



EL PAPEL DEL JUEGO EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO A
TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Kevin Alejandro Bermudez Arboleda

Laura Marcela Ramirez Vega

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2024



EL PAPEL DEL JUEGO EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO A
TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Kevin Alejandro Bermudez Arboleda

Código 201923098

Laura Marcela Ramirez Vega

Código 201923702

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas

Directora:

Mg. Ligia Amparo Torres Rengifo

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2024



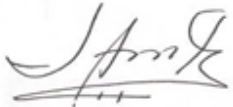
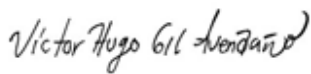
Programa Académico Licenciatura en matemáticas

Fecha

Código del programa: 3492

Resolución del programa: 111

Día	Mes	Año
16	08	2024

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
El Papel del Juego en el Desarrollo del Pensamiento Algebraico a Través de la Resolución de Problemas				
Se trata de:				
Informe Final				
Director				
Ligia Amparo Torres Rengifo				
Nombre del Primer Evaluador				
Cristian Andrés Hurtado Moreno				
Nombre del Segundo Evaluador				
Víctor Hugo Gil Avendaño				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Laura Marcela Ramirez	201923702	3492	laura.marcela.ramirez@correounivalle.edu.co	3206847572
Kevin Alejandro Bermudez	201923098	3492	bermudez.kevin@correounivalle.edu.co	3005757317
Evaluación				
Aprobado X		Meritorio X		Laureado
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado		Primer Evaluador		Segundo Evaluador
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de semestre (s) realizar una nueva reunión de Evaluación el: dd mm aa para				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).				
Firmas				
				
Ligia Amparo Torres Rengifo Director del Trabajo de Grado	Cristian Andrés Hurtado Moreno Primer Evaluador	Víctor Hugo Gil Avendaño Segundo Evaluador		

[illegible]

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a DIOS por darme la oportunidad de llegar hasta este punto de mi vida, por guiar cada uno de mis pasos y por hacer posible el sueño de ser profesional y a diario darme más de lo que puedo esperar.

A mis padres Marleny Arboleda y Luis Bermudez, y a mi hermano Luis por acompañarme en este camino, hacerlo más sencillo, por su apoyo incondicional, por ser ejemplo y motivarme a siempre luchar por lo que deseo, los amo con todo mi corazón.

A la universidad del Valle por abrirme las puertas y no solo brindarme una formación de calidad, si no un lugar seguro en el que pude bailar, reír, conocer y compartir con personas maravillosas.

A el Área de Cultura y a cada integrante de la Selección de Salsa Univalle, gracias, ocupan un gran espacio en mi corazón.

A todos los profesores que me guiaron durante mi formación académica.

A Laura, mi compañera y amiga con quien fue posible la realización de este proyecto lleno de tantas emociones y aprendizajes, lo logramos.

A la profesora Ligia Amparo Torres por apoyarnos en este trabajo para poder tener un producto terminado y en excelencia.

A todos mis compañeros de la carrera por compartir sus conocimientos conmigo y en especial a mis amigos, Laura, Lighia, Jimena y Jean Paul por brindarme su más sincero apoyo cuando lo necesité.

Finalmente quiero agradecer a todas esas personas que directa o indirectamente con sus palabras de aliento han estado aquí desde que inició este proceso, a mis familiares por permitirme gozar de ellos y brindarme su cariño.

A todos, GRACIAS.

Kevin Alejandro Bermudez Arboleda

Agradezco enormemente a Dios, por haberme demostrado su inmenso amor durante toda mi vida, y en especial, durante estos cinco años de carrera.

A mis padres, Libardo Ramirez y Sonia Vega, por apoyarme, acompañarme y sostenerme en cada reto asumido a lo largo de mi vida. Ustedes junto con Juan Diego son mi mayor motivación para salir adelante.

A la Universidad del Valle, mi alma mater soñada, por abrirme sus puertas y formarme como profesional y como persona.

A mis profesores, quienes con sus enseñanzas reafirmaron mi amor por la educación matemática y el deseo de aportar a la educación desde el amor y la conciencia, haciéndome la profesional que soy.

A Kevin, quien con su paciencia y amor me sostuvo desde primer semestre y permitió la construcción de este trabajo hecho con tanto amor y sacrificio, no pude encontrar un mejor compañero.

A nuestra directora, la profesora Ligia Amparo Torres, a quien le tengo una profunda admiración, que desde su experiencia nos apoyó y orientó con paciencia en el desarrollo de este trabajo.

Al resto de mi amado equipo, Jimena, Lighia y Jean Paul, quienes acompañaron todo este proceso de crecimiento personal y profesional, haciendo de la vida universitaria una experiencia maravillosa y con muchas anécdotas que contar.

A todas las personas que aportaron con mensajes cargados de amor y ánimos durante estos cinco años para hacer más liviano el camino.

A todos, GRACIAS.

Laura Marcela Ramirez Vega

Tabla de contenido

Introducción	12
Capítulo 1. Aspectos Generales del Trabajo	14
1.1 Problemática.....	14
1.2 Objetivos	18
1.2.1 Objetivo General.....	18
1.2.2 Objetivos Específicos.....	18
1.3 Justificación.....	19
1.4 Antecedentes	23
1.4.1 Investigaciones sobre la Problemática de Transición de la Aritmética al Álgebra	23
1.4.2 Investigaciones sobre la Resolución de Problemas en la Transición de la Aritmética al Álgebra	28
1.4.3 Investigaciones que Involucran el Juego y las Actividades Lúdicas Dentro de la Educación Matemática.....	32
Capítulo 2. Marco de Referencia Conceptual	37
2.1 Perspectiva curricular	37
2.1.1 Orientaciones Desde los Lineamientos Curriculares sobre la problemática..	38
2.1.2 Orientaciones Desde los Estándares Básicos de Competencias Sobre la Problemática	42

2.1.3 Orientaciones Desde los Derechos Básicos de Aprendizaje Sobre la Problemática	44
2.2 Perspectiva didáctica	46
2.2.1 Sobre La Transición Entre el Pensamiento Aritmético y el Algebraico	46
2.2.2 Perspectivas para el Tránsito del Pensamiento Aritmético al Algebraico	50
2.2.3 La Lúdica y el Papel del Juego en la Educación	58
2.3 Perspectiva Matemática	64
2.3.1 Expresiones Algebraicas	64
2.3.2 Polinomios	65
2.3.3 Ecuaciones	66
2.4 Elementos de articulación entre las perspectivas	67
Capítulo 3. El Papel del Juego en el Desarrollo del Pensamiento Algebraico a través de la Resolución de Problemas	71
3.1 Algunos Aspectos Metodológicos	71
3.2 Diseño de la Propuesta de Aula	72
3.2.1 Sobre el Pilotaje	72
3.2.2 Sobre el Diseño	74
3.2.3 Propuesta de aula	78
3.3 Implementación de la Propuesta de Aula	86
3.3.1 Población	86

3.3.2	Marco contextual	87
3.3.3	Metodología de la implementación.....	87
3.4	Organización y Análisis de Resultados	88
3.4.1	Organización y análisis de resultados sobre la Situación 1	89
3.4.2	Organización y análisis de resultados sobre la Situación 2	145
3.5	Algunas Conclusiones Sobre el Análisis de Resultados	168
Capítulo 4. Conclusiones Generales y Reflexiones Didácticas		172
4.1	Conclusiones Generales	172
4.2	Algunas Reflexiones Didácticas.....	177
Referencias.....		180
Anexos		186
Anexo 1. Juegos		186

Índice de Figuras

Figura 1. Ejemplo de actividades propuestas en los DBA para 7º.....	44
Figura 2. Estructura de un problema de repartición desigual.	54
Figura 3. Estructura de un problema de repartición con encadenamiento de tipo fuente.....	55
Figura 4. Estructura de un problema de repartición con encadenamiento de tipo composición.	56
Figura 5 Estructura de un problema de repartición con encadenamiento de tipo pozo. ..	57
Figura 6. S1, Pb1, P2, E8.....	92
Figura 7. S1, Pb1, P2, E7.....	93
Figura 8. S1, Pb1, P4, E7.....	108
Figura 9. S1, Pb1, P4, E4.....	108
Figura 10. S1, Pb1, P6, E1.....	115
Figura 11. S1, Pb1, P6, E6.....	115
Figura 12. S1, Pb1, P7, E3.....	116
Figura 13. S1, Pb1, P7, E4.....	117
Figura 14. S1, Pb1, P7, E7.....	117
Figura 15. S1, Pb2, P1, E6.....	119
Figura 16. S1, Pb2, P2, E3.....	121
Figura 17. S1, Pb2, P3, E5.....	123
Figura 18. Diagrama en lenguaje algebraico, S1, Pb2, P4.....	125
Figura 19. Diagrama en lenguaje natural, S1, Pb2, P4	126
Figura 20. S1, Pb2, P5, E3.....	128
Figura 21. S1, Pb2, P6, E8.....	130

Figura 22. S1, Pb2, P7, E1	132
Figura 23. S1, Pb2, P8, E7	134
Figura 24. S1, Pb2, P8, E1	134
Figura 25. S1, Pb3, P1, E1	137
Figura 26. S1, Pb3, P1, E3	138
Figura 27. S1, Pb3, P2, E7	139
Figura 28. S1, Pb3, P4, E6	142
Figura 29. S1, Pb3, P4, E4	142
Figura 30. S2, Pb1, P1, E8	146
Figura 31. S2, Pb1, P1, E3	146
Figura 32. S2, Pb1, P3, E5	147
Figura 33. S2, Pb1, P3, E3	148
Figura 34. S2, Pb1, P5, E3	151
Figura 35. S2, Pb1, P6, E8	152
Figura 36. S2, Pb1, P7, E2	153
Figura 37. S2, Pb1, P7, E5	153
Figura 38. S2, Pb1, P8, E2	154
Figura 39. S2, Pb2, E1	156
Figura 40. S2, Pb2, E3	156
Figura 41. S2, Pb2, E5	157
Figura 42. S2, Pb2, E8	157
Figura 43. S2, Pb3, E2	159
Figura 44. S2, Pb3, E8	159

Figura 45. S2, Pb3, E3	160
Figura 46. S2, Pb4, E4	162
Figura 47. S2, Pb4, E8	162
Figura 48. S2, P1, E4	163
Figura 49. S2, P2, E2	164
Figura 50. S2, P2, E6	165
Figura 51. S2, P2, E6	165
Figura 52. S2, P2, E6	167

Índice de Tablas

Tabla 1. Coherencia vertical y horizontal en los Estándares básicos de competencias. ..	43
Tabla 2. Análisis comparativo de los procedimientos implicados en el juego y en las matemáticas.....	61
Tabla 3. Ejemplo de polinomios.	66
Tabla 4. Relación entre las perspectivas Didáctica, Matemática y Curricular.	68
Tabla 5. Matriz de relaciones entre resolución de problemas, juego y pensamiento algebraico.....	69
Tabla 6. Situaciones, Descripción de Problemas y Actividades de la Propuesta de Aula	75
Tabla 7. Contenidos Matemáticos y Desempeños de las Situaciones de la Propuesta de Aula.....	76
Tabla 8. Análisis de cada Problema de la Propuesta.....	76
Tabla 9. Tipificación S1, Pb1, P1	90
Tabla 10. Tipificación S1, Pb1, P2	91
Tabla 11. De relaciones entre expresiones en lenguaje natural y simbólico.....	99
Tabla 12. Tipificación S1, Pb1, P4	107
Tabla 13. Tipificación S1, Pb1, P5a.....	109
Tabla 14. Tipificación S1, Pb1, P5b	110
Tabla 15. Tipificación S1, Pb1, P5c.....	111
Tabla 16. Tipificación S1, Pb1, P5d	113
Tabla 17. Tipificación S1, Pb1, P6	114
Tabla 18. Tipificación S1, Pb1, P7	116
Tabla 19. Tipificación S1, Pb2, P1	118

Tabla 20. Tipificación S1, Pb2, P2	120
Tabla 21. Tipificación S1, Pb2, P3	122
Tabla 22. Tipificación S1, Pb2, P5	127
Tabla 23. Tipificación S1, Pb2, P6	128
Tabla 24. Tipificación S1, Pb2, P7	131
Tabla 25. Tipificación S1, Pb2, P8	133
Tabla 26. Tipificación S1, Pb3, P1	136
Tabla 27. Tipificación S1, Pb3, P2	138
Tabla 28. Tipificación S1, Pb3, P3	140
Tabla 29. Tipificación S1, Pb3, P4	141
Tabla 30. Tipificación S1, Pb3, P5	143
Tabla 31. Tipificación S2, Pb1, P1	145
Tabla 32. Tipificación S2, Pb1, P2	146
Tabla 33. Tipificación S2, Pb1, P3	147
Tabla 34. Tipificación S2, Pb1, P5	150
Tabla 35. Tipificación S2, Pb1, P7	152
Tabla 36. Tipificación S2, Pb2.....	155
Tabla 37. Tipificación S2, Pb3.....	158
Tabla 38. Tipificación S2, Pb4.....	161
Tabla 39. Tipificación S2, A2. P1.....	163
Tabla 40. Tipificación S2, A2. P2.....	164
Tabla 41. Tipificación S2, A2, P3.....	165
Tabla 42. Tipificación S2, A2, P4.....	166

Tabla 43. Tipificación S2, A2, P5.....	167
---	-----

Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. S1, Pb2, P4, G1	124
Ilustración 2. S1, Pb2, P4, G2	124
Ilustración 3. S1, Pb2, P4, G3	125
Ilustración 4. S1, Pb2, P4, G4	125

Resumen

El presente trabajo de investigación aborda las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, las actitudes afectivas y el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela que se ven reflejadas en la desmotivación por el quehacer matemático y en los errores que cometen los estudiantes, donde las actividades lúdicas y la resolución de problemas surgen como estrategias para enfrentarlas. Por lo tanto, se considera la construcción, implementación y análisis de una propuesta de aula que involucra el juego en la resolución de problemas de repartición desigual para el desarrollo del pensamiento algebraico.

La propuesta de aula fundamentada desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática se implementó en un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali y se compone de dos situaciones en el contexto de la vida cotidiana, en las que el objetivo principal fue dar cuenta de las potencialidades del juego en la resolución de problemas como mediador entre los estudiantes y el aprendizaje de aspectos propios del pensamiento algebraico.

Respecto a los resultados se evidencia que los estudiantes gracias a la influencia del juego reconocen en la ecuación de primer grado una estrategia eficaz para resolver problemas donde el uso del lenguaje algebraico tiene mayor sentido, alcanzando el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento algebraico como lo son el sentido de la indeterminancia, la designación simbólica y la analiticidad, todo esto a través de una experiencia divertida y placentera para ellos.

Palabras claves: Pensamiento algebraico, juego, actividades lúdicas, resolución de problemas, ecuación de primer grado.

Introducción

El presente trabajo de grado se inscribe en la línea de formación en Didáctica de las matemáticas del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle y su propósito fundamental es favorecer el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento algebraico en estudiantes del grado séptimo de la educación básica a través de una propuesta de aula que involucra el juego en la resolución de problemas de repartición desigual.

Para este proyecto se toman en cuenta algunos referentes de la investigación en educación matemática como Almeida (2016), Bednarz y Janvier (1996), Bishop (1998), Gallardo y Rojano (1988), Grupo Azarquiel (1993) y los referentes del currículo colombiano como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), los cuales permitieron la construcción y fundamentación de este proyecto desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática.

Este documento está organizado en cuatro capítulos que están distribuidos de la siguiente manera: En el primer capítulo se presentan todos los aspectos generales del trabajo como problemática, objetivos, justificación y antecedentes, los cuales consideran algunas dificultades existentes en el tránsito del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico y la importancia de abordarlas en el aula.

En el segundo capítulo se expone el marco de referencia conceptual, el cual documenta la problemática y fundamenta el proyecto de investigación. Este marco se presenta a partir de la perspectiva curricular, la cual se aborda desde la propuesta del currículo colombiano para el desarrollo del pensamiento matemático; perspectiva didáctica, la cual expone las dificultades en el desarrollo del pensamiento algebraico y la resolución de problemas como método para

abordarlas, finalizando con el juego como estrategia de desarrollo del pensamiento matemático; y por último la perspectiva matemática, que describe los objetos matemáticos que tienen lugar en la propuesta, como lo son las expresiones algebraicas y las ecuaciones de primer grado.

En el tercer capítulo se presenta todo lo relacionado a la implementación de la propuesta de aula, iniciando con algunos aspectos metodológicos que describen la investigación y la forma de recolección de datos, luego se presenta el diseño de la propuesta de aula que comprende la descripción del pilotaje realizado y la estructura de la propuesta, posteriormente se describe la metodología de la implementación, junto con la población y marco contextual de los estudiantes seleccionados para la implementación y finalmente se presenta la organización y análisis de los resultados obtenidos.

En el cuarto y último capítulo se presentan algunas conclusiones y reflexiones didácticas a la luz de los objetivos planteados para la investigación y finalmente se presentan las referencias bibliográficas de todos los autores que aportaron al desarrollo de este proyecto de investigación.

Capítulo 1. Aspectos Generales del Trabajo

En este apartado se presentan los aspectos generales que estructuran el proyecto de investigación, en el cual se expone la problemática que se sustenta en algunas dificultades registradas en diferentes investigaciones acerca de la transición del pensamiento aritmético al algebraico y de la motivación de los estudiantes hacia las matemáticas, además de la resolución de problemas como un proceso que favorece esta transición y el juego como una estrategia didáctica que dinamiza el acercamiento de los estudiantes al pensamiento matemático. Posteriormente se presentan los objetivos de este proyecto, tanto general como específicos, que permiten esclarecer las metas a alcanzar dentro de la investigación. Luego, se presenta la justificación que expone la importancia de abordar la problemática propuesta y finalmente se reportan algunos antecedentes que tienen como objeto de estudio la transición del pensamiento aritmético al algebraico, la resolución de problemas en el inicio del álgebra escolar y el juego dentro de la educación matemática, pues son investigaciones que abarcan el objeto de estudio de este proyecto y por lo tanto aportan significativamente al desarrollo de esta propuesta.

1.1 Problemática

La investigación en educación matemática reconoce una serie de dificultades en el aprendizaje de estas que se ven reflejadas en los errores que cometen constantemente los estudiantes. Socas (1997) agrupa estas dificultades de acuerdo a su naturaleza, una de ellas son las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas, donde cuestiona los métodos de enseñanza ejecutados por los maestros que han sido permeados con prácticas tradicionales perpetuadas por la organización y estructura de las instituciones educativas y el currículo, y donde el profesor es el único ente activo que domina el saber, limitando la participación del estudiante (Andrade et al. 2003). Otra de las dificultades

planteadas por Socas (1997), son las asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas donde los estudiantes se sienten amenazados o invalidados, lo que genera en ellos desmotivación hacia el quehacer matemático.

En relación con estas dificultades, “una de las ocupaciones fundamentales del profesor tiene que ser el intentar cambiar estas actitudes y hacerlas positivas, y para ello, debe utilizar todos los medios a su alcance” (Grupo Azarquiél, 1993, p. 151). Por esta razón han surgido diferentes discusiones acerca de cómo movilizar la motivación en los estudiantes, en especial en las clases de matemáticas y algunas resaltan la importancia de las actividades lúdicas, que están relacionadas a la sensación de placidez que siente el ser humano cuando se divierte, haciendo más atractivo el contexto en que se encuentre y donde el juego como una manifestación de la lúdica, se introduce como una potencial herramienta didáctica (Posada, 2014, p. 27).

Sin embargo, al buscar el sentido lúdico del juego, se debe considerar que la mayoría de los juegos son lúdicos, pero la lúdica no solo se reduce al juego, esto debido a que “lo lúdico como experiencia cultural es una dimensión transversal que atraviesa toda la vida, no son prácticas, no son actividades, no es una ciencia, ni una disciplina, ni mucho menos una nueva moda, sino que es un proceso inherente al desarrollo humano en toda su dimensionalidad psíquica, social, cultural y biológica” (Jiménez, 1998, p. 11).

Según Jiménez (1998) la lúdica está ligada a la cotidianidad, en especial a la búsqueda del sentido de la vida y a la creatividad humana. Cabe mencionar que el concepto de lo lúdico en la actualidad ha evolucionado con la propuesta de alternativas en las cuales predominan nuevos elementos, como las Aulas Abiertas o Aulas Extendidas y el uso de Objetos Virtuales de Aprendizaje (OVA), estrategias didácticas pensadas para enseñar una habilidad, un concepto o

temática en particular, estimulando el pensamiento y conocimiento de quien lo observa, con mayor énfasis en la modalidad virtual.

Teniendo en cuenta la amplia perspectiva existente sobre la lúdica, para fines de este trabajo se centra la mirada en el juego manipulativo, ya que Butler (1988, como se citó en González et al., 2014) afirma que el uso de juegos en el aula motiva a los estudiantes y promueve la socialización, dándoles un papel activo en su proceso de aprendizaje. Además, Fernández y Rodríguez (1989) mencionan que el juego ayuda a explicar los porqués de un concepto o proceso y a afianzar los conocimientos ya adquiridos en la búsqueda de estrategias para ganar, evitando que su quehacer matemático se quede en la fase manipulativa y trascienda a la reflexión. Sin embargo, se corre el riesgo de que esta motivación no incremente el interés del alumno por la clase y sea solo momentánea. Por ello el juego debe extender su intencionalidad y vincularse a los objetivos de aprendizaje, orientando a los estudiantes a reconocer el concepto o proceso matemático que moviliza el juego.

Ahora bien, el currículo colombiano propone dentro de las formas de pensamiento matemático, el pensamiento variacional como el estudio de los fenómenos de cambio, lo que implica la necesidad de representar las generalizaciones por medio de lo simbólico y de manipular lo desconocido, reconociendo el álgebra como uno de los lenguajes dentro de este tipo de pensamiento y el pensamiento algebraico como la capacidad de representar y manipular los objetos indeterminados, lo que caracteriza la analiticidad como uno de los elementos claves en este tipo de pensamiento. Para su desarrollo, Gallardo y Rojano (1988) establecen la presencia de un *corte didáctico* en la etapa temprana en el aprendizaje del álgebra, que nace de la necesidad de operar lo representado, este se convierte en un obstáculo ubicado en la frontera

entre el pensamiento aritmético y algebraico, lo que implica que dentro de esta transición es necesario ampliar nociones de los objetos en aritmética a objetos en el álgebra.

Una de las perspectivas para enfrentar este obstáculo y de aproximarse al álgebra escolar es la resolución de problemas, ya que según Bednarz y Janvier (1996) ha favorecido históricamente la enseñanza del álgebra al lograr la ampliación de las nociones aritméticas a las algebraicas, debido a que por medio de la resolución de problemas aritméticos, que son aquellos que permiten llegar a la solución a partir de los datos, se trasciende a problemas que exigen la representación y manipulación de lo desconocido, que son los problemas algebraicos, esto por medio de los *problemas frontera*, los cuales son problemas de tipo aritmético que pueden ser resueltos a partir de estructuras aritméticas o algebraicas, siendo la forma algebraica la más eficiente. Es importante destacar que algunos autores consideran que la caracterización de los problemas aritméticos o algebraicos depende del resolutor, sin embargo, se considera en este trabajo que estos problemas tienen una estructura específica que los caracteriza.

A pesar de la potencialidad manifestada por Bednarz y Janvier (1996) sobre la resolución de problemas para el acercamiento al álgebra escolar, esta perspectiva con el paso del tiempo fue despojada de toda relación con el álgebra, desvinculando su significación y enfocándose únicamente en la manipulación simbólica con el objetivo de que los estudiantes realicen rápidamente transformaciones de expresiones algebraicas que no aportan sentido a su trabajo.

Teniendo en cuenta las dificultades basadas en las prácticas de enseñanza tradicionales, la desmotivación de los estudiantes y el aprendizaje del álgebra temprana, y considerando la influencia del juego en el desarrollo del pensamiento matemático y de la resolución de problemas en el acercamiento al álgebra escolar, se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo a través de una propuesta de aula que involucra el juego en la resolución de problemas aritméticos (repartición desigual) se desarrollan algunos aspectos del pensamiento algebraico en estudiantes de grado séptimo de la educación básica?

Para dar respuesta a esta pregunta se realiza una investigación de tipo cualitativo en la que se implementa una propuesta de aula que involucra el juego en la resolución de problemas de repartición desigual a un grupo de estudiantes del grado séptimo de la educación básica que permite la recolección y análisis de datos, con el objetivo de identificar los elementos del pensamiento algebraico que son favorecidos con la propuesta y así plantear algunas conclusiones que aportan a la discusión sobre los elementos mencionados en este apartado.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Favorecer el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento algebraico en estudiantes de séptimo grado de educación básica mediante una propuesta de aula que utiliza el juego para resolver problemas aritméticos (repartición desigual).

1.2.2 Objetivos Específicos

- Fundamentar la problemática de investigación desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática.
- Articular los elementos curriculares, didácticos y matemáticos en una propuesta de aula que emplea el juego para resolver problemas de repartición desigual.
- Identificar y caracterizar los elementos del pensamiento algebraico que se movilizan en estudiantes del grado séptimo a través de la implementación de la propuesta de aula.

1.3 Justificación

Las investigaciones que han visibilizado las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas reflejan que los procesos de enseñanza son una de las problemáticas más influyentes en los errores que cometen los estudiantes en su quehacer matemático, Socas (1997) asegura que los métodos de enseñanza deben adaptarse a la comprensión de los estudiantes y respetar los ritmos individuales, pero para ello es necesario que los estudiantes tengan una participación activa y tengan la posibilidad de comunicar de diferentes maneras sus ideas matemáticas.

Rodríguez (2017) afirma también que la enseñanza de las matemáticas suele orientar procesos de mecanización con el objetivo de que los estudiantes memoricen y ejecuten procedimientos sin generar conciencia de lo que hacen, esto es una barrera para el aprendizaje significativo y no contribuye a la construcción real del conocimiento matemático. Por esta razón este proyecto de investigación tiene la intención de favorecer el desarrollo de algunos aspectos del pensamiento algebraico como el reconocimiento de relaciones entre cantidades, la representación de estas, y finalmente el acercamiento al concepto de ecuación, por medio de una propuesta que permita a los estudiantes participar activamente y comunicar sus ideas matemáticas por medio del juego.

Lo anterior se relaciona directamente con las dificultades afectivas y socioemocionales de los estudiantes hacia las matemáticas. Socas (1997) menciona que el miedo y la ansiedad son el reflejo de estas actitudes, generando bloqueos de origen afectivo que influyen en la actividad matemática, por lo que es necesaria la colaboración del profesor en el aula y la interacción entre ambos actores, pues estas acciones repercuten de forma directa en la motivación de los

estudiantes en el aprendizaje, contribuyendo a un ambiente propicio para desenvolverse en el salón de clase.

Una manera de movilizar la discusión de forma segura y voluntaria en el aula, en la que tanto docente como estudiantes asumen un papel activo del conocimiento matemático es el juego. Algunos autores como Oldfield (1991) consideran que los juegos son valiosos para “estimular la discusión matemática, aprender conceptos, reforzar habilidades, comprender la simbología, desarrollar la comprensión y adquirir algunas estrategias de solución de problemas” (como se citó en González et al., 2014, p.117). Esto apoya la idea de Bishop (1998), que afirma que el juego es una parte integral del aprendizaje (como se citó en González et al., 2014, p.115).

Teniendo en cuenta lo anterior, este proyecto de investigación es importante porque busca reconocer cómo por medio del juego se pueden abordar las dificultades relacionadas con la desmotivación de los estudiantes en el aula, dándoles un papel en el que puedan manifestar y potenciar sus ideas matemáticas de una manera libre y no convencional. El juego servirá entonces como movilizador del pensamiento matemático en el área de interés de este proyecto: el desarrollo de algunos elementos del pensamiento algebraico.

Considerando esto, una de las dificultades que ha reflejado la investigación en relación con la aproximación al álgebra en la escuela son las concepciones y actitudes aritméticas que tienen los estudiantes en la transición del pensamiento aritmético al algebraico (Gallardo y Rojano, 1988, p. 2), y una de las perspectivas para enfrentar esta dificultad es la resolución de problemas, pues la conceptualización y desarrollo de los objetos algebraicos en el pensamiento matemático presenta una gran evolución gracias a este proceso, que se convierte en un reto pero también en una posibilidad para el aprendizaje significativo del álgebra, permitiendo ejemplificar

y relacionar situaciones de la vida cotidiana tal como lo presentan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas:

La resolución de los problemas suscitados por una situación problema permite desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas (MEN, 2006, p. 52).

Donde a partir de conocimientos previos de los estudiantes (conocimientos aritméticos) se logra construir un pensamiento algebraico basado en las relaciones de cantidades conocidas y desconocidas. Lo que lleva a centrar la atención en el carácter relacional del álgebra desde los procesos de simbolización y el significado de los símbolos utilizados, mostrando su uso más eficiente en la resolución de problemas (Grupo Azarquiél, 1993, p. 65).

En consecuencia, una de las intenciones principales de la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento algebraico es reconocer que una forma pertinente de resolver algunos problemas en álgebra se da mediante razonamientos particularmente aritméticos (métodos primitivos), sin hacer uso de símbolos; pero en el momento en que se identifican las relaciones existentes entre cantidades, el objetivo es motivar la utilización de símbolos para representarlas (Grupo Azarquiél, 1993, p. 67).

Abordar la problemática de la transición del pensamiento aritmético al algebraico por medio de la resolución de problemas es importante porque busca desarrollar en los estudiantes algunos aspectos del pensamiento algebraico permitiendo que reconozcan su uso por medio de situaciones de la vida cotidiana, porque si bien la investigación menciona que el álgebra es una potencial herramienta para resolver problemas que en un inicio se resolvían aritméticamente, pero fue despojada de su uso contextual y se enfocó en la manipulación de los símbolos (Bednarz

y Janvier, 1996, p. 115). Esto ha ocasionado que el álgebra escolar sea concebida como una rama de las matemáticas exclusivamente algorítmica y en la que los estudiantes se limitan a realizar procedimientos de forma mecánica, como operar polinomios, despejar ecuaciones, factorizar, sin terminar de comprender la razón por la cual se llevan a cabo estas manipulaciones algebraicas, siendo entonces un área incomprensible y que causa frustración en ellos.

Este proyecto de investigación es importante porque centra la atención en el desarrollo de algunos elementos del pensamiento algebraico a partir de la resolución de problemas que se pueden resolver de forma aritmética, pero que también pueden ser resueltos utilizando elementos del álgebra como el reconocimiento de la estructura del problema, las cantidades indeterminadas, su simbolización y acercarse finalmente al concepto de ecuación, es decir, problemas que se encuentran en la frontera entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, esto mediante la alternativa del juego o actividades lúdicas como propuesta de aula innovadora en la educación, con la intención de darle un giro positivo a las concepciones, actitudes y aptitudes de los estudiantes en las clases de matemáticas.

En relación con la población de interés para realizar esta investigación, se centra la atención en el grado séptimo de la educación secundaria en Colombia, debido a que el currículo nacional por medio de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) proponen que es en este grado que los estudiantes se aproximan al concepto de ecuación de una manera informal, lo que está en congruencia con los objetivos de este proyecto de investigación, teniendo en cuenta que los lineamientos curriculares colombianos consideran que en este grado de escolaridad los estudiantes han adquirido elementos que facilitan la representación de objetos indeterminados.

Finalmente, es importante resaltar que este proyecto tiene el propósito de dar sentido a las exigencias que plantea el perfil de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle donde se deben, formar integralmente licenciados en matemáticas con las capacidades para atender los retos que la educación matemática enfrenta, conceptualizar y encarar el mejoramiento de las prácticas educativas y la formación matemática y científica en las instituciones educativas colombianas. Esto se logra abordando las diferentes problemáticas y dificultades presentadas en investigaciones previas con el fin de aportar a la educación matemática desde el quehacer docente.

1.4 Antecedentes

En este apartado se presenta un conjunto de estudios de algunos autores durante los últimos años dentro de la comunidad de educación matemática, donde se exhiben investigaciones a nivel local y nacional que abarcan trabajos de pregrado y maestría que atienden algunas problemáticas en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico, la resolución de problemas en la transición del pensamiento aritmético al algebraico y el juego como una herramienta para el aprendizaje significativo en matemáticas. Estas investigaciones fueron categorizadas en tres grupos como se presenta a continuación

1.4.1 Investigaciones sobre la Problemática de Transición de la Aritmética al Álgebra

A nivel local se encontraron dos trabajos de pregrado de la Universidad del Valle e igualmente a nivel nacional, uno de maestría de la Universidad Pedagógica Nacional y otro de especialización de la Universidad Distrital que presentan diferentes cuestiones acerca del paso de la aritmética al álgebra en la escuela.

Diuza y Henao (2021) presentan argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana, con el fin de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas

algebraicos antes de séptimo y octavo grado, como elementos que se convierten en parte fundamental del pensamiento variacional y no son enseñados anticipadamente; esto a pesar de que las propuestas curriculares colombianas lo proponen. El propósito de este trabajo era identificar y contrastar los argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana a partir de la versión en español de los artículos: Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education y The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking por medio de la técnica de traducción comentada, con la finalidad de clasificar, analizar y relacionar los principales aspectos respecto a la importancia de la introducción temprana del álgebra en estudiantes.

Se logran reconocer diversos argumentos que defienden la introducción temprana al álgebra desde diferentes posturas: *históricas* donde se evidencia que el aumento de educadores e investigadores matemáticos considera el álgebra como parte del currículo en educación primaria, realizando una revisión histórica para comprender su naturaleza; *que citan la institucionalidad* donde se manifiesta la importancia de preparación en los docentes para introducir apariencias del pensamiento algebraico durante los primeros años, reconociendo que es un reto pero facilita el proceso de pensamiento a futuro; *concernientes a los retos curriculares* involucrando una reconceptualización del álgebra para posibilitar el progreso en los principales niveles educativos.

En conclusión, este trabajo afirma que introducir el álgebra en grados de la básica primaria, permitirá al estudiante no solo significar funciones y la capacidad de inferir escenarios con la ayuda de símbolos, sino que además el estudio de los patrones numéricos y geométricos; pero se sabe que los docentes pueden afrontar una gran variedad de componentes y dificultades que problematizan y transforman continuamente dicho proceso, por ello es importante que el

docente que aborde la enseñanza del álgebra en la educación primaria conozca las particularidades del pensamiento algebraico.

El segundo trabajo local asociado a esta problemática es el de Moreno (2015) el cual propone el diseño de una secuencia de tareas matemáticas dentro del Early álgebra enfocadas en el trabajo con patrones numéricos, aquí el pensamiento numérico y algebraico se desarrollan al mismo tiempo, favoreciendo la generalización como uno de los aspectos más importantes del álgebra escolar. El desarrollo del trabajo de investigación busca favorecer un acercamiento temprano en estudiantes de grado tercero de la Educación Básica Primaria, superando algunas de las dificultades presentadas por los estudiantes como lo son, la memorización de reglas sin sentido para resolver problemas algebraicos, la enseñanza de contenidos algebraicos sin tomar en cuenta conocimientos previos de los estudiantes, entre otras.

Algunas de las conclusiones establecen que los estudiantes por medio de las tareas desarrollan con facilidad las fases de ver, decir y registrar, gracias a las secuencias numéricas y pictóricas, esto gracias a que la visualización permite saber lo que permanece constante y lo que varía, por otra parte se evidencia que los estudiantes logran darle mayor sentido e importancia a los contenidos matemáticos, estructuras multiplicativas, variación y cambio, relaciones numéricas, como un primer acercamiento al álgebra escolar y la generalización de patrones numéricos.

También se referencia el trabajo de Cuadrado (2019) el cual propone una fundamentación teórica encaminada al planteamiento de tareas provechosas que condujera a los estudiantes a la interpretación de la letra como variable, la motivación del desarrollo de este trabajo de investigación surge de las dificultades presentadas en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, asociadas a la falta de sentido construida por ellos para el trabajo algebraico,

evidenciado en las respuestas de actividades que proponían la manipulación de letras y operadores numéricos, donde considerar las cantidades numéricas se convierte en el centro de atención, dejando de un lado el sentido respecto al uso de las letras.

El objetivo principal de esta investigación fue examinar y evaluar la práctica pedagógica en relación con el diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje que propiciaba entre los estudiantes de grado séptimo el tránsito de la aritmética al álgebra, todo esto con el propósito de reconstruir y diseñar a partir de la interpretación y reflexión de los resultados obtenidos por parte de los estudiantes. De aquí surgen aspectos metodológicos de tipo cualitativo que permiten la descripción, caracterización y categorización de los datos mediante dos ciclos: una mirada retrospectiva de experiencias anteriores y una nueva experiencia de diseño de un ambiente de aprendizaje que fomenta la interpretación de la letra a partir de procesos de generalización para superar las dificultades encontradas en el primer ciclo.

Finalmente, diseñar y desarrollar un nuevo ambiente de aprendizaje que promueve la transición de la aritmética al álgebra, a partir de los resultados del proceso de reflexión suscitado por el examen y evaluación de las experiencias anteriores, permite reconocer que en las prácticas no se consideraban los saberes iniciales de los estudiantes, lo que conlleva a una transformación de la práctica pedagógica que enfoca el proceso en el trabajo y aporte de los estudiantes, así mismo el reconocimiento de errores en cuanto a la gestión de clase en el ciclo de reflexión, implican una segregación del conocimiento del estudiante.

Por último, tenemos a Hernández (2017) que propone un diseño de actividades y dinámicas con ayuda de la tecnología basadas en el concepto de *Early-algebra* para aproximar a los estudiantes a conjeturar situaciones propias del pensamiento relacional, debido a que

reconoce que es necesario fundamentar el álgebra desde la educación primaria y no desconectarla de las otras áreas de las matemáticas.

Para este diseño se reconoció en un primero momento la necesidad de trabajar en la educación inicial el pensamiento relacional, para posteriormente establecer unos referentes teóricos que sustentan la propuesta desde tres escenarios: las actividades tecnológicas escolares, el pensamiento relacional y la educación matemática. Luego, se revisaron antecedentes relacionados con el problema de interés y finalmente se elaboró la propuesta que involucra aspectos como: el contenido pedagógico, los elementos didácticos, el diseño del material, las herramientas para los maestros y algunas orientaciones a ellos sobre su uso.

Como conclusión, el diseño de esta propuesta reconoce la importancia de atender las necesidades que se van identificando en los estudiantes a lo largo de su vida escolar, y reconocer también que la investigación en educación matemática ofrece diversos caminos para atender estas dificultades

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los dos trabajos de investigación locales se logra identificar que el tránsito de la aritmética al álgebra tiene como eje central el trabajo en la generalización de patrones, ya que se ve una evolución por parte de los estudiantes en cuanto al reconocimiento de la variación y el cambio pero también permite darle un mayor sentido a las relaciones numéricas y en general a los contenidos matemáticos trabajados, reconocer estos elementos permite afirmar que este es un camino favorable para el desarrollo del pensamiento algebraico; por otra parte las investigaciones nacionales evidencian la importancia de tomar en consideración las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes si se pretende proponer diseños para transformar las prácticas pedagógicas. Todo esto como parte de

habilidades básicas desarrolladas durante los primeros años y potencialmente útiles en los años posteriores de escolaridad.

1.4.2 Investigaciones sobre la Resolución de Problemas en la Transición de la Aritmética al Álgebra

En el segundo grupo de antecedentes se presentan los trabajos que han revisado la resolución de problemas y su importancia como perspectiva que posibilita el desarrollo del pensamiento algebraico, entre los que se presentan un trabajo a nivel local de pregrado de la Universidad del Valle y dos a nivel nacional, de pregrado de la Universidad de Antioquia.

Castañeda y Castañeda (2019) presentan el diseño de una secuencia didáctica como propuesta para acercarse al álgebra escolar a través del concepto de ecuación por medio de la resolución de problemas aritméticos en el grado octavo, los objetivos que se plantean en este trabajo son, de manera general, favorecer el acercamiento al álgebra escolar, en estudiantes del grado octavo, a través del concepto de ecuación mediante la resolución de problemas aritméticos, y de forma específica busca fundamentar la problemática desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática, articular estos fundamentos y estudios en una propuesta de aula que considera los problemas aritméticos como alternativa para la introducción al álgebra escolar y finalmente caracterizar los avances y dificultades presentados por el grupo de estudiantes analizado al implementarse esta propuesta de aula.

La propuesta de aula de Castañeda y Castañeda considera dos situaciones del contexto real de los estudiantes del grado octavo de la educación básica secundaria de la Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio de la ciudad de Santiago de Cali, enmarcadas en la resolución de problemas y relacionadas a las festividades de Halloween y Navidad. Cada situación tiene preguntas orientadoras para que los estudiantes puedan resolver los problemas

propuestos que son estructurados y caracterizados según el contenido matemático, los desempeños y las relaciones entre las cantidades involucradas que movilizan.

Se concluye que los estudiantes lograron acercarse al álgebra por medio de la fundamentación, articulación e implementación de la propuesta didáctica, pues lograron resolver los problemas de diferentes métodos, identificaron las relaciones entre las cantidades y encontraron la representación simbólica de los problemas, demostrando avances significativos en su solución, en un principio sin usar ecuaciones para finalmente resolver con los problemas con ayuda de ellas, reconociéndolas como una herramienta poderosa. También se reconoció que los gráficos y tablas presentadas ayudaron a la comprensión de las relaciones presentes en los problemas.

También tenemos la investigación de Cartagena y Sossa (2016) que reconocen un desempeño básico en los estudiantes de grado 4º en el área de matemáticas, debido a dificultades en las competencias que se evalúan en las pruebas saber específicamente asociadas a la resolución de problemas y el razonamiento. En general las principales dificultades radican en establecer conjeturas frente a diversas situaciones matemáticas, lo cual resulta ser un obstáculo para que los estudiantes resuelvan problemas a partir de las experiencias, al establecer un modelo de solución que parta de hipótesis propias.

Por ello se propone como objetivo general, fortalecer el proceso de Resolución de Problemas asociados al Pensamiento Algebraico en los estudiantes, la investigación se realizó bajo el modelo cualitativo, debido a que el interés está puesto en la comprensión e interpretación de las acciones de los estudiantes al enfrentarse a tareas asociadas a la resolución de problemas referentes al pensamiento algebraico. Las investigadoras-observadoras se interesan por la “realidad” tal y como la interpretan los estudiantes y respetando el contexto donde se construye.

Por ende, se lleva a cabo la metodología Investigación Acción Educativa (I-A-E), enfocada en el cambio educativo y la transformación social.

De esta manera se evidencia una mejora en el desempeño de los estudiantes en cuanto al reconocimiento y establecimiento de relaciones de orden y equivalencia, a la identificación y análisis de patrones de cambio y secuencias en situaciones en contexto; la estructuración de tareas basadas en resolución de problemas en relación con el pensamiento algebraico, permitió perfeccionar habilidades para resolver problemas y recurrir a conceptos propios de la matemática, reflexionando, interpretando y verificando las tareas cercanas a un contexto matemático, pero también a uno social potencia la construcción de conocimientos, la negociación de significados, socialización de ideas y validación de los mismos.

También se tiene como referente a Marin y Cardona (2007) que reconocen en su trabajo de investigación las dificultades que tienen los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Normal Superior de Envigado en la resolución de problemas del contexto matemático que involucran el uso de operaciones básicas entre expresiones algebraicas, para ello proponen un cuadernillo para el docente para que sirva como herramienta de apoyo para orientar el trabajo de los estudiantes, promoviendo la modelación y resolución de problemas donde se deba hacer uso de expresiones algebraicas.

Para ello se observó el proceso de enseñanza y aprendizaje de las operaciones entre expresiones algebraicas de los estudiantes de grado octavo, para posteriormente indagar en sus dificultades para resolver problemas con expresiones algebraicas. Luego, se indagaron los objetivos de las pruebas ICFES para así recolectar y diseñar problemas que requieran el uso de estas expresiones algebraicas con la intención de que los estudiantes reconozcan la aplicación de las operaciones entre expresiones algebraicas en un contexto matemático y puedan modelar

también los problemas del contexto matemático.

Esta investigación es de tipo exploratorio, pues se espera que sea continuada con la implementación del cuadernillo diseñado. Para su diseño se inició observando durante tres momentos: antes, durante y después a los estudiantes del grado octavo y noveno de la institución educativa para identificar dificultades y luego se les realizó una encuesta sobre cómo perciben su proceso de aprendizaje de las operaciones entre expresiones algebraicas.

Después de esta encuesta se recolectaron problemas con expresiones algebraicas para clasificarlos y adaptarlos de acuerdo a los requerimientos del Ministerio de Educación Nacional, teniendo en cuenta que los procesos de comprensión y desarrollo de competencias matemáticas son procesos que se dan en largos periodos de tiempo y no se dan de la misma forma en todos los estudiantes, el cuadernillo se diseñó con tres niveles de complejidad: problemas que se pueden resolver con los datos del enunciado, problemas que exigen la traducción del enunciado a un lenguaje algebraico y problemas que exigen la manipulación algebraica para su solución.

De este diseño se pudo concluir que los problemas planteados por las pruebas con expresiones algebraicas solo exigen la modelación de un concepto donde solo se aplican conocimientos específicos, y los problemas propuestos buscan que los estudiantes puedan modelar y resolver estos problemas y puedan apropiarse de los nuevos contenidos, para así mismo evaluar las competencias alcanzadas con su implementación.

Se puede evidenciar con estos trabajos que la resolución de problemas es una estrategia poderosa para el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, permitiendo que reconozcan las cantidades involucradas y las relaciones entre ellas en diferentes situaciones y contextos acercándose al concepto de ecuación, también identificando y analizando patrones de cambio, elementos claves en el desarrollo de este tipo de pensamiento, que a su vez es

considerado dentro de las diferentes pruebas nacionales e internacionales como un proceso fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático.

1.4.3 Investigaciones que Involucran el Juego y las Actividades Lúdicas Dentro de la Educación Matemática

El tercer grupo de antecedentes está vinculado a las investigaciones que presentan el juego y las actividades lúdicas como estrategia o propuesta para el desarrollo del pensamiento matemático en la escuela, para ello se presentan un trabajo a nivel local de la Universidad del Valle y tres a nivel nacional de la Universidad Icesi y Universidad del Cauca.

Angulo y González (2017) plantean una propuesta de enseñanza para fortalecer la conceptualización de las fracciones por medio de juegos tradicionales modificados, pues reconocen las dificultades que presentan los estudiantes en la forma de concebir las fracciones de acuerdo al contexto donde es aplicada teniendo en cuenta sus diferentes significados, llegando a la etapa de la secundaria con deficiencias en su interpretación. Se busca entonces caracterizar los elementos didácticos y lúdicos que movilizan la conceptualización de las fracciones en el grado sexto.

Esta propuesta de enseñanza se implementó después de haber reconocido por medio de la observación y pruebas escritas las dificultades que presentaban los estudiantes en la conceptualización de las fracciones, con base estas dificultades se modificaron los juegos tradicionales a los que llamaron dominó fraccionario, stop en fracción lotería de fracciones y escalera recta y se les presentaron a los estudiantes. Al comparar sus respuestas antes de la implementación de los juegos y después se pudo identificar que los estudiantes se apropiaron del concepto de fracción, facilitando su aplicación en los diferentes contextos propuestos, concluyendo entonces que los juegos deberían ser aplicados repetidamente en el aula para que así

los estudiantes puedan mejorar sus niveles de aprendizaje sobre las fracciones y sus aplicaciones en la vida diaria.

Espinosa (2022) presenta una propuesta de acompañamiento pedagógico haciendo uso del juego con el propósito de fomentar el aprendizaje significativo de las matemáticas en los niños de primaria, considerando el juego como una alternativa que dinamiza las interacciones en conjunto posibilitando el aprendizaje y en especial el desarrollo del pensamiento lógico matemático. Esta investigación de tipo cualitativo logró sistematizar las experiencias recolectadas por medio de la observación a estudiantes del grado segundo de primaria durante ocho días con la finalidad de tener un acompañamiento pedagógico progresivo, iniciando por un diagnóstico, refuerzos, actividades basadas en resolución de problemas y por último actividades transversales en relación con todo lo aprendido.

Después de las diferentes fases de la investigación se reconoce que el dinamismo en el aprendizaje del estudiante tiene un impacto positivo, donde involucrar el juego en el aula se convierte en una herramienta pedagógica eficaz, que permite interiorizar y asociar los conocimientos con el contexto más inmediato en todas las áreas de conocimiento, lo que conlleva a cambiar la perspectiva frente al juego como algo plenamente recreativo y transformándolo en una herramienta pedagógica, juegos como: bingo matemático, coloreando ecuaciones, el valor posicional, y vamos al cine, reflejan el interés y curiosidad de los estudiantes por actividades lúdicas y al mismo tiempo evidenciar una mejora del conocimiento y valores sociales en los estudiantes.

Medina (2013) reconoce que el desencanto de la comunidad estudiantil por las matemáticas es muy notable y uno de los mayores desafíos para quienes están en el proceso de transformación de la enseñanza es que los estudiantes alcancen un aprendizaje significativo y la

motivación para ello, proponiendo una alternativa de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en grado octavo de la educación básica secundaria a través de la matemática recreativa, mediante el cual se pretende acercar a los estudiantes por medio de actividades recreativas, de juegos matemáticos y promoviendo un ambiente lúdico, en búsqueda de una mayor aceptación hacia la matemática.

Esta investigación se dividió en dos etapas: la implementación de actividades basadas en juegos en el aula y la extracción de los elementos del juego que movilizan en los estudiantes motivación, estrategias o conocimientos matemáticos. Después de analizar los datos recolectados por medio de la observación, la discusión de los estudiantes y entrevistas, se pudo evidenciar que la implementación de juegos y dinámicas en el aula posibilita una actitud positiva en los estudiantes frente a la clase de matemáticas, sin embargo en relación con los conocimientos, entre el 40% y 50% de los estudiantes que entendían las reglas del juego, no conocían los conceptos y operaciones que debían realizar, generando una dificultad en el desarrollo de las actividades, concluyendo entonces que es importante establecer una relación entre los conocimientos y las condiciones de los juegos para obtener el éxito en estas propuestas, destacando que al presentar diseños basados en el juego, estos deben ser adaptados para ponerlos en funcionamiento de acuerdo al conocimiento de los estudiantes.

Se puede evidenciar por medio de estos trabajos de investigación que el juego tiene un impacto positivo en la actitud de los estudiantes en la clase de matemáticas, permitiendo que se apropien e interioricen los conceptos trabajados en los diferentes contextos, manifestando interés y curiosidad, sin embargo, es importante resaltar que debe haber una correspondencia entre las reglas y el propósito del juego con los conocimientos de los estudiantes.

Se considera entonces que las investigaciones basadas en la transición de la aritmética al álgebra, la resolución de problemas y el juego y las actividades lúdicas dentro de la educación matemática aportan significativamente al desarrollo de este trabajo, ya que por un lado, el acercamiento al álgebra en la escuela es un tema de amplio interés en la investigación en educación matemática, pues se reconoce que es posible que los estudiantes desarrollen habilidades como el reconocimiento de la variación y las relaciones numéricas en etapas tempranas de su escolaridad y evitar que reconozcan el álgebra como un área desconectada de los procesos de pensamiento que han desarrollado de manera previa.

Por otro lado, se reconoce que los estudiantes presentan dificultades en la competencia de resolución de problemas a partir de diferentes contextos que involucran expresiones algebraicas, pero se confirma que a su vez es una perspectiva eficaz para que los estudiantes desarrollen elementos del pensamiento algebraico como el reconocimiento de las cantidades y las relaciones entre ellas o el análisis de patrones de cambio. Por último, se evidencia que los estudiantes presentan indiferencia y desmotivación hacia la clase de matemáticas, y que el juego o las actividades lúdicas pueden ser una alternativa que permite que los estudiantes se apropien del concepto o proceso matemático que se trabaje, facilitando de esta manera su comprensión.

Finalmente, es importante resaltar que estas investigaciones no relacionan el juego y las actividades lúdicas con el tránsito de la aritmética al álgebra ni con la resolución de problemas, posiblemente debido a la creencia existente de que las actividades lúdicas y los juegos manipulativos solo son potenciales en el ejercicio educativo de la básica primaria, pues las investigaciones existentes son, en su mayoría, orientadas a estos grados, limitando la visibilidad dentro de la comunidad académica del juego como un recurso enriquecedor en el desarrollo del pensamiento matemático también en estudiantes de la básica secundaria y la media.

Ahora bien, son aún más limitadas las investigaciones que relacionan el juego con la resolución de problemas, posiblemente porque se considera que este proceso debe ser estrictamente abordado desde una postura tradicional, en la que el docente presenta el problema y los estudiantes lo resuelven en sus hojas de trabajo haciendo uso de estrategias propias a lápiz y papel, pues exige un estricto trabajo intelectual involucrar un juego dentro de la resolución de problemas de manera que los estudiantes reconozcan de una manera divertida y placentera para ellos estrategias potenciales para resolverlos.

Teniendo en cuenta las limitaciones existentes en la investigación en educación matemática acerca del juego en el desarrollo del pensamiento algebraico y la resolución de problemas, se considera significativo proponer una investigación que identifique el papel del juego en el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la resolución de problemas a través de una propuesta de aula que relacione estos tres ejes.

Capítulo 2. Marco de Referencia Conceptual

En este apartado se presentan las perspectivas curricular, didáctica y matemática que fundamentan el proyecto de investigación. En primer lugar, se expone en la perspectiva curricular las orientaciones que propone el currículo colombiano sobre la elaboración de propuestas para el desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela, tomando en cuenta documentos como los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje. Luego, se presenta en la perspectiva didáctica la caracterización del pensamiento aritmético y algebraico en la escuela y las dificultades existentes en el tránsito entre ellos, además se presenta la resolución de problemas como una perspectiva para favorecer este tránsito y por último el juego como una estrategia para el desarrollo del pensamiento algebraico. Finalmente se presenta en la perspectiva matemática todo lo relacionado al objeto matemático a trabajar, que son las ecuaciones de primer grado como una igualdad entre expresiones algebraicas.

2.1 Perspectiva curricular

Dentro de este apartado se presentan los lineamientos que propone el Ministerio de Educación Nacional (MEN) para la elaboración de propuestas curriculares en el área de matemáticas dentro de las instituciones educativas del país. Estos lineamientos presentan elementos que se deben considerar al momento de desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes con la intención de que sea significativo. Los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia (EBC), y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) promueven el desarrollo de nociones algebraicas que son fundamentales para la sustentación y el desarrollo de este trabajo. Se presentan los elementos más relevantes de cada uno para el desarrollo de este proyecto a continuación.

2.1.1 Orientaciones Desde los Lineamientos Curriculares sobre la problemática

Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) proponen una estructura que establece tres grandes aspectos mediante los cuales se da el desarrollo del pensamiento matemático: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto, interrelacionados entre sí con el objetivo de promover diversas nociones dentro del pensamiento matemático, donde los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas permitan mejorar el desempeño de los estudiantes en la Educación Básica.

Debido a que son notables las dificultades presentadas por los estudiantes, especialmente de grado séptimo y octavo, al momento de transitar del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico que involucra cambios de significado de los símbolos, formulación y manipulación de relaciones y generalización a través de representaciones simbólicas. Asociados con los conocimientos básicos, los Lineamientos Curriculares los presentan como los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y están vinculados con sistemas propios de las matemáticas, estos procesos se relacionan entre sí y no se presentan en forma de contenidos aislados, y se agrupan en cinco tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, cada uno asociado a un sistema respectivamente: numéricos, geométricos, métricos, de datos y algebraicos y analíticos. Para fines de este proyecto, la mirada se centra en el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

Los procesos generales están vinculados a los procesos de aprendizaje y se proponen cinco fundamentales: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Este proyecto de investigación centra su atención en la resolución y planteamiento de problemas, pues es un proceso que aparece como un gran movilizador del pensamiento matemático, ya que

“contribuye significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas” (MEN, 1998, p. 24).

El estudio de la variación en la escuela es parte fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, pues se posiciona como una manera de evitar la enseñanza de contenidos *fragmentados y compartimentalizados*, y puede trabajarse directamente con los otros tipos de pensamiento, ya que la variación de cantidades se puede ver inmersa en distintos contextos y situaciones que en su desarrollo histórico han sido fundamentales para la construcción matemática de la variación y han influido en la configuración del Cálculo.

Para ello se propone que “el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.” (MEN, 1998, p. 50). La relación entre el pensamiento variacional y la resolución de problemas es cercana debido a su naturaleza, una aproximación mediante tareas y situaciones problemáticas que involucren procesos aritméticos se convierte en una alternativa en la construcción de la variación numérica discreta, los lineamientos también mencionan que “las situaciones problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas” (MEN, 1998, p. 50), lo que permitirá reconocer los patrones de variación.

La resolución de problemas aparece como un elemento importante en el desarrollo y el estudio del conocimiento matemático debido a su esencia, donde los estudiantes adquieren herramientas y construyen estrategias para resolver problemas, sin dejar de lado el aprendizaje de un contenido matemático específico. Lo que en la actualidad lleva a considerar este proceso en diferentes propuestas curriculares como un eje central del currículo en matemáticas.

Autores como Polya y Alan Schoenfeld dentro de sus investigaciones han realizado grandes aportes a la resolución de problemas en el desarrollo de las matemáticas, uno en disconformidad con ideas del otro, pero ambos enfocados en dar sentido a las potencialidades de este proceso. Lo que lleva a tomar en consideración algunos de sus juicios más importantes, Polya (1981), afirma que “tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (p.117).

También describe cuatro fases para resolver problemas, no necesariamente se cumplen todas, tampoco en el orden que lo presenta y es posible pasar por algunas de ellas más de una vez, Polya (1973 p. 23) establece:

1. Comprender el problema / ¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?
2. Concebir un plan / ¿Es semejante a un problema conocido?
3. Ejecutar el plan / ¿Puede comprobar cada uno de los pasos al ejecutar su plan de la solución?
4. Verificar la solución obtenida / ¿Puede usted verificar el resultado?

Cada fase está acompañada de algunas preguntas que facilitan la resolución del problema, aunque en la actualidad ha surgido métodos complementarios, considerando que este procedimiento deja de lado algunos aspectos.

Nociones como la de heurística se movilizan al momento de avanzar en la solución de un problema, ya que es considerada como un conjunto de estrategias que permiten el análisis y transformación del problema al utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico; razonar por analogía; recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos; considerar casos particulares; analizar casos particulares para buscar

regularidades o patrones y generalizar (razonamiento de tipo inductivo); verificar usando casos particulares; trabajar desde el final; dividir el problema en subproblemas; simplificar el problema e introducir un elemento auxiliar.

Investigaciones como estas dan cuenta de la importancia de los procesos generales de aprendizaje que deben ser desarrollados en los estudiantes a lo largo de su ciclo escolar, debido a su gran potencial, reconociendo la resolución y planteamiento de problemas como un proceso que involucra aspectos teóricos y curriculares, a los que tanto docentes como instituciones educativas deben prestar atención para el desarrollo del pensamiento matemático.

Finalmente, los contextos están relacionados a los entornos donde los estudiantes dan sentido a las matemáticas que aprenden. Se proponen tres: de la vida cotidiana, de las matemáticas mismas y de otras ciencias. Este trabajo centra su atención en los contextos de la vida cotidiana, pues busca que los estudiantes resuelvan problemas que se pueden presentar en su realidad.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presentan elementos claves para el desarrollo de este proyecto de investigación, pues se ubica en el contexto curricular colombiano y justifican la importancia de la resolución de problemas y el estudio de la variación y el cambio en la escuela. Es importante resaltar que a pesar de que se habla del pensamiento variacional, este trabajo centra su atención en el pensamiento algebraico, un componente importante del pensamiento variacional el cual se retoma más adelante. Se tiene entonces que esta propuesta centra la mirada en el desarrollo del pensamiento algebraico por medio de la resolución de problemas en situaciones de la vida cotidiana.

2.1.2 Orientaciones Desde los Estándares Básicos de Competencias Sobre la Problemática

Los Estándares Básicos de Competencias (EBC) (MEN, 2006), complementan la estructura curricular propuesta por los lineamientos curriculares, presentando las competencias que deben desarrollar los estudiantes por grupos de grados según la escolarización colombiana, es decir de 1° a 3°, de 4° a 5°, de 6° a 7°, de 8° a 9° y de 10° a 11°, en relación con cada tipo de pensamiento y sistema matemático (conocimientos básicos). Es importante resaltar que los EBC establecen que hay una relación directa entre las competencias desarrolladas por cada grado (coherencia vertical) y las competencias desarrolladas por tipo de pensamiento (coherencia horizontal), ninguna competencia es independiente, todas están relacionadas.

Estos Estándares posicionan el desarrollo del pensamiento variacional como el reconocimiento y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos desde diferentes registros de representación y proponen que debe ser construido desde la educación básica para facilitar la comprensión del cálculo numérico y algebraico, y posteriormente el cálculo diferencial e integral (MEN, 2006, p. 66).

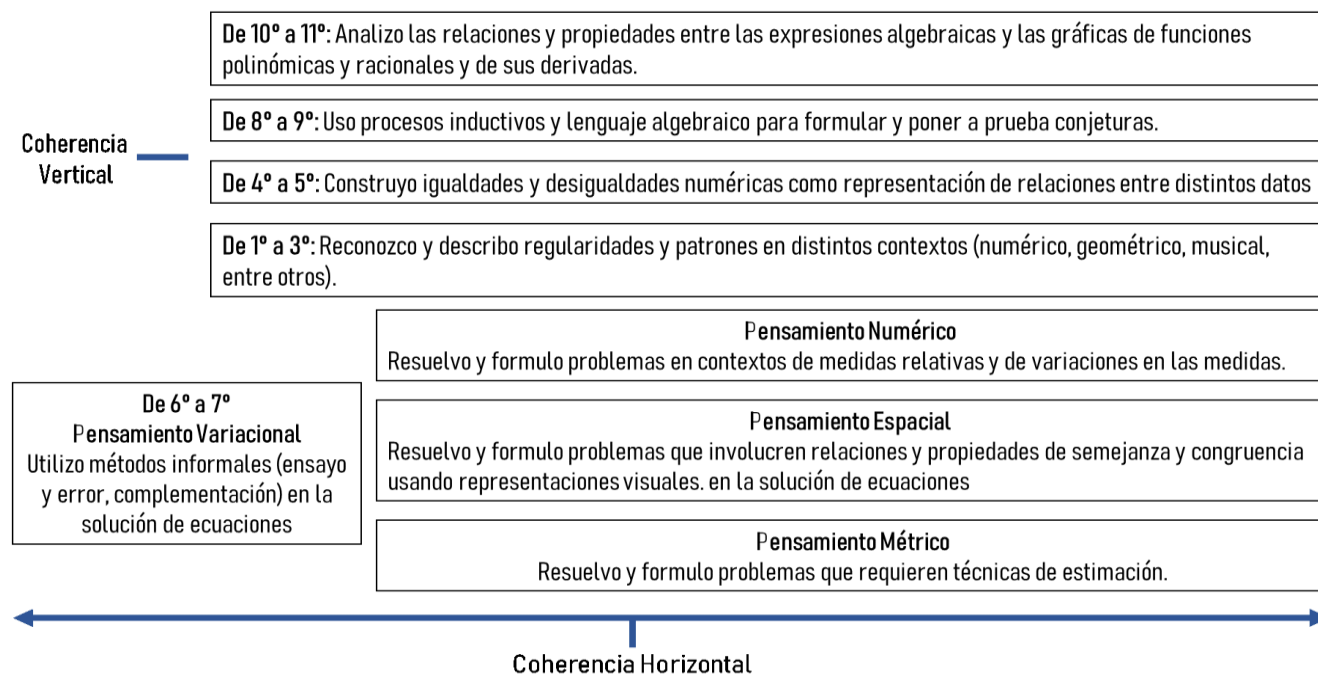
También resaltan la importancia de preparar al aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico para que así los estudiantes construyan expresiones algebraicas, reconociendo que el sistema algebraico es uno de los sistemas de representación ligado a la variación y que el pensamiento variacional no se puede optimizar sin este, debido a que el álgebra “es un sistema potente de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados” (MEN, 2006, p. 68).

Se reconoce en los estándares que para el desarrollo del pensamiento variacional es fundamental que los estudiantes potencien el pensamiento algebraico, pues es el encargado de la

manipulación de las expresiones algebraicas, entendiendo el álgebra como el sistema semiótico de representación por excelencia de las magnitudes que no son constantes.

Para fines de este trabajo se centra la mirada en el estándar “utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones” (MEN, 2006, p. 85) en relación con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos de los grados sexto y séptimo. En la Tabla 1 se presenta la coherencia vertical en relación con el estándar seleccionado, de tal manera que se logra vincular con estándares de los otros conjuntos de grados (1° a 3°, 4° a 5°, 8° a 9° y 10° a 11°) dentro del pensamiento variacional; de la misma forma se evidencia la coherencia horizontal que abarca la correlación entre estándares de los diferentes tipos de pensamiento en el conjunto de grados de 6° a 7°.

Tabla 1. Coherencia vertical y horizontal en los Estándares básicos de competencias.



Nota: Obtenida de la estructura de la coherencia vertical y horizontal en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006).

Elaboración propia.

Los EBC facilitan elementos para entender cómo se desarrolla cada tipo de pensamiento en cada grado de escolaridad y así mismo cómo estos están relacionados entre sí. Se reconoce entonces que este trabajo tiene el interés de continuar en la línea del desarrollo del pensamiento variacional, más específicamente el algebraico, que traen los estudiantes desde los grados de escolaridad previos, junto con el proceso general de la resolución de problemas, que es transversal a todos los tipos de pensamiento.

2.1.3 Orientaciones Desde los Derechos Básicos de Aprendizaje Sobre la Problemática

Los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas (DBA) (MEN, 2016) proponen una serie de tareas estructuradas en el mismo sentido de los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), como parte del trabajo a realizar en los diferentes grupos de grados de escolaridad establecidos, compuestos por una competencia a desarrollar, evidencias de aprendizaje y ejemplos de tareas. El desarrollo de esta investigación se ubica en el grupo de grados 6° a 7° donde se proponen actividades como las presentadas a continuación.

Un ejemplo de las competencias establecidas como un derecho para los estudiantes y asociado a las actividades presentadas en los DBA es “plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica”. (MEN, 2016, p. 56).

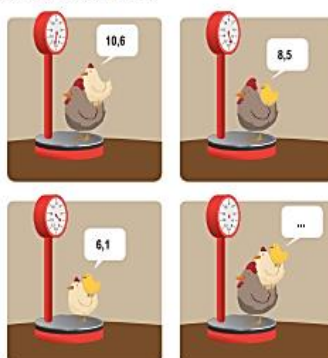
Figura 1. Ejemplo de actividades propuestas en los DBA para 7°.

Evidencias de aprendizaje

- Plantea modelos algebraicos, gráficos o numéricos en los que identifica variables y rangos de variación de las variables.
- Toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados.
- Utiliza métodos informales exploratorios para resolver ecuaciones.

Ejemplo

Con base en la información gráfica encuentra el peso de cada una de las gallinas (Los pesos están expresados en libras).



Nota: Obtenida de los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2015, p.56).

Documentos como los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, aparecen y se establecen durante mucho tiempo como las orientaciones pedagógicas y curriculares definidas por el Ministerio de Educación Nacional, apoyados por la comunidad educativa (docentes, establecimientos educativos, entre otros) con el objetivo de establecer bases para la planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación. Aparecen los DBA como una nueva propuesta que plantea elementos para construir rutas de enseñanza que permitan alcanzar los EBC del MEN.

Se debe tener en cuenta que los DBA por sí solos, no constituyen una propuesta curricular y deben ser articulados con los planes, estrategias y contexto en cada establecimiento educativo, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales. Lo que lleva a algunos investigadores como Gómez et al. (2016, p. 330) a establecer virtudes y deficiencias del

documento, de lo que se concluye principalmente que, aunque se resalta este documento como un complemento de las propuestas anteriores, en su introducción se establecen propósitos que no se satisfacen a lo largo del documento, se promueve el desarrollo de actividades centradas en el contenido y dejando de un lado aquello que permite una transición pertinente de un conocimiento a otro.

Teniendo en cuenta lo anterior, el desarrollo de este trabajo de investigación considera las actividades presentadas como una base para el desarrollo de la propuesta de aula, con la intención de establecer una reflexión que permita presentar una propuesta más amplia y que articule elementos fundamentales para la elaboración de propuestas curriculares, al tomar en consideración las competencias, procesos generales y contextos, a través del uso de los recursos didácticos en la búsqueda del desarrollo del pensamiento matemático, en especial el pensamiento algebraico.

2.2 Perspectiva didáctica

Dentro de esta perspectiva se ponen en consideración las dificultades que se presentan en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela y la resolución de problemas como una de las perspectivas para enfrentar estas dificultades, finalizando con el aporte que hacen los juegos y las actividades lúdicas en el desarrollo del pensamiento matemático y de manera más específica, en el pensamiento algebraico.

2.2.1 *Sobre La Transición Entre el Pensamiento Aritmético y el Algebraico*

Diferentes autores (Gallardo y Rojano, 1988; Socas, 1997; Kieran y Lee, 1996; Bednarz y Janvier, 1996) reconocen la existencia de diversas dificultades que atraviesan los estudiantes cuando se enfrentan por primera vez a estructuras algebraicas, esto debido a que han trabajado en gran parte de su escolaridad con estructuras aritméticas. Gallardo y Rojano afirman la existencia

de un *corte didáctico* que se caracteriza por ser un obstáculo de origen epistemológico (Brousseau, 1997), es decir que se ubica en la frontera de ambos pensamientos y que nace de la necesidad de operar lo representado (1988, p. 2).

Este obstáculo se genera debido a que los estudiantes han desarrollado el pensamiento aritmético en gran parte de su escolaridad donde han construido una estructura aritmética que debe ser reconfigurada para trascender al pensamiento algebraico. Se caracterizan a continuación los dos tipos de pensamiento, pues es necesario reconocer su naturaleza para los fines de este trabajo.

Caracterización del Pensamiento Aritmético en la Escuela. A lo largo del desarrollo de este trabajo se centra la atención en aspectos como la transición y ruptura del pensamiento aritmético al algebraico, para ello es importante reconocer aportes como los de Verschaffel y De Corte (1996, p.100), que han sido fundamentales para lograr una caracterización de lo que es el pensamiento aritmético en la educación básica primaria como la estructura cognitiva que tiene que ver con

- Conceptos numéricos y sentido de los números
- El significado de las operaciones aritméticas
- Control de hechos básicos de la aritmética
- Cálculo mental y escritura de la aritmética
- Lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas.

Estos autores proponen de manera implícita el trabajo en resolución de problemas verbales, que aún en los años 90 la división de la época era muy clara, el tratamiento de la aritmética propuesto en primaria y el tratamiento del álgebra llevado a cabo en secundaria, de

donde surgen trabajos que en la actualidad tienen cierto impacto en la enseñanza de las matemáticas, pero aun así sigue predominando esta división dentro de los currículos.

En ese sentido, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) aseguran que “el pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los estudiantes tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos” (p. 26).

Caracterización del Pensamiento Algebraico en la Escuela. Kieran (1989) afirma que el pensamiento algebraico se caracteriza con la capacidad de expresar algebraicamente las generalizaciones, no es suficiente con identificar lo general en lo particular, pues la representación y manipulación simbólica también es necesaria (p. 165).

Radford (2010, p. 39) por otro lado, caracteriza el pensamiento algebraico como la constitución de tres componentes:

- El sentido de indeterminancia: Que considera los objetos básicos opuestos a la determinancia numérica como las incógnitas, las variables y los parámetros.
- La analiticidad: Que considera la manera de trabajar los objetos indeterminados, reconociendo el carácter operatorio de los objetos básicos anteriormente mencionados.
- La designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos: Que considera la forma de referirse a los objetos junto con su significado.

Otra perspectiva es la de Kaput (2000, p.3), pues reconoce que el pensamiento algebraico se manifiesta en el desarrollo de competencias como:

- La realización y expresión de la generalización de los sistemas simbólicos de manera formal.

- El razonamiento con formas simbólicas, incluyendo la manipulación sintáctica de las mismas.

Se puede reconocer de manera general que el pensamiento algebraico posibilita la generalización, comprensión y manipulación de objetos indeterminados en el plano simbólico, pero no necesariamente es una condición exigida ya que estos símbolos pueden asociarse con las letras y signos, considerándolos como el sistema semiótico de álgebra por excelencia, pero los signos también pueden ser algo diferente como “palabras o gestos, por ejemplo, son signos por sí mismos, hablando semióticamente, podrían ser signos algebraicos, tan genuinos a este proceso como las letras” (Radford, 2010, p. 2).

Es importante resaltar que la caracterización del pensamiento algebraico de los autores mencionados (Kieran, 1989; Kaput, 2000; Radford, 2010) ha permitido la construcción reciente de la caracterización del pensamiento algebraico de otros autores que son relevantes para el desarrollo de este proyecto como Almeida (2016) quien considera que la principal característica del pensamiento algebraico es el establecimiento de relaciones, sin dejar de lado otros procesos importantes para su desarrollo como generalizar, modelar, construir significado y operar lo desconocido.

En relación con el pensamiento aritmético, se puede observar que la diferencia entre ambos pensamientos está vinculada a la naturaleza de los objetos que se manipulan en cada uno, por un lado, el pensamiento aritmético manipula objetos determinados, mientras que el pensamiento algebraico manipula objetos indeterminados. Radford (citado en Castañeda y Castañeda, 2019) lo especifica diciendo que el pensamiento algebraico “trabaja con cantidades desconocidas como si fueran conocidas de manera analítica, mientras que el pensamiento aritmético trabaja con cantidades conocidas” (p. 41).

2.2.2 Perspectivas para el Tránsito del Pensamiento Aritmético al Algebraico

Las investigaciones de diversos autores (Bednarz, Kieran y Lee 1996; Socas, 1997) permite conocer las diferentes opciones que han surgido con el tiempo para la introducción del álgebra en la escuela, siendo estas impulsadas en los diferentes programas y currículos de las comunidades internacionales, que influyen directamente en las decisiones, estrategias, significados y concepciones frente al conocimiento algebraico de los estudiantes, de la misma forma se evidencian algunos estudios en relación con las dificultades presentadas al interactuar con las distintas perspectivas de aproximación al álgebra, los cuales apuntan a importantes cambios por los que los estudiantes deben pasar para el desarrollo del pensamiento algebraico.

El interés en investigación dentro de la comunidad internacional crece fuertemente y las aproximaciones se han encaminado en hacer del aprendizaje para los estudiantes algo significativo al proponer: generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que rigen las relaciones numéricas, resolución de problemas, resolución de ecuaciones apoyada en el uso de modelos concretos, introducción de situaciones funcionales y de la modelización de fenómenos físicos y matemáticos (Bednarz et. al, 1996, p. 115).

Para el desarrollo de esta investigación como se ha mencionado anteriormente, la mirada está puesta en trabajos dan cuenta de la resolución de problemas específicos o clases de problemas (Puig y Cerdán, 1990; Filloy y Rubio, 1993) como una perspectiva particular que, por medio de sus diferentes componentes y situaciones, posibilitan a los estudiantes para dar sentido al álgebra.

La Resolución de Problemas en el Tránsito del Pensamiento Aritmético al Algebraico. Bednarz y Janvier (1996) manifiestan que la resolución de problemas facilitó históricamente el desarrollo del álgebra y su enseñanza, debido a que surge como un método

potencial para solucionar problemas que antes solo se resolvían con métodos aritméticos. Sin embargo, el álgebra es despojada posteriormente de toda contextualización y termina siendo introducida en la enseñanza como la manipulación de símbolos sin sentido para los estudiantes, por lo tanto, es importante devolverle al álgebra su significado dentro de los contextos escolares.

Para Bednarz y Janvier es importante tener en cuenta que los estudiantes han resuelto problemas en aritmética durante gran parte de su escolaridad, pues este se convertiría en el puente para la adquisición de este *nuevo conocimiento*, ya que “la adquisición del nuevo conocimiento involucra tanto la extensión del conocimiento previo, el cual provee marcos referenciales para cuestionar y decodificar nueva información, así como el rompimiento con este pasado, o al menos una desviación” (Bednarz y Janvier, 1996, p. 250).

Polotsaika (2022) también menciona que parte de las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos tiene que ver con el pensamiento aritmético que han desarrollado en los primeros años de escolaridad (p. 342). Esto los tiene acostumbrados a resolver problemas que requieren un tratamiento y manipulación de cantidades conocidas, pero cuando se enfrentan a cantidades que no conocen intentan manipularlas aritméticamente. Por esta razón, para la resolución de problemas en álgebra “los procedimientos y las concepciones estudiantiles desarrolladas en la aritmética son el punto de amarre desde el cual emergerán las nuevas soluciones” (Bednarz & Janvier, 1996, p. 117).

Teniendo en cuenta las posturas anteriores es importante reconocer los factores que influyen de forma directa en el proceso de resolución de problemas tales como: el dominio numérico, la naturaleza de los datos y finalmente el contexto y estructura de las relaciones involucradas de tal forma que se puedan presentar o reconocer estrategias ejecutadas por los estudiantes para resolver estos problemas.

Se pueden identificar diferencias estructurales entre los problemas aritméticos y los problemas algebraicos, pues los primeros presentan relaciones que son fáciles de establecer entre los datos conocidos, mientras que los problemas en álgebra no permiten establecer las relaciones entre las cantidades fácilmente, ya que las cantidades son indeterminadas.

Bednarz y Janvier (1996) caracterizan una serie de problemas que facilitan la introducción al álgebra por medio de la ecuación como herramienta para su solución, estos se clasifican de acuerdo a la naturaleza de las cantidades involucradas y en las relaciones entre ellas que pueden ser aditivas o multiplicativas. Estos problemas son: problemas de repartición desigual, problemas que involucran la transformación de una magnitud, y problemas que involucran magnitudes no homogéneas y razón (p.119).

Aunque estos problemas se caracterizan por la naturaleza de las cantidades y las relaciones entre ellas, el foco de atención en este trabajo está sobre los problemas de repartición desigual como puente en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, destacando su estructura general, en la que cantidades conocidas y desconocidas y la relación entre ellas pueden presentarse explícita o implícitamente en el problema, donde el reto del estudiante es reconocer las cantidades, sus relaciones y hallar la solución.

Dentro de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas algebraicos, Bednarz y Janvier (1996) caracterizan cuatro maneras de proceder con base a las estructuras aritméticas que los estudiantes conocen:

- Tomar el dato conocido en el problema como el punto de inicio; donde los estudiantes hacen solamente uso de los datos conocidos (datos iniciales), intentando llegar a cantidades desconocidas.

- Crear un dato inicial al crear un número ficticio; donde los procedimientos de “ensayos numéricos” se ven respaldados por un número ficticio que permite llevar a cabo las operaciones dadas.
- Repartir y entonces generar; donde los estudiantes hacen solamente uso de los datos conocidos (el todo), esto implica dividirlo en el número de partes (que componen el todo) de forma secuencial, y finalmente
- Tener en cuenta la estructura; donde el estudiante opera sobre relaciones entre las cantidades y transforma el problema inicial en un nuevo problema que permite cálculos de ahí en adelante. (p. 127)

Se reconoce entonces que los estudiantes razonan aritméticamente para resolver problemas algebraicos, se afirma que los estudiantes presentan un pensamiento algebraico cuando reconocen la estructura del problema, las relaciones entre las cantidades y las manipulan entre sí.

Se concluye de la investigación de Bednarz y Janvier que la resolución de problemas permite el acercamiento al álgebra de una manera significativa, pues al aprovechar el pensamiento aritmético de los estudiantes, se facilita que trasciendan a un pensamiento algebraico por medio de problemas contextualizados. Esto aporta mucho al objetivo de este trabajo, ya que se busca suavizar esta transición entre ambos tipos de pensamiento con elementos que permitan dar sentido al álgebra en la escuela.

Por esta razón, aparecen los *problemas frontera* como el punto medio entre los problemas aritméticos y los algebraicos, debido a que se pueden resolver por medio de razonamientos aritméticos, pero también por medio de razonamientos algebraicos, los cuales son enfrentados por los estudiantes de diversas formas donde según Bednarz y Janvier (1996) el estudiante,

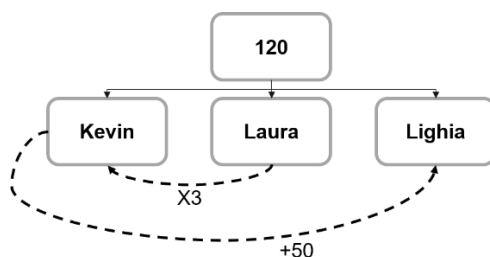
intenta convertir el problema en uno *conexo*, logrando identificar varios acercamientos de este tipo (p. 125). Se identifican un tipo de problemas específicos que cumplen con esta característica, conocidos como: *problemas de repartición desigual*.

Problemas de repartición desigual. Según Almeida (2016) un problema de repartición desigual o problema de reparto se caracteriza esencialmente por hacer el reparto de un valor conocido en una cierta cantidad de partes desiguales y desconocidas, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Laura, Kevin y Lighia tienen, juntos, 120 pelotas. Kevin tiene el triple de pelotas que Laura y Lighia tiene 50 pelotas más que Kevin. ¿Cuántas pelotas tiene cada uno?

El problema anterior se puede representar mediante la estructura semántica presentada a continuación:

Figura 2. Estructura de un problema de repartición desigual.



Nota: Elaboración propia.

Lo que puede ser convertido en una ecuación de primer grado, teniendo presente que se representará la cantidad de pelotas de Laura como x y la cantidad de pelotas de Kevin como $3x$, debido a que tiene tres veces tantas pelotas como Laura, y la cantidad de pelotas de Lighia como $3x + 50$, ya que tiene cincuenta más que Kevin. De donde obtenemos: $x + 3x + (50 + 3x) = 120$.

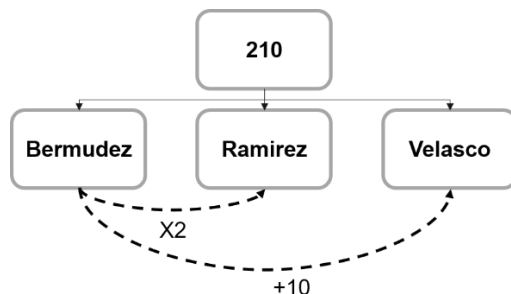
Marchand y Bednarz (1999) señalan que la clasificación de un problema de reparto proviene de las variables vinculadas a las relaciones existentes, considerando la cantidad de relaciones que pueden ser una, dos o más; la naturaleza de las relaciones donde aparecen la aditiva (suma y resta) y la multiplicativa (multiplicación y división); y por último el tipo de encadenamiento, fuente, composición o pozo.

Para comprender mucho mejor esta clasificación se reconocen cada uno de estos elementos en el ejemplo propuesto anteriormente, se presentan dos tipos de relaciones de distinta naturaleza, multiplicativa: “Kevin tiene el triple de pelotas que Laura” y aditiva: “Lighia tiene 50 pelotas más que Kevin” [énfasis agregado].

Encadenamiento de tipo fuente. En este tipo de problemas Almeida (2016) menciona que las magnitudes se originan en función de una sola magnitud (p. 30). Veamos un ejemplo de este tipo que esquematiza su estructura:

El puesto de lechonas escolar está a cargo de Lina durante el bazar. Al finalizar el día se sabe que el total de cajas vendidas fueron 210, los Velasco compraron 10 más que los Bermudez y los Ramirez 2 veces tantas como los Bermudez ¿Cuántas cajas de lechona compró cada familia?

Figura 3. Estructura de un problema de repartición con encadenamiento de tipo fuente.



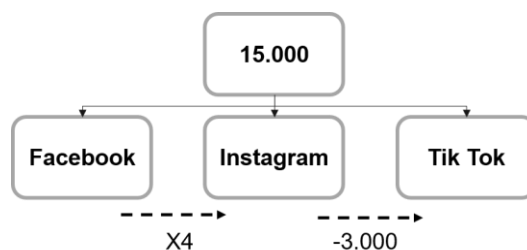
Nota: Elaboración propia.

Este problema refleja la cantidad de cajas de lechona compradas por la familia Bermudez siendo la generadora de todas las relaciones presentadas, donde el total de cajas compradas por los Ramírez y los Velasco depende de los Bermudez. Por eso hay que decir que “*los Velasco compraron 10 más que los Bermudez*” representado por $10 + x$, así como “*los Ramirez 2 veces tantas como los Bermudez*” representado por $2x$; de donde se obtiene la siguiente ecuación: $x + 2x + (x + 10) = 210$ [énfasis agregado].

Encadenamiento de tipo composición. Almeida (2016) menciona, que en este tipo de problemas “las relaciones se establecen siguiendo una secuencia” (p. 30). El siguiente ejemplo muestra un problema de repartición de este tipo.

Juan Camilo, influenciador digital, desea conocer cuántos seguidores tiene en cada una de sus redes sociales. Él sabe que tiene, entre Instagram, Facebook y Tik Tok un total de 15.000 seguidores. También sabe que en Instagram tiene 4 veces el número de seguidores que tiene en Facebook y que en Tik Tok tiene 3.000 seguidores menos que en Instagram ¿Cuántos seguidores tiene Juan Camilo en cada red social?

Figura 4. Estructura de un problema de repartición con encadenamiento de tipo composición.



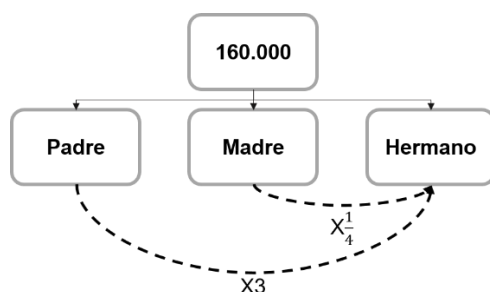
Nota: Elaboración propia.

En este tipo de problemas las relaciones se establecen en una secuencia, por lo tanto, a diferencia de los anteriores, en los de composición las magnitudes se generan de diversas fuentes (Almeida, 2016).

Encadenamiento tipo pozo. En este tipo de problema, Almeida (2016) señala que “las relaciones convergen hacia uno de los personajes del problema” (p. 32). El siguiente ejemplo muestra un problema de tipo pozo.

Alexandra compra regalos para su hermano, su madre y su padre, pagó al finalizar las compras \$160.000. El regalo de su hermano cuesta la cuarta parte que el de su madre y el triple del de su padre ¿Cuánto cuesta cada uno de los productos comprados por Alexandra?

Figura 5 Estructura de un problema de repartición con encadenamiento de tipo pozo.



Nota: Elaboración propia.

Cabe resaltar que este problema tiene un aspecto particular y es considerar la operación inversa para plantear la ecuación y finalmente resolverla, en el momento que se menciona *el regalo de su hermano cuesta la cuarta parte que el de su madre y el triple del de su padre* [énfasis agregado], representar las expresiones en la ecuación teniendo en cuenta que también significa *el regalo de su madre costó 4 veces el de su hermano: $4x$ y el de su padre la tercera parte del de su hermano: $\frac{1}{3}x$* [énfasis agregado]. De donde se obtiene la siguiente ecuación: $x + 4x + \frac{1}{3}x = 16000$.

Los problemas de repartición desigual caracterizados anteriormente son importantes para este proyecto de investigación porque se tendrán en cuenta para el desarrollo de la propuesta de aula, ya que se encuentran en la frontera entre el pensamiento aritmético y el pensamiento

algebraico. Es importante precisar que en este trabajo la categorización de estos problemas propuestos por Almeida (2016) se realiza con el fin de subcategorizar los problemas de repartición desigual propuestos por Bednarz y Janvier (1996), y no contradice la caracterización que se realiza del pensamiento algebraico, puesto que esta categorización fue construida con base a la perspectiva de pensamiento algebraico de los autores clásicos como Kieran (1989), Kaput (2000) o Radford (2010).

2.2.3 La Lúdica y el Papel del Juego en la Educación

En este apartado se presentan nociones sobre la lúdica y el papel del juego en la educación y en la educación matemática, considerando algunos autores como Jiménez (1998) que han dirigido procesos pedagógicos alternativos en torno a la lúdica, el juego, la creatividad y el desarrollo humano. Por otro lado, tenemos a Bishop (1998), Alsina (2008) y el Grupo Azarquiel (1993) quienes otorgan al juego un papel importante en el desarrollo del pensamiento matemático y en el desarrollo del pensamiento algebraico.

La Lúdica en la Educación. Entender a grandes rasgos todos los aspectos que abarca hablar de lo lúdico en la vida cotidiana puede ser algo complejo y más en la educación cuando se convierte en una salida para superar las formas tradicionales de interactuar en el aula, es por esta razón que es importante resaltar como menciona Jiménez (1998) que los procesos lúdicos, como experiencias culturales son una serie de actitudes y predisposiciones que fundamentan toda la corporalidad humana, estos producen miles de afectaciones en cualquier tipo de actividad cotidianas como el juego, la chanza, la escritura, el arte, el descanso, el baile, el afecto, las ensoñaciones. Incluso, actos de la vida cotidiana como reír con amigos, ir de compras y salir al parque son también lúdicos.

Conforme a ello, cabe mencionar que las prácticas lúdicas tienen una característica en común y es que actúan sin más recompensa que la gratitud y la felicidad que producen al desarrollarse, de ahí que se produzca la idea de que gran parte de los juegos son lúdicos, pero la lúdica no se reduce únicamente al juego. En educación, la actividad lúdica se prevé para incorporar a los estudiantes en el medio, siendo fundamental en desarrollo de competencias en dimensiones cognitivas, comunicativas, socio afectivas, corporales y espirituales.

El Papel del Juego en el Desarrollo del Pensamiento Matemático. El juego es considerado como una de las seis actividades matemáticas importantes realizadas por todos los grupos culturales, ya que, todas las sociedades juegan, por lo tanto, los juegos existen en todas las culturas y es muy probable que se practiquen de la misma forma en diferentes lugares, esto lleva a pensar en el potencial educacional de los juegos, donde aparece como una forma particular de la actividad social en la que se establecen reglas y en las que los participantes se convierten en jugadores (Huizinga citado por Bishop, 1998, p. 22).

Existen dos características notables en relación con el juego, por un lado tenemos el sistema de puntuación, aceptado por el conjunto de personas que juegan asociado con un proceso de destemporalización, debido a que, este proceso centra la atención en el cómo se obtiene los puntos y que si es aceptado por los participantes no puede ser invalidado en el tiempo; por otro lado tenemos la situación del juego desde un foco social, donde las reglas son negociadas y cumplidas sin importar la evolución de este.

Por ello, se debe considerar lo mencionado por Bishop (1998), quien afirma que “en todas las partes del mundo se juega, pero cuando queremos aprovechar los juegos con objetivos educativos el tratamiento es diferente. Es verdad que siguen siendo juegos, pero se practican con un objetivo concreto, es decir, para aprender algo” (pág. 21).

Por ello es crucial hablar de la importancia del juego en matemáticas considerando 10 puntos desarrollados en el *Decálogo del juego* propuesto por Alsina:

1. Es la parte de la vida más real de los niños. Utilizándolo como recurso metodológico, se traslada la realidad de los niños a la escuela y permite hacerles ver la necesidad y la utilidad de aprender matemáticas.
2. Las actividades lúdicas son enormemente motivadoras. Los estudiantes se implican mucho y se lo toman en serio.
3. Trata distintos tipos de contenidos matemáticos, tanto de conceptos como de procedimientos y valores.
4. Los estudiantes pueden afrontar contenidos matemáticos nuevos sin miedo al fracaso inicial.
5. Permite aprender a partir del propio error y del error de los demás.
6. Respeta la diversidad del alumnado. Todos quieren jugar, pero lo que resulta más significativo es que todos pueden jugar en función de sus propias capacidades.
7. Permite desarrollar procesos psicológicos básicos necesarios para el aprendizaje matemático, como son la atención y la concentración, la percepción, la memoria, la resolución de problemas y búsqueda de estrategias, etc.
8. Facilita el proceso de socialización de los niños y, a la vez, su propia autonomía personal.
9. El currículum recomienda considerar el aspecto lúdico de las matemáticas y el necesario acercamiento a la realidad de los niños.
10. Persigue y consigue en muchas ocasiones el aprendizaje significativo. (2001, p. 2)

Las matemáticas al igual que el juego son actividades universales que con el tiempo han impactado en la sociedad por sus posibilidades para el desarrollo de habilidades en los

individuos; las reglas, las estrategias, la ejecución de procedimientos son elementos que pueden destacarse al relacionar las matemáticas y el juego, además se evidencian directrices similares a las presentes en la resolución de problemas con el objetivo de dar solución a problemas en diversos contextos.

Alsina y Planas (2008) presentan un cuadro comparativo que permite apreciar cómo el juego y las matemáticas comparten distintos procesos, se tomará como base para establecer relaciones entre procedimientos desarrollados en el juego y las matemáticas.

Tabla 2. *Análisis comparativo de los procedimientos implicados en el juego y en las matemáticas*

Procedimientos en el Juego	Procedimientos en las matemáticas
El juego se inicia con la introducción de normas, que definen la función de los objetos y de las piezas que se usan.	Las matemáticas se inician con el establecimiento de definiciones y la concreción de objetos determinados por definiciones.
Jugar requiere adquirir familiaridad con las normas, relacionando unas piezas con otras.	Hacer matemáticas requiere comparar y hacer interactuar elementos de una teoría.
Avanzar en el dominio de un juego supone adoptar progresivamente técnicas sencillas que puedan dar buenos resultados.	Avanzar en la práctica matemática supone trabajar en torno a lemas deducidos de elementos básicos dados por la teoría.
Crear juegos nuevos, fértiles en ideas y situaciones complejas, da lugar a estrategias originales y a procedimientos innovadores.	Crear prácticas matemáticas nuevas da lugar a nuevas situaciones potencialmente motivadoras de nuevos modelos y teorías

Nota: Matemática inclusiva: Propuestas para una educación matemática accesible (2008, p.84). Elaboración propia

Respecto a la comparación presentada con algunos de los procedimientos en el juego y las matemáticas, cabe aclarar que la posición frente a lo que plantea Alsina es importante para el desarrollo de la propuesta de aula, pero se debe tener en cuenta que la forma de hacer matemáticas en las aulas no es la misma de hacer matemáticas en la historia aunque en ambos casos se generen ideas que no pueden ser aceptadas fácilmente y deben ser discutidas, esa relación es evidente, ya que el hombre ha desarrollado actividad matemática, en donde el juego

ha influido pero de la misma forma donde no ha estado tan presente. Teniendo en cuenta los procedimientos del juego se establecerán algunas relaciones clave con la actividad matemática en el aula.

- Son actividades universales e integrales.
- Proporcionan ejercicios para la práctica de estrategias y para fomentar la experimentación.
- Desarrollan habilidades de percepción y razonamiento, movilizando su imaginación y creatividad.
- Presentan situaciones para emplear técnicas heurísticas en la resolución de problemas.
- Evidencian constantes desafíos que permiten poner en práctica procesos intelectuales.
- Ayudan en la estructuración del pensamiento, el razonamiento deductivo y en la adquisición de actitudes positivas.

Lo que evidencia que la relación entre las matemáticas y el juego va más allá de la aplicación de técnicas propias de las matemáticas, si no que posibilita el uso de procedimientos más generales, destacando aspectos que menciona Edo, M. (2002) como lo son “la toma de decisiones y la generalización de estrategias totales o parciales; lo que permite una visión de las matemáticas más allá de técnicas algorítmicas y del cálculo” (p. 69).

Lo anterior se fortalece con la idea de que el aprendizaje de las matemáticas se puede transformar en una experiencia motivadora si se basa en actividades lúdicas (Muñoz, 2014, p. 19), debido a que las actividades lúdicas están relacionadas a la sensación de felicidad, diversión y placidez que el ser humano busca naturalmente, y “el juego es una manifestación de lo lúdico” (Posada, 2014, p. 27). De ahí que se hable de “matemáticas recreativas” o “juegos matemáticos”, ya que, estos se entienden como cualquier tipo de matemáticas con un fuerte componente lúdico,

pero esto es decir poco porque “juego”, “recreación” y “lúdico” son casi sinónimos (González et al, 2014, p. 114).

Por eso el juego se considera un potencial recurso de aprendizaje, pues moviliza la motivación en los estudiantes al experimentar la sensación de placer y diversión, lo que es necesario en las matemáticas actualmente. Pero es importante resaltar que, pese a las potencialidades mencionadas, el juego por sí solo no moviliza el pensamiento matemático, sino que debe diseñar tareas coherentes y gestionar la actividad en el aula que involucre sesiones de juego pertinente, la selección de los juegos, determinar los objetivos que se pretenden alcanzar, concretar la evaluación de las actividades lúdicas, entre otros; donde los conocimientos se adquirirán estructuradamente, pero con mayor motivación, interés y entusiasmo.

El Papel del Juego en el Desarrollo del Pensamiento Algebraico. Es evidente la preocupación de los docentes para que los estudiantes reconozcan alternativas que posibiliten un acercamiento al álgebra, pero al mismo tiempo disminuyan las dificultades y errores presentes comúnmente en los estudiantes, razón por la cual el juego aparece como una opción con enfoque distinto para el estudiante, dándole al álgebra un carácter más agradable en cuanto a su enseñanza y aprendizaje. Es por ello por lo que Grupo Azarquiel (1993) plantea que “en efecto, un material presentado en forma de juego aprovecha un impulso hacia la diversión de los niños, una tendencia natural muy temprana a formar grupos y a jugar, consiguiendo con él un aprendizaje más eficaz” (p.152).

El Grupo Azarquiel (1993) propone una serie de juegos que tienen como propósito principal aclarar conceptos o mejorar destrezas de álgebra que, de otra forma, los estudiantes encontrarían aburridas y repetitivas, los cuales reúnen ciertas características mencionadas a continuación:

- Ser sencillos, adecuados al nivel de los estudiantes.
- Tener una finalidad específica. Ser atractivos y motivadores.
- Que incorporen, siempre que se pueda, estructuras de juegos ya conocidos: dominós, bingo, tangram, entre otros.
- Que haya juegos individuales que faciliten la interiorización de conceptos y juegos colectivos.
- Ser asequibles, económicamente, dedicando especial atención a los juegos que el profesor y los estudiantes sean capaces de construir (p. 153).

Es importante resaltar que son escasas las investigaciones y propuestas de juego para desarrollar el pensamiento algebraico mediante la resolución de problemas de repartición desigual, lo que fortalece el interés de este proyecto de investigación.

2.3 Perspectiva Matemática

En este apartado se presenta la conceptualización de nociones y conceptos matemáticos que competen al desarrollo del pensamiento algebraico, como expresiones algebraicas, polinomios, ecuaciones de primer grado, ya que son elementos clave en la transición del pensamiento aritmético al algebraico ya que, permiten ampliar nociones de los objetos en aritmética a objetos en el álgebra.

2.3.1 Expresiones Algebraicas

Zill y Dewar (2012) como se mencionó anteriormente, consideran pertinente el uso de letras como x e y para representar números; cada símbolo se llama variable. Una expresión algebraica es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones entre otras operaciones de variables y números reales. Cabe resaltar que cada

representación hace uso de números (coeficientes) y letras (variables o indeterminadas). Se presentan a continuación algunos ejemplos de expresiones algebraicas:

$$1. \quad -3xy^2 + 4x^2y^4 - \frac{25}{4y}$$

$$2. \quad (3y + b)^2 - 5x$$

$$3. \quad \sqrt{\frac{-36x^2}{x+y}} - \pi$$

En ocasiones las expresiones algebraicas representan un número real para ciertos valores de una variable, por ejemplo, si se considera la expresión $\frac{25}{(x+2)}$, se debe considerar los $x < 2$ y $x > 2$ ya que de esta forma $\frac{25}{(x+2)}$ va a representar un número real. Se considera *dominio de la variable* al conjunto de valores posibles, por ello el dominio de la variable en este caso serían todos los números reales excepto $x \neq -2$, es decir, $\{x | x < 2 \text{ y } x > 2\}$, de donde se obtienen los números reales como valores de la expresión que surgen de sustituir números específicos por las variables dentro de la expresión.

2.3.2 Polinomios

Estas son un tipo especial de expresiones algebraicas que representan un número real para cualquier número real x , su dominio es el conjunto de todos los números reales R . Estos están compuestos por ciertas expresiones algebraicas especiales como los son los monomios (de la forma ax^n), binomios (la suma de dos monomios), trinomios (la suma de tres monomios), entre otros; donde a es un número real denominado coeficiente, x es una variable y n es un entero no negativo que establece el grado. Un polinomio es representado de la siguiente forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0, \text{ con } a_n \neq 0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n i = 0, 1, 2, \dots, n$ son números reales.

Un polinomio de grado n en la variable x , se entiende entonces como cualquier suma finita de monomios, donde estos reciben el nombre de *términos* del polinomio. A continuación, una clasificación de los polinomios según su grado:

Tabla 3. Ejemplo de polinomios.

Polinomio	Grado	Forma estándar	Ejemplo
Constante	0	a_0 (con $a_0 \neq 0$)	5
Lineal	1	$a_1x^1 + a_0$ (con $a_1 \neq 0$)	$3x - 5$
Cuadrático	2	$a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ (con $a_2 \neq 0$)	$-\frac{1}{2}x^2 + x - 2$
Cúbico	3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$ (con $a_3 \neq 0$)	$x^3 - 6x + \sqrt{3}$
n-ésimo grado	n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0$ (con $a_n \neq 0$)	$x^n - 1$

Nota: Obtenida de (Zill y Dewar, 2012). Elaboración propia.

2.3.3 Ecuaciones

Una ecuación se entiende como la igualdad establecida entre dos expresiones algebraicas que contiene al menos una variable. A través de estas se pueden representar diferentes problemas de la vida cotidiana e igualmente dar solución a diversas situaciones problemáticas. La ecuación está compuesta por dos miembros que son separados por el símbolo igual (=). Representadas a continuación:

1. $8x - 2l = 3$
2. $4(x + 10) = 2(x + 22)$
3. $\frac{x^2 - l}{x - 2} = x + 2$
4. $\sqrt{x + 8} + \sqrt{x + 3} = 5$

Las ecuaciones polinómicas y/o algebraicas están definidas de la siguiente forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$$

donde n es un entero no negativo y $a_i = 0, 1, 2, \dots, n$ son números reales con $a_n \neq 0$.

Las soluciones o raíces de la ecuación polinómica son los valores que, sustituidos en la variable x , convierten a la igualdad de la ecuación en verdadera, es decir $0 = 0$. Para el desarrollo de la propuesta en desarrollo se centra la atención en las ecuaciones de grado 1, también conocidas como ecuaciones lineales, cuyo exponente de la variable es $n = 1$, su ecuación general es $a_1x^1 + a_0 = 0$, donde la solución a la variable x se obtiene de $x = \frac{-a_0}{a_1}$.

2.4 Elementos de articulación entre las perspectivas

En conclusión, para el diseño de la propuesta de investigación se conjugan nociones relevantes desde las tres perspectivas mencionadas anteriormente, ya que permiten integrar y relacionar elementos fundamentales en el desarrollo del trabajo basado en el reconocimiento de aspectos del pensamiento algebraico en estudiantes del grado séptimo por medio del diseño e implementación de una propuesta que involucra el juego en la resolución de problemas de repartición desigual.

Tabla 4. *Relación entre las perspectivas Didáctica, Matemática y Curricular.*

Perspectiva Curricular	Perspectiva Didáctica	Perspectiva Matemática
Se destacan aportes desde la perspectiva curricular en orientación de documentos de política nacional como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje; donde aspectos como atención al trabajo de la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento variacional mediante contextos de la vida cotidiana cercanos a los estudiantes que permitan un acercamiento significativo del álgebra, basado en conocimientos aritméticos, además de presentar estándares básicos para la propuesta de tareas o actividades de aprendizaje.	Aspectos como las dificultades presentadas en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela y la resolución de problemas como una de las aproximaciones clave para superar estas dificultades, el pensamiento algebraico y su caracterización como pensamiento a desarrollar y el uso de problemas de repartición desigual hacen parte de los aportes centrales para la fundamentación de la investigación; sin dejar de un lado el interés de buscar puntos de convergencia de estos con la importancia y el papel del juego y las actividades lúdicas en el desarrollo del pensamiento algebraico.	En términos matemáticos, se definen conceptos clave en el desarrollo del pensamiento variacional dentro del álgebra escolar; iniciando desde el lenguaje algebraico y el significado de algunos elementos centrales dentro de la propuesta como, expresiones algebraicas, polinomios y ecuaciones y una breve caracterización como parte del lenguaje; igual que la particularidad sobre el tipo de problemas a trabajar y sus variantes.

Nota: Elaboración propia.

De la tabla anterior se logra evidenciar la relación entre elementos de las diferentes perspectivas, didáctica, curricular y matemática, asociada con la problemática en cuestión basada en el juego como potenciador en la enseñanza de las matemáticas, principalmente en el desarrollo de competencias como la resolución de problemas algebraicos, esto permite evidenciar los aspectos más relevantes de cada una, proponiendo un fundamento central para el buen desarrollo de las etapas de investigación y el cumplimiento de los objetivos planteados.

Teniendo en cuenta los elementos de cada perspectiva, se propone la siguiente matriz de análisis que orienta la descripción de los elementos que aporta el juego y la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes del grado séptimo a partir de los procesos de comprensión, experimentación y verificación, los cuales están involucrados en los tres ejes considerados en este trabajo y se describen en la siguiente tabla con base a las características de cada uno presentadas en este capítulo.

Tabla 5. Matriz de relaciones entre resolución de problemas, juego y pensamiento algebraico.

Perspectivas / Procesos	Pensamiento Algebraico	Resolución de problemas	Juego
Comprensión	El estudiante reconoce que las cantidades indeterminadas y las constantes se relacionan por medio de una estructura multiplicativa o aditiva.	El estudiante reconoce la estructura de problema, identificando las cantidades involucradas y las relaciones entre ellas.	El estudiante reconoce la estructura, reglamentos y objetivos del juego.
Experimentación	El estudiante reconoce que las cantidades indeterminadas se pueden representar y manipular mediante operaciones como si fueran conocidas analíticamente.	El estudiante identifica un plan de acción para resolver el problema teniendo en cuenta las relaciones identificadas previamente y lo ejecuta.	El estudiante identifica una estrategia a partir de la estructura del juego que le permita ganar puntos.
Verificación	El estudiante comprueba la efectividad de las representaciones y operaciones realizadas.	El estudiante comprueba que la respuesta que dio al problema satisface las relaciones identificadas.	El estudiante verifica que la estrategia utilizada para ganar los puntos es válida de acuerdo con los reglamentos del juego.

Nota: Elaboración propia.

De la tabla anterior se concluye que dentro de las perspectivas mencionadas el proceso de comprensión surge como la etapa de reconocimiento e identificación de características y

elementos clave como el primer paso para un trabajado efectivo tanto en el juego como en la resolución de problemas, por otra parte, el proceso de experimentación aparece como el momento en el que surgen estrategias o un plan de acción que dé cuenta de la interpretación de los elementos reconocidos anteriormente para dar solución al problema y lograr un desarrollo pertinente en el juego, por último la etapa de verificación surge como un momento de comprobación de los procedimientos realizados con el fin de saber si están al margen de la estructura del juego y la resolución de problemas.

Teniendo en cuenta estos elementos, se pretende con la propuesta de aula que, a partir de la articulación de estos procesos en la resolución de problemas y el juego, los estudiantes se acerquen a elementos propios del pensamiento algebraico como la relación de cantidades indeterminadas a partir de una estructura aditiva o multiplicativa, la representación de estas por medio del lenguaje algebraico y su operatividad a partir de la analiticidad.

Capítulo 3. El Papel del Juego en el Desarrollo del Pensamiento Algebraico a través de la Resolución de Problemas

En este capítulo se presentan diferentes elementos en relación con la metodología de investigación del proyecto. En primer lugar, se caracteriza el tipo de investigación que se llevará a cabo, se mencionan aspectos claves para el diseño e implementación de la propuesta de aula incluyendo la selección de la población e instrumentos de recolección y análisis de datos, también se evidencia la descripción y organización de situaciones, actividades y desempeños esperados. Finalmente, se presentan los resultados y análisis de resultados en correspondencia con los registros de los estudiantes participantes en la investigación.

3.1 Algunos Aspectos Metodológicos

Esta investigación se caracteriza como cualitativa mediante lo que Camargo (2021) llama *enfoque fenomenológico* (p. 15) ya que considera pocas herramientas en relación con cálculos estadísticos, y se centra en la caracterización, descripción o explicación de los elementos propuestos en aula al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Esto por medio de una *estrategia naturalista* basada en el diseño de tareas, la cual orienta la descripción de las prácticas sociales y culturales que influyen en el aprendizaje de las matemáticas a partir de tareas estructuradas que involucran el juego, teniendo en cuenta que esta estrategia busca “estudiar las prácticas de enseñar y aprender matemáticas en diversos contextos” (Camargo, 2021, p. 47).

Además, se toman algunos elementos del *experimento de enseñanza* propuesto también por Camargo (2021) debido a que los resultados o productos de esta estrategia de investigación pueden ser secuencias de enseñanza implementadas, evaluadas y mejoradas, modelos reales de actividad matemática de los estudiantes o pruebas de existencia que demuestran el efecto deseado (p. 68), lo

que en el caso de este trabajo, pretende dejar abierta la discusión de los elementos del pensamiento algebraico que son favorecidos por medio de esta propuesta de aula.

Ahora bien, en relación con los instrumentos de recolección de datos para su posterior análisis se consideran dos: para el momento de la propuesta en que se implementa el juego y para el momento donde se reflexiona sobre lo que pasa en el juego. Para el primero se realiza un registro fílmico y de audio del que se seleccionan episodios donde se evidencian elementos del pensamiento algebraico según las intervenciones de los estudiantes. Para el segundo, se tienen en cuenta las hojas de trabajo desarrolladas por los estudiantes.

3.2 Diseño de la Propuesta de Aula

En este apartado se presenta los procesos de diseño y selección de la propuesta de aula, al tomar en cuenta los referentes conceptuales mencionados a lo largo de este trabajo, tales como (Gallardo y Rojano, 1988; Socas, 1997; Kieran y Lee, 1996; Bednarz y Janvier, 1996) centrando la atención en Bednarz y Janvier (1996), Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), Zill y Dewar (2012).

3.2.1 Sobre el Pilotaje

Para el diseño de la propuesta de aula se realizó un pilotaje exploratorio para seleccionar un juego que permitiera relacionar elementos del juego con el desarrollo de aspectos del pensamiento algebraico. Los diseños se estructuran en coherencia con la idea propuesta por Puig (1998) quien presenta una regla para poner un problema en ecuación, que consiste en cinco pasos relacionados con los momentos y actividades propuestas en cada diseño que involucra el juego. Primero, se piloteó la experiencia de los estudiantes con el Circuito Algebraico en una muestra de 24 estudiantes de grado séptimo para aproximarnos a la recolección de elementos importantes con las discusiones y respuestas en sus hojas de trabajo.

El circuito compuesto por 4 estaciones, articulados entre juegos y actividades distintas con el objetivo de: comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas y las cantidades desconocidas, así como las relaciones entre ellas (primera estación); escribir una igualdad entre expresiones a partir de las relaciones existentes (segunda estación); representar las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre esas cantidades y la que hemos simbolizado a través del lenguaje algebraico (tercera estación); y establecer una igualdad entre expresiones y comprobar que los dos miembros de la igualdad representan la misma cantidad (cuarta estación).

En segundo lugar, se exploró con la misma muestra de estudiantes el trabajo con el juego de mesa *Problemium*, esto con la intención de reconocer elementos para el desarrollo del pensamiento algebraico por medio del trabajo en equipo y la discusión de respuestas a preguntas de diferentes categorías en resolución de problemas algebraicos, donde para ganar el objetivo es llegar a la meta en primer lugar resolviendo problemas de repartición desigual.

Del primer diseño, se evidenció que los estudiantes estaban motivados en el recorrido del circuito, entendieron las consignas de las estaciones y en sus conversaciones se identificaron elementos importantes del pensamiento algebraico, pero al ser grupos tan grandes, no todos participaban, así que las discusiones se centraban en solo algunos. A diferencia de la segunda propuesta de juego *Probenium*, de la cual se pudo identificar que los estudiantes tuvieron confusiones sobre las consignas del juego, y que, a su vez, transcurría de forma muy lenta y poco emotiva para los estudiantes, lo que ocasionó la distracción y poca discusión sobre el juego.

En vista de este pilotaje y los elementos identificados de cada propuesta de juego, se selecciona el circuito algebraico como el juego que acompañará la propuesta de aula, con modificaciones necesarias a partir de la experimentación, como la reducción del número de

estudiantes que compiten dentro del juego y las condiciones que movilizan la discusión dentro del juego. La propuesta con las modificaciones realizadas en relación con la estructura del juego, teniendo en cuenta el desarrollo de aspectos del pensamiento algebraico, en relación con el reconocimiento de cantidades y las relaciones entre estas, la representación algebraica, el establecimiento y manipulación de la ecuación se presenta en el siguiente apartado.

3.2.2 Sobre el Diseño

La propuesta de aula está compuesta por dos situaciones del contexto de la vida cotidiana, la primera sobre la planeación de la fiesta de cumpleaños del grado octavo, y la segunda sobre la administración del parque de diversiones de la ciudad, cada situación comprende actividades que orientan la resolución de los problemas y donde el juego interviene en dos momentos específicos para movilizar la discusión de los estudiantes sin dejar de lado los contextos trabajados. La propuesta va dirigida a estudiantes de grado séptimo de la Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali. Para el diseño de las situaciones se toma en consideración el Marco de Referencia Conceptual establecido anteriormente, este resalta aspectos en relación con la transición de la aritmética al álgebra en la escuela, la resolución de problemas como una de las aproximaciones clave, el pensamiento algebraico y su caracterización, el uso de problemas de repartición desigual; y el papel de las actividades lúdicas en el desarrollo del pensamiento algebraico.

La Tabla 6 presenta la estructura de la propuesta sobre la situación, la descripción de los problemas y sus respectivas actividades, en las que se especifican los momentos de intervención del juego en cada una y el número de preguntas.

Tabla 6. Situaciones, Descripción de Problemas y Actividades de la Propuesta de Aula

Situaciones	Problemas	Actividades
Situación 1: Planeación de la fiesta de cumpleaños de los estudiantes del grado octavo.	Problema 1: Problema de repartición desigual tipo composición con dos relaciones aditivas. Problema 2: Problema de repartición tipo composición con dos relaciones multiplicativas. Problema 3: Problema de repartición tipo composición con una relación aditiva y una multiplicativa.	Actividad 1: No. Preguntas: 2 Actividad 2: Juego: 4 Estaciones Actividad 3: No. Preguntas: 4 Actividad 4: No. Preguntas: 2 Actividad 5: No. Preguntas: 2 Juego: 1 Actividad 6: No. Preguntas: 3 Actividad 7: No. Preguntas: 5
Situación 2: Actividades en el parque de diversiones	Problema 1: Problema de repartición desigual tipo fuente con una relación aditiva y una multiplicativa. Problema 2: Problema de repartición desigual tipo composición con una relación aditiva y una multiplicativa. Problema 3: Problema de repartición desigual tipo fuente con dos relaciones aditivas Problema 4: Problema de repartición desigual tipo pozo con dos relaciones multiplicativas	Actividad 1: No. Preguntas: 8 Actividad 2: No. Preguntas: 5

Elaboración propia.

En la Tabla 7 se exponen los contenidos matemáticos y los desempeños que se pretende que alcancen los estudiantes a través del desarrollo de cada situación planteada.

Tabla 7. Contenidos Matemáticos y Desempeños de las Situaciones de la Propuesta de Aula

Situaciones	Contenido matemático	Desempeños
Situación 1: Planeación de la fiesta de cumpleaños de los estudiantes del grado octavo.	• Expresiones algebraicas • Ecuaciones de primer grado con una incógnita	• Comprender las reglas del juego involucrado en la resolución de situaciones problemas • Identificar las cantidades conocidas y desconocidas de una situación problema. • Identificar las relaciones entre las cantidades de una situación problema. • Identificar la inversibilidad de las relaciones entre las cantidades de una situación problema. • Construir expresiones algebraicas con base en la representación de las cantidades involucradas en una situación problema. • Construir expresiones algebraicas con una o dos operaciones y con solo un valor desconocido, referido a una situación problema. • Utilizar métodos informales (ensayo y error) para la solución de una ecuación de primer grado.
Situación 2: Actividades en el parque de diversiones	• Expresiones algebraicas • Ecuaciones de primer grado con una incógnita	• Identificar las cantidades conocidas y desconocidas de una situación problema. • Identificar las relaciones entre las cantidades de una situación problema. • Construir expresiones algebraicas con base en la representación de las cantidades involucradas en una situación problema. • Construir expresiones algebraicas con una o dos operaciones y con solo un valor desconocido, referido a una situación problema. • Utilizar métodos informales (ensayo y error) para la solución de una ecuación de primer grado. • Utilizar la manipulación algebraica para resolver ecuaciones de primer grado asociadas a los problemas

Elaboración propia.

Finalmente, en la Tabla 8 se presenta el análisis de los problemas planteados en cada situación, con la intención de reconocer su estructura, que depende del dominio numérico, las cantidades conocidas y desconocidas y las relaciones entre las cantidades.

Tabla 8. Análisis de cada Problema de la Propuesta

Situaciones	Problemas	Análisis
Situación 1	Problema 1	Dominio numérico: Enteros positivos.
		Datos conocidos: Cantidad total de estudiantes.
		Datos desconocidos: Cantidad de estudiantes de 8º-1, 8º-2 y 8º-3.
		Estructura relaciones: Composición homogénea con dos relaciones aditivas (+5, +2).
		Relación implícita: Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 2	Dominio numérico: Enteros positivos.
		Datos conocidos: Cantidad total de votos.
		Datos desconocidos: Cantidad de votos por el pastel de naranja, vainilla y chocolate.
		Estructura relaciones: Composición homogénea con dos relaciones multiplicativas (4X, 2X).
		Relación implícita: Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 3	Dominio numérico: Enteros positivos.
		Datos conocidos: Cantidad total de estudiantes.
		Datos desconocidos: Cantidad de estudiantes vestidos en relación con temática de Barbie, Fiesta neón y Fiesta playera.
		Estructura relaciones: Composición no homogénea con dos relaciones (+16, 3X)
		Relación implícita: Cantidad total en relación con sus partes.
Situación 2	Problema 1	Dominio numérico: Enteros positivos.
		Datos conocidos: Valor total de las entradas.
		Datos desconocidos: Valor que pagaron las familias Ortega, Suárez y Arévalo
		Estructura relaciones: Composición no homogénea con dos relaciones (3X, +10.000)
		Relación implícita: Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 2	Dominio numérico: Enteros positivos.
		Datos conocidos: Cantidad total de tickets vendidos
		Datos desconocidos: Cantidad de tickets vendidos familias de 8-1, 8-2, 8-3
		Estructura relaciones: Composición no homogénea con dos relaciones (2X, +16)
		Relación implícita: Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 3	Dominio numérico: Enteros positivos.
		Datos conocidos: Cantidad total de dinero
		Datos desconocidos: Valor de las fotos, el combo de perro caliente y el peluche gigante
		Estructura relaciones: Composición homogénea con dos relaciones aditivas (+12.000, +32.000)
		Relación implícita: Cantidad total en relación con sus partes.
	Problema 4	Dominio numérico: Enteros positivos.
		Datos conocidos: Cantidad de tickets para obtener premio
		Datos desconocidos: Cantidad de tickets obtenidos en la montaña rusa, en el carrusel y en la rueda de la fortuna
		Estructura relaciones: Composición homogénea con dos relaciones multiplicativas (3X, 2X)
		Relación implícita: Cantidad total en relación con sus partes.

Elaboración propia.

Las tablas presentadas permiten estructurar y organizar la propuesta de aula presentada a continuación, para evidenciar los elementos considerados para la implementación y posterior análisis de los datos obtenidos.

3.2.3 *Propuesta de aula*

A continuación, se presenta la propuesta de aula diseñada a partir de los referentes curriculares, didácticos y matemáticos que fundamentan este trabajo de investigación, por medio de dos situaciones enmarcadas en el contexto de la vida cotidiana que involucran el juego para resolver problemas de repartición desigual.

Situación 1. Celebración de cumpleaños con el grado octavo

La profesora Tatiana es la nueva directora de grupo del grado 8-1 y desea realizar una fiesta de cumpleaños colectiva con los grados 8-1 y 8-3 en vísperas de la finalización del año escolar, para ello necesita conocer el número de estudiantes de cada salón, su sabor de pastel favorito y la temática de preferencia de cada grupo. Ayudemos a la profesora Tatiana en la planificación de la fiesta.

Problema 1. La profe Tatiana necesita conocer cuántos estudiantes hay en cada octavo, pues solo sabe que entre los tres octavos hay un total de 87 estudiantes, que en el grado 8-1 tiene cinco estudiantes más que el grado 8-2 y el grado 8-3 tiene dos estudiantes más que el grado 8-1. ¿Cuántos estudiantes hay en cada grupo?

Actividad 1

1. Explica Escribe las cantidades que menciona el problema.
2. Indica qué estrategias utilizarías para conocer cuántos estudiantes hay en cada grupo.

Actividad 2

3. La profesora propone un juego llamado ***circuito algebraico*** como estrategia para resolver el problema. Verifica si funciona. Para la solución de este momento lee junto a tu equipo

las indicaciones presentadas por la profesora Tatiana en la hoja de trabajo asociada al **círculo algebraico**.

Instrucciones del circuito: Conformar un equipo con dos compañeros y seleccionen entre los tres un capitán.

1. A cada equipo se le asignará un color, el cual será el que los guiará a lo largo del circuito.
2. Deberán atravesar el circuito cumpliendo con los retos de cada estación que se explican a continuación.
3. Deben resolver los retos de cada estación en el menor tiempo posible y al terminarlos pueden pasar a la siguiente estación, pero el primer equipo que lo haga ganará un comodín que facilitará su recorrido.
4. El primer equipo en recorrer todo el circuito gana el juego.

Instrucciones de las estaciones	
Primera estación Reconozco las cantidades y sus relaciones Instrucciones: 1. A cada capitán se le entregará una baraja de cartas parecidas a las del Uno, estas cartas contienen algunas representaciones de las cantidades involucradas en el problema. 2. Sobre la mesa se pondrá una carta de la baraja sobrante para iniciar el juego. 3. Al igual que en el uno, en cada turno los equipos deberán poner una carta que sea o del mismo color, o que represente la misma cantidad de la última carta que está sobre la mesa. 4. Al poner cada carta, el equipo debe justificar su elección. 5. Está permitido poner varias cartas únicamente si representan la misma cantidad. 6. El primer equipo en quedarse sin cartas gana el comodín y puede pasar a la segunda estación. 7. Los demás equipos deberán seguir jugando hasta que el siguiente equipo quede sin cartas.	Segunda estación Emparejo las representaciones Instrucciones: 1. Al llegar a la estación, cada equipo se pondrá enfrente del tablero que corresponde al color de su equipo. 2. Encontrarán dos columnas con tarjetas, una con las cantidades en lenguaje natural y la otra con las cantidades en lenguaje algebraico que están involucradas en el problema. 3. Deben relacionar la primera columna con su representación correspondiente en la segunda columna con ayuda de la lana. 4. El primer equipo en emparejar correctamente las columnas gana el comodín y puede pasar a la tercera estación.

Instrucciones de las estaciones	
Tercera estación Encuentro a x Instrucciones: 1. Se deben dirigir a la hoja correspondiente al color de su equipo. 2. En la hoja se encontrarán con la igualdad planteada en la estación anterior. 3. Deberán encontrar el valor numérico que debe tomar x para que la igualdad se cumpla. 4. El primer equipo en indicar el valor de x, podrá pasar a la cuarta y última estación.	Cuarta estación Justifico la igualdad Instrucciones: 1. Se deben dirigir a la hoja correspondiente al color de su equipo. 2. En la hoja encontrarán una solución realizada por uno de los estudiantes de la profesora Tatiana, en el reverso de la hoja deberán asociar propiedades conocidas para justificar los pasos realizados por el estudiante. 3. Verificar si el valor hallado por el estudiante corresponde al encontrado por el equipo. 4. Si los valores coinciden, deben establecer el número de estudiantes de cada grado. 5. El primer equipo que establezca la cantidad de estudiantes de cada grado gana el circuito.

Actividad 3

4. Explica si la estrategia propuesta por la profesora Tatiana (Circuito Algebraico) permitió dar respuesta al problema planteado.
5. Describe los elementos más importantes en cada estación que permitieron dar respuesta al problema.
 - Estación 1 (Reconozco las cantidades):
 - Estación 2 (Emparejo las representaciones):
 - Estación 3 (Encuentro a x):
 - Estación 4 (Justifico la igualdad):
6. Explica por qué consideras que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas para resolverlo.
7. Explica por qué usarías la estrategia para hallar a x presentada en la cuarta estación del circuito.

Problema 2. La profesora Tatiana realizó una encuesta sobre el sabor de pastel favorito de los estudiantes de grado octavo, en la cual se presentan tres opciones: naranja, chocolate y vainilla. Al conocer los resultados finales de las votaciones se obtuvieron 78 votos, ya que todos los estudiantes no votaron y se sabe que la torta de chocolate obtuvo cuatro veces la cantidad de votos

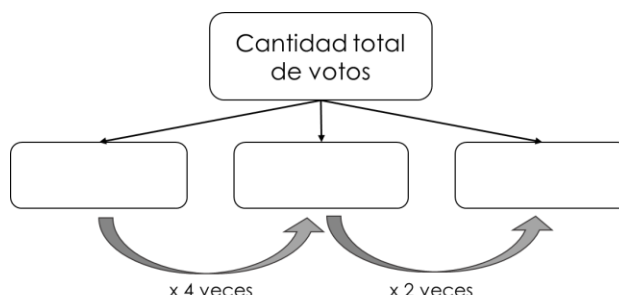
que la torta de naranja y la de vainilla obtuvo el doble de votos que la de chocolate. ¿Cuántos votos tuvo cada sabor de pastel? ¿Qué sabor de pastel fue el elegido?

Actividad 4

1. Escribe las cantidades involucradas en el problema.
2. Escribe cómo están relacionadas las cantidades del problema.

Actividad 5

3. Completa el siguiente diagrama de acuerdo con las relaciones que reconociste.



4. Paula propone a la profesora una actividad de relevo para completar dos diagramas que contienen las relaciones propuestas en el problema. Para la solución de este momento lee junto a tu equipo las indicaciones presentadas por Paula en la hoja de trabajo asociada al **relevo algebraico**.

Instrucciones del relevo algebraico:

1. Organiza los equipos con los cuales se trabajaste la anterior clase.
2. Cada equipo recordará el color asignado, el cual indicará sus tableros correspondientes.
3. Cada equipo tendrá en sus manos una baraja de 8 fichas que deberán pegar en los diagramas asignados según el dato que considere pertinente y el diagrama a completar (lenguaje algebraico o lenguaje natural).
4. Cada integrante elegirá una posición en la fila para pasar frente a los diagramas y competir con los demás equipos pegando una de las fichas en alguno de los diagramas, luego de terminar su turno regresará a la fila.
5. El primer equipo en completar los tableros, obtendrá 6 puntos

6. Al finalizar la actividad, el equipo que haya obtenido la mayor cantidad de puntos gana el juego y un premio sorpresa.
5. Escribe de qué cantidad de votos (naranja o vainilla) depende la cantidad de votos por el pastel de chocolate.

Actividad 6

6. Si $4x$ representa la cantidad de votos por el pastel de chocolate completa la siguiente tabla.

Lenguaje natural	Lenguaje simbólico
Cantidad de votos por el pastel de naranja	
Cantidad de votos por el pastel de chocolate	$4x$
Cantidad de votos por el pastel de vainilla	
Suma de votos entre los tres sabores de pastel	
Suma de votos entre los tres sabores de pastel es igual a 78	

7. Con base a la igualdad planteada en el punto anterior, completa la solución de la ecuación y el detalle de cada paso para resolverlo.

Solución de la ecuación	Detalle del paso a paso
$x + 4x + 2(4x) = 78$	
	Eliminación de paréntesis (Propiedad distributiva)
$(x + 4x + 8x) = 78$	
	Suma de los términos semejantes
$13x \cdot \frac{1}{13} = 78 \cdot \frac{1}{13}$	
	Multiplicación de los factores
$1x = 6$	
	Todo número multiplicado por 1 me da el mismo número y despeje de la incógnita x (Propiedad del neutro de la multiplicación)

8. Encuentra la cantidad de votos que tuvo cada sabor de pastel en la votación y cuál fue el elegido.

Problema 3. Para participar de la fiesta la profesora Tatiana propuso a los estudiantes tres temáticas para la elección de sus vestuarios: vestuario neón, vestuario playero o vestuario barbie. Se sabe que de los estudiantes de grado octavo asistieron 84 a la fiesta, la cantidad de estudiantes

con vestuario neón fueron dieciséis más que los que tenían vestuario de Barbie y los de vestuario playero fueron el triple que los de vestuario neón. ¿Cuántos estudiantes fueron vestidos en relación con cada temática? ¿Cuál temática tuvo mayor cantidad de estudiantes?

Actividad 7

1. Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina si son conocidas o desconocidas.
2. Escribe las relaciones entre las cantidades involucradas.
3. Si x representa la cantidad de estudiantes que fueron vestidos con temática de Barbie completa la siguiente tabla.

Lenguaje natural	Lenguaje simbólico
Cantidad de estudiantes con vestuario de Barbie	x
Cantidad de estudiantes con vestuario playero	
Cantidad de estudiantes con vestuario neón	
Suma de la cantidad de estudiantes vestidos con cada una de las temáticas	
Suma de la cantidad de estudiantes vestidos con cada una de las temáticas igual a 84	

4. Escribe y resuelve la ecuación asociada al problema.
5. Escribe la cantidad de estudiantes que fueron vestidos en relación con cada temática y qué temática tuvo mayor cantidad de estudiantes.

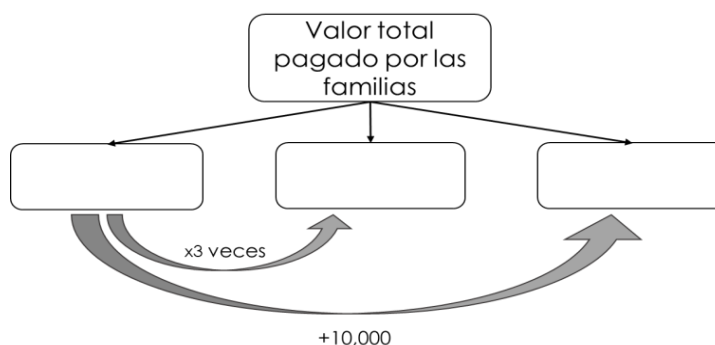
Situación 2. Parque de diversiones con las familias de grado octavo

Después de la celebración de cumpleaños del grado octavo, los padres de los estudiantes decidieron sorprender a sus hijos con una salida familiar al parque de diversiones River View Park, que se encuentra durante ese tiempo en la ciudad. Este parque cuenta con juegos como el 360, la montaña rusa, Fire Ball, carros chocones, rueda de la fortuna, Twister, Musik Express, entre otros atractivos; en el parque también se presenta la venta de juguetes y comida para todo el público. Las familias de los estudiantes se encuentran muy emocionadas e interesadas en conocer cuánto dinero gastarán en la salida.

Ayudemos a las familias de los estudiantes a conocer la cantidad de dinero que gastaron al ingresar al parque

Problema 1. Al comprar las entradas para ingresar al parque, el vendedor confundido recibe el dinero de las entradas al parque de las familias Suárez, Arévalo y Ortega y sabe que el valor total de las entradas fue \$120.000, el vendedor desconoce el dinero que pagó cada familia, pero se sabe que la familia Ortega pagó el triple de la familia Suárez y la familia Arévalo pagó \$10.000 más que la familia Suárez. ¿Cuánto dinero pagó cada familia por la entrada al parque?

1. Identifica y escribe con lo mencionado en el problema anterior cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas.
2. Escribe las relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas presentadas en el problema.
3. Escribe de qué familia (Arévalo o Suárez) depende la cantidad de dinero pagado por los Ortega y explica por qué.
4. Completa la siguiente estructura semántica teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas del problema.



5. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas

Lenguaje Cotidiano	Lenguaje Simbólico
Valor que pagó la familia Suárez	x
Valor que pagó la familia Arévalo	
Valor que pagó la familia Ortega	
La suma del valor que pagaron las 3 familias	
La suma del valor que pagaron las 3 familias igual a 120.000	

6. Escribe de acuerdo con el cuadro anterior la ecuación que permite resolver el problema y encuentra su solución.

7. Según la ecuación planteada y su solución, escribe qué significado tiene la x dentro del problema.
8. Escribe la cantidad de dinero que pagaron las familias Suárez, Arévalo y Ortega por la entrada al parque de diversiones.

A continuación, se presentan una serie de problemas, léelos y resuélvelos teniendo en cuenta los elementos usados en las sesiones anteriores. Recuerda hacer uso de la ecuación asociada a cada uno.

Problema 2. Los dueños del parque de diversiones desean conocer la cantidad precisa de personas que asistieron al parque y conforman las familias de grado 8-1, 8-2 y 8-3, porque lograron vender **320 tickets** y desean dar un premio al grado con más personas. La máquina registradora refleja que el grado 8-2 tiene el **doble** de personas que el grado 8-3 y el grado 8-3 tiene **16 personas más** que el grado 8-1. ¿Cuántas personas asistieron por cada grado? ¿Cuál fue el grado que obtuvo el premio?

Problema 3. Anita fue con sus padres al parque de diversiones, estaba muy emocionada por la cantidad de actividades que podía realizar así que pidió a su padre **\$68.000** para realizar algunas de las actividades del parque y llevar recuerdos a su casa. Al salir del parque Anita llevaba fotos realizadas por el dron del parque, estas costaban **\$12.000 más** que el combo de perro caliente y un peluche gigante que regalaría a su abuela, el cual costó **\$32.000 más** que el combo de perro caliente ¿Cuánto dinero pagó Anita por cada cosa que compró en el parque?

Problema 4. Lucas y su hermano necesitan saber cuántos tickets deben recolectar en cada juego para obtener un monopatín como premio del parque de diversiones, considerando que se necesitan **420 tickets** para ganarlo y que la cantidad de tickets a obtener en la montaña rusa son **la tercera parte** de los obtenidos en el carrusel y **la mitad** de los de la rueda de la fortuna. ¿Cuántos tickets necesitan Lucas y su hermano de cada juego para llevarse el premio?

Responde cada pregunta sobre el trabajo realizado durante las sesiones anteriores de la manera más detallada posible y con tus propias palabras.

1. Explica por qué consideras que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas para resolverlo.
2. Explica por qué usarías la ecuación como una herramienta para resolver problemas.
3. ¿Qué papel tuvo el juego para ti en el desarrollo de elementos o estrategias al momento de resolver problemas?
4. ¿Cuál fue el juego que más te gustó? Explica por qué fue importante en la resolución de problemas.
5. Según el trabajo realizado, escribe qué elementos o momentos son fundamentales al resolver problemas de este tipo.

3.3 Implementación de la Propuesta de Aula

En esta sección se presenta información en relación con población, la metodología de implementación, los registros y análisis de los datos basados en las respuestas brindadas por los estudiantes de grado séptimo de la Educación Básica Secundaria de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali.

3.3.1 Población

La propuesta de aula se desarrolla en la Institución Educativa Normal Superior de Cali de carácter público en el grado séptimo de la jornada de la tarde. El trabajo se realizó con los estudiantes de séptimo E, conformado por 25 estudiantes, de los cuales 9 fueron seleccionados para la implementación de la propuesta. Al final de la implementación sólo llegaron 8 estudiantes de los 5 niños y 4 niñas de entre 11 y 15 años, siendo quienes asisten regularmente a clase de matemáticas en los horarios establecidos, cabe resaltar que, aunque la selección del grado fue intencional, se seleccionaron a los estudiantes al azar, teniendo presente la disponibilidad y motivación por colaborar en el proyecto de investigación.

3.3.2 Marco contextual

La implementación de la propuesta de aula se desarrolla Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, ubicada en la Carrera 22 # 2-65 Oeste, del barrio Los Libertadores de Santiago de Cali de las comunas 3 y 19 de la ciudad. Tiene calendario A y jornada completa en el sector oficial, es de género mixto y una de las más grandes y reconocidas en la ciudad por ser líder en Colombia en el desarrollo de programas de formación docente, acorde a las necesidades y expectativas del país, que resignifiquen el papel de maestro.

3.3.3 Metodología de la implementación

La propuesta se implementa en la institución mencionada, en 6 sesiones de clase considerando que la institución tiene horas de clase equivalentes a 60 minutos, entre el 24 de abril y el 23 de mayo de 2024. Se realizaron dos plenarias el 7 y 23 de mayo de 2024, tras el desarrollo de las situaciones propuestas para generar discusiones donde los estudiantes presentaran sus estrategias al jugar y las respuestas a las preguntas propuestas en las hojas de trabajo que permitieron solucionar cada problema.

La situación 1 compuesta por 3 problemas, el problema 1 con seis preguntas y la intervención de un circuito como juego dentro de la propuesta que tuvo 4 estaciones para desarrollarse en equipos, se realizó en una sesión el miércoles 24 de abril de 2024; el problema 2 con siete preguntas y la intervención de relevos como un nuevo juego en la propuesta, se desarrolló el martes 30 de abril de 2024 y finalmente el problema 3 con cinco preguntas, se realizó el viernes 3 de mayo de 2024, cada sesión con una duración de 100 minutos respectivamente. El tiempo total de la implementación para la situación 1 fue de 340 minutos.

La situación 2 conformada por 4 problemas, donde el problema 1 consta de ocho preguntas y el problema 2 sin preguntas orientadoras fueron desarrollados durante la sesión del día martes 21

de mayo de 2024, en dos horas y treinta minutos de clase equivalentes a 150 minutos , los problemas 3 y 4 sin preguntas orientadoras al igual que las cuatro preguntas de reflexión en relación con la propuesta de aula en general sus objetivos, se desarrollaron el día viernes 23 de mayo de 2024, en una hora y treinta minutos de clase equivalentes a 90 minutos. El tiempo total de implementación para la situación 2 es de 240 minutos.

Como se mencionó antes, se realizó una sesión plenaria el viernes 23 de mayo de 2024, en una hora de clase equivalente a 60 min cuyo objetivo era reflexionar y generar discusión sobre el trabajo realizado desde la primera sesión de clase hasta ese momento, conocer la postura de los estudiantes sobre el papel del juego en la propuesta y la importancia de la ecuación u otras estrategias en la resolución de problemas de repartición desigual, donde el docente fue intermediario en cada intervención, convirtiéndose en una experiencia fructífera para los investigadores y los estudiantes.

3.4 Organización y Análisis de Resultados

En este apartado se sistematizan los registros escritos y audiovisuales transcritos de las respuestas presentadas por los estudiantes de grado 7º, de la Institución Educativa Normal Superior Farallones de Cali, en el desarrollo de la propuesta de aula compuesta por dos situaciones con tres y cuatro problemas respectivamente.

Los datos obtenidos se organizan de dos maneras, según los registros escritos y audiovisuales de los estudiantes, para conocer las tendencias en los razonamientos de los estudiantes durante la implementación de la propuesta de aula. Los registros escritos los datos se organizan en tablas que consideran los tipos de respuesta y las frecuencias absoluta y relativa, con una posterior descripción de lo que se pudo observar de estos resultados; y para los registros

audiovisuales se realizó una abstracción de los comentarios y las interacciones más significativos de los estudiantes para este trabajo de investigación.

En la realización de las tablas de los diferentes tipos de datos se utilizan algunas convenciones para la organización y comprensión de datos, presentadas a continuación:

Sn : Significa situación n , donde $n = 1, 2$.

Pbn : Significa problema n , donde $n = 1, 2, 3, 4$.

Gn : Significa grupo n , donde $n = 1, 2, 3, 4$.

En : Significa estudiante n , donde $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

PFn : Significa profesor n , donde $n = 1, 2$.

Fa : Significa frecuencia absoluta.

Fr : Significa frecuencia relativa.

3.4.1 Organización y análisis de resultados sobre la Situación 1

Problema 1. La profe Tatiana necesita conocer cuántos estudiantes hay en cada octavo, pues solo sabe que entre los tres octavos hay un total de 87 estudiantes, que en el grado 8-1 tiene cinco estudiantes más que el grado 8-2 y el grado 8-3 tiene dos estudiantes más que el grado 8-1. ¿Cuántos estudiantes hay en cada grupo?

Situación 1: Problema 1, Pregunta 1 (S1, Pb1, P1)

Tabla 9. Tipificación S1, Pb1, P1

Pregunta 1: Escribe las cantidades que menciona el problema.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que 87 es la cantidad total y la componen estudiantes de cada grado (cantidad de estudiantes de 8-1, 8-2 y 8-3), además asignan un valor numérico acertado sin un procedimiento que evidencie cómo se obtuvo. Ejemplo: 30, 25, 32. (E1, E2)	2	25%
2	Los estudiantes que indican las cantidades presentadas en el problema mediante relaciones (cantidad de estudiantes de 8-1 igual a 5 estudiantes más de 8-2, cantidad de estudiantes de 8-3 igual a 2 estudiantes más de 8-1 y cantidad total de estudiantes igual a 87), les asignan un valor numérico errado y realizan procedimientos que evidencian cómo se obtuvieron. Ejemplo: (29, 24, 31), (28,23,30) (E6, E7, E8)	3	37,5%
3	Estudiantes que indican todas las cantidades presentadas en el problema mediante relaciones en lenguaje natural y no asignan un valor numérico. (E3, E5)	2	25%
4	Estudiantes que indican que la cantidad total es 87 y mencionan la cantidad de estudiantes de cada grado (cantidad de estudiantes de 8-1, 8-2 y 8-3). (E4)	1	12,5%

En relación con la tabla anterior, se evidencia que 2 de los 8 estudiantes indicaron la expresión numérica (87) del problema como (cantidad total de estudiantes de grado octavo) e indicaron las cantidades que conforman ese total (cantidad de estudiantes de 8-1, 8-2 y 8-3), asignando valores numéricos acertados sin explicar el procedimiento realizado para obtenerlos. Por otro lado, 3 estudiantes indicaron todas las cantidades involucradas en el problema mediante las relaciones entre ellas (cantidad de estudiantes de 8-1 igual a 5 estudiantes más que 8-2, cantidad de estudiantes de 8-2, cantidad de estudiantes de 8-3 igual a 2 estudiantes más que 8-1 y cantidad total de estudiantes igual a 87) y realizaron operaciones que les permitieran establecer un valor numérico para cada una.

Además, 2 de los 8 estudiantes indicaron todas las cantidades involucradas en el problema mediante las relaciones entre ellas en lenguaje natural (el grado 8-1 tiene cinco estudiantes más que el grado 8-2 y el grado 8-3 tiene dos estudiantes más que el grado 8-1) y no establecieron un

valor numérico para cada una de ellas. Finalmente, solo un estudiante indicó el valor numérico del total (87) y mencionó las cantidades que lo conforman (cantidad de estudiantes de 8-1, 8-2 y 8-3).

Con base a estos resultados se reconoce que todos los estudiantes identifican las cantidades involucradas en el problema, tanto las conocidas (cantidad total de estudiantes: 87), como las desconocidas, lo cual es un proceso necesario para la solución de este tipo de problemas. Además, es importante resaltar que la gran mayoría de estudiantes (62,5%) realizan de primera instancia operaciones para asignar a estas cantidades desconocidas un valor numérico, lo que manifiesta la necesidad de determinancia, que es propia del pensamiento aritmético, ya que este pensamiento manipula cantidades conocidas o determinadas (p. 41) y es lo que los estudiantes buscan al intentar asignar valores numéricos a aquellas cantidades indeterminadas.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 2 (S1, Pb1, P2)

Tabla 10. Tipificación S1, Pb1, P2

Pregunta 2: Indica qué estrategias utilizarías para conocer cuántos estudiantes hay en cada grupo.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que presentan su estrategia a través de la división de la cantidad total (87) entre la cantidad de grados (3) y no especifican a qué cantidad corresponde el cociente (29), ni generan otras cantidades. (E1, E2)	2	25%
2	Estudiantes que presentan su estrategia mediante la división de la cantidad total (87) entre grados (3) y generan otras cantidades a partir del cociente (29) sin considerar todas las relaciones del problema al asignar valores errados. Ejemplo: (34, 29, 36), (24, 29, 31). (E3, E6, E8)	3	37,5%
3	Estudiantes que presentan su estrategia a través de la división de la cantidad total (87) entre la cantidad de grados (3) y generan otras cantidades a partir del cociente (29) teniendo en cuenta todas las relaciones del problema al asignar valores correctos. Ejemplo: (30, 25, 32). (E4)	1	12,5%
4	Los estudiantes que presentan su estrategia transformando la cantidad inicial (87), en una nueva (75) y la dividen entre grados (3), generando otras cantidades a partir del cociente (25), al repartir el excedente (12 como resultado de 5 más 7) entre los estudiantes de cada grado (estudiantes de los grados 8-1, 8-2, 8-3) de forma acertada, teniendo las relaciones del problema. (E7)	1	12,5%
5	Estudiantes que no responden a la pregunta. (E5)	1	12,5%

Según la tabla anterior, todos los estudiantes presentaron su estrategia para resolver el problema, excepto E5, mediante la división, usando de diferentes maneras el cociente obtenido. El

25% de los estudiantes dividió 87 entre 3, lo cual les dio como cociente 29, pero no especifican a qué cantidad corresponde ese 29 ni generaron otras a partir de esta. El 37,5% de los estudiantes dividió 87 entre 3 y generaron otras cantidades a partir del cociente sin tener en cuenta la estructura del problema, por lo que asignaron a cada grado la cantidad de estudiantes incorrecta. Además, un estudiante dividió 87 entre 3 y generó la cantidad de estudiantes de cada grado teniendo en cuenta las relaciones entre ellas y asignó los valores numéricos correctos a cada una.

Por otro lado, un estudiante transformó la cantidad total de estudiantes (87) en una nueva (75) al restarle 12, que es el número de estudiantes de más que tienen los grados 8-1 y 8-3 del grado 8-2, que es la cantidad generadora. Divide 75 entre 3 y a partir del cociente (25) genera las otras cantidades de forma acertada. Por último, un estudiante no respondió la pregunta.

A partir de estos resultados se pueden reconocer dos tipos de razonamientos de los que establecen Bednarz y Janvier para las maneras de proceder de los estudiantes en la solución de este tipo de problemas. Por un lado, la gran mayoría de estudiantes “repartieron y generaron”, donde dividieron la cantidad total (87) entre el número de partes que componen el todo (3) y a partir de este cociente (29) generaron las otras cantidades (p. 45), como en el caso de E8, el cual divide y al cociente lo opera para generar otras dos cantidades de acuerdo a las relaciones entre ellas (8-1 tiene 5 más que 8-2 y 8-3 tiene 2 más que 8-1), considerando, según estas relaciones, que el cociente de la división (29) corresponde a la cantidad de estudiantes del grado 8-1, sin embargo, cuando suma las cantidades generadas, esta suma no corresponde con la cantidad total, que es 87 (ver figura 6).

$$\begin{array}{r}
 87 \overline{) 3} \\
 \underline{27} \\
 29 \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 29 \\
 - 5 \\
 \hline
 24
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 29 \\
 + 24 \\
 \hline
 53 \\
 \hline
 84
 \end{array}$$

Figura 6. S1, Pb1, P2, E8

Por otro lado, solo un estudiante, E7, tuvo en cuenta la estructura del problema, pues operó sobre las relaciones del mismo y transformó el problema inicial en uno nuevo que le permite hacer cálculos, ya que le restó 12 a 87, que se puede entender como las cantidades de más que tienen los grupos 8-1 y 8-3 al grupo de la cantidad generadora que es 8-2 (8-1 tiene 5 más que 8-2 y 8-3 tiene 7 más que 8-2, $5+7=12$) y dividió el resultado, 75, entre 3, obteniendo 25, que corresponde a la cantidad de estudiantes del grado 8-2 y generó las otras dos cantidades de acuerdo a estas relaciones, asignando al grado 8-1, 30 estudiantes, al grado 8-3, 32, y finalmente comprueba que la suma de estas cantidades corresponde a la cantidad total (ver figura 7).

$$\begin{array}{r} 29 \overline{) 87} \\ \underline{58} \\ 29 \\ 0 \end{array}$$

$$87 - 12 = 75$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 75} \\ \underline{50} \\ 25 \\ 0 \end{array}$$

$$8-2=25 \quad 8-1=30$$

$$8-3=32$$

$$\begin{array}{r} 25 + 30 \\ 55 + 32 \\ \hline 87 \end{array}$$

Figura 7. S1, Pb1, P2, E7

Situación 1: Problema 1, Pregunta 3 (S1, Pb1, P3)

La pregunta 3 abarca el juego llamado “Circuito algebraico” como estrategia para resolver el problema planteado. Este circuito lo forman cuatro estaciones con minijuegos que responden a diferentes fases para resolver un problema de repartición desigual mediante ecuaciones de primer grado. El ganador del juego fue el grupo que atravesó primero el circuito, en este caso el grupo 2. Las acciones y comentarios más significativos realizados por los estudiantes en cada estación se describen a continuación.

Estación 1

En la primera estación “Reconozco las cantidades y sus relaciones” cada equipo recibe una baraja de siete cartas parecidas a las del “Uno” que contienen las diferentes formas de componer

las cantidades involucradas en el problema de acuerdo con las relaciones entre ellas (cantidad total de estudiantes, cantidad de estudiantes del grado 8-1, cantidad de estudiantes del grado 8-2, cantidad de estudiantes del grado 8-3). Cada equipo en su turno debía colocar una carta que correspondiera al color o a la cantidad que estaba representada en la carta que estaba sobre la mesa, teniendo en cuenta la inversibilidad de las operaciones. A continuación, se presenta la descripción de lo que hizo cada grupo en esta estación.

G1 (E1, E2): Los estudiantes reiteran constantemente las relaciones entre cantidades presentadas en el problema, además logran reconocer la inversibilidad de las operaciones al lanzar una nueva tarjeta para dar cuenta de sus decisiones dentro del juego. Al buscar una tarjeta que sea equivalente a *cantidad de estudiantes de 8-1 menos 5*, **E1**, lanza la tarjeta (*cantidad de estudiantes de 8-2*) expresando “porque la cantidad de estudiantes de 8-1 como decía el problema...” y apoyado por **E2** quien asegura que “si se le resta 5 es 8-2 y ya” de tal forma que **E1** asegura que “tiene 5 más que 8-2”.

G2 (E3, E4): Los estudiantes logran reconocer la estructura del problema, identificando relaciones mediante la dinámica de juego de forma acertada al lanzar las tarjetas y responder la cantidad presente en cada una. En la búsqueda de una tarjeta que sea equivalente a *cantidad de estudiantes de 8-1 más 2*, se realiza una comparación para saber si esta es igual a *cantidad de estudiantes de 8-2 más 5*, a lo que **E3** afirma que “no” y **E4** menciona que “la primera es igual a 8-3 y la segunda a 8-1”.

G3 (E5, E6): Los estudiantes abordan la estructura del problema al identificar las partes del problema que conforman el total de estudiantes de los grados octavos mediante la dinámica del juego, sin embargo, las relaciones entre partes no son evidentes en primera instancia. En la búsqueda de una tarjeta equivalente a *la cantidad de estudiantes de 8-1 más los de 8-2 más los de*

8-3, **E5** expresa “87 estudiantes”, seguido de una respuesta a la pregunta realizada por **PF2** “¿y 87 es?” que complementa su noción sobre la estructura del problema “El total de los estudiantes de todos, de los 3 grupos”, a pesar de esto, **E5** y **E6** habían lanzado una tarjeta que representa la cantidad de estudiantes de grado 8-2 (*cantidad de estudiantes de grado 8-1 menos 5*).

G4 (**E7**, **E8**): Los estudiantes reconocen las relaciones entre las cantidades del problema y justifican su inversibilidad de manera acertada, por otro lado, asocian el lanzamiento de las tarjetas y su representación con el tipo de cantidad presente en la tarjeta y no con su relación. En la búsqueda de una tarjeta que sea equivalente a *la cantidad total de estudiantes de 8-1 más 2*, **E8** justifica que “porque acá dice cantidad de estudiantes de 8-1 más 2 daría 8-3, menos 2 da 8-1” por esta razón es posible lanzar (*cantidad de estudiantes de 8-3 menos 2*) enunciando que tienen una cantidad en común, pero sin reconocer que ambas tarjetas no representan la misma cantidad.

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, se infiere que todos los grupos logran alcanzar el propósito de la estación, que es reconocer las expresiones equivalentes presentadas a continuación:

- **Cantidad de estudiantes de 8-1** = Cantidad de estudiantes 8-2 + 5 = Cantidad de estudiantes 8-3 - 2 = Cantidad total de estudiantes - Cantidad de estudiantes 8-2 - Cantidad de estudiantes 8-3 = Cantidad total de estudiantes - (Cantidad de estudiantes 8-2 + Cantidad de estudiantes 8-3).
- **Cantidad de estudiantes de 8-2** = Cantidad de estudiantes de 8-1 - 5 = Cantidad total de estudiantes - Cantidad de estudiantes 8-1 - Cantidad de estudiantes 8-3 = Cantidad total de estudiantes - (Cantidad de estudiantes 8-1 + Cantidad de estudiantes 8-3).
- **Cantidad de estudiantes de 8-3** = Cantidad de estudiantes 8-1 + 2 = Cantidad total de estudiantes - Cantidad de estudiantes 8-1 - Cantidad de estudiantes 8-2 = Cantidad total de estudiantes - (Cantidad de estudiantes 8-1 + Cantidad de estudiantes 8-2).
- **Cantidad total de estudiantes** = Cantidad de estudiantes 8-1 + Cantidad de estudiantes 8-2 + Cantidad de estudiantes 8-3 = 87.

Al considerar los comentarios realizados por cada grupo se evidencia que hubo niveles de comprensión distintos en relación con la composición de las diferentes cantidades del problema y el reconocimiento de la inversibilidad de las operaciones en ellas, lo que permite comprender el desarrollo del juego.

A pesar de que **G1** es el equipo con el mayor nivel de comprensión en cuanto a la equivalencia de todas las cantidades, ya que justificaban la validez del lanzamiento propio y de sus compañeros, se convierten en el **último equipo** en quedar sin cartas y pasar a la siguiente estación. Por otro lado, **G2** logra reconocer la estructura del problema realizando constantes comparaciones entre las relaciones presentadas en el problema y la cantidad involucrada en la tarjeta, lo que permite que la comprensión de todas las cantidades se dé mediante las discusiones y toma de decisiones para el lanzamiento, lo que los convierte en el **segundo equipo** en pasar a la siguiente estación.

Así mismo, **G3** es el equipo con mayor dificultad para establecer las equivalencias presentadas dentro del juego, a pesar de reconocer las relaciones del problema, ya que las mencionan constantemente, asociando tarjetas que mencionan una cantidad en común dentro del problema sin ser equivalentes en un inicio, lo que los convierte en el **tercer equipo** en pasar a la siguiente estación. Finalmente, **G4** conformado por **E7** y **E8**, es el equipo que logra reconocer las relaciones entre las cantidades del problema y justifican la inversibilidad de las operaciones de forma acertada, a pesar de que en un inicio consideran como equivalentes tarjetas que mencionan una cantidad en común dentro del problema, llegan a establecer la mayor cantidad de tarjetas equivalentes, lo que los convierte en el **primer equipo** en pasar a la siguiente estación y ganar el comodín.

En general, teniendo en cuenta lo anterior se puede afirmar que la primera estación posibilita el establecimiento de equivalencias a partir de la inversibilidad de las operaciones, ya que todos los grupos alcanzaron el propósito de la estación como primer paso del circuito algebraico, adquiriendo herramientas en relación con la comprensión del problema como el reconocimiento de cantidades y relaciones entre cantidades. Dicho lo anterior, se concluye que la primera estación se convierte en el primer paso para poner un problema en ecuación y posteriormente dar solución a este, tal como lo menciona Puig el primer paso para poner un problema en ecuación es comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas o datos y las cantidades desconocidas o incógnitas, así como las relaciones entre ellas. Además, la primera estación cumple con algunas de las características del juego en el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que, permite aclarar conceptos o destrezas del álgebra que serían aburridas o repetitivas en otras condiciones, incorporando estructuras de juegos ya conocidos como el uno que, al tener una finalidad específica, se convierten en atractivos y motivadores.

Estación 2

En la estación 2 del circuito “Emparejo las representaciones” cada equipo debía unir cada expresión en lenguaje natural asociada a las cantidades del problema, la suma entre ellas y su igualdad, con su representación en lenguaje algebraico, teniendo en cuenta las relaciones presentadas en el problema. A continuación, se presenta la descripción de lo realizado por cada grupo en esta estación.

G1 (E1, E2): Los estudiantes cuestionan el significado que tiene la x dentro de cada expresión en lenguaje simbólico de lo cual se genera una discusión con el profesor. **E1** expresa “¿Y esa x qué es?”, a lo que **PF2** responde “pues esa es la idea, que ustedes logren identificar quién es x . Aquí yo tengo x más 5, ¿ustedes quién creerían que es? ¿Cantidad de estudiantes de

grado 8-1, 8-2 u 8-3?” lo que lleva a realizar una nueva intervención por parte de **E1** justificando su respuesta “Ahhh bro, es 8-1, porque tiene 5 más que el 8-2”.

G2 (E3, E4): Los estudiantes no encuentran cómo relacionar ambas columnas, tratando de asignar valores numéricos a cada expresión en lenguaje natural, de forma que recurren a la ayuda del profesor. **PF2** interviene preguntando “¿La cantidad de estudiantes de 8-1 es igual a qué?” a lo que **E4** responde “A treinta y...” donde interviene **PF2** negando y cuestionando nuevamente “No, no, no la cantidad no, ¿cómo puedo representarlo según lo que decía el problema?”, obteniendo diferentes respuestas de ambos estudiantes, **E3** indica “Ehh 82 más 5” y **E4** “81, 81” luego interviene de nuevo **E3** al mencionar “No, no, no 8-2 más 5” lo que les permite asociar de inmediato con $x + 5$.

G3 (E5, E6): Los estudiantes asignan a la suma de los tres grados un valor numérico según las relaciones presentes en el problema, dejando de lado el objetivo de la estación asociado a la representación simbólica de cada expresión. **E5** justifica que la suma de la cantidad de estudiantes de los 3 grados se empareja con 87 al mencionar que “¡Sí! es que da. Da porque la cantidad de la suma de los 3 estudiantes es 87” y **E6** afirma que “El, el, el, el resultado total de los 3 grados de 87” a lo que **PF2** asegura y cuestiona “Es 87. Ajá es 87, en eso estamos de acuerdo, pero ¿cuál representa mejor esta?” lo que genera una discusión en el **G3**, en relación con el propósito de la estación.

G4 (E7, E8): Los estudiantes logran identificar la representación simbólica de cada expresión en lenguaje natural usando la expresión “números extras de los salones” para referirse a las relaciones que se establecen en el problema. Al responder al porqué la suma de la cantidad de los estudiantes de los 3 grados igual a 87 fue la expresión que seleccionaron, **E7** menciona

“Porque estos son los números extras de los salones (señala el 5 y el 7) por ejemplo, este es 8-2 (señala x), este es 8-1 (señala $x + 5$) y este 8-3 (señala $x + 7$)”.

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, se infiere que todos los grupos logran alcanzar el propósito de la estación que es relacionar expresiones en lenguaje natural con representaciones en lenguaje algebraico con datos del problema presentadas a continuación:

Tabla 11. De relaciones entre expresiones en lenguaje natural y simbólico

Lenguaje natural	Lenguaje simbólico
Cantidad de estudiantes de 8-1	$(x + 5)$
Cantidad de estudiantes de 8-2	x
Cantidad de estudiantes de 8-3	$(x + 5) + 2$
Cantidad total de estudiantes	87
Suma de la cantidad de estudiantes de los 3 grados	$x + (x + 5) + (x + 7)$
Suma de la cantidad de estudiantes de los 3 grados igual 87	$x + (x + 5) + (x + 7) = 87$

Al considerar los comentarios de todos los grupos, se evidencia que hubo gran comprensión al asociar expresiones en lenguaje natural y lenguaje simbólico en poco tiempo, ya que, en el proceso, todos mencionan las relaciones entre cantidades presentadas en el problema para justificar su proceder, lo que permite comprender el desarrollo del juego.

El desarrollo de **G1** dentro del juego inicia al cuestionarse quién es x en cada una de las expresiones en lenguaje algebraico, lo que lleva a identificar la primera relación del problema en $x + 5$, lo que permite una comprensión inmediata y asocian x con la cantidad de estudiantes de 8-2, en adelante la ejecución de cada relación es más rápida en reconocer que la anterior, lo que los convierte en el **tercer equipo** en pasar a la siguiente estación a pesar de haber llegado en último lugar. Por otra parte, **G2** a pesar de haber obtenido el comodín (la cantidad de estudiantes del grado 8-2 se representa con la x), lo pasan por alto, esperando encontrar valores numéricos para

asociar a cada expresión en lenguaje natural, luego de la discusión con **PF** se encaminan al propósito de la estación recurriendo a las relaciones del problema, lo que permite que se conviertan en el **primer equipo** en pasar a la siguiente estación luego de haber llegado en segundo lugar.

Ahora bien, **G3**, aunque relaciona gran parte de las expresiones en los dos lenguajes, al enfrentarse a la suma de estudiantes de 3 grados, lo asocian con 87, porque la cantidad total de estudiantes sí era 87, pero toma tiempo reconocer el propósito de la estación al buscar la mejor expresión simbólica para el enunciado, lo que los convierte en el último equipo en pasar a la siguiente estación. Asimismo, se tiene a **G4** siendo el equipo que logró asociar cada cantidad de manera directa en las expresiones, debido a la comprensión de las relaciones al expresar “cada número que acompaña las equis representa los estudiantes extra”, de tal forma que reconocen de forma inmediata las cantidades simbólicamente, luego establecen relaciones entre expresiones, lo que los convierte en el **segundo equipo** en pasar a la siguiente estación.

Se concluye que la segunda estación posibilita el reconocimiento y establecimiento de expresiones algebraicas, para identificar la ecuación asociada al problema. Ya que todos los grupos alcanzaron el propósito de la estación como segundo paso del circuito algebraico, adquiriendo herramientas relacionadas con el paso previo para establecer una estrategia en la solución del problema representando cantidades. Entre estas herramientas se reconoce la traducción de las cantidades y las relaciones entre cantidades al lenguaje algebraico tal como lo menciona Puig hace parte del análisis del enunciado, que inicia con el reconocimiento de la cantidad generadora al asociarla con una letra, luego el reconocimiento de las demás cantidades a partir de la anterior haciendo uso de las relaciones que se han encontrado entre las cantidades y finalmente establecer la ecuación asociada al problema con ayuda estableciendo una igualdad con dos representaciones

simbólicamente distintas. Conforme a ello, la estación 2 funciona en el mismo sentido de un instrumento heurístico que facilita el uso de la regla para resolver el problema específicamente, mediante el análisis del enunciado al determinar las cantidades y las relaciones entre ellas, con el objetivo de establecer una traducción al lenguaje algebraico.

Estación 3

En la estación 3 “Encuentro a x ” se le presenta a los estudiantes la ecuación asociada al problema $x + (x + 5) + (x + 7) = 87$ que fue previamente simbolizada en la estación 2. Cada equipo debía, bajo cualquier estrategia, establecer el valor para x que satisficiera la igualdad. A continuación, se presenta la descripción de lo realizado por cada grupo en esta estación.

G1 (E1, E2): Los estudiantes generan una estrategia para hallar el valor de x pero inicialmente no consideran asignar el mismo valor numérico a todas las x

en la ecuación $x + (x + 5) + (x + 7) = 87$ generando una discusión en compañía del profesor. **PF2** pregunta “¿Este 25 qué está reemplazando?” a lo que **E1** responde “Es x ”, y **PF2** afirma “Es esta x (Señala $x + 5$)” a lo que **E1** confirma “Ajá”, nuevamente **PF2** cuestiona “¿y esta? (señala x)” y **E1** replica “ x también”, lo que lleva a **PF2** a preguntar “¿y esta dónde está? Porque acá tengo 25 más 5 pero esta x dónde la estoy sumando” y **E1** expresa “pero entonces ¿cómo haría ahí porque no sé cuál es x ?”, momento en el que **PF2** considera la primera premisa mencionada por **E1** “Por eso, pero ya me dijiste que x es 25, entonces ¿qué debo hacer para reemplazarla aquí y que me de igual a 87?”.

G2 (E3, E4): Los estudiantes generan una estrategia para hallar el valor de x teniendo en cuenta la igualdad presentada $x + (x + 5) + (x + 7) = 87$. **E4** indica “Vamos a sumar primero los tres 21. Entonces 21 más 21 más 21, serían...” **E3** responde “63”, luego **E4** interviene “Más 5, ¿63 más 5?” “obteniendo respuesta de **E3** “68” a lo que **E4** replica “Más 7” y finalmente **E3** indica

“75” estrategia que no es satisfactoria para **E4** ya que, 75 no coincide con 87 por lo que expresa “Bueno, pero ya no es por ahí”.

G3 (E5, E6): Los estudiantes generan una estrategia para hallar el valor de x por medio del tanteo, el ensayo y el error comprobando que se cumpla la igualdad. **E6** propone “12, 17 darían 17 aquí y aquí 2, 19”, por otro lado, **E5** menciona “entonces serían 25 más 5, 30”, a lo que **PF1** pregunta “¿Y por qué con 25? ¿ese es el número que se te ocurre?” y **E5** responde “sí”, luego, **PF1** asegura “pues bueno, intenta a ver”.

G4 (E7, E8): Los estudiantes generan una estrategia para hallar el valor de x pero pasan por alto la igualdad establecida sin verificar si cumple esa condición. **E8** menciona “Profesora, creo que ya. 24 es esa x ¿no?, más 5, 29” y **PF1** responde “Pero es que aquí tienes otro 24 porque tienes una x más otra x que sería otro 24 ¿si lo ves?, a lo que **E8** replica “Sería 24 más 5” y **PF1** afirma y cuestiona “O sea, que esto te da 29, pero esto (Señala $x + 7$). Ahora...”, a lo que **E8** contesta “24 más 7 ¿no?” y **PF1** cuestiona “¿Y qué pasó con el 24 de acá?”, **E8** responde “también se suma”, a lo que **PF1** pregunta nuevamente “¿Y si lo sumas te da 87?” y **E8** afirma “Ajá”, **PF1** cierra la interacción al cuestionar “¿sí? ¿segura? mira si esto te da 87”.

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, se infiere que todos los grupos logran alcanzar el propósito de la estación que es hallar el valor de x para que la igualdad presentada se cumpla $x + (x + 5) + (x + 7) = 87$, en general todos los grupos hacen uso de estrategias o razonamientos en relación con el tanteo, el ensayo y el error para asignar un valor numérico a la incógnita.

Entre las diferentes estrategias propuestas, se destaca que **G1** inicialmente no consideran asignar el mismo valor numérico a todas las x en la ecuación, luego reflexionan sobre el significado que tuvo la incógnita en la estación 2 en relación con la cantidad de estudiantes del

grado 8-3, evidenciando que se refiere a la misma cantidad, lo que los convierte en el **segundo equipo** en pasar a la siguiente estación. También aparece **G2** que como equipo siempre consideraron la igualdad, lo que les permitió descartar la cantidad hipotética luego de cada prueba, eso les permitió convertirse en el **primer equipo** en pasar a la siguiente estación y obtener el comodín.

Además, **G3** por un lado hace uso del tanteo para establecer que la igualdad se cumpla, lo que lo convierte en el **cuarto equipo** en pasar a la siguiente estación y finalmente **G4** también hace uso del tanteo, pero a la par no comprueba que la igualdad se cumpla, afirmando que la primera cantidad asignada a x es la acertada, hasta caer en cuenta y seguirlo intentando, lo que los posiciona como el **tercer equipo** en pasar a la siguiente estación.

Finalmente, con la información anterior se puede concluir que todos los grupos logran alcanzar el propósito de la estación que es hallar el valor de x y esto se da por medio de la estrategia que predomina en cada grupo, en particular sobresalen el tanteo o el ensayo y el error como medios inmediatos para obtener la cantidad que se desconoce, donde se evidencia un acercamiento a la idea de ecuación en relación con el concepto de igualdad. Lo anterior, muestra que otro de los objetivos de la estación es dar cuenta que una vez puesto el problema en ecuación no es suficiente, vienen procesos posteriores como el de resolver la ecuación y comprobar que el resultado es acertado en relación con las condiciones del problema, a pesar de que el propósito del juego hasta este punto fue reconocer y plantear la ecuación, este es el momento en el que los estudiantes logran resolver la ecuación haciendo uso de razonamientos aritméticos, ya que hacen parte de sus conocimientos previos pero pesar de ello se contempla que esta forma no implica la existencia de una estrategia formal y algebraica para hallar la incógnita, evidenciando una gama de posibilidades y modos de resolución, destacando la importancia de los problemas frontera dentro

de esta propuesta y siendo un punto clave en donde nace la necesidad de dar un salto hacia soluciones cercanas con el pensamiento algebraico.

Estación 4

En la cuarta y última estación del circuito “Justifico la igualdad”, cada equipo debía asociar a cada paso de la simplificación de la ecuación, su descripción correspondiente hasta hallar su solución. Finalmente, debían verificar si el valor de x era el mismo encontrado por el equipo en la estación anterior y establecer la cantidad de estudiantes de cada grupo. A continuación, se presenta la descripción de lo realizado por cada grupo en esta estación.

G1 (E1, E2): Los estudiantes dan sentido a expresiones y conceptos desconocidos como *suma de términos semejantes*, logran establecer esta relación sólo con números constantes dentro de la ecuación. **PF2** realiza una pregunta al **G1** “¿Qué entiendes por suma de términos semejantes?” a lo cual **E2** responde “Que algo se parezca” y **E1** solo reacciona con un “Ahhh”, lo que lleva a que **PF2** pregunte de nuevo “¿ves dónde se suman cosas iguales? Mira desde el paso 1, paso 2...”, a lo que **E1** indica que “es esta (señala $(x + x + x) + (5 + 7) = 87$), porque está sumando 5 más 7”, luego **PF2** afirma y explica por qué no solo 5 y 7, “sí, y las equis se están sumando entre ellas. Entonces estos son semejantes con estos (5 y 7), y estos con estos (equis con equis)”.

G2 (E3, E4): Los estudiantes reconocen y justifican por qué el paso 1 se relaciona con la ecuación del problema. En respuesta a cuál es la ecuación asociada al problema **E4** indica que “es esta (Señala $x + (x + 5) + (x + 7) = 87$) porque x era 8-3, $x + 5$ era 8-2 y $x + 7$ era 8-3”, luego **E3** complementa mencionando que “y el 87 la suma total”.

G3 (E5, E6): Los estudiantes reconocen fácilmente algunas descripciones del paso a paso, familiarizados con elementos y conceptos clave, y comprenden cómo se relacionan términos

independientes en la solución de la ecuación, pero lo asocian con su operatividad en cuanto a la suma de estos. **E6** en respuesta a la diferencia entre el paso 1 ($x + (x + 5) + (x + 7) = 87$) y el paso 2 ($x + x + 5 + x + 7 = 87$), menciona “de que se quitaron los paréntesis”. Luego, **E5** en respuesta a la diferencia entre el paso 2 ($x + x + 5 + x + 7 = 87$) y el paso 3 ($x + x + x + 5 + 7 = 87$) afirma que “se suman términos semejantes” lo que **PF1** cuestiona “¿Pero ya los sumé o solo los acomodé?”.

G4 (E7, E8): Los estudiantes reconocen fácilmente algunas descripciones del paso a paso, ya que conocen elementos y conceptos clave en la solución de la ecuación. **E7** y **E8** en respuesta a la diferencia entre el paso 1 ($x + (x + 5) + (x + 7) = 87$) y el paso 2 ($x + x + 5 + x + 7 = 87$) afirman al mismo tiempo que “se quitaron los paréntesis” lo cual permite seleccionar la ficha que mejor se relaciona a ese momento de la solución.

A partir de estos comentarios se observa que los estudiantes en la cuarta y última estación tuvieron un acercamiento importante a la manipulación de la ecuación de primer grado asociada al problema que ya habían identificado e intentado solucionar en la estación anterior, pero esta vez desde una perspectiva algebraica, pues al asociar cada descripción de los pasos a cada línea, se generaron discusiones entre los grupos que dan cuenta de una aproximación a la manipulación de los objetos desconocidos, en este caso la incógnita “ x ”. Por ejemplo, cuando E1 indica que la suma de términos semejantes se asocia con el paso 3 ($x + x + x) + (5 + 7) = 87$, E1 reconoce que la naturaleza de la x es diferente a la naturaleza del 5 y el 7, por lo tanto, deben sumarse de forma separada.

Por otro lado, en esta estación los estudiantes reconocen la ecuación como una igualdad entre dos expresiones, por ejemplo cuando **G2** relaciona la descripción “ecuación asociada al problema” con el paso 1 ($x + (x + 5) + (x + 7) = 87$) porque “ x era 8-3, $x + 5$ era 8-2 y $x + 7$

era 8-3 y el 87 la suma total”, lo cual manifiesta una confusión en el significado de la incógnita y por lo tanto en la representación de cada cantidad del problema, pero deja ver que los estudiantes tienen en cuenta que al sumar las expresiones correspondientes al número de estudiantes de cada grado, esto debe ser igual a 87.

En conclusión, se evidencia que la última estación del circuito permitió el acercamiento a algunos elementos importantes para la simplificación de la ecuación, como la asociación de términos semejantes o la noción de igualdad, que aunque esta estación solo se limitó al relacionamiento de cada paso con su descripción y no al ejercicio de escritura propio de los estudiantes, facilitó la identificación de una nueva estrategia para encontrar el valor de la incógnita, como mencionó E4 en la plenaria de esta situación: *“La intención del paso a paso era mostrar que hay diferentes formas de hacer la ecuación”* (18:05) o cuando E1 expresa que *“es importante el paso a paso porque así logramos encontrar a x mejor, con más seguridad de que si es el resultado que es, más no tener que buscar números a la suerte”*(18:40), lo que está directamente relacionado con la manera en que los estudiantes intentaron encontrar el valor de la incógnita en la estación 3, buscando números al azar que satisfagan la igualdad, pero esta estación les ofreció un método efectivo para poder encontrar el valor de la x y, por lo tanto, hallar las otras cantidades y así resolver el problema.

Teniendo en cuenta los elementos identificados en cada una de las estaciones del circuito algebraico se concluye que el juego permitió el acercamiento a aspectos importantes del pensamiento algebraico que facilitan la resolución de problemas de repartición desigual por medio de las ecuaciones de primer grado, como lo son el reconocimiento de las relaciones del problema y la inversibilidad de las mismas (estación 1), el reconocimiento de la cantidad generadora como la incógnita para así representar las cantidades del problema y finalmente plantear la ecuación

asociada al problema (estación 2), el reconocimiento de la ecuación como una igualdad que debe satisfacer el valor numérico de la incógnita (estación 3) y la reducción de la ecuación como una potencial estrategia para hallarlo (estación 4).

Es importante destacar que el acercamiento a los elementos descritos anteriormente se dio a través del reconocimiento simultáneo de la estructura, la ejecución de un plan de acción y su comprobación tanto del problema como del juego, lo que corresponde en la resolución del problema a los procesos de comprensión (estación 1), experimentación (estación 2) y verificación (estaciones 3 y 4) descritos en la matriz de análisis y con relación al juego, cabe resaltar que los tres procesos hacen presencia en cada una de las estaciones del mismo.

Además se reconoce en la ejecución del juego algunos aspectos descritos por Alsina (2001) sobre el juego en la educación matemática como el aprendizaje a partir del propio error y el error de los demás, la socialización y el deseo de jugar a partir de las propias capacidades (p. 53), aspectos que se evidenciaron en los diferentes comentarios de los estudiantes al desarrollar cada estación al corregirse entre ellos y manifestar sus opiniones sin temer al error, lo que confirma que el juego puede movilizar el acercamiento a elementos del pensamiento algebraico a través de la diversión.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 4 (S1, Pb1, P4)

Tabla 12. Tipificación S1, Pb1, P4

Pregunta 4: Explica si la estrategia propuesta por la profesora Tatiana (Circuito Algebraico) permitió dar respuesta al problema planteado.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que manifiestan que la estrategia propuesta permitió dar respuesta al problema gracias a los elementos que comprende el juego (estructura, comodines, emociones, interacciones y desarrollo de la creatividad). (E1, E2, E5, E7)	4	50%
2	Estudiantes que manifiestan que la estrategia propuesta permitió responder al problema porque es una nueva estrategia para resolverlo. (E3, E4, E6, E8)	4	50%

Según los resultados de la pregunta 4, problema 1, situación 1, con relación al juego como estrategia para resolverlo, el 50 % de los estudiantes manifestaron su eficiencia en cuanto a elementos que forman parte del carácter lúdico del juego, como su estructura y reglamentación, las emociones que atravesaron en su desarrollo y la forma creativa de hacer matemáticas. Por ejemplo, E7 afirma que la estrategia permitió responder al problema porque fue creativa e incorpora modos de juego interactivo que le permitieron aprender, lo anterior está relacionado con el carácter lúdico del juego en el aula como forma natural de incorporar a los estudiantes en el medio, siendo fundamental el desarrollo de competencias como la creatividad en este caso, además se reconocen elementos por los que se destaca el juego en matemáticas asociados con hacer ver al estudiante la necesidad de aprender matemáticas, convirtiéndose en una actividad motivadora. (ver figura 8)

dar respuesta al problema planteado.
me pareció creativo por los modos de juego interactivo y pudimos
aprender y otras cosas

Figura 8. S1, Pb1, P4, E7

Por otra parte, el 50% restante de los estudiantes manifestó que la eficiencia del juego para resolver el problema está en la nueva estrategia que implica la representación algebraica y el desarrollo de la ecuación que les permitió dar cuenta de cuántos estudiantes tenía cada grupo, lo anterior evidencia tal como lo menciona Alsina el desarrollo de procesos psicológicos para el aprendizaje de las matemáticas como la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas estrategias presente en las respuestas de estos estudiantes al centrar su respuesta en el hecho de que el juego permitió dar solución al problema, conociendo la cantidad de estudiantes que tenía cada salón (ver figura 9).

si, por que ademas que aprendimos a
saber y descubrir cuantos estudiantes
tenia cada salon.

Figura 9. S1, Pb1, P4, E4

Se concluye que la estrategia del juego orientó de manera efectiva la resolución del problema, ya que los estudiantes indican la efectividad del juego en relación con su estructura, los comodines, las emociones presentes al resolver el problema jugando, las interacciones entre los grupos y el desarrollo de la creatividad en búsqueda de estrategias, lo que permite identificar la relación entre el juego y la resolución de problemas desde el proceso de verificación presentado en la matriz de análisis ya que, el estudiante comprueba que la respuesta que dio al problema satisface las relaciones identificadas y además verifica que la estrategia propuesta es válida.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 5 (S1, Pb1, P5a)

Tabla 13. Tipificación S1, Pb1, P5a

Pregunta 5: Describe los elementos más importantes en cada estación que permitieron dar respuesta al problema.			
a. Estación 1 (Reconozco las cantidades):			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 1 para resolver el problema es el reconocimiento de las relaciones entre las cantidades involucradas. (E1, E3, E4)	3	37,5%
2	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 1 es el reconocimiento de las cantidades presentadas en el problema (E2, E5)	2	25%
3	Estudiantes que no responden en relación con la pregunta. (E6, E7, E8)	3	37,5%

Con relación a los resultados obtenidos en la tabla anterior, 3 de los 8 estudiantes manifestaron que lo más importante de la primera estación del circuito algebraico para resolver el problema fue el reconocimiento de las relaciones entre las cantidades involucradas en el problema, pues debían estar pendientes de cada “suma o resta”, que se le puede atribuir a la inversibilidad de las operaciones que representan cada cantidad del problema con base a las relaciones entre ellas.

Por otro lado, 2 de los estudiantes manifestaron que lo más importante de la estación 1 para resolver el problema fue el reconocimiento de las cantidades presentadas en el mismo. Finalmente, 3 de los estudiantes no respondieron nada relacionado con la pregunta.

Se logra reconocer a partir de los resultados obtenidos que la mayoría de los estudiantes reconocieron dentro del juego en la primera estación, elementos importantes para la resolución de problemas de repartición desigual como lo son las cantidades, las relaciones entre ellas y la inversibilidad de las mismas, de lo cual se concluye que el juego favoreció el proceso de comprensión del problema descrito en la matriz de análisis al permitir que los estudiantes identificaran la estructura de este lo cual es fundamental para su solución, ya sea por medio del establecimiento de la ecuación o haciendo uso de otra estrategia.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 5 (S1, Pb1, P5b)

Tabla 14. Tipificación S1, Pb1, P5b

Pregunta 5: Describe los elementos más importantes en cada estación que permitieron dar respuesta al problema. b. Estación 2 (Emparejo las representaciones):			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 2 para resolver el problema es el reconocimiento de la representación algebraica de las cantidades involucradas. (E2)	1	12,5%
2	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 2 para resolver el problema fue la comprensión de las relaciones entre las cantidades del problema. (E3, E4, E5)	3	37,5%
3	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 2 para resolver el problema fue aplicar lógica y lograr relacionar ambos lenguajes. (E6, E8)	2	25%
4	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta. (E1, E7)	2	25%

Respecto a los resultados de la tabla anterior, se evidencia que un estudiante reconoce que lo más importante de la estación 2 para resolver el problema es el reconocimiento de la representación algebraica de las cantidades involucradas, se infiere que la traducción de las cantidades se convierte en un punto clave dentro del juego para dar solución al problema. Por otro lado, 3 de los 8 estudiantes manifestaron que lo más importante fue la comprensión de las relaciones entre las cantidades involucradas en el problema, esto debido a que dentro de la estación

no es posible asociar las representaciones entre ambos lenguajes si no se reconocen las demás cantidades a partir de la cantidad generadora y las relaciones que se han encontrado entre ellas.

También 2 estudiantes manifestaron que lo más importante fue tener que aplicar “lógica” para relacionar ambos tipos de lenguaje, se entiende que los estudiantes hacen alusión al tipo de razonamiento desarrollado con base en la información para dar sentido y lograr emparejar las representaciones de forma acertada en ambos lenguajes. Finalmente 2 estudiantes no respondieron en relación con la pregunta.

En general, los estudiantes centran la importancia de la segunda estación en el hecho de la representación de las cantidades involucradas, la comprensión de las relaciones entre las cantidades y la relación entre expresiones en lenguaje natural y algebraico, de lo que se concluye según lo mencionado por Almeida (2016), el establecimiento de relaciones entre cantidades es la característica principal del pensamiento algebraico, la cual permite que los estudiantes logren identificar la estructura del problema y posteriormente hacer uso de ello para establecer representaciones algebraicas en relación con los datos del problema.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 5 (S1, Pb1, P5c)

Tabla 15. Tipificación S1, Pb1, P5c

Pregunta 5: Describe los elementos más importantes en cada estación que permitieron dar respuesta al problema. c. Estación 3 (Encuentro a x):			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 3 para resolver el problema fue hallar el valor de la incógnita. (E1, E2, E5)	3	37,5%
2	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 3 para resolver el problema fue el conjunto de herramientas del juego que facilitaron hallar la x (pistas). (E3, E4, E7)	3	37,5%
3	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 3 para resolver el problema es la búsqueda de diferentes estrategias para hallar la incógnita. (E8)	1	12,5%
4	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta (E6)	1	12,5%

Según las respuestas de los estudiantes condensados en la tabla anterior, el 37,5 % de los estudiantes evidencia que lo más importante de la estación 3 fue hallar el valor de la incógnita, pues con ese número se pueden generar las otras cantidades que solucionen el problema. El otro 37,5% manifestó que lo más importante fueron las herramientas de juego como los comodines que lo ayudaron a encontrar el valor para x . Es importante destacar que E3 y E4, integrantes de G2, obtuvieron el comodín para esta estación, que les presentaba una ecuación reducida, por lo que encontraron directamente el valor de la incógnita.

Por otro lado, un estudiante reconoce que lo más importante de la estación 3 para resolver el problema es la búsqueda de estrategias para hallar el valor de la incógnita y 1 estudiante no respondió de acuerdo con la pregunta.

A partir de lo anterior se evidencia que los estudiantes reconocen en la tercera estación del circuito algebraico el despeje de la incógnita como un elemento importante en la resolución del problema, a pesar de que en esta estación ningún equipo recurrió a la manipulación de la ecuación de manera analítica, se valieron de estrategias como el tanteo para hallar el valor de la x , al mismo tiempo que reconocen la importancia de resolver la ecuación asociada al problema partiendo de la asignación de una cantidad numérica a la incógnita, la cual tiene un significado dentro del problema siendo la generadora de las demás, de lo anterior se concluye que el juego en esta estación favoreció el proceso de experimentación dentro de la resolución de problemas como la elección de un plan de acción para la resolución del mismo.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 5 (S1, Pb1, P5d)

Tabla 16. Tipificación S1, Pb1, P5d

Pregunta 5: Describe los elementos más importantes en cada estación que permitieron dar respuesta al problema. d. Estación 4 (Justifico la igualdad):			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 4 para resolver el problema es el desarrollo de la ecuación establecida en la estación 2. (E1, E5)	2	25%
2	Estudiantes que manifiestan que lo más importante de la estación 4 para resolver el problema está relacionado con elementos propios de la estructura del juego. (E2, E3, E4, E6, E7, E8)	6	75%

A partir de la tabla anterior se observa que el 25% de los estudiantes manifestó que lo más importante de la última estación para resolver el problema fue desarrollar la ecuación que se representó en la estación 2, se infiere que los estudiantes reconocen de manera inmediata la ecuación asociada al problema, debido a que ya existía un trabajo previo en estaciones anteriores y aunque el propósito de esta estación estaba centrado en la manipulación algebraica para encontrar el valor de la incógnita, los estudiantes centran la atención en el punto de partida para que esto suceda. Por otra parte, el 75% de los estudiantes manifestó que lo más importante de la estación 4 para resolver el problema está relacionado con elementos propios de la estructura del juego, como los comodines o la presión de ganar.

De lo anterior, se reconoce que los estudiantes establecieron la importancia de la cuarta estación en cuanto a los elementos propios del juego, y no identificaron, excepto E1 y E5, elementos propios de las matemáticas que permitieran responder al problema, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes no reconocen en la simplificación de la ecuación una estrategia potencial para resolver problemas, esto se refleja en lo sucedido en cada equipo para desarrollarla.

Con base a los resultados obtenidos en esta pregunta, sobre los elementos importantes de cada estación del circuito algebraico para resolver el problema planteado, se puede concluir que

los estudiantes tuvieron con el juego un primer acercamiento a elementos propios del pensamiento algebraico que facilitan resolver problemas de repartición desigual, como son la identificación de las cantidades, las relaciones entre ellas y la representación de esta información en lenguaje algebraico. Por otra parte y en relación con los elementos que movilizó el juego, se evidencia que mediante la experimentación logran poner en la mesa estrategias para dar respuesta a cada estación, además, el juego respeta la diversidad de los estudiantes en cuanto a las formas de manipular y desenvolverse en él, aprovechando las herramientas obtenidas previamente, esto en relación con lo mencionado por Alsina como el momento en el que todos quieren jugar, pero lo que resulta significativo es que todos pueden jugar en función de sus propias capacidades.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 6 (S1, Pb1, P6)

Tabla 17. Tipificación S1, Pb1, P6

Pregunta 6: Explica por qué consideras que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas para resolverlo.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que consideran que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas para resolverlo porque permite hallar la incógnita de forma directa. (E1)	1	12,5%
2	Estudiantes que consideran que es útil representar en expresiones algebraicas porque es una estrategia diferente. (E2, E3, E6, E8)	4	50%
3	Estudiantes que consideran que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas ya que vincula estas con el carácter lúdico del juego. (E4, E7)	2	25%
4	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta. (E5)	1	12,5%

A partir de las respuestas obtenidas en la pregunta 6, problema 1, situación 1, se evidencia que un estudiante considera que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas para resolverlo porque permite encontrar de una manera más fácil el valor numérico de la x . Por otro lado, 4 de los estudiantes establecieron que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas porque es una estrategia diferente para resolver el problema. Dos de los

estudiantes justificaron que es útil realizar estas representaciones con base a la influencia que tienen en el juego. Finalmente, un estudiante no respondió con relación a la pregunta.

De acuerdo con las respuestas de los estudiantes en relación con la pregunta 6, se evidencia que en particular E1 hace alusión a la una de las características mencionadas por Radford (2010) como lo es el sentido de la analiticidad, ya que reconoce que es posible la manipulación de expresiones por medio de operaciones como si fueran conocidas, para obtener de forma más fácil el valor de la incógnita. (ver figura 10)

Si, lo usaria porque permite mas
facil para hallar a x

Figura 10. S1, Pb1, P6, E1

Además, surgen respuestas que asocian las expresiones algebraicas a una estrategia útil pero compleja que, pese a la dificultad para los estudiantes, permite solucionar el problema propuesto tal como se evidencia en E6, al convertirse en una estrategia fiable ya que al final siempre se obtendrá la respuesta acertada. (ver figura 11)

es important util porque es un
Poco dificil pero funciona al final

Figura 11. S1, Pb1, P6, E6

Lo anterior permite inferir que los estudiantes por medio del juego reconocieron que la representación en expresiones algebraicas de los datos del problema es una estrategia potencial para resolverlo, lo que manifiesta la importancia de acercarse a la manipulación del lenguaje algebraico.

Situación 1: Problema 1, Pregunta 7 (S1, Pb1, P7)

Tabla 18. Tipificación S1, Pb1, P7

Pregunta 7: Explica por qué usarías la estrategia para hallar a x presentada en la cuarta estación del circuito.		
	TIPO DE RESPUESTA	Fa Fr
1	Estudiantes que utilizarían el desarrollo de la ecuación porque les permite hallar el valor de la incógnita de una manera directa. (E1, E2, E3, E5, E8)	5 62,5%
2	Estudiantes que utilizarían la ecuación para hallar x porque lo asocian con el carácter lúdico del juego. (E4)	1 12,5%
3	Estudiantes que no utilizarían el desarrollo de la ecuación porque conocen métodos más sencillos. (E7)	1 12,5%
4	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta. (E6)	1 12,5%

Según las respuestas de la tabla anterior de los estudiantes en la pregunta 7, problema 1, situación 1, se evidencia que el 62,5% de los estudiantes manifestó que usaría la solución de la ecuación para hallar el valor de la incógnita de manera directa. Un ejemplo de ellos es E3, quien afirma que “es más fácil hallar el resultado, hallando a la x ”, considerando que el estudiante reconoce que las cantidades indeterminadas se pueden representar, pero además su manipulación permite obtener un valor numérico a la incógnita y dar solución al problema fácilmente. (ver figura 12). También hubo un estudiante que no respondió nada relacionado con la pregunta.

por es mas facil hallar el resultado
Hallando la a la x

Figura 12. S1, Pb1, P7, E3

Por otra parte, un estudiante utilizaría la solución de la ecuación porque “es más divertido”, lo que quiere decir que asocia la efectividad del proceso al carácter lúdico del juego, ya que, estas actividades son enormemente motivadoras, permitiendo que los estudiantes se lo tomen en serio y consigan un papel activo al afrontar nuevos contenidos matemáticos sin miedo al fracaso, un

ejemplo de ello es E4, quien atribuye el uso de la ecuación muy cercano al interés y la facilidad que logró despertar la dinámica del juego para poder resolverla. (ver figura 13).

Porque es mas facil de aprender
y es muy didactica y divertida.

Figura 13. S1, Pb1, P7, E4

Asimismo, un estudiante no utilizaría la ecuación porque considera que hay métodos más fáciles. Es importante resaltar que E7 fue el estudiante que soluciona el problema en la pregunta 2 porque tuvo en cuenta todas las relaciones tanto explícitas como implícitas del problema, tal como lo mencionan Bednarz y Janvier en la caracterización de uno de los razonamientos realizados por los estudiantes al tener en cuenta la estructura; donde el estudiante opera sobre relaciones entre las cantidades y transforma el problema inicial en un nuevo problema que permite cálculos acertados de ahí en adelante. (ver figura 14).

Yo creo que no la usaria tanto porque hay mejores
metodos y me parece un poco dificil

Figura 14. S1, Pb1, P7, E7

De lo anterior se infiere que gran parte de los estudiantes logran reconocer elementos, conceptos o ideas fundamentales que moviliza el juego para dar solución al problema y principalmente hacen énfasis en las representaciones algebraicas y la ecuación como una estrategia eficaz para hallar el valor de la incógnita de manera directa (cuarta estación), esto debido a que el valor obtenido al resolver la ecuación permite verificar las condiciones del problema tal como lo menciona Puig, además, se puede decir que gran parte de los estudiantes se encaminan a la construcción de estrategias desde el pensamiento algebraico, al mencionar el sentido que tiene la ecuación dentro de la resolución de este tipo de problemas.

Problema 2. La profesora Tatiana realizó una encuesta sobre el sabor de pastel favorito de los estudiantes de grado octavo, en la cual se presentan tres opciones: naranja, chocolate y vainilla. Al conocer los resultados finales de las votaciones se obtuvieron 78 votos, ya que todos los estudiantes no votaron y se sabe que la torta de chocolate obtuvo cuatro veces la cantidad de votos que la torta de naranja y la de vainilla obtuvo el doble de votos que la de chocolate. ¿Cuántos votos tuvo cada sabor de pastel? ¿Qué sabor de pastel fue el elegido?

Situación 1: Problema 2, Pregunta 1 (S1, Pb2, P1)

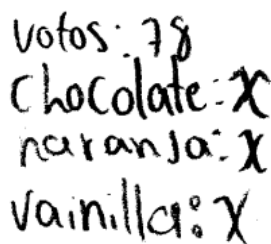
Tabla 19. Tipificación S1, Pb2, P1

Pregunta 1: Escribe las cantidades involucradas en el problema.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que indican todas las cantidades del problema (cantidad de votos por los sabores de pastel, chocolate, naranja y vainilla y cantidad total de votos) y reconocen el valor numérico del total (78). (E1, E4, E6, E7, E8)	5	62,5%
2	Estudiantes que indican la cantidad total de votos y reconocen su valor numérico (78), además mencionan que hay 3 sabores de pastel sin hacerlos explícitos. (E2)	1	12,5%
3	Estudiantes que indican como cantidades solo las que conforman la cantidad total de votos (cantidad de votos por los sabores de pastel, chocolate, naranja y vainilla). (E5)	1	12,5%
4	Estudiantes que indican todas las cantidades del problema (cantidad de votos por los sabores de pastel, chocolate, naranja y vainilla y cantidad total de votos), reconocen el valor numérico del total y realizan operaciones para asignar un valor numérico a las demás cantidades. (E3)	1	12,5%

A partir de la tabla anterior se puede ver que el 62,5% de los estudiantes reconoció las cuatro cantidades involucradas en el problema (cantidad de votos por los sabores de pastel, chocolate, naranja y vainilla y cantidad total de votos) y asignó a la cantidad total su valor numérico correspondiente (78) al ser el único explicitado en el problema. Un estudiante indicó el total de votos y estableció que hay tres sabores de pastel, pero no explicita cuáles.

Por otro lado, un estudiante indicó sólo tres de las cuatro cantidades involucradas, pues solo consideró las cantidades que conforman el total (cantidad de votos por los sabores de pastel de chocolate, naranja y vainilla) sin considerar la cantidad total. Y finalmente, un estudiante indicó todas las cantidades involucradas en el problema, reconoció la expresión numérica de la cantidad total y realizó operaciones para encontrar el valor numérico de las otras tres cantidades.

Para este problema, no todos los estudiantes reconocen el valor total como una de las cantidades involucradas en el problema y ninguna, excepto E3, realiza operaciones para asignar valores numéricos a las cantidades no explicitadas en el problema. Así, E6 asigna una x a las cantidades desconocidas en el problema, intentando establecer una representación en lenguaje algebraico (ver figura 15).



Handwritten text showing the algebraic representation of the problem data:

- votos: 78
- chocolate: x
- naranja: x
- vainilla: x

Figura 15. S1, Pb2, P1, E6

Esto permite ver una aproximación clara al pensamiento algebraico, pues E6 establece una representación para aquello que es indeterminado, lo cual es propio de este tipo de pensamiento al ser el que manipula objetos indeterminados y considera la designación simbólica de los mismos (p. 41), a pesar de que no considera aún las relaciones que determinan la representación en lenguaje algebraico de las cantidades involucradas en el problema. Esta respuesta se puede asociar con el circuito algebraico en la estación 2, donde los estudiantes se acercaron por primera vez a la representación en lenguaje algebraico de las cantidades y reconocieron la potencialidad de representar algebraicamente los datos del problema.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 2 (S1, Pb2, P2)

Tabla 20. Tipificación S1, Pb2, P2

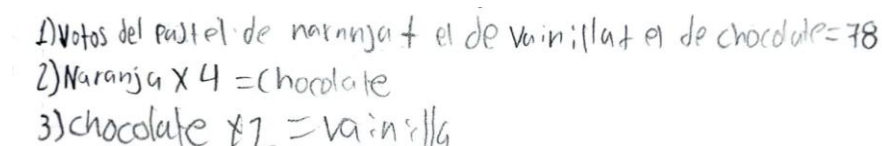
Pregunta 2: Escribe cómo están relacionadas las cantidades del problema.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que mencionan relaciones entre las cantidades que conforman el total (la cantidad de votos por el pastel de chocolate es cuatro veces la cantidad de votos por el pastel de naranja, y la cantidad de votos por el pastel de vainilla es el doble de la cantidad de votos por el pastel de chocolate), y no consideran la relación entre estas con el total (la suma de la cantidad de votos de cada sabor de pastel es igual al total de votos). (E1, E2, E7).	3	37,5%
2	Estudiantes que menciona todas las relaciones presentadas en el problema (la cantidad de votos por el pastel de chocolate es cuatro veces la cantidad de votos por el pastel de naranja, la cantidad de votos por el pastel de vainilla es el doble de la cantidad de votos por el pastel de chocolate y la suma de la cantidad de votos de cada sabor de pastel es igual al total de votos). (E3, E4)	2	25%
3	Estudiantes que solo mencionan la relación entre las cantidades de votos de cada sabor de pastel y el total (la suma de la cantidad de votos de cada sabor de pastel es igual al total de votos). (E5, E8)	2	25%
4	Estudiantes que mencionan que hay relaciones multiplicativas, pero no las especifican. (E6)	1	12,5%

Según la tabla anterior con relación a la pregunta 2, problema 2, se evidencia que 3 de los 8 estudiantes indican las relaciones entre las cantidades que conforman el total, y omiten la relación que tienen estas con el total. Por otra parte, 2 de los estudiantes sí mencionan todas las relaciones, tanto explícitas, como implícitas, que están en el problema.

Asimismo, 2 estudiantes solo mencionan la relación existente en las partes y el total, sin considerar las relaciones explícitas en el problema y finalmente, un estudiante se limita a responder que “todos van a multiplicar para tener los votos”, reconociendo la existencia de relaciones multiplicativas, pero sin especificar cuáles.

A partir de estos resultados se evidencia que la mayoría de estudiantes reconocen únicamente las relaciones que están explícitas en el problema, las cuales son las relaciones existentes entre las cantidades que conforman el total y solo algunos indican la relación implícita, que es la de las partes con el total, lo cual es importante para la comprensión de la estructura del

problema, así mismo como la diferenciación de las relaciones aditivas y multiplicativas, como en el caso de E3, que establece las relaciones teniendo en cuenta los operadores (4 y 2) que las definen, esto indica interpreta de forma adecuada las relaciones expresadas como “cuatro veces” y “el doble” en el lenguaje natural, lo cual es importante para la comprensión de la estructura del problema. (ver figura 16)



$$\begin{aligned} 1) & \text{Votos del pastel de naranja} + \text{el de vainilla} + \text{el de chocolate} = 78 \\ 2) & \text{Naranja} \times 4 = \text{chocolate} \\ 3) & \text{chocolate} \times 2 = \text{vainilla} \end{aligned}$$

Figura 16. S1, Pb2, P2, E3

En síntesis, se puede mencionar que una de las características principales del pensamiento algebraico, como lo es el reconocimiento de relaciones entre las cantidades del problema, permite comprender la estructura del problema, en esta pregunta se da en diferentes niveles, el primero se centra en la relación de equivalencia que se puede establecer entre la cantidad de votos por el pastel de chocolate, el pastel de naranja, el pastel de vainilla y el total de votos entre los tres sabores, el segundo nivel se centra en la relación entre las cantidades desconocidas y en el último nivel sólo se hace mención del tipo de relaciones involucradas en el problema, específicamente las multiplicativas, por ello se puede decir que algunos de los estudiantes tienen una comprensión parcial del problema que se pudo haber alcanzado gracias al trabajo realizado en la estación 1 del juego que impulsaba el reconocimiento tanto de las cantidades como de las relaciones entre ellas.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 3 (S1, Pb2, P3)

Tabla 21. Tipificación S1, Pb2, P3

Pregunta 3: Completa el siguiente diagrama de acuerdo con las relaciones que reconociste. Cantidad total de votos x 4 veces x 2 veces			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que completan el diagrama escribiendo de izquierda a derecha en los espacios en blanco, naranja, chocolate y vainilla. (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8)	7	87,5%
2	Estudiantes que completan el diagrama escribiendo de izquierda a derecha en los espacios en blanco, naranja, vainilla y chocolate. (E5)	1	12,5%

De acuerdo a las respuestas en la pregunta 3, problema 2, situación 1, el 87,5% de los estudiantes completaron de izquierda a derecha los espacios en blanco con naranja, chocolate y vainilla, lo que corresponde a la ubicación correcta de las cantidades teniendo en cuenta las relaciones que menciona el problema (la cantidad de votos por el pastel de chocolate tiene cuatro veces la cantidad de votos por el pastel de naranja, y la cantidad de votos por el pastel de vainilla tiene el doble de votos que la cantidad de votos por el pastel de chocolate), lo cual se puede vincular con la primera estación del circuito algebraico, pues los estudiantes al discutir reiteradas veces las relaciones del problema anterior, es posible que hiciera más fácil el reconocimiento de las relaciones de este problema.

Además, al completar de forma acertada este tipo de diagramas, se deduce que pudo usarse como una heurística en la que reconocen la estructura del problema al establecer relaciones como un proceso de comprensión y un medio para solucionarlo, lo que ayudó al desarrollo del siguiente juego.

Por otro lado, solo un estudiante completa el diagrama escribiendo de izquierda a derecha en los espacios en blanco naranja, vainilla y chocolate, considerando que la cantidad de votos por el pastel de vainilla tiene cuatro veces la cantidad de votos por el pastel de naranja y que la cantidad de votos por el pastel de chocolate tiene el doble de la cantidad de votos por el pastel de vainilla, lo cual no corresponde a las relaciones presentadas en el problema, se podría decir que E5 no comprendió la estructura del problema. (ver figura)

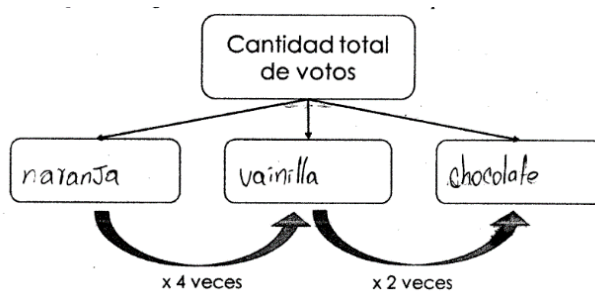


Figura 17. S1, Pb2, P3, E5

Situación 1: Problema 2, Pregunta 4 (S1, Pb2, P4)

En la pregunta 4 se propuso un juego de relevos a los estudiantes, en el que debían competir nuevamente por equipos para completar dos diagramas como el de la anterior pregunta, uno en lenguaje natural y otro en lenguaje algebraico, para el que debían considerar las relaciones entre las cantidades. En la siguiente tabla se presentan los comentarios realizados por cada grupo en este juego. A continuación, se presenta la descripción de lo realizado por cada grupo en esta estación.

G1 (E1, E2): Los estudiantes logran diferenciar los elementos que permiten completar los diagramas en lenguaje natural y simbólico, a pesar de ello, completan el diagrama en lenguaje natural teniendo en cuenta las relaciones del problema, pero el diagrama con lenguaje simbólico no. **E1** menciona que “uy ese juego sí fue complicado, por eso a nosotros nos quedó mal”. En la siguiente figura se presenta la solución de **G1**.

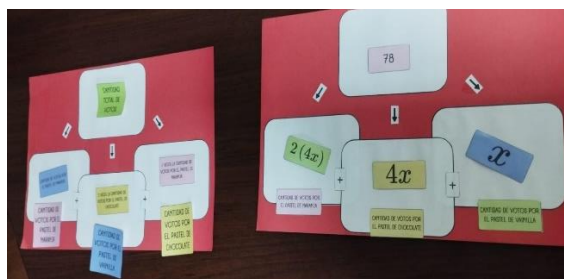


Ilustración 1. S1, Pb2, P4, G1

G2 (E3, E4): Los estudiantes logran diferenciar los elementos que permiten completar los diagramas en lenguaje natural y simbólico, lo que lleva a completar ambos teniendo en cuenta las relaciones del problema. **E4** expresa que el juego estuvo fácil “Porque yo leí bien el problema y pues lo tenía en la memoria yo veía que primero iba x , luego iba vainilla, entonces iba viendo el paso por paso del problema”. En la siguiente figura se presenta la solución de **G2**.

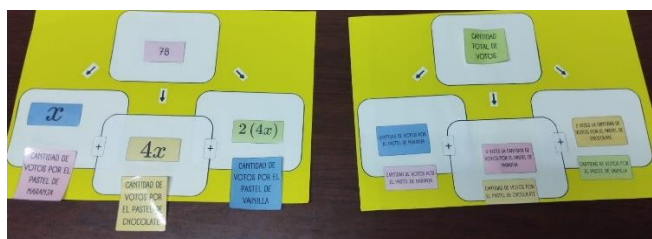


Ilustración 2. S1, Pb2, P4, G2

G3 (E5, E6): Los estudiantes logran diferenciar los elementos que permiten completar los diagramas en lenguaje natural y simbólico, a pesar de ello, completan el diagrama en lenguaje natural teniendo en cuenta las relaciones del problema, pero el diagrama con lenguaje simbólico no. **E5** menciona que “este diagrama fue fácil de completar porque la cantidad de votos por el pastel de naranja era igual, así hice las demás” refiriéndose al diagrama en lenguaje natural. En la siguiente figura se presenta la solución de **G3**.

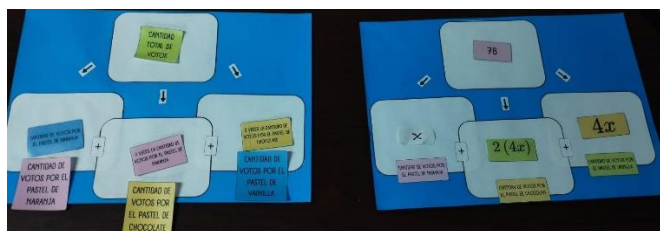


Ilustración 3. S1, Pb2, P4, G3

G4 (E7, E8): Los estudiantes hacen uso de fichas con expresiones tanto en lenguaje natural como en lenguaje algebraico para completar ambos diagramas. En cuanto a su experiencia con el juego **E7** menciona que “no sabía dónde poner algunas de las fichas” y **E8** responde “me cambiaste las que había puesto bien”. En la siguiente figura se presenta la solución de **G4**.



Ilustración 4. S1, Pb2, P4, G4

En general, el propósito del juego era completar diagramas tanto en lenguaje natural como en lenguaje algebraico, reconociendo los elementos que permiten alcanzarlo correctamente, teniendo presente las relaciones presentadas en el problema tal como se muestran a continuación:

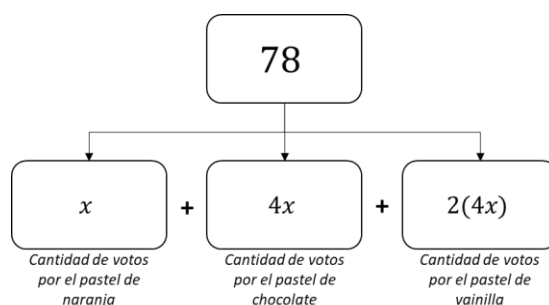


Figura 18. Diagrama en lenguaje algebraico, S1, Pb2, P4

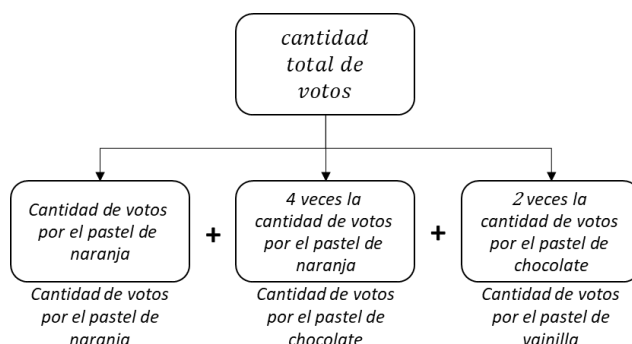


Figura 19. Diagrama en lenguaje natural, S1, Pb2, P4

Considerando los comentarios y registros presentados, solo **G2** alcanza el propósito del juego, ya que completa ambos diagramas, uno en lenguaje natural y otro en lenguaje algebraico al considerar las relaciones entre las cantidades, obteniendo 8 puntos, aunque no se convierte en el equipo ganador por las reglas del juego. Por otro lado, **G1** reconoce los elementos de cada diagrama, pero no establece las relaciones correctas, obteniendo 6 puntos; aparece **G3** que completan correctamente el diagrama en lenguaje natural, pero no el simbólico, obteniendo 10 puntos por ser el primer equipo en terminar. Finalmente, **G4** a pesar de obtener 6 puntos, hacen uso de todos los elementos para completar ambos diagramas, combinando al menos una ficha del lenguaje contrario en cada diagrama.

Lo anterior, muestra que el juego posibilita el reconocimiento de relaciones usando heurísticas como diagramas o esquemas conceptuales, que dan cuenta de las relaciones desde el lenguaje natural o el lenguaje algebraico. Aunque todos los equipos no alcanzaron el propósito del juego completamente, es necesario mencionar que este instrumento hace parte del análisis del enunciado de un problema, ya que facilita el reconocimiento de cantidades que no están mencionadas explícitamente tal como lo menciona Puig, además, permite asignar una representación a las cantidades desconocidas mediante expresiones algebraicas que traducen las relaciones entre cantidades. Finalmente, este tipo de instrumentos heurísticos dentro del juego se

convierten en esquemas conceptuales que permiten dar sentido al problema y facilitan los pasos posteriores en la resolución del problema.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 5 (S1, Pb2, P5)

Tabla 22. Tipificación S1, Pb2, P5

Pregunta 5: Escribe de qué cantidad de votos (naranja o vainilla) depende la cantidad de votos por el pastel de chocolate.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la cantidad de votos del pastel de chocolate depende de la cantidad de votos del pastel de naranja (porque la cantidad de votos por el pastel de chocolate es igual a la cantidad de votos del pastel de naranja 4). (E1, E4, E6, E7, E8)	5	62,5%
2	Estudiantes que indican que la cantidad de votos por el pastel de chocolate depende de la cantidad de votos por el pastel de naranja (porque la cantidad de votos por el pastel de chocolate es cuatro veces la cantidad del pastel de naranja) y de la cantidad de votos por el pastel de vainilla (porque la cantidad de votos por el pastel de chocolate es la mitad de la cantidad de votos por el pastel de vainilla). (E3)	1	12,5%
3	Estudiantes que indican que la cantidad de votos del pastel de naranja depende de la cantidad de votos del pastel de chocolate. (E5)	1	12,5%
4	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta (E2)	1	12,5%

A partir de las respuestas obtenidas en la pregunta 5, problema 2, situación 1, se reconoce que el 62,5% de los estudiantes indican que la cantidad de votos del pastel de chocolate depende de la cantidad de votos del pastel de naranja, que corresponde a la relación explícita del problema “el pastel de chocolate obtuvo cuatro veces la cantidad de votos que el pastel de naranja”, lo que evidencia que los estudiantes reconocen la relación explícita mencionada en el problema, como el primer paso para la comprensión de su estructura en general.

Además, se refleja que E3 tiene en cuenta la relación implícita entre la cantidad de votos por el pastel de chocolate y la cantidad de votos por el pastel de naranja y vainilla teniendo en cuenta la inversibilidad de las operaciones, manifestando que puede depender de cualquiera de las dos cantidades, como se evidencia en su registro (ver figura 20). Esto evidencia que E1 reconoce

que una cantidad se compone de diferentes maneras teniendo en cuenta las relaciones, comprensión que fue alcanzada en la estación 1 del circuito algebraico.

1) pastel de naranja $\times 4$ veces = chocolate
 2) pastel de vainilla $\div 2$ = chocolate

Figura 20. S1, Pb2, P5, E3

Por otro lado, un estudiante indica que la cantidad de votos por el pastel de naranja depende de la cantidad de votos del pastel de chocolate y un estudiante no respondió nada relacionado con la pregunta. De estos resultados se puede concluir que la mayoría de los estudiantes reconocen cuál es la cantidad generadora, que es la cantidad de votos por el pastel de naranja, esto es importante para reconocer el significado de la incógnita de la ecuación asociada al problema que se plantea en la próxima pregunta.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 6 (S1, Pb2, P6)

Tabla 23. Tipificación S1, Pb2, P6

Pregunta 6: Sí $4x$ representa la cantidad de votos por el pastel de chocolate completa la siguiente tabla.			
Lenguaje natural		Lenguaje simbólico	
Cantidad de votos por el pastel de naranja			
Cantidad de votos por el pastel de chocolate		$4x$	
Cantidad de votos por el pastel de vainilla			
Suma de votos entre los tres sabores de pastel			
Suma de votos entre los tres sabores de pastel es igual a 78			
TIPO DE RESPUESTA			
Fa	Fr		
1	Estudiantes que representan correctamente en lenguaje algebraico las cantidades involucradas en el problema teniendo en cuenta las relaciones entre ellas y establecen la ecuación asociada al problema ($x + 4x + 2(4x) = 78$). (E1, E2, E4, E5)	4	50%
2	Estudiantes que no representan correctamente en lenguaje algebraico las cantidades involucradas en el problema al no tener en cuenta las relaciones entre ellas y no establecen la ecuación asociada al problema. (E3, E6)	2	25%
3	Estudiantes que representan correctamente en lenguaje algebraico las cantidades involucradas en el problema teniendo en cuenta las relaciones entre ellas y no establecen la ecuación asociada al problema. (E7, E8)	2	25%

A partir de la tabla anterior se observa que el 50% de los estudiantes estableció adecuadamente la ecuación asociada al problema, ya que representaron en lenguaje algebraico cada cantidad involucrada en el problema considerando las relaciones entre las mismas, indicando que la cantidad de votos por el pastel de naranja es “ x ”, la cantidad de votos por el pastel de chocolate es “ $4x$ ”, la cantidad de votos por el pastel de vainilla es “ $2(4x)$ ”, la suma de votos entre los tres sabores de pastel es “ $x + 4x + 2(4x)$ ”) y establecen la ecuación asociada al problema (la suma de votos entre los tres sabores de pastel es igual a 78 es “ $x + 4x + 2(4x) = 78$ ”, lo cual representa el tipo de respuesta correcta y esperada, reflejando que logran asociar la información del problema tanto en lenguaje natural como en lenguaje simbólico.

Por otro lado, el 25% de los estudiantes no estableció la representación en lenguaje algebraico acertada a todas las cantidades involucradas en el problema, debido a que no se tuvo en cuenta las relaciones entre ellas, indicando que la cantidad de votos por el pastel de vainilla es “ $2x$ ” asumiendo que x al representar lo desconocido podría representar también la cantidad de votos por el pastel de chocolate siendo esta el doble de los votos de chocolate, la suma de votos entre los tres sabores de pastel es “78” que es una forma válida, ya que se refleja la comprensión de las relaciones que los llevó a indicar la cantidad numérica acertada; lo anterior, se convierte en una razón evidente para no establecer la ecuación asociada al problema.

En cuanto al 25% restante de los estudiantes, son aquellos que representan de manera acertada; sin embargo, no lograron establecer la ecuación asociada al problema ya que no presentan la representación de la suma de votos entre los tres sabores de pastel. Ejemplo de ello es E8, quien hace parte de este porcentaje de estudiantes que no logran plantear la ecuación asociada al problema. (ver figura 21)

Lenguaje natural	Lenguaje simbólico
Cantidad de votos por el pastel de naranja	x
Cantidad de votos por el pastel de chocolate	$4x$
Cantidad de votos por el pastel de vainilla	$2x$
Suma de votos entre los tres sabores de pastel	78
Suma de votos entre los tres sabores de pastel es igual a 78	$x + x \times 4 + x \times 2 = 78$

Figura 21. S1, Pb2, P6, E8

Con base a estos resultados se concluye que todos los estudiantes indican al menos una representación correctamente de lenguaje natural en lenguaje algebraico, el 50% logra establecer correctamente todas las expresiones, lo que respalda una de las características del pensamiento algebraico mencionadas por Kieran acerca de la representación simbólica de las cantidades indeterminadas. Por tanto, se evidencia la relación que existe de esta pregunta con la estación 2 del juego, los estudiantes generan una representación en lenguaje algebraico y el instrumento heurístico es fundamental para detallar de manera más sencilla y con ayuda de las relaciones entre cantidades una expresión equivalente a la ecuación asociada al problema.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 7 (S1, Pb2, P7)

Tabla 24. Tipificación S1, Pb2, P7

Pregunta 7: Con base a la igualdad planteada en el punto anterior, completa la solución de la ecuación y el detalle de cada paso para resolverlo.

Solución de la ecuación	Detalle del paso a paso
$x + 4x + 2(4x) = 78$	
	Eliminación de paréntesis (Propiedad distributiva)
$(x + 4x + 8x) = 78$	
	Suma de los términos semejantes
$13x \cdot \frac{1}{13} = 78 \cdot \frac{1}{13}$	
	Multiplicación de los factores
$1x = 6$	
	Todo número multiplicado por 1 me da el mismo número y despeje de la incógnita x (Propiedad del neutro de la multiplicación)

TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que manipulan algebraicamente la ecuación asociada al problema teniendo en cuenta la descripción del paso a paso y hallan la solución correcta de la ecuación ($x = 6$). (E1, E2, E3, E6, E7, E8)	6	75%
2	Estudiantes que manipulan algebraicamente la ecuación asociada al problema teniendo en cuenta la descripción del paso a paso y no hallan la solución de la ecuación ($13x1 = 78$). (E4)	1	12,5%
3	Estudiantes que manipulan algebraicamente la ecuación asociada al problema sin tener en cuenta la descripción del paso a paso y no hallan la solución de la ecuación. (E5)	1	12,5%

A partir de la tabla anterior se observa que el 75% de los estudiantes manipulan de manera acertada la ecuación asociada al problema, teniendo en cuenta la descripción del “paso a paso” para simplificar, operando la incógnita hasta despejarla y hallar la solución ($x = 6$). Por otro lado, un estudiante manipuló acertadamente la ecuación teniendo en cuenta la descripción del “paso a paso” y la simplificó hasta un punto, pero no despejó la incógnita. Finalmente, un estudiante no tuvo en cuenta la descripción del “paso a paso” para la simplificación de la ecuación y no estableció la solución de esta.

De acuerdo a estos resultados se identifica un acercamiento importante al proceso de operar lo desconocido, pues la gran mayoría de los estudiantes despejan la incógnita de la ecuación teniendo en cuenta el “paso a paso” que considera las propiedades de la suma y producto de los

números racionales, manipulando a la x como un número, lo cual refleja la perspectiva de Radford acerca de que en el pensamiento algebraico trabaja con cantidades desconocidas como si fueran conocidas de una manera analítica (p. 41), esto se puede observar en el registro de E1 (ver figura 22).

Solución de la ecuación	Detalle del paso a paso
$x + 4x + 2(4x) = 78$	Ecuación de un objeto
$x + 4x + 8x = 78$	Eliminación de paréntesis (Propiedad distributiva)
$(x + 4x + 8x) = 78$	asuración de es ^{seme} zante
$13x = 78$	Suma de los términos semejantes
$13x \cdot \frac{1}{13} = 78 \cdot \frac{1}{13}$	Multiplicación de factores
$\frac{13}{13} x = \frac{78}{13}$	Multiplicación de los factores
$1x = 6$	Similización del fact
$x = 6$	Todo número multiplicado por 1 me da el mismo número y despeje de la incógnita x (Propiedad del neutro de la multiplicación)

Figura 22. S1, Pb2, P7, E1

Es importante resaltar que los estudiantes tuvieron el primer acercamiento a este “paso a paso” en la estación 4 del circuito algebraico, lo que les facilitó herramientas para describir cada paso y manipular la ecuación hasta llegar a su solución, permitiéndoles acercarse cada vez más a la analiticidad, que corresponde a la operatividad de los objetos determinados y es uno de los componentes del pensamiento algebraico según Radford.

Situación 1: Problema 2, Pregunta 8 (S1, Pb2, P8)

Tabla 25. Tipificación S1, Pb2, P8

Pregunta 8: Encuentra la cantidad de votos que tuvo cada sabor de pastel en la votación y cuál fue el elegido.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que utilizan la solución de la ecuación ($x = 6$) para generar las otras cantidades por medio de operaciones (6×4 y 24×2), comprueban que la suma de estas corresponde a la cantidad total ($6 + 24 + 48 = 78$), asignan cada valor a su cantidad correspondiente (cantidad de votos por el pastel de naranja: 6, cantidad de votos por el pastel de chocolate: 24, cantidad de votos por el pastel de vainilla: 48) e indican que el sabor de pastel elegido fue el de vainilla. (E1, E2, E3, E4, E6)	5	62,5%
2	Estudiantes que utilizan la estrategia de la división y el tanteo para generar las cantidades, asignan cada valor a su cantidad correspondiente (cantidad de votos por el pastel de naranja: 6, cantidad de votos por el pastel de chocolate: 24, cantidad de votos por el pastel de vainilla: 48), comprueban que la suma de estas corresponde a la cantidad total e indican que el sabor de pastel elegido fue el de vainilla. (E7)	1	12,5%
3	Estudiantes que hacen uso de la ecuación asociada al problema para asignar un valor a la incógnita y comprueban la igualdad ($6 + 6 \times 4 + 2 \times 4 \times 6 = 78$), luego asignan un valor a las cantidades de votos de cada sabor (cantidad de votos por el pastel de naranja: 6, cantidad de votos por el pastel de chocolate: 24, cantidad de votos por el pastel de vainilla: 48) e indican que el sabor de pastel elegido fue el de vainilla. (E8)	1	12,5%
4	Estudiantes que no responden con relación con la pregunta. (E5)	1	12,5%

Según la pregunta 8, problema 2, situación 1, se evidencia que el 62,5% de los estudiantes hacen uso de la solución de la ecuación para generar las cantidades desconocidas en el problema a partir de las relaciones multiplicativas establecidas y asignan la cantidad de votos para cada sabor de pastel, indicando que el sabor de pastel elegido fue el de vainilla. Para este tipo de respuesta, los 5 estudiantes comprobaron que las cantidades encontradas corresponden al total del problema.

Por otra parte, E6 a pesar de tener la solución de la ecuación en la pregunta anterior recurre a la estrategia de la división del total entre el número de partes y el tanteo, buscando en la tabla del 4, números que coincidan con las relaciones del problema, haciendo uso de $4 \times 6 = 24$ para generar la última cantidad, multiplicando $24 \times 2 = 48$, y finalmente asignar los valores encontrados a la cantidad correspondiente (ver figura 23).

6×4

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 2 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 78 \overline{) 1826} \\ 156 \\ \hline 266 \\ 234 \\ \hline 326 \\ 312 \\ \hline 146 \\ 144 \\ \hline 26 \end{array}$$

 Naranja = 6
 Chocolate = 24
 Vainilla = 48
 $4 \times 1 = 4$
 $4 \times 2 = 8$
 $4 \times 3 = 12$
 $4 \times 4 = 16$
 $4 \times 5 = 20$
 $4 \times 6 = 24$
 $4 \times 7 = 28$
 $4 \times 8 = 32$
 $4 \times 9 = 36$
 $4 \times 10 = 40$
 Vainilla gana con 48 votos

Figura 23. S1, Pb2, P8, E7

Por otro lado, un estudiante reemplaza en la ecuación asociada al problema $x = 6$ y a partir de ahí establece las otras cantidades, asignando a la cantidad de votos por el pastel de naranja, chocolate y vainilla como 6, 24 y 48 respectivamente e indica que el sabor de pastel elegido fue el de vainilla. Por último, un estudiante no respondió nada asociado a la pregunta. Con estos resultados, los estudiantes reconocen el sentido de la incógnita despejada en el punto anterior, que corresponde a la cantidad de votos por el pastel de naranja y es la cantidad generadora, pues a partir de ella establecen las otras dos cantidades desconocidas teniendo en cuenta las relaciones entre ellas, para sumarlas y comprobar si esto corresponde a la cantidad total de votos. Esto permite concluir que los estudiantes comprendieron la estructura del problema y pudieron dar solución al mismo, como se observa en el registro de E1 (ver figura 24).

$$\begin{array}{r} 6 \\ 4 \times \\ \hline 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 2 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 24 \\ + 6 \\ \hline 78 \end{array}$$

 Naranja: 6 votos
 Chocolate: 24 votos
 Vainilla: 48 votos
 El elegido fue vainilla

Figura 24. S1, Pb2, P8, E1

De lo anterior se afirma que en cuanto a la resolución del problema los estudiantes hacen uso de estrategias como el tanteo y la asignación del valor numérico a la incógnita luego de haber resuelto la ecuación, métodos usados en las estaciones 3 y 4 del juego, lo que evidencia que reconocen el sentido de la ecuación y el significado de la incógnita para la solución del problema, tal como lo menciona Radford (2010) al considerar la designación simbólica o expresión semiótica de los objetos como uno de los componentes del pensamiento algebraico. En relación con el juego se destaca el proceso de verificación mencionado en la matriz de análisis y desarrollado a lo largo de la propuesta ya que, se evidencia que los estudiantes comprueban la efectividad de las representaciones y operaciones realizadas.

Problema 3. Para participar de la fiesta, la profesora Tatiana propuso a los estudiantes tres temáticas para la elección de sus vestuarios: vestuario neón, vestuario playero o vestuario Barbie. Se sabe que de los estudiantes de grado octavo asistieron 84 a la fiesta, la cantidad de estudiantes con vestuario neón fueron dieciséis más que los que tenían vestuario de Barbie y los de vestuario playero fueron el triple que los de vestuario neón. ¿Cuántos estudiantes fueron vestidos en relación con cada temática? ¿Cuál temática tuvo mayor cantidad de estudiantes?

Situación 1: Problema 3, Pregunta 1 (S1, Pb3, P1)

Tabla 26. Tipificación S1, Pb3, P1

Pregunta 1: Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina si son conocidas o desconocidas.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que solo indican la cantidad total (Cantidad de personas que asistieron a la fiesta) y la cantidad de vestuarios de la fiesta, reconocen su valor numérico (84 y 3 respectivamente), y no determinan si son conocidas o desconocidas. (E1, E2)	2	25%
2	Estudiantes que determinan todas las cantidades del problema (cantidad de las personas que asistieron a la fiesta y cantidad de personas con vestuario neón, barbie y playero) e indican si son conocidas o desconocidas (conocida y desconocidas respectivamente). (E4, E5, E6, E8)	4	50%
3	Estudiantes que indican todas las cantidades del problema (cantidad de personas que asistieron a la fiesta y cantidad de personas que fueron con vestuario neón, barbie y playero), pero no determinan si son conocidas o desconocidas. (E7)	1	12,5%
4	Estudiantes que indican las cantidades mencionadas en el problema (cantidad de las personas que asistieron a la fiesta y cantidad de personas con vestuario neón, Barbie y playero), establecen si son conocidas o desconocidas (conocidas y desconocidas respectivamente) y realizan operaciones para asignar un valor numérico a cada una. (E3)	1	12,5%

A partir de los resultados registrados en la tabla anterior se evidencia que 2 de los 8 estudiantes no indicaron todas las cantidades involucradas en el problema, solo establecen la cantidad total con su valor numérico (84) y la cantidad de partes que conforman el total (3), sin explicitar si son conocidas o desconocidas. Por otro lado, 4 estudiantes indicaron las cuatro cantidades involucradas en el problema, reconociendo el total de estudiantes que asistieron a la fiesta como conocida, y a la cantidad de estudiantes con vestuario de Barbie, Neón y Playero como desconocidas.

De otra manera, un estudiante establece todas las cantidades del problema, pero no determinó si son conocidas o desconocidas. Finalmente, un estudiante indicó todas las cantidades involucradas en el problema, estableció que la cantidad total de estudiantes que asistieron a la fiesta es una cantidad conocida y que la cantidad de estudiantes con vestuario de Barbie, Neón y

Playero son cantidades desconocidas, además realizó operaciones para asignar un valor numérico a cada una.

Considerando estos resultados, la mayoría de los estudiantes reconocen las cuatro cantidades involucradas en el problema y la cantidad conocida por la cantidad total de estudiantes que asistieron a la fiesta, que fueron 84, ya que es la única cantidad cuyo valor numérico es explícito en el problema. De forma interesante, E1 no indica todas las cantidades, pero representa con una x la cantidad de estudiantes con vestuario de Barbie como se puede ver en su registro (ver figura 25), se puede considerar que E1 reconoce la cantidad generadora del problema, y por esta razón solo representa esta cantidad y no las otras, esto permite concluir que E1 relaciona el símbolo de la x con la cantidad generadora, lo cual es un elemento importante para el planteamiento de la ecuación asociada al problema.

84: fueron a la fiesta
3: tipos de vestuario
 x : Barbie

Figura 25. S1, Pb3, P1, E1

Por otra parte, al igual que en problema 2, E3 establece las cantidades involucradas en el problema y además realiza operaciones para establecer el valor numérico que cada una, como se puede ver en su registro (ver figura 26), lo que demuestra que este estudiante todavía tiene una necesidad de determinancia y que además realiza un razonamiento aritmético para poder obtener los valores numéricos, lo cual es característico del pensamiento aritmético al ser el que manipula objetos determinados.

desconocidas.
 $8-1+8-3=84$
 $8-1=42$
 $8-2=42$
 El tema playero fue el demás votos
 $\begin{array}{r} 84 \overline{) 12} \\ 8 \overline{) 42} \\ \underline{04} \\ 4 \overline{) 00} \end{array}$
 Playero: Desconocido
 Neon: Desconocido
 Barbie: Desconocida
 Total: conocida

Figura 26. S1, Pb3, P1, E3

De los registros presentados, se puede deducir que en el proceso de transición del pensamiento aritmético al algebraico que los estudiantes E1 y E3 se encuentran en niveles diferentes de aproximación, pues E1 establece representaciones en lenguaje algebraico para las cantidades indeterminadas, mientras que E3, sin solicitarlo, busca establecer mediante operaciones propias de la aritmética, los valores de las cantidades indeterminadas.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 2 (S1, Pb3, P2)

Tabla 27. Tipificación S1, Pb3, P2

Pregunta 2: Escribe las relaciones entre las cantidades involucradas			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que mencionan las dos relaciones explícitas entre las cantidades presentadas en el problema (la cantidad de estudiantes vestidos de neón son 16 más que los vestidos de Barbie, y la cantidad de estudiantes vestidos de playero es el triple de los vestidos de neón). (E1, E2, E3, E4, E6)	5	62,5%
2	Estudiantes que mencionan la existencia de una relación entre las cantidades del problema, pero no explicitan cuáles son esas relaciones. (E5)	1	12,5%
3	Estudiantes que mencionan solo una de las dos relaciones entre las partes presentadas en el problema (la cantidad de estudiantes vestidos de neón son 16 más que los vestidos de Barbie). (E8)	1	12,5%
4	Estudiantes que mencionan dos relaciones presentes en el problema (la cantidad de estudiantes vestidos de neón son 16 más que los de Barbie, y la cantidad de estudiantes con vestuario playero es el triple de los vestidos de neón) realizan procedimientos que permiten asignar un valor acertado (4 estudiantes con vestuario de Barbie, 20 estudiantes con vestuario neón y 60 con vestuario playero). (E7)	1	12,5%

De acuerdo con los resultados obtenidos en la pregunta 2, problema 3, situación 1, se evidencia que el 62,5% de los estudiantes mencionó las relaciones explícitas entre las cantidades que conforman el total (la cantidad de estudiantes vestidos de neón tiene 16 más que los vestidos de Barbie, y la cantidad de estudiantes vestidos de playero es el triple de los vestidos de neón), pero no explicitan la relación implícita entre las partes y el total.

Por otra parte, un estudiante mencionó que hay una relación entre las partes (cantidad de estudiantes vestidos de neón y cantidad de estudiantes vestidos de Barbie) pero no la explicita. Otro estudiante menciona solo una de las dos relaciones entre las partes de las dos presentadas en el problema (la cantidad de estudiantes vestidos de Neón son 16 más de los vestidos de Barbie) y, por último, E7 mencionó las relaciones explícitas del problema y realizó operaciones que le permitieron asignar de forma acertada los valores numéricos correspondientes a cada cantidad del problema, esto muestra lo interiorizado que pudo estar hasta este punto cada uno de los aspectos en relación con el pensamiento algebraico trabajados a lo largo de la propuesta, donde se hace uso de las relaciones para resolver el problema con un tipo de razonamiento particular (ver figura 27).

El neón tiene 16 mas que Barbie
 y el play tiene el triple que el neón

Barbie = 4
 neon = 20
 Play = 60

84

24 + 60 = 84

Figura 27. S1, Pb3, P2, E7

Se evidencia que ningún estudiante indicó la relación implícita del problema a diferencia de los anteriores problemas en los que algunos sí la consideraban, pero la mayoría identificaron fácilmente ambas relaciones explícitas, de alguna forma se infiere que los estudiantes dan por hecho esta relación, que da cuenta de la estructura general del problema. Como se ha mencionado reiteradas veces, la identificación de relaciones es importante para el acercamiento a la representación en lenguaje algebraico de las cantidades y el posterior establecimiento de la ecuación tal como lo menciona Puig, comprender el enunciado, identificando las cantidades conocidas (o datos) y las cantidades desconocidas (incógnitas), así como las relaciones entre ellas.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 3 (S1, Pb3, P3)

Tabla 28. Tipificación S1, Pb3, P3

Pregunta 3: Si x representa la cantidad de estudiantes que fueron vestidos con temática de Barbie completa la siguiente tabla.

Lenguaje natural	Lenguaje simbólico
Cantidad de estudiantes con vestuario de Barbie	x
Cantidad de estudiantes con vestuario playero	
Cantidad de estudiantes con vestuario neón	
Suma de la cantidad de estudiantes vestidos con cada una de las temáticas	
Suma de la cantidad de estudiantes vestidos con cada una de las temáticas igual a 84	

TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que representan correctamente en lenguaje algebraico las cantidades involucradas en el problema teniendo en cuenta las relaciones entre ellas y establecen la ecuación asociada al problema ($x + (x + 16) + 3 \times (x + 16) = 84$). (E1, E3, E4, E7)	4	50%
2	Estudiantes que representan correctamente en lenguaje algebraico las cantidades involucradas en el problema teniendo en cuenta las relaciones entre ellas y no establecen la ecuación asociada al problema. (E2, E5, E6, E8)	4	50%

De acuerdo a los resultados obtenidos en la pregunta 3, problema 3, situación 1, se reconoce que el 50% de los estudiantes estableció adecuadamente la ecuación asociada al problema " $x + (x + 16) + 3 \times (x + 16) = 84$ ", ya que representaron en lenguaje algebraico cada cantidad involucrada en el problema considerando las relaciones (aditiva y multiplicativa) entre estas, indicando que la cantidad de estudiantes con vestuario playero es " $(x + 16) \times 3$ ", la cantidad de estudiantes con vestuario neón es " $x + 16$ ", la suma de la cantidad de estudiantes vestidos con cada una de las temáticas es " $x + (x + 16) + 3 \times (x + 16)$ ", lo cual representa el tipo de respuesta esperada, que los estudiantes logran establecer de forma clara la estructura del problema tanto en el lenguaje natural como en el lenguaje algebraico.

Por otro lado, el 50% de los estudiantes, a pesar de que representaron adecuadamente en lenguaje algebraico cada cantidad, no establecieron la ecuación asociada al problema,

específicamente E2, E5 y E8 que indican que la suma de la cantidad de estudiantes vestidos con cada una de las temáticas igual a 84 es " $(16 + x) + x + 3 + (16 + x) = 84$ ", " $x + x + 16 + 3 = 84$ ", " $x + x + 16 + x \times 3 = 84$ " respectivamente, donde dejan de un lado las expresiones establecidas anteriormente, al proponer una nueva representación que puede estar errada dejando de un lado las relaciones del problema y cómo se pueden asociar con la representación de cada cantidad.

Se evidencia que a comparación del problema 2, en este problema todos los estudiantes escribieron correctamente la expresión algebraica correspondiente a cada cantidad del problema, y aunque solo la mitad logró llegar a la ecuación asociada al problema, se evidencia en el grupo completo de estudiantes un avance en la forma de representar por medio del lenguaje algebraico, lo cual, como se ha mencionado reiteradas veces, es fundamental para la resolución de este tipo de problemas con ayuda de la ecuación de primer grado.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 4 (S1, Pb3, P4)

Tabla 29. Tipificación S1, Pb3, P4

Pregunta 4: Escribe y resuelve la ecuación asociada al problema.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que desarrollan la ecuación asociada al problema $(x + (x + 16) + 3 \times (x + 16) = 84)$ y hallan el valor de la incógnita ($x = 6$). (E1, E2, E6, E8)	4	50%
2	Estudiantes que hacen uso de la ecuación asociada al problema $(4 + (4 + 16) + 3 \times (4 + 16) = 84)$ para asignar un valor a la incógnita y comprobar la igualdad. (E3, E4, E7)	3	37,5%
3	Estudiantes que no reconocen la ecuación asociada al problema. (E5)	1	12,5%

A partir de los resultados de la pregunta 4, problema 3, situación 1, se evidencia que el 50% de los estudiantes hacen la ecuación a partir de la manipulación algebraica para despejar la incógnita, el propósito de la pregunta va en relación con lo mencionado por Kieran, ya que no es suficiente con identificar lo general en lo particular, pues la representación y manipulación

simbólica también es necesaria, lo que demuestra un verdadero y paso de los procesos aritméticos a los algebraicos. Un ejemplo claro de este tipo de respuesta es E6, quien establece un procedimiento detallado luego de plantear la ecuación. (ver figura 28).

1. Escribe y resuelve la ecuación asociada al problema.

$$\begin{aligned}
 &x + (x + 16) \times 3 + (x + 16) = 84 \\
 &x + x + 16 \times 3 + x + 16 = 84 \\
 &x + 48 + x + 16 = 84 \\
 &5x + 64 = 84 \\
 &5x + 64 - 64 = 84 - 64 \\
 &5x + 0 = 20 \\
 &5x = 20 \\
 &\frac{1}{5} \times 5x = 20 \times \frac{1}{5} \quad x = 4
 \end{aligned}$$

Handwritten calculations on the right side of the page:

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 \times 3 \\
 \hline
 48
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 + 16 \\
 \hline
 32
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 84 \\
 - 64 \\
 \hline
 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 20 \\
 \div 5 \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

Figura 28. S1, Pb3, P4, E6

Ahora bien, el 37,5% de los estudiantes utilizan la ecuación asociada al problema como estrategia para comprobar que el número asignado a x satisface la igualdad, un trabajo propio del pensamiento aritmético que manifiesta la necesidad de determinancia pero donde la ecuación cumple un papel fundamental porque facilita este trabajo, aspectos como la representación algebraica y el reconocimiento de la cantidad generadora (la que se debe hallar) son fundamentales y adquiridas desde el trabajo realizado dentro del juego. Un ejemplo de ello es E4, que usa la ecuación a partir de procedimientos aritméticos mediante el tanteo (ver figura 29). Finalmente, un estudiante no reconoce la ecuación asociada al problema.

1. Escribe y resuelve la ecuación asociada al problema.

$$\begin{aligned}
 &x + (x + 16) \times 3 + x + 16 = \\
 &4 + 20 \times 3 = \\
 &= 64 + 20 \\
 &= 84
 \end{aligned}$$

Handwritten note on the right: 84 total

Figura 29. S1, Pb3, P4, E4

En general, se evidencia que la mayoría de los estudiantes logran reconocer la ecuación como un medio para dar solución al problema, independientemente del razonamiento usado o la forma de manipulación que le dan, aritmética o algebraicamente, existe un acercamiento notable

que permite el paso evidente en relación con el pensamiento algebraico, a diferencia de la manera de resolución de los primeros problemas, en este punto hay conciencia de gran parte de los aspectos involucrados en el juego, la eficacia de la ecuación se convierte en un punto clave para que los estudiantes, reconozcan cantidades, las relaciones entre ellas, establezcan una representación algebraica y la ecuación asociada, para finalmente tomar decisiones en cuanto a cómo se manipula la ecuación.

Situación 1: Problema 3, Pregunta 5 (S1, Pb3, P5)

Tabla 30. Tipificación S1, Pb3, P5

Pregunta 5: Escribe la cantidad de estudiantes que fueron vestidos en relación con cada temática y qué temática tuvo mayor cantidad de estudiantes.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen de forma correcta todas las cantidades de estudiantes con vestuarios por cada temática (la cantidad de estudiantes vestidos de Barbie es 4, la cantidad de estudiantes vestidos de neón es 20 y la cantidad de estudiantes con vestuario playero son 60), siendo la mayor cantidad la de los estudiantes con vestuario playero. (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8)	7	87,5%
2	Estudiantes que establecen de forma incorrecta una sola cantidad en relación con las temáticas (la cantidad de estudiantes vestidos de Playero: 47) y no menciona cuál fue la que tuvo mayor cantidad de estudiantes. (E5)	1	12,5%

Según los resultados de la pregunta 5, problema 3, situación 1, se evidencia que el 87,5% de los estudiantes establece el número de estudiantes vestidos con cada vestuario considerando las relaciones aditiva y multiplicativa presentadas en el problema, indicando que el vestuario con más estudiantes vestidos es el playero.

Por otra parte, un estudiante no establece todas las cantidades de cada tipo de vestuario, pues solo indicó que el vestuario playero tuvo 47 estudiantes vestidos, lo cual no corresponde con la cantidad de estudiantes que vistieron de esa manera que fueron 60, no es posible identificar desde su registro de dónde proviene el 47 establecido.

Se concluye a partir de estos resultados que gran parte de los estudiantes reconocen la solución de la ecuación como la cantidad de estudiantes con vestuario de Barbie, lo cual manifiesta que los estudiantes desde que designaron al símbolo x un significado en la pregunta 3 de este problema, no perdieron de vista ese significado. Y a partir de esta solución establecieron las otras dos cantidades, de lo cual se infiere que los estudiantes resolvieron el problema por medio de la estrategia de solución brindada por la ecuación del problema. Esto permite ver un acercamiento más profundo de los estudiantes a la ecuación como estrategia de solución del problema teniendo en cuenta la designación simbólica de cada uno de los objetos manipulados.

De las preguntas asociadas al problema 3, se evidencia un avance significativo en las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas de repartición desigual a partir de la ecuación de primer grado, pues cada vez menos estudiantes realizan razonamientos propios del pensamiento aritmético para dar solución al problema, sino que al comprender la estructura del mismo, se posibilita la simbolización correcta en lenguaje algebraico de los datos del problema, lo que facilita el planteamiento de la ecuación. Las estrategias utilizadas por los estudiantes para hallar la solución de la ecuación siguen siendo diversas y relacionadas con algunas estaciones del circuito algebraico utilizado para resolver el primer problema de esta situación, pues algunos estudiantes la reducen manipulando los símbolos apoyados del “paso a paso” (estación 4) y otros solo buscan por medio del tanteo números que satisfagan la igualdad (estación 3), pero es evidente que la ecuación asociada al problema empieza a tomar sentido en los estudiantes para dar solución al mismo.

3.4.2 Organización y análisis de resultados sobre la Situación 2

Problema 1. Al comprar las entradas para ingresar al parque, el vendedor confundido recibe el dinero de las entradas al parque de las familias Suárez, Arévalo y Ortega y sabe que el valor total de las entradas fue \$120.000, el vendedor desconoce el dinero que pagó cada familia, pero se sabe que la familia Ortega pagó el triple del total de la familia Suárez y la familia Arévalo pagó \$10.000 más que la familia Suárez. ¿Cuánto dinero pagó cada familia por la entrada al parque?

Situación 2: Problema 1, Pregunta 1 (S2, Pb1, P1)

Tabla 31. Tipificación S2, Pb1, P1

Pregunta 1: Identifica y escribe con lo mencionado en el problema anterior cuáles son las cantidades conocidas y desconocidas			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que indican las tres cantidades que conforman el total como desconocidas (cantidad de dinero pagado por la familia Arévalo, cantidad de dinero pagado por la familia Suárez y cantidad de dinero pagado por la familia Ortega) y establecen el valor numérico del total (120.000). (E1, E4, E6, E7, E8)	5	62,5%
2	Estudiantes que indican las tres cantidades que conforman el total como desconocidas (cantidad de dinero pagado por la familia Arévalo, cantidad de dinero pagado por la familia Suárez y cantidad de dinero pagado por la familia Ortega). (E2, E3, E5)	3	37,5%

De la tabla anterior se infiere que el 62,5% indica la cantidad de dinero pagado por la familia Arévalo, la cantidad de dinero pagado por la familia Suárez y la cantidad de dinero pagado por la familia Ortega, además establecen el valor numérico del total (120.000). A continuación, vemos la diferencia con la respuesta de E8, a pesar de que todos responden correctamente a la pregunta como primer paso para la comprensión del problema en relación con el reconocimiento de cantidades, E8 asigna una representación algebraica a cada una de las cantidades mencionadas, lo que muestra que hay un mayor acercamiento al pensamiento algebraico en el cual se trabaja con cantidades conocidas y desconocidas en un mismo nivel (ver figura 30).

total 120.000 conocida
 f. Ortega 2.3 desconocida
 f. Suarez 2 desconocida
 f. Arévalo 2 + 10.000 desconocida

Figura 30. S2, Pb1, P1, E8

Por otra parte, el 37,5% de los estudiantes sólo mencionan las tres cantidades que conforman el total como desconocidas, la cantidad de dinero pagado por la familia Arévalo, la cantidad de dinero pagado por la familia Suárez y la cantidad de dinero pagado por la familia Ortega, dejando de un lado el total. Análogamente, el acercamiento al pensamiento algebraico es notable en todos los estudiantes, ya que reconocen inmediatamente las cantidades que se mencionan en el problema. Un ejemplo de ello es E3, quien sólo menciona las tres cantidades que conforman el total del problema (ver figura 31).

Suarez = Desconocido
 Ortega = Desconocido
 Arévalo = Desconocido

Figura 31. S2, Pb1, P1, E3

Situación 2: Problema 1, Pregunta 2 (S2, Pb1, P2)

Tabla 32. Tipificación S2, Pb1, P2

Pregunta 2: Escribe las relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas presentadas en el problema.			
TIPO DE RESPUESTA			
		Fa	Fr
1	Estudiantes que mencionan dos de las relaciones entre las cantidades que conforman el total (la familia Arévalo pagó \$10.000 más que la familia Suárez y la familia Ortega pagó el triple que la familia Suárez). (E1, E2, E4, E5, E6, E7)	6	75%
2	Estudiantes que mencionan solo una relación entre las cantidades involucradas en el problema (la familia Arévalo pagó \$10.000 más que la familia Suárez). (E3, E8)	2	25%

De la tabla anterior se evidencia que el 75% de los estudiantes mencionaron las dos relaciones que son explícitas en el problema (aditiva y multiplicativa), que son las que se dan entre las cantidades que conforman el total, y el 25% sólo mencionó una de ellas (aditiva). Es importante resaltar que ningún estudiante manifestó la relación implícita del problema “la suma de

la cantidad pagada por cada familia es igual a 87", lo que deja la posibilidad, con base a los resultados de los problemas anteriores, de que esta relación es asumida por los estudiantes.

A partir de estos resultados se concluye que los estudiantes cada vez identifican de forma más directa las relaciones entre las cantidades del problema, lo que indica que hay una posibilidad más amplia de que comprendan la estructura del problema, lo cual es de vital importancia para el establecimiento de la ecuación asociada al problema.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 3 (S2, Pb1, P3)

Tabla 33. Tipificación S2, Pb1, P3

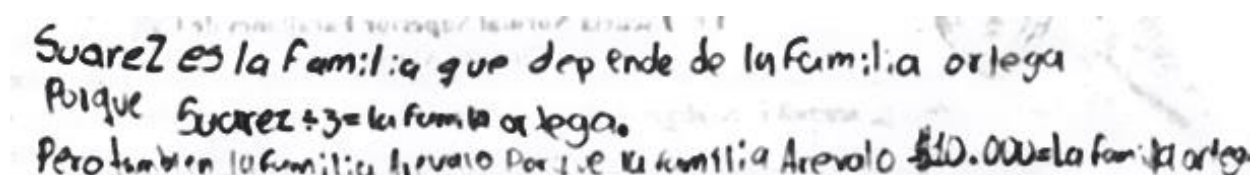
Pregunta 3: Escribe de qué familia (Arévalo o Suárez) depende la cantidad de dinero pagado por los Ortega y explica por qué.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la cantidad de dinero pagado por la familia Ortega depende del dinero pagado por la familia Suárez de manera correcta. (E1, E2, E4, E5, E6, E8)	6	75%
2	Estudiantes que indican que la cantidad de dinero pagado por la familia Suárez depende de la cantidad de dinero pagado por la familia Ortega. (E3)	1	12,5%
3	Estudiantes que no responden la pregunta. (E7)	1	12,5%

De acuerdo con la tabla anterior, el 75% de los estudiantes responden de manera correcta a la pregunta propuesta, con base en la información presentada en el problema, al indicar que la cantidad de dinero pagado por la familia Ortega depende del dinero pagado por la familia Suárez, debido a que se menciona que “*la familia Ortega pagó el triple del total de la familia Suárez*”, de donde se infiere que los estudiantes logran identificar la relación entre las cantidades para afirmar lo que indican en su respuesta, teniendo presente que el reconocimiento de las relaciones como se ha mencionado antes es una de las características más importantes del pensamiento algebraico. A continuación, se presenta la respuesta de E5 en relación con esta pregunta (ver figura 32).

La Suárez porque la Ortega tiene el triple que Suárez.

Figura 32. S2, Pb1, P3, E5

Por otro lado, E3 menciona que la cantidad de dinero pagado por la familia Suárez depende de la cantidad de dinero pagado por la familia Ortega, a pesar de que su razonamiento es válido y acertado la forma en que es expresado no es la adecuada, debido que con base en las relaciones mencionadas en el problema “la familia Ortega pagó el triple del total de la familia Suárez” y “la familia Arévalo pagó \$10.000 más que la familia Suárez”, el estudiante intenta darle ese sentido de inversibilidad a las operaciones, aspecto que estuvo presente en la primera estación del juego y es un aspecto fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico (ver figura 33).



Handwritten text in Spanish: "Suarez es la familia que depende de la familia Ortega. Porque $Suarez + 3 = \text{la familia Ortega}$. Pero también la familia Arévalo porque la familia Arévalo \$10.000 es la familia Ortega."

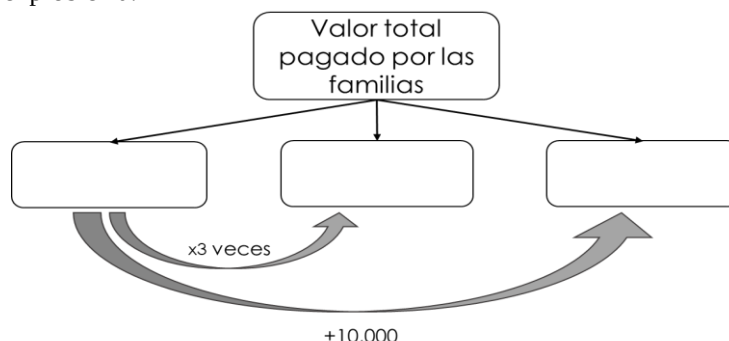
Figura 33. S2, Pb1, P3, E3

De lo anterior, se evidencia que para E3 la cantidad de dinero que gastó la familia Suarez depende de la familia Ortega porque $\text{Cant. dinero de F. Suárez} \cdot 3 = \text{Cant. dinero F. Ortega}$, cuando realmente al aplicar la inversibilidad de las operaciones lo que se puede decir es que $\text{Cant. dinero de F. Ortega} \cdot 3 = \text{Cant. dinero F. Suarez}$, en este caso la familia Suarez si dependería de la familia Ortega tal como lo mencionó E3. Por último, E7 no da respuesta a la pregunta, según su trabajo desarrollado a lo largo de la implementación se considera que pasó por alto la pregunta, ya que hubo una participación activa en todo el proceso.

En conclusión, con esta pregunta se resaltan algunos elementos presentes en el juego, como lo fue la inversibilidad de las operaciones para establecer equivalencia entre cantidades y por otro lado el reconocimiento de la cantidad generadora como parte del análisis de contenido, lo que permite indicar el carácter de dependencia entre cantidades por medio de las relaciones presentes en el problema y en general comprender la estructura del problema como primer paso de la regla propuesta por Puig para solucionarlo.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 4 (S2, Pb1, P4)

Pregunta 4: Completa la siguiente estructura semántica teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas del problema.



Esta pregunta fue respondida por todos los estudiantes de la misma manera al completar correctamente los espacios en blanco del diagrama de izquierda a derecha con Suárez, Ortega y Arévalo, teniendo en cuenta que la familia Ortega pagó el triple de la familia Suárez y la familia Arévalo pagó \$10.000 más que la familia Suárez, se puede evidenciar con estos resultados que los estudiantes comprendieron el sentido de las relaciones y con ello la estructura del problema, pues reconocen cómo están conformadas las cantidades en términos de sus relaciones.

Es importante resaltar que este diagrama fue reconocido por los estudiantes en el relevo algebraico del problema 2 de la situación 1 y es una heurística que facilita la organización del razonamiento de los estudiantes con relación a la estructura del problema, lo cual se ve reflejado en estos resultados y es valioso para la próxima representación en lenguaje algebraico.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 5 (S2, Pb1, P5)

Tabla 34. Tipificación S2, Pb1, P5

Pregunta 5: Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas			
		Lenguaje Cotidiano	Lenguaje Simbólico
		Valor que pagó la familia Suárez	x
		Valor que pagó la familia Arévalo	
		Valor que pagó la familia Ortega	
		La suma del valor que pagaron las 3 familias	
		La suma del valor que pagaron las 3 familias igual a 120.000	
TIPO DE RESPUESTA			Fa Fr
1	Estudiantes que representan correctamente en lenguaje algebraico las cantidades involucradas en el problema teniendo en cuenta las relaciones entre ellas y establecen la ecuación asociada al problema ($x + (x + 10.000) + (3x) = 120.000$). (E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8)		7 87,5%
2	Estudiantes que representan correctamente en lenguaje algebraico las cantidades involucradas en el problema teniendo en cuenta las relaciones entre ellas y no establecen la ecuación asociada al problema. (E3)		1 12,5%

De acuerdo con los resultados obtenidos en la pregunta 5, problema 1, situación 2, se evidencia que el 87,5% de los estudiantes estableció adecuadamente la ecuación asociada al problema " $x + (x + 10.000) + (3x) = 120.000$ ", ya que representaron en lenguaje algebraico cada cantidad involucrada en el problema considerando las relaciones entre estas, indicando que el valor que pagó la familia Arévalo es " $x + 10.000$ ", el valor que pagó la familia Ortega es " $3x$ " y la suma del valor que pagaron las tres familias es " $x + (x + 10.000) + (3x)$ ", lo cual representa el tipo de respuesta esperada, ya que los estudiantes logran asociar la estructura del problema mediante las relaciones con expresiones en lenguaje simbólico, que permite una aproximación acertada a la ecuación. Esto evidencia el gran impacto que tuvo la segunda estación en el juego y como los instrumentos heurísticos dan sentido al proceso de resolución de problemas en la mayoría de los estudiantes.

Por otro lado, E3 es el único estudiante que representa adecuadamente en lenguaje algebraico cada cantidad, pero no logra establecer la ecuación asociada al problema, se evidencia que pasa por alto las expresiones establecidas anteriormente (ver figura 34).

Lenguaje Cotidiano	Lenguaje Simbólico
Valor que pagó la familia Suárez	x
Valor que pagó la familia Arévalo	$x + 10.000$
Valor que pagó la familia Ortega	$x \times 3$
La suma del valor que pagaron las 3 familias	$x + (x + 10.000) + (x \times 3)$
La suma del valor que pagaron las 3 familias igual a 120.000	$x + 10.000 + (x \times 3) = 120.000$

Figura 34. S2, Pb1, P5, E3

Finalmente, se puede concluir que el reconocimiento de aspectos en relación con el pensamiento algebraico posibilita establecer expresiones en lenguaje algebraico por medio del lenguaje natural, y es presentado por los estudiantes en sus hojas de trabajo de una mejor manera gracias a los elementos reconocidos en el juego (estación 2), debido a que la mayoría logró interpretar a partir de la cantidad dada, valor que pagó la familia Suárez como " x ", las demás relaciones que se establecen a partir de esta.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 6 (S2, Pb1, P6)

Pregunta 6: Escribe de acuerdo con el cuadro anterior la ecuación que permite resolver el problema y encuentra su solución.

Para dar respuesta a esta pregunta, todos los estudiantes establecen la ecuación asociada al problema y encuentran su solución a partir de la simplificación de la misma, lo cual evidencia una total manipulación de los símbolos utilizados de parte de los 8 estudiantes, como se puede observar en el registro de E8, que realiza la simplificación de la ecuación sin necesidad de describir los pasos, pero considerando algunas acciones de las que se le presentaron en la estación 4 del circuito algebraico (ver figura 35).

$$x + (x + 10.000) + (x \times 3) = 120.000$$

$$5x + 10.000 = 120.000$$

$$5x + 10.000 - 10.000 = 120.000 - 10.000$$

$$5x = 110.000$$

$$x = 22.000$$

Figura 35. S2, Pb1, P6, E8

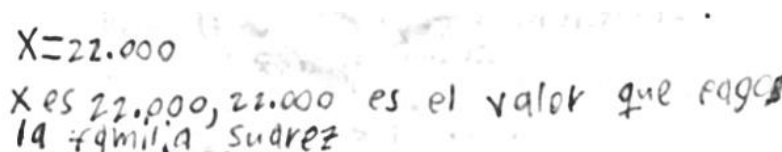
De lo anterior se concluye que los estudiantes reconocen en la simplificación de la ecuación una estrategia directa para encontrar el valor numérico de la incógnita de la ecuación, y se han despojado de estrategias como la división o el tanteo para llegar a la solución del problema. Esto revela con claridad el desarrollo de elementos propios del pensamiento algebraico, pues los estudiantes manipulan sin dificultad los objetos indeterminados que en este caso corresponde a la incógnita de la ecuación.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 7 (S2, Pb1, P7)

Tabla 35. Tipificación S2, Pb1, P7

Pregunta 7: Según la ecuación planteada y su solución, escribe qué significado tiene la x dentro del problema.		
TIPO DE RESPUESTA		Fa
		Fr
1	Estudiantes que indican que x representa el valor que pagó la familia Suárez y además es equivalente a \$22.000. (E8, E6, E2)	3
2	Estudiantes que indican que x representa el valor que pagó la familia Suárez. (E1, E3, E4, E5)	4
3	Estudiantes que no responden en relación con la pregunta. (E7)	1
		12,5%

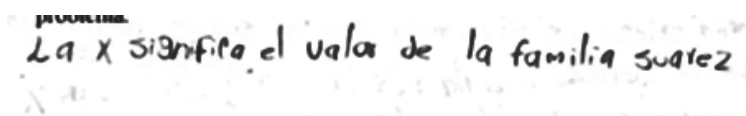
Según lo presentado en la tabla asociados a la pregunta 8, problema 1, de la situación 2, se observa que el 37,5% de los estudiantes indican que x representa el valor que pagó la familia Suárez y además es equivalente a \$22.000, debido a que ya han resuelto la ecuación y además reconocen que cantidad desconocida representa x , gracias al trabajo previo con los instrumentos heurísticos, el juego y la comprensión de la relación entre expresiones en lenguaje natural y lenguaje algebraico, lo que permite que los estudiantes den una respuesta acertada en relación con la pregunta. Esto se ve reflejado en la respuesta de E2 a continuación (ver figura 36).



$X=22.000$
 X es 22.000, 22.000 es el valor que pagó la familia Suárez

Figura 36. S2, Pb1, P7, E2

Además, el 50% de los estudiantes indican que x representa el valor que pagó la familia Suárez, lo que también está dentro de las respuestas esperadas, ya que a pesar de que no asignan una cantidad numérica luego de haber resuelto la ecuación, tienen presente que es la cantidad generadora que ha estado presente en los puntos anteriores y fue considerada para establecer representaciones algebraicas de las demás gracias a las relaciones existentes con ella, un ejemplo de ello es E5, quien por medio de su registro expresa lo mencionado anteriormente. (ver figura 37). Finalmente, un estudiante no responde con relación a la pregunta.



La x significa el valor de la familia Suárez

Figura 37. S2, Pb1, P7, E5

En conclusión con las respuestas a la pregunta anterior, los estudiantes en este punto logran dar un significado relevante a la x luego de su proceso dentro de la propuesta, ya que inicialmente para muchos no tenía sentido, luego se convirtió en la cantidad generadora a tal punto que todos la buscan directamente en el problema porque permite resolverlo y generar las demás cantidades, además asocian esta cantidad con alguno de los datos del problema de inmediato, lo que refleja que la comprensión de la estructura del problema se da de manera acertada en consecuencia con los aspectos del pensamiento algebraico identificados para resolver este tipo de problemas como el sentido de la indeterminancia al considerar incógnitas, la designación simbólica para representarlas.

Situación 2: Problema 1, Pregunta 8 (S2, Pb1, P8)

Pregunta 8: Escribe la cantidad de dinero que pagaron las familias Suárez, Arévalo y Ortega por la entrada al parque de diversiones

Con relación a esta pregunta, todos los estudiantes indicaron de manera correcta que la cantidad de dinero pagada por la familia Suárez fue \$22.000, la cantidad de dinero pagada por la familia Arévalo fue de \$32.000 y la cantidad de dinero pagada por la familia Ortega fue de \$66.000, se evidencia que al reconocer la cantidad generadora (cantidad de dinero pagado por la familia Suárez) y su valor numérico (22.000) los estudiantes pudieron establecer con seguridad las otras dos cantidades a partir de las relaciones, y de hecho solo tres estudiantes (E2, E6, y E7) tuvieron la necesidad de sumar las tres cantidades y comprobar el total (120.000), como se evidencia en el registro de E2 (ver figura 38).

The image shows handwritten text from a student's work. On the left, it lists: 'Suarez: 22.000', 'Arévalo: 32.000', and 'Ortega: 66.000'. To the right of these, there is a vertical addition: 66.000, 32.000, 22.000, with a horizontal line and the result 120.000.

Figura 38. S2, Pb1, P8, E2

De lo anterior se concluye que todos los estudiantes solucionaron el problema haciendo uso de la solución de la ecuación asociada al problema para generar las cantidades faltantes.

Problema 2. Los dueños del parque de diversiones desean conocer la cantidad precisa de personas que asistieron al parque y conforman las familias de grado 8-1, 8-2 y 8-3, esto debido a que lograron vender **320 tickets en total** y desean dar un premio al grado con mayor número de personas. Teniendo en cuenta que la máquina registradora refleja que el grado 8-2 cuenta con el **doble de personas** que el grado 8-3 y el grado 8-3 cuenta con **16 personas más** que el grado 8-1 ¿Cuántas personas asistieron por cada grado? ¿Cuál fue el grado que obtuvo el premio?

Situación 2: Problema 2 (S2, Pb2)

Tabla 36. Tipificación S2, Pb2

Pregunta: ¿Cuántas personas asistieron por cada grado? ¿Cuál fue el grado que obtuvo el premio?			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen y desarrollan la ecuación asociada al problema ($x + (x + 16) + 2(x + 16) = 320$), hallan el valor de la incógnita $x = 68$ y resuelven el problema generando las demás cantidades correctamente (cantidad de personas que asistieron por 8-1, cantidad de personas que asistieron por 8-2 y cantidad de personas que asistieron por 8-3 como 68, 168 y 84 respectivamente). (E1, E2, E4, E6, E7)	5	62,5%
2	Estudiantes que establecen y desarrollan hasta un punto la ecuación asociada al problema ($x + (x + 16) + 2(x + 16) = 320$), sin llegar a la solución de la misma y no resuelven el problema. (E5)	1	12,5%
3	Estudiantes que no tienen en cuenta todas las relaciones entre las cantidades involucradas en el problema, no establecen la ecuación asociada al problema y no resuelven el problema. (E8)	1	12,5%
4	Estudiantes que no hacen uso de la ecuación asociada al problema y logran resolverlo, asignando valores numéricos acertados a cada cantidad sin realizar procedimientos (cantidad de personas que asistieron por 8-1, cantidad de personas que asistieron por 8-2 y cantidad de personas que asistieron por 8-3 como 68, 168 y 84 respectivamente). (E3)	1	12,5%

Con respecto al problema 2, se evidencia que el 62,5% de los estudiantes, responden de manera correcta a la pregunta del problema, ya que establecen y desarrollan la ecuación asociada al problema ($x + (x + 16) + 2(x + 16) = 320$), hallan el valor de la incógnita $x = 68$ y resuelven el problema generando las demás cantidades, se puede afirmar que este porcentaje de estudiantes hace uso de cada uno de los elementos presentes desde el juego en relación con el reconocimiento de cantidades, relaciones entre cantidades, representaciones algebraicas, manipulación de la ecuación y finalmente realización de pruebas para verificar que se satisfacen las condiciones del problema. Por ejemplo, E1 a pesar de que en este caso no tiene preguntas orientadoras, da respuesta al problema planteando cada uno de los pasos que se desarrollaron dentro de la propuesta, específicamente el juego, para dar respuesta al problema en general (ver figura 39).

81 desconocido
 82 desconocido
 83 desconocido
 320 personas
 81: $x =$
 82: $(x+16) \times 2$
 83: $(x+16)$
 que el grado 82 tiene doble
 que el grado 83 y el grado 83
 tiene 16 personas mas que el grado
 81
 $x + (x+16) \times 2 + (x+16) = 320$

Problema 2
 $x + (x+16) \times 2 + (x+16) = 320$
 $x + x + 32 + x + 16 = 320$
 $4x + 48 = 320$
 $4x + 48 - 48 = 320 - 48$
 $4x + 0 = 272$
 $4x = 272$
 $\frac{4x}{4} = \frac{272}{4}$
 $1.x = 68$
 $x = 68$
 $81 = 68$
 $82 = 168$
 $83 = 84$
 320 total
 el grado que tuvo el premio fue 82

Figura 39. S2, Pb2, E1

En relación con lo anterior, E3 es uno de los estudiantes que da respuesta al problema, pero no hacen uso de la ecuación asociada al problema, asignando valores numéricos correctos a cada cantidad sin realizar procedimientos, lo que no permite inferir cómo pudo llegar a esta solución, ni el tipo de razonamiento realizado para responder de manera correcta (ver figura 40).

8-1=68
 8-2=168
 8-3=84
 El ganador fue 8-2

Figura 40. S2, Pb2, E3

Por otra parte, E5 no logra dar respuesta al problema propuesta a pesar de que establece y desarrolla hasta un punto la ecuación asociada al problema ($x + (x + 16) + 2(x + 16) = 320$), lo cual no evidencia el valor que podría obtener la incógnita, no se conocen las razones por las cuales

no termina el procedimiento en relación con la manipulación de la ecuación, pero a continuación se muestra que se realizó de manera acertada hasta el punto en que llegó (ver figura 41).

320 Tickets T.
 B-2 double de B-3 y B-3 tiene 16 q. que B-1.
 $x - B-1 = x + 16 \times 2 =$
 $B-2 = 2(x + 16) =$
 $B-3 = x + 16 \quad x + x + 16 + 2(x + 16) = 320 T.$
 $x + x + 16 + 2(x + 16) = 320 T.$
 $x + x + 16 + 2x + 32 = 320 T.$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 16 \\ \hline 32 \end{array}$$

$4x + 16 + 32 = 320$

Figura 41. S2, Pb2, E5

Ahora bien, E8 no da respuesta al problema ya que no tiene en cuenta todas las relaciones entre las cantidades involucradas en el problema, al establecer una ecuación que no representa el problema y tampoco es resuelta, de lo que se infiere que el estudiante al despojarse de las preguntas orientadoras no logra reconocer los aspectos que le permiten resolver el problema de manera acertada, al enfrentarse solo al problema, no encuentra los medios necesarios como en un inicio (estrategias asociadas al pensamiento aritmético), ahora hay una conciencia de lo que se debe hacer pero no cómo hacerlo (ver figura 42).

$x + (x + 16) + (x \times 2) = 320$
 $x + x + 16 + x \times 2 = 320$
 $4x + 16 = 320$
 $4x + 16 + (-16) = 320 + (-16)$
 $4x = 304$
 $x = 76$

Figura 42. S2, Pb2, E8

Problema 3. Anita fue con sus padres al parque de diversiones, estaba muy emocionada por la cantidad de actividades que podía realizar así que pidió a su padre **\$68.000** para realizar algunas de las actividades del parque y llevar recuerdos a su casa. Al salir del parque Anita llevaba fotos realizadas por el dron del parque, estas costaban **\$12.000 más** que el combo de perro caliente y un peluche gigante que regalaría a su abuela, el cual costó **\$32.000 más** que el combo de perro caliente ¿Cuánto dinero pagó Anita por cada cosa que compró en el parque?

Situación 2: Problema 3 (S2, Pb3)

Tabla 37. Tipificación S2, Pb3

Pregunta: ¿Cuánto dinero pagó Anita por cada cosa que compró en el parque?			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen y desarrollan la ecuación asociada al problema $(x + (x + 12.000) + (x + 32.000) = 68.000)$, hallan el valor de la incógnita $(x = 8.000)$ y resuelven el problema generando las demás cantidades correctamente (Costo del perro caliente: \$8.000, costo del peluche: \$40.000 y costo de las fotos: \$20.000). (E1, E2, E4, E6, E7)	5	62,5%
2	Estudiantes que establecen y desarrollan hasta un punto la ecuación asociada al problema $(x + (x + 12.000) + (x + 32.000) = 68.000)$, sin llegar a la solución de la misma y no resuelven el problema. (E5)	1	12,5%
3	Estudiantes que no tienen en cuenta todas las relaciones entre las cantidades involucradas en el problema, no establecen la ecuación asociada al problema y no resuelven el problema. (E8)	1	12,5%
4	Estudiantes que hacen uso de la estrategia del tanteo para asignar valores numéricos errados a cada cantidad (costo del combo de perro caliente, costo de las fotos tomadas con el dron y costo del peluche gigante como \$9.000, \$20.000 y \$39.000 respectivamente) teniendo en cuenta las relaciones entre algunas cantidades del problema. (E3)	1	12,5%

Con relación al problema 3, cinco estudiantes utilizaron correctamente la estrategia de la simplificación de la ecuación para solucionarlo, planteando la ecuación $x + (x + 12.000) + (x + 32.000) = 68.000$ a partir de las relaciones entre las cantidades y simplificándola por medio del “paso a paso”. Para llegar a la solución $x = 8.000$ que corresponde al precio del perro caliente, y así encontrar las otras dos cantidades. Esto se puede evidenciar en el proceso realizado por E2, quien establece que el precio del perro caliente es de \$8.000, el precio de las fotos \$20.000 y el

precio del peluche \$40.000 y que, para llegar a esos resultados, hace un salto directo a la ecuación, sin necesidad de establecer previamente las cantidades o las relaciones (ver figura 43).

$$\begin{aligned}
 &x(12.000+x) + (20.000+x) = 68.000 \\
 &x+12.000+x+32.000+x = 68.000 \\
 &3x+44.000 = 68.000 \\
 &3x+44.000+(+44.000) = 68.000+(+44.000) \\
 &3x+0 = 24.000 \\
 &3x = 24.000 \\
 &\frac{3x}{3} = \frac{24.000}{3} \\
 &1 \cdot x = 8.000
 \end{aligned}$$

Figura 43. S2, Pb3, E2

Por otro lado, un estudiante estableció la ecuación a partir de las representaciones de las cantidades, pero no la solucionó, simplificó la ecuación hasta un punto y no pudo continuar, sin darle respuesta al problema. Otro estudiante no tuvo en cuenta todas las relaciones entre las cantidades del problema y no planteó la ecuación correspondiente como se observa en el registro de E8 que expresa de manera incorrecta el precio de las fotos con el drone al confundir la relación “las fotos costaban \$12.000 más que el perro caliente” con “las fotos costaban \$12.000 más que el peluche y el perro caliente juntos”, lo que no corresponde a la comprensión de la estructura del problema, por esta razón, E8 no plantea la ecuación correspondiente al problema y aunque manipula correctamente la ecuación que plantea, llega a una solución que no tiene sentido en el contexto del problema y genera cantidades que no corresponden a la respuesta del mismo (ver figura).

$$\begin{aligned}
 &\text{Perro caliente: } x \quad \text{total: } 68.000 \\
 &\text{Peluche gigante: } 32.000 \\
 &\text{Fotos por el drone: } x + 32.000 + 12.000 \\
 &\text{Ecuación} \\
 &x + (x + 32.000) + (x + 32.000 + 12.000) = 68.000 \\
 &3x + 76.000 = 68.000 \\
 &3x = 68.000 - 76.000 \\
 &3x = -8.000 \\
 &x = -2.000 \\
 &\text{Perro caliente: } -2.000 \\
 &\text{Peluche gigante: } 30.000 \\
 &\text{Fotos por el drone: } 40.000
 \end{aligned}$$

Figura 44. S2, Pb3, E8

Finalmente, E3 nuevamente utiliza la estrategia de “crear un dato inicial al crear un número ficticio”, razonamiento propio del pensamiento aritmético según lo planteado por Bednarz y Janvier, para resolver el problema, pues genera números ficticios y los suma para comprobar que satisfacen la igualdad con la cantidad total. Sin embargo, las cantidades encontradas por E3, aunque satisfacen la cantidad total, no cumplen con las relaciones planteadas en el problema () ver figura 45.

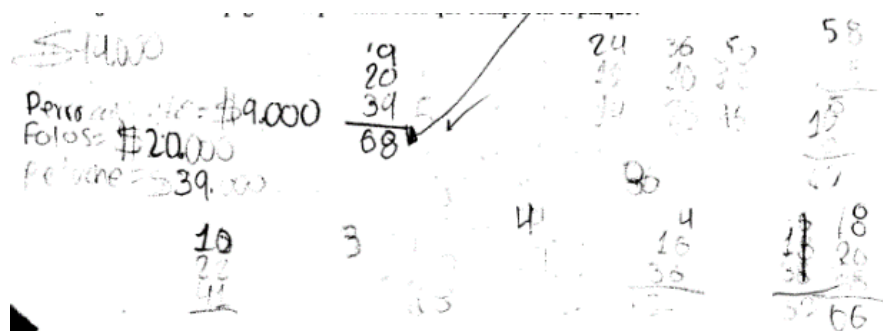


Figura 45. S2, Pb3, E3

Se concluye a partir de estos resultados que los estudiantes se encuentran en diferentes niveles de aproximación a la ecuación como estrategia para resolver este tipo de problemas, pues algunos la establecen y manipulan correctamente, otros la establecen, pero no la simplifican en su totalidad, otros intentan utilizarla para resolver el problema, pero al no comprender la estructura del mismo, no se establece la ecuación correcta. Para este tipo de respuestas es importante resaltar que los estudiantes representan en lenguaje algebraico las cantidades del problema a partir de la comprensión que han tenido del mismo, lo que es un avance significativo en el desarrollo del pensamiento algebraico, debido a que logran designar símbolos a las cantidades indeterminadas.

Por otra parte, E3, es el único estudiante que hasta este punto no reconoce la ecuación como estrategia inmediata para resolver el problema, pues sigue recurriendo a estrategias como el tanteo para dar solución al mismo, pero esta estrategia no fue efectiva en este problema.

Problema 4. Lucas y su hermano necesitan saber cuántos tickets deben recolectar en cada juego para obtener un monopatín como premio del parque de diversiones, considerando que se necesitan **420 tickets** para ganarlo y que la cantidad de tickets a obtener en la montaña rusa son **la tercera parte** de los obtenidos en el carrusel y **la mitad** de los de la rueda de la fortuna. ¿Cuántos tickets necesitan Lucas y su hermano de cada juego para llevarse el premio?

Situación 2: Problema 4 (S2, Pb4)

Tabla 38. Tipificación S2, Pb4

Pregunta: ¿Cuántos tickets necesitan Lucas y su hermano de cada juego para llevarse el premio?			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que establecen y desarrollan la ecuación asociada al problema ($x + 3x + 2x = 420$), hallan el valor de la incógnita ($x = 70$) y resuelven el problema generando las demás cantidades correctamente (cantidad de tickets de la montaña rusa, cantidad de tickets del carrusel y cantidad de tickets de rueda de la fortuna como 70, 210 y 140 respectivamente). (E1, E2, E3, E4, E6, E7)	6	75%
2	Estudiantes que establecen la ecuación asociada al problema ($x + 13x + 23x = 420$), y asignan un valor a la incógnita sin llegar a la solución del problema. (E8)	1	12,5%
3	Estudiantes que no responden la pregunta. (E5)	1	12,5%

En cuanto a los resultado presentados en la tabla, se observa que el 75% de los estudiantes logran dar respuesta al problema debido a que establecen y desarrollan la ecuación asociada al problema $x + 3x + 2x = 420$, hallan el valor de la incógnita $x = 70$ y resuelven el problema generando las demás cantidades correctamente indicando que la cantidad de tickets de la montaña rusa, la cantidad de tickets del carrusel y la cantidad de tickets de rueda de la fortuna son 70, 210 y 140 respectivamente, se evidencia que gran parte de los estudiantes logran manipular la ecuación de forma correcta y establecen los elementos trabajados a lo largo de la propuesta de forma detallada, un ejemplo de ello es E4, quien indica los elementos más importantes para plantear la ecuación y darle poder manipularla (ver figura 46).

montaña rusa = x
 carrusel = $x.3$
 rueda fortuna = $x.2$

$$x + x.3 + x.2 = 420$$

$$6x = 420$$

$$\frac{6}{1} = \frac{420}{6}$$

$$1x = 70$$

$1x = 140$
 $mt = 70$
 $cr = 210$

350
 70
 420

Figura 46. S2, Pb4, E4

Por otra parte, E8 logra plantear inicialmente la ecuación asociada al problema $x + 13x + 23x = 420$ y asigna un valor acertado a la incógnita, pero no realiza procesos para evidenciar cómo llegó hasta ahí y tampoco da respuesta al problema, debido a que el problema 4 fue uno de tipo pozo, poco trabajado a lo largo de la propuesta, E8 logra proponer una ecuación basado en la transformación a un problema tipo composición (ver figura 47). Finalmente, sólo un estudiante no da respuesta al problema, ni presenta procesos en relación con este.

$K1 = 4$
 Datos:
 T. carrusel: x
 T. montaña rusa: $(1/3) * x$
 T. rueda de la fortuna: $(2/3) * x$
 Total: 420

Ecuación

$$x + (1/3) * x + (2/3) * x = 420$$

$$3x + x + 2x = 1260$$

$$x = 210$$

Figura 47. S2, Pb4, E8

En conclusión, de las diferentes formas de respuesta se da cuenta que los estudiantes buscan transformar el problema de repartición tipo pozo, ya sea en uno tipo composición o tipo fuente, ya que tienen mayor cercanía con estos a lo largo de la propuesta, de lo que se infiere que en general todos los estudiantes logran comprender la estructura del problema, lo que permite establecer estrategias para resolverlo, de lo anterior se evidencia que el primer grupo de estudiantes considera su cantidad generadora como la cantidad de tickets obtenidos en la montaña rusa, por el contrario, E8 asigna como cantidad generadora la cantidad de tickets obtenidos en el carrusel, por ello el planteamiento de ecuaciones distintas. Ahora bien, esto refleja que el

desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes ha evolucionado considerablemente, al tener presente las relaciones entre cantidades, pero además la inversibilidad de las operaciones para asignar la cantidad generadora que más se les facilite reconocer, esto en relación con lo que menciona Almeida en su caracterización de los problemas de repartición desigual.

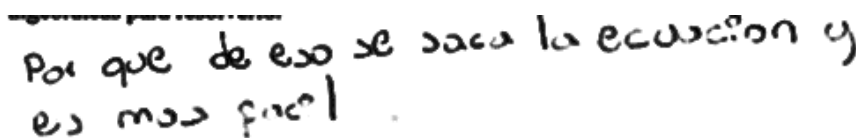
Situación 2: (S2, A2, P1)

Tabla 39. Tipificación S2, A2, P1

Pregunta 1: Explica por qué consideras que es útil representar los datos del problema en expresiones algebraicas para resolverlo.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que mencionan que representar los datos en expresiones algebraicas es útil porque permite establecer la ecuación asociada al problema. (E1, E4)	2	25%
2	Estudiantes que mencionan que representar los datos del problema en expresiones algebraicas como una herramienta para dar solución al problema. (E2, E3, E5 y E7)	4	50%
3	Estudiantes que no responden en relación con la pregunta. (E6, E8)	2	25%

A partir de la tabla anterior se observa que el 25% de los estudiantes expresaron que es importante representar los datos del problema en expresiones algebraicas porque permite establecer la ecuación asociada al mismo. Por otro lado, el 50% de los estudiantes expresaron que es importante porque es una herramienta que permite dar solución al problema, y finalmente el 25% de los estudiantes no respondieron con relación a la pregunta.

De estos resultados, y a comparación de los resultados de la situación anterior, se evidencia que los estudiantes se han desprendido de la idea de la representación en lenguaje algebraico como una estrategia propia del juego, si no que ya lo reconocen como un camino para resolver el problema, como se observa en el registro de E4, quien reconoce que este tipo de representación es esencial para plantear la ecuación y resolver el problema de manera más fácil (ver figura 48).



Por que de eso se saca la ecuacion y es mas facil

Figura 48. S2, P1, E4

Situación 2: (S2, A2, P2)

Tabla 40. Tipificación S2, A2, P2

Pregunta 2: Explica por qué usarías la ecuación como una herramienta para resolver problemas.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que mencionan que usarían la ecuación porque es una estrategia que les permite resolver el problema de forma directa encontrando el valor de la incógnita. (E1, E2, E3, E4, E5)	5	62,5%
2	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta. (E6, E7, E8)	3	37,5%

De la tabla anterior relacionada con preguntas de reflexión se observa que el 62,5% de los estudiantes mencionan que usarían la ecuación porque es una estrategia que les permite resolver el problema de forma directa encontrando el valor de la incógnita, es interesante la transformación sobre la concepción que tuvo la ecuación desde la Situación 1, cuando gran parte de los estudiantes asocian su efectividad al relacionarlo con aspectos particulares del juego como actividad lúdica, en este punto ya reconocen que es una estrategia directa para hallar el valor de la incógnita mediante su manipulación, despojándose del carácter lúdico y centrándose totalmente en la ecuación como estrategia, lo que evidencia notablemente el acercamiento e influencia del pensamiento algebraico. Un ejemplo de este tipo de respuestas es E2, quien menciona que sin la ecuación no se podría resolver el paso a paso (ver figura 49).

por que sin la ecuación no se
podria hacer el paso a paso

Figura 49. S2, P2, E2

Por otro lado, el 37,5% de los estudiantes no responden en relación con la pregunta, ya que no justifican porque la ecuación tiene importancia en la resolución de problemas y responden de manera general, lo que no da cuenta de un tipo de respuesta esperada. A continuación, se observa la respuesta de E6 en donde menciona “por si tenemos que hacer lo mismo” (ver figura 50).

Explica por qué usas la ecuación como una herramienta para resolver los
 por si tenemos que hacer lo mismo

Figura 50. S2, P2, E6

Situación 2: (S2, A2, P3)

Tabla 41. Tipificación S2, A2, P3

Pregunta 3: ¿Qué papel tuvo el juego para ti en el desarrollo de elementos o estrategias al momento de resolver problemas?			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que consideran que el papel del juego posibilitó en la resolución de problemas el reconocimiento de la ecuación y la manipulación de esta para hallar la incógnita. (E1, E5)	2	25%
2	Estudiantes que consideran que el papel del juego en la resolución de problemas está vinculado a la presentación de estrategias divertidas y sencillas para resolverlos. (E2, E3, E4, E7, E8)	5	62,5%
3	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta. (E6)	1	12,5%

En la tabla se observa que el 25 % de los estudiantes manifestaron que el juego posibilitó reconocer la ecuación y su manipulación en la búsqueda del valor de la incógnita resolver problemas, y el 62,5% de los estudiantes manifestó que el juego posibilitó estrategias divertidas y sencillas para resolver problemas, como manifiesta E2 (ver figura 51) y, por último, un estudiante no respondió nada con la pregunta.

me influyo el juego por que me ayudo hacer los problemas mas facil

Figura 51. S2, P2, E6

De lo anterior se concluye que el juego brindó a los estudiantes herramientas que facilitaron la resolución de los problemas de una manera divertida y amena, esto se relaciona con lo dicho por Edo, M. (2002) sobre que el juego posibilita la generalización de estrategias totales o parciales (p. 55), pues es lo que el juego permitió a los estudiantes: Reconocer una nueva estrategia para resolver problemas.

Situación 2: (S2, A2, P4)

Tabla 42. Tipificación S2, A2, P4

Pregunta 4: ¿Cuál fue el juego que más te gustó? Explica por qué fue importante en la resolución de problemas.		
	TIPO DE RESPUESTA	Fa Fr
1	Estudiantes que consideran que el juego que más les gustó fue el relevo algebraico porque le permitió comprender mejor el problema y las relaciones involucradas. (E4)	1 12,5%
2	Estudiantes que consideran que el juego que más les gustó fue el circuito algebraico debido a que permitió comprender mejor el problema (uno algebraico, en el reconocimiento de datos del problema de forma más fácil y el de hallar x porque ayudó en la solución del problema). (E2, E3, E8)	3 37,5%
3	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta. (E1, E5, E6, E7)	4 50%

Según la tabla anterior en relación con la pregunta 4, de la situación 2 de reflexión, el 37,5% de los estudiantes consideran que el juego que más les gustó fue el circuito algebraico, porque permitió comprender mejor el problema enfatizando en el uno algebraico como parte de la primera estación, además posibilitó el reconocimiento de datos del problema de forma fácil y, finalmente, el de hallar x porque ayudó en la solución del problema. De lo anterior, se infiere que lo estudiantes logran reconocer en el juego conceptos y nociones importantes para la resolución del problema.

Por otra parte, E4 indica que el juego más les gustó fue el relevo algebraico porque le permitió comprender mejor el problema y las relaciones involucradas, considerando que E4 era parte del único equipo que logró completar los diagramas en lenguaje natural y lenguaje algebraico de manera correcta, por lo que se puede concluir que E4 ve en estos diagramas una posibilidad para analizar el contenido y entender la estructura del problema, como menciona Puig al hablar de los instrumentos heurísticos como un elemento que facilita la comprensión de las cantidades y las relaciones entre ellas.

Finalmente, el 50% de los estudiantes no responden completamente en relación con la pregunta, ya que se centran en mencionar el juego que más les gustó y por qué, pero no desde la mirada de la resolución de problemas, si no desde lo atractivo o el nivel de comprensión y

complejidad que tuvo al desarrollarse, como ejemplo de ello aparece E6 quien menciona que los primeros, haciendo alusión al circuito y cada una de las estaciones, fueron difíciles, pero le gustaron. Se evidencia lo mencionado por Alsina en relación con que las actividades lúdicas son enormemente motivadoras, los estudiantes se implican mucho y se lo toman en serio (ver figura 52).

Los primeros que dieron aunque fueran difíciles me gustaron (U)

Figura 52. S2, P2, E6

Situación 2: (S2, A2, P5)

Tabla 43. Tipificación S2, A2, P5

Pregunta 5: Según el trabajo realizado, escribe qué elementos o momentos son fundamentales al resolver problemas de este tipo.			
TIPO DE RESPUESTA		Fa	Fr
1	Estudiantes que consideran que los elementos fundamentales para resolver problemas identificados en las clases son: el planteamiento de la ecuación asociada al problema, el desarrollo de la ecuación y hallar la incógnita para resolver el problema. (E3, E5, E7)	3	37,5%
2	Estudiantes que consideran que los elementos fundamentales para resolver problemas es el reconocimiento de las cantidades, porque de ahí se genera la ecuación y la respuesta. (E4)	1	12,5%
3	Estudiantes que no responden con relación a la pregunta. (E1, E2, E6, E8)	4	50%

A partir de la tabla anterior se observa que el 37,5% de los estudiantes manifestaron que los elementos fundamentales para resolver problemas de repartición desigual son el planteamiento de la ecuación asociada al problema y la simplificación de esta para hallar su solución. Por otra parte, un estudiante manifestó que los elementos fundamentales para resolver problemas es el reconocimiento de las cantidades, ya que de ahí se genera la ecuación y la respuesta, y cuatro estudiantes no respondieron con relación a la pregunta. De estos resultados se concluye que la mitad de los estudiantes reconocen en el planteamiento de la ecuación un elemento fundamental para resolver problemas de repartición desigual.

3.5 Algunas Conclusiones Sobre el Análisis de Resultados

En este apartado se consideran algunas conclusiones en relación con los resultados obtenidos en la situación 1, situación 2 y finalmente con ideas generales acerca del papel del juego en el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la propuesta de aula implementada.

A partir de los resultados obtenidos en la situación 1 se concluye que los estudiantes reconocieron algunas herramientas importantes para resolver problemas de una manera diferente a la que usualmente lo hacían como el reconocimiento de las cantidades del problema y sus relaciones, o la representación en lenguaje algebraico de los datos del problema para establecer la ecuación asociada o el desarrollo de la ecuación a través de lo que ellos mismos empezaron a llamar como el “*paso a paso*”, esto se evidencia en el minuto 55:00 de la plenaria cuando se genera la siguiente conversación entre PF, E1 y E4:

PF: *Si en un caso hipotético les presentamos otro problema, ustedes qué pensarían hacer primero*

E4: *Leer el problema*

PF: *Leer el problema, ¿y eso es suficiente para resolverlo?*

E1: *No, leer el problema, sacar las cantidades involucradas del problema*

PF: *Sacar las cantidades, ¿tercero qué creen que harían?*

E1: *Ya la ecuación*

E4: *No, sacar las relaciones*

PF: *Eso, sacar las relaciones, ¿y luego?*

E4: *Tratar de buscar la ecuación*

PF: *¿Tratar de buscar la ecuación, y en ese punto ya podrían resolver el problema?*

E4: *Sí*

PF: *¿Sí? ¿Por qué?*

E4: *Porque con base en la ecuación tenemos que tratar de buscar un número que sea x o con lo que representemos*

De lo anterior se establece que el juego implementado en el desarrollo de la situación 1 permitió el reconocimiento de una nueva estrategia para resolver problemas a través de la solución de la ecuación asociada, lo cual requiere de elementos propios del pensamiento algebraico como lo

son el establecimiento de relaciones, el sentido de la indeterminancia al considerar incógnitas, la designación simbólica para representarlas y la analiticidad para manipularlas (p. 41), lo cual está en coherencia con la perspectiva de Kieran (1989), Kaput (2000), Radford (2010) y Almeida (2016) acerca del pensamiento algebraico.

Con relación a la situación 2, se evidencia un acercamiento más profundo a la ecuación como estrategia de solución del problema, al presentarse a los estudiantes problemas sin el conjunto de preguntas que orientaban el establecimiento de la ecuación, los estudiantes tuvieron libertad de utilizar la estrategia más pertinente, a lo que la mayoría usaron la ecuación considerando los elementos presentados desde la primera situación con ayuda del circuito algebraico: reconocimiento de las cantidades y las relaciones entre ellas, representación de las cantidades en lenguaje algebraico, establecimiento de la ecuación asociada al problema, y simplificación de la misma para hallar su solución.

Teniendo en cuenta lo anterior, se evidenció también en el desarrollo de la situación 2 una profundización más amplia en el desarrollo de elementos propios del pensamiento algebraico gracias a que los estudiantes reconocieron, representaron y manipularon con mayor confianza y seguridad las cantidades indeterminadas, partiendo de la ágil identificación de la cantidad generadora del problema, para así mismo establecer la incógnita de la ecuación asociada y establecerla fácilmente para finalmente hacer uso de propiedades de la suma y producto de los números reales para hallar su solución, lo que da cuenta de una de las principales características del pensamiento algebraico que es la analiticidad.

Ahora bien, con relación al juego se obtuvieron algunas conclusiones desde dos enfoques: de acuerdo con las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza y actitudes afectivas de los

estudiantes, y de acuerdo con las dificultades asociadas al desarrollo del pensamiento algebraico en la escuela.

Con relación al primer grupo de dificultades se identificó que a través de la implementación del juego los estudiantes mantuvieron una actitud positiva y motivadora, apropiándose del proceso de aprendizaje que estaban viviendo y donde los profesores tomaron un papel secundario de orientadores. Además, se identificó que los estudiantes no tuvieron miedo de participar y de comunicar sus pensamientos así no fueran acertados, al estar en un entorno seguro y por el deseo de ganar, hablaban sin miedo, lo que les facilitó a los profesores la identificación del tipo de razonamiento que estaban realizando. Este entorno participativo permitió que los estudiantes aprendieran de sus errores y de los errores de los demás sin sentirse juzgados o presionados.

Finalmente, en relación con el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la perspectiva de la resolución de problemas, se concluye que el juego facilitó a los estudiantes herramientas para comprender la estructura del problema y la identificación de las cantidades indeterminadas, esto por medio del reconocimiento de las cantidades involucradas y las relaciones entre ellas trabajadas en la primera estación del circuito algebraico y el uso de diagramas en el relevo algebraico.

Por otro lado, el juego facilitó a los estudiantes el reconocimiento de una estructura para resolver problemas inspirado en lo mencionado por Polya (1973) que considera la comprensión de la estructura del problema, el diseño de un plan de acción para resolverlo, la ejecución del mismo y finalmente la comprobación del resultado, esto a través de las diferentes estaciones del circuito algebraico que los estudiantes interiorizaron. Además, el juego desarrolló en los estudiantes la necesidad de comprobar que las acciones propias y las de sus compañeros fueran coherentes

dentro del reglamento del juego y de la solución del problema, con la intención de ganar o perder puntuación en el desarrollo de este.

Por último, el juego presentó y acercó de una forma suave y coherente la necesidad de hacer uso del lenguaje algebraico, a través de la segunda estación del circuito algebraico, permitiendo que los estudiantes reconocieran el sentido de hacer uso de este y no considerándolo un conjunto de símbolos aislados.

Se evidencia que el juego abordó las dificultades planteadas en esta investigación a través de la resolución de problemas y se concluye que es una estrategia potencial para aproximar a los estudiantes a elementos propios del álgebra como el reconocimiento, representación y manipulación de cantidades indeterminadas de una forma agradable y placentera para los estudiantes.

Capítulo 4. Conclusiones Generales y Reflexiones Didácticas

En este capítulo se presentan las conclusiones sobre los objetivos propuestos para el desarrollo del trabajo de investigación y se presentan reflexiones didácticas que surgen del trabajo de implementación de la propuesta de aula y las expectativas según los resultados, gracias a la organización y análisis de resultados del capítulo anterior.

4.1 Conclusiones Generales

Las conclusiones mencionadas a continuación están estrechamente relacionadas con la documentación ya que fundamenta el proyecto de investigación desde tres perspectivas asociadas con: aspectos curriculares, didácticos y matemáticos; el diseño de la propuesta de aula que involucra el juego y, la implementación y análisis de los resultados, lo que repercute directamente en los logros de los objetivos del trabajo.

Con relación al primer objetivo específico, se concluye que se logra fundamentar la problemática de investigación con un marco de referencias conceptuales que recoge elementos desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática.

- Desde la perspectiva curricular, se reconocen elementos que posibilitan el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes desde Los Lineamientos Curriculares, los Estándares Básicos de Competencia y los Derechos Básicos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, ya que, la enseñanza y el aprendizaje de aspectos algebraicos desde la variación y el cambio son fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático, y se menciona la resolución de problemas como herramienta importante donde los estudiantes construyen estrategias sin alejarse el aprendizaje de contenidos matemáticos. Así, se reconocen aspectos que permiten vincular y documentar la problemática con la propuesta de aula, como los procesos generales desde la resolución de problemas, los conocimientos básicos

sobre el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos y contextos de la vida cotidiana cercanos a la realidad de los estudiantes.

- Desde la perspectiva didáctica, se logra documentar la problemática, debido a que se identifican dificultades que presentan los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra en la escuela (Gallardo y Rojano, 1988), esto debido al *corte didáctico* del cual hacen mención. Por otra parte, se habla de la necesidad de una reconfiguración por parte de los estudiantes en relación con la estructura aritmética que posibilitará un acercamiento al pensamiento algebraico. Además, se evidencian las diferentes alternativas propuestas por Bednarz y Janvier (1996) de las cuales se centra la mirada en la resolución de problemas para el desarrollo de la propuesta, considerando los tipos de razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas de repartición desigual y la caracterización de estos (Almeida, 2016). Además, se hace mención del aporte de los juegos y las actividades lúdicas en el desarrollo del pensamiento matemático y de manera más específica, en el pensamiento algebraico (Grupo Azarquiel, 1993).
- Por último, la perspectiva matemática permitió fundamentar nociones y conceptos matemáticos que competen al desarrollo del pensamiento algebraico como expresiones algebraicas que posibilitan la representación simbólica y permiten a los estudiantes representar y solucionar los problemas dentro de la propuesta de aula, los polinomios como expresiones algebraicas con las que los estudiantes pueden representar las cantidades que conforman la estructura del problema y permiten plantear las ecuaciones asociadas al problema, centrado en el uso de un lenguaje algebraico con significado contextualizado.

En relación con el segundo objetivo específico, se concluye que se articularon los elementos curriculares, didácticos y matemáticos en una propuesta de aula que involucró el juego para resolver problemas de repartición desigual, de lo cual se consideran las siguientes reflexiones.

- El diseño de la propuesta de aula se realizó a partir de los referentes curriculares, didácticos y matemáticos ya que articula elementos que consideran estas tres perspectivas para el desarrollo del pensamiento algebraico. Por un lado, la perspectiva curricular establece que la resolución de problemas es un proceso transversal a todo tipo de conocimiento matemático y específicamente en el desarrollo del pensamiento variacional, debe considerarse para movilizar en los estudiantes la construcción de expresiones algebraicas. Por esta razón fue el proceso que prevaleció alrededor de toda la propuesta de aula.
- Por otra parte, la perspectiva didáctica facilitó elementos fundamentales para la propuesta, como lo son el tipo de problemas utilizados y la forma de abordarlos, gracias a la investigación de autores como Bednarz y Janvier (1996) y Almeida (2016), los cuales aportaron significativamente a la construcción de los diferentes problemas y a las preguntas orientadoras para resolverlos. Esta perspectiva aportó aspectos indispensables sobre la naturaleza e influencia del juego en la educación matemática para el diseño y selección del circuito y relevo algebraico, que fueron los dos juegos involucrados en la propuesta de aula, tras realizar el pilotaje.
- Según la perspectiva matemática, la propuesta de aula se diseñó para que los estudiantes reconocieran la definición de nociones y conceptos propios de las matemáticas como la ecuación, y reconocieran elementos que permitieran manipularla y utilizarla en contextos cotidianos.

Con relación al tercer objetivo específico, se puede concluir que, con los resultados y el análisis de la implementación de la propuesta de aula en estudiantes del grado séptimo de la Institución Educativa Normal Superior de Cali, se identifican y caracterizan algunos de los aspectos desarrollados por los estudiantes en relación con el pensamiento algebraico:

- Como primer punto, se puede concluir que en la situación 1 y gracias a la implementación del juego, los estudiantes consideran las cantidades (las partes que conforman el total y el total) y las relaciones entre ellas (explícitas e implícitas), al mismo tiempo que reconocen la inversibilidad de las operaciones presentes en las relaciones, lo cual es movilizado en la primera estación con el uso de cantidades. También, dejan de un lado la necesidad de determinancia característica del pensamiento aritmético, al tener en cuenta las relaciones entre cantidades que les permiten establecer expresiones en lenguaje algebraico que representan la estructura del problema con ayuda del reconocimiento de la cantidad generadora, aspecto movilizado en la segunda estación del juego asociado con relacionar expresiones en lenguaje natural y lenguaje algebraico.
- Por otra parte, los estudiantes tienen un acercamiento al pensamiento algebraico a partir de la resolución de problemas gracias al establecimiento de relaciones que facilitaron la posterior simbolización en lenguaje algebraico de las cantidades indeterminadas, lo que permitió establecer la ecuación asociada al problema y reconocer la posibilidad de operar analíticamente los objetos indeterminados, a pesar de que no todos los estudiantes desarrollan estos aspectos al mismo ritmo cabe destacar que en todos se reconoce un avance con ayuda del juego y la resolución de problemas en relación con la comprensión, establecimiento y manipulación de los objetos indeterminados.

- Además, gran parte de los estudiantes hacen uso de las representaciones algebraicas y la manipulación de la ecuación formal como una estrategia para resolver los problemas de cierre de la situación 1. Cabe resaltar que a pesar de que algunos no resuelven de manera correcta la ecuación, los estudiantes ya reconocen y consideran aspectos del pensamiento algebraico como el sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica de los objetos, esto permite que los estudiantes identifiquen gran parte de ellos en la cuarta estación del circuito al asociar la manipulación de la ecuación con una estrategia directa y segura para resolver el problema. De lo anterior, se evidencia un salto notable entre las formas de resolver un problema basados en razonamientos aritméticos y las formas de hacerlo algebraicamente.
- Este salto se confirma en los resultados de la situación 2, donde los estudiantes usan la estrategia de la ecuación para resolver los últimos problemas, tenían libertad de escoger la estrategia más pertinente y todos usaron el desarrollo de la ecuación, logrando un salto importante en la manipulación de lo indeterminado.
- Se concluye que el juego involucrado en la resolución de problemas facilitó en los estudiantes el desarrollo de aspectos importantes del pensamiento algebraico como el sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica de sus objetos a través de los procesos de comprensión, experimentación y verificación que articulan las perspectivas presentadas en la matriz de análisis, e identificados a partir de los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta.

Por todo lo anterior, al cumplirse los tres objetivos planteados en este trabajo de investigación, se concluye que se alcanzó el objetivo general de este proyecto, que favorecería algunos elementos del pensamiento algebraico en estudiantes de séptimo grado de educación

básica mediante una propuesta de aula que utiliza el juego (circuito y relevo algebraicos) para resolver problemas de repartición desigual.

4.2 Algunas Reflexiones Didácticas

En este apartado se presentan algunas reflexiones didácticas que surgieron en el desarrollo de este trabajo de investigación, y en especial en el diseño, implementación y análisis de resultados de la propuesta de aula, con la intención de dar apertura a discusiones que podrían enriquecer el trabajo aquí iniciado.

- El diseño y creación de juegos en la educación matemática es una tarea compleja, ya que involucra diferentes fases de diseño, estudio, análisis, reconocimiento de la población a la cual va dirigido y la relación que puede darse con los conceptos, competencias o habilidades de aprendizaje a desarrollar, es por ello que se recomienda este proceso este guiado por referentes conceptuales, en particular didácticos, además de realizar pruebas constantes con la población seleccionada para establecer mejoras y lograr una propuesta pertinente y con propósitos alcanzables.
- El juego por sí solo no moviliza el desarrollo del pensamiento algebraico, es necesario que el docente oriente su implementación para que los estudiantes a partir de las interacciones reconozcan elementos propios de las matemáticas que en un trabajo posterior se pueden formalizar. Esto permite que los estudiantes se apropien y encuentren un sentido de los conceptos y nociones trabajadas, para ello se recomienda realizar preguntas de reflexión al finalizar cada intervención del juego.
- La disposición de los estudiantes cambia cuando se les anuncia que van a jugar, son participativos y no temen a expresar sus ideas, pues como están enmarcados en una realidad de juego, reconocen que lo único que podrían perder son puntos, pero su seguridad e integridad

emocional no se ve comprometida, por el contrario se motivan, por lo tanto, es un recurso que debería usarse con frecuencia en el aula para que los estudiantes se sientan cómodos y con la capacidad de aprender del error propio y el de los demás sin sentirse presionados.

- El material manipulativo de carácter lúdico – didáctico posibilita que se genere en el aula discusiones e interacciones constantes (estudiante-recurso, estudiante-estudiante y estudiante-docente), que permiten la construcción de conceptos, ideas y reflexiones a partir de sus propias acciones, lo cual favorece aprendizaje significativo.
- También cabe mencionar que la relación entre el juego y la resolución de problemas como un proceso general desarrollado por los estudiantes en la clase de matemáticas se ve potencializada debido a todos los elementos en común que pueden tener, ganar se convierte en el mayor objetivo para los estudiantes, al igual que resolver el tipo de problema que se presente y lo intentan mientras aprenden razonando, movilizando su imaginación y creatividad, de lo cual surgen modos interesantes de ver las matemáticas.
- La resolución de problemas como estrategia para desarrollar elementos del pensamiento algebraico resulta ser potencial para que los estudiantes reconozcan el sentido de aspectos como el establecimiento de relaciones o la necesidad de representar por medio del lenguaje algebraico aquellos objetos indeterminados, por lo tanto, es importante que la introducción de este lenguaje en la escuela no se desprenda de este proceso.
- El uso de contextos significativos para los estudiantes se convierte un aspecto bastante valioso, ya que al resolver los problemas surge un interés particular por dar una respuesta acertada y lo que hacen dentro de la clase tiene mayor sentido. En este caso se presentaron dos situaciones, la primera, en relación con una fiesta de cumpleaños escolar y la segunda, una salida al parque

de diversiones, con las cuales los estudiantes se identificaron e indicaban lo que conocían en relación con ellas.

En el desarrollo de este trabajo también surgieron interrogantes cercanos al objetivo general aquí propuesto, los cuales se presentan a continuación y pueden ser resueltos en trabajos posteriores relacionados con la influencia del juego en el desarrollo del pensamiento algebraico.

- ¿Qué resultados se pueden obtener si se diseña una propuesta de aula que involucre un Objeto Virtual de Aprendizaje en la resolución de problemas para el desarrollo del pensamiento algebraico?
- ¿Qué resultados se pueden obtener en el desarrollo del pensamiento algebraico si se diseña un juego manipulativo que considere la perspectiva de la generalización de patrones?
- ¿Qué resultados se pueden obtener si se diseña una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje que involucre el juego para el desarrollo del pensamiento algebraico?

Referencias

Almeida, J., R. (2016). Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências e Matemática) –Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Alonso Molina, F., Barbero Sampedro, C., Fuentes Gil, I., García Azcárate, A. C., García Dozagarat, J. M., Gutiérrez Vázquez, S., & Veiga Fernández, C. D. Grupo Azarquiel (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Madrid: Síntesis.

Alsina, A. (2001). Matemáticas y juego. *Revista Uno*, 26(3).

Andrade, L., Perry, P., Guacaneme, E., & Fernández, F. (2003). La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación? (*DOAJ: Directory Of Open Access Journals*).

Angulo, M., González, K. (2017). Juegos tradicionales: una estrategia didáctica para fortalecer la conceptualización de las fracciones en grado sexto. (Trabajo de grado de pregrado). Repositorio institucional de la Universidad del Valle.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and Development of Algebra as a Problem-Solving Tool: Continuities and Discontinuities with Arithmetic. En Springer eBooks (pp. 115-136).

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. J. L. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas*, (18), 9-19.

Camargo, L. (2021). Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática: Recursos para la captura de información y el análisis (1er ed.). Universidad de Antioquia.

Cartagena, L., Sossa, G. (2016). Resolución de problemas asociados al razonamiento algebraico (Trabajo de grado de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Castañeda Martínez, S., Castañeda Martínez, C. (2019). Una aproximación al álgebra escolar desde la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación. (Trabajo de grado de pregrado). Repositorio institucional de la Universidad del Valle.

Cuadrado, A. R. (2019). Una reflexión en torno al diseño y desarrollo de ambientes de aprendizaje para el tránsito de la aritmética al álgebra. Recuperado de:

<http://hdl.handle.net/20.500.12209/10892>.

Diuza Montaña, Y., Henao Angulo, J. (2022). Argumentos que favorecen la introducción del álgebra temprana desde una versión en español castellano de los artículos: arithmetic and algebra in early mathematics education y the progressive development of early embodied algebraic thinking a partir de la técnica de traducción comentada. Repositorio institucional de la Universidad del Valle.

Edo, M. (2002). Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma.

Espinosa Rivera, L. (2022). El juego como herramienta de enseñanza en las matemáticas para el aprendizaje significativo: sistematización práctica docente en primaria en el colegio Comfandi Municipal en la ciudad de Cali. Universidad Icesi.

Fernández, J., Rodríguez, M. (1989). Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental. Madrid: Síntesis.

Fillooy, E., Rubio, G. (1993). Análisis Aritmético y Resolución de Problemas Verbales Aritmético/Algebraicos. Método de Inferencias Analíticas Sucesivas (MIAS) y Método Analítico

de exploraciones Sucesivas (MAES). Reporte Técnico. Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. México.

Gallardo, A., Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en didatique des mathematiques*, 9(2), 155-188.

Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F. y Pinzón, A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste. *Revista Educación y educadores*, 19(36), 315-338.

González Peralta, A. G., Molina Zavaleta, J. G., Sánchez Aguilar, M. (2014). La matemática nunca deja de ser un juego: investigaciones sobre los efectos del uso de juegos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación matemática*, 26(3), 109-133.

Hernández Barrera, M. d. (2017). Desarrollo de pensamiento relacional early-álgebra en la escuela primaria. propuesta de una actividad tecnológica escolar. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/11349/5219>.

Jiménez Velez, C. A. (1998) Pedagogía de la Creatividad y de la Lúdica: emociones, inteligencia y habilidades secretas. En Cooperativa Editorial Magisterio 70 (1). Santafé de Bogota

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebra fying the K-12 curriculum: National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA.

Kieran, C y. Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7(3), 229-240.

Marchand, P.; Bednarz, N (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. In: Bulletin AMQ, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ.

Marin Castrillón, C., Cardona Giraldo., J. (2007). El lenguaje algebraico, una alternativa para la modelación y resolución de problemas. Universidad de Antioquia.

Medina Tenorio, J (2013). La enseñanza de las matemáticas a través del juego, en estudiantes de grado octavo de educación básica secundaria. Universidad del Cauca.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje de Matemáticas. V1. Bogotá, Colombia.

Moreno, G. A (2015). Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 39, 19-33.

Planas, N., & Alsina, À. (2008). Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible. Madrid, Narcea S. A

Polotskaia, E; Fellus, O; Cavalcante, A. y Savard, A. (2022). Students problem solving and transitioning from numerical to relational thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22 (2), 341-364.

Polya, G. (1973). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. New York: Wiley, Sons, Inc.

Posada González, R. (2014). *La lúdica como estrategia didáctica* (Tesis doctoral).

Puig, L. & Cerdán, F. (1990) Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In E. Filloy & T. Rojano (Eds.) *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: PNFAPM.

Puig, L. (1998). *Cómo poner un problema en ecuaciones*. Valencia. Recuperado de <http://www.uv.es/puigl/ppe.pdf>

Radford, L. (2010). Niveles de Generalidad y Tipos de Generalizaciones en Actividades de Patrones. *Universidad de Granada. PNA*, 4(2), 37-62.

Rodríguez, Y. El cuerpo y la lúdica: herramientas promisorias para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Sophia* 13 (2): 46-52.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE/Horsori pp.124-154

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). *International handbook of mathematics education* (pp. 99-137). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

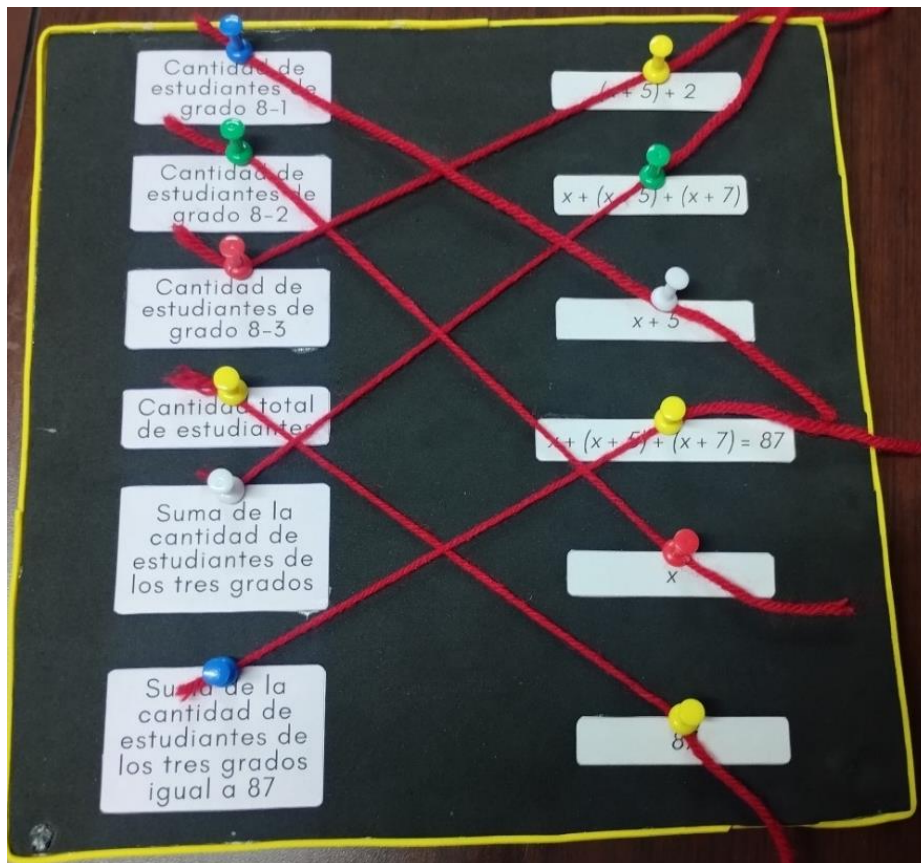
Zill, D. G., y Dewar, J. M. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica (3ra. edición.). México: McGraw Hill.

Anexos

Anexo 1. Juegos

Circuito Algebraico





$$x + (x + 5) + (x + 7) = 87$$

¿Cuál debe ser el valor de x para que la igualdad se cumpla?

Paso 1	$x + (x + 5) + (x + 7) = 87$	Ecuación asociada al problema
Paso 2	$x + x + 5 + x + 7 = 87$	Cambio de orden de los sumandos para asociar los términos semejantes (Propiedad conmutativa y asociativa)
Paso 3	$(x + x + x) + (5 + 7) = 87$	Eliminación de paréntesis (Propiedad asociativa)
Paso 4	$3x + 12 = 87$	Suma de los términos semejantes
Paso 5	$3x + 12 + (-12) = 87 + (-12)$	Suma del opuesto aditivo de 12 a cada lado de la igualdad para mantenerla (Propiedad uniforme)
Paso 6	$3x + 0 = 75$	Suma de los términos independientes
Paso 7	$3x = 75$	Todo número al sumarle 0 me da el mismo número (Propiedad del neutro de la suma)
Paso 8	$3x \cdot \frac{1}{3} = 75 \cdot \frac{1}{3}$	Multiplicación del inverso multiplicativo de 3 a cada lado de la igualdad para mantenerla (Propiedad uniforme)
Paso 9	$\frac{3}{3}x = \frac{75}{3}$	Simplificación de las fracciones
Paso 10	$1x = 25$	Multiplicación de los factores
Paso 11	$x = 25$	Todo número multiplicado por 1 me da el mismo número y despeje de la incógnita x (Propiedad del neutro de la multiplicación)

Relevo Algebraico

