
EL PROBLEMA DE LAS AGUJAS DE BUFFON HISTORIA DE UN CASO DE ESTUDIO EN TEORIA DE PROBABILIDAD

Simón Reif Acherman
Profesor Asistente
Dep. Procesos Químicos y Biológicos
Universidad del Valle
Cali - Colombia

RESUMEN

El problema de las agujas, originalmente planteado por Buffon, constituye un interesante caso de estudio en teoría de probabilidad, con el cual se ilustra una de las primeras conexiones de ésta con el área de las matemáticas y más específicamente del cálculo analítico. Una visión histórica general permite apreciar, no sólo su desarrollo teórico, sino también alguna aplicación particular en la determinación de un valor aproximado del número π , además de su contribución pionera a los denominados *Métodos de Montecarlo*.

ABSTRACT

The needle problem, originally posed by Buffon, constitutes an interesting study case in theory of probability, which shows one of the first connections of the latter one with the field of mathematics, and more specifically with the analytical calculus. A historical general view lets to observe not only its theoretical development, but some particular application too at finding an approximate value of number π , besides its pioneer contribution to so called *Montecarlo Methods*.

INTRODUCCION

La teoría de probabilidad ha sido considerada por muchos como una de las áreas en las que las matemáticas del siglo XX han logrado sus desarrollos más importantes. La base de esta afirmación se encuentra tal vez en el hecho de que es en el presente siglo cuando los físicos e ingenieros se han dado perfecta cuenta de que la naturaleza y el mundo real sólo pueden ser descritos exhaustivamente por las leyes que gobiernan su aleatoriedad. En efecto muchos de los más seguros pronunciamientos de la ciencia moderna se encuentran basados en aquellas limitaciones sugeridas por las leyes de la probabilidad. No poco de aquello que los físicos, por ejemplo, habían considerado exacto hasta hace relativamente poco tiempo, se ha convertido en un valor promedio de una estructura mucho menos simple, y esos valores medios pueden en ocasiones ser muy engañosos.

El origen de las leyes de la teoría de la probabilidad se remonta a mucho tiempo atrás, y si bien en la actualidad éstas son científicamente aceptadas, hasta hace sólo cincuenta años eran invocadas casi que de manera apologetica. La probabilidad empieza a involucrarse en el terreno de las matemáticas desde el siglo XVI, gracias a la coincidencia de diversos factores de tipo social y

económico que motivaron un incremento considerable de los juegos de oportunidad y actividades de apuestas, principalmente en el área del Mediterráneo. El arranque definitivo en general se sitúa con el trabajo conjunto de **Blas Pascal** y **Pierre de Fermat** a mediados del Siglo XVII, posteriormente al cual diversas personalidades como los hermanos Bernoulli, De Moivre, Euler, D'Alembert, Laplace, Condorcet, Gauss, entre muchos otros, inscribieron su nombre en el desarrollo de la moderna teoría de probabilidad (3) (14).

Contemporánea con algunos de los personajes mencionados, está la figura del francés **George Luis Leclerc (1707-1788)**, posteriormente conocido como **Conde de Buffon**. Ignorado por muchos autores en textos de probabilidad, tal vez por su multidisciplinariedad (es ampliamente reconocido por su brillante trabajo de naturalista, además de otras no menos destacadas incursiones en terrenos de la astronomía y la filosofía), Buffon hizo algunas contribuciones en términos de planteamiento y solución de diversos juegos de azar, uno de los cuales, el célebre problema de las agujas, sirvió para ilustrar su teoría de la estricta relación entre la probabilidad y la geometría, y para que posteriormente Laplace diera la primera luz sobre el actualmente llamado **Método de Montecarlo**, de amplia utilización en aplicaciones que van desde la economía hasta la física nuclear. El propósito del presente artículo es mostrar aspectos relevantes de este problema, su enunciado general, los planteamientos originales de su autor, algunas extensiones básicas y los trabajos posteriores que sobre él se desarrollaron.

EL PROBLEMA DE LAS AGUJAS

En el año 1733 Buffon comunicó a la Academia de Ciencias en París las soluciones de algunos problemas relacionados con diversos juegos de azar. Estas fueron posteriormente publicadas en 1777 en su "Essai d'Arithmétique Morale", en cuya sección 23, "Memoire sur le jeu de franc carreau", se encuentra el famoso problema de la aguja.

Al inicio de la mencionada sección, Buffon se refiere a que hasta el momento en que él escribe su trabajo, la aritmética ha sido el único instrumento utilizado para la estimación de probabilidades, y se propone mostrar a través de una serie de ejemplos cómo se hace también necesaria la ayuda de la geometría en el estudio y análisis de la ciencia del azar. En efecto, inicialmente él supone una gran área plana dividida en figuras regulares iguales, tales como cuadrados, triángulos equiláteros o hexágonos; entonces se arroja una moneda redonda al azar y se requiere estimar la probabilidad de

que ella caiga sin tocar ninguna de las líneas límite de la figura, o caiga en una de ellas, o tocando dos de ellas y así sucesivamente. En seguida Buffon menciona que si la moneda es reemplazada por una pieza no redonda, la solución requerirá de más geometría y es aquí donde aparece el problema de las agujas (figura 1).

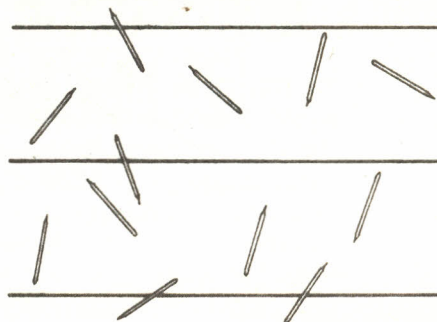


Fig. 1 — Problema de las Agujas de Buffon

A continuación se transcribe textualmente el planteamiento y solución original del problema, tal como fue consignado por Buffon. Si bien las dificultades para una interpretación sencilla del texto son evidentes, debido probablemente al estilo de redacción propio de la época y a la confusa nomenclatura utilizada, la cita resulta apropiada e interesante porque permite ilustrar sobre la técnica particular de análisis del autor, diferente de la actual. El texto, respetando en su totalidad las abreviaturas y la simbología original, es el siguiente (1):

"Supongo que en un cuarto, en el cual el piso está simplemente dividido por unas líneas rectas paralelas, uno lanza al aire una varilla y que uno de los jugadores apuesta a que la varilla no cruzará ninguna de las paralelas del piso y que el otro por el contrario apuesta que la varilla si cruzará alguna de estas paralelas; se pregunta la suerte de estos dos jugadores. Uno puede jugar este juego sobre un tablero, con una aguja de coser o un alfiler sin cabeza.

Para hallar la respuesta, yo trazo primeramente entre las dos paralelas AB y CD del piso (figura 2), otras dos líneas paralelas ab y cd, separadas de las primeras en la mitad de la longitud de la varilla EF y veo evidentemente que en tanto el medio de la varilla esté entre estas dos segundas paralelas, jamás ella podrá cruzar las primeras en cualquier situación EF, ef, en que ella pueda encontrarse. Y como todas aquellas que

pueden localizarse por encima de ab lo hacen igualmente por debajo de cd , no es necesario determinar entre una u otra; para aquello noto que todas las situaciones de la varilla pueden ser representadas por el cuarto de la circunferencia del círculo cuyo diámetro es la longitud de la varilla: llamando pues $2a$ la distancia CA entre las líneas del piso, C el cuarto de la circunferencia del círculo para el cual la longitud de la varilla es el diámetro; llamando $2b$ longitud de la varilla y f la longitud de las líneas, yo tendré $f(a-b)C$ para la expresión que representa la probabilidad de no cruzar la línea del piso, o lo que es la misma cosa, para la expresión de todos los casos en los cuales el centro de la varilla cae por debajo de la línea ab y por encima de la línea cd .

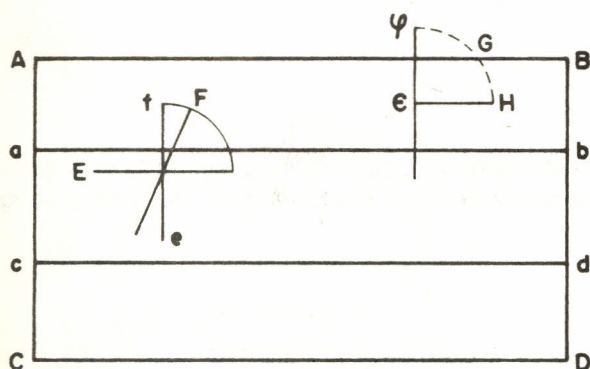


Fig. 2

Esquema Original Planteado por Buffon

Pero cuando el centro de la varilla cae fuera del espacio $abdc$, comprendido entre las segundas paralelas, ella puede, según su situación, cruzar o no cruzar la línea; de suerte que el centro de la varilla estando, por ejemplo, en E , el arco ϕG representará todas las situaciones en donde ella cruzará la línea, y el arco GH todas aquellas en donde no lo hará, y como así mismo se tendrá para todos los puntos de la línea $E\phi$, yo llamo dx a las pequeñas partes de esta línea y y a los arcos del círculo ϕG , tengo $f(sydx)$ para la expresión de todos los casos en los cuales la varilla cruzará y $f(bc-sydx)$ para aquellos casos en los cuales no cruzará; yo añado esta última expresión a aquella hallada aquí arriba

$f(a-b)C$, a fin de tener la totalidad de los casos en los cuales la varilla no cruzará, y desde entonces veo que la suerte del primer jugador es a la del segundo, como $ac-sydx: sydx$.

Si uno quiere ver que el juego sea parejo, éste se tendrá si:

$$aC = 2sydx \quad \text{o} \quad a = \frac{sydx}{(1/2)C}$$

es decir con el área de una parte del cicloide cuyo círculo generador tenga por diámetro $2b$, la longitud de la varilla; ahora bien, uno sabe que esta área del cicloide es igual al cuadrado del radio, luego:

$$a = \frac{bb}{(1/2)C}$$

es decir que la longitud de la varilla debe ser un poco más de tres cuartos de la distancia entre las líneas del piso".

La conclusión de Buffon en términos actuales indica que para que la probabilidad de que la varilla (o aguja) se intersecte con una de las líneas sea exactamente de $1/2$, o en otras palabras para que ambos apostadores tengan igual oportunidad, el juego debe diseñarse de tal manera que la distancia entre las líneas dibujadas sea $4/\pi$ veces mayor que la longitud del elemento de lanzamiento (obsérvese que $C = \pi b/2$). Dado que π no presenta un valor exacto, por sus características particulares de número irracional y trascendental, la probabilidad de $1/2$ no puede conseguirse de manera absoluta.

Si bien el procedimiento de análisis de Buffon resulta confuso, su solución, como se verá posteriormente, es correcta y resulta en esencia la única que este hombre de ciencia francés pudo lograr. El intentó posteriormente continuar su análisis para una situación que según sus propias palabras parecía más difícil; adicionó al plano previamente rayado otro juego de líneas paralelas equidistantes, perpendiculares a las primeras y separadas por la misma distancia. Buffon intentó nuevamente determinar la probabilidad de intersección de la varilla o aguja con una o varias de las líneas, pero el resultado que reportó es incorrecto. El mismo problema fue retomado treinta y cinco años después por Laplace, quien no sólo lo resolvió de manera indepen-

diente y diferente de como lo hizo Buffon, sino que enfocó su atención a un caso particular de aplicación de este desarrollo, la estimación del valor aproximado del número π , tal vez aquello que ha motivado principalmente la publicidad del presente caso de estudio y que condujo a posteriores trabajos en el área. Los aspectos más destacados alrededor de este punto específico son presentados más adelante en el presente artículo.

ANÁLISIS GENERAL DEL PROBLEMA DE BUFFON

La probabilidad de intersección de la aguja con una de las líneas paralelas puede ser determinada de manera más sencilla e inmediata que la sugerida por Buffon, al considerar la herramienta del cálculo analítico (6), (13), (15).

Modificando por simplicidad la nomenclatura de Buffon, se designan como L y D la longitud de la aguja y la distancia entre paralelas respectivamente.

Si se desea averiguar si la aguja toca una de las paralelas, es preciso "localizarla" en el plano, en términos de fijar en él su posición. Se designa entonces a Y como la distancia entre el punto medio de la aguja y la paralela más próxima, y θ como el ángulo agudo formado entre la aguja, o su prolongación y dicha paralela. Estos nuevos parámetros están obviamente acotados, así:

$$0 \leq Y \leq D/2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Una vez determinados Y, θ , la aguja queda perfectamente posicionada en el plano (figura 3).

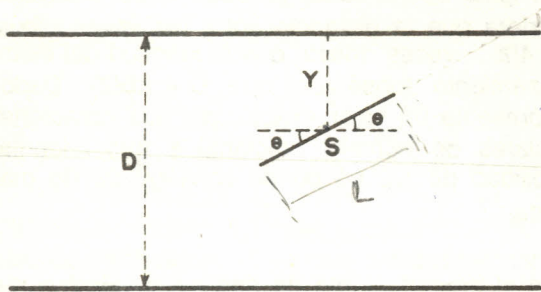
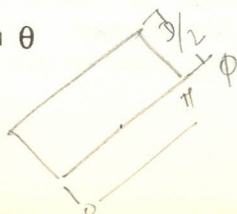


Fig. 3- Localización de la Aguja en el Plano

El rectángulo, con los lados de longitud π y $D/2$, representa el conjunto de las coordenadas de los puntos correspondientes a todas las posiciones posibles de la aguja. Así mismo, es evidente que una condición necesaria y suficiente para que se produzca la intersección entre la aguja y una paralela es que:

$$Y \leq \frac{L}{2} \cdot \sin \theta$$



es decir, si el punto $P(Y, \theta)$ se sitúa en la zona sombreada de la figura 4.

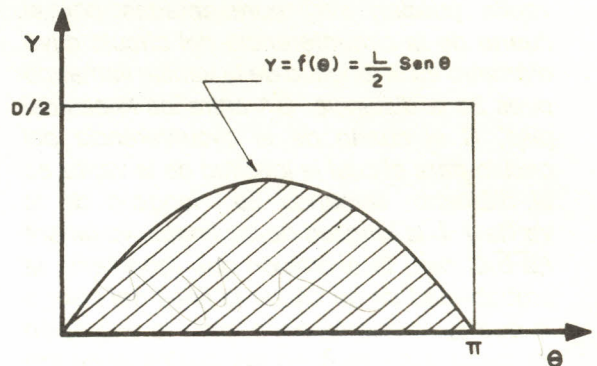


Fig. 4- Representación Gráfica de la Probabilidad de Intersección ($L < D$)

De esta manera, la probabilidad requerida está dada por el cociente del área sombreada al área del rectángulo, así:

$$p = \frac{\int_0^\pi \frac{L}{2} \sin \theta \, d\theta}{\left(\frac{D}{2}\right)(\pi)} = \frac{2L}{\pi D}$$

Si se desea, como Buffon, averiguar las condiciones para las cuales $p = 1/2$, se encuentra que $L = (\pi/4) D$, resultado idéntico al determinado por el naturalista francés.

Si se observa con cuidado, puede apreciarse que el análisis anterior resulta válido con una suposición implícita: la aguja no puede tocar o intersectar dos paralelas simultáneamente. En otras palabras, el análisis es correcto para cuando $L < D$. Resulta entonces interesante extender el problema para el caso en que $L > D$, es decir cuando la longitud de la aguja es mayor que la distancia de separación entre las paralelas.

Para el nuevo caso la situación gráfica se ilustra por medio de la figura 5.

La probabilidad de intersección de la aguja con la(s) paralela(s) se calcula de nuevo como el cociente entre el área sombreada y el área total del rectángulo, o sea:



$$p = \frac{2 \left[\int_0^\phi \frac{L}{2} \sin \theta \, d\theta + \frac{D}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right]}{(\pi) \left(\frac{D}{2} \right)}$$

En donde ϕ representa el valor del ángulo θ para el cual $f(\theta) = (L/2) \sin \theta$ intersecta la recta $Y = D/2$, es decir, $D/2 = (L/2) \sin \theta$, o lo que es lo mismo:

$$\phi = \arcsen(D/L) = \sin^{-1}(D/L).$$

Resolviendo y haciendo uso de algunas identidades trigonométricas se obtiene:

$$p = \left[\frac{2L}{\pi D} + 1 \right] - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{D} + \sin^{-1} \frac{D}{L} \right]$$

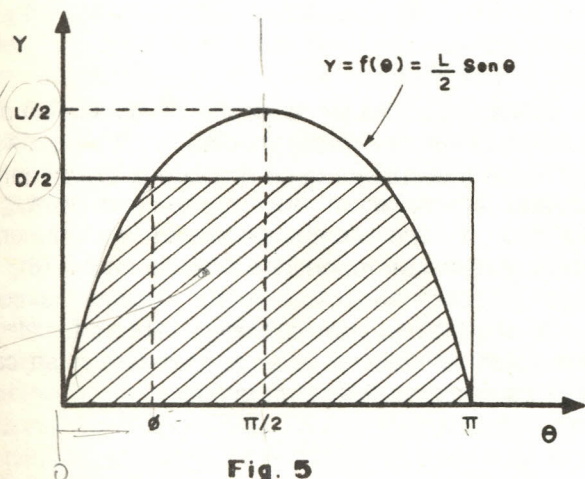


Fig. 5

Representación Gráfica de la Probabilidad de Intersección ($L > D$)

Los resultados anteriores indican, por ejemplo, que si sobre un plano sobre el cual se han dibujado líneas rectas paralelas espaciadas 5 cm, se arroja una aguja de 3 cm, la probabilidad de que ésta toque alguna de dichas líneas es 0.382; si se utiliza una aguja de 10 cm, la probabilidad obviamente aumenta a un estimado de 0.837 (en ambos cálculos se utiliza un valor para π de 3.14), y así similarmente para otros valores.

Los anteriores análisis corresponden exclusivamente al estudio de las situaciones más elementales posibles de considerar en el problema de las agujas. Una extensión apenas obvia del trabajo original de Buffon sería, por ejemplo, la de introducir un segundo grupo de paralelas, ortogonal (en ángulo recto) al primero, y espaciadas una distancia H entre ellas. (figura 6). El análisis puede hacerse para el caso particular en que $L < D$; $L < H$.

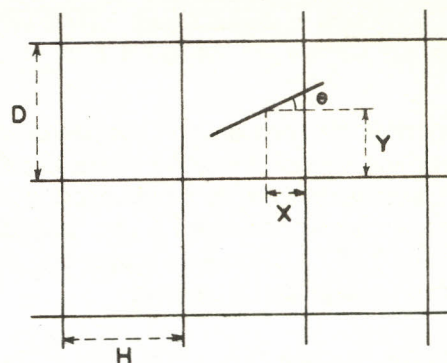


Fig. 6

Localización de la Aguja en un Plano con Dos Grupos de Paralelas

Para localizar la posición precisa de la aguja en el plano es ahora necesario determinar los valores de tres variables independientes: las coordenadas X, Y del punto medio de la aguja, y de nuevo el ángulo θ formado entre ésta y el eje x .

La probabilidad de que la aguja al caer toque una de las líneas del "enrejado" así formado es ahora compuesta. Si se toman los límites de θ como 0 y $\pi/2$, entonces el dominio de todas las posibles posiciones de la aguja estará representado por el paralelepípedo de volumen $\pi DH/2$. En este mismo orden de cosas, para que la aguja pueda tocar o cruzar una línea, su centro debe caer en alguna parte del área dada por:

$$DH - (H - L \cos \theta)(D - L \sin \theta) \quad \text{o}$$

$$L(H \sin \theta - D \cos \theta) - L^2 \sin \theta \cos \theta$$

La probabilidad está dada entonces por:

$$p = \frac{\int_0^{\pi/2} [L(H \sin \theta + D \cos \theta) - L^2 \sin \theta \cos \theta] \, d\theta}{\frac{\pi DH}{2}}$$

o sea:

$$p = \frac{2L(D+H) - L^2}{\pi DH}$$

Si $H \rightarrow \infty$, el resultado se reduce al encontrado para el problema original planteado por Buffon ($p = 2L/\pi D$); y si $D = H = 1$, la probabilidad toma su expresión más sencilla:

$$p = \frac{4L - L^2}{\pi}$$

Para propósitos de comparación simplemente con uno de los sencillos ejemplos citados antes, la probabilidad de que una aguja de 3 cm de longitud toque al caer una de las líneas correspondientes a un "enrejado" de 5 cm x 5 cm es 0.650, obviamente mayor que el estimado 0.382 para un solo grupo de paralelas.

Así como ésta, muchas otras y más elaboradas extensiones pueden plantearse alrededor del problema original, las cuales van desde diversos patrones de figuras geométricas en el plano, en reemplazo del "enrejado" cuadrículado, hasta la sustitución de la aguja o varilla por una figura plana en dos dimensiones.

Sus desarrollos son interesantes desde el punto de vista del análisis probabilístico y el trabajo matemático, pero van más allá de los propósitos planteados para este artículo.

UNA APLICACION PARTICULAR:

LA ESTIMACION DEL VALOR DE π

El problema de las agujas tuvo sin embargo su mayor difusión, cuando **Pierre Simón de Laplace** lo incluyó en su influyente e imponente obra "*Theorie analytique des probabilités*" (páginas 359-362), publicada en 1812. Laplace, considerado unánimemente como el principal gestor de la moderna teoría de probabilidad, a la que denominó "Sentido común reducido al cálculo", trabajó en el problema, aunque sin hacer ningún tipo de referencia a Buffon (14). Además de obtener,

como ya se mencionó, resultados correctos en el desarrollo matemático del problema, Laplace dirigió su atención a un corolario de éste en el sentido de que una frecuencia estimada de la probabilidad, obtenida a partir de lanzamientos sucesivos de una aguja sobre un plano con líneas paralelas podía ser utilizada para obtener una aproximación del número π .

En efecto si se realiza el experimento de manera manual durante un gran número de oportunidades, la ley de los grandes números (o sea cuando el número de eventos de un mismo experimento se hace muy elevado) permite validar el hecho de que la frecuencia relativa de intersecciones de la aguja con una de las líneas, o probabilidad empírica $\hat{p}$, se aproxima a la calculada por métodos analíticos. Es decir, que para

$$N \rightarrow \infty \text{ entonces } \hat{p} \rightarrow p$$

y por tanto:

$$\hat{p} = \frac{I}{N} \equiv \frac{2L}{\pi D} \quad \checkmark$$

Esta aplicación particular del problema ha servido para que diversos autores, desde mediados del siglo XIX, se hayan dado a la curiosa tarea de planear experimentos tendientes a estimar un valor aproximado de π . La **tabla No. 1** lista cronológicamente los diferentes intentos al respecto, reportados en la literatura (8), los cuales -no sobra mencionar- fueron "realizados" como fruto de una tediosa y muy paciente labor manual. La última columna muestra el error incorporado en cada una de estas estimaciones, dado por

$$|\pi - \hat{\pi}|, \quad \checkmark$$

donde π representa el valor real de la constante circular (3.1415926535...) y $\hat{\pi}$ la aproximación empírica lograda con el experimento.

AUTOR	AÑO	PARAMETROS EXPERIMENTALES RELACION L/D	RESULTADOS		CONCLUSIONES	
			N	I	$\hat{\pi}$	ΔE
Wolf	(1850)	0.8	5000 ✓	2532	3.1596 ✓	1.80×10^{-2}
Smith	(1855)	0.6	3204	1218.5	3.1553	1.37×10^{-2}
De Morgan	(1860)	1.0	600 ✓	382.5	3.137	4.59×10^{-3}
Fox	(1864)	0.75	1030	489	3.1595 ✓✓✓	1.79×10^{-2}
*Lazzarini	(1901)	0.8333...	3408	1808	3.1415929	2.47×10^{-7}
Reina	(1925)	0.5419	2520	859	3.1795	3.79×10^{-2}

TABLA 1. PRUEBAS REALIZADAS PARA ESTIMAR EL VALOR DE π

$L = K \cdot D$

No deben mirarse éstas como sólo buenas aproximaciones. . . son magníficas aproximaciones, hecho que ha permitido formular a algunos especialistas diversas especulaciones sobre la real validez de las correspondientes pruebas experimentales.

Sobre algunos de los valores reportados existe poca información disponible en la literatura, tal como ocurre con la prueba de **Richard Wolf**, de quien sólo se sabe fue un historiador suizo de astronomía que dedicó mucho de su tiempo libre a algunas prácticas de juegos de azar, aunque parece nunca tuvo perfecta claridad del servicio que ello podría prestar. Algo más se conoce sobre el ensayo del señor **Ambrose Smith**, quien según la referencia histórica correspondiente obtuvo 1213 intersecciones claras de un total de 3204 lanzamientos realizados, y 11 contactos sobre los cuales le fue difícil decidir (4). Dividido entonces estos contactos por igual, sumando por tanto 1218.5 aciertos (lo que permite así justificar la aparentemente inexplicable cifra fraccionaria). Resulta interesante apreciar que si todos los once contactos se hubieran considerado como intersecciones, el nuevo resultado habría conducido a obtener un valor de $\pi = 3.14117$. . . , mucho más preciso (exacto en las tres primeras cifras decimales) que el reportado por el autor. Por su parte, el trabajo de **Augusto de Morgan** fue realizado por un pupilo suyo, muy probablemente influenciado por el ya citado de Smith, que incluyó en su obra colección de artículos curiosos titulada "Budget of Paradoxes" (4). Del capitán **Fox** se menciona que realizó la práctica experimental correspondiente a manera de diversión, mientras se recuperaba de heridas producidas durante la Guerra Civil Americana. Sobre **Reina** no se dispone de ninguna información adicional. El trabajo de **Lazzarini** se analiza separadamente.

Un vistazo general de las cifras reportadas para los distintos experimentos permite identificar un aspecto casi general. El hecho de que la mayoría de valores de N no correspondan a números redondos sugiere que los diferentes trabajos se desarrollaron bajo un criterio de detención opcional; esto quiere decir que el valor de π parece haber sido sucesivamente recalculado después de cada lanzamiento y se reportaron aquellos valores

que permitían el valor más aceptable para esta constante. Con excepción de las pruebas de Wolf y tal vez de De Morgan, esta situación se verifica en los demás casos.

EL TRABAJO DE LAZZARINI

Indiscutiblemente polémico por su asombroso grado de exactitud, el trabajo del matemático italiano **Mario Lazzarini** requiere de una presentación un poco más detallada. Para iniciar, debe decirse que su labor experimental se desarrolló de manera mecanizada, ya que para efectos de llevar a cabo su prueba diseñó un aparato capaz de dejar caer con suficiente rapidez la aguja, registrar automáticamente tanto el número total de lanzamientos como el de intersecciones con una de las líneas dibujadas, y elevar inmediatamente la aguja para colocarla en posición para la prueba siguiente. Si la máquina fue realmente construida o no es algo muy difícil de verificar; el hecho es que el matemático italiano la describe de cierta manera detallada en su artículo original (11).

Se trata de un cilindro de lámina de hierro de 16 cm de diámetro en la base y 17 cm de altura, abierto por un extremo y fijo por el otro a un eje que se mueve en rotación en forma similar al trabajo de un reloj. En el interior del cilindro se encuentran una serie de aspas que colocan la aguja en posición de ser dejada caer a través de una rejilla estacionaria de finos alambres paralelos, que a su vez podían tomar distintos ángulos con respecto a la pared del cilindro. Un mecanismo no muy claramente descrito permite que una intersección sea indicada por un marcador sobre un gráfico en movimiento. La aguja es entonces transportada circularmente hacia arriba y el proceso se repite una vez más. Un contador, unido al movimiento de relojería, indica el número de giros del cilindro, que corresponde a un número fijo de caídas de la aguja. El aparato en cuestión, según Lazzarini, se diseñó para un total de 24 caídas de la aguja por minuto (11).

Lazzarini realizó varios experimentos, tal como se indica en la **Tabla No.2**, teniendo como parámetros $L=2.5$ cm y $D=3$ cm para la longitud de la aguja y la distancia

N	100	20	1000	2000	3000	3408	4000
I	53	107	524	1060	1591	1808	2122
$\hat{\pi}$	3.144	3.115	3.108	3.1446	3.142	3.1415929	3.1416

TABLA 2. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS REALIZADAS POR LAZZARINI

entre paralelas respectivamente (11). Siendo todas muy buenas aproximaciones, la que más impacta es la correspondiente a los valores $N=3408$, $I=1808$. La pregunta que puede surgir de manera inmediata es: ¿Por qué 3408 lanzamientos; por qué no 3400 ó 3500?

Una posible razón está en el criterio de la detención opcional antes mencionada. Sin embargo, la sensación de escepticismo sobre la realidad de estos valores empieza a crecer si se observa lo que sucede cuando se incrementa o se disminuye en 1 el número de intersecciones. Si $I=1807$, $\hat{\pi} = 3.1433$. . . , mientras que si $I=1809$, $\hat{\pi} = 3.1398$. . . Sin lugar a dudas, el resultado de Lazzarini fue bastante "afortunado".

Pero además de no corresponder el número de lanzamientos a una cifra redonda, una pregunta aún más importante puede formularse en términos de si un valor de $N=3408$ resulta aproximado, o al menos del mismo orden de magnitud, a aquel que con base en una determinación absolutamente teórica podría conducir a un resultado de esta precisión. Un análisis estadístico simple, válido para una serie de ensayos repetitivos, permite encontrar ese valor teórico para N (2).

Supóngase que se desea determinar el número de lanzamientos teóricos N necesarios para tener el 95% de seguridad de que el valor obtenido para π es correcto en seis cifras decimales, es decir que:

$$|\pi - \hat{\pi}| < 0.5 \times 10^{-6}$$

El valor de $\pi = 2LN/DI$, de acuerdo con los valores de L y D utilizados por Lazzarini, está dado por $5N/3I$. El planteamiento en términos probabilísticos indica entonces que:

$$p \left(\left| \pi - \frac{5N}{3I} \right| < 0.5 \times 10^{-6} \right) \geq 0.95$$

Arreglando un poco la expresión se tiene que:

$$\left| \pi - \frac{5N}{3I} \right| < \varepsilon$$

si y solo si

$$\left| \frac{3\pi}{5} - \frac{N}{I} \right| < \frac{3\varepsilon}{5}$$

Y si se utilizan diferenciales sobre $f(x)=1/x$,

si y sólo si:

$$\left| \frac{5}{3\pi} - \frac{I}{N} \right| < \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{5}\right)^2} \frac{3\varepsilon}{5} = \frac{5\varepsilon}{3\pi^2}$$

ó

$$\left| \frac{5N}{3\pi} - I \right| < \frac{5N\varepsilon}{3\pi^2}$$

Puesto que H está distribuido binomialmente entre los parámetros N y $p=5/3\pi$, se sabe que el reporte de casos favorable está dado por Np y su correspondiente varianza por $Np(1-p)$. Utilizando aproximación normal, para tener:

$$p \left(\left| \frac{5N}{3\pi} - I \right| < \frac{5N}{3\pi^2} (0.5 \times 10^{-6}) \right)$$

Se necesita que:

$$\frac{\frac{5N}{3\pi^2} (0.5 \times 10^{-6})}{\sqrt{Np(1-p)}} \cong 0.95$$

De donde se halla $N=31.5 \times 10^{12}$ (31.5 trillones de lanzamientos!!!).

Al comparar esta cifra con el valor real (?) de lanzamientos hechos por Lazzarini, es obvio que sobra cualquier tipo de comentario. Sin embargo, no debe olvidarse que esta cifra fue hallada por un método netamente estadístico, y no permite entonces descartar absolutamente el resultado experimental.

De otro lado, la precisión del resultado de Lazzarini está también relacionada con la exactitud de la medición de L y D . Es un hecho reconocido (10) que aún los más precisos micrómetros de comienzos del presente siglo presentaban márgenes de error de ± 0.0005 cm. Si estos márgenes son incorporados en el estudio, el verdadero valor de π que correspondería al trabajo de Lazzarini estaría dado por:

$$3.1408 < \hat{\pi} < 3.1424$$

De esta manera, la precisión se limitaría realmente a sólo dos cifras decimales correctas en lugar de seis.

Al lado de estas divagaciones sobre la certidumbre del trabajo de Lazzarini, existe una especulación de carácter más bien histórico que resulta interesatne mencionar. El valor de Lazzarini puede presentarse como:

$$\pi = \frac{2(2.5)}{3} \times \frac{3408}{1808} = \frac{355}{113}$$

Donde la fracción 355/113 es conocida como un valor empírico aproximado para π , descubierto por el matemático chino **Tsu-Chung Chih** en el siglo V y considerado como la magnitud más precisa de esta constante entre todas aquellas utilizadas hasta el siglo XVIII (5). No tiene nada de raro y sí mucho de lógico que Lazzarini conociera esta aproximación; ¿habrá entonces acomodado su trabajo para obtener este mismo resultado?. Es posible, su razonamiento pudo haber sido tan sencillo como el de encontrar un multiplicador apropiado; es decir, si:

$$\frac{2LN}{DI} \times \frac{355}{113} = \frac{355k}{113k} = \frac{5 \times 71k}{113k}$$

Escogiendo convenientemente $L=2.5$ y $D=3$, ello resulta en:

$$\frac{N}{I} = \frac{213k}{113k}$$

y con $k=16$ se encuentran precisos los valores $N=3408$, $I=1808$ reportados por Lazzarini. Si se trata o no de una simple coincidencia, éste es un aspecto cuya discusión no puede trascender más allá del terreno meramente especulativo.

A estas alturas del análisis y luego de haber revisado algunos elementos aparentemente aislados que parecen atentar contra la confiabilidad de los valores reportados por Lazzarini, lo único que resta es tratar de evaluar teóricamente la posibilidad de obtener dichos resultados. Para ello, puede hacerse uso del llamado teorema de **De Moivre**, descubierto por éste en 1730 y posteriormente generalizado por Laplace (7). En él se plantea que si la probabilidad de ocurrencia de algún evento **A** en n ensayos independientes es constante e igual a p ($0 < p < 1$), entonces la probabilidad $P_n(i)$ de que ese evento ocurra exactamente i veces en estos ensayos satisface la relación:

$$P_n(i) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-1/2 X^2}$$

En donde:

$$X = \frac{i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Si se tiene en cuenta que el término exponencial es siempre inferior a 1, la expresión puede simplificarse por la aproximación válida para cualquier valor de i ,

$$P_n(i) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

Al evaluarla para los valores utilizados por Lazzarini se sabe que:

$$p = \frac{2L}{\pi D} = \frac{2(2.5)}{3\pi} = \frac{5}{3\pi} \text{ y se obtiene:}$$

$$P_n(i) \leq 0.0137$$

magnitud sin lugar a dudas demasiado baja, pero que no excluye completamente la posibilidad de dar los resultados por el matemático italiano.

EL PROBLEMA DE LAS AGUJAS Y EL METODO DE MONTECARLO

El problema de las agujas de Buffon no sólo dió lugar a la aparición de infatigables experimentadores como los mencionados en la sección anterior. Mucho más importantes que eso ha sido la incidencia directa o indirecta que tuvo en el surgimiento de una técnica probabilística de amplia y cada vez mayor aplicación en la solución de diversos tipos de problemas: los métodos de Montecarlo.

Si se hace caso omiso de las limitaciones físicas inherentes, el procedimiento experimental sugerido con los lanzamientos sucesivos de una aguja sobre un plano es equivalente en esencia a la generación aleatoria de los valores puntuales de las dos variables independientes que definen su localización sobre éste. Los **Métodos de Montecarlo** comprenden esa rama de las matemáticas experimentales cuya característica esencial de trabajo radica en que en algún punto del desarrollo correspondiente se sustituyen algunos valores reales por otros de una variable aleatoria, teniendo las propiedades estadísticas de esta última.

Si bien el nombre y desarrollo sistemático de los métodos de Montecarlo datan desde 1944, los experimentos realizados sobre el problema de las agujas en la segunda mitad del siglo diecinueve constituyen tal vez la primera huella de sugerencias de esta técnica (9). Con el procedimiento matemático conocido, y a manera de un símil con el lanzamiento de las agujas, los científicos **John Von Neumann** y **Stanislaw Ulam** dieron

la primera aplicación oficial de los métodos de generación aleatoria de valores al utilizarlos para el diseño de reactores atómicos durante la segunda guerra mundial. Su trabajo consistió en la simulación directa de los problemas probabilísticos relacionados con la trayectoria y por tanto con la difusión de un neutrón producido por la fisión de un núcleo atómico en un medio dado. La metodología se justificaba en vista de la incapacidad de los métodos teóricos para predecir las diferentes colisiones, cambios de dirección, pérdidas de energía, posibilidades de absorción, etc., de cada uno de los neutrones, además de las obvias dificultades de un error y ensayo experimental en términos de consumo de tiempo, costo y peligrosidad. El éxito obtenido en el análisis de este problema dió lugar a la aparición de nuevas posibles aplicaciones: el esquema del problema de los lanzamientos sucesivos de una aguja tomó la forma de uno de absorción de rayos gamma, planeación de sistemas telefónicos, estudios de tráfico vehicular y muchos más.

En general los métodos de Montecarlo son aplicables a la solución de aquellos problemas dependientes de la probabilidad, en donde la experimentación física es impracticable y la deducción de una fórmula exacta imposible. Actualmente son utilizados en una gran variedad de áreas, principalmente en investigación de operaciones, problemas de producción, teoría de colas, control de inventarios y similares.

El presente artículo incluye un **programa de computador** que simula directamente, por un método de Montecarlo, el problema de Buffon. Se tomó como base un programa preliminar elaborado para este mismo propósito (12), al cual se le han hecho las modificaciones necesarias. Utilizando BASIC como lenguaje, el programa ha sido diseñado con la mayor flexibilidad posible de tal manera que permite interactuar con el microcomputador para variar las condiciones de la simulación. El listado puede dividirse en tres secciones principales: **La primera**, de entrada de los datos necesarios, es decir N, H, D y E, siendo esta última la medida del margen de error aceptado en la estimación del valor de π - VAPI -; **la segunda**, para la obtención propiamente dicha del valor de π para unas condiciones dadas, generando aleatoriamente los parámetros de localización geométrica de la aguja, Y (distancia) y A (ángulo), y utilizando el criterio matemático-analítico para evaluar la posibilidad de intersección de ésta con una de las líneas sobre el plano; y **la tercera** para la impresión de los resultados obtenidos, I y VAPI. El aparentemente elevado número de instrucciones en esta última sección (incluyendo una variable de alternativa posicional en la impresión como P, sin significado físico) ha sido necesario para permitir una conveniente presentación de los resultados de la simulación. De esta

manera puede apreciarse que es posible en ocasiones encontrar una mejor aproximación de π con un menor número de lanzamientos, si bien se acepta que en la medida en que éste tienda a infinito el valor de π se hace prácticamente el real. Esto tiene su explicación en términos de que el proceso de aproximación iterativo no es inflexiblemente continuo sino asintóticamente fluctuante. El programa permite así mismo la posibilidad de evaluar el promedio aritmético de los distintos valores aproximados de π a partir de las diferentes pruebas realizadas, valor que estadísticamente podría tener algún significado si la planeación de cada uno de los ensayos y el número de éstos fueran los apropiados.

CONCLUSIONES

El problema de las agujas planteado por Buffon constituye, sin lugar a dudas, uno de los más importantes entre aquellos que se trabajaron en los inicios del estudio de la teoría de probabilidad. La importancia, sin embargo, se da fundamentalmente desde el punto de vista teórico, en un grado mucho mayor de lo que constituye el reporte de sus correspondientes resultados numéricos. El ejemplo de conexión mostrado por Buffon entre la probabilidad y la geometría, y por ende el cálculo analítico, constituyó, al lado de otros planteamientos, una de las semillas que dieron lugar a un gran número de desarrollos teóricos de orden matemático en el área de la probabilidad. De otro lado, el carácter aleatorio resultante de su trabajo experimental se planteó, sin Buffon proponérselo y como ya se mencionó, como una versión pionera de los denominados métodos de Montecarlo, los mismos que han permitido el estudio de numerosos casos y aplicaciones en áreas tan diversas como la física nuclear, la ingeniería de transporte, la producción y el mercadeo, entre muchas otras. Su importancia por las repercusiones de orden teórico, tanto directas como indirectas, es entonces inobjetable

En lo que se refiere al aspecto llámese práctico, relativo a los resultados "obtenidos" para su prueba experimental, la situación es diferente. Si bien se reconoce la posibilidad de obtener dichos resultados, su "asombroso" grado de precisión, en particular el correspondiente al trabajo de Lazzarini, conlleva casi que necesariamente a cuestionar su legitimidad. No obstante, dado que los análisis estadísticos dejan la puerta abierta a la obtención de ese tipo de cifras, es poco lo que puede decirse en concreto al respecto.

En este mismo punto, el autor del presente artículo no ha querido desaprovechar la oportunidad, y no resistió la tentación de colocar su nombre en la lista de aquellos "estimadores manuales" de π . Para ello se recolectaron agujas de diferente longitud y se dispuso de varios planos los cuales sólo diferían entre sí en la distancia

PROGRAMA DE COMPUTADOR

```
10  REM simulación por computador del problema de Buffon
15  CLS
20  NE = 1
25  SUMPI = 0
30  LPRINT " ENSAYO  D L E N I PI "
35  LPRINT: LPRINT
40  INPUT "Número de lanzamientos" ; N
45  INPUT "Distancia entre las paralelas"; D
50  INPUT "Longitud de la aguja"; L
55  INPUT "Error aceptado"; E
60  LPRINT "      "; NE
65  RANDOMIZE TIMER
70  I = 0
75  P = 0
80  FOR K=1 TO N
85  REM Se generan los valores aleatorios para localizar la aguja
90  Y = RND : A = RND
95  REM Se normalizan los valores
100 Y = Y*D/2 : A = 3.1415926#*A
105 IF Y<=0.5*L*SIN(A) THEN I = I+1
110 IF I = 0 THEN 145
115 VAPI = (2*L*N) / (D*I)
120 IF ABS(VAPI - 3.1415926#) > E GO TO 145
125 IF K = N GO TO 150
130 IF P = 0 THEN P = 1; GO TO 140
135 LPRINT "      "
140 LPRINT "      "; D; "      "; L; "      "; E; "      "; K; "      "; I; "      "; VAPI
145 NEXT K
150 IF P = 0 THEN 160
155 LPRINT "      "
160 LPRINT "      "; D; "      "; L; "      "; E; "      "; K; "      "; I; "      "; VAPI
165 SUMPI = SUMPI + VAPI
170 PROPI = SUMPI / NE
175 INPUT "Desea realizar otra prueba (SI/NO) "; A$
180 IF A$ = "NO" THEN 215
185 LPRINT
190 NE = NE + 1
195 INPUT "Desea cambiar algun(os) valor(es) de parámetro(s) (SI/NO) "; B$
200 IF B$ = "NO" THEN
205 REM Se dan nuevos valores
210 GO TO 40
215 LPRINT: LPRINT: LPRINT
220 LPRINT " EL VALOR PROMEDIO DE PI ES " PROPI
225 END
```

ENSAYO	D	L	E	N	I	PI
1	1.8	1.5	0.0005	10000	5284	3.154177
2	1.8	1.5	0.0005	10000	5286	3.152983
3	1.8	1.5	0.0009	14941	7956	3.142283
	1.8	1.5	0.0009	14942	7956	3.142283
	1.8	1.5	0.0009	14943	7956	3.142283
	1.8	1.5	0.0009	14944	7956	3.142283
	1.8	1.5	0.0009	14945	7957	3.141888
	1.8	1.5	0.0009	14946	7958	3.141493
	1.8	1.5	0.0009	14947	7958	3.141493
	1.8	1.5	0.0009	14948	7958	3.141493
	1.8	1.5	0.0009	14949	7959	3.141098
	1.8	1.5	0.0009	14950	7960	3.140704
	1.8	1.5	0.0009	15000	7988	3.129695
	1.8	1.5	0.0009	15000	7988	3.129695
4	1.5	1.3	0.0005	14869	8275	3.141994
	1.5	1.3	0.0005	14870	8275	3.141994
	1.5	1.3	0.0005	14871	8276	3.141614
	1.5	1.3	0.0005	14872	8276	3.141614
	1.5	1.3	0.0005	14873	8277	3.141235
	1.5	1.3	0.0005	15000	8344	3.116012
	1.5	1.3	0.0005	15000	8344	3.116012
5	1.5	1.3	0.0005	14959	8275	3.141994
	1.5	1.3	0.0005	14960	8276	3.141614
	1.5	1.3	0.0005	14961	8276	3.141614
	1.5	1.3	0.0005	14962	8277	3.141235
	1.5	1.3	0.0005	15000	8297	3.133663
6	1.8	1.5	0.0003	25000	13186	3.159917
EL VALOR PROMEDIO DE PI ES 3.141075						

ENSAYO	D	L	E	N	I	PI
1	1.8	1.5	0.0005	21000	11114	3.149181
2	1.8	1.5	0.0005	20906	11140	3.141831
	1.8	1.5	0.0005	20907	11141	3.141549
	1.8	1.5	0.0005	20908	11142	3.141267
	1.8	1.5	0.0005	20909	11142	3.146955
	1.8	1.5	0.0005	21000	11193	3.146955
3	7.5	5.5	0.0005	21000	9659	3.188736
4	4.7	4.3	0.0007	23000	13230	3.181036
5	7.5	5.5	0.0005	25000	11648	3.147894
6.	7.5	4.5	0.0009	25000	9495	3.159558
7.	9.9	9.5	0.0009	25000	15215	3.153454
EL VALOR PROMEDIO DE PI ES: 3.158116						

entre las respectivas paralelas; ello con el propósito principal de evitar "apreciaciones tendenciosas" sobre los resultados que pudiesen "obtenerse". Aunque se hubiese deseado utilizar un medio de medición de mayor grado de precisión, sólo se dispuso de una regla que permitió estimar las correspondientes longitudes con una cifra decimal, en centímetros. En vista del cansancio en el brazo que seguramente debería producir una serie de pruebas como las propuestas, y para permitir la realización de varios ensayos, se adoptó con anticipación la política de hacer un número mínimo de lanzamientos para cada experimento.

- La primera prueba se realizó para $L=5.5\text{cm}$ y $D=7.0\text{cm}$. Al primer lanzamiento no hubo intersección, al segundo la aguja sí tocó una de las líneas. Se decidió terminar allí la parte práctica. El cálculo numérico simple correspondiente había permitido hallar $\pi = 3.14285$ (exacto en dos cifras decimales). Entusiasmado con esta aproximación, se decidió llevar a cabo otros experimentos.

- La segunda prueba utilizó nuevos parámetros, $L=3.3\text{cm}$ y $D=3.5\text{cm}$. En esta ocasión se hicieron cinco lanzamientos y se dieron tres intersecciones. La aproximación obtenida, "curiosamente", fue de nuevo $\pi = 3.14285$.

En un intento por "encontrar" un valor más preciso, en vista de esta racha de suerte, se decidió hacer una prueba más. Los nuevos valores fueron $L=7.1\text{cm}$ y $D=11.3\text{cm}$. Se hicieron de nuevo cinco lanzamientos, produciéndose dos intersecciones.

El "resultado obtenido" fue fantástico:

$\pi = 3.1415929\dots$, es decir, prácticamente la misma "aproximación" de Lazzarini (seis cifras decimales exactas!).

¿Estos resultados no serán suficientes para ingresar en la lista de los asombrosos calculistas de π ? 🍎

AGRADECIMIENTOS

El autor desea agradecer muy especialmente al profesor **Lee Badger**, quien suministró información y material importante para la preparación de este artículo.

REFERENCIAS

- (1) "L'aiguille de Buffon", Petit Archimede, (64-65) (suplemento), 183-193. Mayo 1980.
- (2) **BADGER, L.**; *Comunicación Personal*
- (3) **BERGAMINI, D.**; "Mathematics", 127-131, Time Inc., New York (1963).
- (4) **DE MORGAN, A.**; "Assorted Paradoxes" en **Newman, J.R.**, "The world of mathematics", Vol. 4, 2381-2382, Simon and Schuster Inc, New York (1956).
- (5) **EVES, H.**; "An introduction to the history of mathematics", 89-97, CBS College Publishing, New York (1983).
- (6) **GARAVITO, J.**; "Demostración del juego de la aguja"; Rev. Acad. Col. de Ciencias Exact. Fis y Nat., 4 (15-16), 385-386 (Agosto-Dic 1941).
- (7) **GNEDENKO, B.V.**; "The Theory of probability"; 4a. ed., 48-51, Chelsea Publishing Co., New York (1968).
- (8) **GRIDGEMAN, N. T.**; "Geometric probability and the number π ", Scripta Matn., 25, 183-195 (1960).
- (9) **HAMMERSLEY, J. M. y HANDSCOMB, D.C.**; "Montecarlo Methods", 6-9, Methuen & Co. Ltda, Londres (1967).
- (10) **KLEIN, H. A.**; "The world of measurements", 65-74, George Allen & Unwin Ltda., Londres (1974).
- (11) **LAZZARINI, M.**; "Un' applicazione del calcolo della probabilità alla ricerca sperimentale di un valore approssimato di π ", Periodico di Matematica, 4, 140-143 (1901).
- (12) **SANCHEZ, W. y CONDE, G.**; "Trabajo de investigación de operaciones sobre el problema de Buffón", publicación interna, Universidad del Valle.
- (13) **THUMM, W.**; "Buffon's needle: stochastic determinations of π ", Math. Teacher, 58 (11), 601-607 (1965).
- (14) **TODHUNTER, I.**; "A history of the mathematical theory of probability", 344-349, 590-591, Chelsea Publishing Co., New York (1965).
- (15) **USPENSKY J.V.**; "Introduction to mathematical probability", 112-113, McGraw-Hill Book Co., New York (1937).