

Método de Flatness para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Geiler Galindo Betancourth

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2025

Método de Flatness para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Geiler Galindo Betancourth
Código: 1831410
Programa académico: Matemáticas
Código del programa: 3147

Proyecto de trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Matemático

Directora:
Ivonne Rivas Triviño, Ph.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2025

Resumen

La teoría de control se interesa en manipular la solución de un sistema dinámico a través de una función llamada control, esto es de interés en ingeniería, física, matemáticas y otras áreas, puesto que los sistemas dinámicos son modelos que explican diversos fenómenos. Luego es importante conocer cómo es la solución y el control de un sistema dinámico, para ello, el método de Flatness juega un rol importante para dicho objetivo. En el presente trabajo de grado, se realizará una introducción a la teoría de control recorriendo su fundamento teórico. Desde definir un sistema de control, agregando los diferentes tipos de controlabilidad hasta uno de los teoremas más fundamentales que es el Teorema de Kalman. Además, para el objetivo de mostrar el método de Flatness se realiza un puente entre el álgebra y las ecuaciones diferenciales, siendo el álgebra diferencial quien hace dicha relación. Una vez mostrado el soporte del método de Flatness, se destacan ejemplos de cómo a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales se puede hallar su solución y su respectivo control.

Palabras Claves: Teoría de control, sistema dinámico, sistema de ecuaciones diferenciales lineales, Controlabilidad, Teorema de Kalman, método de Flatness.

Abstract

In control theory, the objective is to manipulate the solution of a dynamical system through a function called the control. This area is of significant importance in engineering, physics, mathematics, and other disciplines because dynamic systems are models that explain various phenomenas. As it is important to know the solution and control of a dynamic system, then the Flatness method plays an important role for that goal. In the present degree work, an introduction to the control theory is going to be presented by discussing its theoretical foundation. From the definition of a control system, followed by the different types of controllability and culminating with one of the most fundamental theorems: the Kalman Theorem. In addition, to illustrate the Flatness method, a bridge is made between algebra and differential equations, with differential algebra making that relationship. Once the support of the Flatness method is shown, examples of how systems of linear differential equations can be solved and their respective control are highlighted.

Key Words: Control theory, dynamic system, system of linear differential equations, controllability, Kalman's theorem, Flatness method.

Agradecimientos

Salvaguardando las distancias, ahora me encuentro igual a Borges cuando agradeció a personas, libros, dones y bellezas de la vida que lo deslumbró y así lo escribió en “Otro Poema De Los Dones”.

Así pues, cada paso en mi camino de formación matemática he compartido y vivido con grandes personas por eso digo Gracias,

A mi familia quien me abrazó en los largos días de estudio, personas que me aman y comprenden sin importar el resultado.

A profesores y profesoras que brindan su conocimiento con pasión y furor logrando que haya más enamorados de las matemáticas, en especial a Ivonne Rivas que me enseñó el arte de la lectura y escritura académica, así logrando el presente trabajo de grado.

A los diferentes lugares de la Universidad que habité, dejándome vivencias que dan forma a quien soy.

A compañeros y amigos que me ha dado la Univalle, en especial a los amigos que pertenecemos a Omega.

A mis viejas amistades les agradezco, por la comprensión de las semanas de ausencia y por el cariño dado en las escasas horas compartidas.

Gracias quiero dar a la vida, por permitirme a presenciar las bellas y raras casualidades, que se presentan de tantas formas y colores.

A las personas, al cine y la música que siempre me acompañaron. Gracias totales!!!

Índice general

Introducción

Capítulo 1. Preliminares	2
1.1. Conceptos básicos de análisis	2
1.2. Conceptos básicos de álgebra	11
Capítulo 2. Teoría de Control	17
2.1. Sistemas de control	17
2.2. Tipos de controlabilidad	21
2.3. Sistema adjunto	25
2.4. Teorema de Kalman	31
Capítulo 3. Álgebra Diferencial	34
3.1. Conceptos básicos del álgebra diferencial	34
3.2. La ecuación diferencial para el álgebra diferencial	39
3.3. Representación del estado de Kalman para una Dinámica Lineal	44
3.4. Controlabilidad para el álgebra diferencial	46
3.5. Sistema Flat	47
Capítulo 4. Método de Flatness	48
4.1. Introducción al método de Flatness	48
4.2. Equivalencia entre sistemas lineales	55
4.3. Ejemplos de sistemas Flat	60
Capítulo 5. Conclusiones	65
Apéndice A. Apéndice	66
Apéndice. Bibliografía	68

Introducción

Debido al crecimiento de la industria del siglo XX llevó a ingenieros desarrollar nuevas máquinas y procesos de producción para mejorar y estandarizar los productos. En ese contexto una de las áreas innovadoras fue la Ingeniería de Control, la cual se encargaba de desarrollar equipos que realizaban tareas como regular la corriente eléctrica, regulares de velocidad y termostatos según S. Bennet en [1, Introducción]. Así dio paso a la Teoría de Control que proviene de una intersección de la Ingeniería de Control y las Matemáticas, esta cobra relevancia para el desarrollo de nuevas tecnologías, según Zuazua en su tesis doctoral [16].

Desde la perspectiva de las matemáticas un sistema de control es la manipulación de los sistemas dinámicos para que satisfaga un estado. Dicha manipulación de los sistemas se le conoce como control. Una vez centrados en los sistemas de control se plantea dos problemas, el primero si el sistema puede alcanzar cualquier estado que se desee y el segundo si es posible hallar el control para manipular el sistema. En el contexto de ecuaciones diferenciales ordinaria hay respuesta al primer problema, el cual es conocido como el Teorema de Kalman.

La motivación de este trabajo de grado fundamentalmente es mostrar la respuesta al segundo problema, el cual llevó a varios matemáticos *Fliess M, Lévine J, Martin PH, Rouchon P* en la década de 90's argumenten un método el cual otorga el control de un sistema controlable mediante una parametrización, dicho método se le conoce como Flatness,[6]. Este método ha dado grandes aportes para mostrar la controlabilidad exacta de ecuaciones diferenciales parciales como la ecuación del calor [8] y la ecuación de Korteweg-de Vries [10], para esto es importante destacar el método de Flatness para las ecuaciones diferenciales ordinarias para problemas más complejos.

El trabajo de grado se compone de los siguientes capítulos:

El capítulo de preliminares 1 comprende dos secciones, una de análisis y otra de álgebra. Puesto que, para el desarrollo de la teoría de control, es necesario establecer algunos preliminares de análisis, los cuales están sustentados en las ecuaciones diferenciales ordinarias, el problema de la existencia y unicidad de los problemas de Cauchy, que se realiza con las referencias de Doering y Lopes en [13]. Para los preliminares de álgebra se realiza una pequeña introducción a definiciones habituales en un curso de álgebra, pero enfocado a ejemplos de espacios de funciones, para esta sección se usa libros habituales de álgebra como [3] y [11].

El capítulo de Teoría de Control 2 se presenta formalmente la definición de un sistema de control, el cual es una ecuación diferencial donde la variable espacial y el control son dependientes del tiempo. Se da la definición de controlabilidad para un sistema y en la búsqueda de realizar el Teorema de Kalman se motiva a dar una relación entre el sistema de control y su sistema adjunto.

El capítulo 3 es dedicado a realizar una introducción al álgebra diferencial, pues aquí recae la teoría de formulación del método de Flatness. Este capítulo es motivado para comprender las ecuaciones diferenciales ordinarias no como una variable independiente, variables diferenciables y una solución al sistema, sino como objetos meramente algebraicos que tienen una estructura que garantiza su existencia. Principalmente en el capítulo se realiza la argumentación de porqué un sistema lineal controlable se puede hallar el control y solución del sistema a través de la función Flat. Se usan las referencias de [6],[5] y [4].

El capítulo 4 inicia con la definición de un sistema Flat, esto soportado con la teoría de álgebra diferencial vista en el capítulo anterior. Se presenta la función Flat para un sistema lineal particular que es conocido como sistema canónico. Luego, se presenta la equivalencia entre cualquier sistema lineal y el sistema canónico para así hallar la función Flat. Al final del capítulo se presentan algunos ejemplos de sistemas Flat. La referencia usada del capítulo es [12],[9].

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se revisarán conceptos indispensables tanto de análisis como de álgebra para el buen entendimiento del estudio de la solución de ecuaciones diferenciales, de la noción de controlabilidad y del método de Flatness.

1.1. Conceptos básicos de análisis

Parte fundamental de las ecuaciones diferenciales es buscar y encontrar propiedades de la solución. Para esto se recuerdan las definiciones de los espacios métricos, de Banach y de Hilbert que son los espacios donde las soluciones de las ecuaciones diferenciales son definidas. Ya una vez mencionados los espacios de funciones se muestran las condiciones necesarias para hallar la solución única de una ecuación diferencial, lo cual es conocido como Teorema de Existencia y Unicidad, para ello se usó las referencias [2] y [13].

1.1.1. Espacios topológicos. Los conceptos como continuidad, abiertos y convergencia se realizan a través de espacios topológicos, en este caso de la topología inducida por una métrica.

DEFINICIÓN 1.1. *Considere a M un conjunto no vacío. Una **métrica** sobre un conjunto M es una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades. Para todos $x, y, z \in M$,*

- (a) $d(x, y) \geq 0$,
- (b) $d(x, y) = 0$, si y sólo si, $x = y$,
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (**desigualdad triangular**).

*Si d es una métrica en M , entonces el par (M, d) se llama un **espacio métrico**.*

EJEMPLO 1.1. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo (ver 1.15), para cualquier entero $k \geq 1$, la función $d : \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definida como,

$$(1.1) \quad d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^k |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2},$$

es una métrica sobre $\mathbb{F}^k$. Esta métrica se llama la **métrica estándar** en $\mathbb{F}^k$.

DEFINICIÓN 1.2. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (M, d) **converge** a $x \in M$ (o la sucesión $\{x_n\}$ es **convergente**) si, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$d(x, x_n) < \epsilon, \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Se denota como,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{o} \quad x_n \rightarrow x.$$

Una sucesión $\{x_n\}$ en (M, d) es una **sucesión de Cauchy** si, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$d(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \text{para todo } m, n \geq N.$$

DEFINICIÓN 1.3. Sea (M, d) un espacio métrico. Para cualquier punto $x \in M$ y cualquier número $r > 0$, se define una **bola abierta** a $B(x, r)$ como,

$$B(x, r) = \{y \in M : d(x, y) < r\},$$

donde $B(x, r)$ tiene centro en x y radio r . Una bola $B(x, 1)$ con radio 1 se llama **bola abierta unitaria**.

DEFINICIÓN 1.4. Un espacio métrico (M, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en (M, d) es convergente.

EJEMPLO 1.2. El espacio de funciones continuas sobre un intervalo cerrado, $C([a, b])$, es un espacio completo con la métrica del valor máximo, $d(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$.

DEFINICIÓN 1.5. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Una **norma** definida sobre X es una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$, donde $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

EJEMPLO 1.3. La función $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

es una norma en $\mathbb{F}^n$. Donde $\|\cdot\|$ se conoce como la **norma estándar** en $\mathbb{F}^n$.

Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{F}$ con base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Cualquier $x \in X$ puede escribirse como,

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j,$$

para coeficientes únicos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Entonces, la función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

es una norma en X .

Si X es un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$ y d es la métrica definida por,

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Entonces d se llama la **métrica asociada** a $\|\cdot\|$.

DEFINICIÓN 1.6. Sea X un espacio vectorial normado, se dice que X es un **espacio de Banach** si bajo su métrica asociada es un espacio completo.

EJEMPLO 1.4. Algunos ejemplos de espacios de funciones que son espacios de Banach. Primero definiendo una métrica asociada para el espacio de funciones: Sea $F \subseteq \mathbb{R}^k$ y $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Se define el siguiente conjunto de funciones $F([a, b]; \mathbb{R}^k) := \{f : [a, b] \rightarrow F\}$ y así se define la métrica asociada a $F([a, b]; \mathbb{R}^k)$ como

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \|f(x) - g(x)\|_{\mathbb{R}^k}.$$

- Para el conjunto de funciones continuas sobre $[a, b]$ denotado como $C([a, b]; \mathbb{R}^k)$ es un **espacio de Banach**, bajo la métrica de funciones definida anteriormente.

Si $f \in F([a, b]; \mathbb{R}^k)$ se puede definir la métrica,

$$d_p(f, g) := \left(\int_a^b \|f(x) - g(x)\|^p dx \right)^{1/p}$$

la cual da inicio para definir los espacios de Lebesgue, los cuales toman la medida de Lebesgue, funciones medibles y definidas en casi todas partes como se presenta en la referencia [13]. Así se definen a los espacios de Lebesgue como,

$$L^p([a, b]; \mathbb{R}^k) := \left\{ f \in F([a, b]; \mathbb{R}^k) : \left(\int_a^b \|f(x)\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Donde $\left(\int_a^b \|f(x)\|^p \right)^{1/p}$ define una norma para $L^p([a, b]; \mathbb{R}^k)$. Es conocido que los espacios de Lebesgue, $L^p([a, b]; \mathbb{R}^k)$ son completos con la métrica asociada $d_p(f, g)$, es decir, que son **espacios de Banach** para $1 \leq p < \infty$. Si $p = \infty$ se define otra norma la cual es conocida como $\text{ess sup } f = \inf\{b : \|f(x)\| \leq b, \text{ c.t.p.}\}$ así,

$$L^\infty([a, b]; \mathbb{R}^k) := \{f \in F([a, b]; \mathbb{R}^k) : \text{ess sup } f < \infty\}.$$

También el espacio de Lebesgue L^∞ es un **espacio de Banach**.

DEFINICIÓN 1.7. Sea X un espacio vectorial real. Un **producto interno** en X es una función $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) $(x, x) \geq 0$,
- (b) $(x, x) = 0$, si y sólo si, $x = 0$,
- (c) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$,
- (d) $(x, y) = (y, x)$.

Un espacio vectorial real X con un producto interno $(\cdot, \cdot)$ se le llama un **espacio con producto interno**.

EJEMPLO 1.5. La función $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(x, y) = \sum_{n=1}^k x_n y_n,$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^k$. Este producto interno se le conoce como el **producto interno estándar** en $\mathbb{R}^k$.

EJEMPLO 1.6. Sea $f, g \in L^2([a, b]; \mathbb{R}^k)$, luego $(f(x), g(x))$ es el producto interno de $\mathbb{R}^k$ definido en el ejemplo anterior. Se define la función $(\cdot, \cdot) : L^2([a, b]; \mathbb{R}^k) \times$

$L^2([a, b]; \mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ como,

$$(f, g) = \int_a^b (f(x), g(x)) dx,$$

es un producto interno en $L^2([a, b]; \mathbb{R}^k)$. Este producto interno se denomina el **producto interno estándar** en $L^2([a, b]; \mathbb{R}^k)$.

LEMA 1.1. *Sea X un espacio con producto interno y sean $x, y \in X$. Entonces:*

(a) *La función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\|x\| = (x, x)^{1/2},$$

es una norma en X , además, a la norma $\|\cdot\|$ se le conoce como norma inducida por el producto interno $(\cdot, \cdot)$ de X .

(b) $|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$, para $x, y \in X$, *se le conoce como Desigualdad de Cauchy-Schwarz, donde la norma es definida por el literal anterior.*

La demostración del Lema se encuentra en [13, Lema 3.13].

DEFINICIÓN 1.8. *Un espacio con producto interno que es completo con respecto a la métrica asociada con la norma inducida por el producto interno se llama un **espacio de Hilbert**.*

Es decir, que si X es un espacio de Banach el cual su norma es inducida por un producto interno, entonces X es un espacio de Hilbert.

EJEMPLO 1.7. De los ejemplos de espacios con producto interno 1.5 y 1.6.

- $\mathbb{R}^k$ es un espacio de Hilbert.
- $L^2([a, b]; \mathbb{R}^k)$ con el producto interno estándar es un espacio de Hilbert.

DEFINICIÓN 1.9. *Sea X y Y espacios vectoriales reales normados. Se define $L : X \rightarrow Y$ como un **operador o transformación lineal** si para $x, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ cumple,*

$$L(x + \alpha z) = L(x) + \alpha L(z).$$

DEFINICIÓN 1.10. *Sea X y Y espacios vectoriales reales normados y sea $T : X \rightarrow Y$ un operador. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *T es uniformemente continua;*
- *T es continua;*
- *T es continua en 0;*

- Existe un número real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k$ siempre que $x \in X$ y $\|x\| \leq 1$;
- Existe un número real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ para todo $x \in X$.

TEOREMA 1.1. *Considere que H y K son espacios de Hilbert. Si $F : H \rightarrow K$ es un operador continuo sobre H , entonces existe un único operador continuo $F^* : K \rightarrow H$ tal que $\langle Fx, y \rangle = \langle x, F^*y \rangle$, el cual es llamado el **operador adjunto de F** .*

1.1.2. Ecuación diferencial. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos, dada la función $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ decimos que,

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en términos de la función x con valor inicial x_0 en $t = t_0$, donde $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$, $t_0 \in I$ y $x_0 \in \Omega$. A la ecuación diferencial (1.2) se le conoce como un problema de valor inicial (**P.V.I**) o **problema de Cauchy**.

Para garantizar la existencia y unicidad del problema de Cauchy se deben dar propiedades a la función f , para esto se define Lipschitz y realizan lo siguientes teoremas.

DEFINICIÓN 1.11. *Sean M_1 y M_2 espacios con métricas d_1 y d_2 , respectivamente. Una función $f : M_1 \rightarrow M_2$ es **Lipschitz** si existe una constante $\lambda > 0$, denominada **constante de Lipschitz** de f , tal que,*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y),$$

para cualesquiera $x, y \in M_1$.

Se dice que una función $\omega : M \rightarrow M$ es de **contracción** si ω es de Lipschitz con constante $\lambda < 1$; en ese caso, la constante de Lipschitz es un **factor de contracción** de ω .

TEOREMA 1.2. Teorema punto fijo de Banach. *Sea (M, d) un espacio métrico completo y sea $g : M \rightarrow M$ una función de contracción sobre M . Entonces, existe un único $x \in M$ tal que $g(x) = x$.*

DEMOSTRACIÓN. Defina la sucesión $x_0 \in M$ y $x_n = g(x_{n-1})$. Vamos a mostrar que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, es decir para $\varepsilon > 0$ dado, tomamos un k suficientemente grande tal que para $n, m \geq k$, tenemos que,

$$d(x_n, x_m) = d(g^n(x_0), g^m(x_0)) \leq \varepsilon.$$

En efecto, supongamos que $n \geq m$. Entonces,

$$d(g^n(x_0), g^m(x_0)) \leq d(g^n(x_0), g^{n-1}(x_0)) + d(g^{n-1}(x_0), g^{n-2}(x_0)) + \cdots + d(g^{m+1}(x_0), g^m(x_0)),$$

Dado que la función g es una contracción,

$$d(g^n(x_0), g^m(x_0)) \leq K^{n-1}d(g(x_0), x_0) + K^{n-2}d(g(x_0), x_0) + \cdots + K^m d(x_1, x_0),$$

Luego,

$$d(g^n(x_0), g^m(x_0)) \leq K^m d(g(x_0), x_0) \sum_{i=0}^{n-m-1} K^i \leq K^m d(g(x_0), x_0) \sum_{i=0}^{\infty} K^i = \frac{K^m}{1-K} d(g(x_0), x_0).$$

Como $K < 1$, entonces la serie geométrica converge. Así que, la sucesión (x_n) es una sucesión de Cauchy, dado que X es completo, se sigue que la sucesión (x_n) converge a un punto z de X . Por la continuidad de g se tiene que z es punto fijo de g , esto es $g(z) = z$.

Para la unicidad del punto fijo se establecen z y w como dos puntos fijos de g . Entonces,

$$d(z, w) = d(g(z), g(w)) \leq K d(z, w) < d(z, w),$$

si $d(z, w) \neq 0$, se llega a que $d(z, w) < d(z, w)$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, para z y w dos puntos fijos de g se tiene que son iguales. $\square$

TEOREMA 1.3. Teorema de Existencia y Unicidad Si $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua en el abierto $I \times \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, para cada $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ existen $a, b > 0$ tal que $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \subset I \times \Omega$ y f es Lipschitz sobre $\overline{B(x_0, b)}$. Entonces, existe una única solución, $x \in C^1([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]; \overline{B(x_0, b)})$, del problema de valor inicial (1.2). Donde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ y $M = \sup \{ \|f(t, x)\| : (t, x) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \}$.

Se referencia [2] para dar un bosquejo de su demostración.

DEMOSTRACIÓN. Dado que f es continua en $I \times \Omega$, entonces la compacidad de $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, b)} \subset I \times \Omega$ implica que existe $0 < M < \infty$ el supremo sobre la norma de funciones. Ahora, si $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ y defina $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Para cada $f \in C(I_\alpha; \overline{B(x_0, b)})$ existe un supremo, pues I_α es compacto. El espacio de funciones $C(I_\alpha; \overline{B(x_0, b)})$ es un espacio de Banach con la norma del supremo $d(u, v) = \sup_{x \in I_\alpha} \|u(x) - v(x)\|$.

A cada $u \in C(I_\alpha; \overline{B(x_0, b)})$ definimos el operador L como,

$$L(u)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

En primer lugar, vamos a ver que $L(u)(t) \in \overline{B(x_0, b)}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|L(u)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \right| \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq M\alpha. \end{aligned}$$

Como $\alpha \leq b/M$, entonces $\|L(u)(t) - x_0\| \leq b$, es decir, $L(u)(t) \in \overline{B(x_0, b)}$ para $u \in C(I_\alpha; \overline{B(x, b)})$. Para mostrar la continuidad de $L(u)$ basta con notar que para $s, t \in I_\alpha$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|L(u)(s) - L(u)(t)\| &= \left\| \int_t^s f(r, u(r)) dr \right\| \\ &\leq \left| \int_t^s \|f(r, u(r))\| dr \right| \\ &\leq M|s - t|. \end{aligned}$$

Luego $L(u)$ es continua. De lo anterior, $L : C(I_\alpha; \overline{B(x, b)}) \rightarrow C(I_\alpha; \overline{B(x, b)})$.

Veamos que la función L es de Lipschitz.

En efecto, sea K la constante de Lipschitz de f y sea $u, v \in C(I_\alpha; \overline{B(x, b)})$, en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|L(u)(t) - L(v)(t)\| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t K\|u(s) - v(s)\| ds \right|, \text{ pues } f(s, \cdot) \text{ es una función Lipschitz con constante } K. \\ &\leq K\|u - v\| \left| \int_{t_0}^t ds \right| \\ &\leq Kd(u, v)|t - t_0|. \end{aligned}$$

Así que, L es de Lipschitz sobre $C(I_\alpha; \overline{B(x, b)})$. Consideramos el Lema [2, Lema 10.1] y el corolario [2, Corolario 8.6] para mostrar que L es una contracción.

Como L es una contracción sobre $C(I_\alpha; \overline{B(x, b)})$, el Teorema de punto fijo de Banach 1.2 implica que existe un único $x \in C(I_\alpha; \overline{B(x, b)})$ tal que $L(x) = x$. Esto es equivalente a encontrar la solución del problema de Cauchy (1.2),

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

□

1.1.3. Linealización de un sistema general de control. En este trabajo consideramos ecuaciones diferenciales ordinarias de manera abstracta descritas de la siguiente manera:

Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos, $I \subseteq \mathbb{R}$ cerrado y $f : I \times \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua que satisface la siguiente ecuación diferencial,

$$(1.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Sin embargo, una visualización del problema lineal favorece al entendimiento de la teoría que se desea plantear, por tanto consideraremos la ecuación diferencial lineal dada por,

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ son matrices.

Una forma para convertir el sistema general de control (1.3) a (1.4) es realizando una linealización a través de sus puntos de equilibrio. Si $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in \Omega \times \Gamma$ para $t \in I$ es un punto de equilibrio, es decir, $\dot{x}(\bar{t}) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ y si f es de clase C^2 , por el Teorema de Taylor de varias variables se tiene que,

$$(1.5) \quad f(x(t), u(t)) \approx f(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial x} \cdot x(t) + \frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial u} \cdot u(t).$$

Como $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ es el punto de equilibrio, en consecuencia el sistema general (1.3) pasa a ser un sistema de control matricial (1.4) con matrices $A = \frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial x}$ y $B = \frac{\partial f(\bar{x}(t), \bar{u}(t))}{\partial u}$.

La motivación de este trabajo es centrarse en un método para otorgar una **parametrización** de la solución y el control del sistema mencionado anteriormente; esto se realiza en los capítulos 2 y 4.

DEFINICIÓN 1.12. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **coercitiva**, si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Es decir, dado $M > 0$, existe $R_0 > 0$ tal que si $\|x\| \geq R_0$ tenemos que

$$f(x) \geq M.$$

En particular, si tomamos $M = f(0)$, entonces existe $R_1 > 0$ tal que si $\|x\| \geq R_1$ tenemos que $f(x) \geq f(0)$.

TEOREMA 1.4. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y coercitiva, entonces f tiene un mínimo global.

DEMOSTRACIÓN. Como f es coercitiva, de la observación anterior existe $R_0 > 0$ tal que para $\|x\| \geq R_0$ tenemos que

$$f(x) \geq f(0).$$

Dado que f es una función continua y considerando la compacidad de $\overline{B(0, R_0)}$, entonces por el Teorema del valor extremo de Weierstrass, existe $x^* \in \overline{B(0, R_0)}$ tal que $f(x^*) \leq f(y)$ para cada $y \in \overline{B(0, R_0)}$. Por lo tanto, x^* es el mínimo global de la función f . $\square$

1.2. Conceptos básicos de álgebra

1.2.1. Álgebra Abstracta. En esta sección se relacionan las ecuaciones diferenciales ordinarias como una estructura algebraica. Por lo tanto, es necesario introducir como base algunos conceptos habituales del álgebra, los cuales son importantes para el trabajo de grado. Para observar la relación entre el análisis y el álgebra, se muestran ejemplos de espacios de funciones vistos como estructura algebraica. Como referencias se usan libros habituales de álgebra [3] y [11].

DEFINICIÓN 1.13. Sea G un conjunto no vacío. Diremos que G es un **grupo** respecto a la operación $+: G \times G \rightarrow G$, si satisface las condiciones (i), (ii) y (iii):

- (i) Es **asociativa**, es decir, para cada $a, b, c \in G$ se tiene que $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- (ii) **Existencia del neutro**, es decir, existe $e \in G$ tal que para todo $a \in G$ se tiene que $a + e = e + a = a$.
- (iii) **Existencia del inverso**, es decir, para cada $a \in G$ existe $s \in G$ tal que $a + s = e$. En este caso s será el inverso de a y lo notaremos como $s = -a$.
- (iv) Es **conmutativa**, es decir, para todo $a, b \in G$ se tiene que $a + b = b + a$.

Si G es un grupo que satisface la condición **(iv)**, entonces diremos que G es un **grupo abeliano**.

EJEMPLO 1.8. Los ejemplos se consideran sobre espacios de funciones, pues son importantes para la solución de ecuaciones diferenciales.

- Sea $C^1(\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuamente diferenciables. Se define la suma de funciones $+$ como,

$$\begin{aligned} + : C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) &\rightarrow C^1(\mathbb{R}) \\ (f, g) &\rightarrow f + g. \end{aligned}$$

$f+g$ es una función continuamente diferenciable y se define de forma puntual como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. Para $f, g, h \in C^1(\mathbb{R})$, por la igualdad de funciones, las propiedades **(i)** y **(iv)** en la definición 1.13 se satisfacen y la función nula $e(x) = 0$ es el elemento neutro de $C^1(\mathbb{R})$. De igual forma, $-f(x)$ será el elemento inverso de cada función f continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el espacio $(C^1(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano.

- Se considera el conjunto de funciones $C^m(\mathbb{R})$ como las funciones definidas sobre $\mathbb{R}$ tal que su m -ésima derivada es continua. Es decir, si $f \in C^m(\mathbb{R})$, entonces las funciones $f, f', \dots, f^{(m)}$ existen y son continuas. Ahora, nuevamente definiendo la suma de funciones como en el ítem anterior se concluye que $(C^m(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano.

DEFINICIÓN 1.14. Para R un conjunto no vacío. Se dice que R es un **anillo** respecto a las operaciones $+: R \times R \rightarrow R$ y $\cdot: R \times R \rightarrow R$, si $(R, +)$ es un **grupo abeliano** y cumple las siguientes propiedades:

- La operación producto “ $\cdot$ ” es asociativa, es decir, para cada $a, b, c \in R$ se tiene que, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- La operación producto “ $\cdot$ ” distribuye respecto a la suma $+$, es decir, para cada $a, b, c \in R$ se tiene que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Si R es un anillo que su operación producto “ $\cdot$ ” es conmutativa, es decir, para cada $a, b \in R$ se tiene que, $a \cdot b = b \cdot a$, entonces a R se le conoce como un **anillo conmutativo**.

Si R es un anillo en el cual su operación producto “ $\cdot$ ” tiene identidad multiplicativa, es decir, existe $i \in R$ tal que para cada $a \in R$ se tiene que $i \cdot a = a \cdot i = a$, entonces a R se le dice un **anillo unitario**.

OBSERVACIÓN 1.1. Para las estructuras algebraicas que cuentan con las operaciones suma y producto, a sus elementos neutros se les denota como 0 y 1, respectivamente a las operaciones mencionadas.

EJEMPLO 1.9. De los conjuntos de funciones en los ejemplos 1.8 junto con la operación producto $(\cdot)$ se consideran los anillos de la siguiente manera:

- Como $(C^1(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano. Y, definiendo el producto de funciones “ $\cdot$ ” como,

$$\begin{aligned} \cdot : C^1(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) &\rightarrow C^1(\mathbb{R}) \\ (f, g) &\rightarrow f \cdot g, \end{aligned}$$

donde $f \cdot g$ es una función continuamente diferenciable que se define de forma puntual como, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Se tiene que $C^1(\mathbb{R})$ es un anillo con las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$.

- De forma análoga el conjunto $C^m(\mathbb{R})$ es un grupo abeliano con la operación suma y considerando el producto de funciones de forma puntual, se tiene que $C^m(\mathbb{R})$ es un anillo para $m \geq 0$.

DEFINICIÓN 1.15. Sea K un conjunto no vacío. Diremos que K es un **cuerpo** respecto a las operaciones $+: K \times K \rightarrow K$ y $\cdot: K/\{0\} \times K/\{0\} \rightarrow K/\{0\}$, si K y $K/\{0\}$ son grupos abelianos con las operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, respectivamente; además de que cumpla la propiedad de distribución del producto respecto a la suma.

DEFINICIÓN 1.16. Sea K un cuerpo, se define a $K[x]$ como el anillo de polinomios de indeterminada x y coeficientes en K .

Cada elemento del anillo de polinomios es de la forma $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ para algún n número natural y los coeficientes a_i pertenecen al cuerpo K , para $i = 0, 1, \dots, n$. La suma y multiplicación de polinomios es definida como usualmente se encuentra en textos de álgebra como de la referencia [3, Sección 7.2]. La estructura algebraica $K[x]$ no se interesa por el espacio definido de x como sí ocurre en el análisis, esto hace que en los ejemplos considerados 1.9 se puede prescindir del conjunto de dominio de las funciones C^1 y C^m .

DEFINICIÓN 1.17. Sean L y K dos cuerpos se les dice que son una **extensión de cuerpos** denotada por L/K , si $K \subseteq L$ tal que las operaciones sobre K coinciden con las operaciones sobre L restringidas a K .

DEFINICIÓN 1.18. Sea L/K una extensión de cuerpos, un elemento $a \in L$ se dice que es **algebraico** sobre K si a es raíz de algún polinomio no nulo $p(x) \in K[x]$. Si un elemento $a \in L$ no es algebraico sobre K se le nombra como **trascendental**.

EJEMPLO 1.10. Sea $\mathbb{R}(t)$ el conjunto de las funciones racionales de variable t de coeficientes reales. Definiendo por,

$$\mathbb{R}(t) = \left\{ h(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \mid f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, g(t) = \sum_{i=0}^m b_i t^i \neq 0; \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}; n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Donde se identifica a $g(t) = \sum_{i=0}^m b_i t^i$ como polinomio no nulo si algún coeficiente $b_i \neq 0$, para algún $i \in \{0, 1, \dots, m\}$. A los elementos $h(t) \in \mathbb{R}(t)$ desde el punto de vista algebraico no hay interés en definir su dominio ni su espacio de llegada. Para el conjunto $\mathbb{R}(t)$ se halla que es un cuerpo respecto a la suma de funciones (+) y al producto de funciones ($\cdot$), denotado como $(\mathbb{R}(t), +, \cdot)$.

También otra forma de definir al conjunto $\mathbb{R}(t)$ es el conocido cuerpo de cocientes de $\mathbb{R}[t]$, como se realiza en la referencia [3, Pág. 264]. Donde algunos elementos de $\mathbb{R}(t)$ pueden tener ceros sobre $\mathbb{R}$. En efecto, $\frac{t^2 - 4}{4t}$ es un elemento de $\mathbb{R}(t)$, puesto que $4t$ es distinto del polinomio nulo, pero $t^2 - 4$ tiene dos ceros reales que son -2 y 2 . Como se hace mención las expresiones algebraicas no buscan hallar el espacio dominio para las variables definidas.

EJEMPLO 1.11. Se toma el ejemplo 1.10 y de forma análoga se considera el conjunto $\mathbb{Q}(t)$, el cual son funciones racionales con variable t con coeficientes racionales. Así mismo, definir las operaciones suma y producto sobre $\mathbb{Q}(t)$ hace que sea un cuerpo. Para verificar que $\mathbb{R}(t)/\mathbb{Q}(t)$ es una **extensión de cuerpos** basta con notar que $\mathbb{Q}(t) \subset \mathbb{R}(t)$ y las operaciones coinciden al ser restringidas.

DEFINICIÓN 1.19. Considere L/K una extensión de cuerpos, sea $S \subseteq L$ donde la cardinalidad de S es n . Se le llama a S como **algebraicamente independiente sobre K** , si los elementos de S no satisfacen ninguna ecuación polinómico no trivial sobre K , es decir que, no son raíces de ningún polinomio de $K[x_1, \dots, x_n]$. En cambio, si S es un conjunto de cardinalidad no finita, será **algebraicamente independiente** sobre K si para cada subconjunto finito de S es algebraicamente independiente sobre K .

EJEMPLO 1.12. Considere la extensión de cuerpos $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, además los elementos e y e^4 son trascendentales sobre $\mathbb{Q}$. Sea $S = \{e^4, e\} \subseteq \mathbb{R}$ y considere el polinomio

$p(x, y) = x^4 - y$. Luego, si $y = e^4$ y $x = e$, entonces $p(x, y) = 0$. Por lo tanto, S es algebraicamente dependiente sobre $\mathbb{Q}$.

Del ejemplo anterior, se puede notar que no necesariamente un conjunto de elementos trascendentales sobre K es algebraicamente independiente sobre K . Para la definición de algebraicamente independiente y el ejemplo anterior se usó la referencia [11, Sección 19], los cuales son de ayuda para dar claridad que $e \in \mathbb{R}$ es trascendental sobre $\mathbb{Q}$, entonces para cualquier $b \in \mathbb{R}$ algebraico se tiene que e^a es trascendental sobre $\mathbb{Q}$.

DEFINICIÓN 1.20. Sea V un conjunto no vacío. Diremos que V es un **espacio vectorial sobre un cuerpo K** , si $(V, +)$ es un grupo abeliano, K es un cuerpo y la acción de K en V definida como $\cdot : K \times V \rightarrow V$ cumple las siguientes propiedades:

- (i) La acción “ $\cdot$ ” es asociativa, es decir, para cada $a, b \in K$ y $s \in V$ se tiene que $a \cdot (b \cdot s) = (a \cdot b) \cdot s$, donde $a \cdot b$ es la operación sobre el cuerpo K .
- (ii) Existencia del neutro, es decir, existe $e \in K$ tal que para cada $v \in V$ se tiene que $e \cdot v = v$.
- (iii) Distribución de la acción respecto a la suma vectorial, es decir, para cada $a \in K$ y $s, m \in V$ se tiene que $a \cdot (s + m) = a \cdot s + a \cdot m$.
- (iv) Distribución de la suma escalar respecto a la acción, es decir, para cada $a, b \in K$ y $s \in V$ se tiene que $(a + b) \cdot s = a \cdot s + b \cdot s$, donde $a + b$ es la suma definida en el cuerpo K .

EJEMPLO 1.13. Presentando algunos ejemplos sobre espacios de funciones.

- Considere $C^1(\mathbb{R})$ el cual sabemos que es un anillo por el ejemplo 1.9. Si se define la operación externa $\cdot : \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ como,

$$(\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t),$$

se conoce que satisface las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv) de la definición 1.20, por lo tanto $C^1(\mathbb{R})$ es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$.

- Para $R(t)$ el cual es un cuerpo y de forma análoga definimos una operación externa como en el ítem anterior, entonces podemos decir que $R(t)$ es un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 1.21. Sea M un conjunto no vacío. Diremos que M es un **R -módulo izquierdo**, si $(M, +)$ es un grupo abeliano, R es un anillo y la acción de R sobre M denotada como $\cdot : R \times M \rightarrow M$ cumple las propiedades:

- (i) La acción “ $\cdot$ ” es asociativa, es decir, para cada $s, r \in R$ y $m \in M$ se tiene que $s \cdot (r \cdot m) = (s \cdot r) \cdot m$, donde $s \cdot r$ es la operación sobre el anillo R .
- (ii) Distribución de la acción respecto a la suma del grupo, es decir, para cada $s \in R$ y $g, m \in M$ se tiene que $s \cdot (g + m) = s \cdot g + s \cdot m$.
- (iii) Distribución de la suma escalar respecto a la acción, es decir, para cada $s, r \in R$ y $m \in M$ se tiene que $(s + r) \cdot m = s \cdot m + r \cdot m$, donde $s + r$ es la suma definida en el anillo R .

Si R es un **anillo unitario** con identidad 1 y M es un R -módulo izquierdo, entonces se cumple de forma axiomática que para cada $m \in M$, se sigue que $1 \cdot m = m$. Si M es un R -módulo izquierdo y R es un **anillo conmutativo**, entonces diremos que M es un **R -módulo**

EJEMPLO 1.14. Se consideran los grupos abelianos que se mencionan en el ejemplo 1.8.

- Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $C^k(\mathbb{R})$ es grupo abeliano respecto a la suma de funciones. Considere $\mathbb{Z}$ el anillo y se define la acción $(\cdot)$ de $\mathbb{Z}$ en $C^k(\mathbb{R})$ como,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times C^k(\mathbb{R}) &\rightarrow C^k(\mathbb{R}) \\ (n, f) &\rightarrow n \cdot f := \sum_{i=1}^n f = \underbrace{f + \dots + f}_{n\text{-veces}}. \end{aligned}$$

Luego, las propiedades de la acción se satisfacen, pues coinciden con las propiedades del grupo abeliano $(C^k, +)$. Y como $\mathbb{Z}$ es anillo conmutativo con identidad 1, entonces $C^k(\mathbb{R})$ es un **$\mathbb{Z}$ -módulo**.

Capítulo 2

Teoría de Control

En el presente capítulo se define un sistema de control en tiempo $T > 0$ para una ecuación diferencial como el problema de buscar una función de control que modifique la solución de la ecuación diferencial para satisfacer un estado inicial y final en tiempos $t = 0$ y $t = T$, respectivamente. Dependiendo de los estados finales que la solución de un sistema puede satisfacer se define diferentes tipos de controlabilidad. Luego, durante el capítulo se presentan ejemplos relevantes de sistemas controlables. Así que, para determinar si un sistema lineal tiene solución que puede alcanzar cualquier estado final, dependiendo del control definido, es necesario de un reconocido resultado cualitativo nombrado como Teorema de Kalman. Para demostrar este teorema se realizan equivalencias entre dos sistemas de ecuaciones diferenciales, donde uno es el sistema inicial y el otro es un sistema paralelo, el cual lleva como nombre sistema adjunto.

Finalmente, se presenta el Teorema de Kalman como resultado cualitativo para determinar si un sistema lineal es controlable, aunque dicho teorema no otorga la solución y el control de un sistema controlable de forma explícita. El problema anterior motiva a la presentación del método de Flatness, el cual sí presenta tanto la solución como el control de forma explícita dependiendo de una función específica.

2.1. Sistemas de control

Un sistema dinámico es una ecuación diferencial que su estado cambia en relación al tiempo,

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Si al sistema dinámico se desea que en tiempo $T > 0$ satisfaga el estado x_T , entonces es necesario agregar un **control**, u , a esto se le conoce como sistema de control.

Para un tiempo $T > 0$, un **sistema de control** en dimensión finita está dado por un **estado inicial**, x_0 , un **estado final**, x_T , y el problema de valor inicial

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

para el cual se desea hallar el **control**

$$u : [0, T] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m,$$

tal que el problema de valor inicial (2.1) tiene solución $x : [0, T] \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ que satisface

$$x(T) = x_T.$$

Donde x es el **estado** y $f : X \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se denota $\dot{x} = dx/dt$ para $x := x(t)$.

OBSERVACIÓN 2.1. Para el sistema de control (2.1) la función f puede ser considerada en diferentes espacios de funciones, ya sea como función integrable en $[0, T]$ o una función suave en $[0, T]$, pues así se puede determinar la regularidad de x . Pero, en este caso nos concentraremos en el caso en que $f : X \times U \rightarrow X$ es una función lineal suave tal que $Rango \left[\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, 0) \right] = m$.

El trabajo de grado se centra en sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias, los cuales tienen una representación matricial. Para los casos generales de sistema de control (2.1) se usa la técnica de linealización vista en 1.1.3, así el nuevo sistema queda de la forma:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde las matrices A y B tienen coeficientes constantes reales y son de tamaños $n \times n$ y $n \times m$, respectivamente. La función $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ representa el estado y la función $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ el control. Es claro que $n \geq m \geq 1$. En práctica, los casos donde m es más pequeño que n son especialmente interesantes, porque el caso contrario no tiene sentido desde el punto de vista físico, ya que se estaría manipulando con un número de controles mayor a estados del sistema. El sistema (2.2) es un sistema de control.

EJEMPLO 2.1. Un problema sencillo en la robótica es el movimiento de un brazo atado a una masa m en su extremo. Esto se considera como un problema físico del

movimiento de un péndulo con oscilaciones pequeñas, en el cual su torque ejerce una fuerza y es considerado como el control, ver Figura 1. Más detalles del problema se encuentran en la referencia [16][Sección 1.3].

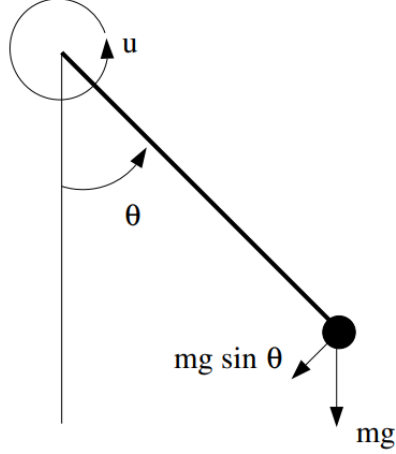


FIGURA 1. Gráfica del péndulo, imagen proveniente de la referencia [14]

Asumimos que no hay fricción, que la masa está al extremo del brazo, que la barra mide una unidad y para θ que es el ángulo del brazo respecto al eje vertical en sentido contra las manecillas del reloj, entonces de la **Segunda Ley de Newton** θ satisface la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$(2.3) \quad m\ddot{\theta} + mg \sin \theta = u,$$

donde m es la masa, g es la gravedad, u es el control y se aclara que el movimiento a contrarreloj se considera como positivo. El sistema del péndulo se puede escribir como una ecuación diferencial de primer orden,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta' \\ -g \sin \theta + \frac{u}{m} \end{pmatrix}.$$

Para facilidad del sistema se toman las constantes $m = g = 1$, entendiendo que el problema se convierte en un modelo de interés matemático. Cuando $\theta = \pi$ se da un punto de equilibrio para el sistema del péndulo (2.3) siempre que $u = 0$, es decir, para pequeñas oscilaciones cercanas a π . Así que, el sistema (2.3) se puede transformar en un sistema lineal, si se toma $x = \theta - \pi$, de donde se obtiene la siguiente ecuación diferencial,

$$(2.4) \quad \ddot{x} - x = u,$$

el cual es equivalente al sistema de primer grado si tomamos $x_1 = x$ y $x_2 = \dot{x}$,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Este modelo nos plantea que la masa del péndulo está posicionada arriba, a éste fenómeno se le conoce como péndulo invertido. El objetivo del problema es hacer que los estados x y $\dot{x}$ tengan como estado final cero desde cualquier estados iniciales no nulos $x(0)$ y $\dot{x}(0)$ de la ecuación (2.4). Para hallar el control que cumpla el objetivo anterior se realiza un análisis de manera intuitiva:

- Primera idea: si inicialmente $x = \theta - \pi > 0$, entonces deseamos movernos a derecha para llegar al punto de equilibrio, así debemos de aplicar una fuerza negativa. Por otro lado, si x se mueve a izquierda ($x < 0$), entonces debemos aplicar un torque (control) en dirección del contrarreloj. Luego, el control u se puede expresar opuesto al movimiento de x ,

$$(2.5) \quad u(t) = -\alpha x(t),$$

donde $\alpha > 0$.

Luego el sistema lineal del péndulo es,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se puede realizar el análisis de solución del sistema anterior con los valores propios del mismo, $\lambda = \pm\sqrt{1-\alpha}$. Si $\alpha > 1$ la solución del sistema se conoce como movimiento oscilatorio y la solución explícita es:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(t\sqrt{1-\alpha}) + c_2 \sin(t\sqrt{1-\alpha}) \\ c_2 \cos(t\sqrt{1-\alpha}) - c_1 \sin(t\sqrt{1-\alpha}) \end{pmatrix}.$$

Donde c_1 y c_2 son constantes y dependen de los valores de los datos iniciales, sin embargo, esta solución no garantiza que x y $\dot{x}$ vayan a cero.

Los siguientes casos se conocen como movimientos no oscilatorios; si $\alpha = 1$ la solución del sistema es $x_1(t) = c_1$ y $x_2(t) = c_1 t + c_2$ para c_1, c_2 constantes del valor inicial; si $\alpha < 1$ la solución es $x_1(t) = c_1 e^{t\sqrt{1-\alpha}}$ y $x_2(t) = c_2 e^{-t\sqrt{1-\alpha}}$. En cada caso no se encuentra una solución que cumpla el objetivo de llevar el sistema del péndulo lineal (2.4) a cero. Es decir,

que la idea de considerar un control opuesto al movimiento de x no funciona, aunque cuando $\alpha > 1$ la solución está alrededor del estado $(0, 0)$, pero se mueve de repente.

- Segunda idea: Para garantizar que la solución decaiga al estado nulo se puede compensar con agregar un valor opuesto a la velocidad $\dot{x}$ al torque. Así considere el control $u(t) = -\alpha x - \beta \dot{x}$, luego el sistema del péndulo puede tomar la siguiente representación matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz anterior son $\lambda = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(1 - \alpha)}}{2}$. Para mostrar que la solución tiende a 0 se necesita que los valores propios tengan parte real negativa (ver [2][Corolario 2.8]),

Así que, si $\beta^2 - 4(1 - \alpha) < 0$ se tiene soluciones que vayan a 0, aunque unas oscilarán por la parte imaginaria de la solución, pero en el caso en que $0 < \beta^2 - 4(1 - \alpha)$ y $\alpha < 1$ se tiene una solución que decae a 0 sin oscilaciones.

En el capítulo 4 se retoma este ejemplo del péndulo, pero dando una solución polinómica que va a cero.

2.2. Tipos de controlabilidad

DEFINICIÓN 2.1. Se dice que el sistema (2.2) es **exactamente controlable** en un tiempo $T > 0$, si dados los estados iniciales y finales, $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$, existe un control $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ tal que existe una solución del sistema de control x que satisface $x(T) = x_T$.

El conjunto de estados alcanzables para el sistema de control (2.2), se define para un tiempo $T > 0$ y un estado inicial x_0 como, el conjunto de todos los estados posibles en que la solución del sistema puede alcanzar en un tiempo T para todos los posibles controles:

$$(2.6) \quad EA(T, x_0) = \{x(T) \in \mathbb{R}^n : x \text{ es solución de (2.2), } \forall u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)\}.$$

El problema de un sistema de control es: dados los estados iniciales x_0 y finales x_T , hallar un control u tal que la solución de la ecuación diferencial $x' = f(x, u)$ satisface que $x(0) = x_0$ y $x(T) = x_T$. También se puede visualizar como para un sistema exactamente controlable su conjunto de estados alcanzables en tiempo $T > 0$ y con

un dato inicial fijo x_0 se tiene que $EA(T, x_0) = \mathbb{R}^n$, puesto que para cada estado final x_T se halla un control u que satisface la definición 2.1.

Considere $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$, entonces la solución del problema de Cauchy (2.2) viene dada por la fórmula de Duhamel,

$$(2.7) \quad x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

En ocasiones con la fórmula de Duhamel se puede mostrar si el sistema lineal (2.2) es no controlable, de la siguiente manera:

- Primero se halla los valores propios de la matriz A y se realiza la semejanza de matrices con el uso de la formas de Jordan, esto es $A = PJP^{-1}$.
- Luego, con el uso del teorema [2][Teorema 2.1] se halla $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$. Para así ver cuáles coordenadas de x el control $u(t)$ no aparece implícitamente ni explícitamente.

Ilustremos esta técnica con los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 2.2. A continuación se presentan algunos ejemplos de sistemas lineales no controlables. Para el siguiente sistema lineal se considera una matriz A invertible, pues es diagonal.

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Se puede realizar el análisis de la controlabilidad del sistema lineal (2.8) a través de la fórmula de Duhamel (2.7), para esto es necesario notar que los valores propios de la matriz A son 4 y 1. En consecuencia, para cualquier $r \in \mathbb{R}$ se tiene que,

$$e^{rA} = \begin{pmatrix} e^{4r} & 0 \\ 0 & e^r \end{pmatrix}.$$

Luego, la solución $x(t)$ del sistema (2.8) según la fórmula de Duhamel (2.7) es,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \int_0^t u(s) \begin{pmatrix} e^{4(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} ae^{4t} + \int_0^t e^{4(t-s)} u(s) ds \\ be^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior se puede concluir que para cada control, $u(t)$, la coordenada $x_2(t)$ no se puede modificar. Luego, el único estado alcanzable para $x_2(t)$ en tiempo $t = T$ es be^T .

También se puede dar un ejemplo de un sistema no lineal, el cual es linealizado en su punto de equilibrio y es no controlable. Ese es el caso de un vehículo con ruedas traseras no giratorias.

EJEMPLO 2.3. Se considera un vehículo con las ruedas traseras fijas en movimiento lateral, en cambio las delanteras sí giran. Este ejemplo representa el modelamiento matemático del movimiento de un vehículo en un suelo plano, es importante enfatizar que naturalmente el vehículo sí se puede manipular para posicionarse donde se desee. En la sección 4.3.2 se muestra que se puede hallar los valores del control a través de los estados del sistema. Este ejemplo es tomado de la referencia [9].

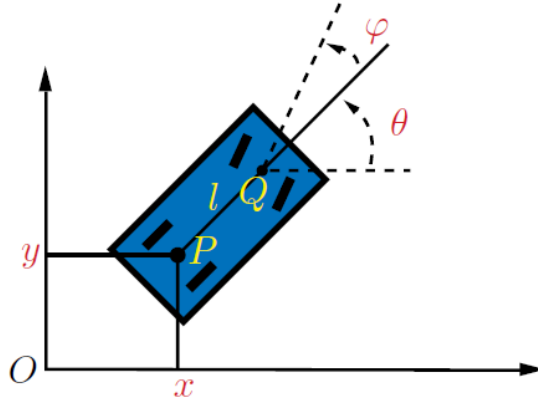


FIGURA 2. Vehículo con ruedas traseras fijas, imagen tomada de la referencia [9].

Los puntos medios del eje frontal y eje trasero son Q y P , respectivamente a una distancia $l > 0$. Así mismo, se define el eje central del vehículo el cual proviene de unir el segmento PQ que es paralelo al largo del vehículo, además el ángulo de giro de las ruedas delanteras es respecto a este eje central denotado por φ . El ángulo

de inclinación del eje central del vehículo respecto al eje x se llama θ . El sistema del movimiento del vehículo, el cual se mueve de lugares sin sufrir deslizamiento (derrapamiento), a este fenómeno se le conoce como un sistema no holonómico, donde el cambio de posición de las ruedas traseras $\left(\frac{dOP}{dt}\right)$ es paralelo al segmento PQ y el cambio de las ruedas delanteras $\left(\frac{dOQ}{dt}\right)$ es paralelo al frente de las ruedas. Se define la velocidad del vehículo como $u = \left|\frac{dOP}{dt}\right| \cdot \frac{PQ}{\|PQ\|}$. Así, la representación del sistema dinámico del vehículo, para $x := x(t)$, $y := y(t)$, $\theta := \theta(t)$ y $u := u(t)$,

$$(2.9) \quad \begin{cases} \dot{x} = u \cos \theta, \\ \dot{y} = u \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{u}{l} \tan \varphi. \end{cases}$$

Si nos fijamos en $(x, y, \theta, u, \varphi) = (0, 0, 0, 0, 0)$ hay un punto de equilibrio del sistema. Luego, realizando una expansión de Taylor alrededor de ese punto de equilibrio se tiene un sistema lineal asociado

$$(2.10) \quad \begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

Es claro que la linealización del vehículo en el punto de equilibrio nos otorga un sistema no controlable, pues el único estado que puede ser manipulado es x .

DEFINICIÓN 2.2. *El sistema de control de la forma (2.2) se dice **cero-controlable** en tiempo $T > 0$, si dado un dato inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ tal que existe una solución del sistema de control x que satisface $x(T) = 0$.*

OBSERVACIÓN 2.2. Para los sistemas lineales (2.2) existe una equivalencia entre ser *exactamente controlable* y ser *cero-controlable*.

Supongamos que el estado final de un sistema lineal es no nulo, $x_T \neq 0$. Así el siguiente sistema tiene solución no nula,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t), \quad t \in (0, T), \\ y(T) = x_T. \end{cases}$$

Si consideramos $z(t) = x(t) - y(t)$ su sistema de control se transforma a,

$$(2.11) \quad \begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu \\ z(0) = x_0 - y(0), \end{cases}$$

dado que $z(T) = x(T) - y(T) = 0$. Por lo tanto, (2.2) es exactamente controlable, si y sólo si, el sistema definido (2.11) es cero-controlable. En adelante, para los sistemas tipo (2.2) ser exactamente controlable y cero-controlable será equivalente.

Continuando con el ejemplo del péndulo (2.4) y con el uso de la equivalencia anterior entre ser cero controlable y exactamente controlable, entonces se puede analizar si el sistema es controlable.

EJEMPLO 2.4 (Continuación ejemplo péndulo). Considere el sistema del péndulo lineal,

$$(2.12) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como se planteó en el ejemplo del péndulo 2.1 se puede realizar el análisis para el sistema lineal del péndulo: Como la solución al sistema con el control $u(t) = -\alpha x_1(t) - \beta x_2(t)$ para $\alpha < 1$ y $\beta^2 - 4(1 - \alpha) > 0$ decae exponencialmente a cero, entonces se puede concluir que el sistema del péndulo es cero controlable.

Como en (2.2) la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces su operador adjunto según la definición 1.1 es A^T también conocida como matriz conjugada transpuesta.

2.3. Sistema adjunto

Para un sistema el control lineal (2.2) se puede verificar que es exactamente controlable con el Teorema de Kalman (2.2). Primero se debe considerar su sistema dual, su equivalencia con el sistema primal (2.2) y su sistema dual.

DEFINICIÓN 2.3. Para el sistema lineal (2.2) está asociado su **sistema adjunto** el cual es de la forma,

$$(2.13) \quad \begin{cases} \dot{y}(t) = -A^* y(t) \\ y(T) = y_T, \end{cases}$$

donde $y_T \in \mathbb{R}^n$ y A^* es la matriz conjugada transpuesta de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

El sistema adjunto es el sistema dual del sistema primal (2.2).

Sea $\dot{x} := \dot{x}(t)$ solución del sistema lineal (2.2) y sea $y := y(t)$, entonces

$$\int_0^T \langle \dot{x}, y \rangle dt = \int_0^T \langle Ax + Bu, y \rangle dt,$$

integrando por partes,

$$\langle x(t), y(t) \rangle \Big|_0^T - \int_0^T \langle x, \dot{y} \rangle dt = \int_0^T \langle Ax + Bu, y \rangle dt,$$

usando el operador adjunto de A y B como se menciona en el Teorema 1.1,

$$\langle x(t), y(t) \rangle \Big|_0^T - \int_0^T \langle x, \dot{y} \rangle dt = \int_0^T \langle x, A^* y \rangle dt + \int_0^T \langle u, B^* y \rangle dt,$$

agrupando,

$$\int_0^T \langle x, \dot{y} + A^* y \rangle dt = \langle x(t), y(t) \rangle \Big|_0^T + \int_0^T \langle u, B^* y \rangle dt.$$

Se interesa por hallar una ecuación diferencial que satisfaga $y(t)$, por eso se toma $\dot{y} = -A^* y$.

EJEMPLO 2.5. Del ejemplo del péndulo (2.4) se puede hallar su sistema adjunto. Dado que la matriz conjugada transpuesta corresponde al operador adjunto de una matriz $A \in \mathbb{R}^n$. Entonces, el sistema adjunto del péndulo es

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \\ y(T) = y_T. \end{cases}$$

La solución denotado como $y(t) \in \mathbb{R}^2$ y para y_T un par ordenado en $\mathbb{R}^n$. Luego, la solución al sistema adjunto del péndulo es $y(t) = e^{(T-t)A} \cdot y_T$.

LEMA 2.1. *Dado un estado inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ del sistema (2.2) es conducido a cero en un tiempo $T > 0$ por un control $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$, si y sólo si,*

$$(2.15) \quad \langle x_0, y(0) \rangle + \int_0^T \langle u(t), B^* y(t) \rangle dt = 0,$$

para cualquier $y_T \in \mathbb{R}^n$, donde $y(t)$ es la solución del sistema adjunto (2.13) con valor inicial $y(T) = y_T$.

DEMOSTRACIÓN. Sea y_T un vector arbitrario de $\mathbb{R}^n$, $x(t)$ y $y(t)$ soluciones del sistema primal (2.2) y dual (2.13), respectivamente. Como $\frac{d\langle x(t), y(t) \rangle}{dt} = \langle \dot{x}(t), y(t) \rangle + \langle x(t), \dot{y}(t) \rangle$ y A^* es matriz adjunta de A . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x(t), y(t) \rangle}{dt} &= \langle Ax(t), y(t) \rangle + \langle Bu(t), y(t) \rangle - \langle x(t), A^*y(t) \rangle \\ &= \langle Bu(t), y(t) \rangle. \end{aligned}$$

Si integramos con respecto al tiempo entre $[0, T]$, se tiene,

$$\langle x(T), y_T \rangle - \langle x_0, y(0) \rangle = \int_0^T \langle Bu(t), y(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u(t), B^*y(t) \rangle dt,$$

lo cual es equivalente a,

$$(2.16) \quad \langle x(T), y_T \rangle = \langle x_0, y(0) \rangle + \int_0^T \langle u(t), B^*y(t) \rangle dt.$$

Si el sistema primal (2.2) es cero controlable para algún control $u \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$, entonces $\langle x(T), y_T \rangle = 0$ para cualquier $y_T \in \mathbb{R}^n$, así se cumple la igualdad (2.15). Si para cualquier y_T se cumple la igualdad (2.15) y de (2.16), se tiene que $\langle x(T), y_T \rangle = 0$ para cada y_T ; se considera y_T como cada elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, luego $x(T) = 0$. $\square$

El lema anterior nos da una condición para relacionar el sistema primal (2.2) que es controlable y su sistema adjunto (2.13). Además, podemos ver la igualdad (2.15) del Lema 2.1 como los puntos críticos del siguiente funcional cuadrático $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido,

$$(2.17) \quad J(y_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*y(t)\|^2 dt + \langle x_0, y(0) \rangle,$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^n$ para $t \in [0, T]$ es la solución del sistema adjunto (2.13) con valor inicial $y(T) = y_T$. El funcional cuadrático J es continuo sobre $\mathbb{R}^n$, puesto que $B^*y(t)$ es una función diferenciable continua sobre $[0, T]$.

LEMA 2.2. Si J (2.17) tiene un mínimo en $\widehat{y_T} \in \mathbb{R}^n$ y $\widehat{y}$ es solución del sistema adjunto (2.13) con dato inicial $\widehat{y_T}$ en tiempo $t = T$, entonces $u = B^*\widehat{y}$ es un control para el sistema tipo (2.2) con estado inicial x_0 .

DEMOSTRACIÓN. Si $\widehat{y_T}$ es un vector tal que minimiza a J y $\widehat{y}$ es solución del sistema adjunto (2.13) con valor inicial $\widehat{y}(T) = \widehat{y_T}$, entonces

$$(2.18) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\widehat{y_T} + hy_T) - J(\widehat{y_T})}{h} = 0, \quad \forall y_T \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $y(t)$ solución del sistema adjunto tipo (2.13) con valor inicial y_T en tiempo $t = T$. Entonces, $\widehat{y} + hy$ es solución de un sistema tipo (2.13) con valor inicial $\widehat{y}_T + hy_T$ en tiempo $t = T$. Luego,

$$J(\widehat{y}_T + hy_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*(\widehat{y} + hy)(t)\|^2 dt + \langle x_0, \widehat{y}(0) + hy(0) \rangle.$$

Dado que $\|B^*(\widehat{y} + hy)(t)\|^2 = \|B^*\widehat{y}(t)\|^2 + 2h\langle B^*\widehat{y}(t), B^*y(t) \rangle + h^2\|B^*y(t)\|^2$. Así que, la igualdad (2.18) se puede ver como,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\widehat{y}_T + hy_T) - J(\widehat{y}_T)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^T \langle B^*\widehat{y}(t), B^*y(t) \rangle + \frac{h}{2} \|B^*y(t)\|^2 dt + \langle x_0, y(0) \rangle \\ &= \int_0^T \langle B^*\widehat{y}(t), B^*y(t) \rangle dt + \langle x_0, y(0) \rangle = 0, \quad \forall y_T \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

de lo anterior y usando el Lema 2.1, implica que $u = B^*\widehat{y}$ es un control para el sistema (2.2) con dato inicial x_0 , aún más el sistema (2.2) es cero controlable. $\square$

DEFINICIÓN 2.4. *El sistema adjunto (2.13) es **observable** en tiempo $T > 0$, si existe $c > 0$ tal que,*

$$(2.19) \quad \int_0^T \|B^*y(t)\|^2 dt \geq c\|y(0)\|^2,$$

para todo $y_T \in \mathbb{R}^n$; donde $y(t)$ es solución de (2.13) con valor inicial $y(T) = y_T$.

Como el sistema adjunto (2.13) tiene solución dado por $y(t) = e^{A^*(T-t)}y_T$, así que $y(0)$ e y_T están relacionadas por una matriz invertible. Luego, la condición de observabilidad del sistema adjunto es equivalente a,

$$(2.20) \quad \int_0^T \|B^*y(t)\|^2 dt \geq c\|y_T\|^2,$$

para todo $y_T \in \mathbb{R}^n$, donde $y(t)$ es solución de (2.13) con valor inicial y_T en tiempo $t = T$. Además, a las desigualdades (2.19) y (2.20) se les conoce como *desigualdad de observabilidad*.

PROPOSICIÓN 2.1. La desigualdad de observabilidad (2.19) es equivalente al siguiente problema de continuación única:

$$(2.21) \quad B^*y(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \rightarrow y_T = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Si tenemos la desigualdad de observabilidad (2.19) como es equivalente a la desigualdad (2.20), así si por hipótesis $B^*y(t) = 0$, entonces se tiene que $y_T = 0$. Es decir, se cumple el problema de continuación única. Mostremos que el problema de continuación única implica la desigualdad de observabilidad:

Sea (2.21) y definamos el siguiente funcional $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|y_T\|_* = \left[\int_0^T \|B^*y(t)\|^2 dt \right]^{1/2},$$

donde $y(t)$ es solución del sistema adjunto (2.13) con valor inicial y_T en tiempo $t = T$. Además, $\|\cdot\|_*$ es semi-norma en $\mathbb{R}^n$. Por hipótesis se tiene (2.21), entonces $\|\cdot\|_*$ es una norma. Luego, como todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, entonces existe $c > 0$ tal que $\|y_T\|_* \geq c\|y_T\|$. $\square$

OBSERVACIÓN 2.3. La proposición anterior 2.1 nos otorga que para mostrar que un sistema adjunto (2.13) es observable basta con mostrar su problema de continuación única.

TEOREMA 2.1. *El sistema primal (2.2) es **exactamente controlable** en tiempo $T > 0$, si y sólo si, su sistema adjunto (2.13) es **observable** en tiempo $T > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero probemos que la observabilidad implica la controlabilidad:

Considere el funcional J definido anteriormente tal que para cada $y_T \in \mathbb{R}^n$,

$$J(y_T) = \frac{1}{2} \int_0^T |B^*y(t)|^2 dt + \langle x_0, y(0) \rangle,$$

donde $y(t)$ es solución del sistema adjunto (2.13) con y_T como estado inicial en tiempo $T > 0$. Como el sistema adjunto (2.13) es observable, entonces existe $c > 0$ tal que,

$$\frac{1}{2} \int_0^T \|B^*y(t)\|^2 dt \geq \frac{c}{2} \|y_T\|^2.$$

Así que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*y(t)\|^2 dt + \langle x_0, y(0) \rangle &\geq \frac{c}{2} \|y_T\|^2 - |\langle x_0, y(0) \rangle| \\ J(y_T) &\geq \frac{c}{2} \|y_T\|^2 - |\langle x_0, y(0) \rangle|. \end{aligned}$$

De lo anterior, si $\|y_T\| \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{\|y_T\| \rightarrow \infty} J(y_T) = \infty.$$

Es decir, el funcional J es coercitivo. Como J es continuo y coercitivo, entonces J tiene un mínimo global por teorema 1.4. Sea y_T^* el mínimo global de J , con y^* solución del sistema adjunto (2.13) con valor inicial y_T^* en tiempo T . Luego, por

Lema 2.2 existe un control $u(t) = B^*y^*(t)$ para el sistema lineal (2.2). De lo anterior, el sistema lineal (2.2) es cero-controlable por Lema 2.1.

Ahora demostremos que la controlabilidad implica la observabilidad: Sea un sistema lineal (2.2) exactamente controlable en tiempo T . Actuemos por contradicción, supongamos que el sistema adjunto (2.13) no es observable. Luego, para toda constante $c_k > 0$ existe una sucesión $\{y_T^k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ con $\|y_T^k\| = 1$ para todo $k \geq 1$ tal que,

$$(2.22) \quad \int_0^T \|B^*y^k(t)\|^2 \leq c_k \|y_T^k\|^2,$$

donde $y^k(t)$ es solución del sistema adjunto (2.13) con valor inicial y_T^k en tiempo T . Dado que la sucesión $\{y_T^k\}$ es acotada, entonces por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión que converge a $y_T \in \mathbb{R}^n$ y $\|y_T\| = 1$. Más aún, sea $y(t)$ la solución del sistema adjunto con valor inicial y_T en tiempo T , entonces por la unicidad de $y(t)$ la subsucesión de $y^k(t)$ debe converger a $y(t)$. Si tomamos $c_k = \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{N}$ y consideremos el límite en la desigualdad anterior (2.22),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T \|B^*y^k(t)\|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k}$$

De la convergencia de la subsucesión a y tenemos que,

$$\int_0^T \|B^*y(t)\|^2 = 0.$$

Por hipótesis para cualquier x_0 el sistema lineal (2.2) es nulo-controlable, ahora por el Lema 2.1 implica que para $y_T \in \mathbb{R}^n$ asociado con su solución $y(t)$ se cumple,

$$\int_0^T \langle u, B^*y(t) \rangle dt = -\langle x_0, y(0) \rangle.$$

Si tomamos el control $u = B^*y(t)$, entonces $\langle x_0, y(0) \rangle = 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia, $y(0) = 0$ y como $0 = y(0) = e^{TA^*}y_T$ siendo e^{TA^*} invertible. Así que, $y_T = 0$ pero $\|y_T\| = 1$ lo cual es una contradicción. Finalmente, el sistema adjunto (2.13) sí es observable. $\square$

OBSERVACIÓN 2.4. El Teorema 2.1 es una herramienta para demostrar la controlabilidad para un sistema lineal (2.2) la cual equivale a probar que el sistema adjunto (2.13) cumpla la desigualdad de observabilidad. También, se tiene la equivalencia entre que el sistema primal sea controlable y el problema de continuación única del sistema adjunto.

2.4. Teorema de Kalman

Para la demostración del siguiente teorema se realiza con la referencia [15].

TEOREMA 2.2 (Teorema de Kalman). *El sistema lineal (2.2) es controlable en el tiempo $T > 0$, si y sólo si, $\text{rango}[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n$. Más aún, se satisface que es controlable para cualquier $T > 0$. Donde, $[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ es una matriz de tamaño $n \times nm$ obtenida de concatenar las matrices $B, AB, \dots$ y $A^{n-1}B$, ésta matriz se le conoce como matriz de Kalman.*

DEMOSTRACIÓN. Primero mostremos que si el sistema es controlable, implica que el rango de la matriz de Kalman es n :

Sea el sistema lineal (2.2) controlable en tiempo $T > 0$. Actuemos por contradicción, supongamos que $\text{rango}([B|AB|\dots|A^{n-1}B]) < n$. En consecuencia, las columnas de la matriz $[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ son linealmente dependientes, es decir, existen escalares $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j A^j B = 0.$$

Considere $v = h(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ donde $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua la cual es una permutación de los escalares $\alpha, \dots, \alpha_n$, tal que $v[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = 0$. En consecuencia,

$$(2.23) \quad vB = vAB = \dots = vA^{n-1}B = 0.$$

Haciendo uso del teorema Cayley-Hamilton para la matriz A , existen escalares reales $c_0, \dots, c_{n-1}$, tales que $A^n = c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_0A^0$. Es decir que, para las matrices A^r se pueden escribir en combinación lineal de $A^{n-1}, \dots, A^0$ si $r \geq n$. De lo anterior y de la igualdad (2.23) se tiene que, $vA^k B = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado que e^{tA} se define como,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k}{k!},$$

entonces $ve^{tA}B = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, por hipótesis el sistema lineal (2.2) es controlable, luego su solución $x(t)$ satisface,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Así que, al hacer el producto punto entre v y $x(t)$ solución al sistema lineal (2.2) se tiene,

$$\langle v, x(t) \rangle = \langle v, e^{tA}x_0 \rangle + \int_0^t \langle v, e^{(t-s)A}Bu(s) \rangle ds = \langle v, e^{tA}x_0 \rangle.$$

Luego, para cada tiempo t el producto punto real entre v y $x(t)$ es independiente al control $u(t)$, esto contradice que nuestro sistema lineal (2.2) sea controlable. Por lo tanto, el $\text{rango}([B|AB|\dots|A^{n-1}B]) = n$ siempre que el sistema lineal (2.2) sea controlable.

Por último, demostremos que si la matriz de Kalman es de rango n implica que el sistema lineal es controlable:

Sea el $\text{rango}([B|AB|\dots|A^{n-1}B]) = n$. Por los resultados anteriores que el sistema lineal (2.2) sea controlable equivale en mostrar el problema de continuación única (2.21) para el sistema adjunto.

Considere el sistema adjunto (2.13) con solución $y(t) = e^{(T-t)A^*}y_T$. Por hipótesis del problema de continuación única se tiene que, $B^*y(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Esto es,

$$B^*e^{(T-t)A^*}y_T = 0.$$

Ahora, la k -ésima derivada de $B^*e^{(T-t)A^*}y_T$ respecto a t es,

$$-B^*(A^*)^k y_T - B^*(A^*)^{k+1}(T-t)y_T - \dots = 0,$$

si evaluamos en $t = T$ se tiene que, $B^*(A^*)^k y_T = 0$ para $k \geq 0$.

Por hipótesis el $\text{rango}([B|AB|\dots|A^{n-1}B]) = n$, así el rango columna de su matriz transpuesta también será n , es decir,

$$\text{rango}([B^*|B^*A^*|\dots|B^*(A^*)^{n-1}]) = n.$$

De lo anterior y como $B^*(A^*)^k y_T = 0$ para $k \geq 0$, entonces $y_T = 0$. Por lo tanto, se cumple el problema de continuación única; por las equivalencias, concluimos que el sistema lineal (2.2) es controlable en tiempo $T > 0$.

□

Con el Teorema de Kalman 2.2 se puede determinar si los siguientes sistemas de control son exactamente controlables 2.1 o no controlables.

EJEMPLO 2.6. Se retoma el ejemplo del sistema lineal del péndulo (2.4) $\ddot{x} - x = u$, el cual su ecuación de primer orden es,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como el $\text{rango}[B, AB] = 2$, entonces haciendo uso del teorema de Kalman, tenemos que el sistema lineal del péndulo (2.4) es controlable para todo $T > 0$.

EJEMPLO 2.7. Para el ejemplo 2.2 se puede concluir que no es controlable a raíz del uso del Teorema de Kalman 2.2. Aunque la matriz que acompaña el estado del sistema es invertible $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, no es suficiente para que el sistema sea controlable, donde $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Puesto que su matriz concatenada $(b|Ab) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es de rango 1.

Álgebra Diferencial

La motivación de realizar este capítulo es para mostrar las herramientas teóricas que son necesarias para la existencia de una función $y(t)$ conocida como salida Flat o salida de planitud, la cual es una parametrización del estado y control de un sistema de control, ya sea de la forma general de un sistema de ecuaciones diferenciales (1.3) o su representación matricial (1.4), como se hizo mención en la sección de preliminares de análisis. Dichas herramientas teóricas son definiciones y algunos teoremas del álgebra diferencial, los cuales a su vez usan conceptos habituales del álgebra, pero en este caso dotados de la operación derivada para relacionar a las ecuaciones diferenciales ordinarias como una estructura. Fundamentalmente nos centraremos en dar conexión a las ecuaciones diferenciales con el álgebra a través de ejemplos, por lo tanto las demostraciones no están cubiertas a detalle; para mayor precisión ver los trabajos [4] [5] y las referencias en ellos.

3.1. Conceptos básicos del álgebra diferencial

DEFINICIÓN 3.1. R es un **anillo diferenciable** si es un **anillo conmutativo** equipado con la operación derivada D definida como,

$$\begin{aligned} D : R &\rightarrow R \\ a &\rightarrow D(a), \end{aligned}$$

que satisface $\forall a, b \in R$ las siguientes condiciones:

$$(3.1) \quad D(a + b) = D(a) + D(b),$$

$$(3.2) \quad D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

Una **constante** $c \in R$ es un elemento tal que $D(c) = 0$. Un anillo conmutativo en el cual todos sus elementos son constantes se denomina **anillo de constantes**.

EJEMPLO 3.1. Retomando los **anillos conmutativos** presentados en los ejemplos 1.9, considere $C^\infty(\mathbb{R})$ y la operación derivada D como la derivada usual de funciones, es decir, $D = \frac{d}{dt}$. Luego, si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ de variable t , entonces $\frac{d}{dt}f \in C^\infty(\mathbb{R})$, es decir, la operación derivada es clausurativa. Ahora las propiedades (3.1) y (3.2) de

anillo diferenciable las cumple, propiedades que se heredan de la linealidad de la derivada y de la regla de Leibniz.

Un **cuerpo diferenciable** es un cuerpo que satisface las condiciones de *anillo diferenciable*.

EJEMPLO 3.2. Los siguientes ejemplos serán usuales para relacionar los espacios de solución de una ecuación diferencial como una estructura algebraica.

- Considere los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ como espacio de funciones constantes sobre $\mathbb{R}$, por ejemplo, para $a \in \mathbb{Q}$ y para cada $t \in \mathbb{R}$ se define la función $a(t) = a$. Se considera la operación derivada D como la derivada usual respecto a la variable t , es decir $D = \frac{d}{dt}$. Luego, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son **cuerpos de constantes**, pues,

$$D(a) = 0 \text{ para todo } a \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \cup \mathbb{C}.$$

- Sea $\mathbb{R}(t)$ el conjunto de las funciones racionales sobre $\mathbb{R}$ de coeficientes reales definido como,

$$\mathbb{R}(t) = \left\{ h(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \mid f(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i, g(t) = \sum_{i=0}^m b_i t^i \neq 0; a_i, b_i \in \mathbb{R}; n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathbb{R}(t)$ es un cuerpo. Considere la derivada para polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ como,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=0}^n a_i t^i \right) = \sum_{i=1}^n i a_i t^{i-1}.$$

de donde se define la derivada D para funciones racionales de $\mathbb{R}(t)$ como,

$$D \left(\frac{p(t)}{q(t)} \right) = \frac{\frac{dp(t)}{dt} \cdot q(t) - p(t) \frac{dq(t)}{dt}}{[q(t)]^2}.$$

Entonces $\mathbb{R}(t)$ bajo la derivada D es un **cuerpo diferenciable**.

Se puede relacionar anillos diferenciables como conjunto de soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, para el problema de Cauchy de la forma,

$$(3.3) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = s \cdot x(t), & s, t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = c, & c \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$. Cuya solución es única y es dada por $x(t) = c \cdot e^{s \cdot t}$. De lo anterior, la solución ce^{st} del problema de Cauchy pertenece al anillo diferenciable $C^\infty(\mathbb{R})$ del ejemplo 3.1.

DEFINICIÓN 3.2. Sea L y K dos cuerpos diferenciables se les llama una **extensión de cuerpos diferenciables** denotado como L/K , si $K \subseteq L$ y la restricción a K de la derivada definida en L coincide con la derivada definida en K .

EJEMPLO 3.3. Véase algunas extensiones de cuerpos diferenciables.

- Considera $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ la extensión de cuerpos, además es una **extensión de cuerpos diferenciables**.
- Considere nuevamente $\mathbb{R}(t)$ el cuerpo de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{R}$. Así que, de forma análoga se define $\mathbb{Q}(t)$ como el cuerpo de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Además, $\mathbb{Q}(t) \subset \mathbb{R}(t)$, y así $\mathbb{R}(t)/\mathbb{Q}(t)$ es una extensión de cuerpos y la derivada $D = \frac{d}{dt}$ definida en $\mathbb{Q}(t)$ coincide con todas las derivadas sobre elementos de $\mathbb{R}(t)$. Por lo tanto, $\mathbb{R}(t)/\mathbb{Q}(t)$ es una **extensión de cuerpos diferenciables**.
- De igual forma se considera $\mathbb{C}(t)$ como el espacio de funciones racionales de indeterminada t con coeficientes complejos. Como $\mathbb{C}(t)$ es un cuerpo diferenciable, además $\mathbb{R}(t) \subseteq \mathbb{C}(t)$ y las derivadas sobre $\mathbb{R}(t)$ coincide sobre las derivadas definidas en $\mathbb{C}(t)$ restringida a $\mathbb{R}(t)$. Por lo tanto, $\mathbb{C}(t)/\mathbb{R}(t)$ es una **extensión de cuerpos diferenciables**. Además, podemos notar que $\mathbb{Q}(t) \subset \mathbb{R}(t) \subset \mathbb{C}(t)$ como cuerpos diferenciables.
- Considere $\mathbb{R}(t)$ este contiene a las constantes $\mathbb{R}$ y las derivadas sobre $\mathbb{R}(t)$ al ser restringido a $\mathbb{R}$ coincide con la derivada de constantes. Por lo tanto, $\mathbb{R}(t)/\mathbb{R}$ es una **extensión de cuerpos diferenciables**. De igual forma $\mathbb{C}(t)/\mathbb{R}$ es una extensión de cuerpos diferenciables.

DEFINICIÓN 3.3. Sea L/K una extensión diferencial, para algún $\mu \in \mathbb{N}$ se define $P(D^0, D, \dots, D^\mu)$ un **operador diferencial** con coeficientes en K como,

$$P(D^0, D, \dots, D^\mu) = \sum_{i=0}^{\mu} k_i D^i, \text{ para } k_i \in K, i = 0, 1, \dots, \mu;$$

tal que $P(D^0, D, \dots, D^\mu)(a) := P(a, D(a), \dots, D^\mu(a))$ para $a \in L$.

Además, se define un polinomio diferencial para evaluar en diferentes elementos. Por notación se define $D_0^\alpha(x) := (x, D(x), \dots, D^\alpha(x))$ con x como variable indeterminada para algún $\alpha \in \mathbb{N}$. Así, las notaciones coinciden,

$$P(D_0^\alpha(x)) := P(x, D(x), \dots, D^\alpha(x)).$$

DEFINICIÓN 3.4. Sea L/K una extensión de cuerpos diferenciables, para un elemento $a \in L$ se le llama **diferencialmente K -algebraico**, si existe un operador

diferencial no nulo con coeficientes en K , $\pi(D_0^\gamma(x))$, para algún $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\pi(D_0^\gamma(a)) = 0,$$

donde $\pi(D_0^\gamma(x)) = \sum_{i=0}^{\gamma} k_i D^i(x)$ con $k_i \in K$ para $i = 0, 1, \dots, \gamma$.

De la definición 3.3 si $a \in L$ es diferencialmente K -algebraico, se dice que a satisface una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes en K .

EJEMPLO 3.4. Sea $\mathbb{R}(t)/\mathbb{Q}(t)$ la extensión de cuerpos diferenciables. Consideremos $f(t) = \frac{t}{t^2 + 1} \in \mathbb{R}(t)$, luego $f'(t) = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$. Así considerando $a(t)$ y $b(t) \in \mathbb{Q}(t)$ definidos como $a(t) = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}$ y $b(t) = -t$, entonces f satisface la ecuación diferencial,

$$a(t)f(t) + b(t)f'(t) = 0,$$

y por lo tanto, $f(t)$ es **diferencialmente $\mathbb{Q}(t)$ -algebraico**.

DEFINICIÓN 3.5. Una extensión de cuerpos diferenciables L/K se le llamará **diferencialmente algebraica**, si todo elemento de L es **diferencialmente K -algebraico**.

OBSERVACIÓN 3.1. En adelante supondremos que L y K son cuerpos diferenciables y L/K una extensión de cuerpos diferenciables.

DEFINICIÓN 3.6. Un elemento $b \in L$ se le llama **diferencialmente K -trascendente**, si no es diferencialmente K -algebraico. La extensión L/K se le dice **diferencialmente trascendental**, si existe al menos un elemento de L que sea diferencialmente K -trascendente.

DEFINICIÓN 3.7. Sea I un conjunto de índices numerable. Un conjunto $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$ se dice **diferencialmente K -algebraicamente independiente**, si el conjunto de derivadas de cualquier orden, $\{D^\mu(a_i) \in L \mid i \in I, \mu = 0, 1, 2, \dots\}$, es **K -algebraicamente independiente** como se define en 1.19. Es decir que, para cada $\mu \in \mathbb{N}$ y para $i \in I$ existe un operador diferencial $P(D_0^\mu(x_i))$ tal que si,

$$P(D_0^\mu(a_i)) = 0,$$

entonces $P(D_0^\mu(x_i))$ debe ser el operador diferencial nulo.

Si un conjunto $\{a_i \mid i \in I\} \subseteq L$ es **diferencialmente K -algebraicamente independiente**, entonces podemos decir que $\{a_i \mid i \in I\}$ no es solución de ninguna ecuación diferencial lineal homogénea que tiene coeficientes en K .

EJEMPLO 3.5. Considerando a $\mathbb{C}(t)/\mathbb{R}$ del ejemplo 3.3 como una **extensión de cuerpos diferenciable**. Sea $\{i + t, it^2 + 1\} \subseteq \mathbb{C}(t)$ para $t \neq 0$. Nombremos a $f(t) = it^2 + 1$ y $g(t) = i + t$, así sus posibles derivadas no nulas son $\dot{f}(t) = 2it$, $f^{(2)}(t) = 2i$ y $\dot{g}(t) = 1$. Sean $k_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ tales que,

$$k_1(it^2 + 1) + k_2(i + t) + k_3(2it) + k_4(1) + k_5(2i) = 0,$$

donde 0 es el cero de polinomios. Dado que la igualdad entre dos polinomios es término a término, se tiene que $k_1 = 0 = k_4$, $k_2 = -2k_5$ y $k_3 = -2ik_5$. Podemos concluir que, para cada $i = 1, 2, 3, 4, 5$ los escalares son nulos, $k_i = 0$. Por lo tanto, $\{i + t, it^2 + 1\}$ es **diferencialmente $\mathbb{R}$ -algebraicamente independiente**.

DEFINICIÓN 3.8. Si consideramos un conjunto maximal de L (respecto a la inclusión) que es diferencialmente K -algebraicamente independiente, entonces lo llamaremos una **base diferencial trascendente** de L/K .

OBSERVACIÓN 3.2. Dos bases diferenciales trascendentes de L/K deben tener la misma cardinalidad, es decir, la misma cantidad de elementos la cual llamaremos **grado diferencial de trascendencia** de L/K y es denotado por **diff tr d L/K** .

DEFINICIÓN 3.9. Se dice que L/K es una extensión diferencial de cuerpos finitamente generada si existen $l_1, \dots, l_n \in L$ tal que $L = K(l_1, \dots, l_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 3.6. Considerando ejemplos en espacios de funciones.

- Sea $\mathbb{R}(t)$ el cuerpo de funciones racionales con variable x y coeficientes en $\mathbb{R}$. Es claro que, $\mathbb{R}(t)/\mathbb{R}$ es una extensión de cuerpos diferenciables finitamente generada.
- También para el cuerpo de funciones racionales con variables $t_1, \dots, t_n$, así $\mathbb{R}(t_1, \dots, t_n)$, es una extensión diferenciable finitamente generada sobre $\mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN 3.3. Como se seguirá hablando de extensiones L/K de cuerpos diferenciables, lo mencionaremos como L/K una extensión diferenciable.

TEOREMA 3.1. Sea L/K una extensión diferenciable finitamente generada, así los dos enunciados siguientes son equivalentes:

- L/K es diferencialmente algebraica.
- El grado de trascendencia de L/K es finito.

Demostración de una de las implicaciones en el apéndice A.1.

OBSERVACIÓN 3.4. En álgebra abstracta cuando se trabaja en el área de extensiones de cuerpos se puede ver que $K(\alpha)/K$ es una **extensión de cuerpos finita**, si y sólo si, α es algebraico sobre K , esto se encuentra en la referencia [3, Sección 13.2, Proposición 12].

Así podemos construir algunos ejemplos donde la extensión de cuerpos sea finita y a su vez diferenciable. De la referencia [3, Sección 13.1, Teorema 4] se puede construir un cuerpo tal que contenga la raíz de un polinomio irreducible, y además se puede conocer la base del cuerpo generado.

EJEMPLO 3.7. Como $t^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, entonces $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ es una extensión de cuerpos finita. Además, haciendo uso del teorema [3, Sección 13.1, Teorema 4] la base del cuerpo cociente $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ es $\{1, t\}$. Cualquier elemento del cuerpo cociente es de la forma,

$$a + bt + (t^2 + 1),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ apoyado de la referencia [3, Ejercicio 14, Sección 7.4].

Considerando un elemento del cuerpo cociente $a + bt$ sus derivadas son,

$$\frac{d^n(a + bt)}{dt^n} = \begin{cases} b, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Así existen, $k_i \in \mathbb{R}$ no nulos tales que,

$$\sum_{i=2}^n k_i \frac{d^i(a + bt)}{dt^i} \equiv 0, \quad \text{mód } (t^2 + 1).$$

En consecuencia, los elementos de $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ son **diferencialmente $\mathbb{R}$ -algebraico**. Lo cual coincide con el teorema 3.1, pues el grado de trascendencia de $\mathbb{R}$ extendido a $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ es 0.

3.2. La ecuación diferencial para el álgebra diferencial

Anteriormente se ha visto que algunas soluciones de una ecuación diferencial pertenecen a conjuntos de cuerpos diferenciables. Ahora, se introduce una ecuación diferencial ya como una estructura algebraica diferencial.

DEFINICIÓN 3.10. Sea K un cuerpo diferenciable. S/K es un **sistema**, si es una extensión diferenciable finitamente generada. Tal definición corresponde a una cantidad finita de variables relacionadas con una cantidad finita de ecuaciones diferenciales sobre K . El **orden diferencial** del sistema S/K es el grado diferencial de trascendencia de S/K , que se denota como **diff tr d S/K** .

EJEMPLO 3.8. Considere una ecuación diferencial la cual su solución no sea trivial para así generar un sistema. Por ejemplo, sea $K = \mathbb{R}$ y el sistema generado por la variable y que está ligada a la siguiente ecuación diferencial,

$$y'' + y = 0.$$

Su solución está dada por $y(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}$ donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias. Así e^{it} soluciona la ecuación anterior, por lo tanto es diferenciable $\mathbb{R}$ -algebraico.

El conjunto $\mathbb{R}(e^{it})$ se puede definir como el cuerpo de cociente del anillo $R[e^{it}]$ el cual se asemeja a los polinomios con indeterminada e^{it} .

EJEMPLO 3.9. El primer ejemplo es de la referencia [5].

- Sea $K = \mathbb{R}$; el sistema S/K que tiene cuatro variables x_1, x_2, x_3, x_4 que están ligadas a dos ecuaciones diferenciables algebraicas es el siguiente:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 + \ddot{x}_3 \dot{x}_4 = 0, \\ \dot{x}_2 + (x_1 + \ddot{x}_3 x_4) x_4 = 0, \end{cases}$$

donde $D(x) := \dot{x}$ y $D^2(x) := \ddot{x}$ son la primera y segunda derivada. Claramente, **diff tr d S/K** = 2. El cual es igual al número de variables menos el número de ecuaciones.

- Considere a $K = \mathbb{R}$ y el sistema generado por las variables x_1, x_2, x_3 que se asocian a la siguiente ecuación diferencial,

$$(3.5) \quad \dot{x}_2 + (\ddot{x}_1 + x_2) \ddot{x}_3 = 0.$$

Dado que el número de variables son 3 y hay una ecuación, entonces el **diff tr d S/K** = 2.

DEFINICIÓN 3.11. $K\langle u \rangle$ es un cuerpo diferenciable, donde $u = (u_1, \dots, u_m)$ son diferencialmente K -algebraico independientes. A $u = (u_1, \dots, u_m)$ le denominaremos **entrada**. Un elemento de $K\langle u \rangle$ es una expresión racional de variables de u y derivadas finitas de u con coeficientes sobre K .

De la definición anterior, se define a $K\langle u \rangle$ como $K\langle u \rangle := K(u, D(u), \dots, D^\alpha(u))$ para algún $\alpha \in \mathbb{N}$. Es claro que, $K\langle u \rangle/K$ es un sistema. Además, note que los sistemas no necesariamente son ecuaciones diferenciales lineales. Pues, un elemento

de $K\langle u \rangle$ puede ser de la forma,

$$\frac{k_1 D(u)}{D^2(u)} + k_2 u^3.$$

DEFINICIÓN 3.12. A $S/K\langle u \rangle$ se le dice un **sistema dinámico** S con **entrada** u , si $S/K\langle u \rangle$ es una extensión diferencialmente algebraica finitamente generada. Note que el número m es la cantidad de componentes de u es igual al orden diferencial del sistema S/K . Una **salida** $y = (y_1, \dots, y_p)$ es un conjunto finito de cantidades diferenciales de S .

OBSERVACIÓN 3.5. Si $S/K\langle u \rangle$ es un sistema dinámico, por el teorema 1.1, se tiene que el grado de trascendencia de $S/K\langle u \rangle$ es finito. Viendo a $S/K\langle u \rangle$ como un espacio vectorial (como extensión de cuerpos) finito, entonces existe una base finita trascendente $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $S/K\langle u \rangle$. En consecuencia, cualquier componente de la derivada $D(x)$ y de y es $K\langle u \rangle$ -algebraicamente dependiente sobre x , donde x es el **estado**. Esto es,

$$\begin{cases} A_1(D(x_1), x, D_0^{\alpha_1}(u)) = 0, \\ \vdots \\ A_n(D(x_n), x, D_0^{\alpha_n}(u)) = 0, \\ B_1(D(y_1), x, D_0^{\beta_1}(u)) = 0, \\ \vdots \\ B_p(D(y_p), x, D_0^{\beta_p}(u)) = 0, \end{cases}$$

donde A_i y B_j son polinomios con coeficientes en $K\langle u \rangle$, para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$. El entero positivo n es la **dimensión** del sistema dinámico $S/K\langle u \rangle$.

Como los sistemas de ecuaciones diferenciales siempre se encuentran de forma polinómica, ya sea lineal o no lineal. En este trabajo de grado se interesa por los casos de sistemas dinámicos que los elementos de la base trascendental sean de forma polinómica.

EJEMPLO 3.10. Se hace referencia a los ejemplos de sistemas mencionados en (3.9).

- Si al sistema S/K (3.4) se considera dos componentes de entrada $u_1 = x_3$ y $u_2 = \dot{x}_4$. La extensión $S/K\langle u \rangle$ es diferencialmente algebraica y se puede

representar como,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\ddot{u}_1 u_2, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + \ddot{u}_1 x_4) x_4, \\ \dot{x}_4 = u_2. \end{cases}$$

La dimensión del sistema dinámico es 3 y (x_1, x_2, x_4) es el estado del sistema.

- Para el sistema S/K ligada al sistema de ecuaciones diferenciales (3.5) considere la entrada $(u_1, u_2) = (\dot{x}_3, \ddot{x}_1)$, así la **dinámica** $S/\mathbb{R}\langle u \rangle$ tiene la siguiente forma,

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -(u_2 + x_2) \dot{u}_1, \\ \dot{x}_3 = u_1. \end{cases}$$

Así la dinámica tiene dimensión 2 y el estado del sistema es (x_2, x_3) . Pero, si consideramos una entrada $(u_1, u_2) = (\dot{x}_3, \dot{x}_1)$ la dinámica cambia a,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_2, \\ \dot{x}_2 = -(\dot{u}_2 + x_2) \dot{u}_1, \\ \dot{x}_3 = u_1. \end{cases}$$

Y de dimensión 3 con (x_1, x_2, x_3) como estado de la dinámica.

DEFINICIÓN 3.13. Sea K un cuerpo diferenciable. Se denota por $K[D]$ al anillo de operadores diferenciales lineales de la forma,

$$\sum_{j=0}^s a_j D^j, \quad (a_j \in K),$$

para $j = 0, 1, \dots, s$ con $s \in \mathbb{N}$. Donde el **operador diferencial** coincide con la definición 3.3.

En efecto, $K[D]$ es un anillo con la operación suma $(+)$ y la operación producto $(\cdot)$ definida de igual forma como se define el anillo de polinomios $K[x]$. El anillo $K[D]$ es conmutativo, si y sólo si, K es un cuerpo de constantes. Sin embargo, en general en el caso no conmutativo, $K[D]$ es un anillo de ideal principal.

DEFINICIÓN 3.14. Al conjunto M se le llamará un $K[D]$ -módulo izquierdo y se denota como $(M, +, \cdot)_{K[D]}$, donde $\cdot : K[D] \times M \rightarrow M$ es la acción del anillo $K[D]$ sobre M .

EJEMPLO 3.11. Consideremos a $\mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]$ como el conjunto de operadores diferenciales lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$, y al conjunto $C^\infty(\mathbb{R})$, el cual es un grupo abeliano bajo la suma de funciones $+$. Luego, si $h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $ah^{(k)}(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, el conjunto de funciones infinitamente diferenciables, $C^\infty(\mathbb{R})$, son un $\mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]$ -módulo izquierdo.

DEFINICIÓN 3.15. Sea M un $K[D]$ -módulo izquierdo, para $m \in M$ se le llamará **torsión** si existe $\pi \in K[D]$, $\pi \neq 0$, tal que $\pi(m) = 0$. Es decir que, m satisface una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes en K . El conjunto de los elementos **torsión** de M es un **submódulo** T , el cual es llamado **submódulo de torsión** de M . Si $T = M$, entonces a M lo llamaremos de **torsión**.

EJEMPLO 3.12. Como $C^\infty(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]$ -módulo izquierdo, consideremos a $\sin(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, el cual satisface $(\frac{d^2}{dt^2} + 1)\sin(t) = 0$, luego $\sin(t)$ es de torsión.

DEFINICIÓN 3.16. M es un K -módulo izquierdo se dice finitamente generado si existe $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq M$ un conjunto generador de M , es decir, para cualquier $m \in M$, existen $\{\psi_i\}_{i=1}^n \subseteq K$ tales que,

$$m = \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot a_i.$$

EJEMPLO 3.13. Considere $M = \langle \sin t, \cos t \rangle$ como las combinaciones reales de $\sin t$ y $\cos t$. Así, podemos ver que M es un grupo abeliano respecto a la suma. Se define la derivada $D = \frac{d}{dt}$ derivada usual, luego $D(\sin t) = \cos t$ y $D(\cos t) = -\sin t$. En consecuencia, para cada $a \sin t + b \cos t$ en M , se tiene que,

$$\begin{aligned} D(a \sin t + b \cos t) &= a \cos t - b \sin t, \\ D^2(a \sin t + b \cos t) &= D(a \cos t - b \sin t), \\ D^2(a \sin t + b \cos t) &= -a \sin t - b \cos t. \end{aligned}$$

Así que, M es un $\mathbb{R}[D]$ módulo finitamente generado. Además, para cada $a \sin t + b \cos t$ en M se tiene que $D^2 + Id \in \mathbb{R}[D]$ anula al elemento, es decir,

$$(D^2 + Id) \cdot (a \sin t + b \cos t) = 0.$$

Por lo tanto, M es un $\mathbb{R}[D]$ módulo finitamente generado que es de torsión y M como $\mathbb{R}$ espacio vectorial es de dimensión 2.

DEFINICIÓN 3.17. Para M un K -módulo finitamente generado se le dice **libre**, si y sólo si, su submódulo de torsión T es trivial, es decir, $T = \{0\}$. El submódulo **libre**, Φ , de M se define como los elementos de M que no son de torsión. Además, el **rango** del módulo M , denotado por $\mathbf{rg} M$, es la cardinalidad de cualquier base de Φ .

PROPOSICIÓN 3.1. Para M un $K[D]$ -módulo izquierdo finitamente generado, las siguientes dos propiedades son equivalentes:

- M es torsión.
- La dimensión de M como K -espacio vectorial es finito.

DEFINICIÓN 3.18. A Γ se le dice un **sistema lineal** si es un $K[D]$ -módulo izquierdo finitamente generado. El **orden diferencial** de Γ es el rango de Γ .

EJEMPLO 3.14. Sea $P_n(\mathbb{R})$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes reales. Así que, $(P_n(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano. Se define la derivada $D = \frac{d}{dt}$ sobre $P_n(\mathbb{R})$, luego $P_n(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R} \left[\frac{d}{dt} \right]$ -módulo. Además, una base para $P_n(\mathbb{R})$ es $\{t^j\}$ para $j = 0, 1, \dots, n$, pues cualquier polinomio puede ser generado finitamente por el conjunto mencionado anteriormente. Así que, $P_n(\mathbb{R})$ es un sistema lineal.

DEFINICIÓN 3.19. Una **dinámica lineal** con **entrada** $u = (u_1, \dots, u_m)$ es un sistema lineal Γ que contiene a u tal que el módulo cociente $\Gamma/[u]$ es de torsión; donde $[u]$ denota $K[D]$ -módulo izquierdo generado por las componentes de u . Asumimos que $[u]$ es submódulo libre, así el orden diferencial de Γ es m . Además, una **salida** $y = (y_1, \dots, y_p)$ es un conjunto finito de elementos de Γ .

3.3. Representación del estado de Kalman para una Dinámica Lineal

Sea Γ un sistema dinámico lineal con entrada $u = (u_1, \dots, u_m)$ y sea $y = (y_1, \dots, y_p)$ la salida. Como $\Gamma/[u]$ es un módulo cociente de torsión, entonces como K -espacio vectorial es de dimensión finita según la proposición 3.1. Así podemos considerar una base $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de $\Gamma/[u]$ como K -espacio vectorial. Luego, las derivadas de $D(\xi) = (D(\xi_1), \dots, D(\xi_n))$ dependen K -linealmente de la base ξ . En consecuencia,

$$D \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

donde F es una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas en K .

Sea $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_p)$ un elemento de $\Gamma/[u]$ que pertenece a la clase de $y \in \Gamma$. Así $\hat{y}$ es K -linealmente dependiente de ξ ,

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_p \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

donde M es una matriz $p \times n$ con entradas en K . Ahora, expandamos a y en Γ , como y es linealmente dependiente de ξ en $\Gamma/[u]$. Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^r M_\alpha D^\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

donde M_α son matrices $p \times m$ con entradas en K . De igual forma para $D(\xi) = (D(\xi_1), \dots, D(\xi_n))$ que pertenece a Γ se expande como,

$$(3.6) \quad D \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{\mu} G_\alpha D^\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

donde G_α son matrices $p \times m$ con entradas en K .

El objetivo es tener un sistema de control lineal de Γ para ello, se considera bajar de grado las derivadas de u :

Si $G_\alpha \neq 0$ para $\alpha \geq 1$, entonces se define a $\xi^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in \Gamma/[u]$ tal que,

$$(3.7) \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix} + G_\mu D^{\mu-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Derivando (3.7) y usando (3.6) se tiene que,

$$(3.8) \quad D \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix} + D(G_\mu) D^{\mu-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + G_\mu D^\mu \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{\mu} G_\alpha D^\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

pues la matriz G_μ puede que sea de constantes o no. Así se logró desaparecer el mayor orden de derivada de u que es μ . Multiplicando F por la igualdad (3.7) y agrupando los coeficientes de las derivadas de u se sigue que,

$$(3.9) \quad D \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \xi_1^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{\mu-1} G_\alpha^* D^\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Nuevamente se analiza si la matriz $G^{\mu-1}$ no es nula para bajar el grado de la ecuación diferencial. Este proceso se hace de forma inductiva hasta hallar una representación matricial del **sistema de control**, es decir,

$$(3.10) \quad D \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 3.20 (Controlabilidad). *Una dinámica lineal Γ se le dice **controlable**, si y sólo si, una de las siguientes condiciones se satisface:*

- Γ es trivial, es decir, $\Gamma = [u]$.
- Γ es no trivial y su representación tipo **sistema control** es **controlable** en el sentido del Teorema de Kalman 2.2.

3.4. Controlabilidad para el álgebra diferencial

De la referencia [7] se constituye y realiza el siguiente teorema, el cual nos muestra una relación equivalente entre una dinámica lineal 3.19 es controlable equivale a que la dinámica lineal sea de módulo libre.

TEOREMA 3.2. *Una dinámica lineal Γ es **controlable**, si y sólo si, Γ es un $K[D]$ -módulo izquierdo libre.*

Prueba del Teorema en el apéndice A.2.

DEFINICIÓN 3.21. *Dos sistemas L/K y S/K se les dice que son **equivalentes**, si y sólo si, cualquier elemento de L (resp. S) es algebraico sobre S (resp. L). Dos sistemas dinámicos $L/K\langle u \rangle$ y $S/K\langle u \rangle$ se les dice que son **equivalentes**, si y sólo si, sus sistemas L/K y S/K lo son.*

TEOREMA 3.3. *Dos sistemas equivalentes (resp. dinámicas) tienen el mismo orden diferencial, es decir, tienen la misma cantidad de entradas independientes.*

DEFINICIÓN 3.22. *Una extensión diferencial L/K se dice ser **puramente trascendental diferenciable**, si y sólo si, existe una **base trascendental diferencial** $\beta = \{\beta_i : i \in I\}$ de L/K tal que $L = K\langle \beta \rangle$.*

La definición anterior es análoga para las definiciones de sistema y dinámica lineal. Así, un sistema L/K es puramente trascendental diferenciable, si y sólo si, la extensión L/K lo es. Y, una dinámica $L/K\langle u \rangle$ es puramente trascendental diferenciable, si y sólo si, L/K lo es.

3.5. Sistema Flat

DEFINICIÓN 3.23. Un sistema S/K es llamado **flat** si es **equivalente** a un sistema L/K que sea **puramente trascendental diferenciable**. Para $y = (y_1, \dots, y_m)$ como base trascendental diferenciable de L/K tal que $L = K\langle y \rangle$ es llamada salida **flat** del sistema S/K .

DEFINICIÓN 3.24. Sea L/K un sistema de orden diferencial m . Considere todos los posibles conjuntos $z = (z_1, \dots, z_m)$ donde cada z_i son diferenciable K -algebraicas independientes, pero algebraicos sobre L . Luego, se define a δ como el mínimo de los grados de trascendencia de $L\langle z \rangle/K\langle z \rangle$. Al entero δ se nombra como el **defecto** del sistema L/K .

PROPOSICIÓN 3.2. Un sistema L/K es flat, si y sólo si, su defecto es cero.

Para ver demostración ir al apéndice A.3.

OBSERVACIÓN 3.6. El **defecto** de Γ un sistema lineal (3.18) por definición es el **defecto** de su extensión diferenciable asociada D/K , donde D es el cuerpo de cociente de Γ .

TEOREMA 3.4. El **defecto** de un sistema lineal (3.18) es igual a la dimensión de su submódulo de torsión, es decir, a la dimensión del espacio no controlable de su representación tipo sistema de control. Un sistema lineal es **flat**, si y sólo si, es **controlable**.

Demostración del teorema en el apéndice A.4.

Capítulo 4

Método de Flatness

Durante el presente capítulo se realizará la definición de un sistema Flat, basado en la teoría de álgebra diferencial vista en el capítulo anterior 3. Se mostrará la función Flat para un sistema de control lineal particular que es llamado sistema canónico. Luego, se presenta la equivalencia entre cualquier sistema de control lineal y el sistema canónico para así hallar la función Flat a través de la equivalencia entre sistemas. Al final del capítulo se presentan algunos ejemplos de sistemas Flat. Durante el capítulo se usan las referencias [12] y [9].

4.1. Introducción al método de Flatness

En relación a los sistemas de control lineales con representación matricial (2.2) dada por

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

que fueron mencionados en el capítulo 2.1. Si los sistemas (2.2) son controlables según la definición 2.1, entonces existe y se desea hallar una parametrización del control y la solución del sistema lineal (2.2), en esto se centra la idea del uso del método Flatness para mostrar controlabilidad, y es el objetivo de este capítulo. Con más generalidad, la función Flat se puede presentar como la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.1. *Un sistema de control como se menciona en (2.1), $\dot{x} = f(x, u)$, es un sistema **Flat**, si existe una función y definida como,*

$$y = h(x, u, u', \dots, u^{(r)}) \in \mathbb{R}^m,$$

tal que sus componentes son linealmente independientes, y tanto el estado x como el control u se pueden expresar en función de y y de un número finito de sus derivadas, es decir que,

$$(4.1) \quad x = k(y, y', \dots, y^{(p)}) \quad \text{and} \quad u = l(y, y', \dots, y^{(q)}).$$

*A la función y se le conoce como función **Flat** del sistema de control (2.1), anteriormente se le había conocido como salida Flat.*

La definición anterior concuerda con la teoría presentada anteriormente donde un sistema de control (2.1) es un sistema desde el punto de vista algebraico 3.10 el cual puede ser equivalente a un sistema Flat según la definición 3.23.

Para los sistemas de control lineales con representación matricial (2.2) de igual forma cumple con la definición anterior, pues al hallar su sistema asociado como menciona la observación 3.6 se puede determinar de igual forma su función Flat.

El siguiente ejemplo es para hallar la función Flat al siguiente sistema conocido como sistema canónico:

EJEMPLO 4.1. Considere el siguiente sistema de control lineal,

$$(4.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

con estado final en tiempo $T > 0$, $\vec{x}(T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se define como $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, así $Ab = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por el **Teorema de Kalman** 2.2, se tiene que el **sistema canónico** (4.2) es controlable. El objetivo es hallar una función $y(t) \in \mathbb{R}$ tal que el sistema mencionado sea **Flat**

Considere $y(t) = x_1(t)$, entonces $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$ y $\ddot{y} = \ddot{x}_2 = u$, es decir que, las derivadas de y son linealmente independientes, además $y \in C^2([0, T]; \mathbb{R})$. De los estados inicial y final se tiene que,

$$(4.3) \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, y(T) = 1 \text{ e } \dot{y}(T) = 0.$$

Se sugiere que $y(t)$ sea un polinomio, para estimar $\{a_i\}_{i=1}^n$ donde $y(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^i$ para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, se realiza una expansión de Taylor alrededor del tiempo inicial $t = 0$. Luego, $a_0 = a_1 = 0$ pues $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Se busca el menor grado de $y(t)$ tal que cumpla las condiciones (4.3):

- Suponga que el grado del polinomio $y(t)$ es 2. Luego, $y(t) = a_2 t^2$ y $y'(t) = 2a_2 t$, como $y(T) = 1$, entonces $a_2 = \frac{1}{T^2}$. Así que, $y'(T) = 2\left(\frac{1}{T^2}\right)T$, pero $y'(T) = 0$, esto es una contradicción.
- Si el grado del polinomio $y(t)$ es 3, así $y(t) = a_2 t^2 + a_3 t^3$. Haciendo uso de la primera derivada y de las condiciones $y(T) = 1$ y $y'(T) = 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$(4.4) \quad \begin{cases} T^2 a_2 + T^3 a_3 = 1, \\ 2T a_2 + 3T^2 a_3 = 0. \end{cases}$$

Del sistema anterior (4.4) use la matriz expandida asociada al sistema, luego realice el método de reducción de Gauss. En consecuencia, el sistema de ecuaciones lineales anterior (4.4) es equivalente a,

$$\left(\begin{array}{cc|c} T^2 & T^3 & 1 \\ 2T & 3T^2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{2}{T}F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} T^2 & T^3 & 1 \\ 0 & T^2 & \frac{-2}{T} \end{array} \right).$$

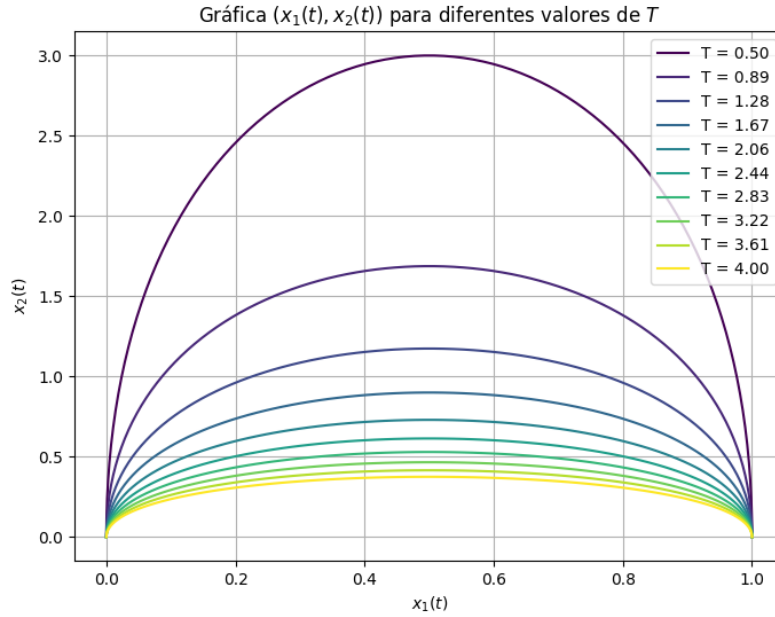
Por lo tanto, la solución otorga que $a_3 = -2/T^3$ y $a_2 = 3/T^2$, es decir que la **función Flat** es

$$y(t) = \frac{3}{T^2} t^2 - \frac{2}{T^3} t^3.$$

En consecuencia, la solución y el control del sistema (4.2) vienen dado por

$$\begin{aligned} (x_1(t), x_2(t)) &= (y(t), \dot{y}(t)) = \left(\frac{3}{T^2} t^2 - \frac{2}{T^3} t^3, \frac{6}{T^2} t - \frac{6}{T^3} t^2 \right), \\ u(t) &= \frac{6}{T^2} - \frac{12}{T^3} t. \end{aligned}$$

Si se da valores distintos a $T > 0$ se puede hacer un diagrama de fase $(x_1(t), x_2(t))$.

FIGURA 1. Diagrama de fase (x_1, x_2) para el sistema lineal (4.2)

Del gráfico 1 se puede analizar que el punto máximo de la parábola decae a medida que el tiempo T aumenta.

Es claro que, se puede obtener infinitas funciones Flat $y(t)$ para que pueda satisfacer el sistema (4.2), para ésto basta con aumentar el grado del polinomio, por ejemplo: Suponga que el grado del polinomio $y(t)$ es 4, así

$$y(t) = \sum_{i=2}^4 a_i t^i; \quad y'(t) = \sum_{i=2}^4 i a_i t^{i-1}.$$

Considerando las condiciones $y(T) = 1$ y $y'(T) = 0$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} T^2 a_2 + T^3 a_3 + T^4 a_4 = 1 \\ 2T a_2 + 3T^2 a_3 + 4T^3 a_4 = 0. \end{cases}$$

De forma análoga al ítem anterior, se considera la matriz expandida al sistema de ecuaciones lineales anterior para realizar la reducción de Gauss. Luego, el sistema

de ecuaciones lineales anterior se puede ver como,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} T^2 & T^3 & T^4 & 1 \\ 2T & 3T^2 & 4T^3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{\frac{-2}{T}F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} T^2 & T^3 & T^4 & 1 \\ 0 & T^2 & 2T^3 & \frac{-2}{T} \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{-TF_2 + F_1 \rightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} T^2 & 0 & -T^4 & 3 \\ 0 & T^2 & 2T^3 & \frac{-2}{T} \end{array} \right). \end{aligned}$$

De lo anterior, podemos expresar a_2, a_3, a_4 en términos de T y un parámetro libre, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/T^2 + T^2 a_4 \\ -2/T^3 - 2T a_4 \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Si damos valores a a_4 tendremos infinitas funciones Flat $y(t)$. Sea $a_4 = 1$, luego $a_2 = \frac{3}{T^2} + T^2$, $a_3 = \frac{-2}{T^3} - 2T$. En consecuencia, la **función Flat** es

$$y(t) = \left(\frac{3}{T^2} + T^2 \right) t^2 + \left(\frac{-2}{T^3} - 2T \right) t^3 + t^4.$$

Así se puede expresar la solución $(x_1(t), x_2(t))$ en expresión de la función de Flat. En particular, para el tiempo $T = 4$, hallemos su diagrama de fase $x_1(t)$ y $u(t)$ el control del sistema (4.2) para las funciones de Flat de grado 3 y 4 encontradas anteriormente.

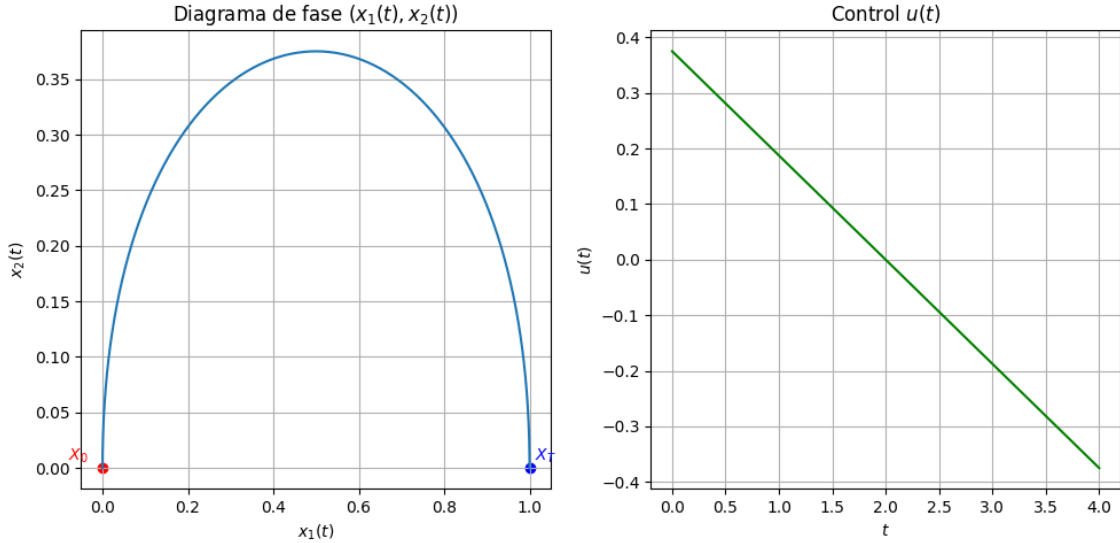


FIGURA 2. Diagrama de fase y control del sistema (4.2) con una función Flat de grado 3

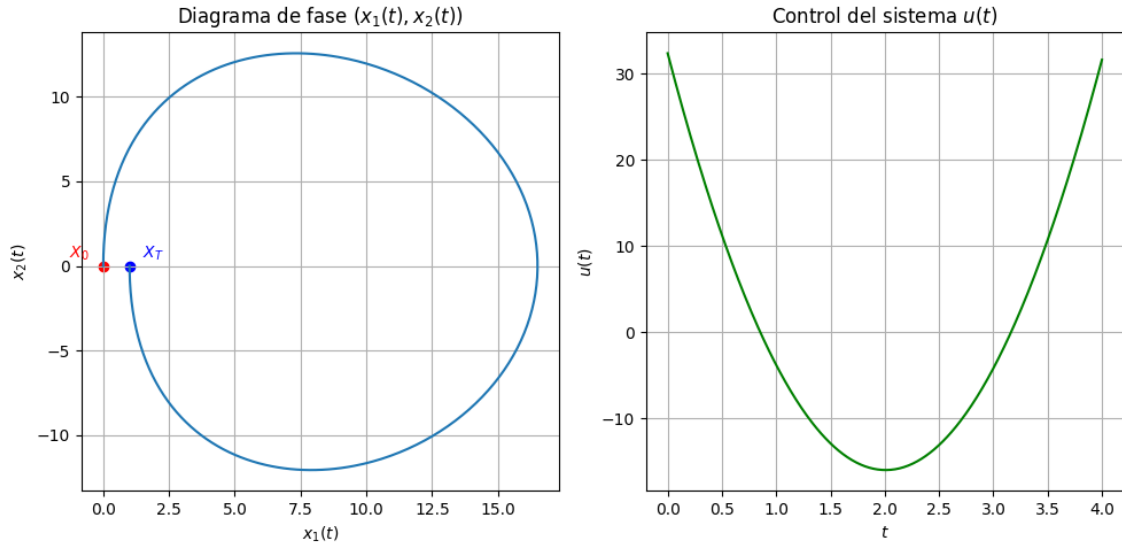


FIGURA 3. Diagrama de fase y control del sistema (4.2) con una función Flat de grado 4

De la gráfica 2, se puede concluir que el movimiento de los estados x_1 y x_2 es más corto, pues su función Flat es de grado 3. En cambio, para la gráfica 3 se evidencia que hay un movimiento más pronunciado para los estados x_1 y x_2 .

Para el sistema lineal anterior (4.2) se necesita dar unas condiciones de frontera para hallar la función Flat. Véase que la entrada Flat del ejemplo anterior quedaba determinada por cuatro condiciones (4.3). De lo anterior, considere un sistema lineal similar a (4.2), pero con condiciones de frontera libres, así habría una función Flat para un caso más general.

EJEMPLO 4.2 (Sistema lineal con condiciones de frontera libre.). Considere el siguiente sistema lineal donde a, b, c y d son números reales arbitrarios,

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Nuevamente se considera como candidato a **función Flat** a $y(t) = x_1(t)$, pues tanto x_2 y u quedan expresados en términos de x_1 .

De las condiciones de frontera (4.5) de la solución $\vec{x}(t)$ en tiempo $t = 0$ y $t = T$ para la función Flat $y(t)$ se halla que,

$$(4.6) \quad \begin{cases} y(0) = x_1(0) = a, \\ y'(0) = x_2(0) = b, \\ y(T) = x_1(T) = c, \\ y'(T) = x_2(T) = d. \end{cases}$$

Se considera la función suficientemente suave para realizar la expansión de Taylor, note los casos para los cuales se cumplen las condiciones (4.6):

- Sea que el grado del polinomio de y es 1, así $y(t) = a_0 + a_1 t$. De las condiciones (4.6), se tiene que $a_0 = a$, $a_1 = b$ y la segunda derivada de $y = u$ es 0; además de que $c = a + bT$ y $d = bT$, es decir, que no sería para cualesquiera a, b, c y d números reales.
- Define $y(t)$ como un polinomio de segundo grado, del ítem anterior se tiene que $a_0 = a$ y $a_1 = b$. Ahora, para el tiempo $t = T$, se sigue que,

$$\begin{cases} y(T) = c = a + bT + a_2 T^2, \\ y'(T) = d = b + 2a_2 T. \end{cases}$$

Si se iguala el valor de a_2 en ambas ecuaciones, se llega a la igualdad $c - a - dT = 0$, así que los valores a, b, c y d no son cualesquiera reales para los que el sistema lineal (4.5) cumple las condiciones de frontera.

- Si y es un polinomio de grado 3, por las condiciones a la entrada Flat (4.6) se tiene que, $a_0 = a$, $a_1 = b$ y,

$$\begin{cases} T^2 a_2 + T^3 a_3 = c - a - bT, \\ a_3 = \frac{-2}{T^3}(c - a) + \frac{d + b}{T^2}. \end{cases}$$

Es decir que, el sistema lineal (4.5) es controlable para los a, b, c y d tales que a_3 sea no nulo. Luego, el sistema anterior no será controlable para cualesquiera números reales a, b, c y d .

- Considere a y como un polinomio de grado 4, así de forma análoga al ejemplo anterior 4.1 se resuelve el sistema de ecuaciones lineales y se toma a a_4 como

un parámetro libre, es decir,

$$(4.7) \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3c - 3a - 2bT - dT}{T^2} + a_4 T^2 \\ \frac{2a - 2c}{T^3} + \frac{d + b}{T^2} - 2a_4 T \\ a_4 \end{pmatrix}.$$

Para cada valor no nulo de a_4 se tiene una función Flat, $y(t)$, para el sistema lineal (4.5). Sea $a_4 = 1$, así la **función Flat** queda como,

$$y(t) = a + bt + \frac{3c - 3a - 2bT - dT + T^4}{T^2} t^2 + \frac{2a - 2c + (d + b)T - 2T^4}{T^3} t^3 + t^4.$$

De lo anterior, la solución (x_1, x_2) y control u del sistema lineal (4.5) son de la forma,

$$(4.8) \quad \begin{cases} x_1(t) = a + bt + \frac{3c - 3a - 2bT - dT + T^4}{T^2} t^2 + \frac{2a - 2c + (d + b)T - 2T^4}{T^3} t^3 + t^4 \\ x_2(t) = b + \frac{6c - 6a - 4bT - 2dT + 2T^4}{T^2} t + \frac{6a - 6c + 3(d + b)T - 6T^4}{T^3} t^2 + 4t^3 \\ u(t) = \frac{6c - 6a - 4bT - 2dT + 2T^4}{T^2} + \frac{12a - 12c + 6(d + b)T - 12T^4}{T^3} t + 12t^2. \end{cases}$$

4.2. Equivalencia entre sistemas lineales

Como se hizo mención en la sección 3.2 un sistema lineal puede ser visto desde el álgebra como un sistema dinámico 3.12 en este caso lineal. Además, se puede dar una equivalencia entre sistemas, para un sistema lineal de la forma 2.2. En esta sección se encuentra el desarrollo de una equivalencia entre sistemas lineales y sistemas como (4.5) que será conocido como sistema canónico, como se realiza en la referencia [9].

DEFINICIÓN 4.2. *Se dice que dos sistemas $\dot{x} = Ax + Bu$ y $\dot{z} = Fz + Gv$ son equivalentes, si existen dos matrices invertibles M y L y una matriz K tal que si x y u satisfacen $\dot{x} = Ax + Bu$ y si $z = Mx$ y $v = Kx + Lu$, entonces z y v satisfacen $\dot{z} = Fz + Gv$.*

Los tamaños de las matrices nos indica las dimensiones del estado del sistema y de la función de control, así que A, F, M son de tamaño $n \times n$ mientras que B y G son de tamaño $n \times m$, K es de tamaño $m \times n$ y L de tamaño $m \times m$.

4.2.1. Caracterización de las matrices M , K y L .

4.2.1.1. Caso $m = 1$: Así el sistema lineal (2.2) es de la forma $\dot{x} = Ax + bu$. Si éste sistema es controlable, entonces es equivalente al siguiente sistema que es conocido como **sistema canónico**,

$$(4.9) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n, \\ \dot{z}_n = v. \end{cases}$$

El sistema anterior (4.9) para el caso $n = 2$ y con estados iniciales y finales libres coincide con el sistema mencionado (4.5) el cual es un sistema Flat. Luego, se debe mostrar la existencia de las matrices M, K y L tales que los sistemas (2.2) y (4.9) sean equivalentes según la definición (4.2). En efecto, si el sistema lineal (2.2) es controlable, así que por el teorema de Kalman 2.2 la matriz $(b|Ab|\dots|A^{n-1}b)$ (de tamaño $n \times n$) tiene rango n , es decir que, sus columnas son linealmente independientes, por lo tanto es una matriz invertible. Se define a la matriz concatenada $(b|Ab|\dots|A^{n-1}b) = C$.

Para hallar la matriz M : Se construye su primera fila denotada como $M_1 = e_1^T \cdot M$ tal que $M_1 A^j b = 0$ y $M_1 A^{n-1} b = 1$ para $j = 0, 1, \dots, n-2$; donde $e_1^T = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. En consecuencia, $M_1 \cdot C = (0, 0, \dots, 1) = e_n^T \in \mathbb{R}^n$.

Como $z = Mx$ se debe de satisfacer, así que $z_1 = M_1 x$. Luego, se consideran la primera derivada de $z_1 = M_1 x$, el sistema canónico (4.9) y la igualdad de $M_1 \cdot C$,

$$(4.10) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = M_1 \dot{x} = M_1 (Ax + bu) = M_1 Ax = z_2 \\ \dot{z}_2 = M_1 A \dot{x} = M_1 A (Ax + bu) = M_1 A^2 x = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = M_1 A^{n-2} \dot{x} = M_1 A^{n-2} (Ax + bu) = M_1 A^{n-1} x = z_n \\ \dot{z}_n = M_1 A^{n-1} \dot{x} = M_1 A^{n-1} (Ax + bu) = M_1 A^n x + u = v. \end{cases}$$

Por lo tanto, la matriz invertible M debe ser igual a $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \vdots \\ M_1 A^{n-1} \end{pmatrix}$ para que se

cumpla $z = Mx$, como se mostró en el sistema canónico (4.10).

De la última igualdad del sistema canónico se concluye que,

$$K = M_1 A^n \quad \text{y} \quad L = 1.$$

El algoritmo para hallar las matrices M , K y L es:

- 1) Realizar la matriz concatenada del teorema de Kalman 2.2, $C = (b|Ab| \dots |A^{n-1}b)$.
- 2) Así se halla la primera fila de la matriz M , $M_1 = e_n^T \cdot C^{-1}$.
- 3) Se halla $M_1 A, \dots, M_1 A^{n-1}, M_1 A^n$.
- 4) Finalmente, las matrices M , K y L son:

$$(4.11) \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_1 A \\ \vdots \\ M_1 A^{n-1} \end{pmatrix}, K = M_1 A^n, L = 1.$$

4.2.1.2. Caso de $m > 1$: Se realiza por bloques columnas de la matriz concatenada de Kalman 2.2, donde $B = (b_1, \dots, b_m)$, así que,

$$C = (b_1 | \dots | b_m | Ab_1 | \dots | Ab_m | \dots | A^{n-1}b_1 | \dots | A^{n-1}b_m).$$

Luego, como en total hay $n \cdot m$ columnas, así que se hace por eliminación de izquierda a derecha para escoger las n columnas linealmente independiente. Si el rango de la matriz B es igual a M , entonces las primeras m columnas de la matriz C estarán en esta nueva matriz $\hat{C}$. Luego, la matriz $\hat{C}$ queda de la forma,

$$(4.12) \quad \hat{C} = (b_1 | Ab_1 | \dots | A^{n_1-1}b_1 | \dots | b_m | Ab_m | \dots | A^{n_m-1}b_m),$$

donde $n_1 + \dots + n_m = n$. Ahora, para cada bloque columna de la matriz $\hat{C}$ se realiza el algoritmo anterior 4.2.1.1, es decir que, se considera $(b_i | Ab_i | \dots | A^{n_i-1}b_i)$

4.2.2. Ejemplos de equivalencia entre sistemas lineales. Ahora, con la equivalencia entre sistemas lineales de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$ mencionada en la sección 4.2, se puede presentar la equivalencia entre el sistema canónico y el sistema lineal del péndulo(2.4) que es controlable.

EJEMPLO 4.3. Considere el ejemplo del péndulo de forma lineal (2.4) donde la dimensión del estado es $n = 2$ y la dimensión del control de salida es $m = 1$,

$$(4.13) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se interesa en hallar la función Flat del sistema del péndulo lineal (4.13), para esto vamos a mostrar que es equivalente al sistema canónico (4.2.1.1), pues al sistema canónico ya se le halló la función Flat (4.2). Para realizar la equivalencia entre los sistemas mencionados se recurre al algoritmo mostrado en (4.11) para encontrar las matrices M , K y el escalar $L = 1$. Así que, primero se halla la matriz concatenada de Kalman del péndulo lineal (4.13),

$$C = (b|Ab) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz inversa de la matriz concatenada es ella misma $C^{-1} = C$, entonces se halla M_1 ,

$$M_1 = (0, 1) \cdot C = (1, 0).$$

Ahora con M_1 se encuentra los vectores $M_1 A$ y $M_1 A^2$, en consecuencia,

$$M_1 A = (0, 1), \quad M_1 A^2 = (1, 0).$$

Finalmente, las matrices M y K son:

$$(4.14) \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = (1, 0).$$

En el ejemplo (4.5) se halló la **función Flat** de grado 4 para el sistema canónico en el caso de $n = 2$ y $m = 1$. Luego, la solución $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$ y el control $v(t)$ del sistema canónico se expresaba como se muestra en (4.8), es decir que,

$$\begin{cases} z_1(t) = a + bt + \frac{3c - 3a - 2bT - dT + T^4}{T^2}t^2 + \frac{2a - 2c + (d + b)T - 2T^4}{T^3}t^3 + t^4, \\ z_2(t) = b + \frac{6c - 6a - 4bT - 2dT + 2T^4}{T^2}t + \frac{6a - 6c + 3(d + b)T - 6T^4}{T^3}t^2 + 4t^3, \\ v(t) = \frac{6c - 6a - 4bT - 2dT + 2T^4}{T^2} + \frac{12a - 12c + 6(d + b)T - 12T^4}{T^3}t + 12t^2. \end{cases}$$

Para hallar la solución y el control del péndulo se considera la parametrización anterior y las matrices M, K (4.14) que dan resultado la equivalencia entre los sistemas (4.9) y (4.13).

Finalmente, la **solución** y el **control** del péndulo está dado por,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \quad u(t) = v(t) - (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Es decir, $x_1(t) = z_1(t)$, $x_2(t) = z_2(t)$ y $u(t) = \dot{x}_2(t) - x_1(t)$. Luego, se realiza el cálculo,

$$(4.15) \quad \begin{cases} x_1(t) = a + bt + \frac{3c - 3a - 2bT - dT + T^4}{T^2}t^2 + \frac{2a - 2c + (d+b)T - 2T^4}{T^3}t^3 + t^4 \\ x_2(t) = b + \frac{6c - 6a - 4bT - 2dT + 2T^4}{T^2}t + \frac{6a - 6c + 3(d+b)T - 6T^4}{T^3}t^2 + 4t^3 \\ u(t) = \frac{6c - 6a - 4bT - 2dT + 2T^4}{T^2} + \frac{12a - 12c + 6(d+b)T - 12T^4}{T^3}t + 12t^2 - x_1(t). \end{cases}$$

Como se evidenció en el capítulo 2.1 que abordar un problema si es controlable es satisfacer un estado final para un tiempo $T > 0$.

En el caso del problema del péndulo lineal 2.1 se interesa que el control obligue a la solución del sistema satisfacer el estado nulo. Como se analizó en 2.1 se halló su control en función del movimiento x_1 y la velocidad angular x_2 . Pero, como se mencionó anteriormente no todos los controles son únicos. Por lo tanto, con un nuevo control y solución al sistema del péndulo (4.15) se puede ver cómo son su diagrama de fase para cualquier estado inicial y final.

En particular, si se consideran: $a = 2$, $b = 0,5$, $c = d = 0$ y $T = 4$, el diagrama de fase $(x_1(t), x_2(t))$ y la gráfica del control respecto al tiempo,

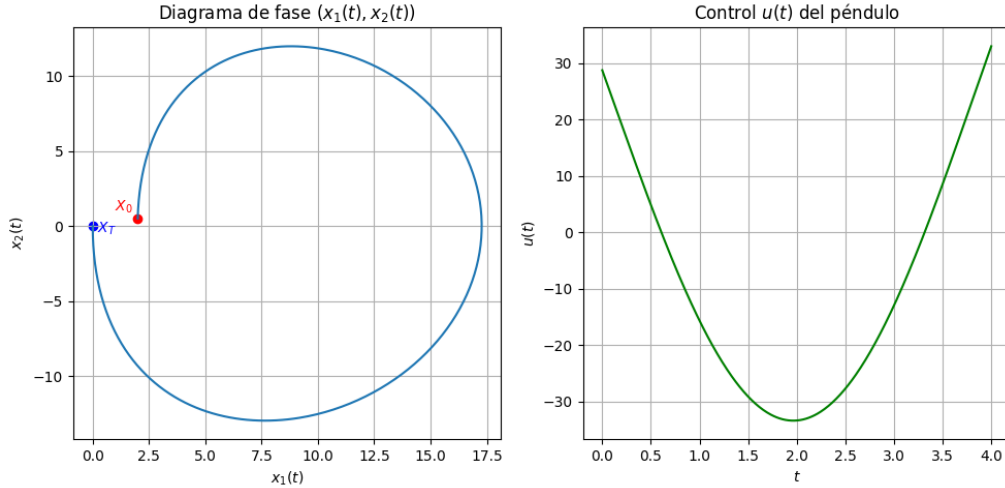


FIGURA 4. Diagrama de fase y control del péndulo lineal (2.4) considerando una función Flat de grado 4

4.3. Ejemplos de sistemas Flat

De la referencia [9] en el capítulo 6 sección 2 se analizan casos de sistemas lineales Flat como lo son: masa-resorte y el vehículo.

4.3.1. Sistema Masa Resorte. Para este ejemplo se considera la ley de Hooke, principio para cuerpos sujetos a un resorte. En este caso vamos a invertir los ejes verticales

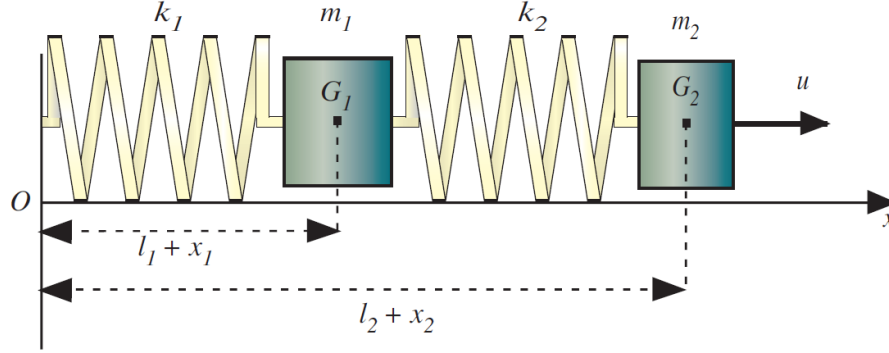


FIGURA 5. Problema Masa Resorte de dos cuerpos, imagen proveniente de [9]

Se consideran dos cuerpos, C_1 y C_2 , que están sujetos a un resorte que los une, los cuales su movimiento se desarrolla en el conocido sistema masa-resorte; el análisis del sistema parte de aplicar una fuerza u al cuerpo C_2 para manipular el movimiento de los cuerpos. Donde este sistema cuenta con diferentes fuerza como: para cada cuerpo C_i está relacionado con su masa m_i , también cada resorte que sujeta a su respectivo cuerpo tiene una rigidez denotada K_i y la fricción viscosa del cuerpo (C_i) con el suelo está dada por una función no negativa, doble diferenciablemente continua, llamada como γ_i donde $\gamma_i(0) = 0$; esto para $i = 1, 2$. También, los centros de gravedad de los cuerpos C_1 y C_2 se denotan como G_1 y G_2 , respectivamente, con posiciones $l_1 + x_1$ y $l_2 + x_2$, respectivamente.

Ahora, en relación con la Ley de Hooke y la suma de las fuerzas, se tiene que el sistema de masa resorte se describe de la siguiente forma:

$$(4.16) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) = K_2(x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 + K_2(x_2 - x_1) + \gamma_2(\dot{x}_2) = u. \end{cases}$$

Para mostrar que el sistema masa resorte (4.16) es de Flat, es necesario mostrar cómo las posiciones de los cuerpos x_1 y x_2 generan un sistema algebraico como el de dinámica 3.12, además realizar una parametrización para configurar la función flat. Del sistema (4.16) considere la primera ecuación,

$$m_1\ddot{x}_1 + K_1x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1) = K_2(x_2 - x_1),$$

luego, se expresa x_2 , es decir,

$$(4.17) \quad x_2 = \frac{1}{K_2}(m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1)).$$

Se expresa a x_2 en función de x_1 , de la dinámica definida en (3.12), se dice que x_1 es la representación del sistema. Ahora, derivando x_2 respecto a x_1 se sigue que,

$$(4.18) \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{K_2}(m_1x_1^{(3)} + (K_1 + K_2)\dot{x}_1 + \gamma_1'(\dot{x}_1)\ddot{x}_1).$$

Nuevamente se deriva,

$$(4.19) \quad \ddot{x}_2 = \frac{1}{K_2}(m_1x_1^{(4)} + (K_1 + K_2)\ddot{x}_1 + \gamma_1''(\dot{x}_1)(\ddot{x}_1)^2 + \gamma_1'(\dot{x}_1)x_1^{(3)}).$$

Reemplazando las ecuaciones (4.17) y (4.19) a la segunda ecuación del sistema (4.16) para así expresar u ,

$$(4.20) \quad m_2\frac{1}{K_2}(m_1x_1^{(4)} + (K_1 + K_2)\ddot{x}_1 + \gamma_1''(\dot{x}_1)(\ddot{x}_1)^2 + \gamma_1'(\dot{x}_1)x_1^{(3)}) \\ + \frac{1}{K_2}(m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 + \gamma_1(\dot{x}_1)) - x_1 \\ + \gamma_2(\frac{1}{K_2}(m_1x_1^{(3)} + (K_1 + K_2)\dot{x}_1 + \gamma_1'(\dot{x}_1)\ddot{x}_1)) = u.$$

De lo anterior, se demuestra que x_1 es una **función Flat** para el sistema masa resorte (4.16).

En particular se considera que la fricción viscosa $\gamma_i(\dot{x}_i)$ es nula, los valores de la rigidez de los cuerpos como $K_1 = K_2 = 1$, las masas $m_1 = m_2 = 2$ y los estados iniciales y finales respectivamente como,

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \\ x_3(4) \\ x_4(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ 0,5 \\ 0,8 \end{pmatrix}.$$

Nombrando $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$, luego el sistema lineal del problema masa resorte (4.16) es,

$$(4.21) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K_1 - K_2}{m_1} & \frac{K_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{m_2} & -\frac{K_2}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + u(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la **salida/función Flat** del sistema masa-resorte con las constantes y estados mencionados anteriormente es,

$$(4.22) \quad y(t) = 0,5 + 0,0625 \cdot t - 0,06627604 \cdot t^4 \\ + 0,03945312 \cdot t^5 - 0,00815430 \cdot t^6 + 0,00057780 \cdot t^7.$$

De la ecuación anterior se puede hallar los valores de x_2 (4.17), $\dot{x}_2$ (4.18) y del control u (4.20). A continuación se muestra el gráfico de las funciones de los estados x_1 y x_2 respecto al tiempo t .

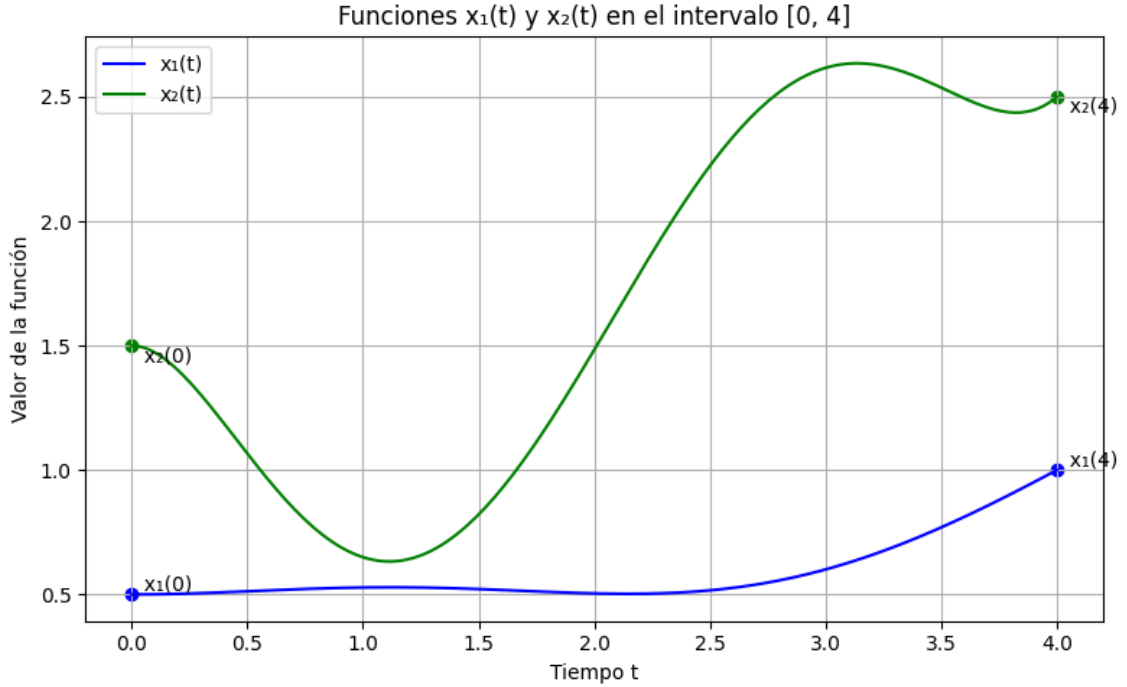


FIGURA 6. Gráfica de las curvas de solución $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema masa-resorte respecto al tiempo t en el intervalo $[0, 4]$.

También se puede plantear un modelo de masa-resorte con tres cuerpos C_1, C_2 y C_3 , nuevamente si consideramos que la masa m_i para cada cuerpo, la rigidez K_i del resorte sobre cada cuerpo y la fuerza u que se ejerce sobre el último cuerpo C_3 , entonces el modelo masa-resorte es el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K_1 - K_2}{m_1} & \frac{K_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{m_2} & \frac{-K_3 - K_2}{m_2} & \frac{K_3}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_3}{m_3} & \frac{-K_3}{m_3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + u(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así mismo se puede plantear unos estados iniciales y finales para hallar la función Flat.

4.3.2. Vehículo. Del problema presentado en el Capítulo 2, 2.3, donde un vehículo con ruedas traseras fijas y delanteras que sí giran, el cual su sistema de representación es (2.9),

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \theta, \\ \dot{y} = u \sin \theta, \\ \dot{\theta} = \frac{u}{l} \tan \varphi. \end{cases}$$

Los controles del sistema son u y φ . Tanto como x e y serán las variables de la función flat. En efecto, basta con mostrar que tanto u , θ y φ están en función de x e y . Considerando las dos primeras ecuaciones del sistema dinámico del vehículo, se tiene que,

$$(4.23) \quad u^2 = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2.$$

Además, también con las mismas dos ecuaciones del sistema se sigue que,

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \iff \tan \theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Así que, tanto u y θ están en función de (x, y) . Ahora, para φ si se deriva la función $\tan \theta$ respecto a x e y ,

$$\begin{aligned} (\tan^2 \theta + 1) \dot{\theta} &= \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^2}, \\ \dot{\theta} &= \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

Se toma la tercera ecuación del sistema para igualar $\dot{\theta}$, se tiene que,

$$\tan \varphi = \frac{l\dot{\theta}}{u} = l \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Por lo tanto, el sistema dinámico del vehículo (2.9) es Flat, pues θ, u y φ están en función de (x, y) . Este sistema no tiene la solución habitual que se mostraron en ejemplos anteriores.

Conclusiones

- El Teorema de Kalman es fundamental para determinar si un sistema lineal es controlable a través del análisis del rango de una matriz concatenada. Aunque, este resultado cualitativo no otorga explícitamente la solución y el control de un sistema de control lineal.
- Para un sistema de control no lineal se puede hallar que es controlable a través de su linealización como fueron los casos del Péndulo y del sistema Masa-Resorte.
- En ocasiones el sistema no lineal es controlable, pero su sistema lineal (haciendo linealización) es no controlable; como ocurrió con el ejemplo del Vehículo. Por lo tanto, no se puede concluir que un sistema no lineal es no controlable si sólo se realizó el análisis a su sistema lineal.
- La función Flat de un sistema es una parametrización del estado, del control y derivadas del control de dicho sistema. Encontrar aquella función permite encontrar explícitamente tanto la solución como el control del sistema.
- El soporte teórico de la existencia de la función Flat para sistemas lineales controlables se establece a través del álgebra diferencial. El álgebra diferencial nos muestra que es posible dar una relación entre las ecuaciones diferenciales y el álgebra.
- Es de gran interés para aplicaciones en la ingeniería el desarrollo de métodos que otorguen un control explícito de un sistema, para esto el método de Flatness resuelve ese problema a diferentes sistemas; en particular se mostró que responde para sistemas lineales controlables.
- La función Flat de un sistema controlable queda determinado por los estados iniciales y finales del sistema como se mostró para el sistema canónico 4.5.

Apéndice A

Apéndice

TEOREMA A.1. (TEOREMA 3.1) *Sea L/K una extensión diferenciable finitamente generada, del siguiente enunciado: Si el grado de trascendencia de L/K es finito, entonces L/K es diferencialmente algebraica.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos que L/K como extensión de cuerpos (no diferencial) es de trascendencia con grado finito, es decir que, existen finitos elementos de L que son K -trascendentes. Para un $n \in \mathbb{N}$, sea $\{l_j\}_{j=0}^n \subseteq L$ el conjunto de elementos trascendentes sobre K , esto es que para cada l_i no existe polinomio $0 \neq p_i(x) \in K[x]$ tal que $p_i(l_i) = 0$. Como $D^j(l_i) \in L$ para $j \in \mathbb{N}$, véase que es un elemento K -algebraico. Luego, para $j \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in I$, existe $q_j(x) \in K[x]$ tal que $q_j(D^j(l_i)) = 0$. Por lo tanto, $\{l_i, D(l_i), \dots, D^{\alpha_i}(l_i) \mid i \in I, \alpha_i = 1, 2, \dots\}$ es **dependiente K -algebraico**. Finalmente, L/K es una extensión diferencialmente algebraica. $\square$

TEOREMA A.2. (TEOREMA 3.2) *Una dinámica lineal Γ es **controlable**, si y sólo si, Γ es un $K[D]$ -módulo izquierdo libre.*

DEMOSTRACIÓN. ($\leftarrow$) Primero asumamos que Γ es libre. Si Γ es no controlable, entonces su parte no controlable tiene una representación matricial como sistema de control de la forma,

$$\dot{a} = Ma.$$

Así $[a]$ es un $K[D]$ -módulo izquierdo de torsión, pues a satisface una ecuación diferencial lineal homogénea. Además, $[a]$ es de dimensión finita como K espacio vectorial por teorema 3.1, entonces tiene una base finita b de Γ , pero b es de no torsión. Aunque, $[b]$ sería un módulo libre de dimensión infinita en $[a]$ por teorema 3.1, lo cual es una contradicción, puesto que $[a]$ es de dimensión finita. Por lo tanto, $[a]$ debe tener dimensión 0, así que Γ es controlable.

($\rightarrow$) Ahora, asumamos que Γ es controlable. Si Γ no es libre, así su submódulo de torsión podría construirse como el algoritmo anterior 3.3 hasta alcanzar una representación sistema de control de la forma,

$$\dot{s} = Rs,$$

el cual es una contradicción, pues Γ es controlable. $\square$

TEOREMA A.3. (PROPOSICIÓN 3.2) *Un sistema L/K es flat, si y sólo si, su defecto es cero.*

DEMOSTRACIÓN. $\rightarrow$) Suponga que L/K es flat y sea m el orden diferencial de L/K , es decir que, es equivalente a S/K un sistema puramente trascendental diferenciable. Sea $a = (a_1, \dots, a_m)$ la base trascendental diferencial de S/K donde $S = K\langle a \rangle$. Luego, $S\langle a \rangle/K\langle a \rangle$ es una extensión algebraica, así que S/K tiene **defecto** cero. Ahora, para cualquier $z = (z_1, \dots, z_m)$ que es un conjunto diferencialmente K -algebraicamente independiente y algebraico sobre S , se tiene que $L\langle z \rangle/K\langle z \rangle$ y $S\langle z \rangle/K\langle z \rangle$ son equivalentes, pues L/K y S/K lo son. Por lo tanto, L/K tiene defecto cero.

$\leftarrow$) Suponga que L/K tiene defecto cero y con orden diferencial m . Así que, existe $z = (z_1, \dots, z_m)$ el conjunto diferencialmente K -algebraicamente independiente y algebraico sobre L tal que el grado de trascendencia de $L\langle z \rangle/K\langle z \rangle$ es cero. Luego, $L\langle z \rangle/K\langle z \rangle$ es algebraico. Es necesario mostrar que L/K es equivalente a un sistema que sea puramente trascendental diferencial; un sistema candidato puede ser $K\langle z \rangle/K$. Tenemos que L/K es equivalente a $K\langle z \rangle/K$, por lo tanto L/K es flat. $\square$

TEOREMA A.4. (TEOREMA 3.4) *El **defecto** de un sistema lineal (3.18) es igual a la dimensión de su submódulo de torsión, es decir, a la dimensión del espacio no controlable de su representación tipo sistema de control. Un sistema lineal es **flat**, si y sólo si, es **controlable**.*

DEMOSTRACIÓN. Considere el sistema lineal Γ con su descomposición lineal (mencionado en 3.10), $\Gamma = T \oplus \Phi$, donde T es su submódulo de torsión y Φ el submódulo libre. Luego, sea $u = (u_1, \dots, u_m) \in \Phi$ la base, esta será la salida flat para su extensión diferenciable asociada D/K . Hay dos casos para analizar la equivalencia, la cual depende de si T es trivial o no.

- Si $T = \{0\}$, entonces Γ es flat y por el Teorema 3.2 es controlable.
- Si T el submódulo de torsión no es trivial, se considera su extensión diferenciable asociada τ/K la cual es diferencialmente algebraica, luego el grado de trascendencia τ/K es finito, que coincide con la dimensión de T . Por lo tanto, considerar si el sistema Γ es Flat depende de la dimensión de T que es su parte no controlable.

$\square$

Bibliografía

- [1] Bennett, S., A History of Control Engineering 1930-1955, Control, Robotics and Sensors Series, P. Peregrinus, 1993
- [2] Doering C., Lopes A., Equações Diferenciais Ordinárias, 6^a edição IMPA, 2016
- [3] Dummit D.S., Foote R.M., Abstract Algebra, Edition 3, Wiley, 2003
- [4] Fliess M., Glad S.T. An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control. In: Trentelman, H.L., Willems, J.C. (eds) Essays on Control. Progress in Systems and Control Theory, vol 14. (1993)
- [5] Fliess M., Differential flatness and defect: an overview, Banach Center Publications 32.1: 209-225, (1995)
- [6] Fliess M., Lévine J., Martin F., Rouchon P., Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. CAS internal report A-284, 1994.
- [7] Fliess M., Some basic structural properties of generalized linear systems, Volume 15, Issue 5, Pages 391-396, Systems & Control Letters, 1990
- [8] Laurent C., Rosier L., Exact controllability of semilinear heat equations in spaces of analytic functions, Annales de l'Institut Henri Poincaré/Analyse Non Linéaire **37** (2020)
- [9] Lévine J., Analysis and Control of Nonlinear Systems A Flatness-based Approach, Springer Berlin Heidelberg, 2009
- [10] Martin P., Rivas I., Rosier L., Rouchon P., Exact controllability of a linear Korteweg-de Vries equation by the flatness approach, SIAM J. Control Optim. **57**, no. 4, 2467–2486, (2019)
- [11] Morandi P., Field and Galois Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2012
- [12] Rosier L., Finite Dimensional Controllability. In: Meyers, R. (eds) Encyclopedia of Complexity and Systems Science, Springer, 2009
- [13] Rynne B.P., Youngson M.A., Linear Functional Analysis, Springer undergraduate mathematics series, Springer, 2000
- [14] Sontag E. D. , Mathematical control theory. Deterministic finite- dimensional systems Second edition, Texts in Applied Mathematics, 6. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [15] Zuazua, E., Micu, S., An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations, Collection Travaux en Cours, 2005
- [16] Zuazua E., Controllability of Partial Differential Equations, Thesis doctoral, 2006