantienen fijas en $d_{S1} = 70nm$, $d_D = 120nm$ o $d_{S2} = 70nm$.

Empezando por la figura 5.10a), se observa un crecimiento en el ancho de las brechas al aumentar d_{S1} , sin embargo, es la brecha asociada a la λ_{th} del YBCO en la que es notorio este efecto debido a que se encuentra a mayor longitud de onda, que es hacia donde aumenta el grosor de las brechas, debido a que en esta zona es que el índice de refracción de los superconductores pasa de tomar valores reales a complejos.

Para los resultados de la figura 5.10b) se nota una mayor sensibilidad en ambas brechas al aumentar d_D , observando también el efecto de crecimiento hacia mayores longitudes de onda, en donde una vez más la presencia de la brecha del YBCO no permite que la del Hg-1223 siga aumentando de grosor, mientras que la del YBCO aumenta sin ser detenida.

Por último, en la figura 5.10c) se estudia el espectro de reflectancia para cambios de la capa superconductora de Hg-1223, en este caso se observa una mayor sensibilidad en la brecha asociada a la λ_{th} del Hg-1223 al aumento del espesor de la capa con respecto a 5.10a), pero de igual forma a los casos anteriores, la siguiente brecha se encuentra inmediatamente después impidiendo que la primera siga creciendo. En general, es la brecha que se ubica a mayor longitud de onda la que más responde a cambios en el espesor de las capas.

Observando las variaciones al alternar la disposición de las capas en las figuras 5.10d), 5.10e) y 5.10f), no se notan cambios significativos con respecto a los primeros 3 resultados, por lo que el orden de los materiales no tendría efectos sobre la respuesta óptica, esto es de esperarse ya que se tiene una estructura periódica.

CAPÍTULO

6

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Al estudiar las propiedades ópticas de cristales fotónicos anulares ternarios con presencia de dos superconductores de alta temperatura y un dieléctrico, a partir de sus espectros de reflectancia, comparando la respuesta óptica en polarización TE y TM, se puede observar una nueva brecha fotónica por cada superconductor, las cuales están asociadas a la interacción entre la componente radial del capo eléctrico y los superelectrones. Estas brechas no se tiene para el caso TE ya que no se da dicha interacción.

Se observa además una equivalencia entre el comportamiento de un cristal fotónico plano con ángulo de incidencia cero y uno anular con número azimutal cero. Al variar distintos parámetros se observa, además, cómo estos modifican las brechas en la estructura de bandas fotónicas del cristal. Los principales resultados se resumen en la siguiente tabla:

	TE	TM
m	No hay cambios.	Las brechas fotónicas superconductoras aumentan drásticamente con m .
ρ_0	No hay cambios.	Las brechas fotónicas superconductoras disminuyen su grosor.
n_D	Las brechas fotónicas se hacen más gruesas y se corren hacia longitudes de onda mayor al aumentar el contraste entre los n .	Las brechas fotónicas superconductoras mantienen su posición pero aumentan su grosor.
T	No hay cambios	Las brechas fotónicas superconductoras modifican su posición obedeciendo el comportamiento descrito en (5.1.2).
d	No hay cambios considerables pero las brechas fotónicas asociadas a la periodicidad aumentan muy levemente su grosor.	El aumento de grosor en las brechas fotónicas superconductoras se da hacia longitudes de onda más altas.

Estas caracterizaciones de las estructuras nos permite obtener beneficios en cuanto a sus aplicaciones tecnológicas. Por ejemplo, la disminución de la longitud de las brechas observada permitiría crear muy buenos *narrow band filters* disminuyendo el ancho de bandas para aumentos del radio interno ρ_0 , controlar el ancho y la posición de estas brechas variando el índice de refracción del dieléctrico o el grosor de las capas haría que una onda electromagnética se refle-

je al interior del cilindro para una longitud de onda deseada, manteniéndola confinada lo cual presenta múltiples ventajas. Se observa además que al incorporar superconductores el cristal funciona como un muy buen sensor térmico.

Es importante, entonces, continuar con el estudio de estas estructuras modificando otros parámetros termodinámicos. Podrían estudiarse los efectos que un campo magnético tiene en el sistema ya que las propiedades superconductoras se ven modificadas en la presencia de estos campos. También podrían incorporarse materiales novedosos como grafeno en medios efectivos como una de las capas del cristal. Además, sería provechoso profundizar más en las posibilidades que estas estructuras presentan en el área de la espectroscopia, ya que si su respuesta óptica se ve modificada dependiendo del material que se encuentre en ellos, podría llevarse a cabo el proceso inverso para obtener información del material presente en el cristal a partir de la posición de las brechas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Skorobogatiy and J. Yang. *Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*. Cambridge University Press, 2009.
- [2] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade. *Photonic Crystals Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, 2 edition, 2008.
- [3] S. R. Elliot. *The Physics and Chemistry of Solids*. John Wiley & Sons, 1998.
- [4] Si-Jia Guo, Cai-Xing Hu, and Hai-Feng Zhang. Design of a one-way multichannel and wide-angle absorber based on the one-dimensional superconductor photonic crystals with the cascaded quasi-period structure. *Physica C: Superconductivity and its applications*, 575:1353668, 2020.
- [5] Hala J. El-Khozondar, P. Mahalakshmi, Rifa J. El-Khozondar, N.R. Ramanujam, I.S. Amirie, and P. Yupapin. Design of one dimensional refractive index sensor using ternary photonic crystal waveguide for plasma blood samples applications. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 111:29–36, 2019.
- [6] O. Soltani, S. Francoeur, Z. Baraket, and M. Kanzari. Tunable polychromatic filters based on semiconductor-superconductor-dielectric periodic and quasi-periodic hybrid photonic crystal. *Optical Materials*, 111:110690–110699, 2021.
- [7] Abinash Panda, Puspa Devi Pukhrambam, Natesan Ayyanar, and Truong Khang Nguyen. Investigation of transmission properties in defective one dimensional superconductive photonic crystal for ultralow level bioethanol detections. *Optik*, 245:167733, 2021.
- [8] J. W. S. Rayleigh. On the remarkable phenomenon of crystalline reflexion described by prof. stokes. *Philosophical Magazine*, 26:256–265, 1888.
- [9] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 58(20):2059–2062, 1987.
- [10] S. John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 58(23):2486–2489, 1987.
- [11] E. Yablonovitch *et al.* 3-dimensional photonic band structure. *Optical & Quantum Electronics*, 24(2):S273–S283, 1992.

- [12] M. A. Kaliteevski, R. A. Abram, V. V. Nikolaev, and G. S. Sokolovski. Bragg reflectors for cylindrical waves. *Journal of Modern Optics*, 46(5):875–890, 1999.
- [13] M. S. Chen, C. J. Wu, and T. J. Yang. Wave properties of an annular periodic multilayer structure containing the single-negative materials. *Phys. Lett. A*, 373:3594–3600, 2009.
- [14] C. H. Raymond Ooi and T. C. Au Yeung. Polariton gap in a superconductor–dielectric superlattice. *Phys. Lett. A*, 259:413–419, 1999.
- [15] T. van Duzer and C. W. Turner. *Principles of Superconductive Devices and Circuits*. Edward Arnold, 1981.
- [16] S. K. Srivastava and A. Aghajamali. Investigation of reflectance properties in 1d ternary annular photonic crystal containing semiconductor and high-tc superconductor. *Springer*, 29(6):1423–1431, 2016.
- [17] Sreejith K.P., Nirmala Maria D’souza, and Vincent Mathew. Analysis of cutoff frequency in one dimensional ternary superconducting photonic crystal. *Physica C: Superconductivity and its applications*, 540:44–47, 2017.
- [18] C. A. Herrera and J. M. Calero. *Cálculo de espectros de reflectancia de un cristal fotónico 1D de geometría cilíndrica con componentes superconductor-dieléctrico*. 2019.
- [19] B. F. Diaz and J. M. Calero. *Estudio de la estructura de bandas en crsitales fotónicos superconductores 2D usando polarización TM*. 2013.
- [20] P. Markos and C.M. Soukoulis. *Wave propagation: from electrons to photonic crystals and left-handed materials*. Princeton University Press, 2008.
- [21] R. Perez-Álvarez. La matriz de transferencia y algunas propiedades del problema unidimensional de schrödinger. *Revista Cubana de Física*, 6(2):91–95, 1986.
- [22] D. Delépine. *Métodos Matemáticos III*. Universidad de Guanajuato, 2004.
- [23] F. Periago. *Teoría de campos y ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad de la Rioja, 2003.
- [24] V. V. Nikolaev, G. S. Sokolovskiĭ, and M. A. Kaliteevskiĭ. Bragg reflectors for cylindrical waves. *American Institute of Physics*, 33(2):174–179, 1999.
- [25] C. A. Hu, C. J. Wu, T. J. Yang, and S. L. Yang. Analysis of optical properties in cylindrical dielectric photonic crystal. *Optics Communications*, 291:424–434, 2013.
- [26] P. G. de Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. Westview Press, 1966.
- [27] C. P. Poole, H. A. Farach, R. J. Creswick, and R. Prozorov. *Superconductivity*. Elsevier, 2nd edition, 2008.
- [28] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21:787–788, 1933.
- [29] J. B. Ketterson and S. N. Song. *Superconductivity*. Cambridge University Press, 1999.
- [30] O.G. Vendik, I.B. Vendik, and D.I. Kaparkov. Empirical model of the microwave properties of high-temperature superconductors. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 46(5):469–478, 1998.

- [31] M. Zamani. Spectral properties of all superconducting photonic crystals comprising pair of high-high, low-low or high-low temperature superconductors. *Physica C: Superconductivity and its applications*, 520:42–46, 2016.
- [32] L. Landau. The theory of phase transitions. *Nature*, 138:840–841, 1936.
- [33] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1996.
- [34] D. J. Griffiths and R. College. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 3rd edition, 1999.
- [35] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Microscopic theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 106(1):162–164, 1957.
- [36] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, Inc, 8th edition, 2005.
- [37] Yves Quéré. Radiation effects in (old and new) superconductors. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 33(1):906–911, 1988.
- [38] L. E. González *et al.* Experimental realisation of tunable ferroelectric/superconductor (bto/ybco)_n/sto 1d photonic crystals in the whole visible spectrum. *Scientific Reports*, 10(13083), 2020.
- [39] Sreejith K.P. and Vincent Mathew. Optical properties of planar and annular ternary superconducting photonic crystals in near-zero-permittivity operation range. *Journal of Superconductivity and Novel Magnetism*, 32:2397–2407, 2019.