Vol. XV, N$^{\underline{o}}$ 2, Diciembre (2007)
Matemáticas: 21–40

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger unidimensional con no linealidad cuadrática

Julián Granados Morales
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Jorge Mejía Laverde
Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Recibido Feb. 19, 2007 Aceptado Jun. 4, 2007

Abstract

In this article we consider the Cauchy problem for the 1 - dimensional Schrödinger equation:

$$\begin{aligned} u_t &= iu_{xx} + u^2, \quad i = \sqrt{-1}, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

with initial data in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$. Using Bourgain spaces, we prove that this problem has a unique local solution, in time, when the initial datum u_0 is taken in $H^s(\mathbb{R})$, with $s > -\frac{3}{4}$.

Keywords: Nonlinear evolution equations, local solutions.

MSC(2000): Primary: 35Q55, Secondary: 37K05

Resumen

En este artículo consideramos el problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger unidimensional:

$$\begin{aligned} u_t &= iu_{xx} + u^2, \quad i = \sqrt{-1}, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

con datos iniciales en espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$. Mediante el uso de espacios de Bourgain probamos que este problema tiene solución local única para datos iniciales u_0 en $H^s(\mathbb{R})$, con $s > -\frac{3}{4}$.

Palabras y frases claves: Ecuaciones de evolución no lineales, soluciones locales.

1 Introducción.

El problema de Cauchy asociado a la ecuación de Schrödinger unidimensional con no linealidad cuadrática consiste en encontrar una función $u = u(x,t)$ de valor complejo, de la variable espacial x y de la variable temporal t tal que

$$\partial_t u(x,t) = i\partial_x^2 u(x,t) + u^2(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y el dato inicial u_0 es tomado en cierto espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$.

En los últimos años el problema de Cauchy para la ecuación de Schrödinger y otras ecuaciones de evolución no lineales ha sido estudiado en espacios de baja regularidad. En nuestro caso la regularidad está relacionada con el índice s del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$.

En [2] y [3] Bourgain desarrolló un método nuevo para el estudio de estos problemas cuya parte esencial radica en elegir de manera adecuada el tipo de espacios en los que se busca la solución. Las normas en estos espacios, definidas a través de la transformada de Fourier espacio - temporal, tienen en cuenta la estructura específica de la parte lineal de la ecuación. Para estas normas los estimativos lineales son similares y sencillos para todas las ecuaciones. Las dificultades aparecen en los estimativos no lineales, y son propias de cada ecuación. En adelante llamaremos espacios de Bourgain a los espacios donde buscaremos las soluciones del problema de Cauchy.

En [5], Kenig, Ponce y Vega, estudiando el problema de Cauchy para la ecuación de Korteweg - de Vries, introdujeron una simplificación significativa del método de Bourgain al realizar los estimativos no lineales mediante desigualdades elementales de cálculo.

El presente artículo está basado en el trabajo [6] de Kenig, Ponce y Vega, acerca de la ecuación unidimensional de Schrödinger con no linealidades de tipo cuadrático y su contenido hizo parte de la tesis de maestría de Julián Mauricio Granados Morales, realizada en la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, bajo la dirección del profesor Jorge Mejía Laverde.

El objetivo de este artículo es reproducir en detalle el resultado de carácter local obtenido en [6] para el problema de Cauchy (1) - (2). La principal diferencia de nuestro artículo con el trabajo [6] es la manera como se lleva a cabo el estimativo de la norma de la forma bilineal uv en el espacio de Bourgain considerado. Para estimar esta norma hacemos uso, como en [6], de desigualdades elementales de cálculo. Sin embargo, la partición de $\mathbb{R}^4$ propuesta en nuestro trabajo para obtener el estimativo es diferente a la utilizada en [6]. Esta diferencia contribuye, en nuestra opinión, a una mejor comprensión del método utilizado y constituye el principal aporte del artículo.

El resultado local que probaremos afirma que dado u_0 en $H^s(\mathbb{R})$, con $s > -\frac{3}{4}$, existe $T > 0$ tal que el problema de Cauchy (1) - (2) tiene solución única en $[-T, T]$.

En el artículo concentraremos nuestra atención en el estimativo no lineal, puesto que, como dijimos antes, los estimativos lineales son relativamente simples y estándar para todas las ecuaciones.

Es importante anotar que el resultado aquí obtenido no es óptimo. Recientemente, Bejenaru y Tao en [1] probaron que el problema de Cauchy (1) - (2) está localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R})$ con $s \geq -1$ y está mal planteado en $H^s(\mathbb{R})$ cuando $s < -1$.

Con el fin de establecer de manera precisa nuestro resultado introducimos algunas definiciones y notaciones. Nuestros datos iniciales estarán en espacios de

Sobolev de tipo L^2, definidos por:

$$H^s \equiv H^s(\mathbb{R}) := \left\{ u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \mid \|u_0\|_s^2 := \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty \right\},$$

donde $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es el espacio de distribuciones temperadas en $\mathbb{R}$, $\widehat{u_0}$ es la transformada de Fourier espacial de u_0, ξ es la variable en el espacio de frecuencias que corresponde a la variable espacial x y, para un número a, $\langle a \rangle := 1 + |a|$.

Buscaremos las soluciones del problema de Cauchy (1) - (2) en espacios de Bourgain del tipo:

$$X_{sb} := \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \mid \|u\|_{sb}^2 := \int_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2b} |\widehat{u}(\lambda)|^2 \, d\lambda < \infty\},$$

donde $s, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^2$, $\widehat{u}$ es la transformada de Fourier espacio - temporal de u, $\lambda := (\xi, \tau)$ es la variable en el espacio de frecuencias correspondiente a la pareja espacio - temporal (x, t) y

$$\sigma := \tau - m(\xi) := \tau + \xi^2.$$

Notemos que $m(\xi) = -\xi^2$ es el símbolo asociado a la parte lineal espacial de la ecuación de Schrödinger (1).

Si $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ es el espacio de Schwartz, entonces puede probarse que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \cap X_{sb}$ es denso en X_{sb}.

De otra parte, si $\mathcal{C}_{bd}(\mathbb{R}_t; H^s)$ denota el espacio de funciones continuas y acotadas de la variable temporal $t \in \mathbb{R}_t$ con valores en H^s, entonces para $b > \frac{1}{2}$, también se puede demostrar que X_{sb} está inmerso de manera continua en $\mathcal{C}_{bd}(\mathbb{R}_t; H^s)$. De esta manera, para $T > 0$ y $b > \frac{1}{2}$, tiene sentido definir el espacio $X_{sb}[-T, T]$ de las restricciones al intervalo $[-T, T]$ de los elementos $v \in X_{sb}$ con norma definida por:

$$\|u\|_{X_{sb}[-T,T]} := \text{ínf} \left\{ \|v\|_{sb} \mid v \in X_{sb} \text{ y } v|_{[-T,T]} = u \right\}.$$

Nuestro concepto de solución para el problema de Cauchy (1) - (2) parte de la fórmula de Duhamel. Formalmente, $u \in X_{sb}[-T, T]$ es una solución del problema de Cauchy (1) - (2) en $[-T, T]$ si y sólo si para cada $t \in [-T, T]$:

$$u(t) = W(t) u_0 + \int_0^t W(t - t') u^2(t') \, dt', \tag{3}$$

donde $W(t) u_0$ es la solución del problema lineal asociado a (1) - (2), es decir:

$$[W(t) u_0]^\wedge (\xi) = e^{itm(\xi)} \widehat{u_0}(\xi).$$

Con el fin de estudiar el problema (3) en el contexto de los espacios de Bourgain modificaremos los dos términos del lado derecho de (3) con ayuda de una función de truncación $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ de la variable temporal t, con soporte contenido en el intervalo abierto $(-2,2)$, tal que $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi \equiv 1$ en el intervalo cerrado $[-1,1]$. Un cálculo directo nos permite concluir que

$$\|\psi(\cdot_t) W(\cdot_t) u_0\|_{sb} \leq C \|u_0\|_s . \tag{4}$$

Para describir la modificación que haremos del término integral del lado derecho de (3), observemos inicialmente que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ y $f(t) := f(\cdot_x, t)$ y definimos el operador integral G por:

$$G(f)(t) := \int_0^t W(t-t') f(t')\, dt', \tag{5}$$

entonces, teniendo presentes la definición de $W(t)$, la fórmula de inversión de Fourier y la igualdad

$$\int_0^t g(t')\, dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \widehat{g}(\tau)\, d\tau,$$

para funciones $g \in L^1(\mathbb{R})$ tales que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, se sigue que

$$[G(f)(t)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-it\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma} \widehat{f}(\xi,\tau)\, d\tau d\xi,$$

donde $\sigma := \tau + \xi^2$.

Dado $T > 0$, sea $\varphi_T \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_\sigma)$ una función de truncación de la variable σ tal que $0 \leq \varphi_T \leq 1$, $\varphi_T \equiv 1$ en el intervalo cerrado $\left[-T^{-\frac{1}{2}}, T^{-\frac{1}{2}}\right]$ y con soporte contenido en el intervalo abierto $\left(-2T^{-\frac{1}{2}}, 2T^{-\frac{1}{2}}\right)$. Con ayuda de la función φ_T podemos escribir $[G(f)(t)](x)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
[G(f)(t)](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-it\xi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\sigma}-1}{i\sigma} \varphi_T(\sigma) \widehat{f}(\xi,\tau)\, d\tau d\xi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau}}{i\sigma} (1-\varphi_T(\sigma)) \widehat{f}(\xi,\tau)\, d\tau d\xi \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-it\xi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\varphi_T(\sigma)}{i\sigma} \widehat{f}(\xi,\tau)\, d\tau d\xi \\
&=: I_{\varphi_T}(f)(x,t) + II_{\varphi_T}(f)(x,t) + III_{\varphi_T}(f)(x,t) .
\end{aligned}$$

La modificación que consideraremos del operador integral (5) está dada por el operador G_T, definido por:

$$G_T(f) := \psi\left(T^{-1}\cdot_t\right) I_{\varphi_T}(f) + II_{\varphi_T}(f) + \psi(\cdot_t)\, III_{\varphi_T}(f) .$$

Observemos que para $0 < T \leq 1$ y $t \in [-T, T]$, se tiene que:

$$G_T(f)(t) = G(f)(t) = \int_0^t W(t - t') f(t') dt'.$$

Procediendo como se hizo en el lema 1 de [4] puede probarse que para $s \in \mathbb{R}$, $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $\beta \in (0, 1-b)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|G_T(f)\|_{sb} \leq CT^\delta \|f\|_{s(-\beta)}, \quad \forall T \in (0,1], \tag{6}$$

con C independiente de f y T. El estimativo (6) permite extender el operador G_T de manera continua al espacio $X_{s(-\beta)}$. Seguiremos denotando esta extensión continua también por G_T $\left(G_T : X_{s(-\beta)} \to X_{sb}\right)$.

En el estudio del problema integral (3) es crucial estimar la forma bilineal uv asociada a la no linealidad cuadrática u^2 de la ecuación. Tal estimativo, que estableceremos en el lema 1, constituye la parte principal de este artículo, y será probado en la sección 2.

Lema 1.1. *Sean $s > -\frac{3}{4}$ y $r := \max\{0, -s\}$. Si $\beta \in \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ y $b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ son escogidos de manera que $b + \beta < 1$ y $\frac{1}{2} - \beta \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - r\right)$, entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\|uv\|_{s(-\beta)} \leq C \|u\|_{sb} \|v\|_{sb}, \qquad \forall u, v \in X_{sb}.$$

De los estimativos (4) y (6) y del lema 1, podemos dar una definición precisa de solución local en el tiempo para el problema de Cauchy (1) - (2).

Definición 1.2. *Sean s, β y b parámetros que satisfacen las condiciones del lema 1. Para $u_0 \in H^s$ y $T \in (0,1]$ decimos que una función $u \in X_{sb}[-T, T]$ es solución del problema de Cauchy (1) - (2) en $[-T, T]$ con dato inicial u_0, si existe una extensión $v \in X_{sb}$ de u tal que*

$$u(t) = W(t) u_0 + G_T\left(v^2\right)(t) \qquad \forall t \in [-T, T].$$

Finalizamos esta introducción con el enunciado del teorema de existencia y unicidad de soluciones locales del problema de Cauchy (1) - (2), que será probado en la sección 3.

Teorema 1.3. *Sean $s > -\frac{3}{4}$ y b como en el lema 1, y sea $u_0 \in H^s$. Entonces existen $T \in (0,1)$, $T = T(\|u_0\|_s)$, y una única solución $u \in X_{sb}[-T, T]$ del problema de Cauchy (1) - (2) en $[-T, T]$ con dato inicial u_0.*

Observación 1.4. *A lo largo de este artículo la letra C denotará diversas constantes po-sitivas que pueden cambiar de una línea a otra y/o depender de parámetros que serán claramente establecidos en cada caso. De otra parte, para cantidades variables x y y, la notación $x \sim y$ significará que existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que $C_1 |x| \leq |y| \leq C_2 |x|$.*

2 Estimación de la Forma bilineal uv (Demostración del lema 1)

En la demostración del lema 1 serán utilizadas las siguientes desigualdades de cálculo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\langle x\rangle^{\alpha}\langle x-a\rangle^{\beta}} \leq \frac{C}{\langle a\rangle^{\alpha}}, \qquad \text{para} \qquad 1<\beta, \quad 0<\alpha\leq\beta, \tag{7}$$

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{\langle x\rangle^{\alpha}} \leq C \max\{|a|,|b|\}^{1-\alpha}, \qquad \text{para} \qquad 0\leq\alpha<1. \tag{8}$$

Debemos probar que:

$$\|uv\|_{s(-\beta)} \leq C\|u\|_{sb}\|v\|_{sb}. \tag{9}$$

Para simplificar la escritura adoptamos las siguientes notaciones:

$$\begin{gathered} \lambda:=(\xi,\tau), \quad \lambda_1:=(\xi_1,\tau_1), \quad \xi_2:=\xi-\xi_1, \quad \tau_2:=\tau-\tau_1, \\ \lambda_2:=\lambda-\lambda_1=(\xi_2,\tau_2), \quad \sigma:=\tau-m(\xi)=\tau+\xi^2, \\ \sigma_1:=\sigma(\xi_1,\tau_1), \quad \sigma_2:=\sigma(\xi_2,\tau_2), \quad \|\cdot\|:=\|\cdot\|_{L^2_\lambda}. \end{gathered}$$

Si definimos:

$$p(\lambda):=\langle\xi\rangle^{s}\langle\sigma\rangle^{b}|\widehat{u}(\lambda)| \qquad \text{y} \qquad q(\lambda):=\langle\xi\rangle^{s}\langle\sigma\rangle^{b}|\widehat{v}(\lambda)|,$$

entonces, teniendo en cuenta que

$$(uv)^{\wedge}(\lambda)=C(\widehat{u}*\widehat{v})(\lambda)=C\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{u}(\lambda_1)\widehat{v}(\lambda-\lambda_1)\,d\lambda_1,$$

por dualidad, para probar (9) es suficiente probar que para $h\in L^2_\lambda$, $h\geq 0$:

$$J':=\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\langle\xi\rangle^{s}p(\lambda_1)q(\lambda_2)h(\lambda)}{\langle\sigma\rangle^{\beta}\langle\xi_1\rangle^{s}\langle\sigma_1\rangle^{b}\langle\xi_2\rangle^{s}\langle\sigma_2\rangle^{b}}d\lambda_1 d\lambda \leq C\|p\|\|q\|\|h\|. \tag{10}$$

Por un argumento de simetría basta considerar en (10) la integral sólo sobre el conjunto $\Omega:=\left\{(\lambda,\lambda_1)\in\mathbb{R}^4 \mid |\sigma_2|\leq|\sigma_1|\right\}$. Por tanto, para probar (10) es suficiente ver que si

$$J:=\int_{\Omega}\frac{\langle\xi\rangle^{s}p(\lambda_1)q(\lambda_2)h(\lambda)}{\langle\sigma\rangle^{\beta}\langle\xi_1\rangle^{s}\langle\sigma_1\rangle^{b}\langle\xi_2\rangle^{s}\langle\sigma_2\rangle^{b}}d\lambda_1 d\lambda \tag{11}$$

entonces

$$J\leq C\|p\|\|q\|\|h\|. \tag{12}$$

Como $r=\max\{0,-s\}$ entonces $\frac{\langle\xi\rangle^{s}}{\langle\xi_1\rangle^{s}\langle\xi_2\rangle^{s}}\leq C\frac{\langle\xi_1\rangle^{r}\langle\xi_2\rangle^{r}}{\langle\xi\rangle^{r}}$, y en consecuencia:

$$J\leq C\int_{\Omega}\frac{1}{\langle\sigma\rangle^{\beta}\langle\sigma_1\rangle^{b}\langle\sigma_2\rangle^{b}}\frac{\langle\xi_1\rangle^{r}\langle\xi_2\rangle^{r}}{\langle\xi\rangle^{r}}p(\lambda_1)q(\lambda_2)h(\lambda)\,d\lambda_1 d\lambda. \tag{13}$$

La identidad

$$\sigma - \sigma_1 - \sigma_2 = 2\xi_1 (\xi - \xi_1) \tag{14}$$

motiva la descomposición de la región Ω de $\mathbb{R}^4$ en las siguientes 6 subregiones:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega \mid |\sigma_1| \leq |\sigma|, \quad |\xi|^2 \leq 12 |\sigma|\}, \\
\Omega_2 &:= \{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega \mid |\sigma_1| \leq |\sigma|, \quad |\xi|^2 > 12 |\sigma|\}, \\
\Omega_3 &:= \{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega \mid |\sigma| < |\sigma_1|, \quad |\xi_1| < 1\}, \\
\Omega_4 &:= \{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega \mid |\sigma| < |\sigma_1|, \quad |\xi_1| \geq 1, \quad |\xi - \xi_1| < 1\}, \\
\Omega_5 &:= \{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega \mid |\sigma| < |\sigma_1|, \quad |\xi_1|^2 \leq 12 |\sigma_1|, \quad |\xi_1| \geq 1, \quad |\xi - \xi_1| \geq 1\}, \\
\Omega_6 &:= \{(\lambda, \lambda_1) \in \Omega \mid |\sigma| < |\sigma_1|, \quad |\xi_1|^2 > 12 |\sigma_1|, \quad |\xi_1| \geq 1, \quad |\xi - \xi_1| \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Para $i = 1, ..., 6$, sea J_{Ω_i} la contribución de Ω_i a la integral en (11). Así, para probar (12) debemos probar que cada J_{Ω_i} está acotada por

$$C \|p\| \|q\| \|h\| .$$

Para $i = 1, 2, 3$, por una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la integral que aparece en (13), primero en la variable λ_1 y luego en la variable λ se tiene que:

$$J_{\Omega_i} \leq \sup_{\lambda \in A_i} I_i (\lambda) \|p\| \|q\| \|h\| ,$$

donde $A_i := \{\lambda \mid \exists \lambda_1 \ \ (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_i\}$ e

$$I_i (\lambda) := \frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ \int\limits_{\{\lambda_1 | (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_i\}} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2r} \langle \xi_2 \rangle^{2r} d\lambda_1}{\langle \sigma_1 \rangle^{2b} \langle \sigma_2 \rangle^{2b}} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

De manera similar, para $i = 4, 5, 6$, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la integral que aparece en (13), primero en la variable λ y luego en la variable λ_1, para obtener:

$$J_{\Omega_i} \leq \sup_{\lambda_1 \in A_i^*} I_i^* (\lambda_1) \|p\| \|q\| \|h\| ,$$

donde $A_i^* := \{\lambda_1 \mid \exists \lambda \ \ (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_i\}$ e

$$I_i^* (\lambda_1) := C \frac{\langle \xi_1 \rangle^r}{\langle \sigma_1 \rangle^b} \left\{ \int\limits_{\{\lambda | (\lambda, \lambda_1) \in \Omega_i\}} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{2r} d\lambda}{\langle \sigma \rangle^{2\beta} \langle \sigma_2 \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2r}} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Así, el lema 1 quedará demostrado si probamos que $\sup\limits_{\lambda \in A_i} I_i (\lambda) \leq C$, para $i = 1, 2, 3$ y $\sup\limits_{\lambda_1 \in A_i^*} I_i^* (\lambda_1) \leq C$, para $i = 4, 5, 6$.

2.1 Estimación de $\mathbf{I}_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$.

En la estimación de $I_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, usaremos el cambio de variable

$$z_1 := \varphi(\xi_1) := -2\xi_1(\xi_1 - \xi). \tag{15}$$

Entonces de (14) se sigue que $\sigma_2 = \sigma - \sigma_1 - z_1$, y así, para $i = 1, 2$, $|z_1| \leq 3|\sigma|$, con lo cual si $\lambda \in A_i$:

$$I_i(\lambda) \leq$$

$$\frac{C}{\langle\xi\rangle^r \langle\sigma\rangle^\beta} \left\{ \int\limits_{\{\xi_1 | |z_1| \leq 3|\sigma|\}} \langle\xi_1\rangle^{2r} \langle\xi_2\rangle^{2r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2b} \langle\sigma_1 - (\sigma - z_1)\rangle^{2b}} \right] d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Teniendo en cuenta que en la integral interior de la anterior expresión $d\tau_1 = d\sigma_1$ y aplicando la desigualdad de cálculo (7) a esta integral, concluimos que:

$$I_i(\lambda) \leq \frac{C}{\langle\xi\rangle^r \langle\sigma\rangle^\beta} \left\{ \int\limits_{\{\xi_1 | |z_1| \leq 3|\sigma|\}} \frac{\langle\xi_1\rangle^{2r} \langle\xi_2\rangle^{2r}}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

De (15) es claro que

$$\left| \frac{dz_1}{d\xi_1} \right| = 4\xi \left| \frac{\xi_1}{\xi} - \frac{1}{2} \right|. \tag{17}$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $\xi > 0$.

Estimación de $\mathbf{I}_1(\lambda)$

Consideremos la partición del conjunto $\{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3|\sigma|\}$ en los conjuntos

$$Y_1 := \{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3|\sigma| \text{ y } \left| \frac{1}{2} - \frac{\xi_1}{\xi} \right| < \frac{3}{2}\} \quad \text{y}$$
$$Y_2 := \{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3|\sigma| \text{ y } \left| \frac{1}{2} - \frac{\xi_1}{\xi} \right| \geq \frac{3}{2}\}.$$

Si $\xi_1 \in Y_1$, entonces $-\xi < \xi_1 < 2\xi$ con lo que $|\xi_1| < C\xi$ y $|\xi - \xi_1| < C\xi$. Por lo tanto: $\langle\xi_1\rangle^{2r} \langle\xi_2\rangle^{2r} \leq C\langle\xi\rangle^{4r}$, y en consecuencia:

$$\frac{C}{\langle\xi\rangle^r \langle\sigma\rangle^\beta} \left\{ \int\limits_{Y_1} \frac{\langle\xi_1\rangle^{2r} \langle\xi_2\rangle^{2r}}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C \frac{\langle\xi\rangle^r}{\langle\sigma\rangle^\beta} \left\{ \int\limits_{\{\xi_1 | |z_1| \leq 3|\sigma|\}} \frac{d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Definamos ahora:

$$E_1 := \{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3\,|\sigma| \text{ y } \left|\frac{1}{2} - \frac{\xi_1}{\xi}\right| < \frac{1}{\xi}\} \quad \text{y}$$
$$E_2 := \{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3\,|\sigma| \text{ y } \left|\frac{1}{2} - \frac{\xi_1}{\xi}\right| \geq \frac{1}{\xi}\}.$$

Entonces:

$$\frac{C}{\langle\xi\rangle^r \langle\sigma\rangle^\beta}\left\{\int_{Y_1} \frac{\langle\xi_1\rangle^{2r}\langle\xi_2\rangle^{2r}}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} d\xi_1\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{\langle\xi\rangle^r}{\langle\sigma\rangle^\beta}\left\{\int_{E_1} \frac{d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} + \int_{E_2} \frac{d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\frac{\langle\xi\rangle^r}{\langle\sigma\rangle^\beta}\left\{|E_1| + \int_{E_2} \frac{d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

donde $|E_1|$ denota la medida de E_1.

Realizando en la última integral el cambio de variable (15), $z_1 = \varphi(\xi_1)$, y teniendo en cuenta que para $\xi_1 \in E_2$, de (17) se sigue que $\left|\frac{dz_1}{d\xi_1}\right| \geq 4\xi\frac{1}{\xi} = 4$, y que en Ω_1, $\xi \leq C\,|\sigma|^{\frac{1}{2}}$, concluimos, dado que $\beta \geq \frac{3}{8}$, que:

$$\frac{C}{\langle\xi\rangle^r \langle\sigma\rangle^\beta}\left\{\int_{Y_1} \frac{\langle\xi_1\rangle^{2r}\langle\xi_2\rangle^{2r}}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} d\xi_1\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{\langle\xi\rangle^r}{\langle\sigma\rangle^\beta}\left\{2 + \frac{1}{4}\int_{-3|\sigma|}^{3|\sigma|} \frac{dz_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C\frac{\langle\xi\rangle^r}{\langle\sigma\rangle^\beta} \leq C\frac{\langle\sigma\rangle^{\frac{r}{2}}}{\langle\sigma\rangle^\beta} \leq C, \tag{18}$$

Si $\xi_1 \in Y_2$, $\left|\frac{1}{2} - \frac{\xi_1}{\xi}\right| \sim \left|\frac{\xi_1}{\xi}\right|$ y por lo tanto de (17):

$$\left|\frac{dz_1}{d\xi_1}\right| \geq C\xi\left|\frac{\xi_1}{\xi}\right| \geq C\,|\xi_1|. \tag{19}$$

Además, como en Y_2 $|\xi_1| > |\xi|$, entonces $|\xi_2| \leq 2\,|\xi_1|$ y por consiguiente:

$$\langle\xi_1\rangle^{2r}\langle\xi_2\rangle^{2r} \leq C\,\langle\xi_1\rangle^{4r}.$$

Así, realizando el cambio de variable (15), $z_1 = \varphi(\xi_1)$, y teniendo en cuenta

(19) y que para $|\xi_1| \geq 1$, $\langle \xi_1 \rangle \sim |\xi_1|$, se puede concluir que:

$$\frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ \int_{Y_2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2r} \langle \xi_2 \rangle^{2r}}{\langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ \int_{Y_2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{4r}}{\langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ \int_{\{\xi_1 \in Y_2 | |\xi_1| < 1\}} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{4r}}{\langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} d\xi_1 + \int_{\{\xi_1 \in Y_2 | |\xi_1| \geq 1\}} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{4r}}{\langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ C + \int_{\left\{ z_1 | |z_1| \leq 3|\sigma|, \left| \frac{1}{2} - \frac{\xi_1}{\xi} \right| \geq \frac{3}{2}, |\xi_1| \geq 1 \right\}} \frac{|\xi_1|^{4r} \, dz_1}{|\xi_1| \langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Si $r \leq \frac{1}{4}$, teniendo en cuenta que $|\xi_1| \geq 1$, de la anterior desigualdad concluimos que

$$\frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ \int_{Y_2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2r} \langle \xi_2 \rangle^{2r}}{\langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \leq C. \tag{21}$$

Si $\frac{1}{4} < r < \frac{3}{4}$, como $|z_1| \leq 3|\sigma|$, entonces

$$\xi_1 \in \left[\frac{\xi}{2} - \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \frac{3}{2}|\sigma|}, \frac{\xi}{2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \frac{3}{2}|\sigma|} \right]$$

y puesto que en Ω_1, $|\xi|^2 < 12|\sigma|$, se sigue que $|\xi_1| \leq C|\sigma|^{\frac{1}{2}}$ y de (20):

$$\frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ \int_{Y_2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{2r} \langle \xi_2 \rangle^{2r}}{\langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} d\xi_1 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \left\{ C + \int_{\mathbb{R}} \frac{|\sigma|^{2r - \frac{1}{2}} \, dz_1}{\langle \sigma - z_1 \rangle^{2b}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{C}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} + \frac{C|\sigma|^{r - \frac{1}{4}}}{\langle \xi \rangle^r \langle \sigma \rangle^\beta} \leq C, \tag{22}$$

ya que $\beta + \frac{1}{4} \geq r$, pues $\frac{1}{2} - \beta \leq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - r\right) \leq \frac{3}{4} - r$. De (16), (18), (21) y (22) podemos concluir que $\sup_{\lambda \in A_1} I_1(\lambda) \leq C$.

Estimación de $\mathbf{I}_2(\lambda)$

Teniendo en cuenta el cambio de variable (15), $z_1 = \varphi(\xi_1)$, si $z_1 = 3|\sigma|$ entonces $\xi_1 = \frac{1}{2}\xi \pm \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - 6|\sigma|}$ y si $z_1 = -3|\sigma|$ entonces $\xi_1 = \frac{1}{2}\xi \pm \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 6|\sigma|}$. Por lo tanto:

$$\{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3|\sigma|\} = \left\{ \xi_1 \mid \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - 6|\sigma|} \leq \left| \xi_1 - \frac{\xi}{2} \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 6|\sigma|} \right\}. \tag{23}$$

Sean

$$\begin{aligned} R_1 &:= \left\{ \xi_1 \mid \tfrac{1}{2}\xi - \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 6\,|\sigma|} \le \xi_1 \le \tfrac{1}{2}\xi - \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - 6\,|\sigma|} \right\} \quad \text{y} \\ R_2 &:= \left\{ \xi_1 \mid \tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - 6\,|\sigma|} \le \xi_1 \le \tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 6\,|\sigma|} \right\}. \end{aligned}$$

Como en Ω_2 $\frac{|\sigma|}{\xi^2} \le \frac{1}{12}$, entonces $\sqrt{1 + \frac{6|\sigma|}{\xi^2}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}$, y por lo tanto si $\xi_1 \in R_1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \xi_1 &\ge \left[\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 6\,|\sigma|} \right] \left[\frac{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 6\,|\sigma|}}{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 6\,|\sigma|}} \right] \\ &= \frac{-3\,|\sigma|}{\xi\left(1 + \sqrt{1 + \frac{6|\sigma|}{\xi^2}}\right)} \ge -C\frac{|\sigma|}{\xi} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \xi_1 &\le \left[\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - 6\,|\sigma|} \right] \left[\frac{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - 6\,|\sigma|}}{\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 - 6\,|\sigma|}} \right] \\ &= \frac{3\,|\sigma|}{\xi\left(1 + \sqrt{1 - \frac{6|\sigma|}{\xi^2}}\right)} \le C\frac{|\sigma|}{\xi}. \end{aligned}$$

En consecuencia, si $\xi_1 \in R_1 : |\xi_1| \le C\frac{|\sigma|}{\xi}$ y $|\xi - \xi_1| \le C\xi$.

Gracias a la simetría de la gráfica de la parábola $z_1 = -2\xi_1(\xi_1 - \xi)$ con respecto a la vertical $\xi_1 = \frac{1}{2}\xi$, podemos afirmar que si $\xi_1 \in R_2$ entonces:

$$|\xi_1| \le C\xi \qquad \text{y} \qquad |\xi - \xi_1| \le C\frac{|\sigma|}{\xi}.$$

Por lo tanto de (16) se sigue que para $\lambda \in A_2$

$$\begin{aligned} I_2(\lambda) &\le C\frac{1}{\langle\xi\rangle^r \langle\sigma\rangle^\beta} \left\{ \int\limits_{\{\xi_1 | |z_1| \le 3|\sigma|\}} \frac{\langle\xi\rangle^{2r} \left\langle\frac{\sigma}{\xi}\right\rangle^{2r} d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= C\frac{1}{\langle\sigma\rangle^\beta} \left\langle\frac{\sigma}{\xi}\right\rangle^r \left\{ \int\limits_{\{\xi_1 | |z_1| \le 3|\sigma|\}} \frac{d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}} \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Para $\lambda \in A_2$, consideremos dos casos:

(i) Supongamos que $\lambda \in A_2$ y $\xi > 1$.

Dado que $\xi^2 > 12|\sigma|$ y $\left|\frac{dz_1}{d\xi_1}\right| = 4\xi\left|\frac{\xi}{2}-\xi_1\right| \geq 4\left|\frac{\xi}{2}-\xi_1\right|$, de (23) se sigue que:

$$\left|\frac{dz_1}{d\xi_1}\right| \geq 2\sqrt{\xi^2 - 6|\sigma|} \geq 2\sqrt{\xi^2 - \frac{\xi^2}{2}} = \sqrt{2}\xi.$$

Así, de (24) concluimos, después de hacer el cambio de variable $z_1 = \varphi(\xi_1)$ en la integral del lado derecho, que:

$$I_2(\lambda) \leq C\frac{1}{\langle\sigma\rangle^\beta}\left\langle\frac{\sigma}{\xi}\right\rangle^r \left\{\int_{-3|\sigma|}^{3|\sigma|}\frac{dz_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}\,\xi}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\left[\frac{1}{\langle\sigma\rangle^\beta \xi^{\frac{1}{2}}} + \frac{|\sigma|^r}{\langle\sigma\rangle^\beta \xi^{r+\frac{1}{2}}}\right].$$

Si $\beta \geq r$, es claro que $I_2(\lambda) \leq C$.

Si $\beta < r < \frac{3}{4}$, entonces:

$$I_2(\lambda) \leq C\left[\frac{1}{\langle\sigma\rangle^\beta \xi^{\frac{1}{2}}} + \frac{\xi^{2r-2\beta}}{\xi^{r+\frac{1}{2}}}\right] \leq C,$$

pues $2r - 2\beta - r - \frac{1}{2} = r - 2\beta - \frac{1}{2} \leq r - 1 + \left(\frac{3}{4} - r\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \leq 0$.

(ii) Supongamos que $\lambda \in A_2$ y $\xi \leq 1$.

Entonces como $\frac{|\sigma|}{\xi} \leq C\xi \leq C$, $\left\langle\frac{\sigma}{\xi}\right\rangle^r \leq C$.

De otra parte, de (23) es claro que la medida de $\{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3|\sigma|\}$ está acotada por $C\xi$. Luego de (24) concluimos que:

$$I_2(\lambda) \leq C\frac{1}{\langle\sigma\rangle^\beta}\left\{\int\limits_{\{\xi_1 \mid |z_1| \leq 3|\sigma|\}}\frac{d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{1}{\langle\sigma\rangle^\beta}\xi^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{1}{\langle\sigma\rangle^\beta} \leq C.$$

De (i) y (ii) se sigue que $\sup\limits_{\lambda \in A_2} I_2(\lambda) \leq C$.

2.2 Estimación de $I_3(\lambda)$

Para $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_3$, $|\xi_1| < 1$ y $\langle\xi_2\rangle \leq C\langle\xi\rangle$. Por lo tanto, si $\lambda \in A_3$, entonces, usando la desiguldad de cálculo (7), concluimos que:

$$\begin{aligned} I_3(\lambda) &= \frac{C}{\langle\xi\rangle^r\langle\sigma\rangle^\beta}\left[\int\limits_{\{\lambda_1 \mid (\lambda,\lambda_1) \in \Omega_3\}}\frac{\langle\xi_1\rangle^{2r}\langle\xi_2\rangle^{2r}}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_2\rangle^{2b}}d\lambda_1\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C}{\langle\sigma\rangle^\beta}\left[\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_1}{\langle\sigma_1\rangle^{2b}\langle\sigma_1 - (\sigma - z_1)\rangle^{2b}}\right]d\xi_1\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{\langle\sigma\rangle^{\beta}}\left[\int_{-1}^{1}\frac{d\xi_1}{\langle\sigma - z_1\rangle^{2b}}\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\langle\sigma\rangle^{\beta}} \leq C.$$

Luego

$$\sup_{\lambda\in A_3} I_3(\lambda) \leq C.$$

2.3 Estimación de $I_i^*(\lambda_1)$ $(i = 4, 5, 6)$.

En la estimación de $I_i^*(\lambda_1)$, $i = 4, 5, 6$, usaremos el cambio de variable:

$$z := \psi(\xi) := 2\xi_1(\xi - \xi_1). \tag{25}$$

Entonces, de (14) se sigue que $\sigma - \sigma_1 - \sigma_2 = z$, y así, para $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_i,\ i = 4, 5, 6$, se tiene que $|z| \leq 3|\sigma_1|$. Por lo tanto si $\lambda_1 \in A_i^*$, una aplicación elemental de la desigualdad de cálculo (7) nos permite concluir que

$$I_i^*(\lambda_1) \leq C\frac{\langle\xi_1\rangle^r}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{\{\xi||z|\leq 3|\sigma_1|\}}\frac{\langle\xi_2\rangle^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1 + z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{26}$$

para $i = 4, 5, 6$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\xi_1 > 0$.

Estimación de $I_4^*(\lambda_1)$

Si $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_4$, entonces $\langle\xi_1\rangle\langle\xi - \xi_1\rangle \leq C\langle\xi\rangle$. Por lo tanto de (26), teniendo en cuenta el cambio de variable (25) ($\frac{dz}{d\xi} = 2\xi_1$) y la desigualdad de cálculo (8), se sigue que para $\lambda_1 \in A_4^*$

$$\begin{aligned} I_4^*(\lambda_1) &\leq C\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{\{\xi||z|\leq 3|\sigma_1|\}}\frac{d\xi}{\langle\sigma_1 + z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^b\xi_1^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{-3|\sigma_1|}^{3|\sigma_1|}\frac{dz}{\langle\sigma_1 + z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{1}{2}-\beta}}{\langle\sigma_1\rangle^b\xi_1^{\frac{1}{2}}} \leq C, \end{aligned}$$

pues $\beta + b > b > \frac{1}{2}$. En consecuencia, $\sup\limits_{\lambda_1\in A_4^*} I_4^*(\lambda_1) \leq C$.

Estimación de $I_5^*(\lambda_1)$

Para $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_5$, $\langle\xi_1\rangle\langle\xi_2\rangle \leq C|\xi_1||\xi_2|$ y por tanto, si $\lambda_1 \in A_5^*$ se cumple que:

$$I_5^*(\lambda_1) \leq \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{\{\xi||z|\leq 3|\sigma_1|\}}\frac{(|\xi_1||\xi_2|)^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1 + z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{\{\xi||z|\leq 3|\sigma_1|\}} \frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Consideremos la partición del conjunto $\{\xi \mid |z| \leq 3\,|\sigma_1|\}$ en los conjuntos:

$$D_1 := \{\xi \mid |z| \leq \frac{1}{2}\,|\sigma_1|\} \quad \text{y} \quad D_2 := \{\xi \mid \frac{1}{2}\,|\sigma_1| < |z| \leq 3\,|\sigma_1|\},$$

y la partición de D_2 en los conjuntos:

$$\begin{aligned} D_{21} &:= \{\xi \in D_2 \mid \frac{1}{4}\,|\xi| \leq |\xi_1| \leq 100\,|\xi|\},\\ D_{22} &:= \{\xi \in D_2 \mid 1 \leq |\xi_1| \leq \frac{1}{4}\,|\xi|\} \text{ y}\\ D_{23} &:= \{\xi \in D_2 \mid 100\,|\xi| \leq |\xi_1|\}. \end{aligned}$$

En D_1, $|\sigma_1+z| \geq \frac{1}{2}\,|\sigma_1|$. Por lo tanto:

(i) Si $r > \frac{1}{2}$:, puesto que $\beta + b \geq r$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_1} \frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_1} \frac{|\sigma_1|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\frac{|\sigma_1|^r}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^\beta}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C, \end{aligned} \tag{28}$$

(ii) Si $r < \frac{1}{2}$, como $|z| \leq 3\,|\sigma_1|$, entonces $|\xi - \xi_1| \leq \frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}$, y así, aplicando la desigualdad de cálculo (8), y dado que $b + \beta > \frac{1}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_1} \frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C\frac{|\sigma_1|^r}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^\beta}\left\{\int\limits_{\xi_1-\frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}}^{\xi_1+\frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{2r}}\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq C\frac{|\sigma_1|^r}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^\beta}\left(\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}\right)^{\frac{1}{2}-r} \leq C\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^\beta\,\xi_1^{\frac{1}{2}-r}} \leq C. \end{aligned}$$

(iii) Si $r = \frac{1}{2}$, como $b + \beta > \frac{1}{2}$, se tiene:

$$\frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_1}\frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \le C\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^{\beta}}\left\{\int\limits_{\xi_1-\frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}}^{\xi_1+\frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}}\frac{d\xi}{(1+|\xi|)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^{\beta}}\left\{\int\limits_{1}^{1+C\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}}\frac{d\xi}{\xi}\right\}^{\frac{1}{2}} \le C\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^{\beta}}\left\{C+\ln\langle\sigma_1\rangle\right\}^{\frac{1}{2}} \le C, \quad (29)$$

En D_{21}, $|\sigma_1| \sim |z|$ y $\xi^2 \sim \xi_1^2$. Luego

$$|\sigma_1| \le c\,|z| \le C\,|\xi_1|\,(|\xi| + |\xi_1|) \le C\,|\xi_1|^2\,,$$

y como $|\xi_1| \ge 1$, entonces $\xi^2 \sim \xi_1^2 \ge C\,\langle\sigma_1\rangle$. De esta manera, realizando el cambio de variable (25) ($\frac{dz}{d\xi} = 2\xi_1$) y aplicando la desigualdad de cálculo (8) obtenemos:

$$\frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_{21}}\frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \le C\frac{|\sigma_1|^{r}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_{21}}\frac{d\xi}{\langle\sigma_1\rangle^{r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{r}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_{21}}\frac{d\xi}{\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \le C\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{r}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{-3|\sigma_1|}^{3|\sigma_1|}\frac{dz}{\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\frac{r}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{2}}}\,|\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta} \le C, \quad (30)$$

pues $b + \beta > \frac{1}{2} + \frac{3}{8} > \frac{1}{2} + \frac{r}{2}$.

En D_{22}, $|\xi - \xi_1| \sim |\xi| \sim \langle\xi\rangle$, y así, $|z| \sim |\xi_1|\,|\xi - \xi_1| \sim |\xi_1|\,\langle\xi\rangle$. Por lo tanto, haciendo de nuevo el cambio de variable (25) y aplicando la desigualdad de cálculo (8), se sigue que:

$$\frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_{22}}\frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \le C\frac{|\xi_1|^{r}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{D_{22}}\frac{d\xi}{\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C\frac{|\xi_1|^{r}}{\langle\sigma_1\rangle^b\,\xi_1^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{-3|\sigma_1|}^{3|\sigma_1|}\frac{dz}{\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \le C\frac{|\xi_1|^{r-\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\,|\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta}. \quad (31)$$

Veamos que el lado derecho de (31) está acotado, para los valores de r permisibles.

Si $r \leq \frac{1}{2}$, claramente $\frac{C|\xi_1|^{r-\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b} |\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta} \leq C$, porque $|\xi_1| > 1$ y $b+\beta \geq \frac{1}{2}$.

Si $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{4}$, como $\xi_1^2 \leq 12\,|\sigma_1|$, entonces

$$C\frac{|\xi_1|^{r-\frac{1}{2}}}{\langle\sigma_1\rangle^b} |\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta} \leq C\frac{|\sigma_1|^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{\langle\sigma_1\rangle^b} |\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta} \leq \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^{b+\beta-\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}} \leq C,$$

ya que $b+\beta > \frac{1}{4}+\frac{r}{2}$. En consecuencia,

$$\frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int_{D_{22}} \frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \leq C. \tag{32}$$

En D_{23}, $|\xi-\xi_1| \sim |\xi_1|$ y en consecuencia $|\xi_1|^2 \sim |z| \sim |\sigma_1|$. Realizando nuevamente el cambio de variable (25) y aplicando la desigualdad de cálculo (8), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int_{D_{23}} \frac{|z|^{2r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int_{D_{23}} \frac{|\xi_1|^{4r}\,d\xi}{\langle\xi\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\frac{|\xi_1|^{2r}}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int_{D_{23}} \frac{d\xi}{\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\frac{|\sigma_1|^r}{\langle\sigma_1\rangle^b\,\xi_1^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{-3|\sigma_1|}^{3|\sigma_1|} \frac{dz}{\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\frac{|\sigma_1|^r}{\langle\sigma_1\rangle^b\,\xi_1^{\frac{1}{2}}} |\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta} = C\frac{|\sigma_1|^r\,|\sigma_1|^{\frac{1}{4}}}{\langle\sigma_1\rangle^b\,\xi_1^{\frac{1}{2}}} |\sigma_1|^{\frac{1}{4}-\beta} \\
&\leq C\frac{|\sigma_1|^r}{\langle\sigma_1\rangle^b} |\sigma_1|^{\frac{1}{4}-\beta} \leq C,
\end{aligned} \tag{33}$$

ya que $b+\beta > \frac{1}{2}+\beta > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-r\right) > 1-\left(\frac{3}{4}-r\right) = \frac{1}{4}+r$.

De (27), (28), (29), (30), (32) y (33) se sigue que

$$\sup_{\lambda_1\in A_5^*} I_5^*(\lambda_1) \leq C.$$

Estimación de $I_6^*(\lambda_1)$

De la definición de z dada en (25), es claro que:

$$\{\xi \mid |z| \leq 3\,|\sigma_1|\} = \left[\xi_1 - \frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}, \xi_1 + \frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}\right].$$

En particular, $|\xi_2| = |\xi - \xi_1| \leq \frac{3}{2}\frac{|\sigma_1|}{\xi_1}$.

Dado que para $(\lambda, \lambda_1) \in \Omega_6$, $12\,|\sigma_1| \leq |\xi_1|^2$, entonces $\frac{|\sigma_1|}{\xi_1} \leq \frac{1}{12}\xi_1$ y por lo tanto

$$\{\xi \mid |z| \leq 3\,|\sigma_1|\} \subseteq \left[\frac{7}{8}\xi_1, \frac{9}{8}\xi_1\right],$$

y de esta manera de (26) podemos concluir que para $\lambda_1 \in A_6^*$, tiene lugar la siguiente cadena de desigualdades en la que hemos hecho uso del cambio de variable (25), de la desigualdad de cálculo (8) y del hecho de que $\xi_1 \sim \langle\xi_1\rangle$ y $\langle\sigma_1\rangle \leq C\,\langle\xi_1\rangle^2$:

$$\begin{aligned}
I_6^*(\lambda_1) &\leq C\frac{\langle\xi_1\rangle^r}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\{\int\limits_{\{\xi \mid |z|\leq 3|\sigma_1|\}} \frac{\left\langle\frac{\sigma_1}{\xi_1}\right\rangle^{2r} d\xi}{\langle\xi_1\rangle^{2r}\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\langle\frac{\sigma_1}{\xi_1}\right\rangle^r \frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{2}}}\left\{\int\limits_{-3|\sigma_1|}^{3|\sigma_1|}\frac{dz}{\langle\sigma_1+z\rangle^{2\beta}}\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C}{\langle\sigma_1\rangle^b}\left\langle\frac{\sigma_1}{\xi_1}\right\rangle^r \frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{2}}}\,|\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta} \\
&\leq C\left[\frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\xi_1\rangle^{\frac{1}{2}}} + \frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta}}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\xi_1\rangle^{\frac{1}{2}}}\frac{|\sigma_1|^r}{\langle\xi_1\rangle^r}\right] \\
&\leq C\left[\frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{b-\frac{1}{2}+\beta}} + \frac{|\sigma_1|^{\frac{1}{2}-\beta}|\sigma_1|^r}{\langle\sigma_1\rangle^b\langle\sigma_1\rangle^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}\right] \leq C,
\end{aligned}$$

ya que $b+\beta \geq \frac{1}{2}$ y $b+\beta \geq \frac{1}{4}+\frac{r}{2}$. Por lo tanto

$$\sup_{\lambda_1 \in A_6^*} I_6^*(\lambda_1) \leq C.$$

Hemos probado que $\sup\limits_{\lambda\in A_i} I_i(\lambda) \leq C$ para $i = 1, 2, 3$ y que $\sup\limits_{\lambda_1\in A_i^*} I_i^*(\lambda_1) \leq C$ para $i = 4, 5, 6$. Por lo tanto, el lema 1 queda demostrado. □

3 Demostración del Teorema I (Existencia y Unicidad)

3.1 Existencia

Sean s y b como en la hipótesis del teorema 3, $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ y $T \in (0,1)$. Definamos el operador $\Phi := \Phi_{u_0,T} : X_{sb} \longrightarrow X_{sb}$ por:

$$\Phi(v) := \psi(\cdot_t)\,W(\cdot_t)\,u_0 + G_T\left(v^2\right) \qquad \text{para } v \in X_{sb}.$$

De los estimativos lineales (4) y (6) y del lema 1 se sigue que:

$$\|\Phi(v)\|_{sb} \leq \|\psi(\cdot_t) W(\cdot_t) u_0\|_{sb} + \left\|G_T\left(v^2\right)\right\|_{sb} \leq C\left(\|u_0\|_s + T^\delta \|v\|_{sb}^2\right),$$

y por lo tanto el operador Φ está bien definido.

Si $T \in (0,1)$ se escoge de manera que $T^\delta \leq \frac{1}{4C^2\|u_0\|_s+1}$, entonces el operador Φ envía la bola cerrada $\overline{B}(0, 2C\|u_0\|_s)$ de X_{sb} en sí misma. En realidad, si $\|v\|_{sb} \leq 2C\|u_0\|_s$, entonces:

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)\|_{sb} &\leq C\left(\|u_0\|_s + T^\delta \|v\|_{sb}^2\right) \leq C\left(\|u_0\|_s + T^\delta 4C^2 \|u_0\|_s^2\right) \\ &\leq C\|u_0\|_s\left(1 + 4C^2 T^\delta \|u_0\|_s\right) \leq C\|u_0\|_s\left(1 + \frac{4C^2\|u_0\|_s}{4C^2\|u_0\|_s + 1}\right) \\ &\leq 2C\|u_0\|_s .\end{aligned}$$

Sea $T \in (0,1)$ tal que $T^\delta := \frac{1}{8C^2\|u_0\|_s+2}$. Para este valor de T, en vista del análisis anterior, es claro que Φ envía $\overline{B}(0, 2C\|u_0\|_s)$ en sí misma. Veamos que Φ es una contracción. Sean $v, w \in \overline{B}(0, 2C\|u_0\|_s)$. Entonces, del estimativo (6) y del lema 1, se sigue que:

$$\begin{aligned}\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{sb} &= \left\|G_T\left(v^2\right) - G_T\left(w^2\right)\right\|_{sb} = \left\|G_T\left(v^2 - w^2\right)\right\|_{sb} \\ &= \|G_T[(v+w)(v-w)]\|_{sb} \leq CT^\delta \|(v+w)(v-w)\|_{s(-\beta)} \\ &\leq CT^\delta \|v+w\|_{sb}\|v-w\|_{sb} \\ &\leq CT^\delta\left(\|v\|_{sb} + \|w\|_{sb}\right)\|v-w\|_{sb} \\ &\leq CT^\delta\left(4C\|u_0\|_s\right)\|v-w\|_{sb} \\ &= C\left[\frac{1}{8C^2\|u_0\|_s + 2}\right]\left(4C\|u_0\|_s\right)\|v-w\|_{sb} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{8C^2\|u_0\|_s}{8C^2\|u_0\|_s + 2}\right]\|v-w\|_{sb} \leq \frac{1}{2}\|v-w\|_{sb} .\end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema del punto fijo de Banach, existe un único $v \in \overline{B}(0, 2C\|u_0\|_s)$ tal que $\Phi(v) = v$, es decir $v = \psi(\cdot_t) W(\cdot_t) u_0 + G_T\left(v^2\right)$.

Si $u := v|_{[-T,T]} \in X_{sb}[-T, T]$, entonces se tiene que:

$$u(t) = \psi(t) W(t) u_0 + G_T\left(v^2\right)(t) = W(t) u_0 + G_T\left(v^2\right)(t) \qquad \forall t \in [-T, T],$$

es decir, u es solución en el intervalo $[-T, T]$ del problema de Cauchy (1) - (2) con dato inicial u_0.

3.2 Unicidad

Observemos inicialmente que si $w_1, w_2, \widetilde{w_1}, \widetilde{w_2} \in X_{sb}$ son tales que

$$\begin{gathered} w_i(t) = \widetilde{w_i}(t) \quad \forall t \in [-T, T] \quad (T > 0,\ \text{arbitrario}),\ \text{entonces} \\ G_T(w_1 w_2)(t) = G_T(\widetilde{w_1}\widetilde{w_2})(t) \quad \forall t \in [-T, T]. \end{gathered}$$

La prueba de esta observación es similar a la de la proposición 1 (i) en [7].

Supongamos que $u_1, u_2 \in X_{sb}[-T,T]$ son soluciones del problema de Cauchy (1) - (2) en $[-T,T]$ con dato inicial u_0 y sean v_1 y v_2 extensiones en X_{sb} de u_1 y u_2, respectivamente. Entonces para todo $t \in [-T,T]$:

$$\begin{aligned} u_2(t) - u_1(t) &= G_T\left(v_2^2\right)(t) - G_T\left(v_1^2\right)(t) \\ &= G_T\left[(v_2+v_1)(v_2-v_1)\right](t). \end{aligned} \tag{34}$$

Sea $\theta \in (0,1)$ y $\theta \leq T$. Entonces $\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]} \in X_{sb}[-\theta,\theta]$. Sea $w \in X_{sb}$ una extensión de $\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}$ tal que

$$\|w\|_{sb} \leq 2\left\|\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}\right\|_{X_{sb}[-\theta,\theta]}. \tag{35}$$

De (34) y de la observación inicial se sigue que para todo $t \in [-\theta,\theta]$:

$$u_2(t) - u_1(t) = G_\theta\left[(v_2+v_1)(v_2-v_1)\right](t) = G_\theta\left[(v_2+v_1)w\right](t).$$

Por lo tanto, de la definición de norma en el espacio $X_{sb}[-\theta,\theta]$ es claro que:

$$\left\|\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}\right\|_{X_{sb}[-\theta,\theta]} \leq \left\|G_\theta\left[(v_1+v_2)w\right]\right\|_{sb}. \tag{36}$$

En consecuencia, usando el estimativo lineal (6), el lema 1 y la desigualdad (35), de (36) podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \left\|\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}\right\|_{X_{sb}[-\theta,\theta]} &\leq C\theta^\delta \left\|(v_1+v_2)w\right\|_{s(-\beta)} \leq C\theta^\delta \|v_1+v_2\|_{sb}\|w\|_{sb} \\ &\leq 2C\theta^\delta \|v_1+v_2\|_{sb}\left\|\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}\right\|_{X_{sb}[-\theta,\theta]}. \end{aligned}$$

Sea $\theta := \text{mín}\left\{T, \left(4C\|v_1+v_2\|_{sb}+2\right)^{-\frac{1}{\delta}}\right\}$. Entonces:

$$\begin{aligned} &\left\|\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}\right\|_{X_{sb}[-\theta,\theta]} \\ &\leq 2C\left(4C\|v_1+v_2\|_{sb}+2\right)^{-1}\|v_1+v_2\|_{sb}\left\|\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}\right\|_{X_{sb}[-\theta,\theta]} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]}\right\|_{X_{sb}[-\theta,\theta]}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left.(u_2-u_1)\right|_{[-\theta,\theta]} = 0.$$

Iterando el anterior argumento un número finito de veces (para T fijo el tamaño de θ sólo depende de $\|v_1+v_2\|_{sb}$) podemos concluir que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [-T,T]$. $\square$

Referencias

[1] Bejenaru, I. and Tao, T.: Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic nonlinear Schrödinger equation. J. Funct. Anal. 233 (2006), pp. 228-259.

[2] Bourgain, J.: Fourier Transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations, I. Schrödinger equations, GAFA, 3 (1993), pp. 107-156.

[3] Bourgain, J.: Fourier Transform restriction phenomena for certain lattice subsets and application to nonlinear evolution equations, II. The KdV equations, GAFA, 3 (1993), pp. 209-262.

[4] Isaza, P., López, J., and Mejía, J. The Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) equation in three space dimensions, Comm. Partial Differential Equations, 32 (2007), pp. 611-641.

[5] Kenig, C., Ponce, G. and Vega, L.: A bilinear estimate with applications to the KdV equations, JAMS, 9 (1996), pp. 573-603.

[6] Kenig, C., Ponce, G. and Vega, L.: Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation, Transactions of the AMS, Volume 348, Number 8, (1996), pp. 3323-3353.

[7] Mejía, J. Teorema de existencia y unicidad para el problema de Cauchy asociado a la Ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (KP-II) sin argumento de homogeneidad, Lecturas Matemáticas, 22 (2001), pp. 83-101.

Dirección de los autores
Julián Granados Morales — Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
e-mail: `jmgranad@unalmed.edu.co`
Jorge Mejía Laverde — Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín
e-mail: `jemejia@unalmed.edu.co`