

PUNTOS CRÍTICOS EN MEMBRANAS DEFLECTADAS

SERGIO MIGUEL AVILEZ ORTIZ



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011

PUNTOS CRÍTICOS EN MEMBRANAS DEFLECTADAS

SERGIO MIGUEL AVILEZ

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para
optar por el título de Magister en Matemáticas.

DIRECTOR:

JAIME ARANGO, Dr.rer.nat.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

SERGIO MIGUEL AVILEZ, 1967

PUNTOS CRÍTICOS EN MEMBRANAS
DEFLECTADAS

Palabras claves: Membranas, ecuación de Poisson, puntos críticos, funciones de Morse.

Nota de aprobación:

El trabajo de investigación titulado **Puntos críticos en membranas deflectadas** presentado por el estudiante **Sergio Miguel Avilez**, para optar por el título de Magíster en Matemáticas, fue revisado por el jurado y calificado como aprobado.

Director

Jurado

Jurado

A la memoria de mis padres
Manuel Avilez y Maria Ortiz.

Dedicatorias

A Dios, por que hoy me permite tener a mi esposa, hijas y hermanos en la culminarón de una de las etapas más importante de mi vida.

A mi esposa Yelena, aunque el camino no ha sido fácil, te amo y te debo mucho.

A mis hijas Dilis y Lina, que son la bendición más grande que pudo enviar dios, las adoro.

A mis hermanos Eder, Yolima, Angelina y Sandra los quiero mucho.

A mis amigos Alex, Willy, Arnoldo, Alexandra, Wilson, Claudia, Andres, Elkin y Ramiro. Sin ustedes el paso por la Univalle hubiera carecido de esa magia que nos hace tener y recordar momentos especiales.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Jaime Arango por dirigirme en la elaboración de este trabajo de investigación. Por su dedicación y empeño depositado en mi formación, el tiempo que me espero en la culminación y ante todo por la amistad y confianza brindado durante todo este tiempo.

A la Universidad de Córdoba por brindarme la oportunidad de adquirir esta formación y el tiempo que esperó para la entrega del título.

A todos y cada uno de mis profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle por su labor docente, y la amistad brindada. En especial a Adriana, Alvaro, Ana Maria, Doris, Gonzalo, Guillermo, José Raul, Miguel y Oscar.

Resumen

En este trabajo de investigación se desarrollan unas herramientas para el estudio de puntos críticos de las soluciones de la ecuación de Poisson en el plano. De manera más precisa se emplean técnicas de la variable compleja para el estudio de la función determinante de la matriz Hessiana de las soluciones de la ecuación de Poisson.

Introducción

Una cuestión importante en matemática aplicada es el de determinar el conjunto de puntos críticos de una función de valor real dada. Esto puede ser una tarea difícil si no conocemos explícitamente la función dada. Consideremos por ejemplo la solución del problema elíptico dado por la ecuación de Poisson con condición de borde nula:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 1 && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio plano con frontera $\partial\Omega$ suave. A la fecha, y pese a más de 200 años de investigación, no existe una completa descripción del conjunto de puntos críticos $\mathbb{K}$ de u :

$$\mathbb{K} = \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\}.$$

El conjunto $\mathbb{K}$ es pertinente para aplicaciones, ya que la ecuación (1) modela una variedad de fenómenos físicos. Por ejemplo, es de interés práctico conocer el número de protuberancias exhibida por una membrana deflectada por su propio peso.

El conjunto $\mathbb{K}$ ha merecido la atención de varios investigadores. Hacemos un listado de las principales contribuciones e invitamos al lector a consultar el reciente trabajo de Arango y Gómez [2], y las referencias allí citadas, para más detalles sobre los resultados conocidos del conjunto $\mathbb{K}$.

- Cuando Ω es un dominio convexo, Makar-Limanov ([6]) aborda el problema (1) y prueba que $z = \sqrt{-u}$ es cóncava, y como consecuencia u tiene exactamente un punto crítico.
- En 1998 Cabré y Chanillo ([3]) generalizan el resultado de Makar-Limanov a problemas semi-lineales elípticos. En particular, probaron

que las soluciones semi-estables u de (1) tienen puntos críticos no-degenerados en dominios planares convexos Ω cuyo borde tiene curvatura positiva. Este resultado implica que cerca de puntos críticos, las curvas de nivel de u son estrictamente convexas.

- Bajo hipótesis similares a las de Cabré y Chanillo sobre el dominio Ω , Arango ([1]) prueba unicidad y no-degeneramiento de puntos críticos de generalizaciones de (1).

En esencia, el conjunto crítico $\mathbb{K}$ es la unión finita de puntos críticos aislados y curvas críticas de Jordan (ver [2]). Sabemos que las curvas críticas de Jordan se dan sólo en dominios no conexos. Mientras que en conjuntos planares conexos $\mathbb{K}$ es finito. El problema es que se sabe muy poco sobre la naturaleza de los puntos críticos aislados. En el caso de dominios convexos, se sabe que el único punto crítico es no degenerado. Pero no se sabe si en un conjunto conexo (no necesariamente convexo), los puntos críticos aislados son o no degenerados.

El principal objetivo de este trabajo es estudiar las curvas nodales de la función determinante de la matriz Hessiana de la solución u de (1):

$$d(x) := \det H_u(x), \quad x \in \Omega,$$

en donde $H_u(x)$ es la matriz Hessiana de la solución u . Mostraremos que las curvas nodales de d son curvas nodales de funciones armónicas. La esperanza es que un mejor conocimiento de las curvas nodales de d nos permita conocer si un punto crítico es no degenerado. Es importante destacar que hay muy pocas referencias sobre la función d .

Índice general

Introducción	V
1. Un modelo físico	1
2. Preliminares matemáticos	4
2.1. Existencia y unicidad de soluciones	5
2.2. Propiedades de las soluciones	7
3. Puntos críticos	9
3.1. Funciones Semi-Morse y conjuntos nodales	9
3.2. Conjuntos críticos	13
4. Métodos de la variable compleja	14

Capítulo 1

Un modelo físico

Este trabajo se enmarca en la ecuación de Poisson. Se conocen muchos modelos físicos que conducen a esta ecuación. A continuación presentaremos uno, donde se llega a la ecuación de Poisson minimizando un funcional de energía total. Los detalles se pueden consultar en [5] pag. 128-131.

Para simplificar vamos a suponer que el estado inicial de la membrana es un dominio plano Ω con borde $\partial\Omega$ suave, que su deformación está caracterizada únicamente por una deflexión normal al plano de Ω y que la deflexión en el borde es nula. Lo que causa la deformación es una fuerza externa que se modelará mediante una función f definida en Ω .

Diremos que w es una *deformación admisible* si w es lo suficientemente suave y si satisface la condición de borde

$$w = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega.$$

Por un lado, el área de la membrana no deformada es

$$\int_{\Omega} dx dy.$$

De otro lado, el área de la membrana para una deformación admisible w es

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2} dx dy.$$

La energía potencial elástica de la deformación admisible w viene dada por

$$E_s(w) = a \int_{\Omega} \left(\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2} - 1 \right) dx dy$$

donde a es una constante que depende del material de la membrana. El trabajo que ejerce la fuerza externa en una deformación admisible w está dado por

$$\int_{\Omega} f w \, dxdy.$$

Ahora bien, entre todas las deformaciones admisibles, la que en efecto tiene lugar es la que minimiza (ver [5]) el funcional de energía total

$$E_T(w) = a \int_{\Omega} \left(\sqrt{1 + w_x^2 + w_y^2} - 1 \right) \, dxdy - \int_{\Omega} f w \, dxdy. \quad (1.1)$$

Minimizar el funcional E_T no es tarea fácil. Dependiendo de la magnitud de la fuerza externa o de la geometría de Ω podría no haber un minimizador u .

Es conveniente simplificar el modelo y considerar únicamente deformaciones admisibles que causen incrementos pequeños en el área de la membrana deformada teniendo como referencia el área de la membrana no deformada $\int_{\Omega} dxdy$. Esto nos lleva a considerar deformaciones admisibles que satisfagan

$$w_x^2 + w_y^2 \ll 1.$$

La primera integral de la expresión de E_T dada en (1.1) tiene la forma $\sqrt{1+z} - 1$, donde $z = w_x^2 + w_y^2$. Como $\|z\| \ll 1$, haciendo $\frac{z}{2} = \frac{w_x^2 + w_y^2}{2}$ para obtener una aproximación al funcional de energía E_T

$$E(w) = \frac{a}{2} \int_{\Omega} (w_x^2 + w_y^2) - \int_{\Omega} f w \, dxdy. \quad (1.2)$$

El propósito es mostrar que si u es una deformación admisible que minimiza E entonces u satisface la ecuación de Poisson. Para ello supongamos que el funcional E alcanza un mínimo en una deformación admisible u . Es fácil ver que para cualquier deformación admisible v la expresión

$$\epsilon \rightarrow E(u + \epsilon v), \quad -1 < \epsilon < 1,$$

define una curva de deformaciones admisibles. Como u minimiza E se tiene

$$\frac{d}{d\epsilon} E(u + \epsilon v) \big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (1.3)$$

para toda deformación admisible v . Algunos cálculos elementales muestran que

$$\frac{d}{d\epsilon} E(u + \epsilon v) |_{\epsilon=0} = a \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy - \int_{\Omega} f u dx dy.$$

Por integración por partes tenemos que

$$a \int_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) dx dy - \int_{\Omega} f u dx dy = - \int_{\Omega} (a \Delta u + f) v dx dy.$$

Por (1.3) tenemos entonces que

$$\int_{\Omega} (a \Delta u + f) v dx dy = 0$$

para toda deformación admisible v . Como el conjunto de las deformaciones admisibles es denso en $L^2(\Omega)$ tenemos finalmente que

$$a \Delta u + f = 0,$$

la cual es nuestra ecuación de Poisson.

Capítulo 2

Preliminares matemáticos

Para empezar calcularemos la solución de (1) en elipses, triángulos equiláteros y anillos. En estas regiones el problema (1) se puede resolver explícitamente.

En la elipse

$$E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x_1}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{b} \right)^2 \leq 1, \right\}$$

la solución u_E de (1) es bien conocida. La reseñamos para futuras referencias:

$$u_E(x_1, x_2) = \frac{1}{2(a^2 + b^2)} (a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2 - a^2 b^2). \quad (2.1)$$

Menos conocida que la solución en elipses es la solución u_T de (1) en un triángulo equilátero T , digamos que de lado $2a$:

$$T = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 + \frac{a}{\sqrt{3}} > 0, \quad \sqrt{3}|x_1| < x_2 - \frac{2a}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Se puede verificar por calculo directo que la solución está dada por

$$u_T(x_1, x_2) = -\frac{1}{4\sqrt{3}a} \left(x_2 + \frac{a}{\sqrt{3}} \right) \left(\left(x_2 - \frac{2a}{\sqrt{3}} \right)^2 - 3x_1^2 \right). \quad (2.2)$$

Tanto en la elipse como en el triángulo equilátero las soluciones son negativas en el interior, tienen un único punto crítico, que resulta ser el mínimo absoluto. Se llama la atención que la elipse y el triángulo son regiones convexas.

Para $0 < a < 1$ consideremos ahora el anillo dado por

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}.$$

Escribiendo (1) en coordenadas polares obtenemos la solución

$$u_A(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \left(r^2 - a^2 + \frac{1 - a^2}{\ln a} \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2. \quad (2.3)$$

En el caso del anillo, en contraste con los casos del triángulo y de la elipse en donde el conjunto de puntos críticos es finito, el conjunto de puntos críticos en el anillo es infinito. En efecto, el conjunto $\mathbb{K}$ es la curva descrita en coordenadas polares por

$$r = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{\ln a^2}}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

2.1. Existencia y unicidad de soluciones

Lo menos que se le puede pedir al problema (1) es que tenga soluciones negativas únicas. Lo de negativas es porque las membranas se deflexan hacia abajo por efectos de su propio peso.

Denotaremos por $\|x\|$ la norma Euclidiana de $x \in \mathbb{R}^2$. Escribiremos ∇u , Δu para denotar respectivamente el operador gradiente y el operador de Laplace aplicados a una función u . Además, escribiremos la *matriz Hessiana* de u en x como $H_u(x)$. Comenzaremos con dos importantes resultados, los cuales junto a las propiedades que de ellos se derivan nos serán de gran utilidad.

En lo que sigue del trabajo entenderemos por Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1 (Principio del Máximo). *Sea $h \in C(\overline{\Omega})$ con $h \leq 0$ en Ω . Supongamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ y*

$$\Delta u + hu \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Si u alcanza su máximo M en algún punto de Ω entonces $u \equiv M$ en Ω .

Demostración. Ver [4] pag 64, allí el lector encontrará el teorema anterior con mayor generalidad. $\square$

Definición 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $p \in \partial\Omega$. Se dice que Ω satisface la condición de la esfera interior en el punto p , si existe una bola $B(p; r)$ tal que $\partial\Omega \cap \partial B(p; r) = \{p\}$ y $B(p; r) \subset \Omega$. Decimos que Ω satisface la condición de la esfera interior, si Ω satisface la condición de la esfera interior en cada punto frontera.

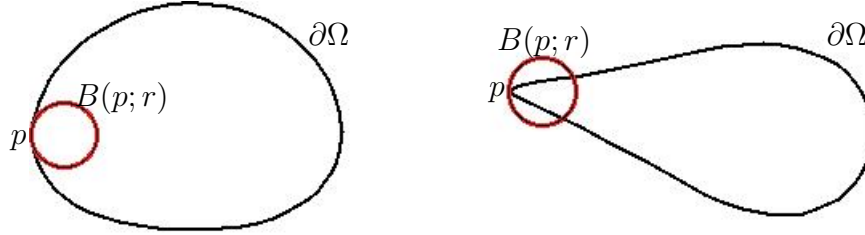


Figura 2.1: El gráfico muestra dos dominios, uno que satisface la condición de la esfera interior en p y otro que no la satisface.

Teorema 2. Sea $u \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Supongamos que $u \leq M$ en Ω y que $u = M$ en un punto frontera p . Supongamos también que Ω satisface la condición de la esfera interior en p . Si u es continua en $\Omega \cup \{p\}$ y la derivada en la dirección normal exterior $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ existe en p , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} > 0 \quad \text{en } p,$$

a menos que $u \equiv M$.

Demostración. Ver [4], allí el lector encontrará el teorema anterior con mayor generalidad. $\square$

Corolario 1. Sea Ω un dominio acotado. Si $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$, $h \in C^\infty(\Omega)$ y $h \leq 0$ en Ω , entonces el problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u + h u &= f & \text{en } \Omega, \\ u &= g & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

tiene a lo más una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$.

Demostración. En efecto, si hubiese dos soluciones u_1, u_2 entonces $v = u_1 - u_2$ sería continua en $\partial\Omega$, tomaría valores nulos en la frontera y satisfaría $(\Delta + h)[v] = 0$ en Ω , de igual forma sucedería con $-v$, luego por el teorema 1.1 $v \equiv 0$ y así $u_1 \equiv u_2$. $\square$

El siguiente es un caso particular del teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Dirichlet. Para efectos de la demostración el lector puede consultar el texto [4].

Teorema 3. *Existe una única solución clásica u de (1). Más aún, u es de clase C^∞ al interior de Ω .*

2.2. Propiedades de las soluciones

No basta la existencia y la unicidad de soluciones. Además, estas deben reflejar los aspectos observables más importantes en las membranas. Por observación se sabe que las membranas, como objetos físicos, se deflectan hacia abajo por efectos de su propio peso. También, la observación muestra que la deflexión máxima de una membrana aumenta al aumentarse la densidad

Un aspecto interesante que puede ser abordado con técnicas elementales es lo que le ocurre con las soluciones de (1) cuando la región Ω se dilata. Para $d > 0$ considere los escalamientos de una región $\Omega \equiv \Omega_1$ del plano:

$$\Omega_d = \left\{ (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s = dx_1, t = dx_2, (x_1, x_2) \in \Omega \right\}.$$

El propósito es establecer una relación entre la deflexión de Ω_d y la de Ω . Para ello, sean $u_d = u_d(s, t)$, $(s, t) \in \Omega_d$, la solución de (1) en la región Ω_d . Para todo $(x_1, x_2) \in \Omega$ defínase

$$v(x_1, x_2, d) = u_d(dx_1, dx_2) = u_d(s, t).$$

Por la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{v}{d^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{v}{d^2} \right) &= 1, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \left(\frac{v}{d^2} \right) &= 0, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

por lo que $\frac{v}{d^2}$ también es solución del problema (1) en la región Ω , y por el resultado de existencia y unicidad de soluciones del problema lineal de Dirichlet (Teorema 3) se tiene $\frac{v}{d^2} = u_1 \equiv u$. Entonces

$$u_d(s, t) = d^2 u(x_1, x_2).$$

Por eso, si $\text{dfl}(D)$ es el valor absoluto del mínimo de la solución de (1) en una región arbitraria D , entonces

$$\text{dfl}(\Omega_d) = d^2 \text{dfl}(\Omega).$$

Ahora bien, para determinar la deflexión máxima es preciso hallar el mínimo absoluto. De otro lado, cualquier mínimo, según el Teorema 2, tiene que estar en el interior. Pero, ¿cuántos mínimos tiene una solución de (1)? y ¿dónde se localizan tales mínimos? Estas son preguntas difíciles. Un resultado relativamente reciente es el siguiente (ver [6], [2])

Teorema 4 (Makar-Limanov 1981). *Si Ω es un dominio convexo, y u es la solución de (1) entonces $\sqrt{-u}$ es una función cóncava.*

Nótese que la solución $-u$ de (1) no tiene porque ser cóncava. En efecto, por cálculo directo se verifica que la solución $-u_T$ en el triángulo equilátero no es cóncava. Nótese también que la concavidad de $\sqrt{-u}$ implica que existe un único punto crítico de u y que este es el punto de mínimo absoluto.

Corolario 2. *Si Ω es un dominio convexo entonces la solución u de (1) tiene un único punto crítico*

Demostración. La solución u de (1) tiene un mínimo por ser acotada inferiormente. Por el teorema 1 el mínimo tiene que estar en el interior de Ω . Es claro que el conjunto de puntos críticos de u y el de $\sqrt{-u}$ coinciden. Note finalmente que las funciones concavas tienen a lo más un punto crítico. $\square$

Para ilustrar el teorema de Makar-Limanov basta considerar los casos de en donde la región Ω es un triángulo o una elipse tratados en (2.1) y (2.2). Si Ω no es convexo no debemos esperar que $\mathbb{K}$ tenga un único elemento. El lector puede mirar el ejemplo del anillo (2.3) para convencerse.

Capítulo 3

Puntos críticos

3.1. Funciones Semi-Morse y conjuntos nodales

Si v es una función suave de valor real, el conjunto $v^{-1}(0)$ es el *conjunto nodal* de v . Si $\nabla v(x) \neq 0$ entonces x es un punto regular de v , de lo contrario es un *punto crítico* de v . Denotemos

$$N_\theta = \{x \in \overline{\Omega} : u_\theta(x) = 0\},$$

donde $\theta \in S^1$ y

$$u_\theta(x) = \nabla u(x) \cdot \theta, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Observemos que para cada $\theta \in S^1$ tenemos $\mathbb{K} \subset N_\theta$, más aun, si θ y ϕ son dos direcciones en S^1 no colineales entonces $\mathbb{K} = N_\theta \cap N_\phi$. En efecto, si $x \in N_\theta \cap N_\phi$ entonces $\nabla u(x)$ es perpendicular a θ y ϕ , luego $\nabla u(x) = 0$ y así $x \in \mathbb{K}$.

Por el teorema 3, la solución u de (1) es de clase $C^\infty(\Omega)$. Por eso, la aplicación

$$x \rightarrow JH_u(x)\theta, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

define un campo vectorial en Ω de clase a C^∞ . Note que J es la matriz de rotación $-\pi/2$.

Si $p \in N_\theta$ es un punto regular de u_θ , entonces N_θ puede ser parametrizado localmente por la solución de la EDO

$$x'(t) = JH_u(x(t))\theta, \quad x(0) = p.$$

En efecto, $\nabla u_\theta = H_u \theta$ es ortogonal a la curva de nivel N_θ . Por eso, tomando la rotación $JH_u(x(t))$ obtenemos un vector tangente a la curva N_θ . La anterior ecuación diferencial ordinaria satisface las condiciones del teorema de Picard de existencia y unicidad de problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias pues como se mencionó arriba, el campo vectorial $JH_u(x)\theta$ es de clase C^∞ .

Ahora investiguemos la estructura local de N_θ cerca de un punto crítico de u_θ . Notemos que

$$\Delta u_\theta = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Esto nos conduce al análisis del conjunto nodal de las funciones que satisfacen

$$(\Delta + h(x))v = 0, \quad h \in C^\infty. \quad (3.1)$$

Cualquier función que satisfaga (3.1) es de clase C^∞ (ver [7]) y puede ser aproximada por polinomios armónicos en el siguiente sentido:

Lema 1. *Supongamos que v es solución de (3.1) en Ω . Si en algún punto $p \in \Omega$, $D^k v(p) = 0$ para todo $0 \leq k \leq m-1$, entonces existen un número $\epsilon > 0$, un polinomio homogéneo armónico Q de grado m , y un resto R , tales que para todo $\|x - p\| < \epsilon$,*

$$v(x) = Q(x - p) + R(x - p),$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t\theta)}{Q(t\theta)} = 0,$$

para toda dirección $\theta \in S^1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p = 0 \in \Omega$. Existe $\epsilon > 0$, tal que $B(0; \epsilon) \subset \Omega$. Por el teorema de Taylor (ver por ejemplo el texto clásico de Apostol) tenemos que:

$$v(x) = v(0) + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{j!} d^j v(0; x) + \frac{1}{r!} d^r v(z; x), \quad \text{si } x \in B(0; \epsilon),$$

donde $z \in L(0, x)$ y $L(0, x)$ es el segmento de recta que une a 0 con x . Como $D^k v(0) = 0$ para $0 \leq k \leq m-1$

$$v(x) = \frac{1}{m!} d^m v(0; x) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} v(z; x),$$

donde

$$d^m v(0; x) = \sum_{i=1}^2 \cdots \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 D_{i..jk} v(0) x_i \cdots x_j x_k, \quad m \text{ sumas}$$

Luego de algunos cálculos y considerando que $\frac{\partial^m v(0)}{\partial x_1^i \partial x_2^j} = \frac{\partial^m v(0)}{\partial x_1^j \partial x_2^i}$ para todo i, j vemos que

$$d^m v(0; x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^m v(0)}{\partial x_1^k \partial x_2^{m-k}} x_1^k x_2^{m-k},$$

Para simplificar la notación escribiremos:

$$v_{x_1^i, x_2^j}(0) := \frac{\partial^m v(0)}{\partial x_1^i \partial x_2^j}, \quad \text{donde } i + j = m.$$

Entonces, definamos: para $k < m$

$$Q(s) := \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} v_{x_1^k, x_2^{m-k}}(0) s_1^k s_2^{m-k},$$

$$R(s) := d^{m+1} v(z; s).$$

De la definición vemos que Q es un polinomio homogéneo, veamos que es armónico

$$\begin{aligned} m! \Delta Q(s) &= \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} k(k-1) v_{x_1^k, x_2^{m-k}}(0) s_1^{k-2} s_2^{m-k} + \\ &\quad \binom{m}{k-2} (m-k+2)(m-k+1) v_{x_1^{k-2}, x_2^{m-k+2}}(0) s_1^{k-2} s_2^{m-k} \\ &= \sum_{k=2}^m \binom{m}{k} k(k-1) s_1^{k-2} s_2^{m-k} \left[v_{x_1^k, x_2^{m-k}}(0) + v_{x_1^{k-2}, x_2^{m-k+2}}(0) \right]. \end{aligned}$$

Recordemos que v satisface (3.1) y que $D^j v(0) = 0$ para $0 \leq j \leq m-1$; derivando $m-k$ veces (3.1) con respecto de x_2 , $k-2$ veces con respecto de x_1 y evaluando en 0, encontramos que

$$\begin{aligned} v_{x_1^k, x_2^{m-k}}(0) + v_{x_1^{k-2}, x_2^{m-k+2}}(0) &= - \left(h_{x_1^{k-2}, x_2^{m-k}}(0) v(0) + h_{x_1^{k-3}, x_2^{m-k}}(0) v_{x_1}(0) + \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots + h(0) v_{x_1^{k-2}, x_2^{m-k}}(0) \right) \\ &= 0, \quad \text{cuando } 2 \leq k \leq m. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Observemos que por medio de (3.1) se ha encontrado el valor de la suma de las derivadas de orden m , $v_{x_1^k, x_2^{m-k}}(0) + v_{x_1^{k-2}, x_2^{m-k+2}}(0)$, reduciéndolo a una expresión en términos de las derivadas de v cuyo orden es $\leq m-2$ y tal valor es conocido de la hipótesis de que $D^k v(0) = 0$ para $0 \leq k \leq m-1$.

Esto finalmente prueba que $\Delta Q = 0$, ahora el hecho de que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t\theta)}{Q(t\theta)} = 0$ es consecuencia del teorema de Taylor. $\square$

Así, podemos aproximar las líneas nodales de una función que satisface (3.1) por las líneas nodales de un polinomio armónico de grado m , para el cual su conjunto nodal es un conjunto de m líneas rectas cruzándose en el origen y formando allí un sistema equiangular de $2m$ rayos.

Lema 2. (Cheng, 1976). Sean $h \in C^\infty(\Omega)$ y v una solución no nula de (3.1), entonces

- los puntos críticos de v sobre su conjunto nodal son aislados,
- en los puntos regulares el conjunto nodal es una curva C^∞ .

Más aún en cualquier punto crítico, el conjunto nodal de v forma un sistema equiangular de al menos 4 rayos que dividen a Ω en un número finito de subregiones conexas.

Demostración. Ver [8] $\square$

Definición 2. La función u se dice Semi-Morse si $H_u(p) \neq 0$, para todo $p \in \mathbb{K}$.

Resulta claro que toda función que satisface (1) es semi-Morse. Más aún, la solución u de (1) satisface $\Delta u > 0$ sobre $\bar{\Omega}$.

Corolario 3. Si para algún $\theta \in S$, el conjunto N_θ contiene una curva de Jordan $C \subset \Omega$, entonces la subregión de Ω_C dentro de C no es simplemente conexa.

Demostración. Si Ω_C fuese simplemente convexa se tendría que $C = \partial\Omega_C$. Por tanto, como u_θ satisface la ecuación (3.1) en Ω_C y $u_\theta = 0$ sobre $\partial\Omega_C$, u_θ es idénticamente cero sobre Ω_C . Teniendo presente la analiticidad de u_θ , se concluye que $u_\theta = 0$ sobre todo el dominio Ω , esto contradice el lema de punto frontera de Hopf (teorema (2)), pues sabemos que $\Delta u > 0$. $\square$

3.2. Conjuntos críticos

Los conjuntos críticos de funciones semi-Morse han sido objeto de interés por parte de los investigadores. En [2] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 5. *Si u es la solución de (1), entonces su conjunto de crítico está compuesto de un número finito de puntos críticos aislados y un número finito de curvas de Jordan. Además, si existe una curva de Jordan contenida en el conjunto crítico, esta curva debe ser analítica y el dominio Ω no puede ser simplemente conexo.*

De nuevo los ejemplos que ilustran el teorema anterior corresponden a las soluciones del problema (1) en la elipse (2.1) en donde el número de puntos críticos es finito (en el caso de la elipse es exactamente un punto crítico). En el caso de la solución en el anillo consignada en (2.3) se tiene una curva de puntos críticos. Está claro que un anillo no es simplemente conexo.

Capítulo 4

Métodos de la variable compleja

En este capítulo estudiaremos las soluciones de la ecuación de Poisson (1) utilizando métodos de la variable compleja. Resulta claro que todo subconjunto del plano puede verse de manera natural como un subconjunto del plano complejo $\mathbb{C}$. El punto de partida será la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} h : \Omega \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, \theta) &\longmapsto \overline{H_u(x_1, x_2)} \theta, \end{aligned}$$

donde la barra indica la operación de conjugación, $z = x_1 + i x_2$, $\theta \in S^1$ y $H_u(x_1, x_2)$ en la matriz Hessiana, evaluada en (x_1, x_2) , de la solución u del problema (1). Un cálculo sencillo muestra que

$$h(z, \theta) = (u_{x_1 x_1} \theta_1 + u_{x_1 x_2} \theta_2) - i(u_{x_2 x_1} \theta_1 + u_{x_2 x_2} \theta_2)$$

Nótese que como $u \in C^\infty$ se tiene que $u_{x_1 x_2} = u_{x_2 x_1}$. Como

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 1,$$

derivando con respecto a las variables x_1 y x_2 respectivamente se obtiene

$$\begin{aligned} u_{x_1 x_1 x_1} + u_{x_1 x_2 x_2} &= 0 \\ u_{x_1 x_1 x_2} + u_{x_2 x_2 x_2} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lema 3. *Para cada $\theta \in S^1$ la aplicación:*

$$z = x_1 + i x_2 \in \Omega \subset \mathbb{C} \longmapsto h(z, \theta)$$

es analítica en Ω .

Demostración. Basta comprobar que $h(\cdot, \theta)$ cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en Ω . Para ellos denotamos con M y N respectivamente a las partes reales e imaginarias de $h(\cdot, \theta)$. Es decir,

$$M = u_{x_1 x_1} \theta_1 + u_{x_1 x_2} \theta_2, \quad N = -u_{x_1 x_2} \theta_1 - u_{x_2 x_2} \theta_2.$$

Probaremos que

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial N}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial x_2} = -\frac{\partial N}{\partial x_1}.$$

De un lado

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = u_{x_1 x_1 x_1} \theta_1 + u_{x_1 x_1 x_2} \theta_2.$$

De otro lado

$$\frac{\partial N}{\partial x_2} = -u_{x_1 x_2 x_2} \theta_1 - u_{x_2 x_2 x_2} \theta_2,$$

Debido a (4.1) se sigue inmediatamente que $\frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial N}{\partial x_2}$. La demostración de que $\frac{\partial M}{\partial x_2} = -\frac{\partial N}{\partial x_1}$ es completamente análoga. $\square$

Lema 4. *Sea u la solución de (1). Entonces en cualquier subconjunto compacto de Ω la aplicación $u_{x_1 x_2}$ tiene un número finito de puntos críticos o es un polinomio cuadrático en x_1 y x_2 . Si el borde $\partial\Omega$ es analítico (en el sentido en que se puede parametrizar localmente por curvas analíticas) entonces la misma conclusión es válida en todo Ω .*

Demostración. Sea D un subconjunto compacto de Ω con interior no vacío y definamos la función de variable compleja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$f(z) = u_{x_1 x_2 x_2}(z) + i u_{x_1 x_1 x_2}(z), \quad z = x_1 + i x_2, \quad (x_1, x_2) \in D.$$

Como u es solución de (1), se tiene el sistema de ecuaciones en derivadas parciales dado en 4.1. Escribimos las partes reales e imaginarias de f :

$$M = u_{x_1 x_2 x_2}, \quad N = u_{x_1 x_1 x_2}.$$

Por simple inspección vemos que $\frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial N}{\partial x_2}$. Ahora bien, derivando parcialmente (4.1) con respecto las variables x_1 y x_2 tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial x_2} = u_{x_1 x_2 x_2 x_2} = -u_{x_1 x_1 x_1 x_2} = -\frac{\partial N}{\partial x_1}.$$

En consecuencia f es analítica en D . Así, f es la función nula en D ó tiene un número finito de ceros en D . Ahora observe que la parte real e imaginaria de f son precisamente las componentes del gradiente de $u_{x_1x_2}$.

Si f es la función nula, tenemos la ecuación en derivadas parciales para alguna constante real c :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = c \quad \text{en } D.$$

En tal caso debe tenerse para algún par de funciones derivables ϕ_1 y ϕ_2 que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = c x_2 + \phi_1(x_1), \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = c x_1 + \phi_2(x_2).$$

Como $\Delta u = 1$, entonces $\phi_1'(x_1) + \phi_2'(x_2) = 1$ para todo x_1 y x_2 tal que $(x_1, x_2) \in \Omega$. Por eso, tanto ϕ_1' como ϕ_2' tienen que ser constantes, digamos a_1 y a_2 respectivamente.

En principio, los puntos críticos de $u_{x_1x_2}$ podrían acumularse en un punto del borde. No obstante, si el borde $\partial\Omega$ es analítico, entonces u admite una extensión analítica en un abierto que contiene a Ω (ver [7]). $\square$

Finalmente estamos en posición de enunciar y demostrar el resultado más importante de este trabajo de investigación. Mediante un cálculo directo obtenemos

$$\frac{h(z, \theta)}{h(z, J\theta)} = \frac{H_u(x_1, x_2) \theta \cdot J\theta - i \det H_u(x)}{|h(z, J\theta)|^2}, \quad (4.2)$$

en donde J es la matriz de rotación $-\frac{\pi}{2}$ y $\cdot$ indica el producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Nótese que la función

$$d(x) := \det H_u(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.3)$$

no es armónica ni satisface ecuación parcial alguna del tipo (3.1). No obstante, su conjunto nodal tiene las mismas características de los conjuntos nodales de las funciones armónicas. De manera más precisa (compárese con el resultado de Cheng consignado en el lema 2) tenemos:

Teorema 6. *Sean D un subconjunto compacto de Ω con interior no vacío y d la función determinante definida en (4.3) y restringida al dominio D . Entonces*

- *los puntos críticos de d sobre su conjunto nodal son aislados,*

- en los puntos regulares el conjunto nodal es una curva C^∞ .

Más aún en cualquier punto crítico, el conjunto nodal de d forma un sistema equiangular de al menos 4 rayos que dividen a D en un número finito de subregiones conexas. Las conclusiones siguen siendo ciertas con $D = \Omega$ si el borde $\partial\Omega$ es analítico.

Demostración. Primero escribimos

$$N := \{(z, \theta) \in \Omega \times S^1 : h(z, \theta) = 0\}. \quad (4.4)$$

De la definición de h resulta claro que $h(z, \theta) = 0$ si y sólo si $H_u(x_1, x_2) \theta = 0$ con $z = x_1 + ix_2$, lo que a su vez es equivalente con $d(x_1, x_2) = 0$. Por eso, la proyección de N sobre D coincide con el conjunto nodal de d . En los puntos $z = x_1 + ix_2$, con $(x_1, x_2) \in D$, tales que $\frac{\partial h}{\partial z}(z, \theta)$ es no nula (derivada en el sentido de la variable compleja), de acuerdo con el teorema de la función implícita, podemos parametrizar localmente el conjunto nodal N mediante una curva $(z(\theta), \theta)$ de clase C^∞ con

$$z : S^1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{tal que} \quad h(z(\theta), \theta) = 0.$$

Diremos que un punto $z = x_1 + ix_2$, con $(x_1, x_2) \in D$ es punto de bifurcación del conjunto nodal de d si para algún $\theta \in S^1$ se tiene $\frac{\partial h}{\partial z}(z, \theta) = 0$. Ocurre que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial z}(z, \theta) \right|^2 = |\nabla u_{x_1 x_2}|^2.$$

Por el Lema 4 tenemos que existe a lo más un número finito de puntos de bifurcación del conjunto nodal de d . De otro lado, los puntos de bifurcación coinciden con los puntos críticos de d .

Finalmente veremos que ocurre en el conjunto nodal de d en los puntos de bifurcación. Si x^* está en el conjunto nodal de d , entonces para algún θ se tiene $h(z^*, \theta) = 0$, siendo z^* la versión compleja de x^* . Ahora bien, $h(z^*, J\theta) \neq 0$, pues de lo contrario la matriz Hessiana de u sería nula lo que llevaría a una contradicción (recordar que $\Delta u = 1$). De la fórmula (4.2) vemos que localmente, d es el producto de una función suave estrictamente positiva por una función armónica (la parte imaginaria de una función analítica). Como el Teorema de Cheng vale para funciones armónicas, en los puntos de bifurcación, el conjunto nodal de una función armónica forma un sistema equiangular de al menos 4 rayos, lo que concluye la demostración. $\square$

Finalmente consideraremos algunos ejemplos. El conjunto nodal de d puede ser vacío como el caso de la solución de (1) en una elipse (ver ecuación (2.1).) En el caso del anillo el conjunto nodal de d coincide con la circunferencia de puntos como fácilmente se puede comprobar en la ecuación (2.3). Si se trata de la solución en el triángulo equilátero dada en (2.2) el conjunto nodal de d es la circunferencia inscrita en el triángulo.

El siguiente ejemplo muestra que el conjunto nodal de d puede bifurcarse. Se trata de una elaboración del ejemplo que presentó Jairo Andrés Delgado Ospina en su Trabajo de Grado. Considere la función

$$v(x_1, x_2) := x_1^4 - x_1^3 x_2 - 18x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 + 3x_2^4 + x_2^2 - \frac{8}{1000}.$$

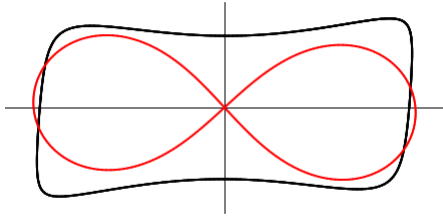


Figura 4.1: El borde $\partial\Omega$ en negro, el conjunto nodal de d en rojo

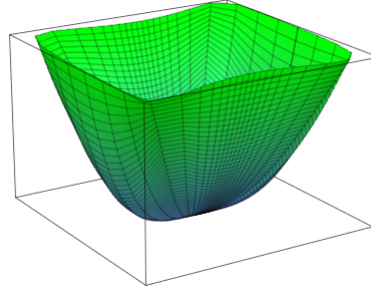


Figura 4.2: La deflexión de v

Un cálculo elemental muestra que $\Delta v = 1$ en todo el plano. La región Ω se define como la componente conexa que contiene al origen del conjunto

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : v(x_1, x_2) < 0\}.$$

Se muestra que el borde $\partial\Omega$ es una curva analítica implícitamente definida por $v(x_1, x_2) = 0$. Más aún, v tiene en Ω un único punto crítico que es precisamente el origen. Un poco de cálculo muestra que

$$d(x_1, x_2) = -1305x_1^4 - 2610x_1^2 x_2^2 + 72x_1^2 - 12x_1 x_2 - 1305x_2^4 - 72x_2^2$$

La figura 4.1 muestra el conjunto Ω con borde en negro, el conjunto nodal de d en rojo. Como puede apreciarse, el conjunto nodal $d(x_1, x_2) = 0$, se bifurca en el origen exactamente como lo afirma el teorema 6. La deflexión v se muestra en la figura 4.2.

Bibliografía

- [1] ARANGO, J. Uniqueness of critical points for semi-linear elliptic problems in convex domains. *EJDE* 43 (2005), 1–5.
- [2] ARANGO, J., AND GÓMEZ, A. Critical points of solutions to elliptic problems in planar domains. *Commun. Pure Appl. Anal.* 10, 1 (2011), 327–338.
- [3] CABRÉ, X., AND CHANILLO, S. Stable solutions of semilinear elliptic problems in convex domains. *Sel. Math., New ser.* 4, 1 (2005), 1–10.
- [4] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [5] LEBEDEV, L., AND CLOUD, M. *Introduction to mathematical elasticity*. World Scientific, Singapore, 2009.
- [6] MAKAR-LIMANOV, L. Solutions for the dirichlet’s problem for the equation $\Delta u = -1$ in a convex region. *Math. Notes Acad. Sci. USSR.* 9 (1971), 52–53.
- [7] MUELLER, F. On the continuations of solutions for elliptic equations in two dimensions. *Ann. I. H. Poincaré* 19, 6 (2002), 745–776.
- [8] Y., C. S. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helvetici* 51 (1976), 43–55.