



POTENCIALIDADES Y LIMITACIONES DE UNA OBRA MATEMÁTICA PROPUESTA
PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS: UNA MIRADA DESDE LA TAD

JESÚS DAVID CAMACHO BERNATE
LAURA ANDREA FIGUEROA VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SEDE NORTE DEL CAUCA
2018



POTENCIALIDADES Y LIMITACIONES DE UNA OBRA MATEMÁTICA PROPUESTA
PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS: UNA MIRADA DESDE LA TAD

JESÚS DAVID CAMACHO BERNATE
LAURA ANDREA FIGUEROA VALENCIA

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Educación Básica Con Énfasis en
Matemáticas

Tutor
JOHNNY VANEGAS DIAZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SEDE NORTE DEL CAUCA
2018



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO
DE GRADO

Programa Académico licenciatura en educación básica
con énfasis en Matemáticas

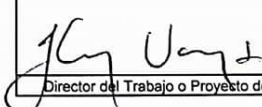
Fecha

Día	Mes	Año
10	04	2018

Código del programa: 3469

Resolución del programa: 046

Título del Trabajo o Proyecto de Grado					
Potencialidades y limitaciones de una obra Matemática Propuesta para la enseñanza de los números enteros: Una mirada desde la TAD					
Se trata de:					
Proyecto ☐			Informe Final ☒		
Director					
Johnny Vanegas Diaz					
Nombre del Primer Evaluador					
Cristian Hurtado					
Nombre del Segundo Evaluador					
Adriana Garcia					
Estudiantes					
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto	
Laura Andrea Figueroa Valencia	135192	3469	figueroa.laura@univalle.edu.co	3105444364	
Jesús David Camacho Bernal	1358511	3469	jesus.d.camacho@univalle.edu.co	3148314777	
Evaluación					
Aprobado ☒		Meritorio ☐		Laureado ☐	
Aprobado con recomendaciones ☐		No Aprobado ☐		Incompleto ☐	
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐		Primer Evaluador ☐		Segundo Evaluador ☐	
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa					
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					
Firmas					
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador			

Recomendaciones	Observaciones	Razón de desacuerdo - Alternativas
Si se considera necesario, usar hojas adicionales.		
El trabajo se torna interesante y pertinente al interior de las investigaciones actuales en el campo de la Educación Matemática		
La forma en que ha sido escrito el trabajo, así como su estructura permite hacer una lectura rápida y clara.		
El trabajo revela una buena articulación entre el problema planteado, los objetivos propuestos y los referentes conceptuales empleados.		
El análisis desarrollado es innovador, coherente y consistente para trabajar con problemas reconocidos por la investigación en Educación Matemática		
Firmas		
		Adriana García de
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Dedicatoria

A nuestra pequeña Nataly, quien fue el motor que nos impulsó a culminar esta etapa. Nos llenó con su ternura y amor y nos mantuvo unidos pese a las grandes dificultades que tuvimos que afrontar.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos primeramente a Dios por darnos las herramientas necesarias para llegar a este punto de nuestra formación académica.

A nuestros padres Enrique Figueroa y Martha Valencia, José Leder Camacho y Elsa Bernate, por el amor que nos brindan, por creer en nosotros y enseñarnos a ser cada día mejores dando todo de sí sin esperar nada a cambio.

A nuestros hermanos por estar siempre a nuestro lado brindándonos su apoyo incondicional y acompañándonos en cada paso que damos.

A nuestros compañeros por ser parte de todo nuestro proceso de aprendizaje, especialmente a Diana Gómez y Clarena Pino, quienes estuvieron presentes durante todo este proceso convirtiéndose en verdaderas amigas.

A nuestros docentes, que fueron pacientes y nos mostraron lo bello que es enseñar, en especial a Johnny Vanegas Díaz quien con su experiencia y sabios consejos nos orientó en el desarrollo de esta investigación.

Tabla de contenido

Resumen.....	5
Introducción	6
CAPÍTULO I. Aspectos generales de la investigación.....	9
1.1 Antecedentes	10
1.2 Problemática	14
1.3 Objetivos	19
1.3.1 Objetivo general.....	19
1.3.2 Objetivos específicos	19
1.4 Justificación	20
CAPÍTULO II. Referentes conceptuales	26
2.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico.....	27
2.1.1 Noción de Organización Matemática (OM).	28
2.1.2 Atomización del proceso de enseñanza y autismo temático.....	31
2.2 Desde lo curricular.....	32
2.3 Desde la Propuesta unitaria de Bruno.....	36
2.3.1 Las transferencias entre las dimensiones.	38
2.3.2 Los números negativos desde la Visión Unitaria.....	39
2.4 Desde las matemáticas	40
2.4.1 Construcción matemática.....	44
CAPÍTULO III. Descripción y análisis de la Obra Matemática propuesta	48
3.1 Desarrollo metodológico de la investigación.....	49
3.2 Descripción del plan de área de matemáticas	53
3.2.1 Análisis de la Obra Matemática propuesta en el plan de área	55
3.3 Descripción de los textos escolares.....	62
3.3.1 Análisis de los textos escolares.....	65
3.3.2 Muestra de tareas en los textos escolares.....	68
3.3.3 Análisis de la Obra Matemática propuesta en los textos escolares.....	86
CAPÍTULO IV. Conclusiones y reflexiones	103
4.1 Algunas conclusiones y reflexiones finales	104
4.2 Nuevas rutas de investigación.....	108
Referencias bibliográficas.....	109

Índice de tablas

Tabla 1 Coherencia horizontal (MEN, 2006)	34
Tabla 2 Coherencia vertical (MEN, 2006).....	35
Tabla 3: Rejilla de análisis.....	51
Tabla 4: Objetivos y logros presentados en el plan de área de matemáticas institucional	57
Tabla 5: Estándares del plan de área de 6° y 7°	58
Tabla 6: Contenidos en el plan de área de 6° y 7°	59
Tabla 7: Competencias del plan de área de 6° y 7°	60
Tabla 8: Potencialidades y limitaciones del plan de área de matemáticas.....	61
Tabla 9: Descripción de los libros escolares Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7	62
Tabla 10: Aspectos físicos de los libros de texto.....	64
Tabla 11: Contenidos cap.10 del libro de texto Secuencia Matemáticas 6.....	65
Tabla 12: Contenidos cap.1 del libro de texto Secuencia Matemáticas 7.....	67
Tabla 13: Estructura desde la TAD de las tareas presentadas en los libros de texto	93
Tabla 14: Potencialidades y limitaciones de los libros de texto	102

Índice de esquemas

Esquema 1: Estructura del plan de área de matemáticas	55
Esquema 2: Reconstrucción de la OMp de los libros de texto	97

Índice de ilustraciones

Ilustración 1:Estructura de una obra matemática (Ordoñez y Chavarro, 2012)	28
Ilustración 2: Transferencia de las dimensiones (Bruno, 1997)	38

Índice de imágenes

Imagen 1: Institución Educativa Niño Jesús de Praga	50
Imagen 2: Mapa conceptual cap.10 libro de texto Secuencia Matemáticas 6	66
Imagen 3: Mapa conceptual cap.1 libro de texto Secuencia Matemáticas 7	67
Imagen 4: Modelo concreto (altitudes)	100
Imagen 5: Modelo de recta numérica.....	101

Resumen

El presente trabajo se sustenta en la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* como una perspectiva teórica que permite contrastar una *Obra Matemática de referencia* (OMr) con la *Obra Matemática propuesta* (OMp) por la Institución Educativa Niño Jesús de Praga, para determinar las potencialidades y limitaciones que, eventualmente, pueden manifestarse en el proceso de enseñanza de los números enteros y sus operaciones.

La OMp se describe específicamente en términos de la *Organización Matemática a enseñar* y en consecuencia se configura a partir de dos elementos fundamentales: el plan de estudio del área de matemáticas y los libros de texto escolares. Mientras que la OMr se define mediante algunas *Organizaciones Matemáticas sabias* que legitiman de forma epistemológica el proceso de enseñanza de los números enteros, como son las investigaciones de Cid & Bolea (2010) y Bruno (1997). Además, en la configuración de la OMr se consideran los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 2006) acerca de la enseñanza de los números enteros, así como algunos aspectos discutidos desde la TAD, tales como el fenómeno de *atomización del proceso de enseñanza* y el *autismo temático*.

El resultado más representativo de esta investigación se relaciona con el hecho de evidenciar que la OMp, en torno a la enseñanza de los números enteros, se organiza en un conjunto de *Obras Matemáticas puntuales* (OMPs) débilmente relacionadas, que no favorecen la construcción amplia del conjunto de los números enteros y sus operaciones como una estructura de anillo totalmente ordenada $(\mathbb{Z}, +, *)$.

Palabras claves: Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD), obra matemática propuesta (OMp), obra matemática de referencia (OMr), números enteros.

Introducción

Esta investigación se inscribe en la *Línea de formación Didáctica de las Matemáticas* del Programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Puntualmente, en esta investigación se discuten los resultados de un estudio que analizó la *Obra Matemática propuesta* (OMp) configurada en la Institución Educativa Niño Jesús de Praga, para la enseñanza de los números enteros, con el fin de aportar evidencias sobre las potencialidades y limitaciones de la misma.

Este estudio se llevó a cabo en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), perspectiva teórica que admite la existencia de un modelo único, llamado *praxeología*, como una herramienta fundamental para *organizar* cualquier actividad matemática (Chevallard, 1999). Dicha praxeología u *Organización Matemática* se constituye alrededor de uno o varios tipos de *tareas* matemáticas que conducen a la creación de *técnicas* matemáticas, las cuales se justifican a través de *tecnologías* matemáticas que emergen y se desarrollan en el marco de una *teoría* matemática.

Dentro de los aspectos que desarrolla esta investigación, se reconoció que en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los números enteros no están exceptos de presentar diferentes dificultades, algunos de ellas asociadas con obstáculos identificados en su construcción histórica. Esta y otras razones que se exponen en la investigación mostraron la pertinencia del estudio, al centrar su atención en la realización de un análisis, en términos de potencialidades y limitaciones de la OMp en una Institución Educativa al ponerla en contraste con una *Obra Matemática de referencia* (OMr) que da pautas sobre los procesos de instrucción de los números enteros.

Para el desarrollo del objetivo de investigación, se definió una OMr constituida por elementos teóricos reconocidos por Cid & Bolea (2010) y Bruno (1997). Además, en la configuración de la OMr se consideraron los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 2006) acerca de la enseñanza de los números enteros, así como algunos aspectos discutidos desde la TAD, tales como: el fenómeno de *atomización del proceso de enseñanza* y el *autismo temático*. La definición de la OMr y la posterior reconstrucción de la OMp (conformada por el plan de estudios del área de matemáticas y dos libros de texto escolares) determinaron los elementos fundamentales para llevar a cabo el análisis de comparación entre ambas *Obras Matemáticas*.

Para efectos de organización en la presentación y desarrollo del trabajo, la investigación se ha estructurado en cuatro capítulos:

El capítulo uno presenta los antecedentes, la contextualización y formulación del problema, la justificación del mismo y los objetivos. En el problema se abordan algunas dificultades que se presentan en la enseñanza de los números enteros, los modelos de enseñanza para introducirlos en el ámbito escolar y la conexión entre los diversos conjuntos numéricos. El capítulo finaliza mencionando la importancia y pertinencia de la investigación en el contexto local.

En el segundo capítulo, se exponen los referentes conceptuales que sustentan teóricamente este trabajo. Inicialmente, aparecen los planteamientos de la TAD (Chevallard, 1999), haciendo especial énfasis en la estructura de una *obra matemática* (OM). Además, se discuten los fenómenos de *autismo temático* y *atomización del proceso de enseñanza*. Seguidamente se presentan los

planteamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional, en lo concerniente a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Finalmente, se presenta la propuesta unitaria de Bruno (1997), en la cual se resalta la importancia de articular los sistemas numéricos y la necesidad de tener en cuenta tres dimensiones y sus transferencias en el trabajo con los números enteros. En este capítulo, también se expone la propuesta de Cid & Bolea (2010), en la que se mencionan los elementos necesarios para la construcción de los enteros como un anillo totalmente ordenado $(\mathbb{Z}, +, *)$.

En el tercer capítulo se lleva a cabo la descripción y análisis de la *Obra Matemática propuesta*. Inicialmente se mencionan los aspectos metodológicos que orientan el desarrollo de los objetivos de la investigación y que se concretan en tres fases. La fase I corresponde a los referentes conceptuales que integran una OMr, la fase II se centra en describir la OMp por la Institución Educativa y la fase III propone la comparación entre ambas *Obras Matemáticas*. En segundo lugar, se describe y analiza la OMp por la Institución Educativa, determinando las limitaciones y potencialidades, tanto del plan de área de matemáticas, como de los dos libros de texto escolares estipulados para la enseñanza de los números enteros.

Finalmente, en el cuarto capítulo se exponen las conclusiones, reflexiones finales del trabajo y algunas preguntas que surgieron en el desarrollo y culminación del trabajo, las cuales pueden constituirse en nuevas rutas de investigación.

CAPÍTULO I. Aspectos generales de la investigación

1.1 Antecedentes

Son varias las investigaciones cuyo interés se centra en estudiar los números enteros, tratando aspectos de importancia para su enseñanza y aprendizaje. Por ende, es importante seguir tratando este objeto matemático, es por esto que este trabajo centra su atención en mejorar el proceso educativo en torno a estos números. A continuación, se presentan algunas investigaciones que contribuyen al desarrollo de este trabajo:

- Inicialmente se presentan dos trabajos inscritos en la línea de Didáctica de las Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle: La primera es la realizada por Ordóñez y Chavarro (2012), en la cual se muestra un análisis realizado a las OMP de una institución escolar, a la luz de la TAD, con relación a la introducción del concepto de número entero, cuyo objetivo es ver las limitaciones y potencialidades de la OMP. Las autoras hacen una descripción y análisis al plan de área de matemáticas y a los textos escolares (Código matemática 6 y Código matemática 7 de editorial SM) de la institución educativa, además tienen en cuenta los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), contrastando los resultados con los referentes teóricos de la TAD y la Perspectiva Unitaria propuesta por Bruno (1997).

La segunda es la investigación realizada por Martínez (2014), en ella se identifica la ecología de la *Obra Matemática propuesta* en una institución escolar, con relación a la introducción del concepto de número entero, desde la TAD. Se realiza un estudio de algunos fenómenos didácticos como: *el autismo escolar; la atomización del proceso de enseñanza; y la reducción*

del estudio de $\mathbb{Z}$ a un entorno aritmético, esto con el fin de ver las restricciones que desde el nivel de la OMp son impuestas al tratamiento escolar de $\mathbb{Z}$ y que delimita en gran medida su puesta en marcha como objeto de aprendizaje. Para ello, se construye a partir de un estudio teórico, una OMr que será guía de análisis para ser contrastada con la OMp.

Ambos trabajos presentan una estructura similar, pues trabajan con los $\mathbb{Z}$ desde la misma teoría y contrastan la OMr con la OMp de las instituciones educativas que a cada uno le corresponde. Por este motivo, estos trabajos presentan aspectos importantes para nuestra investigación, en tanto que permiten identificar problemáticas propias al interior de la teoría y proporciona aspectos teóricos y metodológicos para contrastar una OMp con una OMr en torno a los números enteros.

- Por su parte Castillo (2014), presenta una investigación donde da cuenta de la ecología o condiciones que limitan o posibilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje de los racionales positivos en una institución escolar, tomando como punto de partida algunos fenómenos de la TAD como el *autismo temático* y la atomización de la enseñanza. Construye una OMr la cual es el soporte para analizar por medio de un contraste la OMp de la institución. A pesar de que en nuestra investigación trabajamos con un objeto matemático diferente, este referente es importante en la medida en que además de utilizar la TAD, contrastan la OMr con la OMp siendo esto una guía para este trabajo.
- Otro trabajo importante es el que presenta Corica & Otero (2009), su sustento teórico es la TAD y el propósito de la investigación es describir y comprender las *organizaciones*

matemáticas en torno al límite de funciones que se estudian en una institución universitaria, así como la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. Para ello, se trabajó con estudiantes del primer año del ciclo básico, en el curso de “Análisis Matemático I” que se imparte en la facultad de ciencias exactas de una universidad de Argentina. Las conclusiones indicarían que en esta universidad se estudian *organizaciones matemáticas puntuales* y rígidas que solo conducen a la revisión de algoritmos algebraicos. Este trabajo colabora al nuestro en la medida en que se trabaja desde la TAD permitiéndonos tener una mejor orientación en aspectos metodológicos y teóricos, en cuanto al análisis de la OMr en relación a la OMr.

Por último, el libro “Números Enteros” de Gonzales et al (1999) es producto de una investigación realizada con el fin de aportar una visión completa de los números enteros, desde sus fundamentos hasta la propia planificación curricular. El libro se divide en 7 capítulos y a su vez, en tres bloques, de tal manera que en el primer bloque (capítulo 2 y 3) se trabaja la historia y la epistemología de los números enteros, en el segundo bloque (capítulos 4, 5 y 6) se realiza un análisis didáctico dentro del cual se hace un estudio sobre las vías de acceso a $\mathbb{Z}$, los métodos formales con un enfoque didáctico-crítico y los obstáculos y concepciones sobre los números enteros a partir de encuestas y libros de texto, y por último, en el bloque tres (capítulo 7) se presenta una propuesta didáctica que recoge lo expuesto en capítulos anteriores pretendiendo integrar distintas opciones didácticas, esta propuesta representa una vía de acceso didáctica a los números enteros así como a los conceptos y relaciones implícitos en su construcción. Es de resaltar la importancia que este trabajo tiene para el nuestro, pues la información que nos brindan es necesaria para el desarrollo del

mismo, permitiéndonos tener una mejor visión de lo que fue la construcción de los enteros, las dificultades y obstáculos que tuvieron y las diferentes vías de acceso a estos números.

1.2 Problemática

Diversas investigaciones en Educación Matemática (González et al, 1990; Bruno, 1997; Cid 2001; Ordoñez y Chavarro, 2012; Martínez, 2014) indican que la enseñanza y aprendizaje de los números enteros y sus operaciones siempre se encuentra marcada por dificultades y obstáculos, relacionados con la complejidad misma del concepto, sus formas de representación, entre otros. En particular, en González et al (1990) mencionan que, en el proceso de enseñanza de los números enteros en el entorno escolar, tales dificultades han prevalecido a través del tiempo en el seno de las instituciones educativas, entre ellas están:

1) La concepción promovida por la enseñanza en la educación primaria al sugerir que la adición de números implica la acción de añadir y que la sustracción entre dos números se identifica con la acción de quitar. Esta concepción ingenua de adición y sustracción ligada al plano de la acción, trae consigo la idea de que una suma siempre es un aumento y que una resta siempre es una disminución, de ahí que algunos estudiantes ante preguntas como “¿puedes encontrar un número que sumado a 5 de 2?” o “¿Es posible encontrar un número que restado de 7 de 10?”, respondan que no es posible o simplemente se queden perplejos.

2) Identificación de los símbolos literales con números positivos: cuando se hace constante referencia a los números positivos por medio de las letras $a, b, c, d, \dots, z$ y a los números negativos con las letras acompañadas del signo menos ($-a, -b, -c, -d, \dots, -z$), los estudiantes se resisten a creer que a , por ejemplo, puede representar un número negativo, para ellos “ a no puede ser negativo, sería $-a$ ”.

3) La concepción equivocada que adopta el orden entre los negativos como el mismo orden natural: como se sabe, en la serie natural los números son mayores a medida que van estando más alejados del origen, trasladar esta misma secuencia a los números negativos conduce a errores. Por ejemplo, ante preguntas como ¿cuál es el número mayor en una unidad a -4 ? algunos estudiantes responden que ese número es -5 .

4) La imposición de lo formal como obstáculo: la historia de los números enteros deja ver que cada que se realiza un avance en conocimiento hay una ruptura con concepciones previas, sin embargo, en la enseñanza de los mismos (según el testimonio de los libros de texto) se olvida con frecuencia reduciéndolos a un formalismo vacío que se constituye en obstáculos y origina errores, dado que los estudiantes se sienten en un terreno diferente donde les cuesta orientarse porque carecen de intuiciones, o porque las tienen pero se encuentran tan ajenos a la teoría que no les ayudan.

Además de las dificultades mencionadas, Martínez (2014) manifiesta otra dificultad que ha surgido en el transcurso de la enseñanza de los números enteros, se refiere a su introducción en un contexto eminentemente aritmético, sustentado en modelos concretos que se refieren a situaciones de la vida diaria: si bien, puede justificarse la enseñanza de los números enteros desde situaciones concretas (deudas y haberes, temperaturas, fichas de colores, móviles que recorren un camino, etc.), también hay una fuerte consideración que indica que esta forma de introducir la enseñanza de los números enteros trae consigo varias dificultades. Por ejemplo, Cid y Bolea (2010) revelan que estas situaciones concretas limitan la construcción y comprensión de $\mathbb{Z}$ porque generan concepciones erróneas en cuanto a las relaciones de orden y operaciones con los números.

En concordancia con Cid y Bolea (2010) la introducción de los enteros a partir de un entorno algebraico, en lugar del uso de situaciones concretas, puede resultar más conveniente para su tratamiento a nivel escolar, esto porque el uso de situaciones concretas enfatizan las estructuras de espacio vectorial y espacio afín, promoviendo la concepción de número negativo (noción necesaria para la construcción de $\mathbb{Z}$) como medida de magnitudes opuestas o relativas, pero la epistemología de los números negativos muestra que su razón de ser no proviene de este tipo magnitudes definidas en el ámbito de la aritmética, sino en el ámbito del álgebra, (Chevallard citado por Cid y Bolea, 2010). Sin embargo, la misma investigación ha señalado que hace falta una buena base empírica para validar esta consigna.

A estas dificultades se suma el tipo de propuesta de enseñanza para los números que presenta poca o nula conexión entre los conjuntos numéricos, y que puede generar en los estudiantes una idea incompleta de número, haciendo que asocien solo uno o algunos sistemas numéricos y dejen los demás de lado. Para hacer frente a esta situación, Bruno (1997) presenta *una visión unitaria de la enseñanza de los números*, en donde argumenta que lo que se aprende acerca de ellos forma parte de un único conocimiento numérico, por ende, es necesario conectar los conjuntos numéricos logrando que los estudiantes no construyan este conocimiento como núcleos aislados, es así que, en tanto sistema numérico, $\mathbb{Z}$ debe estar claramente articulado con los demás sistemas numéricos, por lo cual, sugiere que las propuestas de enseñanza para los enteros, deben partir de las limitaciones del conjunto de los números naturales y así justificar la necesidad del nuevo sistema ($\mathbb{Z}$).

Ahora bien, el marco general de enseñanza de los números enteros, deja entrever diferentes concepciones o formas de introducir este contenido curricular. Si bien, cada una de ellas está dotada de potencialidades, también presentan limitaciones que son diferenciables en los aprendizajes de los estudiantes. La consideración de una forma de introducción para los enteros depende de las particularidades de la *institución escolar* donde el proceso de enseñanza se lleve a cabo, puesto que ella genera condiciones para el trabajo del docente y para el aprendizaje de los estudiantes.

Desde el enfoque de la TAD se reconoce que dos instituciones pueden desarrollar relaciones institucionales diferentes de un mismo concepto matemático, el cual asumen como dominio de enseñanza (Artigue, 2011). En el caso de los números enteros, desde este enfoque teórico es pertinente investigar la postura institucional y sus implicaciones en el proceso de enseñanza dentro de dicha institución. La cuestión remite entonces a analizar el proceso educativo entre instituciones al introducir la enseñanza de los números enteros.

Este proceso de comparación, según Chevallard (citado por Corica y Otero, 2009) OMr u *organización matemática sabia*, que integra el conocimiento matemático formal; transitar por una OMp u *organización matemática a enseñar*, que puede rastrearse en planes de aula, libros de texto y documentos institucionales y terminar con dos *organizaciones matemáticas*: la enseñada y la aprendida.

En coherencia con lo anterior, esta investigación pretende describir la OMp por una institución educativa en la enseñanza de $\mathbb{Z}$, y contrastarla con una OMr para determinar sus potencialidades y sus limitaciones. De esta manera, se plantea la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las potencialidades y limitaciones de la *Obra Matemática propuesta* en la Institución Educativa Niño Jesús de Praga, desde la mirada de la TAD, con relación a la construcción de los números enteros y sus operaciones en el ámbito escolar?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Analizar la *Obra Matemática propuesta* en la Institución Educativa Niño Jesús de Praga desde la mirada de la TAD, con relación a la construcción de los números enteros y sus operaciones, para determinar sus potencialidades y limitaciones.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Identificar, a partir de algunos artículos de investigación en Educación Matemática, una *obra matemática de referencia* (OMr) que sustente los procesos de construcción de los números enteros y sus operaciones en el ámbito escolar.
2. Describir la *Obra Matemática propuesta* (OMp) en el plan de área y en dos libros de texto empleados en la Institución Educativa Niño Jesús de Praga para su posterior análisis con la OMr identificada.
3. Contrastar la *Obra Matemática propuesta* (OMp) de la Institución Educativa Niño Jesús de Praga con la *Obra Matemática de referencia* (OMr) para determinar sus potencialidades y limitaciones.

1.4 Justificación

Este trabajo pretende, desde los planteamientos de la TAD, analizar la OMp en la Institución Educativa Niño Jesús de Praga en torno a la construcción de los números enteros y sus operaciones. A continuación presentamos las razones que validan la pertinencia de esta investigación, teniendo en cuenta aspectos como: la importancia de abordar la enseñanza de los números enteros dadas las dificultades que esto supone; los diversos tipos de propuestas de enseñanza para los números enteros con los alcances y limitaciones que cada una puede tener; la enseñanza de los sistemas numéricos como núcleos no aislados; y el contraste entre la OMp por una institución educativa y la OMr, en torno a un mismo objeto matemático.

Para comenzar, el lento proceso de aceptación a nivel histórico de los números enteros deja entrever que es un campo complejo, que generó rechazo debido a las dificultades y obstáculos que implicaba la ampliación del concepto de número. Esta situación se traslada a la enseñanza de este conjunto numérico en el ámbito escolar, haciendo que las propuestas de enseñanza para los números enteros sean objeto de análisis, por las variantes que pueden presentar y las potencialidades o limitaciones que estas representan en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En relación con la necesidad de analizar las propuestas de enseñanza para los números enteros, González et al (1990) señala que dicho análisis debería tener como objetivo el identificar en la propuesta cuatro aspectos, que, según los autores, son indispensables para favorecer la comprensión de los números enteros:

- Dominar la construcción matemática de los números enteros, su estructura y propiedades, así como las herramientas matemáticas que se utilizan.
- Conocer los hechos históricos relevantes relacionados con la matemática, con los números en general y con los enteros en particular.
- Conocer los estudios y reflexiones sobre la naturaleza y existencia de los números enteros, así como los procesos y relaciones implicadas en la formación de los conceptos correspondientes, en su formalización y en su devenir histórico.
- Conocer las aplicaciones y utilidades de los números enteros en contextos no matemáticos tales como la vida diaria y otras ciencias.

Sin duda, a causa de la extensión y profundidad de estos aspectos, así como por el estado de las investigaciones, abordarlos por completo en una propuesta no es un trabajo fácil. Sin embargo, el análisis a todo diseño curricular y su desarrollo en el aula de clase, debería arrojar que se fundamentan al menos en los conocimientos más elementales de estos cuatro puntos, de lo contrario, podría decirse que la propuesta difícilmente guiará a la comprensión los números enteros, el dominio de sus operaciones y aplicaciones algebraicas y su manejo en contextos diferentes.

Además de lo anterior, otro aspecto importante a tener en cuenta son las diferentes vías de aproximación a $\mathbb{Z}$, es decir, los modelos que se pueden utilizar para introducir los números enteros

en el aula de clase, pues este conjunto numérico se constituye y se acepta principalmente por los problemas matemáticos que resuelve, pudiendo establecer métodos generales para resolver ecuaciones; convertir la operación de restar en una ley interna; y describir relaciones geométricas.

Estos modelos Gonzales et al (1990) los clasifica en: el aritmético, el geométrico y el algebraico¹, dependiendo del campo conceptual en que se encuentra el problema de partida y los conceptos que se utilizan. Cada uno ellos presentan potencialidades pero también pueden limitar el trabajo con $\mathbb{Z}$, pues así lo dejan ver investigaciones como la realizada por Cid (2015), donde se defiende un modelo más que otro, en este caso, la autora manifiesta que introducir a $\mathbb{Z}$ con el modelo aritmético puede generar efectos no deseados e incluso, obstaculizar una buena comprensión de dichos números, de esta forma, propone introducir los enteros desde un entorno algebraico, pues menciona que la razón de ser inicial de los números enteros viene dada por la necesidad del cálculo algebraico y la resolución de ecuaciones. A causa de lo anterior, es necesario identificar el o los modelos tenidos en cuenta en propuestas para introducir a $\mathbb{Z}$ especialmente en una institución escolar, logrando determinar cómo afectan tanto positiva como negativamente la enseñanza de estos números.

¹ Gonzales et al (1990) definen estos modelos de la siguiente manera: En el modelo aritmético, los números enteros tienen importancia dada la necesidad que se tiene de ampliar la operación de restar en $\mathbb{N}$ pudiendo obtener como resultado un número negativo; en el modelo algebraico, para dar soluciones a ecuaciones imposibles de resolver en $\mathbb{N}$, es necesario los números enteros y con ellos su constitución del conjunto de los negativos; y en el modelo geométrico prevalece los números enteros como un instrumento necesario para poder establecer una escala numérica sobre una recta y con magnitudes dirigidas.

Por otro lado, de acuerdo a las orientaciones curriculares del MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), la enseñanza de los sistemas numéricos (cuyo objetivo es el desarrollo del pensamiento numérico) debe ser un trabajo continuo a lo largo de toda la educación básica y media, de modo que el paso de un sistema a otro sea justificado por las limitaciones del primero y las potencialidades del segundo, tal como la historia lo refleja. Por tal razón esta investigación tendrá en cuenta para el análisis a la OMp por la institución, la propuesta de Bruno (1997) acerca de una *visión unitaria de la enseñanza de los números*. Tener en cuenta la propuesta de Bruno (1997) en el análisis a la OMp, permitirá identificar la relación que desde la institución se establece entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$, lo que se traducirá en potencialidades y limitaciones en la propuesta de enseñanza institucional, esto porque Bruno (1997), en acuerdo con las orientaciones curriculares del MEN, manifiesta que una adecuada enseñanza de $\mathbb{Z}$, debe partir de la necesidad de dar solución a situaciones que el sistema conocido ($\mathbb{N}$) no puede solucionar.

Todo lo anterior nos permite evidenciar la importancia de analizar las propuestas de enseñanza que buscan trabajar a $\mathbb{Z}$ en la escuela, teniendo en cuenta elementos como: los aspectos que deberían fundamentar cada propuesta para enfrentar la dificultad que supone dicha enseñanza; las distintas vías de aproximación a $\mathbb{Z}$ de acuerdo a modelos que cuentan con potencialidades y limitaciones en la introducción y trabajo de dicho sistema numérico; y la necesidad de articular los sistemas numéricos para evitar que el conocimiento numérico que se debe adquirir en la educación básica y media se vea fragmentado.

Ahora bien, el tipo de análisis al que se ha hecho referencia resulta conveniente abordarlo desde la perspectiva de la TAD por varias razones:

- Presenta varios fenómenos en la enseñanza de las matemáticas, entre los cuales están *la atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas* y el *autismo temático*. El primero, es la tendencia (cada vez más acentuada en el proceso de enseñanza) a fragmentar los contenidos de enseñanza, presentándolos sin conexión alguna y dejando de lado el trabajo sistemático y disciplinado, que acaba eliminando los objetivos a medio y largo plazo. El segundo, es una especie de encierro en los temas, que tiene como consecuencia el olvido de las razones de aprender determinado objeto matemático; de esta manera los estudiantes no tienen acceso a la importancia de establecer conexiones entre lo que se aprende y el por qué de lo que se aprende (Gascón, 1998).
- Se postula la noción de *obra matemática* (OM), que modeliza la actividad matemática, que “como toda obra humana, surge siempre como respuesta a un conjunto de *cuestiones* y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta *institución*, determinadas *tareas problemáticas*” (Gascón, 1998, p. 11). Desde esta perspectiva, la enseñanza de $\mathbb{Z}$ adopta una estructura que se caracteriza por tener dos grandes bloques, el bloque de la *praxis* (*tareas y técnicas*) y el bloque del *logos* (*tecnología y teoría*). Esta estructura hará visible la relación entre el trabajo práctico con $\mathbb{Z}$ y el sustento formal de dicho sistema.
- Se reconocen las particularidades de la OMp y se invita a contrastarlas con una OMr para determinar así posibles limitaciones y potencialidades.

A parte de todo lo que se ha mencionado, es necesario aclarar la pertinencia de este trabajo, pues en las investigaciones realizadas por Ordoñez y Chavarro (2012), Martínez (2014) y Castillo (2014) se presentan estudios similares a los que se pretenden desarrollar en esta investigación. Dado que el saber matemático varía según la institución educativa dependiendo del lugar y las necesidades que se tengan, la gran diferencia radica en que se trabaja en una institución educativa completamente diferente y aparte de esto, los análisis realizados a los textos escolares presentan una estructura diferente que fue orientada por el trabajo de Corica y Otero (2009), pues ninguno de los trabajos en cuestión realiza un análisis riguroso desde los términos que la TAD integra.

CAPÍTULO II. Referentes conceptuales

2.1 Teoría Antropológica de lo Didáctico

En este trabajo se toma como referente didáctico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999), la cual permitirá desarrollar aspectos importantes de esta investigación, tales como: la identificación de una OMr en relación a $\mathbb{Z}$ y sus operaciones; la descripción de una OMp en torno a $\mathbb{Z}$ y sus operaciones, a partir de los planes de área y libros de texto de una institución educativa; la identificación de potencialidades y/o limitaciones de la OMp al realizar un contraste entre esta y la OMr.

El enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas (Chevallard, citado por Gascón, 1998) surge en el marco de la didáctica fundamental y como consecuencia del desarrollo de la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, citado por Gascón, 1998), hasta llegar a ser considerado como un cuerpo teórico didáctico (TAD), luego de las últimas aportaciones donde se modeliza el proceso de estudio de una *obra matemática* por medio de la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, Bosch, Gascón, citado por Gascón, 1998).

La TAD sitúa la actividad matemática en el conjunto de las actividades humanas, por lo que así debe ser interpretada (es decir, modelizada) y no únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. La TAD cuenta con un modelo de las matemáticas institucionales en el que se incluye la matemática escolar como un caso particular y con un modelo de las actividades matemáticas institucionales que incluye la enseñanza y aprendizaje escolar de las matemáticas como una actividad matemática institucional particular (Gascón, 1998).

A continuación, se describen las nociones fundamentales de este cuerpo teórico con las cuales se trabaja a lo largo de esta investigación:

2.1.1 Noción de Organización Matemática (OM).

La *organización matemática*, actualmente denominada por Chevallard (1999) como *organización praxeológica* u *obra*, modeliza el conocimiento matemático como actividad humana, de esta manera, “surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas” (Gascón, 1998). Se propone un modelo que describe su estructura y sus características:

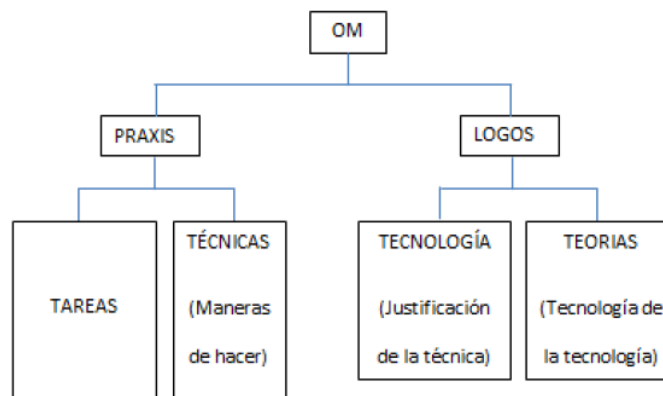


Ilustración 1: Estructura de una obra matemática (Ordoñez y Chavarro, 2012, pág 31)

La ilustración 1 muestra la forma en cómo se estructura una OM, donde se deben convertir las tareas problemáticas iniciales en tareas rutinarias, elaborando ciertas maneras de hacer (*técnicas*).

Es aquí donde se asocian los tipos de problemas y las técnicas constituyendo un saber-hacer que hace referencia a la práctica de la actividad (*praxis*). Ahora bien, para que las *técnicas* existan, deben de poder ser explicadas y esto se logra con la *tecnología*, y al mismo tiempo, se necesita el argumento formal que da paso a la justificación rigurosa de dicha *tecnología*, es decir, la *teoría*. Estos elementos (*tecnología* y *teoría*) conforman el *logos* para la *praxis* y se corresponden con el saber. Además, la *praxis* y el *logos* se hallan íntimamente relacionados y su articulación permite dar forma a la *Praxeología matemática*.

Para aclarar el panorama anterior, a continuación, se describen los elementos mencionados:

Tareas: La tarea es todo aquello que sea propuesto para ser abordado en el seno de una institución materializándose mediante preguntas, ejercicios y demás actividades propuestas para ser realizadas por los sujetos pertenecientes a dicha institución. Así pues, Chevallard (1999) menciona al respecto:

“tareas, tipos de tareas, géneros de tareas no son datos de la naturaleza, son “artefactos”, “obras”, construcciones institucionales, cuya reconstrucción en tal institución, y por ejemplo en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica” (p.3).

Técnicas ($\hat{o}_y$): Las tareas requieren de una manera de realizarse, es por esto que las técnicas vendrían siendo la manera de hacer, por ello, deben de ser entendibles y bien justificadas para que tengan validez.

En una institución X, existe solo una o por lo menos un pequeño número de técnicas que son reconocidas institucionalmente, excluyendo técnicas alternativas posibles que se pueden presentar en otra institución. Un ejemplo de esto es el presentado por Chevallard (1999):

“Se puede determinar el signo de un binomio $ax + b$ escribiendo esta expresión como $a[x - (-ba)]$, lo que permite concluir mediante un pequeño razonamiento: $2 - 3x = -3(x - \frac{2}{3})$ es negativo si $x > \frac{2}{3}$, positivo para $x < \frac{2}{3}$; $5x + 3 = 5[x - (-0,6)]$ es positivo para $x > -0,6$, negativo para $x < -0,6$; etc. Pero esta manera de hacer, prácticamente desconocida en la enseñanza secundaria francesa actual, recibiría sin duda una oleada de críticas” (p.4).

Tecnología: La tecnología es un discurso racional sobre la técnica, la cual permite justificar y hacer inteligible y válido lo que se pretende, además de esto, aporta elementos que modifican la técnica ampliando su alcance, logrando superar sus limitaciones y posibilitando la producción de nuevas técnicas (Gascón, 1998).

Teorías: La teoría es el paso a un mayor nivel de explicación y justificación, retomando el papel que tiene la tecnología respecto a la técnica, así pues, el discurso tecnológico contiene afirmaciones más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón.

Praxeología puntual, institucional y regional: las praxeologías son puntuales cuando se centran en un único tipo de *tareas*, generalmente asociadas a un pequeño conjunto de *técnicas*. Se habla

de *praxeologías locales* cuando los bloques prácticos se articulan en torno a un discurso tecnológico común. Si las praxeologías locales se estructuran alrededor a una teoría, conforman praxeologías regionales (Bosch & Gascón, 2009). El carácter puntual, local o regional de una praxeología es relativo a la institución considerada.

Además de estas nociones, Chevallard (citado por Corica & Otero (2009)) introdujo la distinción de diferentes tipos de OM, según el grado de complejidad de sus componentes:

- *Obras Matemáticas Puntuales* (OMP): Están generadas por lo que se considera en la institución como un único tipo de *tarea* y está definida a partir del bloque práctico-técnico.
- *Obras Matemáticas Locales* (OML): Es el resultado de integrar diversas *praxeologías puntuales*. Cada *praxeología local* se caracteriza por una *tecnología* que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las *técnicas* de todas las *praxeologías puntuales* que la integran.
- *Obras Matemáticas Regionales* (OMR): Se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas *praxeologías locales* a una *teoría* matemática en común.
- *Obras Matemáticas Globales* (OMG): Surgen al agregar varias *praxeologías regionales* a partir de la integración de diferentes *teorías*.

2.1.2 Atomización del proceso de enseñanza y autismo temático

El enfoque de la TAD permite abordar algunos fenómenos didácticos, entre los cuales se encuentran la *atomización del proceso de enseñanza* y el *autismo temático*. El primero se refiere

a la tendencia cada vez más acentuada hacia la transformación del proceso de enseñanza en un conjunto desestructurado de actividades independientes entre sí, en el seno del cual se tratan los problemas matemáticos como “anécdotas” aisladas y en el que el trabajo sistemático y disciplinado y los objetivos a medio y largo plazo tienden a desaparecer; el segundo, está relacionado con el anterior y se puede abreviar como una especie de encierro en los temas, lo cual tiene como consecuencia más inmediata el olvido de las razones de enseñar y aprender determinado objeto matemático, de esta manera no se tienen acceso a la importancia de establecer conexiones entre lo que se aprende y el por qué de lo que se aprende (Gascón, 1998).

2.2 Desde lo curricular

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) argumentan que el conocimiento matemático en la escuela, es considerado como una actividad social que debe de tener en cuenta los intereses y la afectividad de los niños y jóvenes, esto con el fin de mejorar el proceso educativo. Todo plan de área y proyecto educativo institucional (PEI) de las instituciones deben de apuntar hacia esa consigna, por ende, el Ministerio de Educación Nacional brinda conocimientos generales en los Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) para que cada institución desarrolle su propio currículo.

Teniendo en cuenta lo anterior y centrando la atención en el pensamiento numérico, se puede observar como en los documentos oficiales del MEN no se muestran los conjuntos numéricos como conjuntos separados, por el contrario, siempre se plantean la enseñanza de los números de una manera integrada en el pensamiento numérico, frente a esto el MEN (1998) señala:

“El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (pág. 26).

Frente a esto, los estudiantes inician un trabajo con los números, y van ampliando su significado a medida que van avanzando en los años escolares, de esta forma, según Bruno (1997) la enseñanza de los números debe darse de una manera unificada de tal forma que los estudiantes no construyan un conocimiento de los números como núcleos aislados. Por esta razón, la propuesta y la estructura curricular de cada institución deben plantearse de forma que haya un trabajo integrado de los distintos pensamientos, pues se puede deducir del MEN (2006) la coherencia horizontal, además de esto, también la coherencia vertical la cual va articulada por el pensamiento numérico en los diferentes conjuntos de grados. Ambos haciendo referencia al concepto de número entero en los grados 6° y 7° de la educación como se muestra a continuación:

Coherencia horizontal de 6° a 7°				
<i>Pensamiento numérico y sistemas numéricos</i>	<i>Pensamiento espacial y sistemas geométricos</i>	<i>Pensamiento métrico y sistemas de medidas</i>	<i>Pensamiento aleatorio y sistemas de datos</i>	<i>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos</i>
Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones	Resuelvo y formulo problemas que requieren	Resuelvo y formulo problemas a partir de un	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre

números, como las de igualdad, las de las distintas formas de desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.	rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras Bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	técnicas de estimación.	conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.	variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
--	---	-------------------------	---	--

Tabla 1 Coherencia horizontal (MEN, 2006)

La tabla anterior intenta mostrar la conexión que existe entre cada pensamiento teniendo en cuenta los estándares que hacen referencia al sistema numérico, de esta manera, se tienen los estándares del conjunto de grados de sexto a séptimo asociados a los sistemas numéricos, siendo el pensamiento numérico el eje central pues es quien hace referencia a las operaciones con números, así, los estándares mencionados en cada uno de los pensamientos están articulados con el pensamiento numérico de las siguiente manera: con el pensamiento espacial en tanto que se pueden usar los números como segmentos orientados al aplicarlos en transformaciones geométricas o representaciones cartesianas; con el pensamiento métrico en tanto que se pueden dar valores aproximados con números para dar solución a un problema; con el pensamiento aleatorio y el variacional se vincula directamente, pues el primero permite ver los problemas en diferentes sistemas de representación y el segundo, permite verlos desde conceptos más generales como el de función (Ordoñez y Chavarro, 2012).

En la tabla 1 se evidencia que hay una integración entre los sistemas numéricos, pues en ningún momento se menciona un conjunto numérico en particular, siempre alude a ellos de manera general dejando el trabajo con los números enteros muy abierto, y, además, el lector queda expuesto a demasiadas interpretaciones.

En cuanto a la coherencia vertical, se obtiene la siguiente información:

Coherencia vertical	
Grupos de grado	<i>Pensamiento numérico</i>
<i>De 1° a 3°</i>	Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.).
<i>De 4° a 5°</i>	Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.
<i>De 6° a 7°</i>	Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.
<i>De 8° a 9°</i>	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
<i>De 10° a 11°</i>	Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Tabla 2 Coherencia vertical (MEN, 2006)

La tabla 2 da cuenta de la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento, en este caso, el pensamiento numérico. Se observa que no hay una distinción clara de los conjuntos numéricos, esto puede generar (teniendo en cuenta que el MEN (2006) guía los currículos de las instituciones logrando establecer diferentes relaciones entre los conocimientos, procesos y contextos) que no haya una orientación clara de cuáles puedan ser las *obras matemáticas* a las que se debe de prestar mayor atención.

Dado que, tanto en la coherencia horizontal como en la vertical, se presenta la información de manera general, cada institución debe velar por la toma de decisiones que con ayuda de los documentos oficiales del MEN y el personal en el área de matemáticas sean las indicadas para realizar las *obras matemáticas*. Esto debe apuntar a que haya una integridad entre los conocimientos que se están departiendo, en este caso, los sistemas numéricos, de tal forma que no se vean de manera aislada, haciendo alusión a lo que Bruno (1997) plantea tanto en la visión unitaria como en la transferencia entre las dimensiones permitiendo que se tenga una mejor enseñanza.

2.3 Desde la Propuesta unitaria de Bruno

Bruno (1997) realiza aportes a una investigación que está situada desde el pensamiento numérico y propone que partiendo de la experiencia que tienen los estudiantes sobre los números, se realice una comprensión efectiva de los conjuntos numéricos teniendo en cuenta sus representaciones, estructuras y el campo de aplicación. Para ello esta investigación reconoce la necesidad de currículos integrados para que los estudiantes puedan hacer las conexiones pertinentes.

De esta manera, durante el proceso escolar de los estudiantes en el estudio de los números y sus propiedades es conveniente tener en cuenta la *visión unitaria de los números* que propone Bruno (1997), debido a que es importante que el conocimiento que los estudiantes adquieren sobre los números, sea parte de un proceso continuo en donde se puedan realizar las conexiones pertinentes

entre cada sistema numérico, de modo tal que los conocimientos previos se integren a los nuevos y estos a los previos con la potencialidad que tienen.

Algunos autores plantean que durante la escolaridad se realiza un trabajo fuerte con las operaciones en los diferentes sistemas numéricos y los estudiantes dan cuenta de estas maneras de operar en cada uno de ellos, sin embargo, no existe una visión unitaria que contribuya a establecer las correctas relaciones que existen entre los sistemas numéricos y es aquí en donde el proceso tiene una ruptura dado que las propiedades intrínsecas de cada sistema numérico las desconoce, así den cuenta por separado de su parte operatoria. (Bruno, 2001).

El conocimiento numérico abarca diversos aspectos relativos a los números, las operaciones, las propiedades y la forma en que se representan cada uno de ellos. Estos aspectos adquieren relevancia en la forma como sean tratados en la escuela. Bruno (1997), plantea tres dimensiones para hacer tal desarrollo, propiciando la conexión de los diferentes sistemas numéricos. Estas son: las dimensiones abstractas, de recta y contextual, las cuales favorecen la enseñanza en tanto se realice una transferencia adecuada entre cada una de ellas.

Así pues, en la dimensión abstracta se sitúan los conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y las formas de escritura con los números, la dimensión de recta hace referencia a la representación de los números sobre una recta, puntos y vectores y la dimensión contextual hace referencia a la utilidad de los números y su uso. (Bruno, 1997).

Teniendo en cuenta lo anterior, el conocimiento numérico no se limita al conocimiento de las tres dimensiones, sino que también abarca las transferencias entre ellas, es decir, la expresión de una dimensión de un conocimiento dado en otra.

2.3.1 Las transferencias entre las dimensiones.

La transferencia entre las dimensiones permite una visión unificada de los sistemas numéricos y de los procesos que con ellos se trabajan, para que haya una construcción adecuada y no se promueva el aprendizaje como núcleos aislados. El esfuerzo en la enseñanza debe encaminarse en que las tareas que se planifiquen apunten a que haya una transferencia entre las dimensiones, logrando que se pueda pasar por los diferentes procesos de aprendizaje y reconocer la estructura de lo que se estudia.

A continuación, se representa como se dan las transferencias mediante la ilustración, que simboliza la manera de ver un triángulo en el que las flechas uniendo los vértices indican las transferencias de una dimensión a otra.

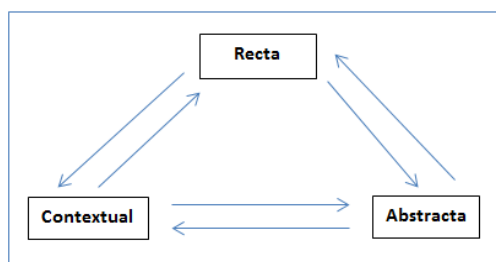


Ilustración 2: Transferencia de las dimensiones (Bruno, 1997, pág 7)

2.3.2 Los números negativos desde la Visión Unitaria.

La visión unitaria descrita por Bruno (1997), la concretamos para el caso de los números negativos, en donde se propone una enseñanza de ellos que considere las tres dimensiones y que siga una secuencia de extensiones que avance hacia los números reales.

Es decir, la Perspectiva Unitaria de Bruno (1997) pone de manifiesto una enseñanza unificada que parte de los números enteros y tiene en cuenta los fenómenos didácticos presentes en cada subconjunto de $\mathbb{R}$. Plantear una enseñanza dada por secuencias de extensión permite una comprensión unificada en la construcción de los números y tiene en cuenta los aspectos particulares que intervienen en los distintos sistemas numéricos.

Dado que la enseñanza de los sistemas numérico se da por extensión es decir, se introduce $\mathbb{N}$, luego $\mathbb{Z}^+$ continúa con $\mathbb{Z}^-$ y se van construyendo con $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{I}$, hasta llegar a “ $\mathbb{R}$ ” y la construcción por extensión va reconociendo las limitantes de los primeros conjuntos numéricos, una vinculación oportuna de los sistemas numéricos implica tener en cuenta que la unicidad debe permitir el uso de los sistemas numéricos en cualquier contexto, basados en las dimensiones como lo menciona Bruno (1997).

Bruno (1997), menciona la importancia de enseñar los sistemas numéricos desde una perspectiva unitaria reconociendo las limitaciones de Naturales y potencialidades de los enteros, de esta manera los estudiantes pueden reconocer que los conjuntos numéricos van surgiendo en la medida que van respondiendo a inquietudes que con los naturales eran limitadas.

2.4 Desde las matemáticas

Se presentan en este apartado algunas reflexiones de tipo epistemológico que sustentan la necesidad de trabajar los números enteros desde el campo de lo algebraico, de modo que sus aspectos estructurales puedan ser justificados. Se tienen en cuenta los planteamientos de Cid & Bolea (2010) para la construcción de un *Obra Matemática de Referencia* (OMr) que muestre algunos elementos que deberían ser tenidos en cuenta en la enseñanza de los números enteros, así como elementos que permiten la construcción de $\mathbb{Z}$ como anillo ordenado.

Los números enteros aparecen debido a las limitaciones que se presentan en la operatividad de los números naturales. Esta limitación se presenta de la siguiente forma de acuerdo con el teorema mostrado por Recalde et al (1998), según el cual para dos números naturales m y n , con $m < n$, existe un número natural s , tal que $m + s = n$, que permite incorporar la resta como operación entre naturales. El número s se denomina la diferencia entre n y m , y se representa como $n - m$. Tenemos entonces que $s = n - m$ si y solo si $n = m + s$. Al número n se le llama el minuendo y a m el sustraendo.

Observemos que $n - 0 = n$.

Lo expuesto en el teorema anterior deja ver las limitaciones de $\mathbb{N}$ cuando aparecen expresiones como $x + a = b$, que puede escribirse $x = b - a$, donde no se cumpla la condición de que $a \leq b$, lo cual implica que x carezca de sentido dentro de este conjunto numérico. Este tipo de limitaciones de los naturales requieren de la creación de otro conjunto numérico en donde las soluciones no generen discusiones, es así como surgen los números enteros. (González et al., 1990).

Vale la pena resaltar que, históricamente, esta extensión no fue inmediata; la razón es que da origen a los números negativos y desde la antigüedad clásica, el número estaba ligado al proceso de contar donde lo negativo no tenía cabida. Incluso hasta mediados del siglo pasado muchos famosos matemáticos se negaban a reconocerles la ciudadanía numérica, sin embargo, aspectos como los que aparecen a continuación vencieron la resistencia a considerar los números negativos (Recalde et al., 1998):

- Se podían extender las operaciones de suma y producto sin ningún sacrificio teórico.
- La existencia de fenómenos físicos, como el movimiento, que llevan al planteamiento de ecuaciones como $3 + x = 2$ ó $5x + 6 = 0$ y cuyas soluciones requieren de la existencia de los números negativos.
- La matematización de ciertos fenómenos como la altitud y la medida de la temperatura.
- El desarrollo de sistemas contables por parte de los comerciantes, que exigían un método de consignar las deudas, incluyendo la acumulación progresiva de las mismas.

Ahora bien, a parte de las limitaciones de operatividad que se presentan en $\mathbb{N}$, pueden tomarse algunas situaciones de la vida real en las que surge la necesidad de cantidades negativas, tal es el caso de la temperatura bajo cero en lugares con climas extremadamente fríos, un buzo cuando está en plena acción en el mar, algunas pérdidas o ganancias, entre otras. Sin embargo, el trabajar los números enteros a partir de este tipo de situaciones tiene algunas limitaciones, así lo plantea Cid & Bolea (2010) cuando dicen que los modelos concretos pueden contribuir a que los alumnos adquieran creencias erróneas sobre los números negativos y sus operaciones, porque enfatizan las

estructuras de espacio vectorial y espacio afín, en lugar de la estructura de anillo totalmente ordenado.

Las concepciones creadas bajo los modelos concretos han sido objeto de análisis, y los resultados indican que se presenta un obstáculo, cuando solamente se entiende a los números negativos como medida de magnitudes opuestas o relativas, hecho que resalta que el campo de acción algebraico es necesario para que los enteros y sus representaciones, sean vistos como un nuevo conjunto numérico que tiene potencialidades más amplias que los naturales (Cid & Bolea, 2010).

Para ilustrar lo dicho anteriormente se toman algunos ejemplos mostrados por Cid & Bolea (2010): el modelo de deudas y haberes puede facilitar que los estudiantes decidan que -7 es mayor que -2 porque “una deuda de 7 euros es mayor que una de 2 euros”, o que concluyan que $(-7)(-2) = -14$ porque “el resultado de multiplicar una deuda por otra deuda no puede ser un haber”; o bien, el modelo de las temperaturas puede facilitar que $(-7) - (-2) = +5$, porque “la diferencia entre las dos temperaturas es de 5 grados”.

La propuesta del entorno algebraico para una correcta emergencia y trabajo de $\mathbb{Z}$, tiene como aspecto importante el contraste entre la aritmética y el álgebra, es decir, poner de manifiesto la ruptura que supone el álgebra frente a la aritmética, como medio de justificar la necesidad de la simetrización aditiva de los números naturales. El cálculo aritmético es un cálculo entre números, básicamente entre números naturales. En cambio, lo que caracteriza al cálculo algebraico es que la simetrización aditiva y multiplicativa de $\mathbb{N}$ permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto, cuyos signos se omiten. En consecuencia, los signos “+” y “-” que en aritmética son signos operativos binarios, en álgebra se pueden presentar como signos predicativos

o signos operativos unarios. Y asumir esta diferencia es fundamental para poder entender las reglas de juego del cálculo algebraico y la necesidad del trabajo con sumandos y sustraendos.

Por ejemplo, en aritmética la expresión $12 - 4 - 5 + 4$ se entendería como una sucesión de sumas y restas de números naturales, con lo que los signos “+” y “-” estarían indicando dichas operaciones binarias. En cambio, en álgebra se interpreta como suma de los términos $+12, -4, -5$ y $+4$, donde los signos “+” y “-” tienen un sentido de signos predicativos y se suprime el signo binario que indica la suma². De esta manera, las propiedades asociativas, conmutativa y de existencia del cero y de los opuestos, propias de una suma, avalan fácilmente cualquier reorganización de ese cálculo, en particular, la eliminación de los términos -4 y $+4$ y su reducción a $12 - 5 = 7$. En cambio, interpretando el cálculo como sumas y restas de números naturales, la justificación resulta menos fluida y exige conocer las propiedades de la resta, que no son tan evidentes como las de la suma.

Además hay tres cuestiones generatrices globales dentro de este modelo para introducir y trabajar a $\mathbb{Z}$ (Cid & Bolea, 2010):

Q_0 . ¿Cómo encontrar la expresión algebraica canónica que soluciona un problema verbal aritmético cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?

Q_0' . En aquellos problemas en los que la solución viene dada por expresiones algebraicas diferentes según los valores como sumandos o sustraendos que pueden tomar ciertos parámetros del sistema, ¿cómo encontrar una expresión algebraica única que dé solución al problema en todos

² Cuando no se suprimen los signos operativos binarios aparece la llamada “notación completa”. La expresión $12 - 4 - 5 + 4$ en notación completa se escribiría $(+12) + (-4) + (-5) + (+4)$.

los casos?

Q_0 : ¿Qué consecuencias tiene considerar los sumandos y sustraendos como nuevos números y en qué modifica esa decisión las propiedades que cumplen “todos” los números?

Las cuestiones anteriores pueden llegar a poner de manifiesto la necesidad de un logos que permita observar y reconocer los elementos estructurales en la construcción de $\mathbb{Z}$. Pero eso sólo es posible si se toma el estudio de $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico, porque las propiedades que se enuncian a continuación y que inicialmente relacionan a $\mathbb{Z}^+$ con $\mathbb{N}$, no pueden hacerse creíbles en un plano puramente aritmético:

2.4.1 Construcción matemática.

Definición 1. Sea $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Definimos las siguientes operaciones en A .

$$(m, n) \oplus (p, q) = (m + p, n + q)$$

$$(m, n) \odot (p, q) = (mp + nq, mq + np)$$

La razón de ellas radica en que $(m, n) \oplus (p, q)$ representa

$(m - n) + (p - q)$ es decir $(m + p) - (n + q)$ y análogamente $(m, n) \odot (p, q)$ sería

$$(m - n)(p - q) = (mp + nq) - (mq + np).$$

Proposición 1. Las operaciones acabadas de definir son conmutativas en A .

$$(m, n) \oplus (p, q) = (m + p, n + q) = (p + m, q + n) = (p, q) \oplus (m, n)$$

La conmutatividad en $\mathbb{N}$ hace valida la segunda igualdad.

Proposición 2. *La relación acabada de definir es de equivalencia.*

Teorema 1. *La relación de equivalencia anterior es compatible con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas en A .*

Los enunciados anteriores expresados de manera axiomática que hacen parte del *logos*, indican la relación existente entre los naturales o enteros positivos ($\mathbb{Z}^+$), de ahí que son isomorfos pues las operaciones previamente definidas al realizarlas permiten encontrar la solución según el sistema numérico que se trabaje. A continuación, se muestran las propiedades que permiten reducir las 4 operaciones de la aritmética a 2 en el campo algebraico y que permiten ir ampliando la construcción de $\mathbb{Z}$ a partir de su estructura algebraica y de orden:

Teorema 2. *Sean m, n, p y q elementos que pertenecen a $\mathbb{Z}$, entonces:*

Las operaciones $+$ y $\cdot$ (entre clases) definidas en $\mathbb{Z}$ gozan de las siguientes propiedades.

- i. *Las dos son asociativas y conmutativas.*
- ii. *$[(m, n)]$ es el módulo de “+” (cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$)*
- iii. *$[(1, 0)]$ es el módulo de la multiplicación.*
- iv. *$[(n, m)]$ es el inverso aditivo de $[(m, n)]$.*
- v. *$\cdot$ es distributiva con respecto a la $+$.*

Proposición 3.

Dado un entero $[(p, q)]$, existe un único natural n tal que $[(p, q)] = [(0, n)]$.

Finalmente, cuando $p < q$ existe un n no nulo único tal que

$$p + q = q \text{ y } [(p, q)] = [(p, p + n)] = [(0, n)].$$

Es así como se denomina $\mathbb{Z}^+$ al conjunto de los enteros positivos o $\mathbb{N}$ y por $\mathbb{Z}^-$ al conjunto de los enteros negativos o inverso de $\mathbb{Z}^+$.

Estas condiciones establecen las soluciones que existen en los enteros dado que $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo.

Es importante aclarar que existen ecuaciones de la forma $ax = b$, que a pesar de ser lineales, la solución no pertenece a $\mathbb{Z}$, debido a que $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no es un grupo, y de la única forma que existe una solución para estas ecuaciones es cuando b sea múltiplo de a . Sin embargo, que $(\mathbb{Z}, \cdot)$ no sea un grupo, permitirá inclusive ver e introducir otros sistemas numéricos como los racionales, dado que $(\mathbb{Q}, \cdot)$ si es un grupo, esto fortalecerá la idea de la enseñanza de los sistemas numéricos de manera unificada.

La definición que de $\mathbb{N}$ se da bajo la operación de la sustracción tiene la siguiente forma: $p -$

$q = n \Leftrightarrow p = n + q$, si no existe el natural n tal que $p = n + q$ no existe la diferencia, es decir, p no es mayor que q .

Para poder solucionar expresiones como la anterior es necesario recurrir a $\mathbb{Z}$. A continuación, se explicitan algunas definiciones y propiedades que hacen parte de una OMr. Es importante primero establecer como es el orden en $\mathbb{Z}$:

Definamos $m < n$ como $(m - n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ y $m \leq n$ como $(m - n) \in \mathbb{N}$

Proposición 4. *La relación $\leq$ acabada de definir es de orden total en $\mathbb{Z}$. De esta forma los números enteros se definen en términos conjuntistas:*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}. \text{ Y } \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{\emptyset\}$$

Además, en la estructura de orden se destaca la no presencia de una cota inferior, ni superior, determinando las condiciones bajo las cuales $\mathbb{Z}$ es completamente ordenado.

CAPÍTULO III. Descripción y análisis de la Obra Matemática propuesta

3.1 Desarrollo metodológico de la investigación

En este apartado se hará la presentación de los aspectos de tipo metodológico que permitirán desarrollar esta investigación, considerando que su objetivo es analizar la *Obra Matemática propuesta* en una institución escolar desde la mirada de la TAD, con relación a la construcción de los números enteros y sus operaciones, para determinar sus potencialidades y limitaciones.

En este sentido, la directriz de esta investigación recae en la metodología que desde la TAD se propone para el análisis de una OMp: toda OMp es una construcción institucional, completamente afectada por las condiciones y características propias de dicha institución, sus limitaciones y potencialidades se han de determinar al hacer un contraste con una OMr, que corresponde a una construcción teórica acerca de un dominio de enseñanza, con orientaciones generales para su trabajo en el aula. La OMp puede rastrearse en los planes de área y libros de texto de la institución educativa a diferencia de la OMr, la cual puede rastrearse en las investigaciones.

Este proceso metodológico se organiza a través de varias fases que se describen a continuación:

Fase I

En esta fase se lleva a cabo el desarrollo del marco teórico y la identificación de una OMr que involucra teorías propuestas por Cid & Bolea (2010), Bruno (1997), planteamientos oficiales del MEN y aspectos sobre la TAD, los cuales permitirán realizar un análisis sobre las limitaciones o potencialidades al construir $\mathbb{Z}$.

Fase II

En esta fase se describe la OMP de la Institución Educativa Niño Jesús de Praga la cual incluye los libros de texto “Secuencias Matemáticas 6” y “Secuencias Matemáticas 7” de la editorial *Libros & Libros S.A.* y el plan de área de matemáticas.

Es pertinente mencionar la institución educativa que abrió sus puertas para poder llevar a cabo esta investigación. Esta institución está ubicada en el municipio de Santander de Quilichao, en el barrio Santa Anita, se fundó en el año 1982, presta sus servicios a 360 niños y jóvenes desde el nivel de pre-jardín hasta el grado 11, distribuyéndose en dos jornadas: en la mañana presta sus servicios desde el nivel de pre-jardín hasta 5°, y en la tarde, desde 6° hasta 11°.



Imagen 1: Institución Educativa Niño Jesús de Praga

Fase III

Y, por último, en esta fase se realiza el contraste entre la OMr y la OMP el cual permite determinar las potencialidades y limitaciones en la enseñanza de $\mathbb{Z}$ en la institución escolar. Para ello, se construye la siguiente rejilla de análisis la cual abarca los elementos teóricos de la OMr en términos de potencialidades y limitaciones:

Teoría	Potencialidades	Limitaciones
TAD	- No se presenta el fenómeno autismo temático. - No se presenta el fenómeno de la atomización del proceso de enseñanza. - Las técnicas utilizadas para resolver las tareas cuentan con una justificación tecnológica.	- Se presenta el fenómeno autismo temático. - Se presenta el fenómeno de la atomización del proceso de enseñanza. - Las técnicas utilizadas para resolver las tareas no cuentan con una justificación tecnológica.
Bruno	- Hay una clara articulación entre los sistemas numéricos. - Se trabajan las tres dimensiones (recta, contextual y abstracta) - Se trabaja la transferencia entre las dimensiones.	- No hay articulación entre los sistemas numéricos. - No se trabajan las tres dimensiones (recta, contextual y abstracta) - No se trabaja la transferencia entre las dimensiones.
Cid	- Se considera la introducción de los números enteros siguiendo su construcción histórica, dejando clara su razón de ser. - El trabajo con los números enteros permite que se construya la estructura de anillo totalmente ordenado. - El cálculo que se propone con los números enteros permite justificar la necesidad de operar números con signo “+” y “-”.	- Se introducen los números enteros sin tener en cuenta como se dio su desarrollo histórico, trabajando este conjunto sin una justificación creíble. - El trabajo con los números enteros no permite que se construya la estructura de anillo totalmente ordenado. - El cálculo que se propone con los números enteros no permite justificar la necesidad de operar números con signo “+” y “-”.
MEN	- Los sistemas numéricos se integran para desarrollar el pensamiento numérico. - Hay coherencia horizontal, el pensamiento numérico está relacionado con los demás pensamientos. - Hay coherencia vertical, los estándares propuestos en grados distintos de la escolaridad se relacionan para desarrollar el pensamiento numérico. - Se trabaja desde el contexto de las matemáticas, de la vida diaria y de otras ciencias. - Se trabajan los cinco procesos generales de la actividad matemática.	- No hay una integración de los sistemas numéricos que apunta al desarrollo del pensamiento numérico. - No hay coherencia horizontal pues no se relaciona el pensamiento numérico con los demás pensamientos. - No hay coherencia vertical debido a la falta de relación entre estándares propuestos en distintos grados de la escolaridad. - No se trabaja desde el contexto de las matemáticas, de la vida diaria y de otras ciencias. - No se trabajan los cinco procesos generales de la actividad matemática.

Tabla 3: Rejilla de análisis

Por otra parte, es pertinente mencionar que la estructura que se tomó para desarrollar el análisis a las tareas propuestas en los libros de texto fue guiada por la estructura presente en la investigación

realizada por Corica & Otero (2009), donde se presentan los *géneros* (G^x), *tipos de tareas* (T_a^x) y *tareas* ($t_{a,b}^x$), así como un esquema que relaciona las OMPs encontradas.

Además de esto, las *técnicas* ($\hat{o}_y$) expuestas en esta investigación, las cuales se encontraron en la solución que los libros de texto plantean para cada tarea, fueron definidas a partir de la modificación de las *técnicas* presentes en el trabajo de Ordoñez & Chavarro (2012) que a continuación se mencionan:

1. **Posiciones relativas:** al plantear ésta como una estrategia de solución el estudiante debe tener en cuenta el valor relativo de los números, de esta manera reconoce la posición de ellos y la distancia que existe entre el número propuesto y el cero (0); de esta manera el estudiante ha de reconocer el valor relativo de los números, la posición que ocupa, la distancia de él al origen cero (0) y ubicarlo según el contexto en el que la tarea se enuncie.
2. **Relación de orden:** En esta técnica el estudiante debe reconocer el valor relativo de los números y la posición de ellos, que es mínimo y máximo, menor y mayor, reconociendo la dirección del número y valor numérico o circunstancial que éste toma.
3. **Planteamiento de ecuación:** esta técnica hace referencia a la propuesta que debe hacer el estudiante en la solución de un problema que se le presenta, donde lo que debe es hallar valores a aquello que no se conoce en el problema y para lo cual debe tener claras determinadas propiedades que le permiten la solución de dicha ecuación que ha planteado, como por ejemplo el inverso multiplicativo y el inverso aditivo.
4. **Criterio algorítmico:** esta técnica hace referencia a todos esos modos de hacer o de resolver determinada tarea, en los cuales se deben claridad en la solución de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y las propiedades de cada una de ellas.

3.2 Descripción del plan de área de matemáticas

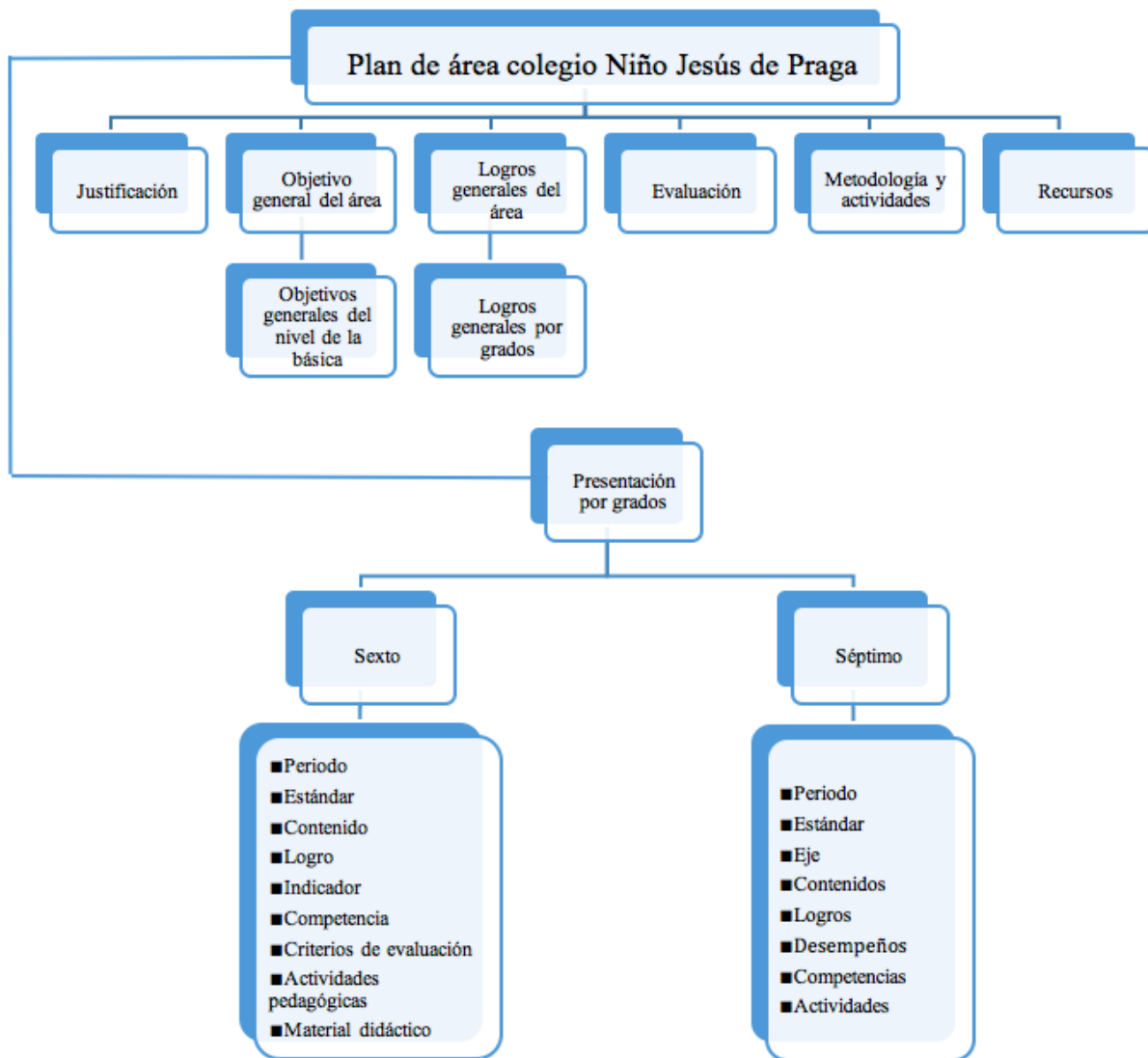
El plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Niño Jesús de Praga se realizó en el año 2015, inicia justificando la importancia que tienen las matemáticas para la humanidad, pues mencionan que es un campo muy importante y aplicable en cualquiera área del conocimiento, y, por ende, es indispensable que se enseñe desde los primeros años de escolaridad para que el estudiante pueda comprenderla y aplicarla según sus necesidades. Continúa mencionando aspectos que consideran esenciales para la formación del estudiante en la comprensión de conceptos y procesos matemáticos, entre estos están: la lógica matemática, teoría de conjuntos y el estudio de las nociones básicas de la geometría plana o Euclidiana.

Se pretende en él, no descuidar el rigor y la precisión matemática para que haya una mejor formación y desarrollo intelectual, en busca de que el estudiante desarrolle los cinco pensamientos matemáticos y los cinco procesos, como lo estipulan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

Luego de esta justificación, se presenta de manera general los objetivos y logros que se deben de cumplir al terminar onceavo grado, los cuales se van alcanzando durante todo el bachillerato, también presentan los objetivos y logros generales, donde los primeros se deben de alcanzar en los grados de 6° hasta 9°, y los logros son presentados a partir de 7° hasta 9°.

Después, proceden a hablar sobre la evaluación, la metodología, las actividades y los recursos que serán tenidos en cuenta de manera general (en todos los grados): Sobre la evaluación se argumenta que es un instrumento que será utilizado para valorar los desempeños del estudiante dentro de su

desarrollo integral, esta será cuantitativa, cualitativa, integral y continua, y se desarrollará de forma escrita, oral, con libro abierto, habrá exposiciones e investigaciones; Sobre la metodología, plantea que teniendo en cuenta el tema que se vaya a trabajar, se puede utilizar el tipo que desee, hacen alusión a las siguientes metodologías: exposición y ejemplificante: donde por medio de explicaciones claras el estudiante comprenda teorías y desarrolle sus propios ejemplos y problemas, y la metodología inductiva: donde el estudiante a partir de la teoría realice la práctica. Frente a las actividades se desarrollan distintos tipos dentro y fuera del aula de clase, llevándose a cabo talleres individuales, investigaciones, formulación de ejemplos, problemas y ejercicios, práctica de aplicaciones, deducciones y sustentaciones escritas y orales. Y referente a los recursos, se utilizarán según el grado y la necesidad que se tenga, entre ellos se encuentran: marcadores, tableros, reglas, ayudas educativas, carteleras, y demás.



Esquema 1: Estructura del plan de área de matemáticas de la Institución educativa Niño Jesús de Praga

3.2.1 Análisis de la Obra Matemática propuesta en el plan de área

El primer aspecto importante que se observa en el plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Niño Jesús de Praga es la posible desarticulación que presenta entre primaria y bachillerato, pues el currículo que se analiza en este trabajo, está construido y presentado a partir

del grado sexto, sin que se pueda tener una idea clara sobre aspectos curriculares de los grados anteriores. Esto ocasiona que haya un posible rompimiento entre la enseñanza y aprendizaje del pensamiento numérico y sistemas numéricos en la primaria, y la enseñanza y aprendizaje del pensamiento numérico y sistemas numéricos en el bachillerato, no dejando ver completamente la coherencia vertical en este pensamiento.

Después de esto, otro aspecto importante son los objetivos y los logros, tanto los generales, como los del nivel de la básica que presenta el currículo, estos se pueden ver en la siguiente tabla, la cual fue construida para facilitar su interpretación:

Objetivos generales del área	1. Aplicar los conocimientos matemáticos en la formulación de nuevas propuestas que permitan trascender en el avance de la ciencia y la tecnología. 2. Adquirir conocimientos de la matemática para el desarrollo de la lógica, el análisis, el razonamiento y la deducción de problemas. 3. Desarrollar habilidades y destrezas para el manejo adecuado de recursos que le permitan interrelacionar la teoría con la práctica. 4. Plantear y resolver problemas de tipo matemático y aún de orden práctico. 5. Manejar adecuadamente los instrumentos de tipo geométrico. 6. Adquirir precisión en la expresión verbal y familiarizarse en el lenguaje y expresiones simbólicas. 7. Familiarizarse con los conceptos básicos matemáticos. 8. Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente.	Logros generales del área	1. Que la Institución le proporcione a los estudiantes un programa curricular en el campo del área de las matemáticas, acorde con las necesidades e intereses del medio. 2. Que el estudiante se apropie de los conocimientos matemáticos, que obtenga un criterio científico e investigativo que redunde en el mejoramiento de la calidad de vida. 3. Que el estudiante busque y se apropie del conocimiento a través de la profundización y la perseverancia. 4. Que por medio de este programa se busquen alternativas metodológicas para que se cree un ambiente agradable, dentro del proceso enseñanza-aprendizaje.
------------------------------	---	---------------------------	--

Objetivos generales del nivel de la básica	1. Conocer el procedimiento lógico en el aprendizaje de las cuatro operaciones básicas y desarrollar habilidades y destrezas para aplicarlas en la solución de problemas de la vida diaria. 2. Preparar al estudiante en los conocimientos básicos de la matemática para que se desenvuelva en cualquier campo del que hacer educativo. 3. Conocer los principios fundamentales de la geometría para el manejo y aplicaciones del espacio.	Logros generales de la básica	1. Identificará y usará los números enteros y los racionales en diferentes contextos, los representa de diversas formas y establece relaciones entre ellos; redefine las operaciones básicas en los sistemas formados con estos números y establece conexiones entre ellos. 2. Formulará problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrolla y aplica diversas estrategias para resolverlos, verifica o interpreta los resultados en relación con el problema original. 3. Formulará, argumentara y pondrá a prueba hipótesis, las modifica o descarta y reconoce las condiciones necesarias para que una propiedad matemática se cumpla; aplica estos procedimientos en la formulación, análisis y resolución de problemas. 4. Hará estimaciones sobre numerosidad, resultados de cálculos y medición de magnitudes concretas a partir de sus propias estrategias y las utiliza como criterio para verificar lo razonable de los resultados. 5. Interpretará listas de instrucciones expresiones algebraicas y diagramas operacionales y de flujo, traduce de unos a otros y opera con ellos utilizando diferentes tipos de números. 6. Construirá e interpretara fórmulas, ecuaciones e inecuaciones para representar situaciones que requieren variables, opera con cualquiera de ellas y encuentra procedimientos para resolver ecuaciones e inecuaciones. 7. Construirá modelos geométricos, esquemas, planos y maquetas utilizando escalas, instrumentos y técnicas apropiadas y visualiza, interpreta y efectúa representaciones gráficas de objetos tridimensionales en el plano. 8. Comprenderá y usara la proporcionalidad directa e inversa de magnitudes, en distintos contextos de la vida cotidiana y utiliza diferentes procedimientos para efectuar cálculos de proporcionalidad.
--	--	-------------------------------	--

Tabla 4: Objetivos y logros presentados en el plan de área de matemáticas institucional

Como se puede observar, tanto los objetivos generales del área como los del nivel de la básica apuntan hacia los conocimientos y competencias que se espera que los estudiantes alcancen, los primeros durante todo el bachillerato, y los segundos, en los primeros cuatro años de la secundaria. También se presentan los logros tanto generales del área, como los del nivel de la básica, en estos últimos, el primer punto hace mención a los números enteros, los cuales son el foco de esta investigación.

Aunque el primero de los logros generales del nivel de la básica se refiere al uso, representación, operaciones y relaciones entre los números enteros, no se hace una relación explícita entre este y

alguno de los objetivos generales del nivel de la básica. Esta situación hará que el trabajo que se realice con $\mathbb{Z}$ en estos grados, no responda a un “para qué”. Tampoco se deja ver el “por qué” del trabajo con $\mathbb{Z}$, ya que los objetivos y logros presentados, simplemente aparecen escritos en listas sin hablarse de las razones por las cuales se han tenido en cuenta en este currículo.

Además de los aspectos mencionados, en la presentación del plan de área específico para 6° y 7° se han encontrado las siguientes diferencias de estructura, las cuales evidencian que no hay continuidad en la planeación para 6° y 7°, dificultando la conexión entre los contenidos que se abordan:

- Para cada periodo del grado 6° se presentan, bajo el título “Estándares”, los pensamientos a trabajar, pero no se muestran en realidad los estándares asociados a cada uno de ellos. Diferente ocurre en la presentación por periodos para 7°, donde bajo el título “Estándares” se presentan los componentes a trabajar, y seguidamente los estándares asociados, esto se evidencia en la siguiente tabla:

Grado 6: cuarto periodo	Grado 7: primer periodo
ESTANDAR • Numérico • Variacional • Geométrico • Medicional	ESTANDAR Componente numérico-variacional: • Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. • Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. • Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos. • Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación. • Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.

Tabla 5: Estándares del plan de área de 6° y 7°

- Los contenidos de 6° aparecen en una lista sin aparente relación entre ellos, sin embargo, al detallarlos están por grupos de temas, cuyo nombre no se destaca entre el listado: los

temas relacionados con los números enteros aparecen en el cuarto periodo. Para 7° se muestran dos ejes temáticos por cada periodo y los contenidos se encuentran organizados en listas con numeración hasta de tercer orden, lo que facilita relacionar los temas entre sí y además identificarlos dentro de un eje temático, que podría continuar en periodos posteriores. Los números enteros son eje temático en el primer periodo dos veces.

Contenidos	
Plan de área de matemáticas 6°	Plan de área de matemáticas 7°
• Concepto de número entero. • Los números enteros y la recta numérica. • Comparación y orden de los números enteros. • Números opuestos. Valor absoluto de un número entero. • Los números enteros y el plano cartesiano. • Operaciones en el conjunto de los números enteros (Adición y sustracción, sustracción y simplificación de signos de agrupación. Multiplicación, división y expresiones aritméticas con números enteros). • Polinomios aritméticos con números enteros	1. Números Enteros 1.1. Representación en la recta numérica y relaciones de orden 1.2. Adición y sustracción de enteros 1.2.1. valor absoluto 1.2.2. propiedades de la adición de números enteros 1.3. multiplicación y división de números enteros 1.4. Potenciación y radicación de números enteros. Operaciones combinadas

Tabla 6: Contenidos en el plan de área de 6° y 7°

- Igualmente hay diferencias en el apartado de competencias de 6° y 7°. En el primero solo hay una lista de estándares, en el segundo se especifican tres de los procesos generales³ (comunicación, razonamiento y resolución de problemas) y las afirmaciones relacionadas a cada una de ellos.

³ El MEN (1998) propone cinco procesos generales en la actividad matemática, estos son la resolución y el planteamiento de problemas; el razonamiento; la comunicación; a modelación; la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Competencias grado 6	Competencias grado 7
• Formula y resuelve problemas aplicando conceptos de la teoría de números (números primos, múltiplos) en contextos reales y matemáticos. • Justifica la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. • Reconoce el conjunto de valores de una variable en situaciones concretas de cambio. • Utiliza métodos informales (ensayo – error, complementación) en la solución de ecuaciones. • Selecciona y usa técnicas e instrumentos para medir longitudes y áreas de superficie. • Calcula áreas a través de composición y descomposición de figuras planas • Usa medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos.	Comunicación • Representar una situación problema a través de una igualdad o ecuación cuya solución es un número entero. • Reconocer equivalencias entre expresiones que involucran números enteros. Razonamiento • Usar las propiedades de los números enteros y sus operaciones, así como las de las igualdades, para justificar los pasos que se desarrollan en la resolución una ecuación. • Resolver operaciones combinadas con números enteros aplicando reglas básicas relacionadas con las jerarquías de las operaciones y las agrupaciones. Resolución de problemas • Resolver y formular problemas que se modelan a través de una igualdad o ecuación cuya solución es un número entero. • Resolver y formular problemas que requieren realizar operaciones con números enteros.

Tabla 7: Competencias del plan de área de 6° y 7°

Todo lo anterior deja ver que el plan de área propuesto presenta limitaciones, pues no se evidencia la relación que desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) se sugiere entre los pensamientos, es decir, no hay coherencia horizontal, además, en su trabajo con los sistemas numéricos y en particular con $\mathbb{Z}$, hay evidencia de los fenómenos *atomización del proceso de enseñanza y autismo temático* (Gascón, 1998):

Este primer fenómeno aparece por la estructura que adopta el plan institucional, primero, porque no relaciona la enseñanza de los sistemas numéricos que se lleva a cabo en la primaria con la que se lleva a cabo en la secundaria, segundo, porque hay una clara desarticulación entre lo expuesto para 6° y lo expuesto para 7°, y tercero, porque los contenidos dentro de cada grado muestran poca o nula articulación. En términos de Bruno (1997) no hay un hilo conductor que unifique y haga homogéneo el conocimiento numérico en la institución educativa, conocimiento del que hacen parte todos los aprendizajes adquiridos desde los primeros años de escolaridad en adelante, por lo

que los sistemas numéricos estarán desarticulados y el conocimiento numérico que se construya estará como núcleos aislados.

Por su parte, el segundo fenómeno aparece cuando no se responde al ¿por qué? y ¿para qué? de la enseñanza de $\mathbb{Z}$, haciendo que esta carezca de sentido y solo sea un tema dentro de una lista de temas por cumplir.

Todo lo expuesto anteriormente se muestra en la siguiente tabla, la cual sintetiza las limitaciones y potencialidades encontradas en el plan de área:

Teoría	Potencialidades	Limitaciones
TAD	No se presenta el fenómeno de la atomización del proceso de enseñanza en la presentación particular para 7°.	- Se presenta el fenómeno autismo temático. - Se presenta el fenómeno de la atomización del proceso de enseñanza en la presentación particular para 6°.
Bruno		No hay articulación entre los sistemas numéricos.
MEN	Se trabajan en 7° tres de los cinco procesos generales de la actividad matemática, dejando por fuera la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.	- No hay una integración de los sistemas numéricos que apunta al desarrollo del pensamiento numérico. - No hay coherencia horizontal pues no se relaciona el pensamiento numérico con los demás pensamientos. - No hay coherencia vertical debido a la falta de relación entre estándares propuestos en distintos grados de la escolaridad. - No se trabajan en 6° los cinco procesos generales de la actividad matemática.

Tabla 8: Potencialidades y limitaciones del plan de área de matemáticas

3.3 Descripción de los textos escolares Secuencias Matemáticas 6 y

Secuencias Matemáticas 7

La Institución Educativa Niño Jesús de Praga es quien propone los libros de texto Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7 para que el docente de matemáticas realice su trabajo. A continuación se realiza una breve descripción sobre estos dos libros de texto:

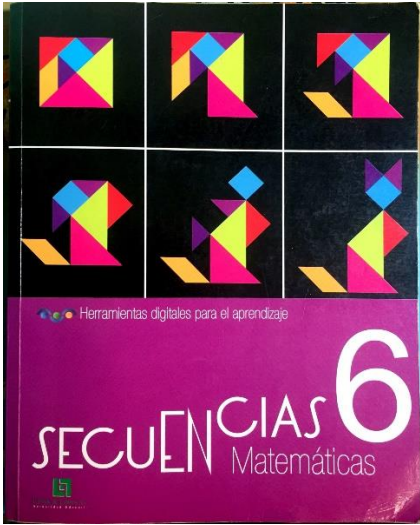
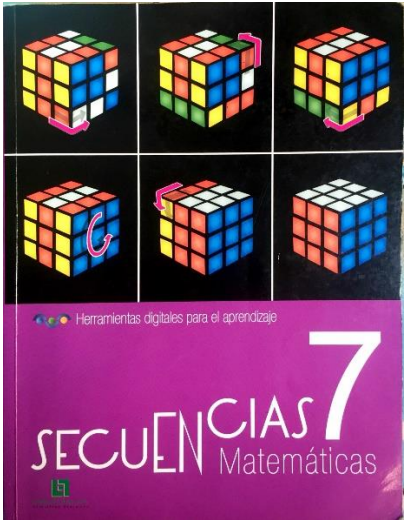
Nombre del texto	Secuencias Matemáticas 6	Secuencias Matemáticas 7
Editores de Matemáticas	Carvajal Janeth Castro Luis Manrique Viviana Vargas Claudia	Carvajal Janeth Castro Luis Manrique Viviana Vargas Claudia
Editorial	Libros & Libros S.A.	Libros & Libros S.A.
Año	2016	2016
Número de páginas	294	296
Impreso por	Disoné S.A.	Disoné S.A.
Grado de escolaridad	Sexto	Séptimo
ISBN libro	978-958-724-426-7	978-958-724-426-7
Tipo de texto	Texto escolar	Texto escolar
Uso	Académico	Académico
Portada		

Tabla 9: Descripción de los libros escolares Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7

Se puede observar en la tabla anterior que los libros de texto Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7 son similares, además, presentan la misma estructura, a continuación, se nombran algunos aspectos que los componen:

La organización de la tabla de contenido y de las páginas es similar. Cada capítulo inicia con una imagen que en muchas ocasiones hace referencia al tema que se va a tratar, debajo de ella, aparece una historia que se refiere de alguna manera lo que se va a presentar, y en la misma página, en la parte inferior, hay dos actividades para desarrollar. Luego, en la siguiente página, en un recuadro pequeño en la parte superior se dice el pensamiento que se va a trabajar, también se muestra un esquema donde aparece todo lo que se va a tratar y en la parte inferior, nuevamente aparecen unas actividades introductorias.

Después de esto, las páginas están divididas en dos columnas. En la parte derecha se inicia definiendo y ejemplificando los temas correspondientes y en la parte izquierda (que es la columna más pequeña) hay tanto actividades como historias que refuerzan lo que se está presentando. Terminando cada capítulo, se encuentra el taller que abarca todo lo visto, el cual se divide por subtítulos, estos son: para profundizar, para recuperar, para aplicar, para saber.

Después presentan ejercicios segmentados de la siguiente manera: interpreta y representa, argumenta y razona, formula y ejecuta. De la misma manera son presentados todos los capítulos que siguen pues secuencias matemáticas 6 cuenta con 12 capítulos y secuencias matemáticas 7 con 11.

En las últimas páginas de los libros se presenta una sección donde intervienen: prueba saber, prueba pisa y resolución de problemas, cada uno de estos apartados presenta una serie de preguntas que van relacionadas con todo lo que se presentó en el libro de texto.

A continuación, se presenta una tabla que contiene los aspectos físicos de los libros de texto:

Aspectos físicos	Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7
<i>Formato</i>	22 cm x 28,5 cm
<i>Tipo de encuadernación</i>	Pegada
<i>Tipo de cubierta</i>	Cartulina
<i>Tipo de impresión</i>	Nítida y legible
<i>Tipo de papel</i>	Bond
<i>Partes del libro</i>	Carátula frontal; información legal; autores; presentación del contenido; se inicia cada unidad con una reseña histórica sobre los temas que se van a tratar en ella y una actividad introductoria; también presenta un mapa conceptual de cada unidad; Bibliografía; y caratula trasera.
<i>Títulos</i>	Resaltados en negrilla
<i>Max número de caracteres por renglón</i>	82
<i>Espacio entre renglón</i>	0.25 milímetros
<i>Espacio entre párrafo</i>	0.31 milímetros
<i>Uso de la negrita</i>	Títulos, subtítulos, palabras claves, numeración
<i>Márgenes</i>	1,65cm superior; 1,55 inferior; 1,55 izquierda; 1,5 derecha
<i>Número de páginas</i>	294 para 6° y 296 para 7°
<i>Numeración de las páginas</i>	Todas las páginas están enumeradas a excepción de las 5 primeras
<i>Ubicación de la numeración</i>	Parte superior derecha para los números impares y parte superior izquierda para los números pares
<i>Páginas</i>	Todas las páginas se dividen en dos columnas, donde la primera parte mide 14,5 cm y la segunda 7,5 cm excepto las que presentan los talleres que se encuentran al finalizar cada unidad donde cada columna mide 11cm

Tabla 10: Aspectos físicos de los libros de texto Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7

3.3.1 Análisis de los textos escolares

Para el análisis de los textos escolares Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7 se tendrán en cuenta algunos aspectos como la forma de introducir los números enteros, los temas que involucra y la forma en la que se presentan, entre otros, Además se adoptará una estructura, que desde la TAD permitirá identificar los *géneros* (G^x), *tipos de tarea* (T_a^x), *tareas* ($t_{a,b}^x$), *técnicas* ($\hat{o}_y$) y *tecnologías* para determinar el tipo de OM.

Se inicia mostrando la forma de introducir los números enteros en los libros de texto, en este sentido, en Secuencias Matemáticas 6, se encuentran los siguientes temas y subtemas que son abordados en el capítulo 10:

Tabla de contenido Secuencias Matemáticas 6
Capítulo 10: De los relativos a los números enteros. Números relativos Conjunto de los números enteros Representación de los números enteros en la recta numérica Relaciones de orden en los números enteros Valor absoluto de los números enteros Adición de números enteros Sustracción de números enteros Polinomios aritméticos con números enteros Problemas de aplicación con números enteros Competencias básicas

Tabla 11: Contenidos cap.10 del libro de texto Secuencia Matemáticas 6

Este libro de texto, introduce los números enteros a partir de los números relativos, presentando un texto que habla sobre la temperatura en la Antártida (93°C bajo cero), haciendo referencia a las temperaturas por debajo de 0°C , explicando que su forma de escritura es acompañando dicha temperatura con un signo menos “-” (-93°C), finalmente se menciona que a estos números se les

conoce como números negativos y a los que se usan para referirse a temperaturas que están por encima de los 0°C se les llama números positivos.

Después de esto, el libro presenta un mapa conceptual que relaciona los temas que se desarrollarán a lo largo del capítulo: números relativos, números enteros, representaciones de los enteros, etc. (imagen 2)

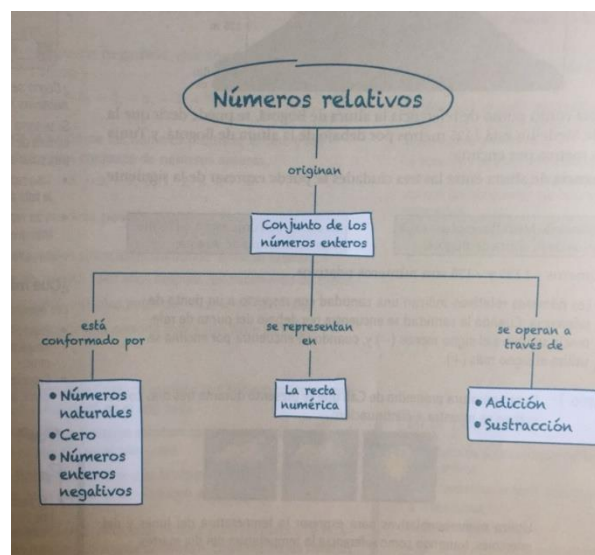


Imagen 2: Mapa conceptual cap.10 libro de texto Secuencia Matemáticas 6

La introducción que el libro de texto hace al capítulo y el mapa conceptual previo al desarrollo de los temas, permite apreciar un posible trabajo con los números enteros desde un *entorno aritmético*, apoyándose en la presentación de modelos concretos y la representación en la recta numérica.

Por su parte, en el libro de texto Secuencias Matemáticas se encuentran los siguientes temas y subtemas que son abordados en el capítulo 1:

Tabla de contenido Secuencias Matemáticas 7
Capítulo 1: Conjunto de los números enteros. Conjunto de los números enteros Representación de números enteros en la recta numérica Relaciones de orden en los números enteros Valor absoluto y los números opuestos El plano cartesiano y los números enteros Operaciones con números enteros Adición de números enteros Sustracción de números enteros Multiplicación de números enteros División de números enteros Potenciación de números enteros Radicación de números enteros Polinomios aritméticos con números enteros Problemas de aplicación con números enteros Competencias básicas

Tabla 12: Contenidos cap.1 del libro de texto Secuencia Matemáticas 7

Después de esto, presenta un mapa conceptual que muestra lo que se va a abordar en las siguientes páginas, tratando aspectos de cómo están conformados los enteros, como se representan y como se operan (imagen 3).

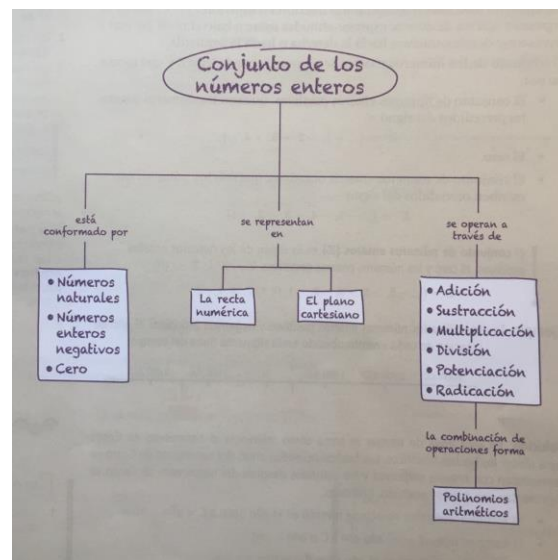


Imagen 3: Mapa conceptual cap.1 libro de texto Secuencia Matemáticas 7

La introducción que el libro de texto realiza sobre los números enteros, permite apreciar un posible trabajo desde un *entorno aritmético*, pues al igual que el libro de texto de 6°, este se apoya en la presentación de modelos concretos y la representación en la recta numérica, además, se tiene presente el plano cartesiano.

En general, los libros de texto no muestran una articulación entre el conjunto de los números naturales, el cual se ha trabajado en capítulos anteriores, y el conjunto de los números enteros, esto desde los planteamientos del MEN (1998) y de Bruno (1997) es una limitación que podría afectar el desarrollo del pensamiento numérico e impedir la ampliación de la noción de número.

Teniendo en cuenta los contenidos que presentan los libros de texto, es posible afirmar que estos se corresponden con los contenidos que presenta el plan de área, sin embargo, en el grado sexto, el libro de texto introduce los números enteros a partir de los números relativos, diferente sucede en el plan de área, donde no se propone una introducción para este conjunto.

Otro aspecto importante, es la forma en cómo se estructuran los contenidos del grado séptimo, pues en el plan de área los presentan enumerados, mientras que el libro de texto, los divide en dos bloques, uno que trata sobre el conjunto numérico, y otro, que hace parte de las operaciones con números enteros.

3.3.2 Muestra de tareas en los textos escolares

A continuación, se presentan 40 tareas que los libros de texto plantean como ejemplos en las unidades correspondientes a los números enteros, las cuales se han escogido dada la importancia

que representan para el desarrollo de este trabajo, pues es en estos ejemplos donde se pueden extraer las técnicas que el libro expone:

1. La temperatura promedio de Cali que se presentó durante tres días consecutivos se muestra a continuación:



Utiliza números relativos para expresar la temperatura del lunes y del miércoles, tomando como referencia la temperatura del día martes.

Solución: La temperatura registrada el día lunes fue 4°C mayor a la temperatura registrada el día martes. Por lo tanto, la temperatura del día lunes fue $+4$ de la temperatura del martes.

La temperatura registrada el día miércoles fue de 2°C menor a la temperatura registrada el día martes. Por tanto, la temperatura del día miércoles fue -2°C con respecto a la temperatura del día martes.

2. Federico nació en el año 2005. Halla el año de nacimiento de sus dos hermanos, teniendo en cuenta que:

- $+10$ años indica la fecha en que nació el hermano menor de Federico con respecto a la fecha de nacimiento de Federico.
- -3 años indica la fecha en que nació la hermana mayor de Federico con respecto a la fecha de nacimiento de Federico.

Solución: La información sobre las fechas de nacimiento de los hermanos de Federico está expresada como números relativos que tienen como punto de referencia la fecha de nacimiento de Federico.

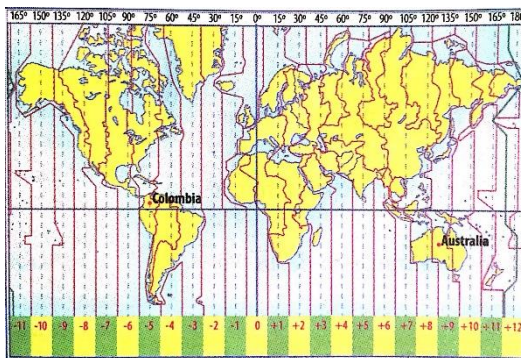
El número $+10$, indica que el hermano menor de Federico nació 10 años después que él, es decir, nació en el 2015. El número -3 indica que la hermana mayor de Federico nació 3 años antes que él, es decir, nació en el 2002.

3. Representa las siguientes situaciones utilizando números enteros:

- a) La imprenta se inventó 1440 años después del nacimiento de Cristo.
- b) El ábaco se inventó 450 años antes del nacimiento de Cristo.
- c) La cuenta bancaria de una persona indica que debe \$800000.

Solución:

- a) Los años después del nacimiento de Cristo se escriben con números positivos. Por tanto, la imprenta se inventó en el año 1440
 - b) Los años antes del nacimiento de Cristo se escriben con números enteros negativos. Por tanto, el ábaco se inventó en el año -450
 - c) El saldo en rojo de una cuenta bancaria se puede representar con números negativos. Por tanto, el saldo de la cuenta es de -800000
4. Los husos horarios indican la diferencia de hora entre los puntos de la superficie de la tierra y el meridiano de Greenwich. Entre dos husos horarios consecutivos hay una diferencia de 1 hora



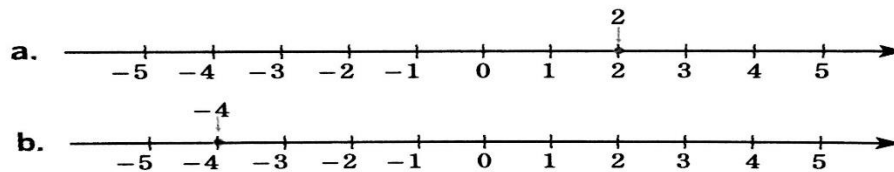
Si en un país ubicado sobre el meridiano de Greenwich son las 2 pm, ¿Qué hora es en Colombia y Australia?

Solución: Colombia está ubicado en el huso horario -5 . Por lo tanto, su hora es 5 horas menos que la de cualquier país ubicado sobre el meridiano de Greenwich. Por su parte, Australia está en el huso horario 9 ; por tanto, su hora es 9 horas mayores. En consecuencia, en Colombia son las 9 a.m. y en Australia las 11 p.m.

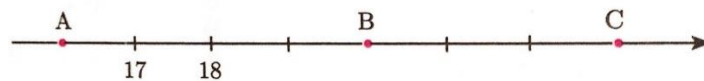
5. Ubica en la recta numérica:

- a) 2
- b) -4

Solución:



6. Determina los números enteros correspondientes a los puntos A, B y C en la siguiente recta numérica:



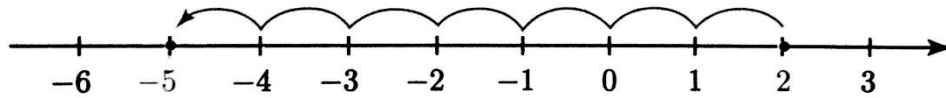
Solución:

- El punto A está ubicado una unidad a la izquierda de 17. Por tanto, le corresponde el número 16.
- El punto B está ubicado dos unidades a la derecha del número 18. Por tanto, le corresponde el número 20.
- Finalmente, el número C está ubicado cinco unidades a la izquierda de 18. Por tanto, le corresponde el número 23.

7. ¿Qué número entero se encuentra 7 unidades a la izquierda de 2 en la recta numérica?

Solución: Para determinar el número entero se encuentra siete unidades a la izquierda de dos, se

ubica 2 en la recta numérica y se cuentan siete unidades hacia la izquierda. Observa:



Luego, el número ubicado siete unidades a la izquierda de 2 en la recta numérica es -5 .

8. Escribe la palabra mayor o menor, según corresponda.

- a) -3 es ____ que -4
- b) -2 es ____ que -4
- c) -2 es ____ que -3
- d) -4 es ____ que -3

Solución:

- a) -3 es *mayor que* -4
 -3 está a la derecha de -4
- b) -2 es *menor que* -4
 -2 está a la izquierda de -4
- c) -2 es *mayor que* -3
 -2 está a la derecha de -3
- d) -4 es *menor que* -3
 -4 está a la izquierda de -3

9. Observa el termómetro y determina la medida de temperatura más alta entre:



a) 6°C y -3°C

b) -9°C y -3°C

Solución:

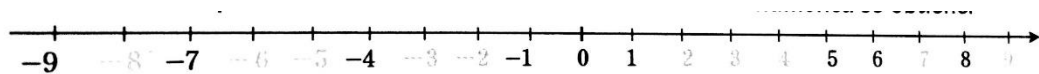
a) 6°C es mayor que -3°C . Se escribe $6^{\circ}\text{C} > -3^{\circ}\text{C}$

b) -3°C es mayor que -9°C . Se escribe $-3^{\circ}\text{C} > -9^{\circ}\text{C}$

10. Ordena de menor a mayor, los siguientes números enteros:

5, -4, 8, -7, -9, 6, 0, 1, -1

Solución: Al representar los números anteriores en la recta numérica se obtiene:



Observa el orden descendente hacia la izquierda de los números enteros negativos y el orden ascendente hacia la derecha de los enteros positivos.

En este caso, -9 es el número menor y 8 el número mayor. Esta relación se puede simbolizar de la siguiente manera:

$$-9 < -7 < -4 < -1 < 0 < 1 < 5 < 6 < 8$$

11. Halla el valor absoluto de los siguientes números enteros:

a) -5

b) 6

c) -11

d) 29

Solución: Se calcula la distancia de cada número al cero.

a) $|-5| = 5$

b) $|6| = 6$

c) $|-11| = 11$

d) $|29| = 29$

12. Halla el opuesto de -19

Solución: El opuesto de -19 , es 19, ya que $|-19| = |19| = 19$ y sus signos son diferentes.

13. Resuelve las sustracciones

a) $13 - 8$

b) $-10 - 6$

Solución:

Se cambia 8 por su opuesto (-8)

a. $13 - 8 = 13 + (-8) = 5$

Se cambia el signo de sustracción por el de adición.

Se cambia 6 por su opuesto (-6)

b. $-10 - 6 = -10 + (-6) = -16$

Se cambia el signo de sustracción por el de adición.

14. Halla las diferencias entre:

a) Los números -15 y -20

b) Los números 20 y -40

Solución:

a) Operación indicada: $(-15) - (-20)$

$$\text{Minuendo} + (-\text{sustraendo}): (-15) + [-(-20)] = (-15) + 20 = 5$$

b) Operación indicada: $20 - (-40)$

$$\text{Minuendo} + (-\text{sustraendo}): 20 + [-(-40)] = 20 + 40 = 60$$

15. Felipe le debía \$5900 a Daniel. Si hoy le pidió prestados \$3500 más, ¿Cuánto le debe ahora?

Solución: Para empezar, se representa esta situación con números enteros así:

- Como Felipe le debía \$5900 a Daniel, esta cantidad es un número entero negativo: -5900
- Daniel le prestó \$3500 más a Felipe, entonces la deuda aumentó en -3500 :

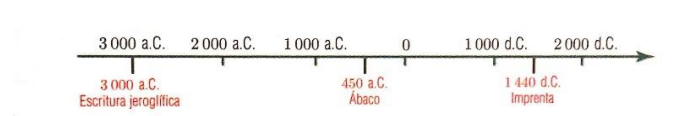
$$(-5900) - 3500$$

Entonces, el problema se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (-5900) - 3500 &= (-5900) + (-3500) \\ &= -9400 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Felipe le debe a Daniel \$9400 en total

16. Identifica los números enteros positivos y negativos asociados al año de creación de cada invento ubicado en la siguiente línea del tiempo:



Solución: En esta línea de tiempo se toma como referencia el nacimiento de Cristo para ubicar los hechos históricos. Los hechos ocurridos antes del nacimiento de Cristo se representan con enteros

negativos y los ocurridos después del nacimiento de Cristo se representan con enteros positivos.

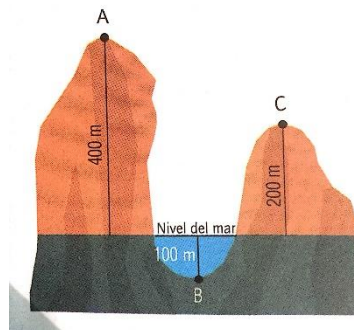
Entonces:

- La escritura jeroglífica egipcia se inventó en el año 3000 a. C. o año -3000
- El ábaco se inventó en el año 450 a.C. o año -450
- La imprenta se inventó en el año 1440 d.C. o año $+1440$

17. Felipe tiene un saldo en contra de \$75800 en el banco ¿Cómo se representa esta situación con números enteros?

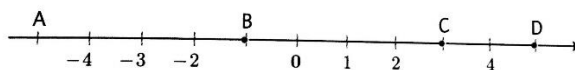
Solución: En las cuentas bancarias los saldos a favor y en contra se representan con enteros positivos y negativos respectivamente. Por lo tanto, el saldo de Felipe se puede representar mediante el entero -75800 .

18. Representa con números enteros los metros de altura o de profundidad de los puntos A, B y C en la gráfica.



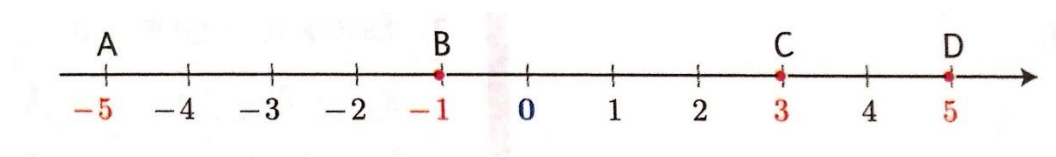
Solución: Al punto A le corresponde una altura de $400m$ sobre el nivel del mar o $+400m$. Al punto B le corresponde una profundidad de $100m$ bajo el nivel del mar o $-100m$. Y al punto C le corresponde una altura de $200m$ sobre el nivel del mar o $+200m$.

19. ¿A qué números enteros corresponden los puntos A, B, C y D?



Solución: Los números ubicados a la derecha del cero son enteros positivos y los ubicados a la izquierda del cero son enteros negativos, entonces A y B son negativos y C y D son positivos.

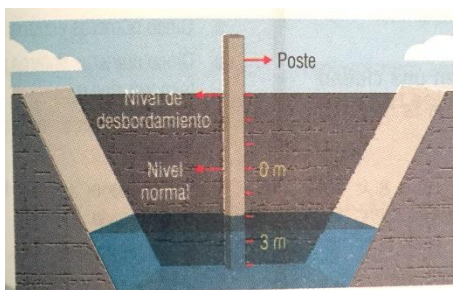
Como cada marca está a la misma distancia una de otra, entonces es posible completar la recta con los números enteros que faltan:



Por lo tanto, el número entero asociado a cada punto es:

A: -5 B: -1 C: 3 D: 5

20. Un poste que está ubicado dentro de una represa indica los niveles de agua normal y de desbordamiento en metros. Observa la imagen



- ¿A cuántos metros sobre el nivel normal se encuentra el nivel de desbordamiento?
- ¿Cuántos metros de profundidad bajo el nivel normal tiene la represa?

Solución:

- En el poste los números enteros se ubican como en la recta numérica. En este caso, mientras los números positivos aparecen por encima del cero, los números negativos aparecen por

debajo. Por lo tanto, el nivel de desbordamiento está a $3m$ sobre el nivel normal.

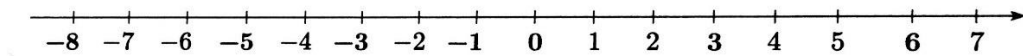
Numéricamente se representa como $+3m$.

b) La represa tiene $4m$ de profundidad bajo el nivel normal es decir $-4m$.

21. Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros:

$$3, -8, 6, -5, -1, 0, y -3$$

Solución: Se representan primero estos números en la recta numérica:



Como los números enteros en una recta aparecen ordenados de menor a mayor, según se leen de izquierda a derecha, entonces se escribe:

$$-8 < -5 < -3 < -1 < 0 < 3 < 6$$

22. Escribe los signos $<$ o $>$

a) $-17 _ 10$

b) $-18 _ -21$

c) $7 _ -13$

Solución:

a) $-17 < 10$

-17 Está a la izquierda de 10

b) $-18 > -21$

-18 Está a la derecha de -21

c) $7 > -13$

7 está a la derecha de -13

23. Los últimos cinco meses la temperatura media registrada en una ciudad fue de 8°C , 10°C , 2°C , -3°C y 6°C respectivamente. Determina la menor y la mayor temperatura media en los últimos meses.

Solución: Al ordenar de menor a mayor estos valores, se obtiene $-3 < 2 < 6 < 8 < 10$.

Entonces la mayor temperatura media registrada fue de 10°C y la menor fue de -3°C .

24. Manuela representó con números enteros el dinero (en pesos) que ganó y que debía cada mes. Observa:

	Febrero	Marzo	Abril
Ganó	+ 1 200 000	+ 1 199 000	+ 1 210 000
Debía	- 650 000	- 648 000	- 649 000

¿En qué mes ganó más dinero?

Solución: Manuela ganó más dinero en abril porque al ordenar los valores se tiene que:
 $1210000 > 1200000 > 1199000$.

25. Calcula el valor absoluto de cada número entero:

a) -32

b) 501

Solución: Para obtener el valor absoluto de cada número, se encierra el número entre barras verticales y se escribe el número sin el signo:

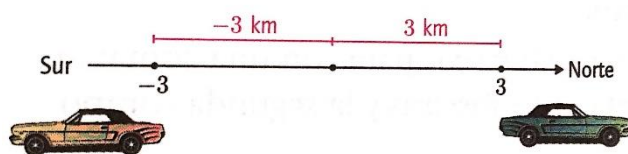
a) $|-32| = 32$

b) $|501| = 501$

26. Dos autos parten de un mismo sitio de origen. El primero se desplaza 3km hacia el norte.

¿Qué distancia separa a los dos autos?

Solución: Las posiciones de los autos corresponden a los números enteros -3 y 3 . La distancia que separa a los autos es igual a la suma de los valores absolutos:



$|-3| + |3| = 3 + 3 = 6$ Por lo tanto, la distancia que separa a los autos es $6km$

27. Escribe el opuesto de cada uno de los siguientes números enteros:

- a) -50
- b) 7

Solución:

- a) El opuesto de -50 es 50
- b) El opuesto de 7 es -7

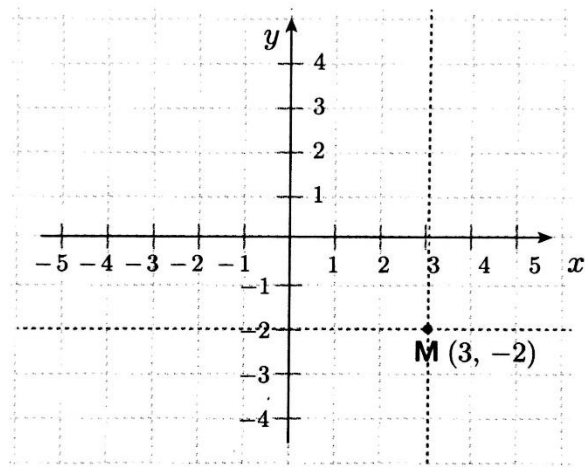
28. Halla el valor de la expresión $| -(-3) |$

Solución: Se halla el opuesto de -3 , $| -(-3) | = |3|$

Se determina el valor absoluto de 3 , $= 3$

29. Ubica en el plano cartesiano el punto M de coordenadas $(3, -2)$ y determina el cuadrante en el cual está ubicado.

Solución: Traza una recta vertical que pase por el punto 3 del eje x y una recta horizontal que pase por el punto -2 en el eje y . La intersección de estas dos rectas determina la ubicación del punto M en el plano cartesiano



El punto M quedó ubicado en el cuadrante IV.

30. Resuelve las siguientes adiciones de números enteros:

a) $(-12) + (-17)$

b) $(-11) + 18$

Solución: En el ejercicio **a** se aplica la regla 1 y en ejercicio **b** se aplica la regla 2:

a.

El signo es el mismo de los sumandos

$$(-12) + (-17) = -(|-12| + |-17|) = -29$$

El valor numérico es la suma de los valores absolutos

b.

El signo es el del número con el mayor valor absoluto

$$(-11) + 18 = +(|18| - |-11|) = +7$$

El valor numérico es la resta de los valores absolutos

31. La temperatura de un congelador era de -11°C . Si ha subido 5°C , ¿qué temperatura tendrá ahora?

Solución: Para calcular la temperatura, se debe resolver la adición $(-11) + 5$. Como $|-11| = 11$ y $|5| = 5$ entonces $|-11| > |5|$. Por tanto:

$$\begin{array}{c}
 \text{El signo es el del mayor valor absoluto} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 (-11) + 5 = - (|-11| - |5|) = -6 \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{El valor numérico es la resta} \\
 \text{de los valores absolutos}
 \end{array}$$

Entonces, el congelador tiene ahora una temperatura de -6°C .

32. Resuelve $-3 + 7 + (-12) + 23 + 11 + (-20)$. Explica la propiedad usada en cada caso.

Solución: Inicia agrupando los términos de cada signo:

Se aplican las propiedades conmutativa y asociativa $= [(-3) + (-12) + (-20)] + [7 + 23 + 11]$

Se resuelven la adición de negativos y la adición de positivos $= -35 + 41$

Se resuelven la adición de enteros con signos distintos $= 6$

33. Marina debe \$230000 y realizó dos abonos, uno de \$100000 y otro de \$130000. ¿Cuánto debe ella después de los abonos que hizo?

Solución: Primero representa las deudas con enteros negativos y los abonos con enteros positivos.

Luego resuelve una adición así:

Enunciado del problema $(-230000) + (100000) + (130000)$

Se aplica propiedad asociativa $= (-230000) + [(100000) + (130000)]$

Se resuelve la adición de enteros positivos $= -230000 + 230000$

Se aplica la propiedad de inverso aditivo $= 0$

El resultado 0, demuestra que Marina ya no debe dinero.

34. Resuelve las siguientes sustracciones

- a) $-10 - (+15)$
- b) $16 - (-13)$
- c) $-22 - (-7)$
- d) $18 - (+23)$

Solución:

a.

$$\begin{array}{c} \text{Inverso aditivo} \\ -10 - (+15) = -10 + (-15) \\ = -25 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{c} \text{Inverso aditivo} \\ 16 - (-13) = 16 + 13 \\ = 29 \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{c} \text{Inverso aditivo} \\ -22 - (-7) = -22 + 7 \\ = -15 \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{c} \text{Inverso aditivo} \\ 18 - (+23) = 18 + (-23) \\ = -5 \end{array}$$

35. Aristóteles nació en el año 384 a. C. y Platón nació en el año 427 a. C. ¿Cuántos años tenía Platón cuando nació Aristóteles?

Solución: se representa los años con números negativos y se efectúa la sustracción.

$$\begin{array}{c} \text{Opuesto aditivo del sustraendo} \\ -384 - (-427) = -384 + 427 = 43 \\ \text{Enunciado del problema} \quad \text{Adición de números con signos opuestos} \end{array}$$

Entonces, Platón tenía 43 años cuando nació Aristóteles.

36. Resuelve la operación $5 - [12 + (16 - 9) - (-16 + 13)]$

Solución: La operación $5 - [12 + (16 - 9) - (-16 + 13)]$ tiene dos signos de agrupación. Para resolverla, se eliminan primero los signos de agrupación internos (paréntesis) y luego los extremos (llaves). Para ello se realizan los siguientes pasos:

Se resuelven las operaciones que se encuentren dentro de los signos de agrupación internos $5 - [12 + (7) - (-3)]$

Se eliminan los signos de agrupación internos $5 - [12 + 7 + 3]$

Se resuelve las adiciones en el interior de los signos de agrupación externa $5 - [22]$

Se eliminan los signos de agrupación externa $5 - 22$

Se resuelve la sustracción de números enteros -17

37. Resuelve las siguientes multiplicaciones de números enteros

a) $8 * 4$

b) $-5 * 3$

c) $7 * (-2)$

d) $(-9) * (-6)$

Solución:

a. $8 \times 4 = 32$
El signo es igual
luego, el producto
es positivo

b. $(-5) \times 3 = -15$
El signo es diferente
luego, el producto es
negativo

c. $7 \times (-2) = -14$
El signo es diferente
luego, el producto
es negativo

d. $(-9) \times (-6) = 54$
El signo es igual
luego, el producto
es positivo

38. Resuelve $(-5) * (-7) * 10 * (-4) * 8$

Solución: Para resolver multiplicaciones de tres o más números enteros puedes asociar términos de dos en dos y usar el procedimiento que ya conoces.

Recuerda que, si dos números tienen igual signo, el producto es positivo. Y si dos números tienen diferente signo, el producto es negativo.

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{(-5) \times (-7)} \times \underbrace{10 \times (-4)} \times \underbrace{8} \\
 = & \quad \underbrace{35 \times (-40)} \times \underbrace{8} \\
 = & \quad \underbrace{-1400 \times 8} \\
 = & \quad -11200
 \end{aligned}$$

39. Resuelve la siguiente operación indicando en cada paso la propiedad aplicada

$$(-2) * [6 + (8 * (-3) * 1)]$$

Solución:

Se aplica la propiedad asociativa de la multiplicación $(-2) * [6 + (8 * (-3) * 1)]$

Se aplica la propiedad madurativa $(-2) * [6 + (8 * (-3))]$

Se resuelve el producto de un número positivo por uno negativo $[(-2) * [6 + (-24)]]$

Se aplica la propiedad distributiva $[(-2) * 6] + [(-2) * (-24)]$

Se resuelven los productos indicados y la suma $(-12) + 48 = 36$

40. Resuelve las siguientes divisiones

a) $(-24) \div 6$

b) $32 \div (-4)$

c) $(-48) \div (-8)$

Solución:

a. $\underbrace{(-24) \div 6}_{\text{Los signos son diferentes luego el cociente es negativo}} = (-4)$

b. $\underbrace{32 \div (-4)}_{\text{Los signos son diferentes luego el cociente es negativo}} = (-8)$

c. $\underbrace{(-48) \div (-8)}_{\text{Los signos son iguales luego el cociente es positivo}} = 6$

3.3.3 Análisis de la Obra Matemática propuesta en los textos escolares

Las tareas que se acaban de presentar serán categorizadas dependiendo del *tipo y género de tarea* con la ayuda de la siguiente notación:

G^x : Género

T_a^x : Tipo de tarea

$t_{a,b}^x$: Tarea

Para iniciar, se presentan los géneros de tareas que se han encontrado:

G^1 : Expresar: engloba aquellos tipos de tareas que requieren que la información de un enunciado o una gráfica, sea escrita usando símbolos matemáticos.

G^2 : Hallar: se refiere a las tareas que implican relacionar una cierta cantidad de datos conocidos para encontrar un dato desconocido.

G^3 : Representar gráficamente: engloba las tareas que implican la realización de esquemas y representaciones gráficas.

G^4 : Relacionar: engloba los tipos de tareas que requieren de la correspondencia entre dos o más objetos.

G^5 : Calcular: Hace referencia a tareas que implican llevar a cabo ciertos procedimientos basados en reglas que son tomadas como verdaderas para obtener un resultado; y predecir algunos acontecimientos dentro de la matemática u otras disciplinas.

A partir de los cinco *géneros de tareas* que se acaban de exponer se indican los *tipos de tareas*

(T_a^x) y *tareas* ($t_{a,b}^x$) presentes en los libros de texto:

G^1 : Expresar

T_1^1 : Expresar con números relativos una cantidad con respecto a un punto de referencia

$t_{1,1}^1$: Expresar con números relativos una cantidad que está por encima o a la derecha de un punto de referencia.

$t_{1,2}^1$: Expresar con números relativos una cantidad que está por debajo o a la izquierda de un punto de referencia.

T_2^1 : Expresar con números enteros una cantidad con respecto a cero “0” como punto de referencia.

$t_{2,1}^1$: Expresar con números enteros una cantidad que está por encima o a la derecha del cero.

$t_{2,2}^1$: Expresar con números enteros una cantidad que está por debajo o a la izquierda del cero.

T_3^1 : Expresar con números enteros puntos sobre la recta numérica.

$t_{3,1}^1$: Expresar con un número entero positivo un punto sobre la recta numérica.

$t_{3,2}^1$: Expresar con un número entero negativo un punto sobre la recta numérica.

G^2 : Hallar

T_1^2 : Hallar una cantidad conociendo el número relativo que la relaciona con un punto de referencia también conocido.

$t_{1,1}^2$: hallar una cantidad conociendo el número relativo (precedido del signo $+$) que la relaciona con un punto de referencia también conocido.

$t_{1,2}^2$: hallar una cantidad conociendo el número relativo (precedido del signo $-$) que la relaciona con un punto de referencia también conocido.

T_2^2 : Hallar una cantidad conociendo el número entero que la relaciona con el cero.

$t_{2,1}^2$: Hallar una cantidad conociendo el número entero positivo que la relaciona con el cero.

$t_{2,2}^2$: Hallar una cantidad conociendo el número entero negativo que la relaciona con el cero.

T_3^2 : Hallar un número entero sabiendo a cuantas unidades está de un entero conocido.

$t_{3,1}^2$: Hallar un número entero sabiendo a cuantas unidades a la izquierda está de un entero conocido.

$t_{3,2}^2$: Hallar un número entero sabiendo a cuantas unidades a la derecha está de un entero conocido.

T_4^2 : Hallar la distancia entre dos puntos, conociendo los números enteros que los relacionan con el cero.

$t_{4,1}^2$: Hallar la distancia entre dos puntos, conociendo los números enteros (un positivo y otro negativo) que los relacionan con el cero.

$t_{4,2}^2$: Hallar la distancia entre dos puntos, conociendo los números enteros negativos que los relacionan con el cero.

G^3 : Representar gráficamente

T_1^3 : Representar números enteros en la recta numérica.

$t_{1,1}^3$: Representar números enteros positivos en la recta numérica.

$t_{1,2}^3$: Representar números enteros negativos en la recta numérica.

T_2^3 : Representar puntos en el plano cartesiano.

$t_{2,1}^3$: Representar un punto en el cuadrante II del plano cartesiano.

G^4 : Relacionar

T_1^4 : Relacionar dos o más números enteros bajo una relación de orden.

$t_{1,1}^4$: Relacionar dos números enteros negativos.

$t_{1,2}^4$: Relacionar un número entero positivo y uno negativo.

$t_{1,3}^4$: Relacionar más de dos números enteros negativos y positivos.

T_2^4 : Relacionar dos o más cantidades bajo una relación de orden.

$t_{2,1}^4$: Relacionar una cantidad positiva con una negativa bajo una relación de orden.

$t_{2,2}^4$: Relacionar dos cantidades positivas bajo una relación de orden.

$t_{2,3}^4$: Relacionar más de dos cantidades positivas y negativas bajo una relación de orden.

G^5 : Calcular

T_1^5 : Calcular el valor absoluto de los números enteros.

$t_{1,1}^5$: Calcular el valor absoluto de un número entero positivo.

$t_{1,2}^5$: Calcular el valor absoluto de un número entero negativo.

$t_{1,3}^5$: Calcular el valor absoluto del opuesto de un número entero negativo.

T_2^5 : Calcular el opuesto de un número entero.

$t_{2,1}^5$: Calcular el opuesto de un número entero negativo.

$t_{2,2}^5$: Calcular el opuesto de un número entero positivo.

T_3^5 : Calcular la sustracción entre números enteros.

$t_{3,1}^5$: Calcular la sustracción entre dos números enteros positivos.

$t_{3,2}^5$: Calcular la sustracción entre dos números enteros negativos.

$t_{3,3}^5$: Calcular la sustracción entre un número entero positivo y uno negativo.

T_4^5 : Calcular la adición entre números enteros.

$t_{4,1}^5$: Calcular la adición entre dos números enteros positivos.

$t_{4,2}^5$: Calcular la adición entre dos números enteros negativos.

$t_{4,3}^5$: Calcular la adición entre un número entero positivo y uno negativo.

$t_{4,4}^5$: Calcular la adición entre más de dos números enteros positivos y negativos.

T_5^5 : Calcular el resultado de un polinomio con números enteros

$t_{5,1}^5$: Calcular el resultado de un polinomio de sumas y restas con números enteros positivos y negativos.

$t_{5,2}^5$: Calcular el resultado de un polinomio de multiplicaciones y sumas con números enteros positivos y negativos.

T_6^5 : Calcular la multiplicación entre números enteros.

$t_{6,1}^5$: Calcular la multiplicación entre dos números enteros positivos.

$t_{6,2}^5$: Calcular la multiplicación entre dos números enteros negativos.

$t_{6,3}^5$: Calcular la multiplicación entre un número entero positivo y uno negativo.

$t_{6,4}^5$: Calcular la multiplicación entre más de dos números enteros positivos y negativos.

T_7^5 : Calcular la división entre números enteros.

$t_{7,1}^5$: Calcular la división entre dos números enteros negativos.

$t_{7,2}^5$: Calcular la división entre un número entero positivo y uno negativo.

Las *técnicas* ($\hat{o}_y$) que los libros de texto emplean para el desarrollo de las *tareas* son las siguientes:

$\hat{o}_1$: *Posiciones relativas*: Esta *técnica* de solución exige que se reconozca el valor relativo de los números y cantidades, es decir, se debe identificar la posición del número o la cantidad, así como la distancia entre este(a) y otro valor de referencia.

$\hat{o}_2$: *Representación gráfica*: Esta *técnica* requiere de la realización de gráficas como la recta numérica, plano cartesiano o ilustraciones según el contexto de la tarea, con el fin de extraer de ellas información que permita llegar a una respuesta.

$\hat{o}_3$: *Relación de orden*: Esta *técnica* requiere de la comparación de dos o más números o cantidades, para determinar un orden ascendente o descendente y saber cuál es mayor o menor.

$\hat{o}_4$: *Cálculo directo por definición*: Esta *técnica* se refiere al cálculo del opuesto o el valor absoluto de un número entero partiendo de la definición.

$\hat{o}_5$: *Criterio algorítmico*: Esta *técnica* hace referencia a todos esos modos de hacer o de resolver determinada tarea, en los cuales se debe dar claridad en la solución de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y las propiedades de cada una de ellas.

$\hat{o}_6$: *Planteamiento de operación*: Esta *técnica* hace referencia a la operación que se debe hacer para dar solución a un problema, en el cual se deben hallar valores desconocidos, para ello es necesario tener claras determinadas propiedades que permitan la solución de dicha operación planteada.

Para relacionar la muestra de tareas de los libros de texto con los *géneros* (G^x), *tipos de tareas* (T_a^x), *tareas* ($t_{a,b}^x$) y *técnicas* ($\hat{o}_y$) se construye la siguiente tabla:

Genero G^x	tipos de tareas T_a^x	tareas $t_{a,b}^x$	Tareas de la muestra en cada técnica						Total
			$\hat{o}_1$	$\hat{o}_2$	$\hat{o}_3$	$\hat{o}_4$	$\hat{o}_5$	$\hat{o}_6$	
G^1	T_1^1	$t_{1,1}^1$	1						3%
		$t_{1,2}^1$	1						
	T_2^1	$t_{2,1}^1$	3, 16, 18, 20						14%
		$t_{2,2}^1$	3, 16, 17, 18, 20						
	T_3^1	$t_{3,1}^1$	6, 19						5%
		$t_{3,2}^1$	19						
G^2	T_1^2	$t_{1,1}^2$	2						3%
		$t_{1,2}^2$	2						
	T_2^2	$t_{2,1}^2$	4						3%
		$t_{2,2}^2$	4						
	T_3^2	$t_{3,1}^2$	7						3,2%
		$t_{3,2}^2$						31	
	T_4^2	$t_{4,1}^2$		26				26	5%
		$t_{4,2}^2$						35	
G^3	T_1^3	$t_{1,1}^3$		5					3%
		$t_{1,2}^3$		5					
	T_2^3	$t_{2,1}^3$		29					1,6%
G^4	T_1^4	$t_{1,1}^4$			8, 22				11%
		$t_{1,2}^4$			22				
		$t_{1,3}^4$		21	10, 21				
	T_2^4	$t_{2,1}^4$			9				6%
		$t_{2,2}^4$			9				
		$t_{2,3}^4$			23, 24				
G^5	T_1^5	$t_{1,1}^5$	11			25			8%
		$t_{1,2}^5$	11			25			
		$t_{1,3}^5$				28			
	T_2^5	$t_{2,1}^5$				12, 27			5%
		$t_{2,2}^5$				27			
	T_3^5	$t_{3,1}^5$					13, 34		9%
		$t_{3,2}^5$					13, 14, 34		
		$t_{3,3}^5$					14, 34		
		$t_{4,1}^5$						15	8%

	T_4^5	$t_{4,2}^5$					30		
		$t_{4,3}^5$					30		
		$t_{4,4}^5$					32	33	
	T_5^5	$t_{5,1}^5$					36		3%
		$t_{5,2}^5$					39		
	T_6^5	$t_{6,1}^5$					37		6%
		$t_{6,2}^5$					37		
		$t_{6,3}^5$					37		
		$t_{6,4}^5$					38		
	T_7^5	$t_{7,1}^5$					40		3%
		$t_{7,2}^5$					40		
Total	18		32,8%	7,8%	14,1%	9,4%	28,1%	7,8%	

Tabla 13: Estructura desde la TAD de las tareas presentadas en los libros de texto

Se puede observar, que aunque los libros de texto realizan el trabajo con los números enteros desde las tres dimensiones propuestas por Bruno (1997) (dimensión contextual, de recta y abstracta), es posible observar que no todas las transferencias están presentes en el desarrollo de las tareas, ya que no hay ninguna que haga referencia a la transferencia *abstracta* $\rightarrow$ *contextual*, esta situación podría presentarse por la sobre carga de tareas que tiene el G^5 (calcular), ya que en este género no se trabaja dicha transferencia. Las transferencias presentes en los libros de texto se distribuyen en el 41% de las tareas de la siguiente forma: T_2^1 y T_2^2 involucran la transferencia *recta* $\rightarrow$ *contextual* abarcando el 17% de las tareas desarrolladas; T_3^1 involucran la transferencia *recta* $\rightarrow$ *abstracta* abarcando el 5% de las tareas desarrolladas; T_3^2 involucran la transferencia *contextual* $\rightarrow$ *recta* abarcando el 3,2% de las tareas desarrolladas; T_2^4 y T_4^2 involucran la transferencia *contextual* $\rightarrow$ *abstracta* abarcando el 11% de las tareas desarrolladas; y T_1^3 y T_2^3 involucran la transferencia *abstracta* $\rightarrow$ *recta* abarcando el 4,7% de las tareas desarrolladas.

El 59% de las tareas restantes no se refieren a una transferencia entre dimensiones, pues hacen parte de T_1^1 y T_1^2 que son *tipos de tareas* que solo trabajan desde la dimensión contextual y de T_1^4 y todos los *tipos de tareas* que conforman a G^5 que solo trabajan desde la dimensión abstracta.

Estos resultados de acuerdo con Bruno (1997) indican que hay una potencialidad en los libros de texto, en cuanto a que se tienen en cuenta las tres dimensiones, sin embargo, respecto al trabajo de las transferencias entre ellas hay una limitación, ya que la transferencia *abstracta* $\rightarrow$ *contextual* se deja por fuera y las que están presentes abarcan menos de la mitad de las tareas desarrolladas. A esta situación se suma el hecho de que no todas las transferencias presentes en los libros de texto aparecen con igual frecuencia, un ejemplo de esto es el bajo porcentaje de tareas en la transferencia *contextual* $\rightarrow$ *recta* (3,2%) en comparación con el porcentaje de tareas en la transferencia *recta* $\rightarrow$ *contextual* (17%).

Ahora bien, cada tarea desarrolla en los libros de texto está asociada a una o más *técnicas* ($\hat{o}_y$), la primera de ellas, $\hat{o}_1$, tiene una frecuencia de uso del 32,8%, $\hat{o}_2$ del 7,8%, $\hat{o}_3$ del 14,1%, $\hat{o}_4$ del 9,4%, $\hat{o}_5$ del 28,1% y $\hat{o}_6$ del 7,8%, estos resultados dejan ver una diferencia en el uso que los libros de texto dan a unas *técnicas* con respecto a otras.

De acuerdo con Cid & Bolea (2010) el alto porcentaje de aparición que tiene $\hat{o}_1$ es una posible limitación para el trabajo con los números enteros, la razón de esto es que históricamente las posiciones relativas permitieron aceptar los números enteros, debido a la posibilidad de relacionar los números signados con medidas, pero a su vez obstaculizaron la justificación de su estructura multiplicativa y ordinal. Esta limitación puede aparecer, por ejemplo, en aquellas tareas en las que se habla de profundidad, pues de acuerdo a los libros de texto las profundidades son números con

signo negativo, al comparar dos profundidades como $-200m$ y $-400m$, sería correcto indicar que $-400m$ es mayor (en profundidad) a $-200m$, sin embargo este orden no refleja el orden de los números enteros, donde $-400 < -200$. Es por esta razón que el frecuente trabajo con $\hat{o}_1$ puede llegar a obstaculizar la justificación de la relación de orden entre números enteros y el trabajo que se realice con $\hat{o}_3$.

También la justificación de la estructura multiplicativa de los números enteros puede verse obstaculizada al dar un uso elevado a $\hat{o}_1$, esto porque al desarrollar tareas mediante el uso de esta *técnica* se promueve la estructura de espacio vectorial, pues las posiciones relativas son entendidas como desplazamientos en una dirección, con un sentido definido y una magnitud, por ende, no se puede justificar matemáticamente la multiplicación entre números enteros, dado que $\mathbb{Z}$ tiene la estructura de anillo (Cid & Bolea 2010).

Debido al 45,3% de aparición que tienen $\hat{o}_4$, $\hat{o}_5$ y $\hat{o}_6$ se observa que el cálculo aritmético toma mucha importancia en las tareas que presentan los libros de texto y su forma de desarrollarlas. Este cálculo aritmético según Cid & Bolea (2010) se caracteriza por ser un procedimiento contextualizado en el que todas las operaciones que se proponen pueden realizarse, debido a que siempre se trabaja con números a los que se atribuye un significado como medidas, tal significado repercute en las decisiones que han de tomarse sobre la secuencia de operaciones aritméticas que resuelve el problema, lo que genera que no se justifique la necesidad de simbolizar el sentido de las magnitudes. En la solución que los libros de texto dan a la tarea 15 es posible evidenciar esta situación:

Felipe le debía \$5900 a Daniel. Si hoy le pidió prestados \$3500 más, ¿Cuánto le debe ahora?

Esta pregunta que está en el contexto de las deudas podría resolverse sin necesidad de utilizar signos para representar las cantidades involucradas, tan solo con resolver la suma $\$5900 + \3500 se puede llegar a la respuesta, en este caso diríamos que Felipe ahora tiene una deuda de \$9400. Sin embargo, el libro le da solución haciendo uso del signo negativo (−) para indicar que dichas cantidades de dinero son deudas:

Solución: Para empezar, se representa esta situación con números enteros así:

- Como Felipe le debía \$5900 a Daniel, esta cantidad es un número entero negativo: -5900
- Daniel le prestó \$3500 más a Felipe, entonces la deuda aumentó en -3500 :

$$(-5900) - 3500$$

Entonces, el problema se resuelve de la siguiente manera:

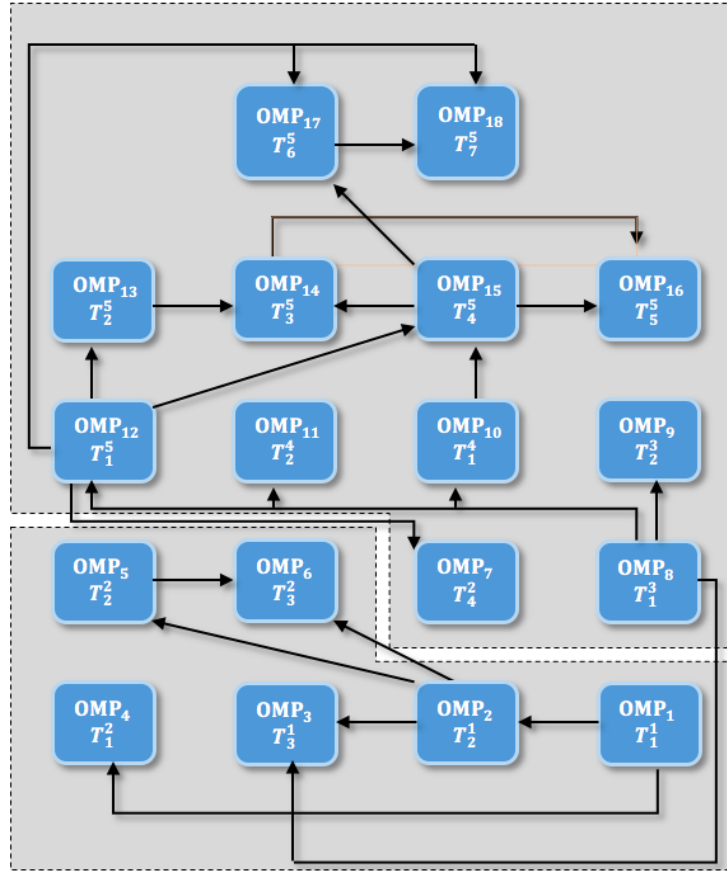
$$\begin{aligned} (-5900) - 3500 &= (-5900) + (-3500) \\ &= -9400 \end{aligned}$$

Por lo tanto, Felipe le debe a Daniel \$9400 en total

Esta forma de solución no justifica la necesidad de los signos en las cantidades, además complejiza los cálculos.

Por otra parte, se establece que la OMP reconstruida en los libros de texto está compuesta por 18

OMPs: cada uno de los *tipos de tareas* T_a^x conforma una OMP de la siguiente manera:



Esquema 2: Reconstrucción de la Omp de los libros de texto

En el esquema 2 se muestra la relación que hay entre las OMPs, cada una señala una o varias OMPs, a las cuales justifica, esto se explica a continuación:

El tipo de tarea constitutivo de la OMP_1 se identifica con el género de tareas G^1 : Expresar. La OMP_1 se conforma por el tipo de tareas T_1^1 : Expresar con números relativos una cantidad con respecto a un punto de referencia, que a su vez incluye 2 tareas. Al realizar este tipo de tareas se consolida la justificación de parte de las técnicas empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de las OMP_2 y OMP_4 .

El tipo de tarea constitutivo de la OMP_2 se identifica con el género de tareas G^1 : *Expresar*. La OMP_2 se conforma por el tipo de tareas T_2^1 : *Expresar con números enteros una cantidad con respecto a cero como punto de referencia*, que a su vez incluye dos tareas. Al realizar este tipo de tareas se consolida la justificación de parte de las técnicas empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de las OMP_3 , OMP_5 y OMP_6 .

El tipo de tarea constitutivo de la OMP_5 se identifica con el género de tareas G^2 : *Hallar*. La OMP_5 se conforma por el tipo de tareas T_2^2 : *Hallar una cantidad conociendo el número entero que la relaciona con cero*, que a su vez incluye dos tareas. Al realizar este tipo de tareas se consolida la justificación de parte de las técnicas empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de las OMP_6 .

El tipo de tarea constitutivo de la OMP_8 se identifica con el género de tareas G^3 : *Representar gráficamente*. La OMP_8 se conforma por el tipo de tareas T_1^3 : *Representar números enteros en la recta numérica*, que a su vez incluye dos tareas. Al realizar este tipo de tareas se consolida la justificación de parte de las técnicas empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de las OMP_3 , OMP_9 , OMP_{10} , OMP_{11} , OMP_{12} .

El tipo de tarea constitutivo de la OMP_{10} se identifica con el género de tareas G^4 : *Relacionar*. La OMP_{10} se conforma por el tipo de tareas T_1^4 : *Relacionar dos o más números enteros bajo una relación de orden*, que a su vez incluye tres tareas. Al realizar este tipo de tareas se consolida la

justificación de parte de las *técnicas* empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de la OMP_{15} .

El *tipo de tarea* constitutivo de la OMP_{12} se identifica con el *género de tareas* G^5 : *Calcular*. La OMP_{12} se conforma por el *tipo de tareas* T_1^5 : *Calcular el valor absoluto de los números enteros*, que a su vez incluye tres tareas. Al realizar este *tipo de tareas* se consolida la justificación de parte de las *técnicas* empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de las $OMP_7, OMP_{13}, OMP_{15}, OMP_{17}$ y OMP_{18} .

El *tipo de tarea* constitutivo de la OMP_{13} se identifica con el *género de tareas* G^5 : *Calcular*. La OMP_{13} se conforma por el *tipo de tareas* T_2^3 : *Calcular el opuesto de un número entero*, que a su vez incluye dos tareas. Al realizar este *tipo de tareas* se consolida la justificación de parte de las *técnicas* empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de la OMP_{14} .

El *tipo de tarea* constitutivo de la OMP_{14} se identifica con el *género de tareas* G^5 : *Calcular*. La OMP_{14} se conforma por el *tipo de tareas* T_3^5 : *Calcular la sustracción entre números enteros*, que a su vez incluye tres tareas. Al realizar este *tipo de tareas* se consolida la justificación de parte de las *técnicas* empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de la OMP_{16} .

El *tipo de tarea* constitutivo de la OMP_{17} se identifica con el *género de tareas* G^5 : *Calcular*. La OMP_{17} se conforma por el *tipo de tareas* T_6^5 : *Calcular la multiplicación entre números enteros*, que a su vez incluye cuatro tareas. Al realizar este *tipo de tareas* se consolida la justificación de parte de las *técnicas* empleadas para llevar a cabo las tareas constitutivas de la OMP_{18} .

Todas las OMPs conforman dos bloques, el primero va desde OMP_1 hasta OMP_6 , y el segundo desde OMP_8 hasta OMP_{18} . El primer bloque inicia con la OMP_1 , la cual justifica las demás, cuyo sustento se da desde el libro de texto haciendo uso de modelos concretos (altitudes, temperaturas y líneas de tiempo (ver imagen 4), esto genera que el bloque 1 carezca de una justificación tecnológica que permita la correcta construcción del conjunto de $\mathbb{Z}$ y la relación de orden, pues como lo resalta Cid (2001), estos modelos no permiten justificar la utilidad de los números negativos a partir de los cuales el libro de texto plantea la construcción de los números enteros, ni tampoco el orden correcto de estos números.

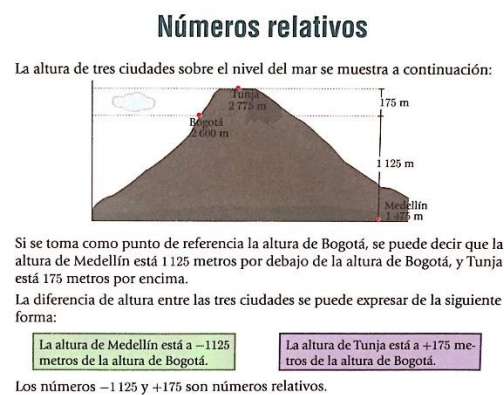


Imagen 4: Modelo concreto (altitudes)

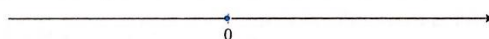
Ahora bien, el segundo bloque inicia con la OMP_8 , la cual está justificada en el libro de texto con el modelo de la recta numérica (ver imagen 5), a partir de ella se justifican las demás OMPs. Este tipo de modelo según Cid (2001) refleja la estructura de espacio afín unidimensional generando dificultades para justificar la estructura del producto de los números enteros, esto se refleja en el siguiente ejemplo: “Cuando interpretamos $(-3)(-2)$ como “reiterar tres veces el desplazamiento de dos casillas hacia la izquierda, cambiándolo de sentido”, lo que estamos describiendo es el producto externo entre un escalar y un vector, no el producto interno entre dos números” (Cid,

2001, p.536), esta situación impide que se cumplan las propiedades del producto que están presentes en la estructura de $\mathbb{Z}$ como anillo ordenado.

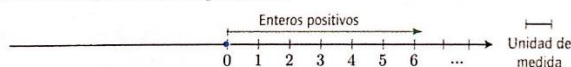
Representación de números enteros en la recta numérica

Los números enteros se pueden representar sobre una recta numérica de la siguiente forma:

- a. Ubica un punto cualquiera en la recta y asígnale el valor 0.



- b. Ubica otro punto cualquiera a la derecha del 0 y asígnale el valor 1. La distancia entre ambos puntos será la longitud de cada unidad medida. Si marcas esa unidad de medida a la derecha del 1, obtienes el 2. Si haces lo mismo infinitas veces, obtienes todos los enteros positivos:



- c. Si marcas ahora la unidad de medida a la izquierda del 0, y realizas el mismo procedimiento siempre a la izquierda, obtienes los números enteros negativos.

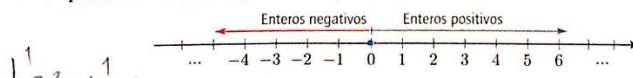


Imagen 5: Modelo de recta numérica

En conclusión, los bloques presentados muestran que las OMPs se vinculan muy débilmente, esto se debe a que las *técnicas* empleadas en los libros de texto están basadas en modelos concretos ocasionando que los elementos tecnológicos no sean suficientes para justificar de forma articulada la introducción a $\mathbb{Z}$ con la relación de orden entre sus elementos y sus operaciones y propiedades $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, por tanto, la OM de los libros de texto no puede considerarse una OML, sino un conjunto de OMPs con cierto nivel de relación (se relacionan unas con otras por las técnicas utilizadas en el desarrollo de las tareas). Esta relación, evita que se presente el fenómeno de *atomización del proceso de enseñanza* porque los conceptos y procedimientos asociados con los enteros no están desvinculados el uno del otro.

Todo lo expuesto anteriormente respecto a los libros de texto se recoge en la siguiente tabla (tabla 14) en términos de las potencialidades y limitaciones que fueron objeto de discusión en la rejilla de análisis:

Teoría	Potencialidades	Limitaciones
TAD	No se presenta el fenómeno de la atomización del proceso de enseñanza entre los temas contenidos en los números enteros.	- Se presenta el fenómeno autismo temático. - Las técnicas utilizadas para resolver las tareas no cuentan con una justificación tecnológica.
Bruno	- Se trabajan las tres dimensiones (recta, contextual y abstracta) - Se trabaja la transferencia entre las dimensiones (excepto la transferencia <i>abstracta</i> → <i>contextual</i>).	No hay articulación entre los sistemas numéricos.
Cid		- Se introducen los números enteros sin tener en cuenta como se dio su desarrollo histórico, trabajando este conjunto sin una justificación creíble. - El trabajo con los números enteros no permite que se construya la estructura de anillo totalmente ordenado. - El cálculo que se propone con los números enteros no permite justificar la necesidad de operar números con signo “+” y “-”.
MEN	Se trabaja desde el contexto de las matemáticas y de la vida diaria.	- No hay una integración de los sistemas numéricos que apunte al desarrollo de pensamiento numérico. - No se trabaja desde el contexto de alguna ciencia distinta de las matemáticas.

Tabla 14: Potencialidades y limitaciones de los libros de texto

CAPÍTULO IV. Conclusiones y reflexiones

4.1 Algunas conclusiones y reflexiones finales

En este trabajo se logró identificar una OMr para la construcción de los números enteros y sus operaciones, que integra elementos de tipo curricular, didáctico y epistemológico. Entre las pautas que brinda la OMr se tienen las siguientes, las cuales pueden ser tenidas en cuenta en posteriores investigaciones en torno a los números enteros o en diseños de propuestas de enseñanza:

- Se resalta la necesidad de asumir el conocimiento acerca de los números, como un todo que se construye a partir del trabajo con los sistemas numéricos, por lo que cualquier propuesta de enseñanza de $\mathbb{Z}$ debería tener en cuenta su articulación con los demás sistemas.
- El trabajo con los números enteros debe tener en cuenta las dimensiones de recta, contextual y abstracta, así como la transferencia entre ellas.
- La introducción del conjunto de los números enteros juega un papel de vital importancia, hacerlo teniendo en cuenta su construcción histórica ayudará a que el conocimiento que se desea enseñar tenga una razón de ser, permitiendo que el trabajo que se realice con este conjunto numérico tenga sentido.
- El trabajo que se realice con $\mathbb{Z}$, desde su introducción hasta sus operaciones, debe garantizar que se construya la estructura algebraica que lo caracteriza, esta es la de un anillo totalmente ordenado $(\mathbb{Z}, +, *)$.
- El entorno en el cual se proponga el cálculo con números enteros, debe permitir que se justifique la necesidad de hacer operaciones con números precedidos de los signos “+” y “-”.

- Las técnicas que se proponen para el desarrollo de las tareas relacionadas con los números enteros, deben tener una justificación, de modo que su utilización garantice que los resultados obtenidos sean válidos.

La descripción y análisis realizados a la OMp por la Institución Educativa Niño Jesús de Praga y su contraste con la OMr permitió identificar en ella potencialidades y limitaciones, las cuales se mencionan a continuación, junto con algunas sugerencias que podrían ayudar a mejorar tanto del plan de área institucional como el trabajo que pudiera realizarse con los libros de texto Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7:

- El plan de área institucional para grado séptimo tiene como potencialidad hacer una relación entre los temas que presenta, dicha relación se da a partir de “Ejes”, que en este caso, podrían permitir que se relacionara el conjunto de los números enteros con los demás conjuntos numéricos. El incluir en su estructura tres de los procesos generales propuestos por el MEN (1998) también se resalta como una potencialidad, sin embargo, se sugiere que se tengan en cuenta los procesos de modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- Una de las limitaciones del plan de área es la presencia de los fenómenos *atomización del proceso de enseñanza* y *autismo temático*, el primero identificado en los planteamientos particulares para el grado sexto y el segundo en todo el plan de área. Como solución a esta limitación se sugiere tener en cuenta, no solo una lista de temas relacionados con los números enteros, sino también objetivos y razones que destaquen la importancia de incluir este sistema numérico en los conocimientos que deben tener los estudiantes al finalizar estos grados, además dejar clara la relación entre este y los demás conjuntos numéricos, pues solo su articulación podrá ayudar a que se desarrolle el pensamiento numérico.

- Otra limitación que pudo encontrarse en el plan de área es la falta de coherencia vertical, que es un aspecto de suma importancia para el trabajo de los números enteros, por lo tanto, es necesario que el plan de área contemple la idea de articular de mejor manera los planteamientos para sexto y séptimo, pues aunque en grado séptimo se presentan estándares pertenecientes a un pensamiento, en grado sexto hay una estructura de presentación muy distinta, que deja por fuera dichos elementos, impidiendo que se pueda relacionar de forma directa lo que trabaja en un grado y en otro.
- Los libros de texto tienen como potencialidad no tener presencia del fenómeno *atomización del proceso de enseñanza* dentro de los contenidos de los números enteros, esto debido a que los tipos de tareas que presentan tienen cierta relación entre sí permitiendo que se trabajen los números enteros de una manera conjunta.
- Otra potencialidad encontrada en los libros de texto es que el trabajo que se realiza contiene las dimensiones de recta, contextual y abstracta, además se realizan cinco de las transferencias entre ellas, quedando por fuera la transferencia *abstracta* $\rightarrow$ *contextual*. A pesar de ser una potencialidad, se sugiere que en el trabajo con $\mathbb{Z}$ se den todas las transferencias logrando que se pueda pasar por los diferentes procesos de aprendizaje y reconocer la estructura de lo que se estudia.
- Una limitación de los libros de texto es no tener en cuenta el proceso de construcción histórica de los números enteros para llevar a cabo su introducción, hecho que podría impedir que se justifique de manera creíble la necesidad de este conjunto numérico y no se tenga en cuenta su relación con el conjunto de los números naturales, que hasta el momento se había trabajado.

- Los modelos que los libros de texto involucran para realizar el trabajo con los números enteros, no permiten que las *técnicas* empleadas para solucionar las tareas tengan una justificación tecnológica, esto resulta ser una limitación, ya que no se puede construir la estructura algebraica de los números enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, incluir el modelo algebraico durante el trabajo con $\mathbb{Z}$ podría ayudar a que la justificación tecnológica estuviera presente permitiendo que se construya $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, esto también ayudaría a que la OM fuera más que un conjunto de OMPs y pasara a ser una OML.

Dados los resultados de esta investigación, se recomienda que la Institución Educativa Niño Jesús de Praga reflexione a cerca de la OMP para la construcción de $\mathbb{Z}$ realizando modificaciones que se consideren necesarias para el mejoramiento del proceso educativo, pues tanto los planes de área, como los libros de textos escolares, son elementos importantes que guiarán al docente para llevar a cabo tanto el momento de planeación, como en el momento de ejecución. En este sentido, se sugieren algunas modificaciones para el mejoramiento del plan de área de matemáticas de la institución educativa, tales como; hacer explícita la razón de ser de la enseñanza de los números enteros, así como la justificación de su enseñanza en los grados sexto y séptimo; y mostrar cómo este contenido curricular se relaciona con otros contenidos curriculares del mismo grado y de otros grados.

En cuanto a los libros de texto, las sugerencia a la institución y particularmente al docente de matemáticas, está relacionada con la búsqueda e incorporación de material que pueda complementar los libros de texto Secuencias Matemáticas 6 y Secuencias Matemáticas 7 (Editorial Libros & Libros S.A.) en aspectos como las relaciones que existen entre el conjunto de los números enteros y los demás conjuntos numéricos, el desarrollo histórico de los números enteros y el uso de otros modelos en los que las situaciones permitan construir nuevas técnicas que sean

justificadas. Este material no se limita a otros libros de texto, sino que también contempla trabajos de investigación, secuencias didácticas, entre otros.

4.2 Nuevas rutas de investigación

Si bien, este trabajo permite sugerir elementos para mejorar la OMp de la institución educativa, este solo es parte del trabajo que desde la TAD se propone para mejorar todo el proceso de enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático, pues esta teoría de investigación abarca también el trabajo del docente y la producción de los estudiantes, en este sentido, se invita a que posteriores investigaciones realicen trabajos de este tipo, contemplando desde la OMp hasta las producciones de los estudiantes, sin embargo, este es un proceso largo que requiere gran inversión de tiempo. Algunos cuestionamientos que podrían dar lugar a posteriores investigaciones son: ¿en qué medida las decisiones del docente frente a la OMp modifican las potencialidades y limitaciones encontradas?, ¿cuál es la OMp que efectivamente el docente pone en práctica en su discurso en el aula y como se relaciona con una OMr? o ¿cuál es la OM que se puede encontrar en la producción de los estudiantes después de la evaluación?

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (2011). La Educación Matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos. En A. Ruiz (Presidencia), *Cincuentenario de la CIAEM*. Simposio llevado a cabo en la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil.
- Bosch, M., Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). Santander: SEIEM.
- Bruno, A. (1997). La enseñanza de los Números Negativos: Aportaciones de una Investigación. *Números*, 29, 5-18.
- Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado de los números negativos. *Gaceta de la real sociedad matemática española*. (4), p. 415-427.
- Castillo, L. (2014). *Una ecología en la introducción del concepto de fracción: un acercamiento desde la TAD*. Universidad del Valle, Colombia.
- Cid, E. (2001). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, 2, 529-542.

- Cid, E. & Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage. *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, Montpellier, Francia.
- Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Universidad Zaragoza. España.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Corica & Otero (2009). Análisis de una praxeología de matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 12(3), 305- 331.
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/1(52), 7-33.
- González, J. L, Iriarte, M, Jimeno, M, Ortiz, A, Sanz, E. & Vargas-Machuca, I. (1990). Números Enteros. En: *Matemáticas Cultura y Aprendizaje* Vol. 6. Madrid: Ed. Síntesis.

- Iriarte, M. Jimeno, M. Vargas-Machuca, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, 13-18.
- Martínez, J. (2014). *Una ecología de las obras matemáticas propuestas en la introducción del concepto de número entero*. Universidad del Valle, Colombia.
- MEN, (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, Santafé de Bogotá D.C. Colombia: Ed. MEN
- MEN, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Santafé de Bogotá D.C. Colombia: Ed. MEN
- Navia, N. & Orozco, V. (2012). *Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la Educación Básica*. Universidad del valle, Colombia.
- Ordóñez, L. & Chavarro, M. (2012). *Un Análisis de las Obras Matemáticas Propuestas en la Enseñanza de los Números Enteros desde la Perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)*. Universidad del Valle, Colombia.
- Otero, C. (2015). *Estrategia didáctica para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números enteros con los estudiantes del grado 7° de la Institución Educativa Ana de Castrillón*. Universidad Nacional, Colombia.

Recalde, L., Hinestroza, D., Vargas, L & Moreno, O. (1998). Semilleros de matemáticas (pp. 93).
Cali, Colombia.

Sánchez, O. (2012). *Propuesta Didáctica Para la Enseñanza de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ a Estudiantes de Séptimo Grado*. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.