

Análisis de la articulación entre la propuesta pedagógica de algunos textos escolares de matemáticas para el grado quinto de la Educación Básica, alrededor de la resolución de problemas aritméticos con estructuras multiplicativas y las Pruebas Saber en Colombia

LUZ ÁNGELA LASSO HERNÁNDEZ

EUCARIS VARGAS VALENCIA

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

2016



Análisis de la articulación entre la propuesta pedagógica de algunos textos escolares de matemáticas para el grado quinto de la Educación Básica, alrededor de la resolución de problemas aritméticos con estructuras multiplicativas y las Pruebas Saber en Colombia

EUCARIS VARGAS VALENCIA Código 200940293

LUZ ÁNGELA LASSO HERNÁNDEZ Código 200642131

Directora

Lic: Ángela María Gómez Vela

Trabajo de grado para optar por el título de
Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Santiago de Cali

2016

AGRADECIMIENTO

Damos las gracias a nuestra Directora por su voluntad y colaboración en el desarrollo de este trabajo.
También agradecemos a todos nuestros profesores en el transcurso de la carrera, especialmente a aquellos que con sus sabios consejos nos brindaron su apoyo y conocimiento para continuar en nuestra ardua labor de docentes.

A mi Padre Celestial por guiarme y fortalecerme en los momentos de desaliento.
A mi madre por su compañía y palabras de aliento y a todos aquellos que fueron participes en este proceso. Mil gracias.

Luz Ángela Lasso H.

A Dios, por guiarme y fortalecerme en todos los momentos de mi vida y en especial en los que sentía desfallecer.

A mí esposo José Leonel, a mis hijos Cristhian, Gloria Yubeli y Nicol Valeria, por brindarme su amor y apoyo incondicional en todos los momentos difíciles, a todas las personas que de alguna manera estuvieron presentes y aportaron un granito de arena en esta etapa de mi vida.

Eucaris Vargas Valencia

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

Universidad del Valle

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico: Lic. en educación básica con énfasis en matemática

Fecha

Día	Mes	Año
	09	2016

Código del programa: 3469 Resolución del programa: _____

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

Análisis de la articulación entre la propuesta pedagógica de algunos textos escolares de matemáticas para el grado quinto de la Educación Básica, y el desempeño de la resolución de problemas aritméticos con estructuras multiplicativas y las Pruebas Saber en Colombia.

Proyecto ☐ Informe Final ☒

Director

Angela María Gómez Vela

Nombre del Primer Evaluador

María Teresa Narváez

Nombre del Segundo Evaluador

Wildebrando Miranda

Estudiantes

Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Liz Angela Lozano	2006421 31 - 3469	lizascherhernandez@yahoo.com		316-8457535
Eucaris Vargas	2009402 93 - 3469	eucaris1407@hotmail.es		310-4292100

Evaluación

Aprobado	☒	Meritorio	☐	Laureado	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐	Incompleto	☐

En el caso de ser ***Aprobado con recomendaciones*** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de* _____ *(máximo un mes)* ***ante:***

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere ***Incompleto*** *(diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de* _____ *semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el:* _____ _____ _____

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la ***razón del desacuerdo*** *y las* ***alternativas*** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas

Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador
	María Teresa Narváez	Wildebrando Miranda

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 11

CAPITULO I 13

1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL TRABAJO 13

1.1 Planteamiento del Problema 13

1.2 Justificación 19

1.3 OBJETIVOS 25

1.3.1 Objetivo General 25

1.3.2 Objetivos Específicos 25

1.4 Diseño Metodológico 25

1.5 Fundamentación Teórica 27

Antecedentes 27

1.5.1 Antecedente 1 28

1.5.2 Antecedente 2 30

1.5.3 Antecedente 3 31

1.5.4 Marco Teórico 32

1.5.4.1 Algunos referentes Históricos del concepto de la multiplicación (producto) y división (cociente) .. 33

1.5.4.2 Algunos referentes Matemáticos de las estructuras multiplicativas. 44

1.5.4.3 Algunos referentes Curriculares de la multiplicación (producto) y la división (cociente). 57

1.5.4.4 Algunos referentes Didácticos de la multiplicación (producto) y la división (cociente) 63

1.5.4.4.1 Clasificación de las estructuras multiplicativas Vergnaud (1991) 66

1.5.4.4.2 Caracterización de los errores en los algoritmos de la multiplicación y división según Maza (1991) en los problemas de tipo multiplicativo 70

CAPÍTULO II 84

2. PRESENTACIÓN DE LOS TEXTOS Y REJILLA DE ANÁLISIS 84

2.1 Presentación de la rejilla de análisis, propuesta para el contraste entre los textos escolares de matemática de grado 5° y las preguntas seleccionadas en la Prueba Saber 5° de los años 2012 y 2013 84

2.1.1 Metodología del análisis 84

2.1.2 Presentación general de los textos y los criterios para su selección 86

2.1.2.1 Texto Escolar 1: Navegantes Matemáticas 5, editorial Norma (2011) 88

2.1.2.2 Texto Escolar 2 Estrategias en Matemáticas 5, editorial Libros & Libros (2009) 119

2.1.3 Presentación general de las Pruebas Saber y los criterios para su selección 139

2.1.3.1 Cuadernillo 1 Pruebas Saber 5 año 2012 144

2.1.3.2 Cuadernillo 27 Pruebas Saber 5 año 2013-1 154

CAPÍTULO III 161

3. ANÁLISIS DE REJILLAS Y CONCLUSIONES 161

3.1 Presentación de los criterios y construcción de las Rejillas de Análisis 161

3.1.1 Identificación y observación a través de la rejilla de análisis en los textos escolares. 162

3.1.2 Identificación y observación a través de la rejilla de análisis las preguntas de las Pruebas Saber seleccionadas 163

3.1.3 Identificación y observación a través de la rejilla de análisis el contraste entre la propuesta de los

textos escolares y las preguntas de las Pruebas Saber seleccionadas. 171

3.2 Conclusiones del análisis 172

CAPÍTULO IV 176

4. CONCLUSIONES FINALES Y RECOMENDACIONES 176

4.1 Conclusiones 176

4.1.1 Recomendaciones. 178

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 180

ÍNDICE DE FÍGURAS

Figura 1. Informe resultado nacional Icfes 2009-2014 matemáticas 5° 17
Figura 2. Multiplicación en los babilonios 35
Figura 3 Multiplicación en los egipcios 36
Figura 4 Multiplicación en los chinos 38
Figura 5 Ilustración multiplicación en los chinos 39
Figura 6 Multiplicación en los árabes 40
Figura 7. Método de Celosía, Maza (1991) 42
Figura 8. Método de "galera", Maza (1991) 44
Figura 9. Multiplicación Vergnaud (1991) 45
Figura 10. Multiplicación horizontal 46
Figura 11. Multiplicación Vertical 47
Figura 12. Definición ilustrativa: Términos de la multiplicación 49
Figura 13. Ilustración de la propiedad fundamental de la división exacta 55
Figura 14. Relación cuaternaria – proporción simple 66
Figura 15. Problemas típicos de multiplicación 68
Figura 16. Formas de aplicación regla de tres simple directa 68
Figura 19. Errores de las llevadas en la multiplicación 74
Figura 20. Errores en la multiplicación a partir de las decenas del multiplicando 74
Figura 21. Errores en la omisión de las llevadas en la multiplicación 75
Figura 22. Portada del texto No 1 89
Figura 23. Contenido unidad 1 91
Figura 24. Presentación Unidad 1 92
Figura 25. Lección 4 Producto Cartesiano 93
Figura 26. Definición Producto Cartesiano 94
Figura 28. Contenido unidad 2 95
Figura 29. Presentación unidad 2 96
Figura 30. Lección 10 Multiplicación y división de números naturales 97
Figura 31. Algoritmo de la Multiplicación y la División 98
Figura 32. Problemas 1, 2 y 3, resolución de problemas unidad 2 98
Figura 33. Propiedades de la Multiplicación 100
Figura 34. Problema 4, resolución de problemas lección 11 100
Figura 35. Contenido unidad 4 101
Figura 36. Presentación unidad 4 102
Figura 37. Lección 30 Área lateral y total de algunos sólidos 103
Figura 38. Problema 5. Resolución de problemas lección 30 104
Figura 39. Lección 31 Volumen de prisma 105
Figura 40. Problemas 6 y 7, resolución de problemas lección 31 106
Figura 41. Contenido de la unidad 7 107
Figura 42. Presentación unidad 7 108
Figura 43. Lección 52 Proporciones 109
Figura 44. Problemas 8, 9, 10 y 11, resolución de problemas lección 52 110
Figura 45. Definición de magnitudes directamente e inversamente correlacionadas, lección 53 111
Figura 46 Lección 54 Magnitudes directamente proporcionales 111
Figura 47. Problemas 12, 13, 14, sección de resolución de problemas, lección 54 112
Figura 48 . Lección 55 Regla de tres simple directa 114
Figura 49. Problema 15, sección resolución de problemas lección 55 115
Figura 50. Lección 56, Magnitudes inversamente proporcionales 116
Figura 51. Lección 57, Regla de tres simple inversa 117
Figura 52. Problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21 resolución de problemas, lección 57 118
Figura 52. Problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21 resolución de problemas, lección 57 118
Figura 53. Portada del texto: Estrategias en Matemáticas 120

Figura 54. Fragmento de la tabla de contenido de la unidad n° 1 del texto 2 122
Figura 55. Concepto de multiplicación 123
Figura56. Propiedades de la multiplicación 124
Figura 57. Definición de división 124
Figura 58. División exacta o inexacta 125
Figura 59. Problema 22, situación problemas división 126
Figura 60. Problema 23 sección Situación problema 127
Figura 61. Problema 24 y 25, sección problemas de división 128
Figura 62. Contenido de la unidad 2 128
Figura 63. Fragmento de la unidad 129
Figura 64. Contextualización del concepto de área 129
Figura 65, Ejemplo de situación problema con áreas 130
Figura 66. Problema 26. 130
F*igura 67. Problema 27 Ilustraciones* 131
Figura 68. Fragmento de la unidad 3 132
Figura 69. Concepto de Volumen 132
Figura 70. Problema 28, Determinar el Volumen 133
Figura 71. Contenido de la unidad 4 133
Figura 72. Definición de proporción 134
Figura 73. Problema 29,30 135
Figura 74. Fragmento de la unidad 4 136
Figura 75. Contextualización de magnitudes directamente proporcionales 137
Figura76. Magnitudes directamente proporcionales 137
Figura 77. Resolución de problemas 138
Figura 78. Estructura del diseño de las pruebas 139
Figura 79. Distribución porcentual de las preguntas de la prueba de matemáticas5° 143
Figura 80. Pregunta 1 144
Figura 81. Pregunta 2 145
Figura 82. Pregunta 3 146
Figura 83. Pregunta 4 y 5 147
Figura 84. Pregunta 6 149
Figura 85. Pregunta 7 150
Figura 86. Pregunta 8 151
Figura 87. Pregunta 9 152
Figura 88. Pregunta 10 153
Figura 89. Pregunta 11 154
Figura 90. Pregunta 12 155
Figura 91. Pregunta 13 155
Figura 92. Pregunta 14 156
Figura 93. Pregunta 15 157
Figura 94. Pregunta 16 157
Figura 95. Pregunta 17 158
Figura 96. Pregunta18 159
Figura 97. Pregunta 19 159
Figura 98. Pregunta 20 160

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Estándares y pensamientos al finalizar grado 5 62
Tabla 2. Bosquejo de rejilla contraste entre preguntas Pruebas Saber y textos escolares 86
Tabla 3. Información del texto escolar 1 88
Tabla 4. Organización de las unidades texto 1 90
Tabla 5 Información del texto escolar 2 119
Tabla 6 Organización de las unidades texto 2 121
Tabla 7 Rejilla 1 de análisis de textos 162
Tabla 8 Rejilla 2, análisis de las preguntas Pruebas Saber 5 163
Tabla 9 Preguntas de los problemas texto 1 164
Tabla 10 Preguntas de los problemas texto 2 166
Tabla 11 Aplicación rejilla 1 de análisis, problemas textos escolares 168
Tabla 12 Preguntas seleccionadas y analizadas Pruebas Saber 5° año 2012 168
Tabla 13 Preguntas seleccionadas y analizadas Pruebas Saber 5°año 2013 169
Tabla 14 Aplicación rejilla 2, preguntas Pruebas Saber 5° 171
Tabla 15 Rejilla 3, contraste entre problemas textos escolares y preguntas Pruebas Saber 5° 172

RESUMEN

En el siguiente trabajo de carácter exploratorio se realizó el análisis de algunos textos escolares de matemáticas con el fin de indagar sobre la articulación entre la propuesta pedagógica de los textos en mención y lo evaluado por las Pruebas Saber grado 5, en cuanto al objeto matemático las estructuras multiplicativas alrededor de la resolución de problemas. Para tal propósito, se buscó reconocer el tratamiento que cada texto escolar le da a este objeto de estudio, el análisis se efectuó teniendo en cuenta dos textos escolares de matemáticas para el grado quinto (5°) de la Educación Básica, que han estado en el comercio durante los años 2008 y 2012, y algunas preguntas aplicadas por las Pruebas Saber 5°, en los años 2012 y 2013. Como herramienta de análisis se erigió la búsqueda de una aproximación a la teoría de las estructuras multiplicativas de Gerard Vergnaud (1991) y los posibles errores en los algoritmos de la multiplicación y la división de Carlos Maza (1991). En este trabajo de grado se logró dar cuenta de la mínima coherencia que hay entre lo que proponen los textos escolares analizados y lo que evalúa las Pruebas Saber en los años referenciados para el grado 5°de la Educación Básica.

Palabras claves
Estructuras multiplicativa, libros de texto, Pruebas Saber, resolución de problemas.

INTRODUCCIÓN

A partir de la década de los sesenta, surge una preocupación creciente por incorporar la resolución de problemas en el currículo de las matemáticas escolares y un esfuerzo por sustentar las innovaciones curriculares sobre trabajos de investigación educativa, Castro E, (2008). Esto con el propósito de generar nuevas estructuras conceptuales, que generen de alguna manera respuestas a los cuestionamientos realizados por la comunidad educativa.

La mirada que se presenta en este proyecto se enfoca en la estructura multiplicativa alrededor de la resolución de problemas, aunque este concepto se aborda desde una temprana edad en el grado tercero de la básica primaria, al finalizar el grado quinto los estudiantes demuestran debilidades, al parecer en la comprensión de esta concepción en situaciones problema dentro de un contexto cotidiano que tenga utilidad.

En ese sentido este trabajo está inmerso en la línea de Didáctica de las Matemáticas, y tiene como propósito analizar la articulación entre la propuesta pedagógica de algunos textos escolares de Matemáticas para el grado quinto de la Educación Básica, alrededor de la resolución de problemas con estructura multiplicativa y las Pruebas Saber en Colombia; para lograr encontrar las posibles dificultades u obstáculos asociados en los textos escolares, que permitan reflexionar sobre la coherencia entre algunos elementos que se están proponiendo y lo que se está evaluando por parte de las Pruebas Saber, que conlleve a mejorar las experiencias educativas.

De acuerdo a lo anterior la tarea del docente está sujeta a reconocer la importancia de la construcción del objeto matemático como es el de la estructura multiplicativa, además de la aplicación en la resolución de problemas y así mismo poder establecer criterios de selección de los libros de texto que utilizará en el aula de clase, para facilitar la comprensión y adquisición de saberes epistemológicos.

De esta manera el trabajo se divide en tres (3) capítulos, en el primero se presentan aspectos relacionados con la contextualización de la problemática, objetivos y justificación, además la fundamentación teórica desde la perspectiva histórica, matemática, curricular y didáctica de la estructura multiplicativa en resolución de problemas. En el capítulo dos (2), se presenta el diseño de la metodología de análisis, los aspectos relacionados con la selección y análisis de textos escolares para el grado quinto, la caracterización del concepto de estructura multiplicativa y sus conexiones con la resolución de problemas en los textos seleccionados, además la selección y análisis de algunas preguntas de las Pruebas Saber 5° 2012-2013; posteriormente se realiza la adaptación de la rejilla de análisis. En el capítulo tres (3), se exponen la aplicación de las rejillas dando cuenta de la posible articulación entre la propuesta pedagógica de los textos seleccionados en resolución de problemas con estructura multiplicativa y lo evaluado en algunas preguntas de las Pruebas Saber 5°, 2012-2013.

CAPITULO I

1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL TRABAJO

1.1 Planteamiento del Problema

En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 1998), de manera que la resolución de problemas, estimule a los estudiantes a abordar situaciones nuevas, responder a cuestiones para las que no conocen una respuesta mecánica, elaborar estrategias de pensamiento, plantearse preguntas, aplicar sus conocimientos y destrezas a otras situaciones. Para ampliar esta idea, Schoenfeld, (citado por Vila y Callejo, 2005) indican que "un problema es una herramienta para pensar matemáticamente". Además para Vila y Callejo (2005) la resolución de problemas es interpretada como ambiente y naturaleza de actividades de aprendizaje, es decir, la resolución de estas situaciones permiten crear espacios para pensar, analizar y construir aprendizajes significativos.

En el proceso de resolución de problemas, los estudiantes se encuentran ante diversas dificultades al interpretar y representar un problema utilizando las operaciones básicas, (adición, sustracción, multiplicación y división en el conjunto de los números naturales), en particular, esto sucede cuando se trabaja una situación que involucra el concepto de las estructuras multiplicativas, definida por Vergnaud (citado por Castro, Rico & Rico 1995 p.54) así:

> Una estructura multiplicativa como un conjunto de situaciones problema cuya resolución requiere la multiplicación o la división y las clasifica en tres categorías: proporción simple, producto de medidas, y proporción múltiple.

Además en otros trabajos Vergnaud (1991), define la estructura multiplicativa como un campo conceptual de la siguiente manera:

> Campo conceptual como, en primer lugar, un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos de naturaleza distinta. Por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas consiste en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. Varios tipos de conceptos matemáticos están involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y en el pensamiento necesario para dominar tales situaciones. Entre tales conceptos están el de función lineal, función no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional, multiplicación y división (p 146)

Dada la complejidad del concepto de estructura multiplicativa, en el aula se presentan algunas dificultades para representar, formular y resolver problemas, se evidencian por ejemplo: Por un lado cuando los estudiantes interpretan de forma inadecuada una situación, observándose poca comprensión en la misma, es decir, confundiendo conceptos y algoritmos lo cual conlleva a soluciones equívocas, a su vez si el alumno logra algunas veces representar la situación con una expresión matemática, utiliza poco las propiedades de las operaciones que contribuyan a soluciones propicias; además se evidencia que la multiplicación sólo es vista como una repetición de sumandos y que se aplica en algunas situaciones problema si en estas existen palabras asociadas como suma de sumandos y que lo traduzca a producto, olvidando que la estructura multiplicativa posee varios tipos o clases de representación. Las dificultades mencionadas se evidencian particularmente en problemas que requieren la aplicación de las estructuras multiplicativas, dado que recopilan implícitamente las cuatro operaciones básicas de la aritmética. A su vez, Castro y otros (1995) aportan que el manejo de la “estructura multiplicativa exige al estudiante tener un nivel de uso y dominio de los números naturales, conocer su simbolización, todo ello en un grado más completo que en el campo de la suma y la resta”,

teniendo en cuenta que la adición y la sustracción se estudian con simultaneidad a la adquisición del concepto de número. El producto y la división son operaciones que necesitan un dominio previo de los números y de su simbolización, debido al propio concepto de cada operación.

Igualmente, las dificultades que se presentan en la enseñanza de la multiplicación y la división están inmersas en el propio concepto de cada operación, por ejemplo:

> Multiplicar es reiterar una cantidad en su nivel más intuitivo, los dos términos del producto responden a contextos diferentes, uno de ellos es la cantidad que se repite denominado multiplicando, el cual es un número cardinal concreto con objetos que se ven, el otro factor nos dice las veces que se repite la cantidad inicial y se llama multiplicador que es una especie de cardinal de segundo orden o cardinal de cardinales, mucho más abstracto que el anterior, y por eso mismo se debe simbolizar de inmediato. Castro et al. (1995 p.45).

Otra dificultad, que requiere el análisis de los elementos básicos de la multiplicación, se observa en la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación en relación con la adición, debido a que el multiplicador es el que está descompuesto aditivamente y no el multiplicando, tal propiedad es necesaria desde que se introduce la multiplicación. Dado que se conoce el concepto de la descomposición de un número y por ende el multiplicando debe ser común a aquellos números que al componerlos son el multiplicador.

En la estructura multiplicativa, las situaciones que requieren el uso de la división presentan un obstáculo adicional, debido a que el resultado de la división denominado cociente no siempre es un número natural y el residuo puede ser interpretado inadecuadamente por parte de los estudiantes, sin determinar qué es lo que significa, por otro lado, la dificultad en la división aparece en la mecanización del algoritmo y en el que se requiere trabajar previamente o simultáneamente conceptos como: fracción, razón y número racional, por ello, es indispensable la comprensión de este algoritmo más que en la repetición de ese proceso.

Actualmente, la escuela colombiana presenta continuamente evaluaciones externas, unas desde el ámbito internacional y otras en el contexto nacional. En particular el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación Superior (ICFES), tiene como objetivo[1] "Contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana mediante la realización de evaluaciones periódicas del desarrollo de competencias de los estudiantes de Educación Básica" y para llevar a cabo este propósito realiza la Evaluación de la Calidad de la Educación Básica denominada Prueba Saber, la cual es aplicada a estudiantes de los grados tercero, quinto, noveno y once respectivamente; se evalúan distintas áreas del conocimiento entre las que se encuentran las Matemáticas. Los estándares de esta área reconocen que las matemáticas son mucho más que un sistema teórico, ya que en sí mismas constituyen una importante herramienta práctica para enfrentar y comprender diferentes situaciones. Por esa razón, la educación en el área debe conceder un gran valor a la formación de los conceptos, pero sobre todo de las destrezas necesarias para la resolución de problemas en diferentes contextos, y para comunicarse por medio del lenguaje matemático.

En los últimos años los resultados han sido poco favorables en esta asignatura, uno de los componentes evaluados a estudiantes del grado quinto es la resolución de problemas y algunas de las preguntas requieren el manejo de las estructuras multiplicativas, este concepto es orientado en los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 1998) como: conteos combinatorios, adición repetida, factor multiplicante, razón y producto cartesiano, el cual permite conocer el nivel de razonamiento en los diferentes sentidos y significados del producto. Una de las conclusiones del bajo desempeño da cuenta de la poca interpretación y comprensión de los estudiantes al resolver algunos problemas en situaciones que involucren los anteriores ejes

1 Este objetivo se puede encontrar en la página web oficial del ICFES cuya URL se indica a continuación: http://www.icfes.gov.co/examenenes/pruebas-saber/objetivo

temáticos, para garantizar esta información, en el informe nacional Saber 3°, 5° y 9° 2009-2014, resultados nacionales, el ICFES publica en julio del 2016 un análisis donde expone los resultados obtenidos en el periodo entre 2009-2014, los cuales se muestran en la figura 1

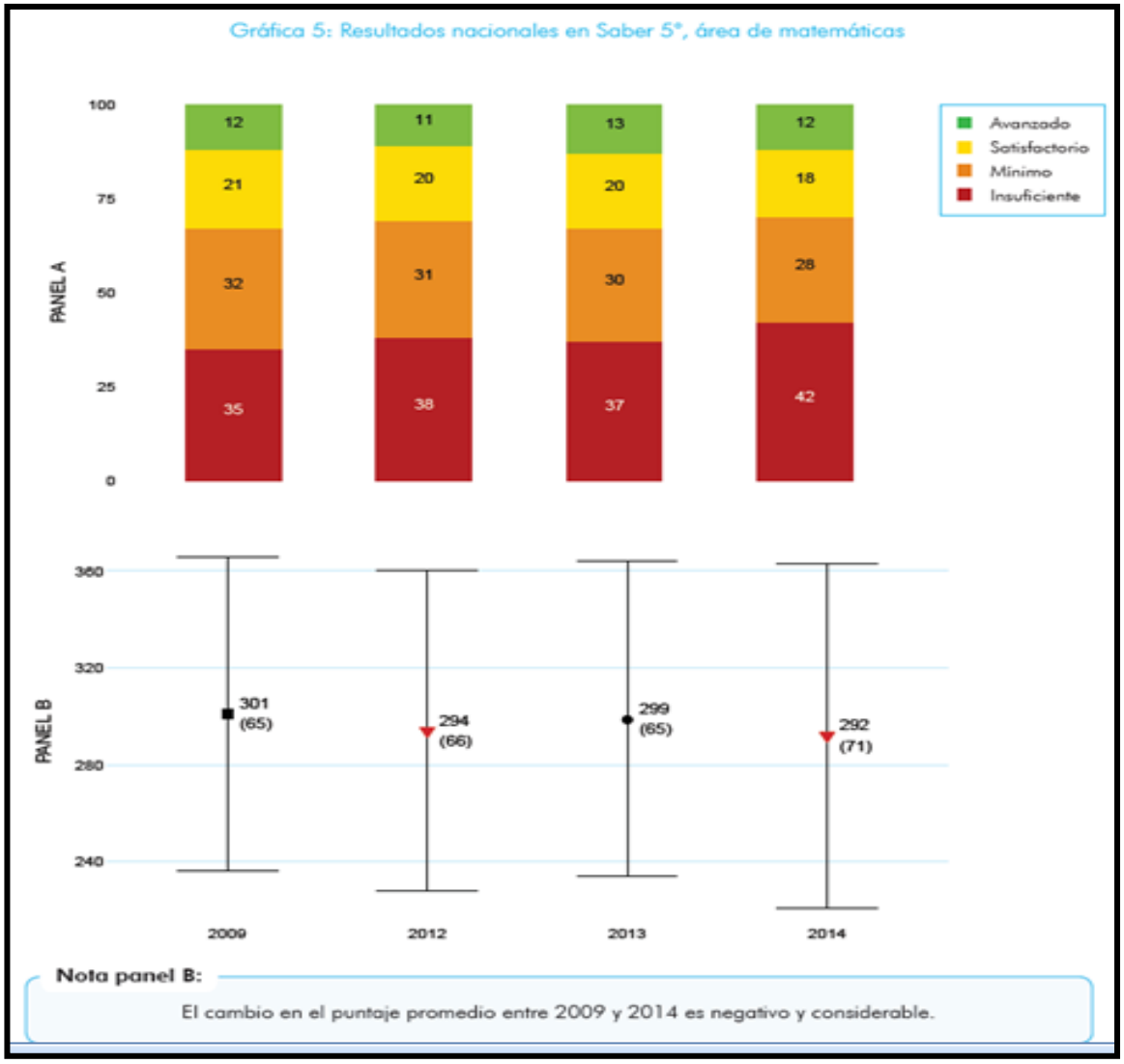


Figura 1. Informe resultado nacional Icfes 2009-2014 matemáticas 5°

Informe del resultado nacional, análisis realizado por el ICFES entre 2009-2014, en el área de matemáticas para el grado 5.

La interpretación del grafico expuesto en la figura 1, indica según el ICFES que de cada 100 estudiantes a los que se le aplicó las Pruebas Saber en los años 2012 y 2013, el 38% y el 37%

respectivamente de los estudiantes evaluados presentaron insuficiencia, el 31% y el 30% de los estudiantes mínimo, sólo el 20% en ambos años, los estudiantes fue satisfactorio y un 11% y 13% únicamente avanzado. Así mismo el ICFES aclara en su análisis lo siguiente:

> Las gráficas indican que los puntajes promedio de los estudiantes, en el periodo analizado, han disminuido, en el grado quinto, la disminución en el puntaje promedio es igual a 3,0%. Esta variación está relacionada, principalmente, con un aumento en el porcentaje de estudiantes en el nivel de desempeño insuficiente. (p, 22)

A partir de lo anterior, se deduce que es necesaria una adecuada conceptualización de los elementos invariantes de la estructura multiplicativa y además en su aplicación para la resolución de problemas, por lo tanto, una manera de contribuir en este campo requiere buscar alternativas didácticas, por ejemplo la selección de textos escolares y materiales didácticos, los cuales son determinantes como herramientas próximas de los docentes y estudiantes. Ante esto Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1998) indican que:

> En buena parte de los colegios el texto de la asignatura es la única fuente de ejercicios para realizar en clase, ya sea en el tablero o en trabajo individual, y la única fuente de tareas escolares para hacer en casa. Si acaso el profesor asigna otros ejercicios distintos de los del texto, se puede apostar sobre seguro que los tomó de un texto de otra editorial, o de su edición antigua preferida del mismo texto. (p.26).

De acuerdo a la cita anterior, se puede deducir la importancia que tiene el texto escolar en el aula de clase y el apoyo que este ofrece para poner en práctica los conceptos obtenidos por parte de los estudiantes. Así mismo, algunos textos proponen trabajo individual, grupal y tareas para hacer en casa.

Finalmente, siendo los textos escolares relevantes dentro del aula de clase, se requiere indagar, si estos actúan como guía precisa para presentar situaciones, que ayuden a ejercitar

estrategias para la resolución de problemas con estructura multiplicativa, esto se manifiesta de acuerdo a las experiencias en la práctica y al uso de algunos libros de textos de matemática para el grado quinto de la Educación Básica (los libros de texto o textos escolares se han asumido como referente de análisis, los cuales evidencian de alguna manera cómo se está llevando el proceso de enseñanza de un concepto en el aula); encontrándose en estos que las situaciones problema, se exponen de forma reducida dentro del propio manual escolar, es decir, se presentan como cierre del tema o concepto. Así mismo, observando los resultados obtenidos de las Pruebas Saber 5°, entre los años 2009 y 2014 expuestos por el ICFES, donde estos dan cuenta de que en los últimos años han sido poco favorables en el área de matemáticas. De esta manera surge la siguiente inquietud: **¿Cómo se articulan las propuestas pedagógicas en resolución de problemas aritméticos con estructuras multiplicativas entre algunos textos escolares de matemáticas para el grado quinto de la Educación Básica y las Pruebas Saber en Colombia?**

1.2 Justificación

Desde una temprana edad se requiere una fundamentación de las bases necesarias, tanto en los algoritmos y procedimientos de las operaciones matemáticas básicas, como en el razonamiento matemático, que de alguna manera son interiorizados y puestos en práctica desde la resolución de problemas, éstos crean un ambiente propio para mostrar la comprensión de los conceptos y desarrollo de las habilidades, de esta manera quien resuelve un problema indica que ha llegado al nivel de poner a prueba su razonamiento. Abrantes (citado por Vila y Callejo. 2005 p.32) apoya esta idea mencionando que la enseñanza y aprendizaje a través de la resolución de problemas es un intento de modificar el desarrollo habitual de las clases de matemáticas, debido a

que mediante este proceso los estudiantes aprenden a pensar matemáticamente, es decir, a ser capaces de abstraer, experimentar y aplicar ideas matemáticas en un amplio rango de situaciones del mundo que los rodea. Así mismo los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) indican que:

> Es importante abordar problemas abiertos donde sea posible encontrar múltiples soluciones o tal vez ninguna. También es muy productivo experimentar con problemas a los cuales les sobre o les falte información, o con enunciados narrativos o incompletos, para los que los estudiantes mismos tengan que formular las preguntas. Más bien que la resolución de multitud de problemas tomados de los textos escolares, que suelen ser sólo ejercicios de rutina. (p.52)

Por esta razón, el proyecto planteado es relevante ya que da cuenta de la coherencia entre las propuestas curriculares y las propuestas de los textos escolares que se presentan en el planteamiento y resolución de problemas. El matemático Polya (1945), hace más de 60 años, pensó en que "hacer matemáticas es resolver problemas", por ello es indispensable que las clases desarrolladas para los estudiantes sean guiadas con problemas, que permitan justificar, pensar y razonar; de esta manera la destreza para resolver problemas es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de sus vidas y deben usarla frecuentemente cuando dejen la escuela, además la sociedad está en continuo cambio lo que implica enfrentarse a problemas a diario.

Así mismo, en los últimos años parece que las entidades educativas globales y locales quieren medir algunos elementos acerca de que deben comprender los estudiantes y cuál es el nivel educativo en que ellos se encuentran. Particularmente la escuela está inmersa en constantes desafíos en relación a la calidad educativa, tanto a nivel nacional como internacional, afrontando evaluaciones de diferente ámbito, al igual que Colombia muchos países participan en algunas pruebas internacionales que tienen como propósito obtener indicadores de desempeño

comparativos y más generales, unos ejemplos de estas evaluaciones son: El Estudio Internacional sobre el Progreso en Lectura (PIRLS), el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) que evalúa tres competencias: Lectura, Matemáticas y Ciencias; y el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) aplicado a estudiantes de los primeros cursos de Secundaria[2].

En el caso de Colombia, el ICFES ha enfocado las pruebas internas hacia la evaluación de competencias, lo que implica un dominio significativo del saber, desde el documento de Sigma 34 (2009) lo propone como:

> Apuntar a la comprensión profunda, a la construcción de inferencias y deducciones, al análisis crítico y la utilización oportuna y pertinente de conceptos. Se trata ahora de desarrollar capacidades para: interpretar, argumentar y proponer mundos posibles, de llenar de significado un contexto y de dar sentido a sus acciones y sobre todo de estar en capacidad de resolver problemas nuevos (p.1)

Esta evaluación se realiza periódicamente en las que se valoran las competencias básicas de los estudiantes y se analizan los factores que inciden en sus logros, conociendo cuáles son las fortalezas y debilidades y a partir de las mismas, se puedan definir planes de mejoramiento en sus respectivos ámbitos de actuación. Se realizan a los estudiantes en cuatro momentos de la escolaridad: grados tercero, quinto (último año de la Educación Básica), noveno (último año de la Educación Básica Secundaria) y once (último año de la Educación Media). Su diseño está direccionado con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, establecidos por el (MEN, 2006) los cuales son los referentes comunes para poder fijar qué tanto los estudiantes y el sistema educativo en su conjunto están cumpliendo con unas expectativas de calidad en términos de los conocimientos que han construido los estudiantes y pueden establecer en diferentes

2 Dato referenciado desde el documento “Evaluaciones en matemáticas el caso de Colombia, Pruebas Saber e ICFES”. 2009, Sigma 34, p.1.

contextos, es decir, ser competente en distintos ámbitos, de esta manera el ICFES en su documento Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal (2014) menciona que la competencia es:

> Un hacer flexible que puede actualizarse en distintos contextos, es decir, como la capacidad de usar los conocimientos en situaciones distintas de aquellas en las que se aprendieron. Implica la comprensión del sentido de cada actividad sus implicaciones éticas, sociales, económicas y políticas. (p 10)

Las pruebas en el área de Matemáticas están enfocadas en valorar las competencias de: Razonamiento y argumentación, comunicación representación y modelación, planteamiento y resolución de problemas, en esta última competencia uno de los componentes es el Numérico-Variacional y de manera específica para grado quinto, el estudiante debe resolver problemas multiplicativos de adición repetida, conteos combinatorios, factor multiplicante, razón y producto cartesiano, además, resolver y formular problemas de proporcionalidad directa e inversa.

En este sentido se quiere reflexionar sobre los procesos, instrumentos y objetos de conocimiento que utilizan los estudiantes al enfrentarse a un problema de tipo multiplicativo, en su preeminencia se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones multiplicativas, las relaciones que comporta una multiplicación o una división definida por Vergnaud (1991) como:

> La más importante de ellas, que se utiliza para la introducción de la multiplicación en la escuela primaria y que forma la trama de la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria y no una relación ternaria, denominada Isomorfismo de Medidas, y la segunda forma de relación multiplicativa es Producto de Medida, relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales una es un producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional.(p 197-211)

Lo anterior es entonces un concepto de gran relevancia especialmente en las acciones donde los estudiantes utilizan estas relaciones en diversas situaciones problemas. Sin embargo, es

en esta estructura multiplicativa donde se presentan dificultades cuando el estudiante afronta situaciones que requieran estos conocimientos, puede ser, por carecer de una adecuada preparación metodológica o porque les falta interiorizar procesos o elementos invariantes que le permita ubicarse en algún contexto que lo requiera, además saber que a través del debido proceso y aplicación de los objetos matemáticos trabajados, puede dar solución a la situación o problema matemático al que se enfrente. De allí la importancia de explorar un poco la propuesta pedagógica de algunos textos escolares al finalizar el grado 5 de la Educación Básica, alrededor de la resolución de problemas con estructuras multiplicativas.

Así mismo la resolución de problemas es considerada, como proceso central en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se ha visto reflejado en los currículos y programas educativos y a su vez, se expresan en los textos o manuales escolares que se utilizan en las aulas de clase como un recurso muy importante para la implementación del currículo. A su vez, los textos escolares se constituyen en una herramienta de primer orden en diferentes funciones tanto para el profesorado como para los estudiantes en general, esta idea la apoya González y Sierra (2004) quienes dicen:

> La implementación y utilización del texto escolar en el aula se ha producido de forma generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días, ejerciendo para ello diferentes papeles: como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del estudiante, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver, entre otras (p 389).

De esta forma, González y Sierra, deducen que por sus diferentes usos esto ha originado una práctica determinada, así como una organización de la enseñanza que se mantiene en la actualidad salvo casos aislados. Además, si se quiere apreciar el verdadero potencial del texto escolar Arbeláez et al (1998) afirman:

> Podemos decir que el libro de texto y no los programas oficiales de los Ministerios de Educación

> son los que conforman el verdadero currículo, por lo menos en la secundaria. Y hablo del verdadero currículo, y no sólo de los objetivos y contenidos de cada área, pues en el currículo influenciado decisivamente por el texto se incluye también toda la conformación del microentorno del aula, las actividades, la evaluación continuada y formativa, así como las evaluaciones sumativas esporádicas, y hasta la configuración del discurso mismo del docente y sus estrategias. (p.30).

En muchas escuelas y colegios, en donde las bibliotecas son inexistentes o con pocos textos que permitan consultas, el texto escolar de la asignatura es la única herramienta que tienen los estudiantes y es utilizado como guía, en él consultan la mayoría de los temas, convirtiéndose en la fuente exclusiva y autoritaria de toda la información que poseen sobre ese tema, con esto el texto escolar se puede considerar un elemento cultural reflejo de la manipulación social que selecciona unos contenidos frente a otros, que impone una determinada forma de estructurarlos y que propone a la siguiente generación cierto tipo de problemas con algunas situaciones didácticas y no otras. En este sentido, Choppin (citado por González et al, 2004) considera que el libro de texto es:

> A la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes (p. 389)

De acuerdo a lo anterior, considerando el rol que tiene el uso de los textos escolares, la importancia del mismo y en ocasiones como único libro de texto, en relación con algún concepto específico en una asignatura, y así mismo, observando los resultados obtenidos en las Pruebas Saber 5°, entre los años 2009 y 2014 expuestos por el ICFES, donde éstos dan cuenta que han sido poco favorables en el área de matemáticas, se percibe oportuno elaborar un trabajo de grado centrado en la articulación de la propuesta pedagógica presentada en algunos textos escolares actuales en Colombia sobre la resolución de problemas con estructuras multiplicativas y

comparar lo expuesto en las Pruebas Saber 5°, que permitan establecer de cierta manera cuál es la complejidad del objeto matemático, su aplicación y modelización de problemas que aportan la construcción de este concepto en el ámbito escolar.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Analizar la articulación de las propuestas pedagógicas en resolución de problemas con estructuras multiplicativas entre algunos textos escolares de Matemáticas para el grado 5° de la Educación Básica y las Pruebas Saber en Colombia.

1.3.2 Objetivos Específicos

Identificar las estructuras multiplicativas desde algunas dimensiones como: Histórica, Matemática, Curricular, y Didáctica.

Caracterizar las estructuras multiplicativas desde el enfoque de Vergnaud y Maza alrededor de la resolución de problemas.

Caracterizar el concepto de las estructuras multiplicativas en algunas preguntas las Pruebas Saber del grado 5°, desde la perspectiva de Vergnaud y Maza.

1.4 Diseño Metodológico

Este trabajo se inscribe en la línea de Didáctica de las Matemáticas, cuya modalidad escogida

es un análisis exploratorio, el cual se basa en la indagación de algunos textos escolares para el grado 5° de la Educación Básica, a partir de ciertos referentes históricos, matemáticos, curriculares y didácticos, en relación con un objeto matemático particular de estudio, el cual es las estructuras multiplicativas alrededor de la resolución de problemas y la observación de algunas preguntas de las Pruebas Saber grado 5° en los años 2012 – 2013, lo anterior con el objeto de realizar un análisis del contraste entre lo propuesto en algunos textos escolares y lo evaluado en ciertas preguntas de las Pruebas Saber.

Para llevar a cabo la propuesta de trabajo se han diferenciado tres fases, las cuales se describen a continuación:

En la primera fase: Se indican aspectos relacionados con la contextualización de la problemática, objetivos y justificación, además la fundamentación teórica desde algunas conceptualizaciones históricas, matemáticas, curriculares y didácticas, alrededor de la resolución de problemas con estructuras multiplicativas.

En la segunda fase: Se presentan el diseño metodológico del análisis, construcción y bosquejo de la rejilla de análisis, los aspectos relacionados con la selección y análisis de algunos textos escolares para el grado 5°, la caracterización del concepto de la estructura multiplicativa y sus conexiones con la resolución de problemas en los libros de texto seleccionados, seguidamente la selección y exploración de algunas preguntas en las Pruebas Saber de los años 2012 y 2013, relacionadas con la resolución de problemas que contengan estructuras multiplicativas.

En la tercera fase: Se exponen la aplicación de la rejilla de análisis dando cuenta de la posible

articulación entre las propuestas pedagógicas de las estructuras multiplicativas alrededor de la resolución de problemas en los textos seleccionados y lo evaluado en ciertas preguntas de las Pruebas Saber 5°, de los años 2012-2013.

Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo de grado, identificando si existe o no una articulación entre lo que promueven las directrices curriculares vigentes en Colombia, para contrastar lo evaluado en algunas preguntas por las Pruebas Saber 5° y lo que proponen algunos textos escolares de Matemáticas escogidos para este grado.

1.5 Fundamentación Teórica

Antecedentes

Uno de los trabajos tomado en consideración como antecedente, es la tesis de pregrado de las estudiantes Gómez D. y Valencia J. (2010) de la Universidad del Valle, las cuales sitúan que el tratamiento que se le da en la escuela a la multiplicación, se ha centrado en la realización del algoritmo de la operación y en la memorización de las tablas de multiplicar, dejando de lado su sentido y significado en contextos específicos y su relación con otros conocimientos matemáticos. Por lo tanto, indagan diversas alternativas didácticas enfocadas al tratamiento de algunos conceptos relativos a la multiplicación. Otra tesis de pregrado es la de las estudiantes Ospina M. y Salgado J. (2011) de la Universidad del Valle, quienes destacan que el uso de las configuraciones epistémicas como herramienta de análisis de texto brindan información sobre cómo se concibe, cómo se construye y desarrolla un concepto matemático, permitiendo dimensionar posturas teóricas y didácticas para el diseño de situaciones de aula y para los procesos de evaluación. De igual forma se toma como antecedente el artículo Estructuras

aritméticas elementales y su modelización de los autores Castro E, Rico L, Castro E, (1995), quienes hacen un análisis desde la adquisición del concepto numérico hasta las estructuras aditiva y multiplicativa, concluyendo en trabajo con patrones.

A continuación se despliegan algunas ideas y resultados de estos trabajos de grado que aportaron a la caracterización del problema, apoyo a la justificación y decantación del marco teórico.

1.5.1 Antecedente 1

En este trabajo titulado ***"****Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal con niños de tercero de primaria" (Gómez y Valencia, 2010),*se plantea que el aprendizaje de los conceptos relativos a la multiplicación, se pueden abordar a través de situaciones problemas de covariación lineal (las autoras la definen como la relación que existe entre dos espacios de mediada (p.12)) que contiene la multiplicación como isomorfismo de medida, se realizó con niños de tercero de la Educación Básica. Además, se propone una trayectoria didáctica de situaciones que facilitan el aprendizaje significativo de las estructuras multiplicativas, lo cual permitió a los estudiantes identificar regularidades estructurales que caracterizan la multiplicación en relación con la proporcionalidad directa. En el trabajo en mención, las autoras realizan un análisis a tres textos escolares para este grado, donde buscan examinar el tratamiento de la multiplicación, como las diferentes formas de interpretarla.

Gómez y Valencia, (2010), mencionan que "El tratamiento de la multiplicación con magnitudes continuas potencializa en los estudiantes el desarrollo del razonamiento proporcional

desde los primeros años de escolaridad" (p 40). De acuerdo al análisis realizado les permite afirmar que la multiplicación como isomorfismo de medida no es abordada desde el grado tercero por estos libros de texto, por tanto, consideran exponer la siguiente propuesta: enseñar la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal, es decir, la multiplicación como isomorfismo de medida, (entiéndase isomorfismo de medida como una relación cuaternaria entre cuatro cantidades que pertenecen a dos espacios de medida diferentes Vergnaud, (1991))a partir de este grado.

Cabe anotar que la anterior investigación se apoya en los modelos conceptuales planteados por Vergnaud (1991), específicamente el que concierne a la multiplicación a través de situaciones de isomorfismo de medida, dado que ésta permite introducir a los estudiantes de la Educación Básica en conceptos que tienen que ver con la multiplicación, variación, razón, proporción, proporcionalidad, función lineal, entre otros; para lograr el desarrollo del pensamiento multiplicativo e iniciarlos en la construcción del pensamiento proporcional.

Las autoras plantearon 4 situaciones problemas que fueron llevadas al aula durante cinco meses, se realizaron con estudiantes entre 9 y 11 años de edad en el Colegio Bennett de Cali. Al finalizar el año lectivo en este trabajo de grado lograron concluir que los estudiantes del grado 3° alcanzaron un aprendizaje respecto a la multiplicación como isomorfismo de medida, considerando la multiplicación no sólo como una forma abreviada de sumar sumandos iguales, ni como la memorización de las tablas de multiplicar, sino como el reconocimiento de los espacios de medida que involucran algunos problemas multiplicativos, característicos del isomorfismo de medida conceptualizando las covariaciones entre ambos espacios de medida (multiplicación como isomorfismo de medidas), y permitiendo la construcción de lo multiplicativo como parte de

un campo conceptual más amplio, en el que se tienen en cuenta conceptos como la proporcionalidad directa, entre otros; lo cual es importante para el presente trabajo de grado.

La anterior experiencia deja un campo de acción abierto, para dar continuidad en la ampliación de la división como parte de la estructura multiplicativa, además de la resolución de situaciones problema donde se involucren las operaciones combinadas como multiplicación y división.

1.5.2 Antecedente 2

El documento titulado, *"Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo"*.(Ospina y Salgado, 2011), señala la necesidad de analizar algunos libros de texto colombianos en el grado tercero de la Educación Básica, buscando caracterizar las propuestas de trabajo que se presentan en los mismos, en torno a las estructuras multiplicativas a partir de elementos teóricos expuestos sobre las estructuras multiplicativas por Vergnaud (1998) y teniendo como herramienta de análisis las configuraciones epistémicas de Font y Godino (2006). Los cuales son elementos básicos que permiten considerar las prácticas pedagógicas escolares y lograr ampliar los sentidos que construyen los estudiantes en torno a la multiplicación, adicionalmente se pretende que a partir de las propuestas pedagógicas presentadas por los libros de texto en el tratamiento escolar de la multiplicación, se generen reflexiones alrededor de las prácticas y las restricciones que se pueden abordar en el trabajo escolar.

De este modo, Ospina y Salgado (2011) consideran que es necesario explicitar las posibles relaciones conceptuales que permitan redimensionar el concepto de multiplicación en relación

con la variación, la proporción, la proporcionalidad y la función lineal, conceptos básicos para el desarrollo del pensamiento variacional en grados superiores.

Ahora bien, este trabajo tomado como antecedente por su análisis, permite dar continuidad a algunos interrogantes que se dejan abiertos, por ejemplo: ¿cómo se presenta el concepto de la multiplicación en la escuela?, ¿qué propuestas hay de las estructuras multiplicativas en los textos escolares?, dado que el campo conceptual multiplicativo aborda problemas que pueden ser solucionados a través de una multiplicación, una división o la combinación de ambas.

Cabe resaltar que si bien existen estos trabajos previos que apuntan al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación y al análisis de la propuesta pedagógica de algunos textos escolares, también es cierto indicar, que esta indagación fue realizada para el grado 3° de la Educación Básica, aparte de lo anterior invitan a reflexionar en que hace falta abordar la resolución de problemas donde involucren operaciones combinadas, como la multiplicación y la división, teniendo en cuenta que la división hace parte de la estructura multiplicativa; en este sentido es conveniente ampliar estas reflexiones para el grado 5°, en el cual se pueda observar si esas dificultades en un momento más avanzado de la escolaridad.

1.5.3 Antecedente 3

El artículo Estructuras aritméticas elementales y su modelización (Castro E, Rico L, Castro E, 1995), hace un recorrido analizando los distintos contextos numéricos y los procesos que siguen los niños en la adquisición de cada uno de ellos, hasta llegar al concepto de número, seguidamente, los autores analizan la estructura aditiva, de la que la suma y la resta son sus

representaciones más sencillas, sostienen que subyace en gran número de conceptos matemáticos, y su desarrollo en el niño ocupa un extenso período de tiempo pues ha de cubrir la transición desde los recuentos informales y las estrategias propias que los niños realizan al margen de su instrucción hasta el uso de datos numéricos memorizados y los algoritmos formales de la adición y sustracción, y, continúan con la estructura multiplicativa, tema de enfoque en este trabajo, donde dicen que el aprendizaje del producto y la división es el comienzo de la construcción de una nueva estructura: la estructura multiplicativa, que es una de la más ricas de la matemática, sin embargo, los autores afirman que comenzar a trabajar en el producto y en la división exige que el niño tenga un nivel de uso y dominio de los números, que conozca su simbolización, si bien la adición y la sustracción se estudian con simultaneidad a la adquisición del concepto de número, el producto y la división son operaciones que necesitan un dominio previo de los números y de su simbolización (p, 45).

Después de estudiar los dos primeros antecedentes, se observó que si bien se han analizado textos para el grado 3° de Educación Básica, aun podrían hacerse con grado 5° y el tercer antecedente corrobora la importancia y complejidad de algunas estructuras aritméticas, aportando bases para el enfoque de este trabajo, como es la estructura multiplicativa, con lo que se lograría también identificar la coherencia entre lo propuesto por los textos escolares alrededor de la resolución de problemas con estructuras multiplicativas y lo evaluado por las Pruebas Saber 5°, para lo cual se escogen las pruebas entre los años 2012 y 2013.

1.5.4 Marco Teórico

En el desarrollo de los fundamentos teóricos de este trabajo de grado, se tienen en cuenta el estudio de varios elementos tales como: Histórico, que permite centrarse en algunos momentos

del proceso de constitución del objeto matemático, en este caso, los conceptos producto (multiplicación) y cociente (división), con estas concepciones se adquieren herramientas para analizar las propuestas pedagógicas que plantean algunos textos escolares para el grado 5°, sus diferentes significados, situaciones problema, contextos, etc., los cuales estarán relacionados con lo presentado en este referente, brindando una perspectiva de la resignificación, para Martínez (2005) esto hace referencia a que emerge como elemento, para dar cuenta que el conocimiento en este caso la multiplicación, tiene significados propios, contextos, historia e intención (p. 5), entonces a través de la historia, se van adquiriendo nuevos sentidos en cada cultura y autor mencionado. El referente Matemático permite visualizar alrededor del enfoque de Vergnaud (1991) y de Maza (1991) un acercamiento teórico de la estructura multiplicativa; el aspecto Curricular se concentra en las políticas educativas vigentes de Colombia a través de los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), donde se donde se estudia la transversalidad de las estructuras multiplicativas a lo largo de los diferentes grados de escolaridad; y finalmente el referente Didáctico que permite reconocer algunos obstáculos y errores presentes en los estudiantes al resolver situaciones problema con estructuras multiplicativas. A continuación se esbozan los anteriores referentes.

1.5.4.1 Algunos referentes Históricos del concepto de la multiplicación (producto) y división (cociente)

En este apartado se presenta un pequeño recorrido en donde se indagan algunos momentos de la manera cómo se ha concebido la multiplicación desde los babilónicos, egipcios, chinos y árabes hasta algunos matemáticos que hicieron sus reflexiones sobre este concepto tales

como Maza (1991); estas culturas han aportado la concepción de los inicios del algoritmo multiplicativo, es decir, la multiplicación como objeto matemático es el resultado de una construcción humana y por ende se observan cambios en su proceso evolutivo a lo largo de la historia.

Las antiguas civilizaciones realizaban la multiplicación utilizando métodos que no requerían conocer las tablas de multiplicar y que eran, además, muy minuciosos en su período. Se recopila brevemente la operación producto en algunos momentos de la historia humana, dado que el estudio de todos o la mayoría de las épocas de su construcción no son objeto del presente trabajo, sino de aquellos que se consideran fundamentales en el cambio de perspectiva o modelo del producto y cociente.

A continuación se esbozan ciertos elementos de la construcción de la multiplicación y la división en algunas culturas antiguas o autores.

Este referente histórico se apoya en Ruiz, A(2003)quien menciona que los babilonios datan aproximadamente (3.500 a.C.), los cuales poseían un sistema aditivo sexagesimal (base 60) con una escritura abstracta en forma de cuña (cuneiforme), escribían sobre una tabla de arcilla húmeda con un punzón que cocían al sol; además esta cultura usaba dos símbolos:el clavo  y la cuña  .Con la ayuda de los dos signos mencionados, ellos podían escribir todos los números enteros desde el 1 hasta el 59 conforme a un sistema decimal, es decir, elsímbolo clavo representaba la unidad y el símbolo cuña significaba la decena los cuales repetían, correspondientemente tantas veces como en el número hubiese decenas y unidades, la suma de

éstos, hasta un máximo de 9 clavos, de esta forma, por el ejemplo el conjunto  se debe entender como el número 7, a su vez una cuña representa el número diez, dos cuñas veinte, y así sucesivamente, hasta un máximo de 5 cuñas , puesto que al llegar al sesenta se usa de nuevo un sólo clavo, la multiplicación se operaba de manera semejante a la que se realiza hoy día, sólo que no contaban con el cero para hacer cálculos, y para la división usaban tablas de inversos, es decir, el cociente se hallaba multiplicando por el inverso, Ruiz, A (2003) indica que los babilonios hicieron uso reiterado de la media aritmética para procesos de acotación y cálculo, que genera una técnica de aproximación, así mismo para evitar confusiones se introdujo posteriormente, el signo separador, que jugaba el mismo papel que el "cero" significa en nuestra numeración.

Un ejemplo de una multiplicación que realizaban los babilonios con este sistema se puede observar en la figura2, la cual se interpreta como el producto de 60 por 60, más 23 unidades, debido a que, con la ayuda del signo separador, el número 3623 se escribe así:

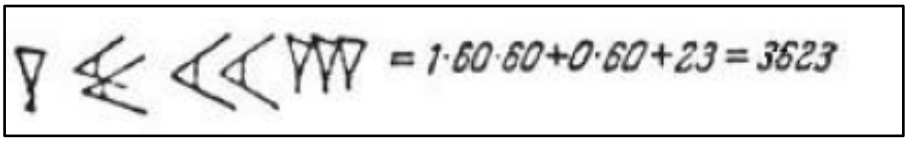


Figura 2. Multiplicación en los babilonios

Vale la pena indicar lo valioso que fue presentar la manera como esta cultura interpretaban los algoritmos mencionados y que aún se conservan varias tablas de inversos que alcanzan números de hasta varios miles de millones.

Para Ruiz (2003), los babilonios eran magníficos calculistas y que disponían de todo tipo de tablillas de cálculo que les ayudaba a la hora de hacer operaciones, en este sentido sería una visión muy ingenua pensar que cada cálculo lo debían hacer una y otra vez y la clave está en estas tablillas: debían aprenderse de memoria grandes listas de cálculo para poder aplicarlo en problemas de todo tipo.

Hernández y Ojeda (2014), haciendo un recorrido por la multiplicación (producto) a lo largo de la historia indican que en los egipcios existe el método más antiguo para hallar el resultado de una operación, esto ocurrió alrededor del año 3000 a.C., mencionan que el procedimiento consiste en la elaboración de una tabla, la cual está encabezada por dos números así:

> A la izquierda el primer factor de la multiplicación y a la derecha un uno. Tras ello, ambos números se multiplican por dos reiteradamente mientras el número de la derecha no sobrepase al segundo factor. Luego, se buscan los números de la segunda columna cuya suma sea el segundo factor de la multiplicación. El resultado de la multiplicación será la suma de los que están en la misma fila que los números que hemos elegido anteriormente (número 3,p.10).

Esta tabla se indica en la figura3, en donde los datos para multiplicar son 80×13 y 80×14.

80	1	83	1
160	2	166	2
320	4	332	4
640	8	664	8

Figura 3 Multiplicación en los egipcios

En el caso de multiplicar 80×14, el proceso se realiza de la siguiente manera: Se ubica a

la izquierda el factor 80 y a la derecha el1, se multiplica a ambos lados por 2, es decir, el 80 se multiplica por 2 con resultado 160, de igual forma el número 1 por 2, resultando 2y así sucesivamente hasta que la columna de la derecha, la que empieza con el 1 al sumar los resultados no sobre pase el valor del segundo factor, en este caso el 14.

El resultado se obtuvo así: $80 \times 14 = 160 + 320 + 640 = 1120$ en la columna de la izquierda, una vez sumada la columna de la derecha 14 = 2 + 4 + 8, no se toma en cuenta el número 1, pues se pasa el valor del factor.

En el caso de $83 \times 13 = 83 + 332 + 664 = 1079$, para encontrar el resultado, se tiene en cuenta en la columna de la izquierda únicamente el 1 + 4+ 8 =13.

Para el caso de la división, se realizaba multiplicando el dividendo por el inverso del divisor. De ahí la importancia de construir tablas de inversos, para hacer esta tabla había de expresarse con denominadores en base 60. Por ejemplo, en la actualidad se describe así 1/5 = 12/60, o bien, $1/9 = 400/(60)^2$, observando con esto la amplificación de una fracción, sin embargo 1/13 no ofrece la posibilidad de tal desarrollo, de igual forma 1/11,1/14,1/17, por ello no todas las divisiones en este sistema pueden hacerse con exactitud, dado que sólo se podían efectuar correctamente aquellas cuyo dividendo sea múltiplo del divisor.

Ruiz, A (2003) afirma que “los egipcios desarrollaron la aritmética de un carácter predominante aditivo, que significa que su tendencia principal era reducir toda multiplicación a la suma repetida”, además de esto el autor indica que el concepto que también se involucra en la actualidad, un ejemplo planteado para multiplicar por 13 debía obtenerse multiplicando por 2, luego por 4, entonces por 8 y agregando los resultados de la multiplicación por 4 y 8 al número

original, con ello se deduce que reducían la división y la multiplicación a sumas, por ello, sus métodos fueron lentos y complejos en comparación con los métodos actuales.

Hernández & Ojeda (2014), indican que la cultura china (150 d.C.) era ampliamente conocida por los métodos para efectuar en el tablero de calcular las cuatro operaciones aritméticas, método interesante por claridad visual, y en esta cultura se multiplicaba con varillas.

Lafigura4, ilustra lo siguiente: el número que forma cada factor deben estar en líneas rectas, paralelas y cercanas en la ubicación de derecha a izquierda; reconocían las unidades, decenas, centenas, y cada número debe estar separado para así distinguir cuáles líneas equivalen a cada uno además cada factor de la operación se representa siendo las líneas del primer factor perpendicular al del segundo, seguidamente se cuentan los puntos de la intersección por la derecha separando cada grupo de la intersección que está en la misma vertical. Si en las sumas aparece un número de dos cifras, el número de las decenas se suma como unidades al número de su izquierda.

Por ejemplo para realizar el producto de $342 \times 25 = 8550$ y $21 \times 13 = 273$, se muestra la figura4

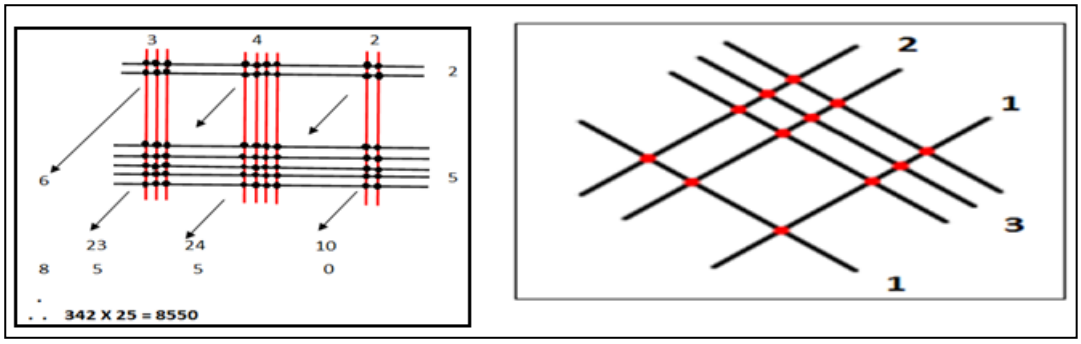


Figura 4 Multiplicación en los chinos

En el caso del producto $342 \times 25 = 8550$, se puede observar que el número 342, siendo el primer factor es ubicado de derecha a izquierda, cada dígito separado según su posición primero el 3 de las centenas, seguido del 4 de las decenas y finalmente el 2 de las unidades, cada cifra separada lo suficiente para evitar que se confundan, luego para ubicar el segundo factor que es el 25, las varillas son ubicadas en forma perpendicular separadas de igual manera primero el 2 de arriba hacia abajo, luego el 5, para hallar el producto se realiza sumando los puntos de intersección de derecha izquierda así como lo muestra la figura5.

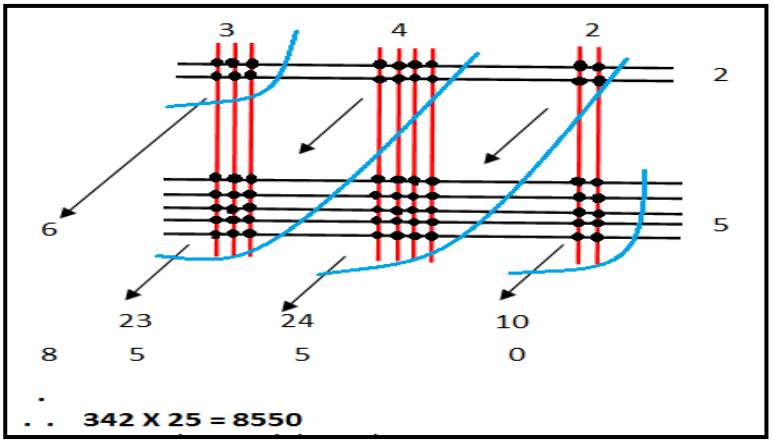


Figura 5 *Ilustración multiplicación en los chinos*

Hernández & Ojeda (2014), indica que los árabes presentaron la base del método de la multiplicación actual durante los siglos VIII y XIV, la cual consiste en trazar una cuadrícula de tantas columnas como cifras tiene el multiplicando y tantas filas tiene el multiplicador. Cada cuadrícula que surge de esta manera se divide diagonalmente de la forma como se indica en la figura6 y viene ocupada por el producto de los números correspondientes a la fila y a la columna.

En la figura 6 se expone el siguiente producto: $12 \times 4267 = 51204$, donde se procede de

ésta manera: Se hace una cuadrícula que cuenta con dos filas (multiplicador) y cuatro columnas (multiplicando) y se resuelve así, el producto de 2 por 7 es 14 se ubica las unidades a la derecha y la decena a la izquierda, seguidamente 2 por 6 igual 12, situando las cifras de igual manera, luego el producto de 2 por 2 y de 2 por 4, una vez terminada de multiplicar el 2 por el multiplicando, se realiza el producto con el 1 la decena del 12 (multiplicador) ejecutando el mismo proceso en la fila siguiente, de ésta manera al terminar de multiplicar el 1 por 4267 (multiplicando), se suman las diagonales que se han formado, desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda como lo indica la flecha y el resultado se lee de izquierda a derecha sentido contrario a la flecha.

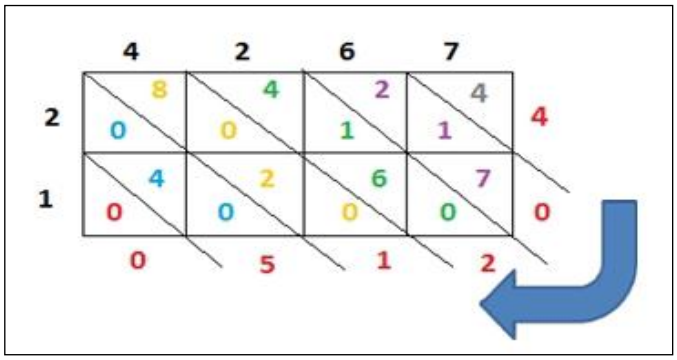


Figura 6 Multiplicación en los árabes

La historia muestra que la ciencia y la tecnología evolucionan, con el fin de dar solución a problemas de la vida cotidiana. Uno de los aspectos más importantes con los cuales la matemática avanza, es gracias a la presencia de problemas que motivan a la creación de métodos, al examinar los distintos algoritmos que el hombre ha construido para resolver problemas de multiplicación y división, se han destacado varios hechos, que permitieron mejorar su utilización, como por ejemplo: el desbordamiento del rio Nilo, a su vez la siembra, la agricultura y la

domesticación de animales, situaciones que para el hombre le permitieron idear métodos para superar estos inconvenientes, ya sea para saber cuántos animales o cuántas siembras poseía.

Ruiz (2003) menciona que las referencias más antiguas que se han encontrado en la revisión de los libros de historia, o de contenido histórico, de las matemáticas sobre las denominaciones de los términos multiplicando y multiplicador, se atribuyen a los árabes. Su origen es remoto, y en la forma que se conoce hoy provienen de la expresión latina utilizada para distinguir entre el número que multiplica y el número por el que se multiplica.

Continuando el breve recorrido histórico de la manera cómo el hombre ha concebido los distintos algoritmos para resolver problemas de la multiplicación y la división, se presentan algunas investigaciones y reflexiones realizadas por Maza (1991), sobre este objeto matemático, quien afirma que a través de las aportaciones árabes, se introdujo en la Europa medieval el algoritmo hindú. Siendo en la península Itálica donde se recibió conociéndose allí como la multiplicación “en celosía”, entendiéndose como un método para multiplicar números enteros que inventó un matemático italiano llamado Luca Pacioli en el siglo XV. Además Maza (1991) indica que según la historia probablemente la primera obra que divulgó la utilización de la multiplicación fue la Aritmética de Treviso en el año 1478. (P. 92-93)

A partir de lo anterior, Maza (1991) se realiza el siguiente cuestionamiento “¿Cómo se llegó desde la multiplicación en celosía al algoritmo más conocido actualmente?” y reflexiona de la siguiente manera:

> El algoritmo clásico viene a ser el de celosía con dos cambios fundamentales: la vuelta a la disposición vertical y la simplificación consistente en sumar las llevadas de cada producto parcial a medida que se va realizando. Se ha sugerido que lo primero puede haber sido debido a los

problemas de impresión que acarreaba el algoritmo en celosía. Es difícil probarlo. Si esto fuera así, el algoritmo habría caminado a lo largo de tres etapas. (pág. 92).

En la figura7, se presenta un esquema en el cual Maza (1991), muestra tres posibles etapas sucesivas con las cuales se desarrollaba una multiplicación con números naturales, por el método de celosía.

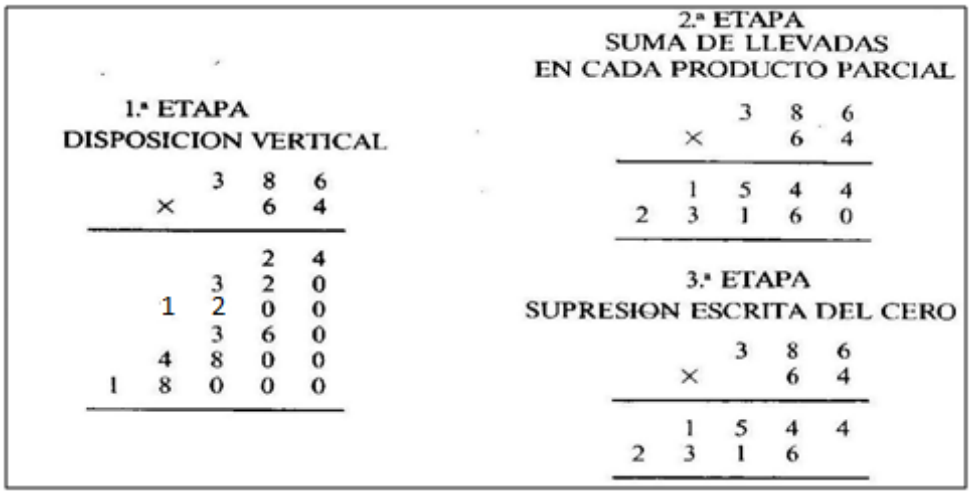


Figura 7. Método de Celosía, Maza (1991)

En la primera etapa, denominada disposición vertical, para realizar la multiplicación de (386×64) se multiplica de la siguiente manera: las unidades del multiplicador (64), es decir, el 4 por cada uno de los números que forman el multiplicando (386) en el mismo sentido y su resultado es ubicado en forma vertical, teniendo en cuenta correr tantos espacios hacia la izquierda según la posición de cada número, luego, se procede de igual manera con las decenas del multiplicador (6), de ésta manera se realiza la primera etapa.

En la segunda etapa, designada suma de llevadas en cada producto parcial, la operación (386×64) es realizada de igual forma de izquierda a derecha, ésta manera en algunas ocasiones

se realiza en la actualidad, escribiendo las unidades y llevando las decenas parcialmente, para luego, ser sumadas al resultado de multiplicar el siguiente número, además cuando se multiplica por las decenas (6) del multiplicador, se coloca un cero en la posición de las unidades, al tener en cuenta la posición del mismo (decenas).

En la tercera etapa, llamada supresión escrita del cero, la operación (386×64) es realizada de igual forma que en la etapa dos de izquierda a derecha y los demás pasos, en ésta etapa se suprime el cero que es colocado en la posición de las unidades, en el anterior proceso cuando se multiplica por las decenas del multiplicador (6), sin embargo se deja el espacio en blanco, partiendo de la posición de las decenas.

Acerca del algoritmo de la división Maza (1991), reflexiona que hacia los siglos XV y XVI unos de los métodos más utilizados en la Europa renacentista era el de "*galera".* Dada la influencia hindú en el cálculo de la época es factible suponer que dicho algoritmo tuviera este origen.

La figura 8 muestra un ejemplo del proceso en la aplicación del método de *"galera*", el cual consistía en dividir un papel en tres partes con barras verticales: a la izquierda se colocaba el divisor, el dividendo en medio y el cociente que fuera el resultado a la derecha. Las restas sucesivas se iban efectuando bajo el dividendo (como actualmente) y el resultado de dicha resta, se coloca encima del mismo de manera que el resto final terminaba estando en esta posición. Los sucesivos pasos de la división en *"galera"* de $4386 \div 23$ se puede observa a continuación

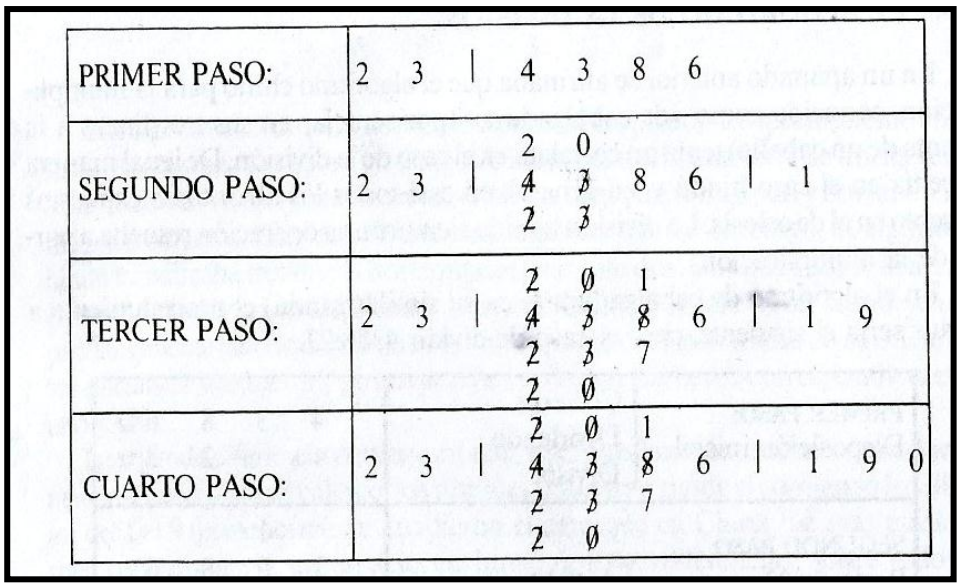


Figura 8. Método de "galera", Maza (1991)

El anterior apartado resumió un breve recorrido histórico a través de algunas culturas representativas de la edad media, las cuales aportaron al desarrollo y aplicación del algoritmo la multiplicación y división.

1.5.4.2 **Algunos referentes Matemáticos de las estructuras multiplicativas**.

Desde el punto de vista matemático, para abordar la multiplicación existen diferentes formas de definirla, algunas de esas son: desde la perspectiva aritmética, algebraica, lineal y geométrica. Para este caso sólo se va a definir desde la perspectiva aritmética, dados los objetivos del trabajo enfocados en el grado 5° de la Educación Básica.

La multiplicación desde la perspectiva aritmética a partir de Vergnaud (1998) es entendida como una operación aritmética, la cual cuando se hace con números naturales, tiene como punto de partida dos números y punto de llegada otro número (distinto o no) de los anteriores, como se muestra en la figura 9. En ésta operación se puede registrar una transformación de los primeros números en el último y tiene un carácter binario ya que opera sobre dos números, además sus

términos (multiplicando y multiplicador) tienen acciones diferentes, es por ello, que el multiplicando es transformado por otra cantidad (multiplicador) que señala el número de veces que se repite la primera.

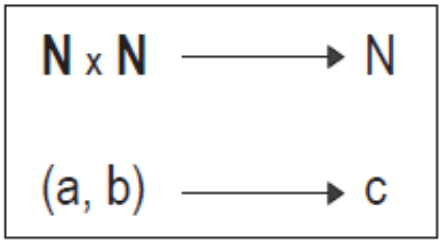


Figura 9. Multiplicación Vergnaud (1991)

Para indicar que una suma repetida se puede representar como un producto, es decir, donde todos los sumandos son iguales, tal como se presenta en la expresión: el producto $P = M + M + M + M + ... + M\,(mveces)$, se puede realizar una operación abreviada de la siguiente manera: el producto P se obtiene al multiplicar el multiplicando *M* por el multiplicador *m*

Así: $P = M \times m$

A esta operación se denomina multiplicación, donde:

M es el multiplicando (primer factor)

m es el multiplicador (segundo factor)

$\times$ el símbolo por

P es el producto

Es decir, la multiplicación es una operación cuyo origen proviene de la adición y consiste en que dadas 2 cantidades, multiplicando y multiplicador se debe hallar una tercera cantidad llamada “producto” que contenga al multiplicando las mismas veces que el multiplicador

contenga a la unidad. Se cumple que: al dividir el producto con el multiplicando será igual al multiplicador entre uno, lo que finalmente alude a la siguiente proporción:

$$\frac{P}{M} = \frac{m}{1}$$

En el caso de los números naturales, se denomina "multiplicación" a la operación que hace corresponder a ciertos pares de números naturales (a, b) su producto $a \times b$.

A continuación se ejemplifican los términos de la multiplicación en el producto 15×12 tanto en su representación horizontal como en la forma vertical usual de hacer el producto. En el siguiente ejemplo #1, se indica el producto de dos factores 15 (multiplicando) y 12 (multiplicador) y cuyo producto en éste caso 180, lo que en términos de la suma repetitiva indica que $180 = 15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15+15$ y se puede verificar la proporción mencionada dado que: $\frac{180}{15} = \frac{12}{1}$

Seguidamente en la figura 10, se evidencian los elementos de la multiplicación indicados en este párrafo, en el ejemplo 1 se muestra la forma de la multiplicación horizontal

Ejemplo 1

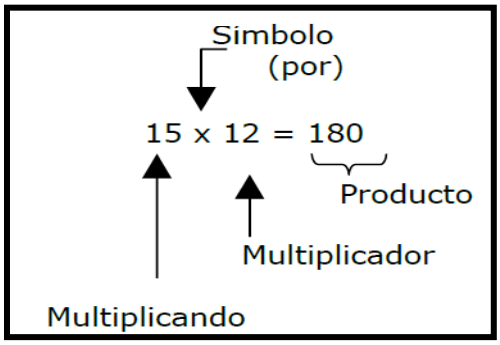


Figura 10. Multiplicación horizontal

Para los mismos factores se indica en el ejemplo 2, el producto de 15 (multiplicando) y 12 (multiplicador), en la forma vertical.

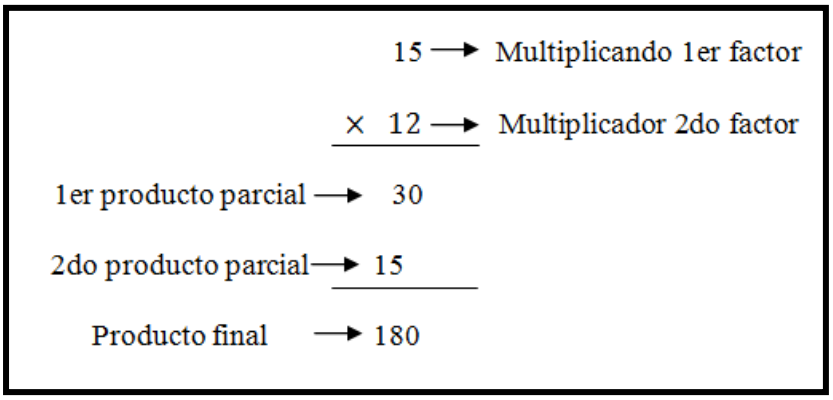


Figura 11. Multiplicación Vertical

Por otro lado, la multiplicación para Moya (1784),(regla general de Aritmética),dice:

> Multiplicar un número por otro, es buscar otro número tercero de tal condición, que se haya con alguno de los dos números en la proporción que el otro con la unidad y al contrario. Ejemplo: Tres veces 4 son doce, 12 se divide con el 4, que es el uno de los dos números multiplicados, como el otro número, que es 3 con la unidad que es tripla. Y al contrario, la proporción que hace 12 entre 3 ésta hace el 4 entre la unidad, que es cuádrupla. Finalmente, este tercer número contiene a cualquiera de los dos números tantas veces como el otro tiene unidades. (pág. 27-28), que es un caso particular de la proporción como se mencionó anteriormente.
> Su representación en la proporción sería así:

$$\frac{12}{4} = \frac{3}{1} \text{ y al contrario } \frac{12}{3} = \frac{4}{1}$$

De lo anterior, se infiere que para Vergnaud, la multiplicación es asumida como una operación binaria, sin embargo, Moya la visualiza como una operación ternaria y a su vez como una proporción, donde la unidad hace parte de ella.

Teniendo en cuenta lo anterior, se reconoce desde la concepción de conjunto por ejemplo:

cuando se dice $3\times4=12$, de la siguiente manera 3 representa el cardinal de un conjunto que tiene tres elementos es un número cardinal concreto, es el llamado multiplicando representa el factor que se repite. El otro factor, en este caso 4, representa el número de veces que se repite el multiplicando se le llama "multiplicador", es el factor abstracto.

Por otro lado, dividir es repartir una cantidad en partes iguales. El dividendo es la cantidad a repartir y se trata por lo general de un número en contexto cardinal, el divisor es el número de partes, también un número cardinal, pero más abstracto, que de inmediato se escribe simbólicamente.

Además en toda operación, los papeles que desempeñan cada uno de los elementos, no son intercambiables, sin embargo, cuando el estudiante avanza en el entendimiento de la operación, puede comprobar que: $3\times4=4\times3$, es decir, se intercambian los papeles de multiplicando y multiplicador y el producto es igual, apoyando ésta idea Vergnaud (1991) indica:

> La conmutatividad de la multiplicación en el campo numérico permite perfectamente invertir el papel del multiplicador y del multiplicando; pero se requiere cierta precaución pedagógica para lograr que los niños acepten tal conmutatividad, pues tendrán que hacer abstracción de lo que representan los números. (p. 150)

Ahora haciendo referencia a la primera definición de "suma reiterada", se entiende que los papeles del multiplicando y del multiplicador son diferentes, por ello, no se podrá identificar a la multiplicación como suma indicada si se confirma que pueden intercambiarse. La operación 4 x 3 interpretada como suma indicada y representadas en la figura 12, requeriría los siguientes pasos:

1. Escoger un conjunto A cuyo cardinal fuese 4

2. Realizar la unión del conjunto A 3 veces
3. Hallar el cardinal del conjunto resultante.

Estos pasos se representarían así:

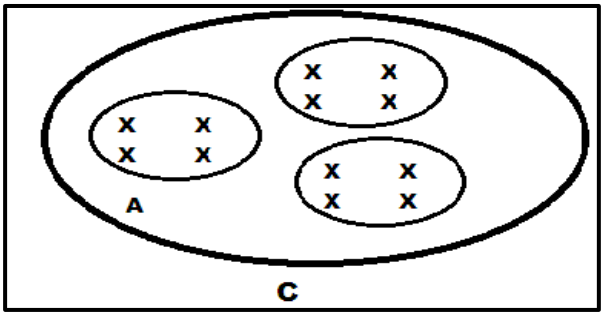


Figura 12. Definición ilustrativa: Términos de la multiplicación

A continuación, se expone la construcción de la operación multiplicación en números naturales y se exhibe una formalización de sus axiomas, tratando de explicar al lector a partir de las ideas desarrolladas en las Notas "Introducción a la teoría de conjuntos y los sistemas numéricos" elaboradas por el profesor Ortiz, G (2005)

Para dar paso a las operaciones y propiedades de los números naturales, en este caso la operación de la multiplicación, se debe tener en cuenta un principio matemático que estructura los números naturales ya que muchas de sus propiedades lo sustentan, este principio es el de inducción matemática.

Teorema 1.1

Sea $\varphi(x)$ una fórmula de variable *x* si se cumple que:
(i) $\varphi(0)$ se verifica y
(ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ se verifica implica que $\varphi(n+1)$ se verifica

Entonces $\varphi(n)$ se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este principio quiere decir que para que una fórmula o función se verifique en todo el campo numérico se deben cumplir dos requisitos, primero que se verifique para el primer elemento, en el caso de $\mathbb{N}$ es para el cero; y segundo que si se verifica para un elemento cualquiera se debe verificar para el siguiente de este elemento.

Una vez presentado el principio de inducción se indica la definición de multiplicación (producto) en números naturales así:

Definición 1.8

Para todo número natural *n* se define de forma recursiva, el producto de la siguiente manera:
$n \bullet 0 = 0$
$n \bullet s(m) = n \bullet m + n$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Nótese que la operación producto usualmente empleando el signo $\times$ se denotada usando el punto así: $\bullet$.

En la primera definición, de acuerdo a Castro et al (1995), se puede decir que al contar cero veces un número *n* no se cuenta nada, es decir, se obtiene una cantidad nula, a su vez en la segunda definición se observa que el número cero no es sucesor de ningún número, por esto no es intuitiva.

Un ejemplo de la segunda definición se observa en el caso de $3 \bullet 4$, que para el lector es claramente 12, se puede comprobar la operación usando la definición así:

$$3 \bullet 4 = 3 \bullet 3 + 3$$
$$12 = 3 \bullet 2 + 3 + 3$$
$$12 = 3 \bullet 1 + 3 + 3 + 3$$

$3 \bullet 4$ es cuatro veces 3, debido a que el producto es una suma reiterada, y es útil ver cómo esta definición justifica la explicación.
Ahora se deducen los siguientes teoremas:

Teorema 1.7

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $0 \bullet n = 0$

Demostración: Aplicando inducción sobre *n*, con $\varphi(x)$ como "*x* tal que $0 \bullet x = 0$".

- $\varphi(0)$ se verifica, pues por definición $0 \bullet 0 = 0$

- Suponiendo que $\varphi(n)$ se verifica, es decir se verifica que $0 \bullet n = 0$.

Se verifica $\varphi(s(n))$. Las dos siguientes igualdades verifican esto último:

- $0 \bullet s(n) = 0 \bullet n + 0$ por definición de suma.

$= 0+0$ por hipótesis de Inducción.

$= 0$ por definición de suma.

Por tanto $0 \bullet n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.8

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $s(0) \bullet n = n$

Se deduce por la definición que el sucesor de 0 es 1 y así este teorema se puede inferir como:

$n \bullet 1 = n$, si n es un numero cualquiera que pertenece a los números naturales, entonces intuitivamente al contar una vez un número *n*, sólo se obtiene éste número una sola vez. Este teorema se conoce generalmente como la propiedad modulativa de la multiplicación. Una vez definida esta operación, se da paso a las propiedades que cumple esta.

Propiedades de la multiplicación.

Teorema 1.9

Para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

(i) $n \bullet m \in \mathbb{N}$ *(Propiedad clausurativa del producto)*
Es decir, el producto de dos números naturales es otro número natural.

(ii) *Si* $n=m$ *entonces* $n \bullet p = m \bullet p$ *para todo* $p \in \mathbb{N}$. *(Propiedad uniforme del producto por la derecha)*

Si dos cantidades o números son iguales, es decir $n=m$, al contarlas un número de veces igual

(*p*) indicara cuantas veces se repetirá la *n* o *m* conservando la igualdad. Como complemento de estas propiedades se tiene:

- *m ● n = n ● m (Propiedad conmutativa de la multiplicación)*
- *(m ● n) ● s=m ● (n ● s) (Propiedad asociativa de la multiplicación)*
- *m ● n=0 si y sólo si m=0 o n=0 (El producto de números es cero sólo es posible si alguno de ellos es cero)*
- *m ● (n+s)=m ● n+m ● s (Propiedad distributiva del producto respecto a la suma)*

Para profundizar sobre la complejidad de las estructuras multiplicativas, Vergnaud (1994) plantea que la multiplicación y la división forman parte de una misma estructura algebraica en la cual se proviene de la multiplicación como punto de partida para luego definir la división, lo representa en una forma general de la siguiente manera:

$a \div b$, *con* $b \neq 0$, equivale a que existe un número c tal que $c \times b = a$

Si la multiplicación admite varias perspectivas de planteamiento; la división tiene un campo más reducido.Por otro lado, la división que es la operación inversa de la multiplicación y que presenta dos tipos diferentes, el primero: la división en su modelo implícito se tiene que es **partitiva** (partes iguales) en este se ofrece la cantidad total y el número de partes, solicitándose cada parte, y el segundo: **cuotitiva** (¿Cuántas partes del mismo tamaño podemos formar de un conjunto dado?) en tanto se dan como datos el total y el tamaño de cada parte debiéndose hallar el número de partes.

Por ejemplo, el caso de la multiplicación en el conjunto de números naturales, a un par de números cualesquiera, siempre le corresponde otro número que es su producto, (propiedad cerradura de la multiplicación).

Según lo anterior, al 4 y el 21 les corresponde el número 84, que es su producto. Sin embargo, si se considera la división (4, 21), es decir, 4 entre 21 no existe un número natural que sea su cociente.

Por estas razones el concepto de división es más restrictivo y se limita a dos concepciones diferentes, de las cuales una de ellas es prácticamente desconocida o poco usual. A continuación se presentan dos casos de interpretación de la división:

Para el primer caso de la división entendiéndose como la operación contraria a la multiplicación.

Sí $a \times b = c$ entonces $c \div a = b$. Por ejemplo para el producto de $3 \times 4 = 12$ entonces el cociente de $12 \div 3 = 4$

Ahora para, *D* que corresponde al dividendo la *d* que es el divisor y *C* es el cociente, también la división puede representarse con una línea horizontal, de la siguiente forma $\frac{D}{d} = C,$ mediante dos puntos (:) $D : d = C$ ó mediante el símbolo lemnisco ($\div$), $D \div d = C$

Y el segundo caso de la división como resta reiterada, se puede ejemplificar mediante el siguiente enunciado: Se quieren repartir 15 caramelos entre 3 paquetes. ¿Cuántos caramelos hay que introducir en cada paquete?, entonces este ejemplo podría pensarse con la siguiente estrategia:

15 – 3 = 12

12 – 3 = 9

9 – 3 = 6

6 – 3 = 3

3 – 3 = 0

Se han restado 3 caramelos, 5 veces; luego en cada paquete se ha colocado un caramelo por vez, por tanto habrá 5 caramelos en cada paquete. Se puede deducir que este método no es práctico y, además, tiene una aplicación muy limitada.

En esencia, para Vergnaud (1991) la división consiste en el dividendo, el divisor y el cociente: donde el dividendo y el cociente con frecuencia representan medidas; el divisor, un operador sin dimensión. Además existe dos tipos de división, uno donde requiere la búsqueda del valor unitario, el otro donde se solicita la búsqueda de la cantidad de unidades, es decir hay que buscar un número (cociente) que multiplicado por el divisor diferente de cero (0), de cómo resultado el dividendo. Se infiere que si lo que se desconoce es el cociente, el producto anteriormente descrito, se representa así:

$d \times c = D,$ y se puede colocar así: $d \times \Delta = D$,entiéndase Δ como cualquier número natural.

Todo lo anteriormente dicho es correcto en el caso de que la división sea exacta, es decir, cuando se puede repartir todo el conjunto dividendo entre cada unidad del divisor, en partes iguales, sin que sobre nada. En el caso de que la división no sea exacta, se indica que hay un resto (residuo), entonces la operación división se procede de forma idéntica, pero el producto del cociente por el divisor, hay que restarlo del dividendo y obtenemos el llamado residuo. Entonces

la relación entre dividendo, divisor, cociente y residuo es así: $D = d \times c + r$.Donde r , representa el residuo.

Para esta operación hay una propiedad denominada propiedad fundamental de la división exacta, que consiste en: Si el dividendo y el divisor de una división exacta se multiplican o se dividen por el mismo número, el cociente no varía.

En la figura 13 se evidencia para el caso de la división $56 \div 8$ da como cociente 7, en la primera columna se multiplica el dividendo y divisor por 3, aplicando la propiedad uniforme y se comprueba que el cociente es el mismo, en la tercera columna se divide el dividendo y el divisor entre 2 y el cociente sigue sin variar, gracias a la propiedad uniforme, la columna intermedia evidencia la operación original de $56 \div 8$

(56 x 3) : (8 x 3) ⟷	56 : 8 ⟷	(56 : 2) : (8 : 2)
168 | 24 0 7	56 | 8 0 7	28 | 4 0 7
Cociente 7	Cociente 7	Cociente 7

Figura 13. Ilustración de la propiedad fundamental de la división exacta

Una de las propiedades de la división de números naturales es que posee como elemento neutro, al uno (1) en el divisor y se representa así: $a \div 1 = a$

Sin embargo, existen otras propiedades que para el caso de la división no se cumplen, como son las siguientes:

La división de los números naturales no es una operación interna, es decir, una división puede tener decimales y los números con decimales no pertenecen al conjunto de los números naturales.

Así mismo, tampoco cumple la propiedad conmutativa, dado que no se pueden cambiar dividendo por divisor, ni la propiedad asociativa, no se puede agrupar porque el cociente de cada división es diferente, por ejemplo:

Al dividir 10 entre 5 su cociente es diferente que dividir 5 entre 10, así

$10 \div 5 = 2$ diferente a $5 \div 10 = 0.5$ este cociente no pertenece a los números naturales, así

$2 \neq 0.5$, por tanto no cumple la propiedad conmutativa. En cuanto a propiedad asociativa, en la división no se pueden agrupar por ejemplo: $(20 \div 5) \div 3 = 1.3333$ no pertenece a los números naturales, y se agrupa los mismos números en forma diferente así $20 \div (5 \div 3) = 15$, su cociente es otro; por tanto la división no cumple la propiedad asociativa.

De este referente se concluye que desde la perspectiva aritmética la multiplicación es vista como una relación binaria entre dos números naturales, que cuyos términos como son el multiplicando y el multiplicador tienen representación diferente, además, si se aplica la propiedad conmutativa se valida con ella el producto entre estos dos términos, mas no su representación, a su vez en cuanto a la división siendo esta la operación inversa de la multiplicación y que sólo se realiza entre dos números naturales, no valida la propiedad conmutativa, así mismo dado que esta operación tiene campos amplios no sólo el mecanizar su algoritmo sino que también adquiere otros conceptos más elaborados que serán desarrollados a lo largo de la escolaridad.

1.5.4.3 Algunos referentes Curriculares de la multiplicación (producto) y la división (cociente).

En Colombia es necesario analizar lo que proponen los dos documentos directrices, estos son: los Lineamientos Curriculares para Matemática (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias (MEN,2006), que son la base y orientadores para docentes e instituciones educativas, en aspectos relacionados a los procesos, conocimientos básicos y contextos, para impulsar a los estudiantes a enfrentarse al reto de esta sociedad, que diariamente plantea situaciones por resolver; en este caso la resolución de problemas y particularmente alrededor de las estructuras multiplicativas, como parte fundamental de este proceso.

Los Lineamientos Curriculares para Matemática (MEN, 1998) son enfáticos al referirse que

> El aprendizaje de las matemáticas debe posibilitar al alumno la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás, a su vez anexa: es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista (p.35)

Esta idea lleva como mensaje implícito, la aplicación de situaciones problema donde el estudiante ponga en juego sus conocimientos, ampliando su capacidad de razonar frente a una situación, claro está, que la situación problema resulta condicionada en mayor o menor medida por factores constituyentes de cada contexto.

Por ello, en la mayoría de los países, con diferentes énfasis, se ha incorporado la resolución de problemas en el currículo, en algunos casos como un contenido específico y en otros casos como un eje transversal, como por ejemplo en los Principios y Estándares para la

Educación Matemática (NCTM, 2004), la resolución de problemas es uno de los seis estándares de procesos que se presentan junto a los estándares de contenidos. Así como en el Psychology of Mathematics Education (PME, 2006) varias comunicaciones presentadas se refieren a la capacidad de los alumnos para que sean buenos resolutores de problemas matemáticos y a la pedagogía del aula considerando gran importancia a la resolución de problemas, así también, el profesor debe proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en las que los conocimientos van a resultar como la solución precisa en los problemas planteados.

En lo que respecta al referente que permita analizar la coherencia entre la propuesta pedagógica de algunos textos para el grado quinto y las Pruebas Saber, en relación a la resolución de problemas con estructuras multiplicativas es el curricular, dado que es importante conocer el nivel de competencia evaluado a los estudiantes. Por una parte el documento de los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 1998) presenta los tipos de problemas asociados al producto y cociente clasificados en factor multiplicante, adición repetida, razón y producto cartesiano, a continuación se presentan ejemplos de cada tipología.

> Para el producto, problemas asociados a la expresión 3 x 4, en el caso de Factor multiplicante:
> Juan tenía 3 carritos, María tenía 4 veces más. ¿Cuántos carritos tenía María?
> Para la Adición repetida se tiene:
> Juan compró 3 carritos cada día durante 4 días. ¿Cuántos carritos tiene en total?
> Para el tipo de problema asociado a una Razón se tiene:
> Cuatro niños tenían 3 carritos cada uno. ¿Cuántos carritos tenían en total?
> Finalmente, para el Producto cartesiano:
> Un carrito de juguete se fabrica en 3 tamaños distintos y en 4 colores diferentes. ¿Cuántos carritos distintos se pueden comprar?
> También el MEN (1998) hace referencia que
>
> Al igual que en la adición existen modelos o interpretaciones concretas que se ayudan de analogías discretas o continuas como las siguientes, algunos resultan más sencillos de reconocer como problemas de multiplicación que otros.Por ejemplo se halló que el modelo de "razón" resultaba más sencillo para algunos niños que el de "producto cartesiano". (p 33)

De forma similar al producto, en el caso del **cociente** el MEN (1998), exponen dos tipos de problemas más usuales para la división estos son: el modelo de repartir y agrupamiento o sustracción repetida, los cuales ejemplifica de la siguiente manera:

Para el modelo repartir se tiene:

> Juan tenía 12 carritos. Quería colocarlos en 4 hileras iguales. ¿Cuántos debía colocar en cada hilera?

Para el modelo de agrupamiento o sustracción repetida se tiene:

> Juan tenía 12 carritos. Quería colocarlos en hileras de 4. ¿Cuántas hileras podía hacer? (p 33)

Este documento MEN (1998) exponen la forma de ejemplificar los problemas de tipo multiplicativo y los tipos de división, anteriormente clasificadas en este documento por Vergnaud (1991)

Para complementar el enfoque del trabajo se requiere exponer lo que en el documento MEN (1998), se contempla alrededor de la resolución de problemas, en este caso se indica como un proceso general:

> Tradicionalmente los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia "estos problemas de aplicación" se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suelen omitir por falta de tiempo.
> Las aplicaciones y los problemas no se deben reservar para ser considerados solamente después de que haya ocurrido el aprendizaje, sino que ellas pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje. El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas. Esta visión exige que se creen situaciones problemáticas en las que los alumnos puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos. (p. 24).

A partir de esto se deduce la importancia de crear situaciones problemas en todo contexto, para la exploración y aplicación de las matemáticas que se están construyendo en el momento que el estudiante las concibe, evitando llevar este proceso al finalizar un determinado concepto.

Por otra parte, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas MEN (2006), seleccionan algunos de los niveles de avance en el desarrollo de las competencias asociadas con los cinco tipos de pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, especificando los sistemas conceptuales y simbólicos asociados a cada pensamiento.

En forma semejante, cada estándar hace énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática que cruzan estos tipos de pensamiento, los procesos son: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar; y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos; además, a manera de la creación de situaciones problemas al respecto el MEN (2006), se refiere así:

> La situación problema apunta siempre a distintos contenidos y hacia diversas estructuras matemáticas, pero éstos no son evidentes en sí mismos, sino que tienen que ser interpretados activamente por los estudiantes. En esta interpretación intervienen tanto factores sociales y culturales propios de la clase de matemáticas, como los que median a través del ambiente de aprendizaje y el clima institucional y los que provienen del contexto extraescolar. Es importante señalar que un mismo contenido matemático puede –y en ocasiones debe– presentarse a través de diversas situaciones, como es el caso de la multiplicación y sus diversos significados, de las fracciones y sus diversas interpretaciones, etc. (p. 72 - 73)

Teniendo en cuenta que los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica, entendiéndose esta como aquella donde el estudiante practica unas matemáticas informales en diversos contextos de la vida cotidiana y una faceta formal de las matemáticas y entre el conocimiento conceptual y el procedimental. Se reconoce que el aprendizaje de las matemáticas se inicia en las matemáticas informales de los estudiantes en

diversos contextos cotidianos escolar y extraescolar, es necesario hallar la conexión o nexos de aprendizaje para construir contextos y situaciones que permitan avanzar hacia las matemáticas formales. Para ampliar esta idea el MEN (2006) se refiere:

> El tejido de estos hilos requiere aceptar, tal como se ha descrito en cada pensamiento, que un concepto matemático admite diversas aproximaciones, como por ejemplo, los distintos significados de las fracciones o los significados de la multiplicación presentes en la estructura multiplicativa; del mismo modo, las proposiciones acerca de las propiedades de las operaciones numéricas, de las figuras geométricas, etc., pueden alcanzarse usualmente por más de una vía. (p 78).

De esta manera, el MEN (2006), hacen referencia que los diversos significados presentes en la estructura multiplicativa, llevados a un contexto real permite que el estudiante al finalizar el grado quinto pueda alcanzar algunas competencias destinadas para este mismo grado. De igual manera el MEN (1998) indica:

> los significados que los niños captan más fácilmente son aquellos que tienen que ver con una acción, como “añadir”, “quitar”, “repartir”, lo cual coincide con la idea de Piaget de que las operaciones son acciones internalizadas”. Hay que tener en cuenta que la comprensión de las operaciones con números se va desarrollando gradualmente y se va ampliando considerando una gama cada vez más grande y abstracta de situaciones. (p 33)

Teniendo en cuenta lo anterior, se infiere que algunos estudiantes se limitan a buscar en los enunciados de las situaciones problema de multiplicación, palabras que les permitan relacionarlos con esta operación, es decir, el papel que juegan los verbos en los enunciados de las situaciones propuestas son relevantes para los estudiantes, algunos verbos son: acrecentar, aumentar, crecer, proliferar, reproducir entre otras; esta idea es apoyada por el matemático William Oughtred en el siglo XVII, quien fue el primero en indicar que el signo $(\times)$ aludía a la palabra veces, por otro lado, la palabra dividir indica: disminuir, decrecer, repartir, distribuir y demás, aunque las anteriores operaciones estén relacionadas con la adición y la sustracción, las ideas que conllevan a una multiplicación o a la división son más complejas que la suma y la resta, por esto es esencial que el estudiante en los primeros años de la Educación Básica, opere de

forma adecuada la adición y así de esta manera pueda ser introducido con mejores bases hacia las estructuras multiplicativas.

A continuación, en la tabla 1, se exponen los Estándares Básicos de Competencias y pensamientos matemáticos que se relacionan con el proceso de la resolución de problemas alrededor del concepto de estructuras multiplicativas, al finalizar el grado 5°.

Tabla 1 Estándares y pensamientos al finalizar grado 5

No	**Pensamiento Numérico y Sistemas de Numéricos**
E1	Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
E2	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.
E3	Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
	Pensamiento Métrico y Sistema de Medidas
E4	Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
E5	Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
E6	Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos.
	Pensamiento variacional y Sistemas algebraicos y analíticos
E7	Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos como las que se dan en cantidades directamente proporcionales.

Estándares y pensamientos al finalizar el grado quinto, relacionados con la resolución de problemas alrededor de las estructuras multiplicativas.

Al finalizar éste referente, da cuenta de cuán importante y necesario es incluir en el currículo el proceso de planteamiento y resolución de problemas, que permite el razonamiento de los estudiantes en todos los aspectos (social- cultural- matemático entre otros) y que a su vez están presentes en su vida cotidiana, dado que, en el diario vivir ellos se hallarán en diversas situaciones, las cuales requieren del análisis y la toma de decisiones, proceso considerado como

eje principal en los currículos de las instituciones educativas.

La resolución de problemas se encuentra presente a lo largo del proceso educativo, que es llamada por el MEN (2006), como la coherencia vertical y horizontal, que permite relacionar los diversos estándares y pensamientos con otros ciclos de grados. En cuanto a la coherencia vertical y la horizontal el MEN (2006), se refiere así:

> La primera está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados. (p. 78 - 79)

1.5.4.4 Algunos referentes Didácticos de la multiplicación (producto) y la división (cociente)

Para el siguiente apartado se tienen en cuenta algunas de las investigaciones de Vergnaud (1991) y Maza (1991), estos autores mencionan que un procedimiento matemático como el algoritmo estándar escrito para el producto en apariencia elemental y evidente en cuanto a su comprensión (en numerosas ocasiones suele considerarse como un simple procedimiento aritmético en el que su comprensión se identifica con su dominio), refleja, sin embargo, buena parte de la problemática existente en torno al fenómeno de la comprensión del conocimiento matemático, permitiéndose mostrar con claridad la dificultad y limitaciones que hay que aceptar al momento de afrontar su evaluación, por ello se apoya la idea de Vergnaud (1991) la cual indica: que el conocimiento matemático no está aislado y que para estudiarlo no conviene obviar sus conexiones con el resto de conocimientos. Así mismo, este autor indica que se encuentran muchos modelos viables para estudiar la multiplicación y la división, cada uno de ellos enfatiza un contexto particular del número estos son: modelos cardinales, combinatorios, con medida,

numéricos, de razón aritmética, y funcionales los cuales se exponen a continuación:

En los modelos de **recuento**, se emplea la línea numérica, en la cual se cuenta al tener $n \times a$ (*a* veces *n*), este se modeliza formando un intervalo de longitud "*a*" unidades y contando "*n*" veces, previamente se debe reconocer el conteo de 2 en 2, 3 en 3. Para la división es similar, consiste en contar hacia atrás desde el dividendo y de tanto en tanto, según indique el divisor y el número de pasos dados será el cociente.

Otro modelo es el **cardinal**, usado para representar uno o los dos factores, los más utilizados son: la unión repetida de conjuntos cardinales, usualmente con los mismos objetos en la cual se interpreta el papel de los términos multiplicando y multiplicador, por ejemplo 3 x 4, es cuatro veces tres. En este modelo la distribución de objetos es un esquema rectangular, para ello se hace una fila con tantos objetos como indica el multiplicando y se forman tantas filas como dice el multiplicador.

En los modelos **combinatorios,** en el que se emplean los diagramas de árbol y el diagrama de circuitos, en estos se usan los términos también del multiplicando y multiplicador.

En los modelos de **medida**, las regletas de Cuisenaire presentan un modelo adecuado del número como longitud, la balanza utiliza el contexto de número, medida y peso.

Los modelos **numéricos,** se reflejan en lo estrictamente simbólico, y los números aparecen únicamente simbolizados, en estos la multiplicación es una suma reiterada y la división una resta reiterada.

En los modelos de **razón aritmética,** en estos se debe realizar la comparación de dos conjuntos, o dos cantidades, en términos de "cuántas veces más", para este se puede apoyar en el teorema de Thales.

En los modelos **funcionales,** este se trata de todos aquellos casos en los que el producto aparece con carácter de función u operador, lo más práctico es considerar cada operación como una máquina- operador, que transforma un número en otro mediante una operación. Así también, la división para efectos del tratamiento Didáctico escolar está siendo interpretada como una relación de únicamente tres términos, (su aprendizaje debe ir en simultáneo con el de la multiplicación), dejando de lado relaciones multiplicativas que dan sentido y significado a la operación, por ejemplo, la operatividad entre el divisor y cociente. Por otro lado, es necesario que la multiplicación sea abordada a través del conjunto de situaciones en las cuales esta operación tome sentido y significado. Para la aplicación de estas operaciones se permite ubicarlas dentro de unas estructuras multiplicativas de un campo conceptual para establecer una definición y ubicarlas dentro de un conjunto, por ello, un campo conceptual es "un conjunto de situaciones o situaciones problemas cuyo tratamiento implica esquemas, conceptos y teoremas en estrecha conexión, así como las representaciones del lenguaje y simbólicas susceptibles de ser utilizadas para representarlos". (Vergnaud, 1990).

Por esto, Vergnaud (1991), clasifica en dos categorías a las situaciones en las que se encuentra el uso de una multiplicación o división: **isomorfismos de medida y producto de medida,** a continuación se definirán cada una de ellas.

1.5.4.4.1 Clasificación de las estructuras multiplicativas Vergnaud (1991)

1.5.4.4.1.1 Isomorfismo de medidas

Esta es la primera forma de relación multiplicativa, siendo una relación cuaternaria, ésta vincula problemas de proporción simple directa entre dos magnitudes, problemas particulares de repartos iguales, precios constantes, movimiento uniforme, además se encuentran aquellos en los que hay que relacionar multiplicativamente dos o más cantidades así como sus dimensiones de medida, teniendo en cuenta que dos cantidades son de cierto tipo y las otras son medidas de otra clase, por ello cabe anotar que esta categoría se aplica a problemas y no se ve la operación aislada, dado que sería simplemente un algoritmo. En un problema como el siguiente no se relacionan tres términos sino cuatro:“una libra de sal cuesta $250, ¿Cuánto cuestan 4 libras de sal?, por lo general este problema se resolvería así:

$$250 \times 4 = 1000$$

$$4 \times 250 = 1000$$

Dejando de lado la relación entre la unidad y el precio de la unidad, en la figura 14 las cantidades pertenecen a diferentes espacios (1 y 4 son medidas de peso y 250 y × son del valor de cada peso)

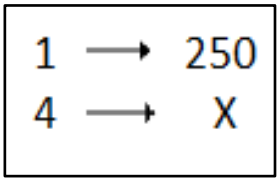


Figura 14. Relación cuaternaria – proporción simple

Seguidamente se ejemplificará ésta categoría desde el proceso de la resolución de problemas, dado que el presente trabajo aborda dentro del eje fundamental la resolución de situaciones problema.

En el isomorfismo de medidas, donde es necesario que intervenga la regla de tres, permite distinguir dos clases de problemas de acuerdo a la operación que se requiere:

Los de multiplicación donde se busca encontrar la medida-producto cuando se conocen las medidas elementales.

Los de división donde se busca encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto.

Estas relaciones multiplicativas muestran que existen varios tipos de problemas o situaciones, en los cuales, la solución necesita de una multiplicación o una división, Vergnaud (1990) afirma:

> La distinción de estas diferentes clases y de su análisis se debe abordar cuidadosamente, con el fin de ayudar al niño a reconocer la estructura de los problemas, y a encontrar el procedimiento que conducirá a su solución. No hay que subestimar la dificultad de algunas nociones, como las de razón, proporción, fracción, y función, las cuales requieren de precauciones didácticas importantes, válidas más allá de la enseñanza elemental. Debe abordarse, sin embargo desde la enseñanza elemental. (p. 223).

Los esquemas presentados en la figura 15, representan los modelos de las distintas situaciones multiplicativas en las cuales está subyacente la proporcionalidad simple directa, estos modelos representan los problemas típicos de multiplicación, el primer modelo se puede resolver por medio de la multiplicación $\times c$ o por $\times b$,aunque cada uno exige un tipo de análisis distinto de la situación , pues implican poner en relación magnitudes de dos espacios de medida distintos en el primer caso, o del mismo espacio de medida en el segundo caso.

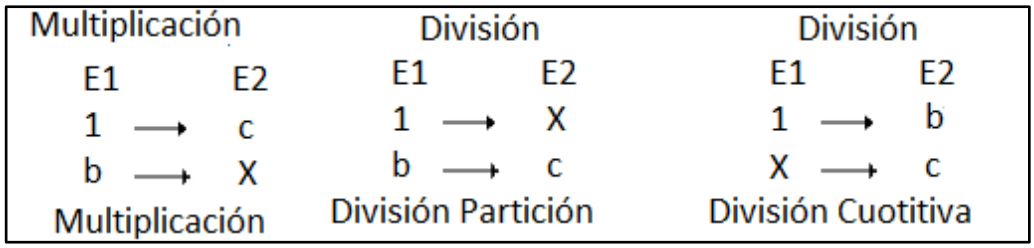


Figura 15. Problemas típicos de multiplicación

Se pueden reconocer en estos modelos que son tablas de correspondencia entre dos tipos de cantidades.

Los siguientes esquemas representados en la figura 16 presentan la regla de tres simple directa, donde se observan los diferentes estados en que puede aparecer la incógnita.

El Isomorfismo de medidas pone en juego cuatro cantidades, pero en los problemas más simples se sabe que una de éstas es igual a uno. Vergnaud (1990) diferencia tres clases de problemas, según que la incógnita sea alguna de las otras tres cantidades.

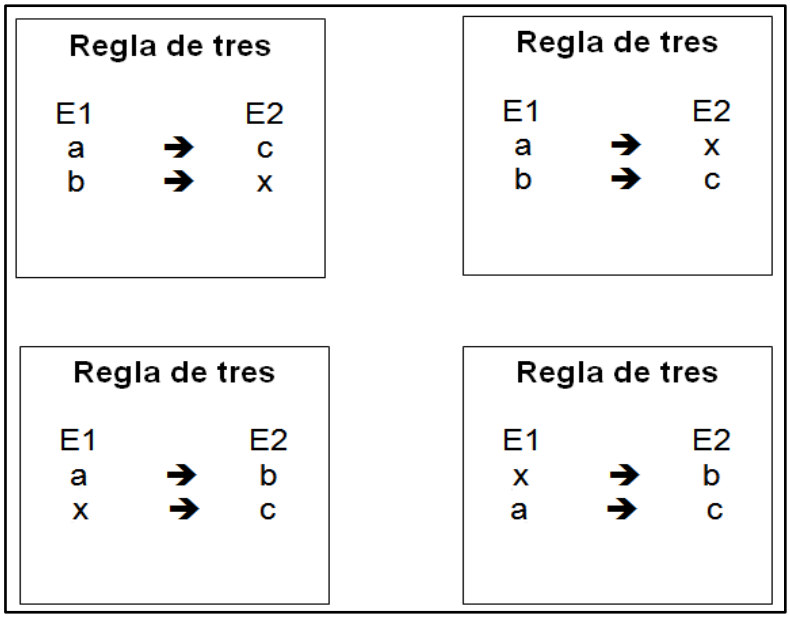


Figura 16. Formas de aplicación regla de tres simple directa

1.5.4.4.1.2 Producto de Medida

Esta forma de relación consiste según Vergnaud, (1991), en “una relación ternaria, de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional” (p. 211), algunos ejemplos típicos son tomados de este autor como el que se indica a continuación 1 a 3.

Ejemplo 1: tres muchachos y cuatro muchachas quieren bailar. Cada muchacho quiere bailar con cada muchacha, y cada muchacha con cada muchacho. ¿Cuántas parejas posibles hay?

Ejemplo 2: una pieza rectangular tiene 4 metros de largo y 3 metros de ancho. ¿Cuál es su área?

Ejemplo 3: cambiando solamente de chaqueta o de bufanda, Ana puede tener 15 trajes diferentes. Tiene tres chaquetas, ¿Cuántas bufandas tiene?

Algunas situaciones como: hallar áreas, volúmenes, combinaciones, entre otras se presentan un espacio de medida de dimensión superior porque se genera un espacio igual a la suma de las dimensiones de los espacios de medida de los factores.

Cabe anotar que existen dimensiones de tipo simples, producto y cociente, estas se indican a continuación:

Dimensiones simples: Longitud, tiempo, peso, costo.

Dimensiones producto: área, volumen.

Dimensiones cociente*:* velocidad, densidad, valor unitario.

Las dimensiones simples pueden ser medidas directamente, contrario a las dimensiones producto y cociente son medidas con frecuencia de manera indirecta, por mediación de las

medidas simples.

Como fue visto en las resolución de problemas con estructuras multiplicativas, son relaciones donde es necesario la aplicación de las operaciones de la multiplicación, la división o la combinación de ambas, por tanto es necesario explorar los posibles errores en el uso de los algoritmos de las operaciones en mención.

1.5.4.4.2 Caracterización de los errores en los algoritmos de la multiplicación y división según Maza (1991) en los problemas de tipo multiplicativo

Maza (1991) identifica algunos errores en el caso del algoritmo de la multiplicación, los cuales se presentan cuando los estudiantes reducen este aprendizaje a una técnica, a un aprendizaje del procedimiento, es decir el algoritmo de la multiplicación es una mera sucesión de pasos ordenados justificables, sin embargo si el algoritmo se aprende meramente como una simple técnica, y no se llega a comprender completamente las razones de cada caso, el aprendizaje está lleno de rigidez, resultando difícil emplear distintos caminos, enfrentarse a todas las posibilidades que pueden presentarse. Por ejemplo, pueden surgir uno o más ceros entre el multiplicando ¿qué se hace entonces?, ¿y sí los ceros aparecen en el multiplicador?, ya que al asumir el algoritmo como una simple técnica, el estudiante no sabría qué hacer en estos casos, se bloquearía el proceso al llegar a alguna de las anteriores situaciones.

Esta forma de aprendizaje tiene una segunda implicación, y es que el maestro se detiene en los errores más frecuentes para repasar la técnica tantas veces como crea conveniente, al respecto Maza afirma (1991):

> Estos errores corresponden, precisamente por la frecuencia en que se presentan, a los principales obstáculos cognitivos con que se enfrenta el alumno. Estos obstáculos pueden tener un origen

> diverso pero denotan, en todo caso, una dificultad en enlazar el conocimiento conceptual con el procedimental. Tratados exclusivamente como procedimientos los obstáculos se enmascaran (a través de la automatización) pero no se superan realmente. (p. 96)

Lo anterior anuncia que en el aprendizaje del algoritmo de la multiplicación, algunos estudiantes presentan errores con frecuencia al requerir estructuras multiplicativas en la resolución de situaciones problema, esto se debe no sólo a la forma como se ha aprendido el algoritmo de la multiplicación (forma técnica), sino a obstáculos de forma cognitiva, teniendo como indicio que al enfrentarse a una situación, la cual requiera utilizar esta estructura, seguramente, el estudiante difícilmente podrá enlazar los conocimientos conceptuales con los procedimentales y así no ubicar las operaciones necesarias, por las anteriores razones de los obstáculos.

Maza (1991) reconoce que existen errores de Naturaleza Sintáctica, denominados a aquellos que evidencian relación de los símbolos y signos del lenguaje, además dice que para comprender adecuadamente los errores, siquiera en su versión procedimental, se deben examinar con cierto detalle las acciones necesarias para desarrollar el algoritmo clásico, usualmente enseñado en las aulas. Se reconocen las siguientes acciones: (pág. 97)

1. Una aplicación sistemática de la propiedad distributiva con respecto de la suma. Así:

   $346 \times 23 = 346 \times 3 + 346 \times 20$

2. La reducción a las multiplicaciones de un dígito por el multiplicando requiere la aplicación de la propiedad asociativa, el conocimiento de la multiplicación por las decenas y naturalmente el dominio de las multiplicaciones básicas.

   $2 \times 36 = (2 \times 6) + (2 \times 30)$

3. Los problemas que sufre el estudiante con las llevadas señala el hecho de que resulta

imprescindible un conocimiento adecuado del sistema de numeración decimal y su funcionamiento. Por ejemplo el caso anterior 36 por 2, si no reconoce la posición de las 3 decenas (030), cometería el siguiente error:

$2 \times 36 = (2 \times 6) + (2 \times 3)$

4. El uso relativo de las dos multiplicaciones en que queda dividido el algoritmo del caso uno 36×3 y 346×20, requiere una labor de simplificación del cero de las unidades en el segundo producto, esta tarea, en la que puede no insistirse demasiado, puede generar errores de ubicación de los resultados que luego han de sumarse.

Además, Maza (1991), para los errores del algoritmo de la multiplicación señala tres orígenes distintos (p. 99):

Origen 1: Errores en los hechos multiplicativos básicos: son frecuentes en los comienzos del aprendizaje algorítmico, por ejemplo por el hecho de que un estudiante considere que 5 X 9 son 40 no significa que desconozca el algoritmo o que falle en alguno de los puntos conceptuales propios del mismo.

Origen 2: Errores en la aplicación de la propiedad distributiva: en ocasiones surgen distintas detenciones en el procedimiento debidas a una deficiente aplicación de la propiedad distributiva. Como se evidencia en los siguientes ejemplos:

Ejemplo a: En este caso, 452 por 3, se ha operado el multiplicador por las unidades del multiplicando, es decir 3 por 2 pero, para las restantes cifras de éste último, se opta por repetirlas sin multiplicar, esto se expone en la figura 17 a continuación.

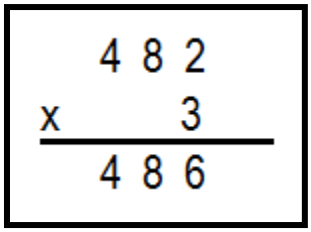


Figura 17. Multiplicación por una cifra

Ejemplo b: Se observa en el siguiente ejemplo al multiplicar 45 por 362, caso similar es aquél donde existe un aparente olvido de las decenas del multiplicador, se multiplica 5 por 362, olvidando multiplicar el 4 (040) de multiplicador por el 362 esto se exhibe en la figura 18 a continuación.

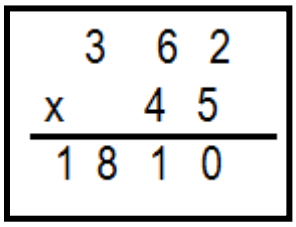


Figura 18. Multiplicación por dos cifras

Origen 3: Errores de la interpretación de las llevadas: existe numerosas equivocaciones que se pueden adjudicar al uso de llevadas en la multiplicación, algunas de ellas se muestran en los siguientes tres casos:

Caso a: En este caso, operar 7 por 426, sucede que las llevadas (se señalan encima del multiplicando), es decir el 4 encima del 2 y el 4 encima del 4, son sumadas a la cifra correspondiente de éste, antes de operarla con el multiplicador. Como se muestra en la siguiente figura 19.

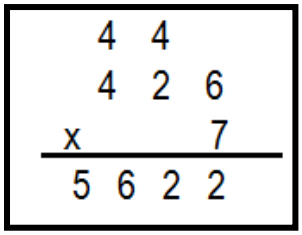


Figura 17. Errores de las llevadas en la multiplicación

Caso b: En este ejemplo, al multiplicar 428 × 7, se señala que tras realizar correctamente el producto de las unidades del multiplicador por el multiplicando, es decir 7 por 8, se opera el multiplicador por las llevadas de las decenas y centenas, es decir, en vez de multiplicar 7 por 2 se multiplica 7 por el 5 decenas (050) y 7 por 3centenas (300), que viene a sustituir el multiplicando, se observa en la figura 20

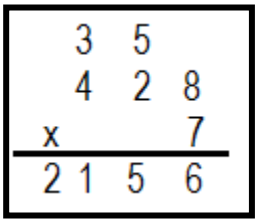


Figura 18. Errores en la multiplicación a partir de las decenas del multiplicando

Caso c: Otro caso, es en el cual las llevadas pueden simplemente también, olvidarse como es este ejemplo 8 por 237 donde se halla correctamente el producto de 8 por 7 igual a 56, pero se olvida de llevar 5 decenas (050) y de igual forma se halla el producto de 8 por 3, sin teneren cuenta o simplemente se olvida de llevar 2 decenas (020) para finalizar con el producto de 8 por 2, esto se presenta en la figura 21.

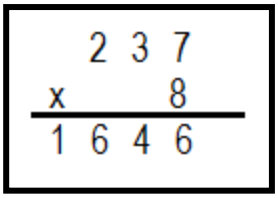


Figura 19. Errores en la omisión de las llevadas en la multiplicación

Maza (1991), reconoce también que existen errores de Naturaleza Semántica, denominados a aquellos que evidencian relación de los signos y significados donde se refiere que, poseer un adecuado conocimiento conceptual de la multiplicación es imprescindible para realizar bien el algoritmo, pero poseer un adecuado conocimiento conceptual de la multiplicación no es suficiente, teniendo en cuenta que este debe ser trasladado a la esfera del procedimiento. Las dos formas del conocimiento (conceptual y procedimental) son necesarias pero no suficientes para realizar el algoritmo en mención. Entonces es necesaria además una adecuada conexión entre ambos tipos de conocimiento.

Resnick citado por Maza (1991), reconoce la importancia de la conexión entre ambos conocimientos, hace referencia que el conocimiento conceptual sirve para marcar restricciones en el procedimiento. Además afirma que si la propiedad distributiva de la multiplicación ha sido comprendida y se entiende la descomposición, difícilmente se podrá cometer el error de realizar la primera multiplicación y parar el procedimiento. Hace falta terminar el proceso empezado, lo ejemplifica de la siguiente manera al multiplicar 34 por 326 así: $326 \times 34 = 326 \times 4 + 326 \times 30$ (p. 101)

En este sentido, el mismo conocimiento de la propiedad distributiva impone restricciones al tratamiento de las llevadas, es el caso de la multiplicación de 3 por 238, la operación entre unidades genera 4 unidades que deben llevarse al resultado final, así, las llevadas pertenecen al último resultado y ello se comprende, no cabe multiplicar 3 por estas llevadas.

$$3\times 238 = 3\times 8 + 3\times 30 + 3\times 200$$

De acuerdo a lo anterior, se deduce que el conocimiento conceptual previo impone restricciones a las acciones a realizar y a las formas de corrección que lograra establecer el estudiante ante un paso desconocido. Además Maza (1991), concluye que esta forma de conocimiento puede guiar la propia construcción del algoritmo, dando un sentido a cada uno de los pasos a realizar. Así mismo, sostiene que se debe partir de una serie de conceptos y relaciones establecidas antes, los más relevantes de los cuales son, para la multiplicación se detallan a continuación:

a. Conocimiento del sistema decimal de numeración
b. Propiedad asociativa de la multiplicación
c. Forma de multiplicación de un número por decenas
d. Memorización de los hechos multiplicativos básicos
e. Interpretación de la multiplicación como suma reiterada.

A partir de este de este último literal (e), entendiendo esta operación a través de la suma, aplicando en el momento necesario cada uno de los puntos anteriores, el estudiante es capaz de construir su propia forma de algoritmo que pueda desembocar o no en la disposición clásica. (p. 102).

Continuando con las reflexiones de Maza (1991), asevera que se suele afirmar que el aprendizaje de la división siempre debe ser posterior al de la multiplicación. No sólo por el hecho de que aquella operación se enfoque como "inversa" de ésta y, por tanto, dependa de ella, sino porque el estudiante encuentra más dificultades en realizar el algoritmo de la división que el de la multiplicación, algunas de estas dificultades se explican en las enumeraciones del 1 al 6, a continuación:

1. La "inversión" de la multiplicación: Se puede sostener que esta característica de la división provoca mayores dificultades de aprendizaje. Si la multiplicación responde a una simple (fundamentalmente, reiterar una suma) la división debe invertir dicho proceso. Hay algo falso y algo cierto en esta explicación. Lo falso es olvidar la entidad que, por sí misma tiene la división. Si la multiplicación responde a la idea de "añadir", "reiterar" o "combinar", la división responde a otras acciones de igual índole: "repartir" o agrupar", sólo desde la acción de combinar puede entenderse inmediatamente a esta operación como inversa a la multiplicación.
2. La propiedad y el sistema decimal: El algoritmo clásico de la división resulta de una aplicación inicial de la propiedad distributiva de la división respecto de la suma y de un empleo sistemático del sistema decimal de numeración. Por ejemplo 458×4 se realiza teniendo en cuenta que $(400+50+8) \div 4 = 400 \div 4 + 50 \div 4 + 8 \div 4$.

   Por otro lado, al hacer $50 \div 4$ resulta un resto de una decena, que se debe transformar en unidades para concluir el algoritmo $8 \div 4$.

   Este método llamado consecuentemente "distributivo", presenta dificultades para la adquisición del algoritmo por parte del estudiante, sin embargo existe otro método llamado "sustractivo" que debe constituir un intermedio necesario entre la inversión

de las multiplicaciones básicas y el método distributivo, su introducción, podrá disminuir las dificultades del aprendizaje.

3. El tamaño del dividendo y el divisor: Existen varios casos, entre ellos en que el divisor consta de una sola cifra o de dos y, dentro de cada uno el caso en el que el dividendo cuenta con dos o tres cifras. Ejemplo: $76 \div 4$ ó $837 \div 23$, aunque el método para realizar es el mismo, resulta más sencillo hallar los múltiplos[3] de 4 que los de 23. Este criterio puede igualmente aplicarse a divisiones mayores, cuando el dividendo tiene cuatro o cinco cifras y el divisor tres pero, en general estos casos no añade nada nuevo al algoritmo.
4. El tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor: Cuando el divisor es de un cifra, se puede distinguir hasta tres casos diferentes: Que la primera cifra del dividendo sea menor que ella ejemplo $236 \div 4$, que sea igual $436 \div 4$ o que sea mayor $936 \div 4$, para el método distributivo se cree que presenta dificultades, no tanto si el método aplicado es el sustractivo.

   En efecto, $236 \div 4$ implica únicamente la división de decenas y unidades mientras que, en los dos casos restantes, se deben dividir también las centenas. Dentro de estos dos últimos casos, cuando la primera cifra del dividendo sea igual al divisor, el algoritmo será algo más fácil por cuanto la división de las centenas es fácilmente realizable, sin embargo, esta distinción no es tan aplicable a los divisores de dos cifras para los que el algoritmo ya ha debido ser automatizado en gran medida y esta viene a ser una dificultad menor o mayor.
5. La presencia de ceros: Cuando existe un cero intermedio en el dividendo se observa mayor dificultad. Ello se puede extender, en general, al caso en que un resultado

[3] a es múltiplo de b, para todo $a, b, c, \in \mathbb{N}$ si existe un c tal que $a \times c = b$

parcial en el dividendo es menor que el divisor. Ejemplo: $406 \div 4$ la dificultad se encontraría en el paso siguiente a dividir las centenas lo que puede concluir con el "olvido" de colocar un cero en el cociente para las decenas.

De igual manera, se encuentra el caso de ceros al dividir por ejemplo: $350 \div 40$, la regla de que esta división es reducible a $35 \div 4$, es conveniente y se enmarcaría en el caso general de transformar unas divisiones en otras más sencillas, dividiendo o (multiplicando) los dos términos de la división al mismo tiempo, evidenciando que se conserva el mismo cociente. Casos que se pueden resolver con cierta facilidad.

6. La división exacta e inexacta: Este constituye una dificultad que no es característica de algoritmo en sí mismo, más bien del propio concepto de la división.

Continuando con la descripción y explicación de los errores alrededor de la multiplicación con números naturales, pueden presentarse errores en la aplicación de las propiedades así:

Propiedad conmutativa: El producto de dos números naturales es el mismo, la representación de cada término es omitida, siendo diferente el multiplicando del multiplicador, es decir:

$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo:

$3 \times 2 = 2 \times 3$, en su representación es: $3 \times 2 = 3 + 3 = 6$

$$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6$$

Otro error con esta propiedad es que los estudiantes puedan validarla para la división.

Ejemplo:

$6 \div 3 = 2$ Sea igual al aplicar la propiedad conmutativa así: $3 \div 6 = 0.5$

Propiedad asociativa: Esta propiedad asocia a dos o más números con otro número. Por ello, el producto de tres números *a, b, c* en un orden definido $a \times b \times c$ puede hacerse de dos formas:

$(a \times b) \times c$
$a \times (b \times c)$

En esta operación se hace uso del paréntesis para indicar cuál multiplicación u operación se resuelve primero. Un error con esta propiedad es que los estudiantes puedan validarla para la división.

$$(a \div b) \div c$$

$$a \div (b \div c)$$

Ejemplo:

$(10 \div 5) \div 2 = 1$ Diferente de $10 \div (5 \div 2) = 4$

Propiedad distributiva: Esta propiedad con respecto a la suma da cuenta de la multiplicación de un número por la suma de otros dos, es decir:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Ejemplo:

$5 \times (3 + 2) = 5 \times 3 + 5 \times 2 = 25$. Se puede cometer el siguiente error

$$5 \times (3 + 2) = 5 \times 3 + 2 = 17.$$

Omitiendo que el número que se está descompuesto aditivamente es el multiplicador

A partir de las ideas anteriores, se puede deducir que un argumento común entre Maza (1991) y Vergnaud (1991), indica que tanto las estructuras multiplicativas como su aplicación, debe ser entendidas y abordadas con mucha claridad por parte del docente, para así evitar que el estudiante pueda caer en algunos errores de comprensión y por lo tanto en errores de aplicación, identificados anteriormente; por ello es pertinente mencionar algunos criterios que permitan establecer una diferencia entre los textos matemáticos y los textos escolares de matemática, teniendo en cuenta que no es lo mismo el concepto matemático formalizado inmerso en una teoría como la de Vergnaud y el concepto matemático escolar ofrecido por los libros de texto.

De lo anterior se infiere, que la estructura multiplicativa no es sólo la multiplicación, sino un conjunto de categorías que se aplican en diversas situaciones problema y además las diferentes situaciones que se resuelven empleando diagramas de isomorfismo de medidas resultan ser abordados con dificultad por los estudiantes.

Para continuar, es necesario conocer sobre los términos problema, y resolución de problemas en algunos autores relevantes en el campo de la estructura multiplicativa. Acerca del término problema vocablo que viene del griego π ρ ο β α λ λ ε ι ν (problema) que quiere decir "proyección", "algo lanzado hacia adelante", en el ámbito de las matemáticas, la palabra "problema" ha recibido diferentes definiciones de varios autores durante muchos años, por ejemplo: para Kilpatrick (1983), "se puede definir un problema como una situación en la que se debe alcanzar una meta, en la cual está bloqueada la ruta directa", además para Cooney, Davis y Henderson (1975)"para que una pregunta sea un problema, ella debe presentar es un reto que no puede ser resuelto por ningún procedimiento rutinario conocido por el estudiante"(p. 242).

Siguiendo con este término, existen a su vez otras palabras para referirse a problema

como: obstáculo, dificultad, reto, razonamiento, pensamiento reflexivo, desconocimiento de la solución. Los requisitos que determinan para que una situación sea un problema por ejemplo que quienes lo van a resolver no deben conocer las respuestas, ni disponer de un procedimiento algorítmico mediante el cual puedan determinarla inmediatamente, además deben activar la mente de una persona en pro de una solución, porque éste es un proceso de razonamiento que ayuda a pensar matemáticamente. Por otro lado, Stewart (2004) dice que "el objetivo de las matemáticas es comprender, no se trata simplemente de hallar la respuesta correcta, sino más bien de comprender por qué existe una respuesta, pero lo que sobre todo tienen es significado" (p. 13-14).

Teniendo en cuenta que el presente trabajo se centra en la resolución de problemas con estructuras multiplicativas para el grado quinto, es necesario caracterizar la noción de problema aritmético, por ello, Puig y Cerdán (1988) enuncian esta noción en la escuela como aquellos que se proponen, se enuncian y se resuelven. En el ambiente escolar si se quiere saber qué se entiende por un problema aritmético, se deben describir las características de su enunciado y de su resolución. En ese sentido Puig y Cerdán (1988) definen que:

> Los problemas aritméticos son, en general, problemas de aplicación, lo que hace que aparezcan enunciados en contextos variados. Así puede parecer difícil en ocasiones decidir si un problema puede ser considerado como un problema aritmético, cuando está embebido en un contexto geométrico, físico o biológico. Para nosotros en este libro, un problema será un problema aritmético siempre que los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos de los contextos que aparecen en el enunciado no sean decisivos a la hora de resolver el problema. (p.6).

Por otra parte, en cuanto al término resolución de problemas, Guzmán (2007), menciona que este tiene orígenes históricos que ayudan a reconocer este proceso y que actúan como un

excelente auxiliar porque con esto, se hace evidente la forma peculiar de aparecer las ideas en matemáticas, señalar los problemas de cada época, su evolución, la situación en la que se encuentran actualmente, a su vez para entender y hacer comprender un concepto difícil del modo más adecuado (p.18-19), es decir, históricamente la resolución de problemas tiene una gran importancia porque a partir de un problema o de una situación por resolver, es que se tiene hoy día todo un gran corpus teórico en matemáticas.

Por consiguiente Guzmán (2007), sostiene que la resolución de problemas tiene la intención de transmitir, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de estos. Tal experiencia debe permitir al alumno manipular objetos matemáticos, activar su capacidad mental, ejercitar su creatividad y reflexionar sobre su propio aprendizaje (metacognición), al tiempo que se prepara para otros problemas con los que adquiere confianza en sí mismo.

CAPÍTULO II

2. PRESENTACIÓN DE LOS TEXTOS Y REJILLA DE ANÁLISIS

2.1 Presentación de la rejilla de análisis, propuesta para el contraste entre los textos escolares de matemática de grado 5° y las preguntas seleccionadas en la Prueba Saber 5° de los años 2012 y 2013

En este apartado se presentan la metodología de análisis, el bosquejo de la rejilla, los textos escolares seleccionados para el análisis de la coherencia entre lo propuesto por los mismos y lo evaluado en las Pruebas Saber 5°, en una serie de preguntas alrededor de la resolución de problemas con estructuras multiplicativas. Esta presentación indica además de las características generales de cada texto o pregunta, los criterios de selección y algunos comentarios sobre la relación que guardan tanto los apartados de los textos como las preguntas con el currículo vigente expuesto en los Lineamientos Curriculares para Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

2.1.1 Metodología del análisis

De acuerdo al marco teórico del capítulo I, se expuso que Vergnaud (1991), ha clasificado las estructuras multiplicativas en dos grandes categorías, el isomorfismos de medidas y producto de medidas, las cuales a su vez contienen clases; para el isomorfismo de medidas: la multiplicación, división partitiva, división cuotitiva y regla de tres, así mismo para el producto de

medidas: dimensión simple, dimensión producto y dimensión cociente, estos elementos son relevantes para el análisis de las situaciones problema que están relacionados con las estructuras en mención, propuestos en los dos textos escolares seleccionados y aplicados en algunas preguntas en las Pruebas Saber 5° de los años 2012- 2013. El análisis se realizó de la siguiente manera:

- A partir de la clasificación de las estructuras multiplicativas se observa el proceso de la resolución de problemas propuestos por cada uno de los textos seleccionados, así evidenciar en qué categoría y clase se ubican las situaciones en mención.

- Se realizó el mismo análisis de esquemas pertenecientes a las estructuras en referencia en algunas preguntas en dos cuadernillos de las Pruebas Saber 5° elegidos, correspondientes a los años 2012 – 2013.

A continuación se presenta la tabla 2, que contiene la clasificación de las estructuras multiplicativas expuesta por Vergnaud (1991) y algunos posibles errores en la aplicación del algoritmo de la multiplicación y la división según Maza (1991).

Tabla 2. Bosquejo de rejilla contraste entre preguntas Pruebas Saber y textos escolares

VERGNAUD	CATEGORÍA	CLASES	Texto 1	Texto 2	Prueba Saber 2012	Prueba Saber 2013	Posibles errores según Maza	MAZA
	Isomorfismo de Medidas	Multiplicación						
		División Partitiva						
		División Cuotitiva						
		Regla de Tres						
	Producto de Medidas	Dimensión Simple						
		Dimensión Producto						
		Dimensión Cociente						

La rejilla esboza las categorías de la estructura multiplicativa para el análisis en los textos escolares y las preguntas de las Pruebas Saber 5° seleccionadas.

2.1.2 Presentación general de los textos y los criterios para su selección

Para la selección de los libros de textos se realizó un sondeo en algunas de las librerías más visitadas de la ciudad de Cali, como son: Librería Atenas, Librería Nacional y Librería Panamericana; preguntando sobre cuáles son los libros más vendidos de matemática para grado quinto de la Educación Básica, obteniendo como resultado lo siguientes: Matemáticas para pensar Editorial Norma (2013), Estrategias en matemáticas Editorial Libros y Libros (2008), Rutas

matemáticas Editorial Santillana (2013), y Navegantes Editorial Norma (2011).

A su vez se indagó a cuatro docentes de matemática, que llevan varios años de trayectoria profesional en el grado quinto de la Educación Básica y que actualmente se desempeñan como docentes en instituciones escolares de carácter privado, acerca de ¿qué libro es más usado y por qué?, a lo cual indicaron que los textos Navegantes Matemáticas 5 Editorial Norma, Estrategias en Matemáticas Editorial. Libros y Libros y Rutas matemáticas Editorial Santillana son los más empleados dado que para los docentes consultados, estos textos ofrecen mayor ejercitación en la aplicación de los conceptos, adicional a esto según los docentes por tradición, las editoriales ofrecen ser coherentes con las políticas curriculares vigentes desde el MEN, está información se corroboró en la página web que ofrece cada editorial.

Para la selección de los textos escolares de matemáticas para el grado 5° de la Educación Básica colombiana, aparte de la vigencia, comercialización y uso de los mismos, debían indicar que su propuesta pedagógica estaba de acuerdo con los referentes curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional en particular de las publicaciones mencionadas anteriormente (MEN, 1998 y 2006). Por consiguiente, después de realizar el sondeo en las tres librerías reconocidas, a un grupo de docentes y su verificación en las páginas web, se determinó que los textos escolares escogidos son: Navegantes Matemáticas 5 Editorial Norma (2011) y Estrategias en Matemáticas 5 Editorial Libros & Libros (2008).

Una primera mirada a los textos sobre la resolución de problemas con estructuras multiplicativas arroja los siguientes resultados: El libro de texto Estrategias en Matemáticas ofrece 171 situaciones problemas, de los cuales 53 hacen referencia al concepto de las estructuras

multiplicativas, repartidos en 7 problemas de multiplicación, 23 de división, 4 de áreas, 3 volumen y 16 de proporciones.

Y en el caso del texto escolar Navegantes Matemáticas 5º el cual presenta 235 situaciones problema, de las cuales 34 corresponden a la estructura multiplicativa, repartidos en 5 problemas de multiplicación y división, 4 de áreas, 2 de volumen, 12 de proporciones y 11 de regla de tres simple.

A continuación se presentan las características principales de cada uno de los textos y la portada del mismo:

2.1.2.1 Texto Escolar 1: Navegantes Matemáticas 5, editorial Norma (2011)

En la tabla 3 aparece la información general del texto 1, que aborda el nombre del texto, los autores, la editorial y el año de publicación.

Tabla 3. Información del texto escolar 1

Nombre del Texto Escolar:	Navegantes Matemáticas 5
Autores:	Ana Gabriela Braco León. Carmen Lucía Fajardo Núñez Luz Constanza Garzón Cortés Nidia Patricia López Rivera. Claudia Salazar Amaya. José Torres Duarte
Editorial:	Grupo Editorial Norma
Año de publicación:	Copyright 2009, cuarta reimpresión, 2011 Colombia.

Seguidamente en la figura 21 se muestra la portada del texto escolar 1

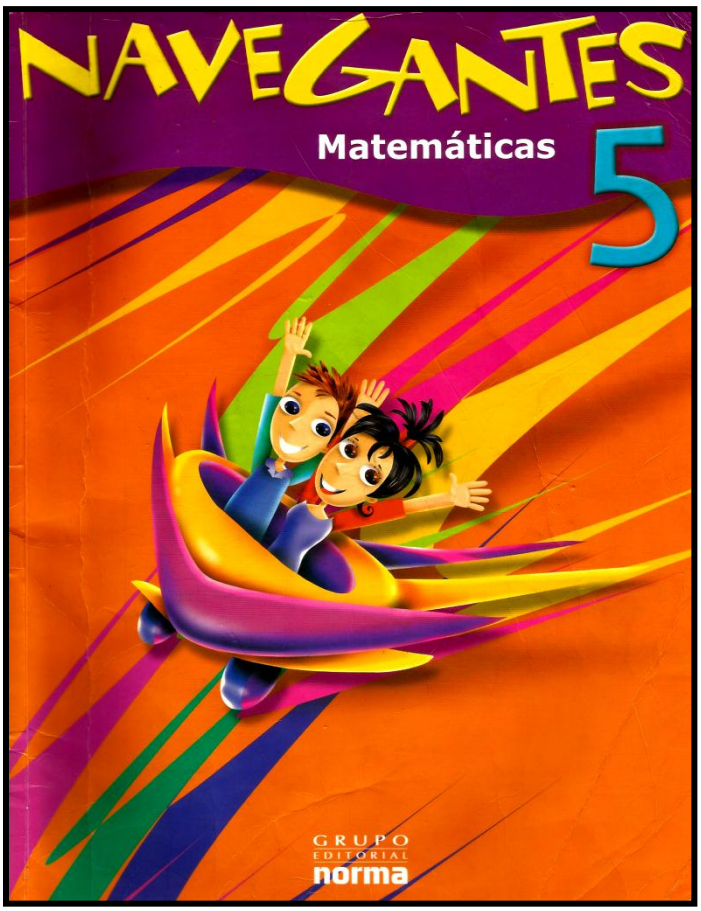


Figura 20. Portada del texto No 1

Su contenido está organizado en 8 unidades, cada unidad tiene como título el nombre de uno o varios conceptos matemáticos los cuales se presentan en la Tabla 3; cada unidad está organizada por lecciones con su respectivo logro. Así mismo dentro de cada unidad se indica uno o dos pensamientos con los que se relacionan según los cinco pensamientos expuestos en los documentos curriculares (MEN, 1998 y 2006), adicional a esto se enuncian los correspondientes estándares y procesos para alcanzar las competencias. Al inicio de cada unidad se encuentran las

actividades preparatorias que pueden introducir, reforzar o recordar al lector los contenidos objeto de estudio y al finalizar cada unidad se presentan ejercicios de aplicación del concepto estudiado, además se incorporan preguntas tipo Pruebas Saber, con ello el texto indica que se pretende que el estudiante compruebe las habilidades y competencias alcanzadas en cada lección trabajada y al finalizar todas las unidades, es decir en las páginas finales del texto escolar 1 se encuentran un cuadernillo con ejercicios y actividades para reforzar como complemento de los temas abordados y un glosario con algunas palabras y conceptos.

Ahora, la tabla 3 indica la organización del contenido del texto, número de unidad, título de la unidad y tipo de pensamiento (s) asociado desde el marco legal curricular colombiano MEN (1998, 2006)

Tabla 4. Organización de las unidades texto 1

N° de Unidad	**Título de la unidad (Contenido)**	**Tipo de Pensamiento (s) asociados desde el marco legal curricular MEN (1998,2006)**
Uno	Conjuntos	Numérico y Espacial
Dos	Números naturales y operaciones	Numérico
Tres	Teoría de Números	Numérico y Variacional
Cuatro	Geometría y Medición	Espacial y Métrico
Cinco	Fracciones	Numérico
Seis	Números Decimales	Numérico
Siete	Razones y Proporciones	Variacional
Ocho	Estadística	Aleatorio

En el texto No 1, se realizó el análisis de las unidades que se relacionan con las estructuras multiplicativas, las cuales corresponden al número uno, dos, cuatro y siete.

A continuación, se presenta en la figura 23 un fragmento del título y contenidos del texto correspondiente a la unidad uno.

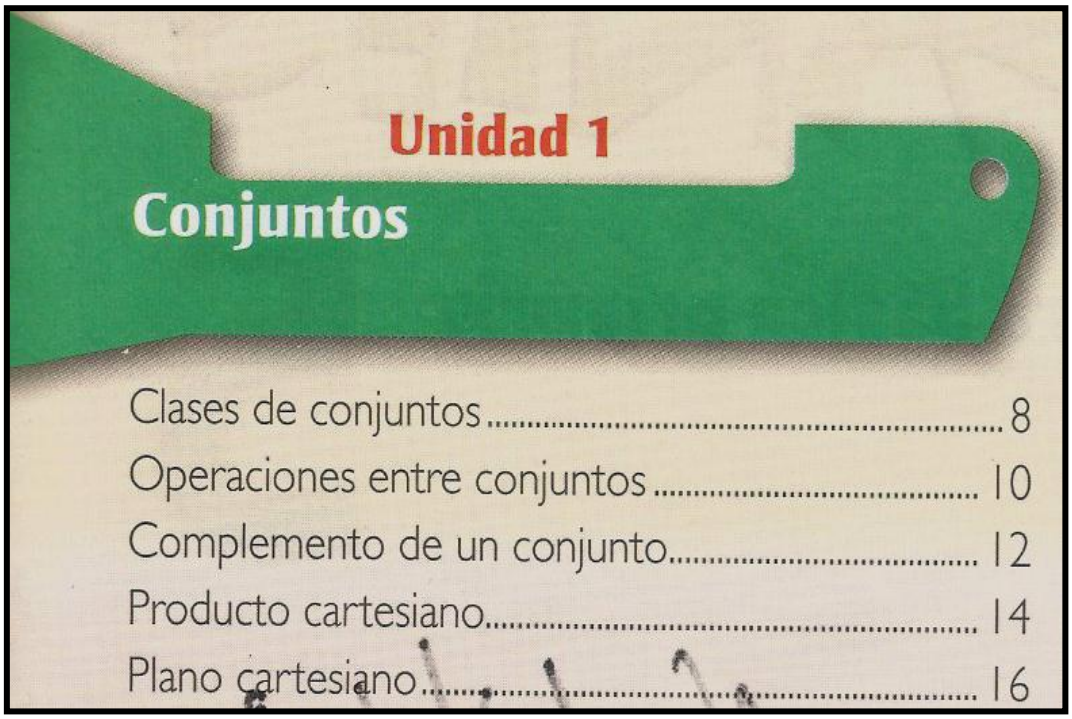


Figura 21. Contenido unidad 1

De esta unidad se tiene en cuenta el producto cartesiano y la representación en el plano cartesiano, página 14 a 16 del texto 1.

Seguidamente en la figura 24 se muestra la forma en que el texto expone la presentación de la unidad, donde aparecen los estándares y los procesos relacionados con el contenido de la unidad.

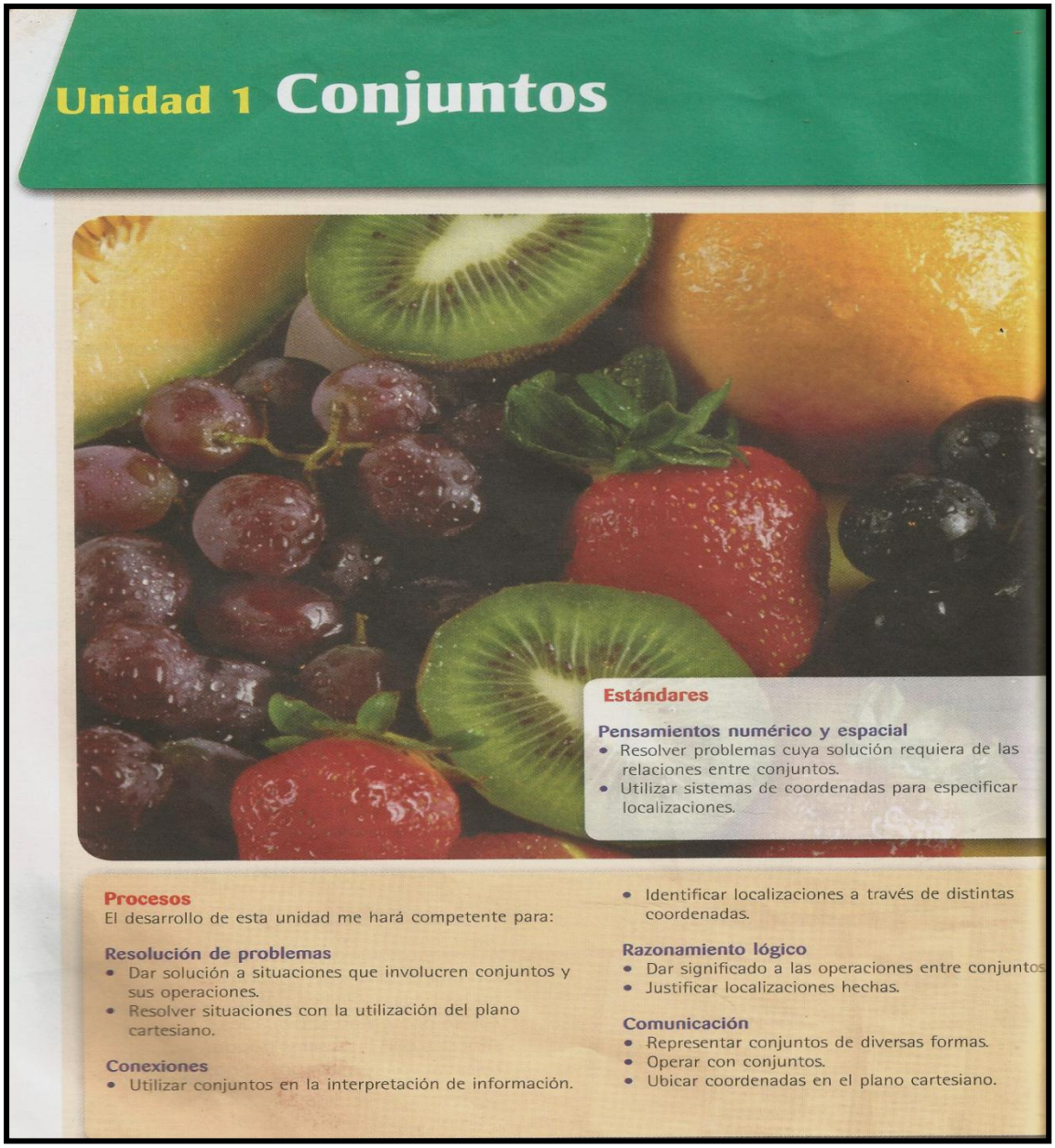


Figura 22. *Presentación Unidad 1*

En la figura 25 se expone la lección cuatro de la unidad uno, cuyo logro planteado en el texto escolar es *hallar el producto cartesiano de dos conjuntos*, se inicia proponiendo y resolviendo una situación problema para introducir el producto cartesiano, a partir de dos

conjuntos de elementos diferentes uno de blusas y otro de pantalones, seguidamente este ejemplo muestra todas las combinaciones posibles con los elementos.



Figura 23. Lección 4 Producto Cartesiano

Seguidamente en la figura 26 se evidencia la definición que el texto escolar indica para el concepto de producto cartesiano.

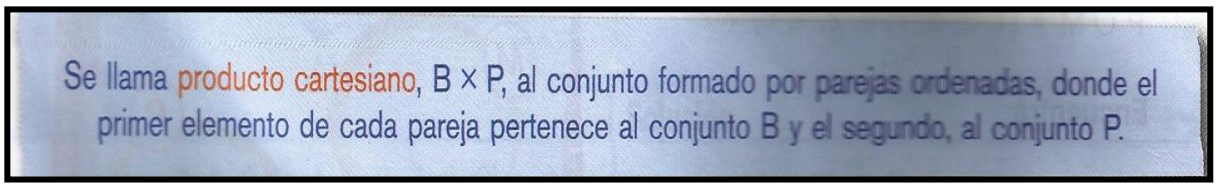


Figura 24. Definición Producto Cartesiano

En el texto escolar se amplía el concepto de producto cartesiano para indicar una forma de representarlo por medio del plano cartesiano, esto aparece en la lección No 5 cuyo logro planteado es *ubicar parejas ordenadas en el plano cartesiano*, en la figura 27 se muestra la definición del plano cartesiano y también se indican las partes o elementos que lo conforman.

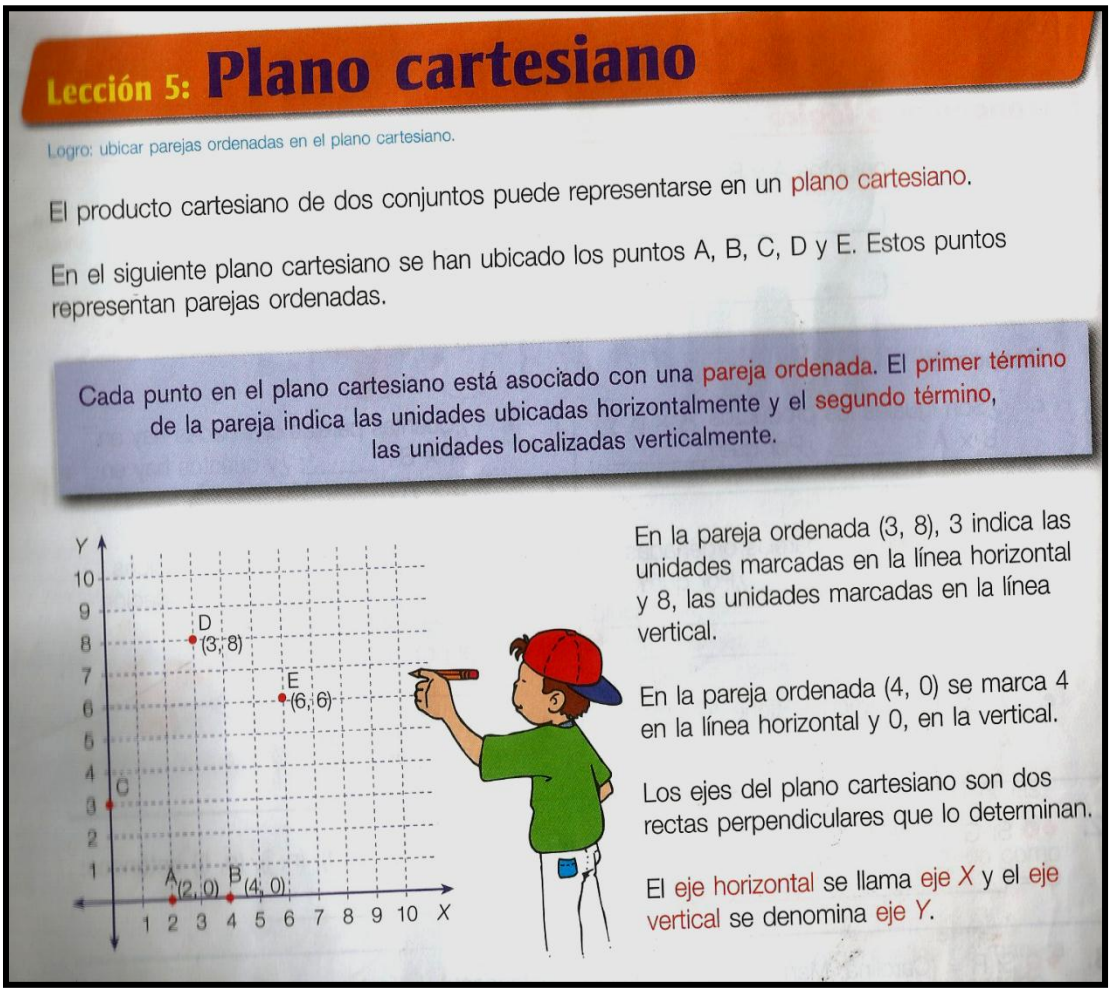
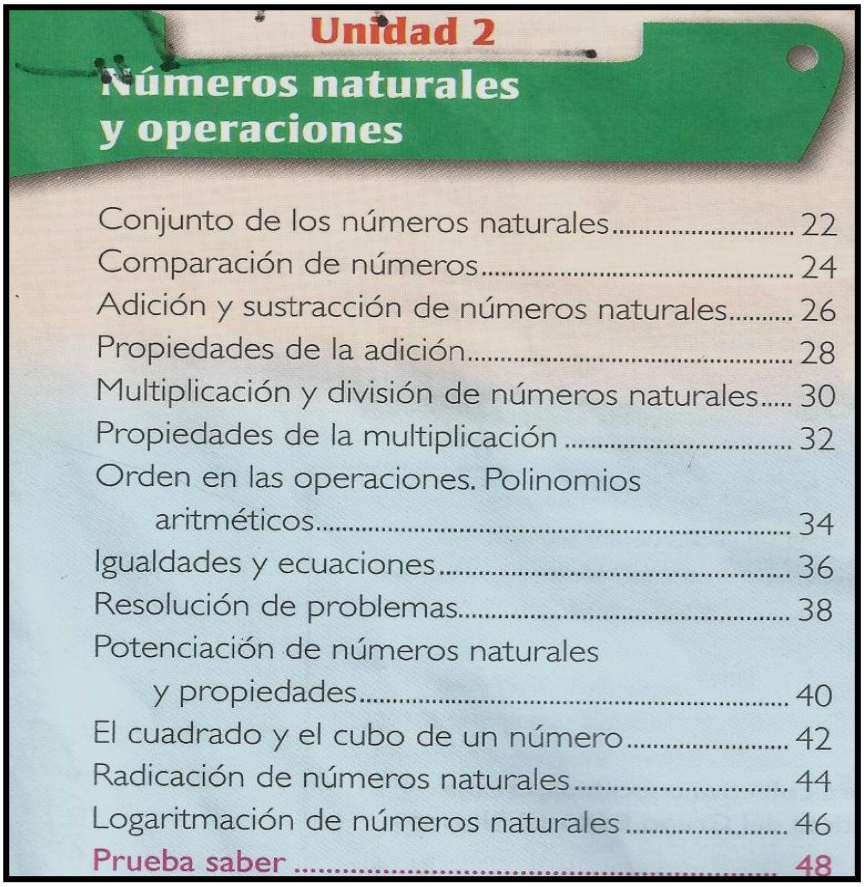


Figura 27 . Lección 5 Plano Cartesiano

De esta manera a partir de los modelos de estudio de la multiplicación se infiere que la forma de presentación de este primer problema resuelto y los ejercicios propuestos a los estudiantes corresponden al uso del modelo combinatorio.

Continuando se presenta lo correspondiente a la unidad 2 del texto escolar 1, en la figura 28 se muestra un fragmento de los contenidos de la unidad mencionada.



Unidad 2

Números naturales y operaciones

Conjunto de los números naturales 22
Comparación de números 24
Adición y sustracción de números naturales 26
Propiedades de la adición 28
Multiplicación y división de números naturales 30
Propiedades de la multiplicación 32
Orden en las operaciones. Polinomios aritméticos 34
Igualdades y ecuaciones 36
Resolución de problemas 38
Potenciación de números naturales y propiedades 40
El cuadrado y el cubo de un número 42
Radicación de números naturales 44
Logaritmación de números naturales 46
Prueba saber 48

Figura 25. Contenido unidad 2

De esta unidad se tiene en cuenta para el estudio, las lecciones que contiene la multiplicación y la división de números naturales, las propiedades y la resolución de problemas.

Seguidamente en la figura 29 se muestra la presentación que realiza el texto de esta unidad donde se indican los estándares y los procesos relacionados con el contenido de la unidad mencionada.

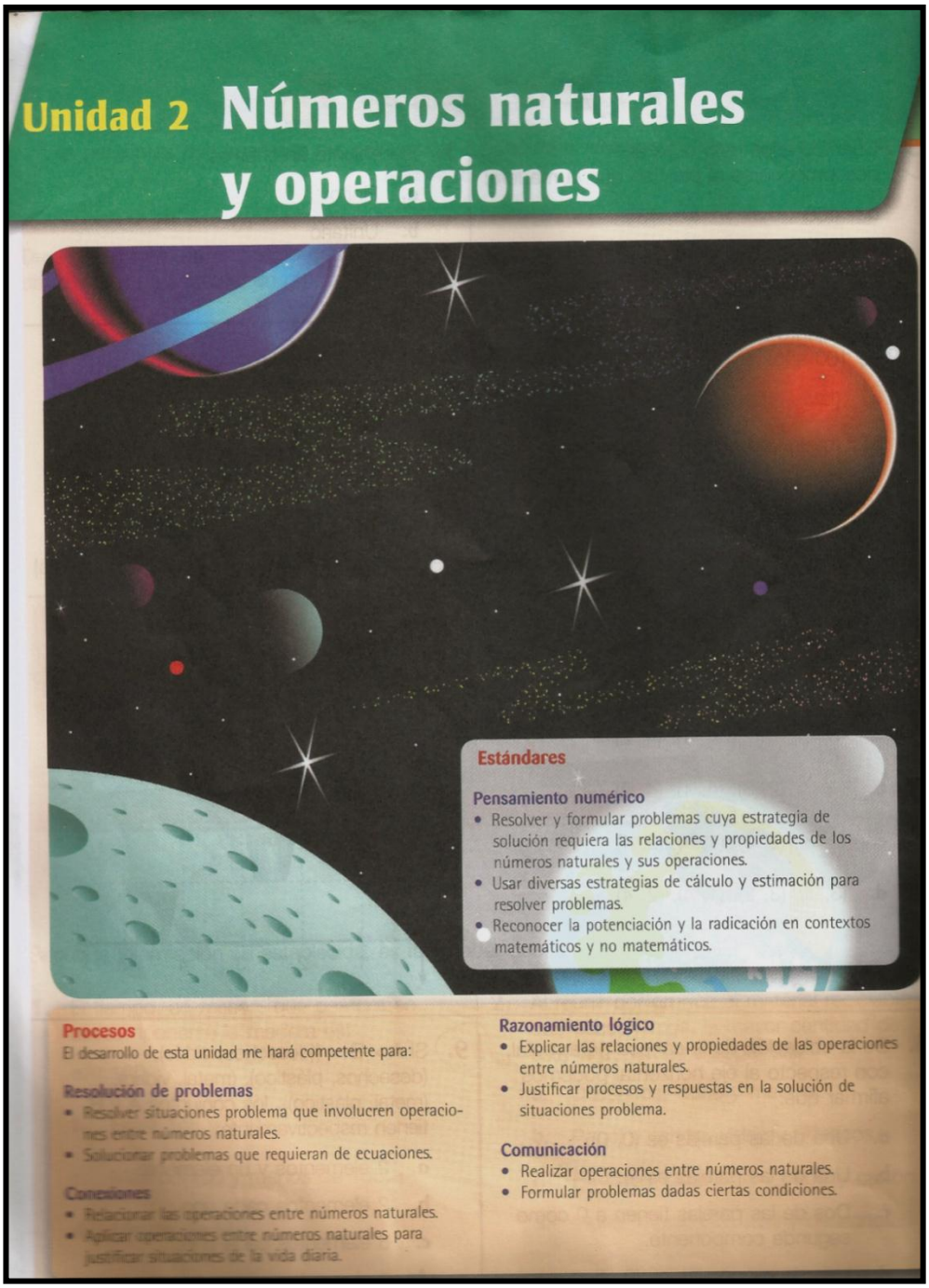
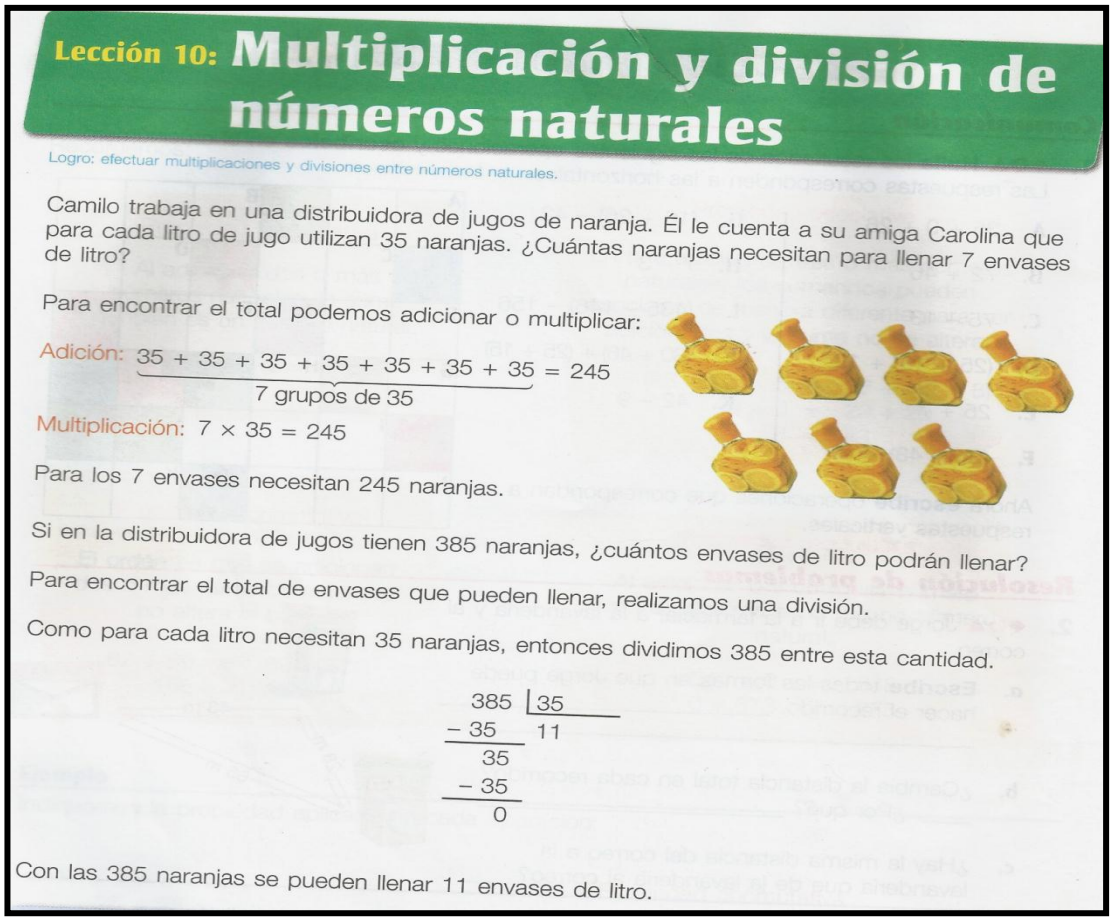


Figura 26. Presentación unidad 2

En la lección 10, de la unidad 2 se caracterizan el concepto de multiplicación y división de números naturales, cuyo logro planteado es *efectuar multiplicaciones y divisiones entre números naturales.* La figura 30 muestra cómo se realiza la introducción de estos conceptos.



Lección 10: Multiplicación y división de números naturales

Logro: efectuar multiplicaciones y divisiones entre números naturales.

Camilo trabaja en una distribuidora de jugos de naranja. Él le cuenta a su amiga Carolina que para cada litro de jugo utilizan 35 naranjas. ¿Cuántas naranjas necesitan para llenar 7 envases de litro?

Para encontrar el total podemos adicionar o multiplicar:

Adición: $\underbrace{35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35}_{\text{7 grupos de 35}} = 245$

Multiplicación: $7 \times 35 = 245$

Para los 7 envases necesitan 245 naranjas.

Si en la distribuidora de jugos tienen 385 naranjas, ¿cuántos envases de litro podrán llenar?

Para encontrar el total de envases que pueden llenar, realizamos una división.

Como para cada litro necesitan 35 naranjas, entonces dividimos 385 entre esta cantidad.

$$\begin{array}{r|l} 385 & 35 \\ -\,35 & 11 \\ \hline 35 & \\ -\,35 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

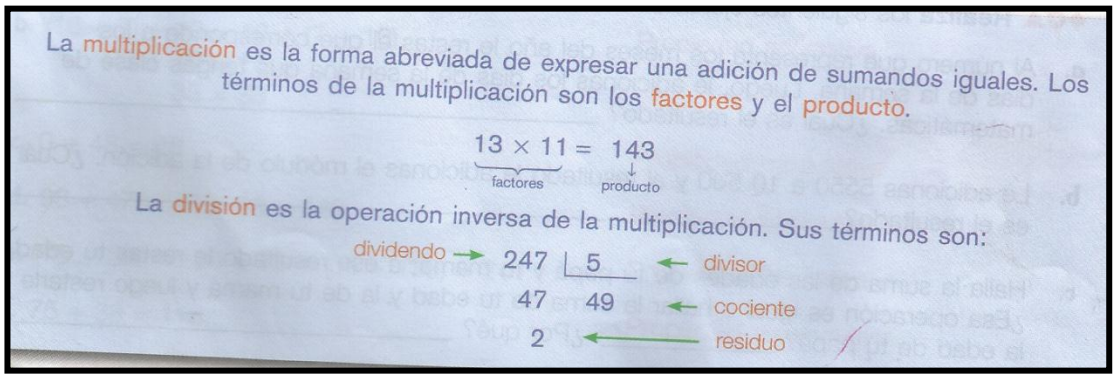
Con las 385 naranjas se pueden llenar 11 envases de litro.

Figura 27. Lección 10 Multiplicación y división de números naturales

Se observa que sobre el concepto de multiplicación, este se aborda desde un problema donde se sugiere "para encontrar el resultado podemos adicionar o multiplicar", luego se aplica una suma reiterada o repetitiva de sumandos iguales y se compara el resultado de la adición con el producto de dos factores, para luego verificar la igualdad en los resultados. Con la misma situación o problema que el texto escolar ha planteado, se introduce la división como modelo

partitivo en este se ofrece la cantidad total y el número de partes, solicitándose a los estudiantes hallar cada parte.

Seguidamente en la figura 31 se exponen los algoritmos de la multiplicación (producto) y de la división (cociente) y sus términos; además a estos, la multiplicación se define como una forma abreviada de una adición con sumandos iguales y la división como la operación inversa a la multiplicación.


La multiplicación es la forma abreviada de expresar una adición de sumandos iguales. Los términos de la multiplicación son los factores y el producto.

$13 \times 11 = 143$

factores — producto

La división es la operación inversa de la multiplicación. Sus términos son:

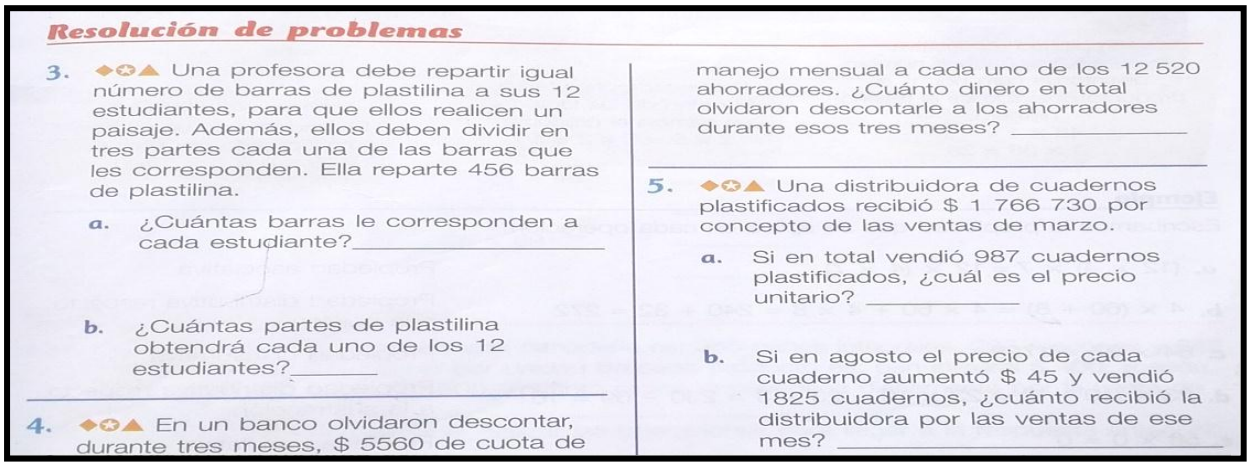
dividendo → 247 | 5 ← divisor

47 49 ← cociente

2 ← residuo

Figura 28. Algoritmo de la Multiplicación y la División

La figura 32 presenta el problema 1, 2, 3, de este trabajo de grado que corresponden a los problemas 3,4y 5 respectivamente planteados en el texto en la sección titulada resolución de problemas de la unidad dos.


Resolución de problemas

3. ◆✪▲ Una profesora debe repartir igual número de barras de plastilina a sus 12 estudiantes, para que ellos realicen un paisaje. Además, ellos deben dividir en tres partes cada una de las barras que les corresponden. Ella reparte 456 barras de plastilina.

a. ¿Cuántas barras le corresponden a cada estudiante?_____

b. ¿Cuántas partes de plastilina obtendrá cada uno de los 12 estudiantes?_____

4. ◆✪▲ En un banco olvidaron descontar, durante tres meses, $ 5560 de cuota de manejo mensual a cada uno de los 12 520 ahorradores. ¿Cuánto dinero en total olvidaron descontarle a los ahorradores durante esos tres meses? _____

5. ◆✪▲ Una distribuidora de cuadernos plastificados recibió $ 1 766 730 por concepto de las ventas de marzo.

a. Si en total vendió 987 cuadernos plastificados, ¿cuál es el precio unitario? _____

b. Si en agosto el precio de cada cuaderno aumentó $ 45 y vendió 1825 cuadernos, ¿cuánto recibió la distribuidora por las ventas de ese mes? _____

Figura 29. Problemas 1, 2 y 3, resolución de problemas unidad 2

Se infiere en la sección resolución de problemas, que en el problema 1, estudiante debe realizar una división para dar solución a las preguntas, corresponde a una división partitiva, en el problema 2, debe realizar varias multiplicaciones, una para saber cuánto dinero le dejaron de descontar a cada ahorrador, y posteriormente hallar otro producto para saber cuánto dinero en total olvidaron descontar a los ahorradores, en el problema 3,que tiene dos puntos, se deduce en el punto (a) el estudiante debería realizar una división para hallar la solución y en el punto (b) depende del punto (a) dado que el artículo ha tenido un incremento en su valor para luego realizar una adición y un producto.

De esta manera, a partir de los modelos de estudiar la multiplicación según Vergnaud (1991), se infiere que la forma de presentación de los ejemplos según la definición y las situaciones problema propuestos por el texto escolar, corresponde al uso del modelo cardinal en la multiplicación y en la división en su modelo implícito se tiene que es partitiva (partes iguales). En el problema 1 y el problema 3, dentro de los posibles errores que pueden presentar los estudiantes, según Maza (1991), en el 1 y 3, se encuentra la propiedad distributiva, en la división, y el 3 al omitir el cero en el dividendo y al no tenerlo en cuenta en el cociente, correspondiendo a errores de naturaleza sintáctica y semántica.

A continuación en la figura 33, el texto escolar muestra que teniendo en cuenta la multiplicación, ésta cumple algunas propiedades, definidas en la lección 11 de la unidad 2.

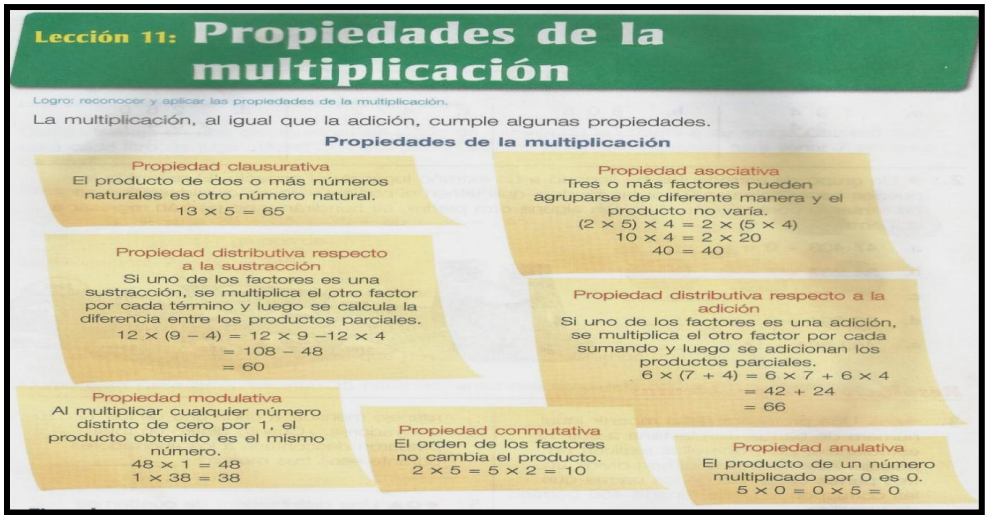


Figura 30. Propiedades de la Multiplicación

Ahora, se presenta el problema 4, que el texto plantea en la sección que titula resolución de problemas enumerado con el 4, como se indica en la figura 34.

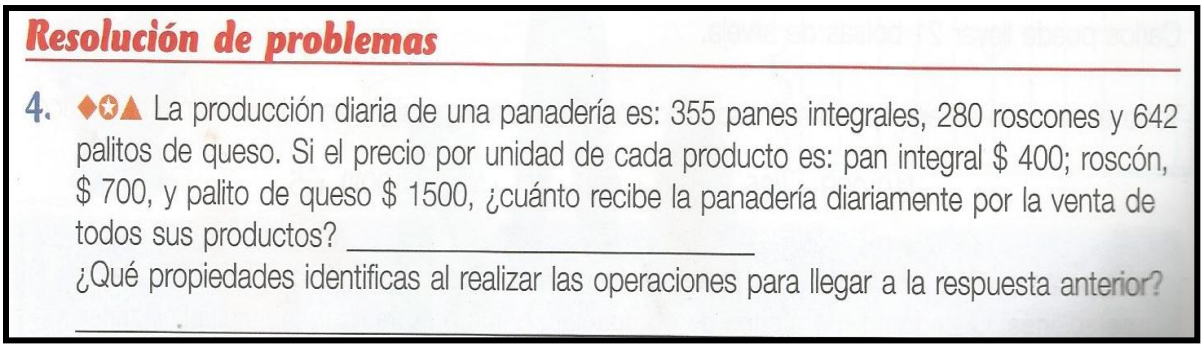


Figura 31. Problema 4, resolución de problemas lección 11

En la anterior sección resolución de problemas, se infiere que el estudiante puede resolverlo a través de una respectiva multiplicación rutinaria para saber la producción de cada artículo, como por ejemplo $355 \times 400 = 142000$, y así con los demás productos, o también una regla de tres simple, de esta manera $\frac{1}{400} = \frac{355}{x}$, de este modo logra saber el costo total de un

producto y con cada uno de los productos, luego hacer una suma, para así saber la venta diaria y además identificar las propiedades que se pueden aplicar en esta situación.

De esta manera, a partir de los modelos expuestos por Vergnaud (1991), se infiere que en la forma que el texto escolar 1 propone la situación problema 4, corresponde a una relación multiplicativa o regla de tres, que se identifica dentro del isomorfismo de medidas, debido a que, en el uso de la multiplicación existe una relación de correspondencia entre dos tipos de cantidades. Sin embargo, en esta clase de problema el estudiante puede cometer errores al aplicar el algoritmo de la multiplicación, en el caso de 355×400, 280×700, 642×1500, según Maza (1991) algunos posibles errores se cometen cuando se simplifican los ceros de las unidades y las decenas, al realizar la multiplicación los cuales pueden generar error de ubicación en el resultado final, correspondiendo a errores de naturaleza semántica.

A continuación, se muestra en la figura 35 un fragmento con el contenido del texto 1, que corresponde a la unidad cuatro.

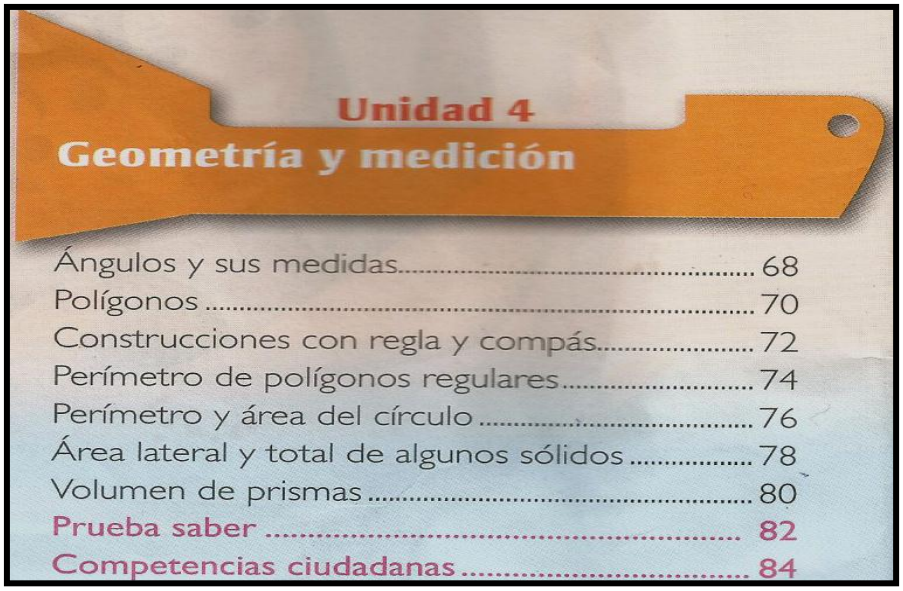


Figura 32. Contenido unidad 4

Seguidamente la figura 36 expone la presentación que realiza el texto de esta unidad donde se indican los estándares y los procesos relacionados con el contenido de la misma unidad.

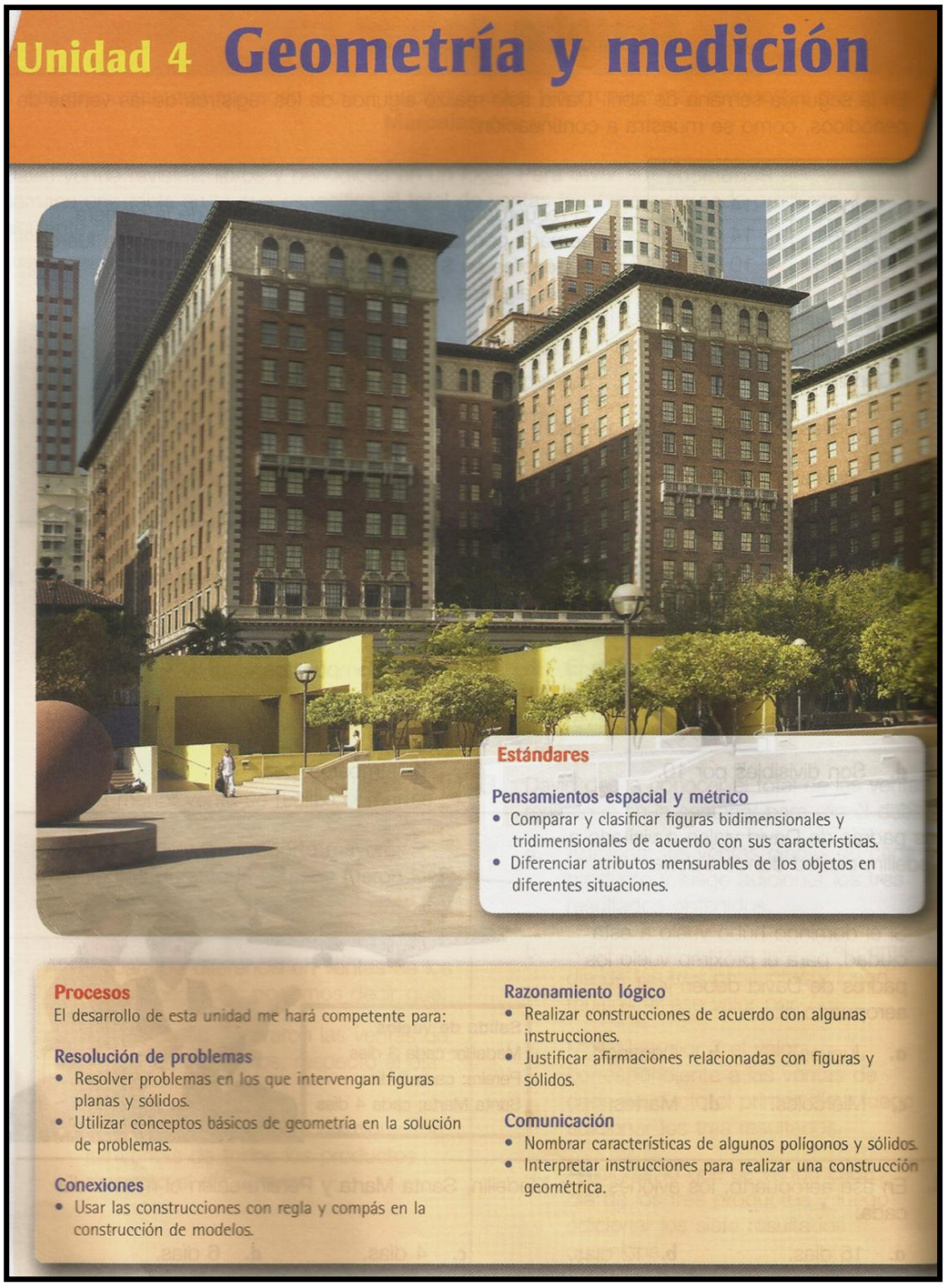


Figura 33. Presentación unidad 4

De esta unidad cuatro, se tienen en cuenta la lección 30, cuyo logro es *hallar el área lateral y total de algunos sólidos* y la lección 31, con un logro que indica *calcular el volumen de un prisma.* De esta manera, se presenta la figura 37 que muestra la primera lección, donde se usan operaciones combinadas, siendo necesario aplicar la adición y el producto.

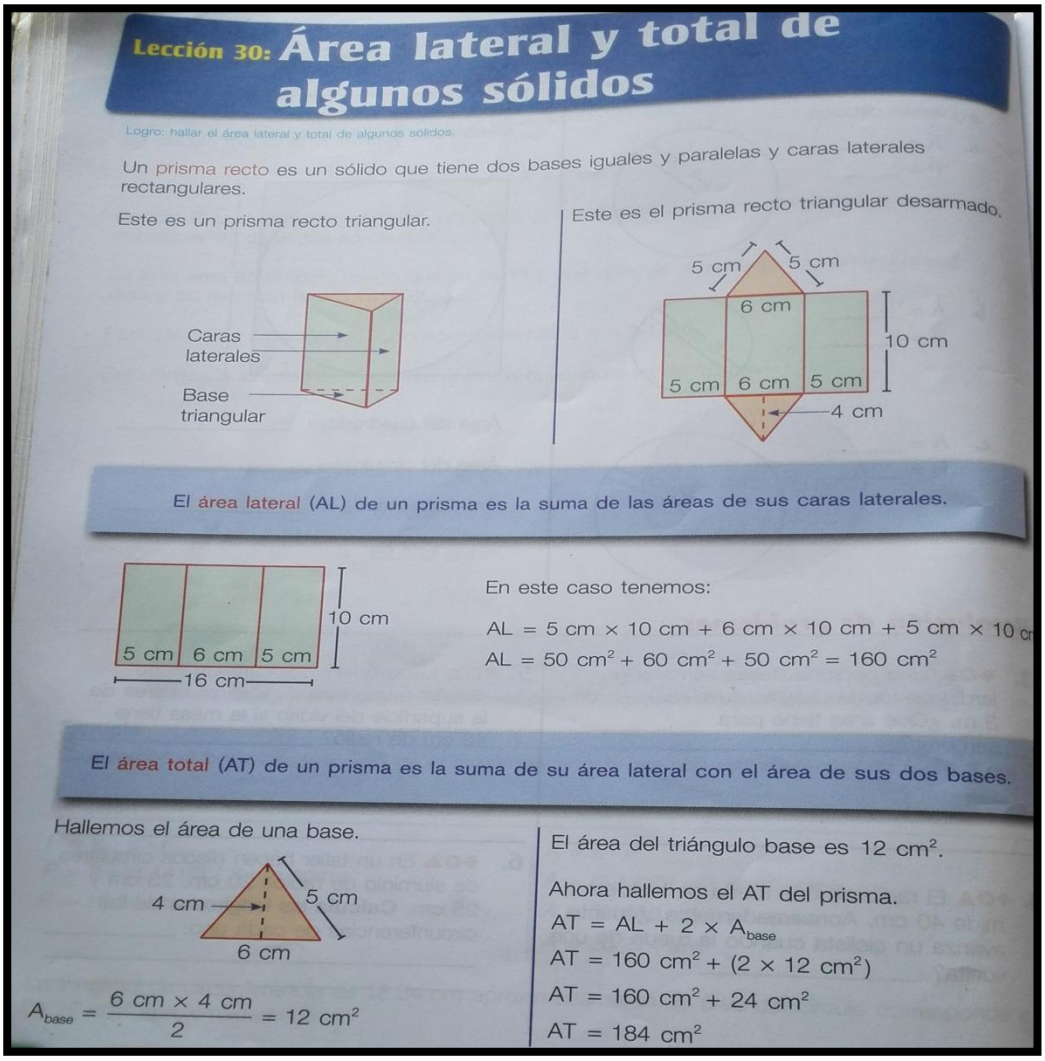


Figura 34. Lección 30 Área lateral y total de algunos sólidos

En la figura 37, se observa que el texto escolar no indica la definicion de área, se infiere que la propuesta del texto lo tiene como saber previo en los estudiantes.

Por otra parte, la figura 38 presenta el problema 5, planteado en la sección práctica y aprende que propone el texto sobre los conceptos de área lateral y total de algunos sólidos, donde se pide al estudiante hallar el área lateral y el área total de los prismas con diferentes dimendiones de medidas, la unidad de medida para el área empleado en los ejercicios es el centímetro cuadrado.

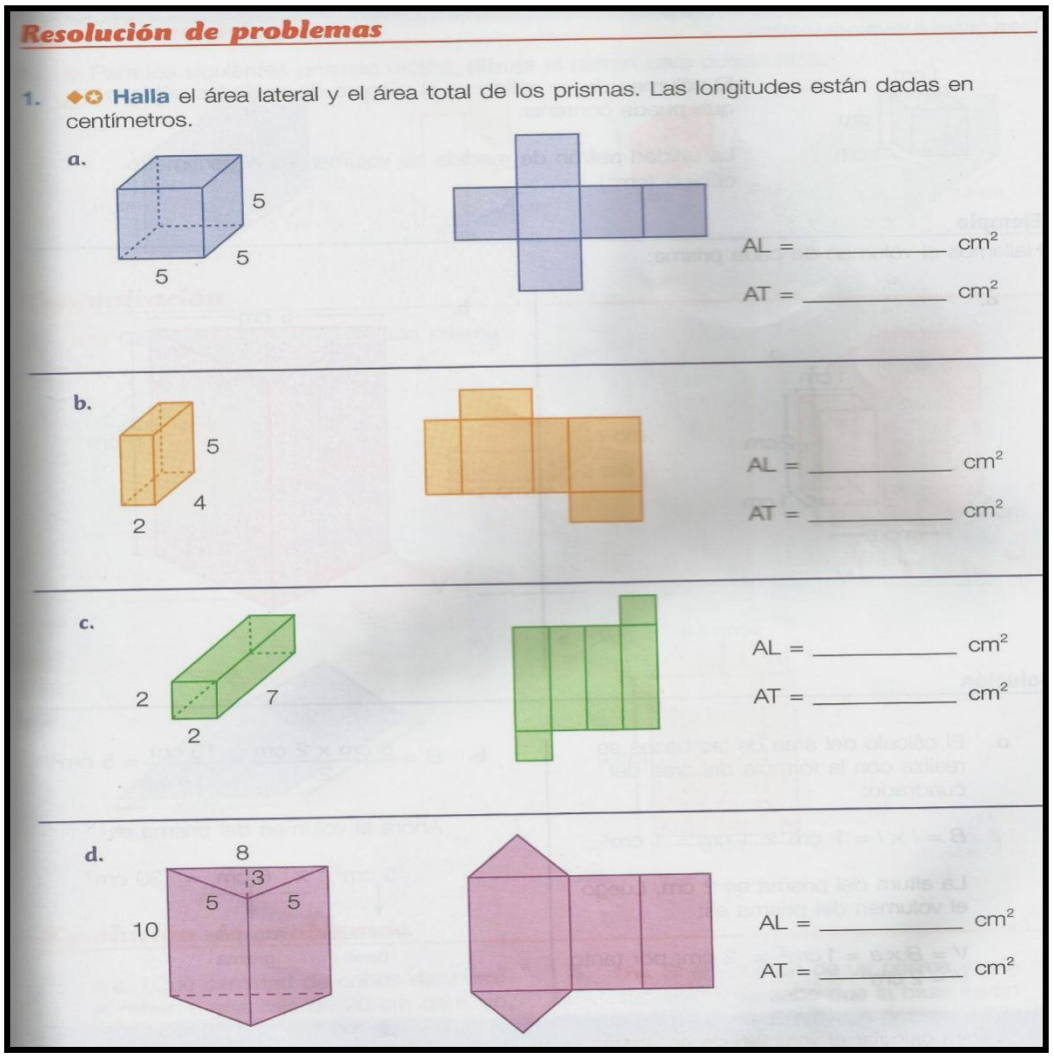
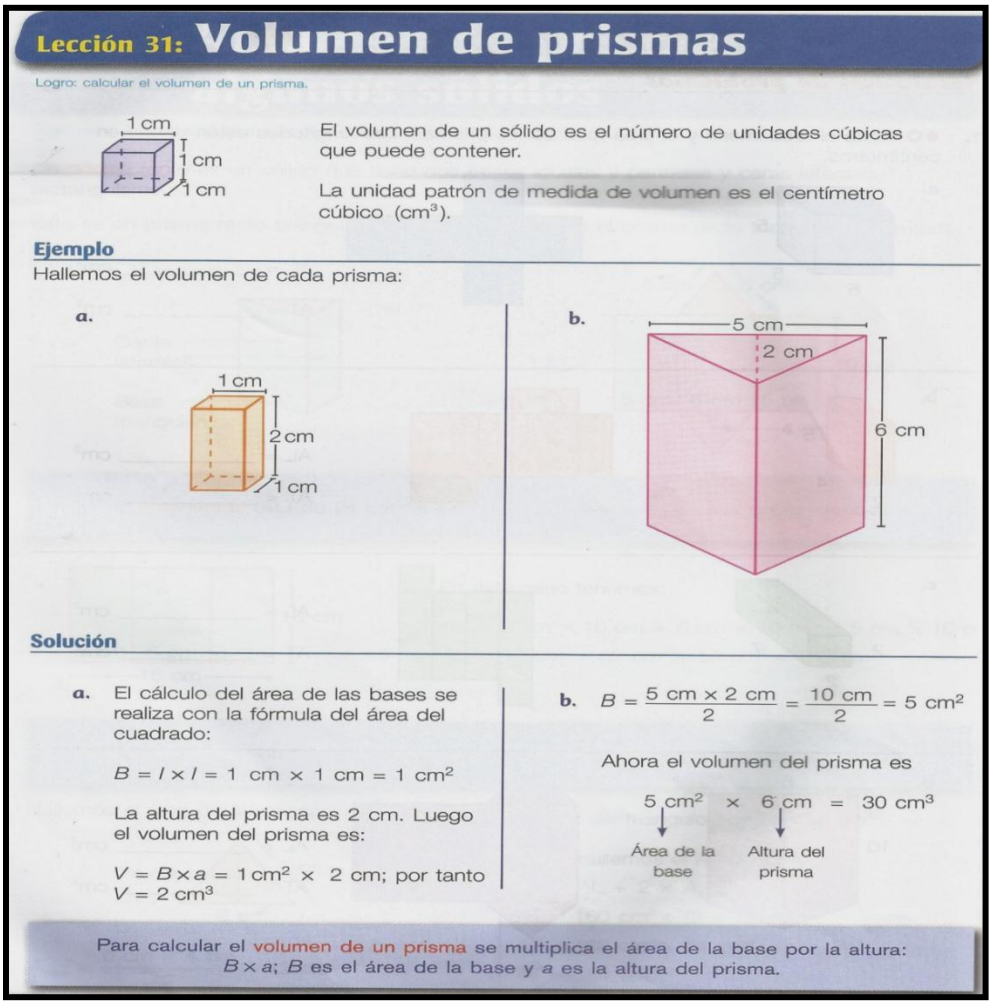


Figura 35. Problema 5. Resolución de problemas lección 30

Se infiere en las situaciones problemas que propone el texto son observados como ejercicios donde los estudiantes deben reemplazar los valores en la formula indicada en la figura 37, la cual consiste en una vez hallada el área de cada cara de un prisma luego se suman las áreas de todas las caras del sólido geométrico para hallar el área total. Se deduce a partir de Vergnaud (1991) que corresponde al producto de medidas particularmente dimensión producto.

Ahora la figura 39 presenta la lección 31, con un logro que indica *calcular el volumen de un prisma*, la definición de volumen y dos ejemplos con su respectiva solución.



Lección 31: Volumen de prismas

Logro: calcular el volumen de un prisma.

El volumen de un sólido es el número de unidades cúbicas que puede contener.

La unidad patrón de medida de volumen es el centímetro cúbico (cm^3).

Ejemplo

Hallemos el volumen de cada prisma:

a.

b.

Solución

a. El cálculo del área de las bases se realiza con la fórmula del área del cuadrado:

$B = l \times l = 1\ cm \times 1\ cm = 1\ cm^2$

La altura del prisma es 2 cm. Luego el volumen del prisma es:

$V = B \times a = 1\,cm^2 \times 2\ cm$; por tanto $V = 2\ cm^3$

b. $B = \frac{5\ cm \times 2\ cm}{2} = \frac{10\ cm}{2} = 5\ cm^2$

Ahora el volumen del prisma es

$5\ cm^2 \times 6\ cm = 30\ cm^3$

Área de la base — Altura del prisma

Para calcular el volumen de un prisma se multiplica el área de la base por la altura: $B \times a$; B es el área de la base y a es la altura del prisma.

Figura 36. Lección 31 Volumen de prisma

De la figura 39 se observa que el texto escolar ha definido el concepto de volumen de un sólido, la unidad patrón de medida, y la forma de calcular el volumen de un prisma, de igual manera, presenta un ejemplo con la respectiva solución donde muestra el procedimiento para calcular el área de las bases y posteriormente el volumen del prisma.

Se infiere que es necesaria la relación multiplicativa de dos cantidades así como la dimensión de medida.

Seguidamente la figura 40 presenta el problema 6 y 7 de este análisis, propuesto por el texto escolar 1, con los ejercicios 3 y 4 en la sección resolución de problemas de la lección 31

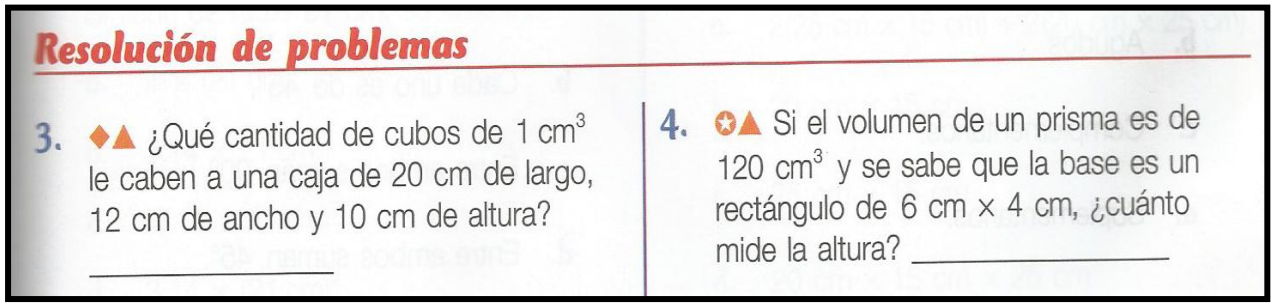


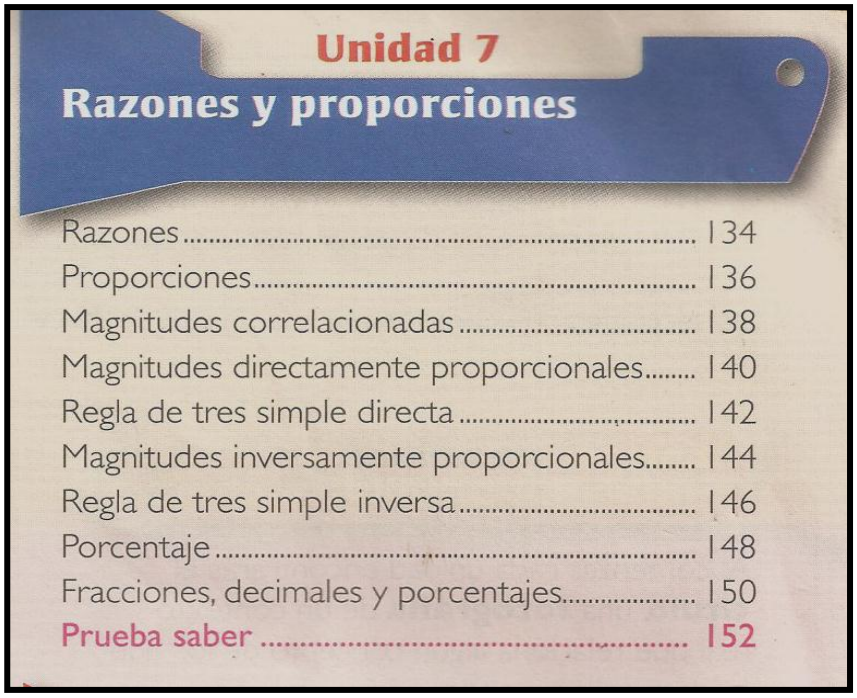
Figura 37. Problemas 6 y 7, resolución de problemas lección 31

Se observa en el ejercicio 3 que se pide hallar la cantidad de cubos que caben en una caja con unas medidas determinadas y en el ejercicio 4se parte de que se conoce el volumen de un sólido y se dan dos medidas que formar la base para halla la tercer medida en este caso la altura.

Con lo anterior se deduce que la propuesta de este tipo de problema en el 6 (de este analisis ejercicio 3 del texto), es relacionado con el producto de medidasdonde se usa la categoria multiplicación que busca encontrar la medida-producto cuando se conocen las medidas, así se

plantea el volumen de la caja grande por medio de una multiplicación de las tres dimensiones $20\ cm \times 12cm \times 10cm = 2400cm^3$y luego realizar una division cuotitiva es decir división total entre el tamaño de cada parte así $2400 \div 1 = 2400$ cubos, y en el problema 7 correspondiente al ejercicio 4 del texto, se infiere que el estudiante debe multiplicar las dos medidas que le indica el problema así: $6cm \times 4cm = 24cm^2$ para luego dividir el total entre la cantidad hallada así $120cm^3 \div 24cm^2 = 5cm$, el cual corresponde al producto de medidas donde se usa la categoria división que busca encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto. De acuerdo a los posibles errores de Maza (1991), el estudiante podría entender el valor de las dimensiones para operar como suma entre ella, omitiendo el producto entre las mismas, además si se omiten los ceros en los factores se puede incurrir en errores de naturaleza semántica.

A continuación, se muestra en la figura 41, un fragmento del contenido del texto, de la unidad siete.


Unidad 7

Razones y proporciones

Razones 134
Proporciones 136
Magnitudes correlacionadas 138
Magnitudes directamente proporcionales 140
Regla de tres simple directa 142
Magnitudes inversamente proporcionales 144
Regla de tres simple inversa 146
Porcentaje 148
Fracciones, decimales y porcentajes 150
Prueba saber 152

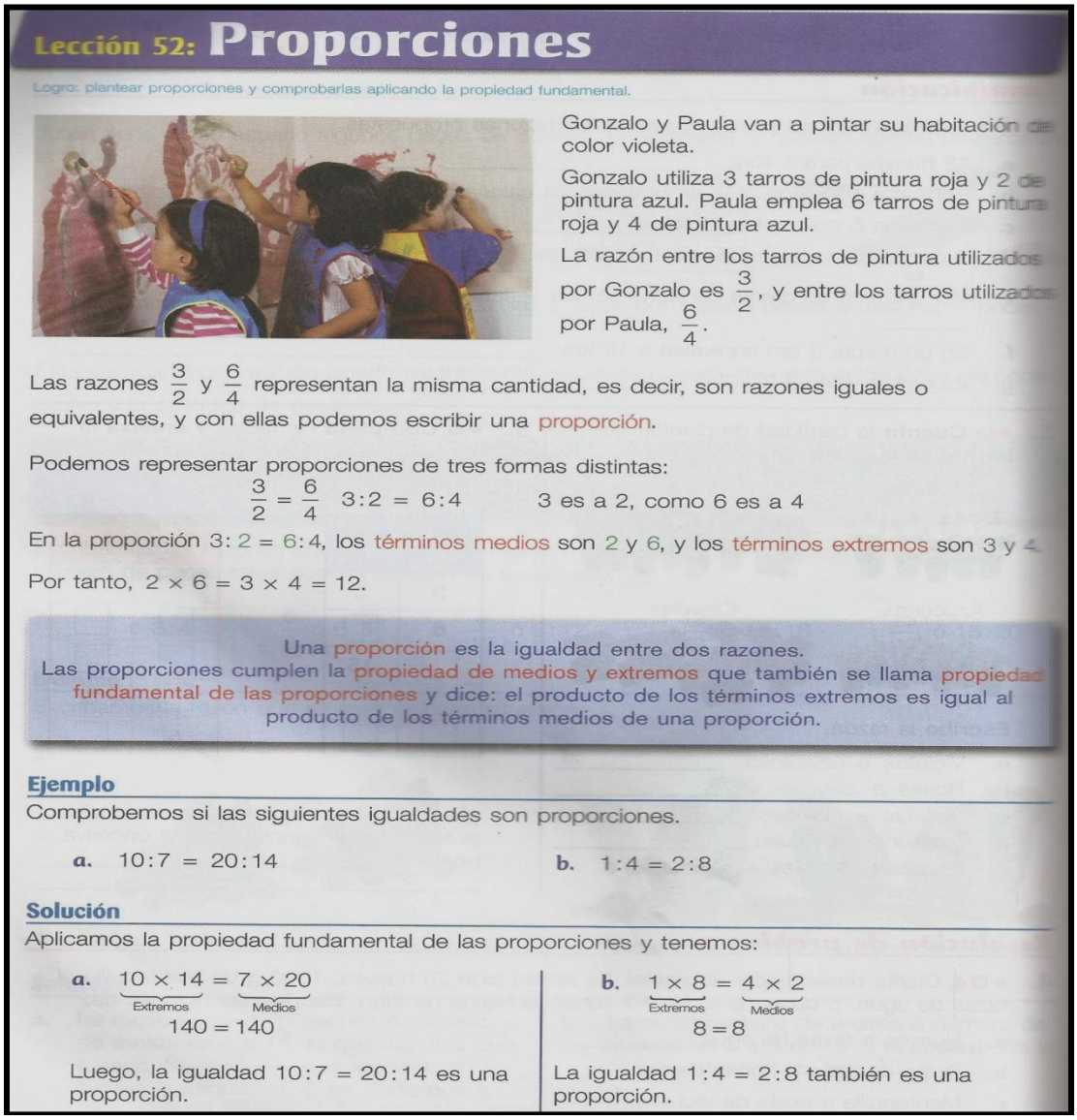
Figura 38. Contenido de la unidad 7

Seguidamente se presenta la figura 42, donde muestra como el texto 1 expone la presentación de la unidad siete, titulada razones y proporciones, además indican los estándares y procesos relacionados con el desarrollo de la unidad.



Figura 39. Presentación unidad 7

Ahora, en la unidad 7 contiene la lección 52, que es presentada en la figura 43, la cual expone el concepto de proporción a partir de una situación problema y cuyo logro es *plantear proporciones y comprobarlas aplicando la propiedad fundamental.*



Lección 52: Proporciones

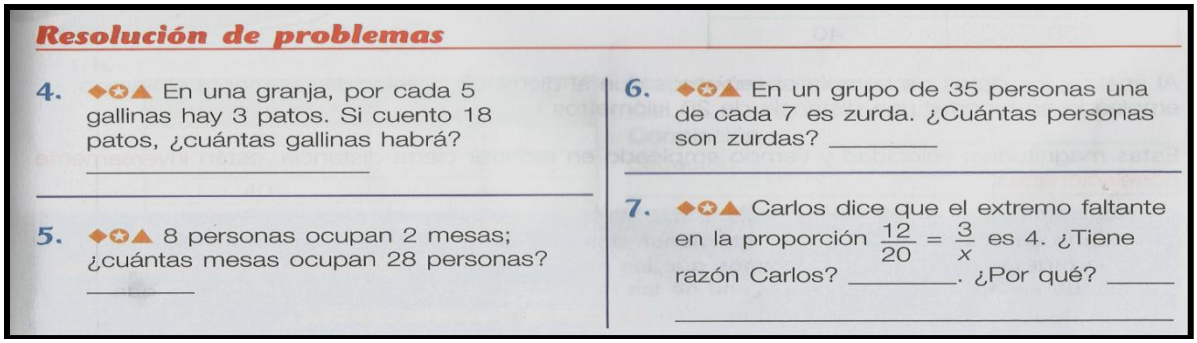
Logro: plantear proporciones y comprobarlas aplicando la propiedad fundamental.

Figura 40. Lección 52 Proporciones

Se observa en la figura anterior que el texto escolar ha definido e concepto de proporción, además de la propiedad denominada propiedad de medios y extremos que también es llamada

propiedad fundamental de las proporciones, indica que el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios de una proporción.

La figura 44, muestra los problemas 8, 9, 10 y 11 de este análisis, que corresponden en el texto escolar 1, a cuatro ejercicios enumerados como 4, 5, 6 y 7, en la sección de resolución de problemas de la lección No 52.



Resolución de problemas

4. En una granja, por cada 5 gallinas hay 3 patos. Si cuento 18 patos, ¿cuántas gallinas habrá?

5. 8 personas ocupan 2 mesas; ¿cuántas mesas ocupan 28 personas?

6. En un grupo de 35 personas una de cada 7 es zurda. ¿Cuántas personas son zurdas? _____

7. Carlos dice que el extremo faltante en la proporción $\frac{12}{20} = \frac{3}{x}$ es 4. ¿Tiene razón Carlos? _____. ¿Por qué? _____

Figura 41. Problemas 8, 9, 10 y 11, resolución de problemas lección 52

En la figura 44, se observa que en las situaciones planteadas que requieren uso de proporciones, dado que cada una presenta dos datos de una magnitud y uno de la otra magnitud, para hallar el dato desconocido se deduce que debe aplicar la propiedad fundamental de las proporciones es decir el producto de medios y extremos. De esta manera a partir de los modelos de estudio de la multiplicación se infiere que la forma de presentación de las (4) situaciones en la sección resolución de problemas propuesta para los estudiantes, corresponden a la categoría de producto de medidas de la clase de multiplicación, que consiste en encontrar la medida-producto cuando se conocen las medidas elementales. Por ejemplo en este caso $\frac{5}{3} = \frac{x}{18}$, y al aplicar el producto de medios y extremos se obtiene $5 \times 18 = 3 \times x$, para lo que la solución sería 30

La figura 45, presenta la definición de magnitudes directamente o inversamente correlacionadas, exhibida por el texto en la lección 53 de esta misma unidad.

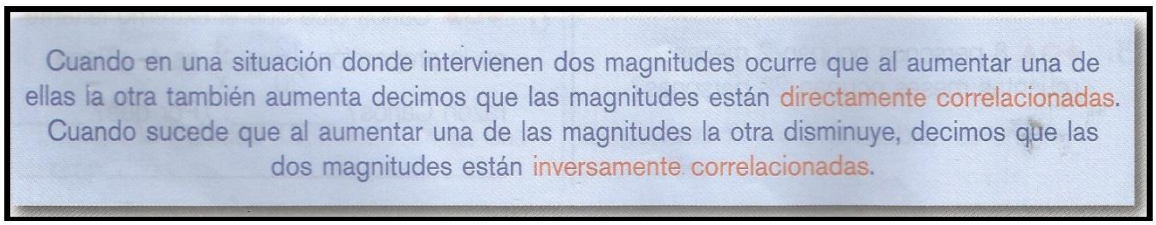
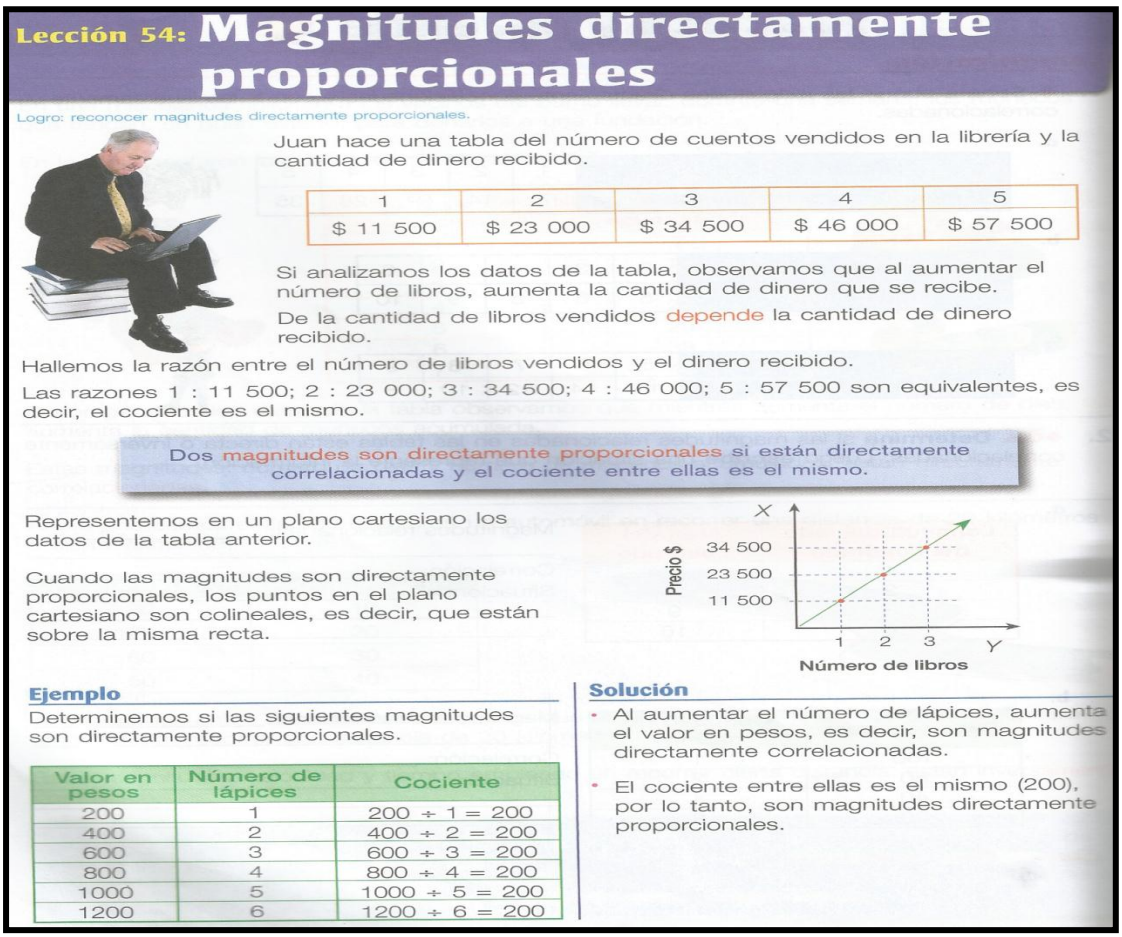

Cuando en una situación donde intervienen dos magnitudes ocurre que al aumentar una de ellas la otra también aumenta decimos que las magnitudes están directamente correlacionadas. Cuando sucede que al aumentar una de las magnitudes la otra disminuye, decimos que las dos magnitudes están inversamente correlacionadas.

Figura 42. Definición de magnitudes directamente e inversamente correlacionadas, lección 53

Ahora se presenta la figura 46, en la que el texto expone la lección 54, cuyo logro es *reconocer magnitudes directamente proporcionales,* esta lección muestra el análisis de una situación problema en una tabla que identifica la correlación y la razón entre las dos magnitudes.


Lección 54: Magnitudes directamente proporcionales

Logro: reconocer magnitudes directamente proporcionales.

Juan hace una tabla del número de cuentos vendidos en la librería y la cantidad de dinero recibido.

1	2	3	4	5
$ 11 500	$ 23 000	$ 34 500	$ 46 000	$ 57 500

Si analizamos los datos de la tabla, observamos que al aumentar el número de libros, aumenta la cantidad de dinero que se recibe.

De la cantidad de libros vendidos depende la cantidad de dinero recibido.

Hallemos la razón entre el número de libros vendidos y el dinero recibido.

Las razones 1 : 11 500; 2 : 23 000; 3 : 34 500; 4 : 46 000; 5 : 57 500 son equivalentes, es decir, el cociente es el mismo.

Dos magnitudes son directamente proporcionales si están directamente correlacionadas y el cociente entre ellas es el mismo.

Representemos en un plano cartesiano los datos de la tabla anterior.

Cuando las magnitudes son directamente proporcionales, los puntos en el plano cartesiano son colineales, es decir, que están sobre la misma recta.

Ejemplo

Determinemos si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.

Valor en pesos	Número de lápices	Cociente
200	1	200 ÷ 1 = 200
400	2	400 ÷ 2 = 200
600	3	600 ÷ 3 = 200
800	4	800 ÷ 4 = 200
1000	5	1000 ÷ 5 = 200
1200	6	1200 ÷ 6 = 200

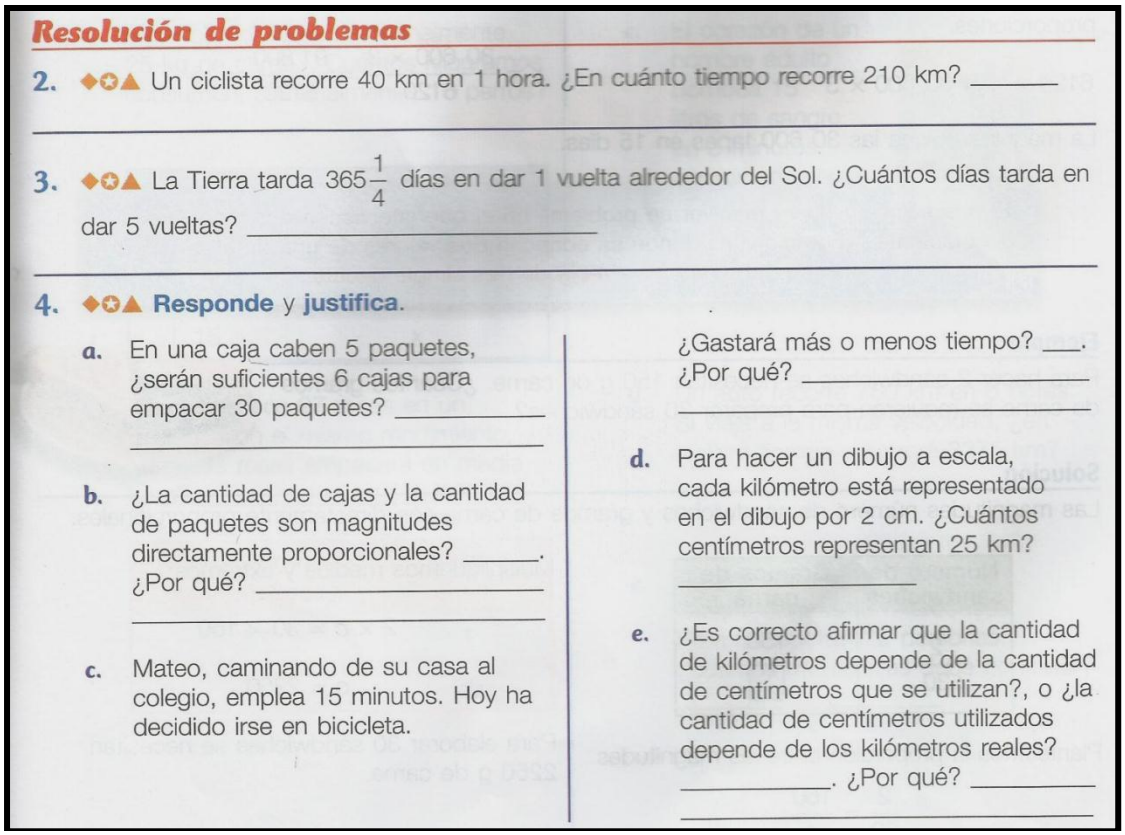
Solución

- Al aumentar el número de lápices, aumenta el valor en pesos, es decir, son magnitudes directamente correlacionadas.
- El cociente entre ellas es el mismo (200), por lo tanto, son magnitudes directamente proporcionales.

Figura 43 Lección 54 Magnitudes directamente proporcionales

En la figura anterior se observa que el texto escolar presenta la definición de magnitudes directamente proporcionales, además de un ejemplo con su correspondiente solución que muestra una tabla donde ilustra dos magnitudes directamente correlacionadas, la razón entre ellas, y se verifica que son directamente proporcionales, a través del cálculo del cociente entre cada razón, el cual debe ser constante.

Igualmente plantea una práctica con situaciones problema que se presenta en la figura 47, donde se exponen los problemas 12, 13, y 14, correspondiente a los ejercicios 2, 3, 4, en estas situaciones el texto propone a los estudiantes que una vez identificadas las magnitudes deben verificar la correlación y la proporcionalidad entre ellas.



Resolución de problemas

2. ◆✪▲ Un ciclista recorre 40 km en 1 hora. ¿En cuánto tiempo recorre 210 km? _____

3. ◆✪▲ La Tierra tarda $365\frac{1}{4}$ días en dar 1 vuelta alrededor del Sol. ¿Cuántos días tarda en dar 5 vueltas? _____

4. ◆✪▲ **Responde** y **justifica**.

a. En una caja caben 5 paquetes, ¿serán suficientes 6 cajas para empacar 30 paquetes? _____

b. ¿La cantidad de cajas y la cantidad de paquetes son magnitudes directamente proporcionales? _____. ¿Por qué? _____

c. Mateo, caminando de su casa al colegio, emplea 15 minutos. Hoy ha decidido irse en bicicleta. ¿Gastará más o menos tiempo? ___. ¿Por qué? _____

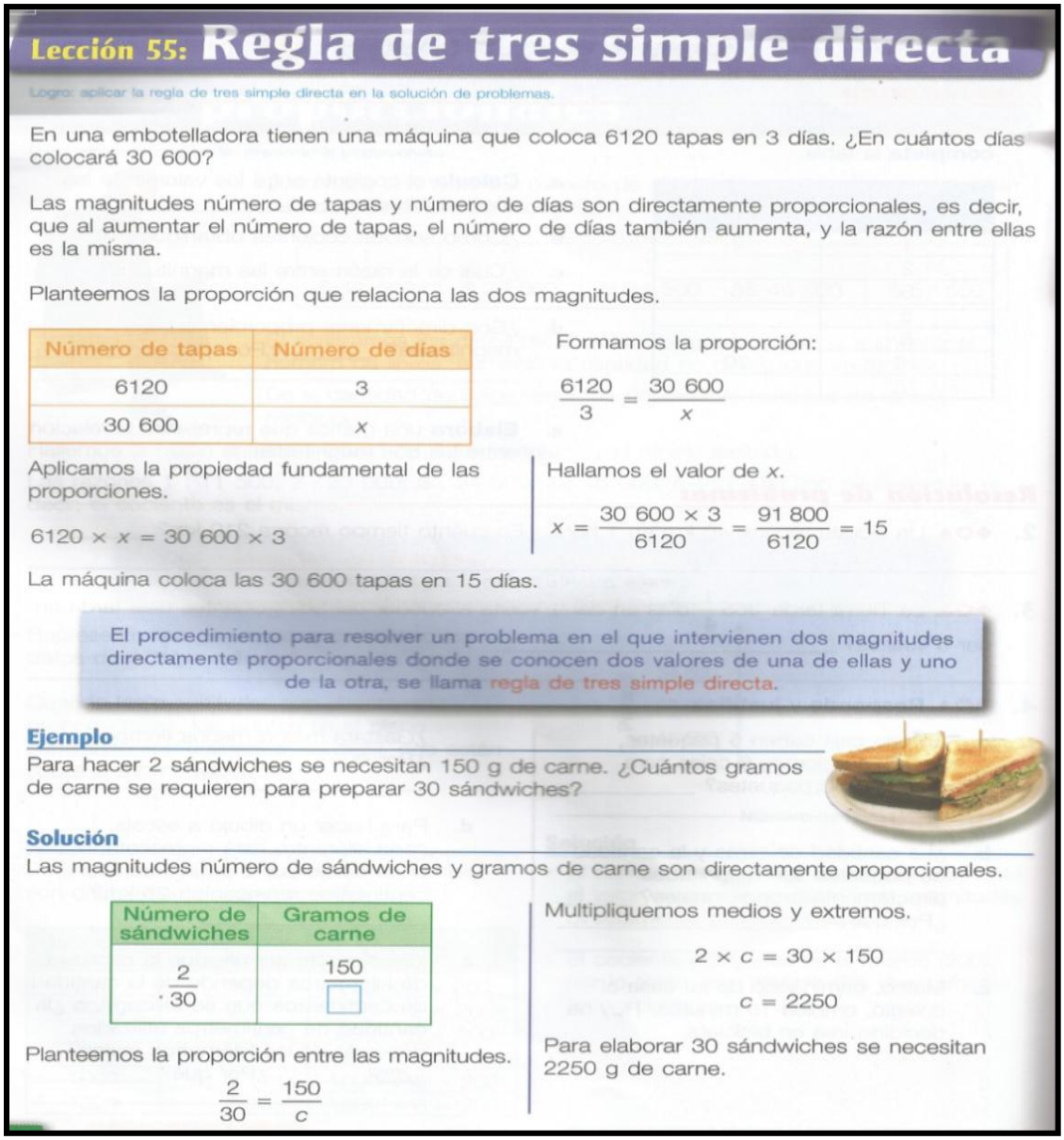
d. Para hacer un dibujo a escala, cada kilómetro está representado en el dibujo por 2 cm. ¿Cuántos centímetros representan 25 km? _____

e. ¿Es correcto afirmar que la cantidad de kilómetros depende de la cantidad de centímetros que se utilizan?, o ¿la cantidad de centímetros utilizados depende de los kilómetros reales? _____. ¿Por qué? _____

Figura 44. Problemas 12, 13, 14, sección de resolución de problemas, lección 54

A partir de lo descrito anteriormente y según los modelos de estudio de la multiplicación y la división de Vergnaud (1991), se infiere que la forma de presentación de la sección de resolución de problemas, propuesta a los estudiantes corresponden a la categoría de isomorfismo de medidas de la clase de regla de tres, que consiste en encontrar una medida cuando se conocen las medidas elementales, así en los problemas12 y 13, enumerados en el texto como situaciones 2 y 3 respectivamente, en ellos se indican 2 medidas de la misma magnitud y una medida de la otra magnitud para hallar la desconocida; se hace uso de la regla de tres en la situación enumerada con 4 y para el problema 14, conformado por 5 situaciones diferentes se infiere la solución así: la situación a) es de comparación donde le indican al estudiante dos magnitudes directamente proporcionales, la situación b) depende del anterior, porque debe justificar lo analizado en el punto a); en el punto c) debe relacionar dos magnitudes y comparar si son directamente proporcionales, en el punto d) se infiere que corresponde al producto de medidas, ya que se indican dos medidas de una magnitud y una medida de la otra magnitud, es decir, los datos para hallar la medida desconocida; y el punto e) es de observación y análisis, dado que una vez resuelto el punto anterior, (es decir el d),ya que este proporciona información necesaria para dar la solución a este punto.

Seguidamente se presenta la figura 48 correspondiente a la lección 55, con el concepto de la regla de tres simple directa y cuyo logro indica *aplicar la regla de tres simple directa en la solución de problemas,* de esta manera el texto escolar expone una situación problema que concluye con la definición de regla de tres simple directa.



Lección 55: Regla de tres simple directa

Logro: aplicar la regla de tres simple directa en la solución de problemas.

En una embotelladora tienen una máquina que coloca 6120 tapas en 3 días. ¿En cuántos días colocará 30 600?

Las magnitudes número de tapas y número de días son directamente proporcionales, es decir, que al aumentar el número de tapas, el número de días también aumenta, y la razón entre ellas es la misma.

Planteemos la proporción que relaciona las dos magnitudes.

Número de tapas	Número de días
6120	3
30 600	x

Formamos la proporción:

$$\frac{6120}{3} = \frac{30\ 600}{x}$$

Aplicamos la propiedad fundamental de las proporciones.

$$6120 \times x = 30\ 600 \times 3$$

Hallamos el valor de x.

$$x = \frac{30\ 600 \times 3}{6120} = \frac{91\ 800}{6120} = 15$$

La máquina coloca las 30 600 tapas en 15 días.

El procedimiento para resolver un problema en el que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales donde se conocen dos valores de una de ellas y uno de la otra, se llama regla de tres simple directa.

Ejemplo

Para hacer 2 sándwiches se necesitan 150 g de carne. ¿Cuántos gramos de carne se requieren para preparar 30 sándwiches?

Solución

Las magnitudes número de sándwiches y gramos de carne son directamente proporcionales.

Número de sándwiches	Gramos de carne
$\frac{2}{\cdot 30}$	$\frac{150}{\square}$

Planteemos la proporción entre las magnitudes.

$$\frac{2}{30} = \frac{150}{c}$$

Multipliquemos medios y extremos.

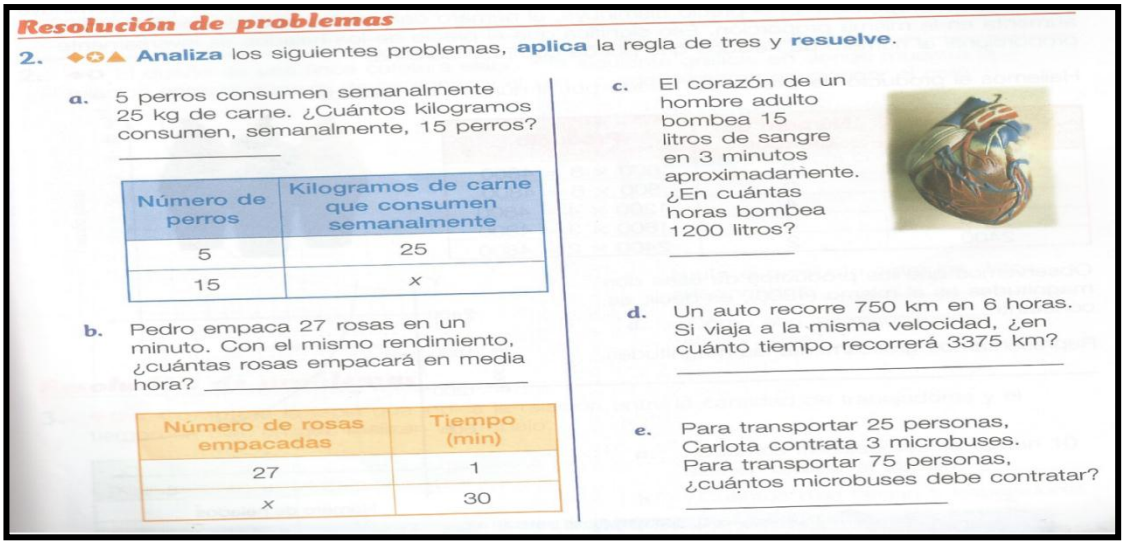
$$2 \times c = 30 \times 150$$

$$c = 2250$$

Para elaborar 30 sándwiches se necesitan 2250 g de carne.

Figura 45 . Lección 55 Regla de tres simple directa

La figura 49, presenta el problema 15, que se muestra la sección de resolución de problemas de la lección 55, propuesta por el texto escolar, que consta de 5 puntos y en la cual busca que el estudiante analice, aplique la regla de tres y resuelva las situaciones planteadas.



Resolución de problemas

2. ◆○▲ **Analiza** los siguientes problemas, **aplica** la regla de tres y **resuelve**.

a. 5 perros consumen semanalmente 25 kg de carne. ¿Cuántos kilogramos consumen, semanalmente, 15 perros?

Número de perros	Kilogramos de carne que consumen semanalmente
5	25
15	x

b. Pedro empaca 27 rosas en un minuto. Con el mismo rendimiento, ¿cuántas rosas empacará en media hora?

Número de rosas empacadas	Tiempo (min)
27	1
x	30

c. El corazón de un hombre adulto bombea 15 litros de sangre en 3 minutos aproximadamente. ¿En cuántas horas bombea 1200 litros?

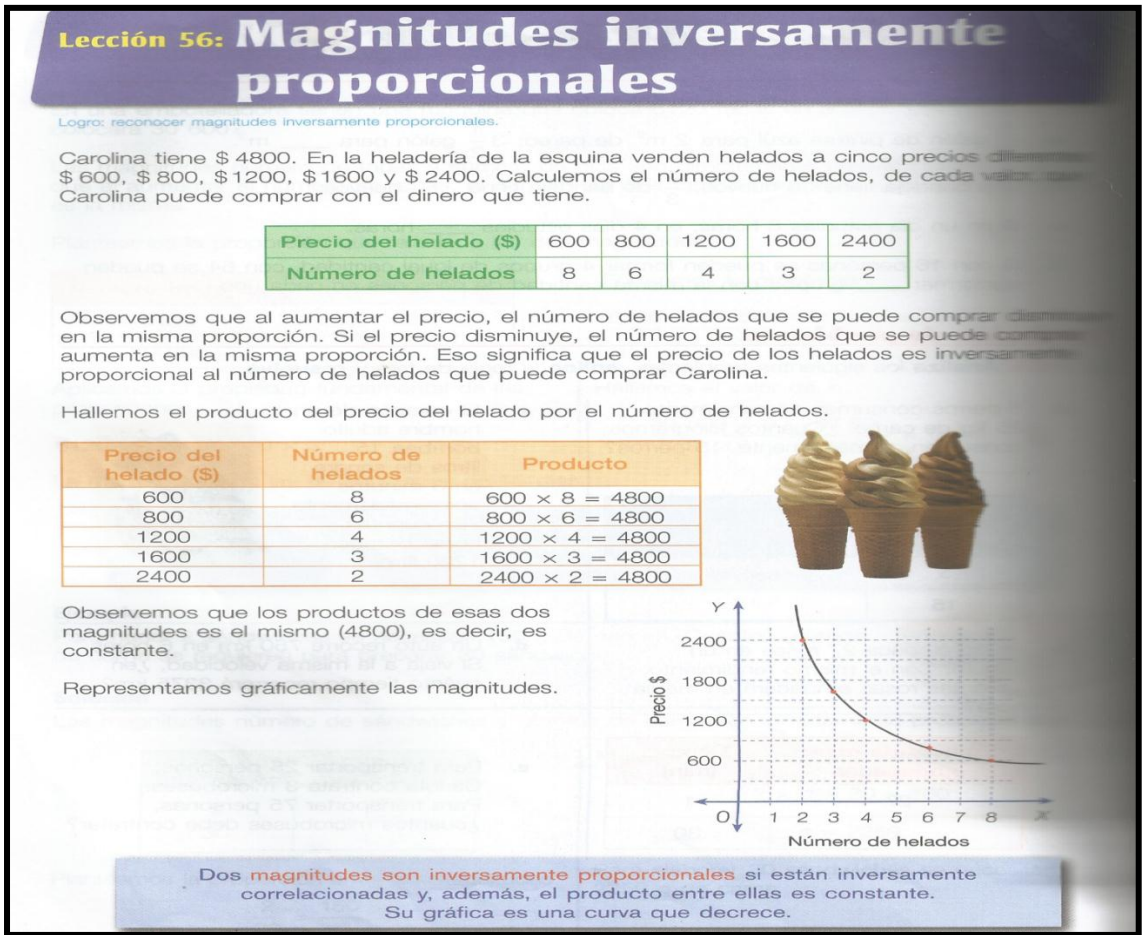
d. Un auto recorre 750 km en 6 horas. Si viaja a la misma velocidad, ¿en cuánto tiempo recorrerá 3375 km?

e. Para transportar 25 personas, Carlota contrata 3 microbuses. Para transportar 75 personas, ¿cuántos microbuses debe contratar?

Figura 46. Problema 15, sección resolución de problemas lección 55

En la figura 49, se observa y se infiere a partir de lo descrito anteriormente y según los modelos de estudio de la multiplicación y la división de Vergnaud (1991), que el problema 15 de este análisis, (en el texto esta enumerado como el 2), con las situaciones a), b), c), d), e), corresponde al uso de la regla de tres, dado que se cuenta con dos medidas de una magnitud y una medida de la otra magnitud. De acuerdo a los estudios realizados por Maza (1991) en el problema 15 literal c), se pueden generar errores tanto de naturaleza sintáctica como de naturaleza semántica, al estudiante realizar la división por tres cifras y más aun si decide omitir los ceros en el producto y en el cociente.

Seguidamente en el texto escolar, se observa que al trabajar las magnitudes directamente proporcionales, se facilita el acceso hacia las magnitudes inversamente proporcionales, concepto que se presenta en la figura 50 que muestra lección 56 y cuyo logro es indicado como *"reconocer magnitudes inversamente proporcionales",* además se presenta en el recuadro inferior la definición de magnitudes inversamente proporcionales.



Lección 56: Magnitudes inversamente proporcionales

Logro: reconocer magnitudes inversamente proporcionales.

Carolina tiene $ 4800. En la heladería de la esquina venden helados a cinco precios diferentes: $ 600, $ 800, $ 1200, $ 1600 y $ 2400. Calculemos el número de helados, de cada valor, que Carolina puede comprar con el dinero que tiene.

Precio del helado ($)	600	800	1200	1600	2400
Número de helados	8	6	4	3	2

Observemos que al aumentar el precio, el número de helados que se puede comprar disminuye en la misma proporción. Si el precio disminuye, el número de helados que se puede comprar aumenta en la misma proporción. Eso significa que el precio de los helados es inversamente proporcional al número de helados que puede comprar Carolina.

Hallemos el producto del precio del helado por el número de helados.

Precio del helado ($)	Número de helados	Producto
600	8	600 × 8 = 4800
800	6	800 × 6 = 4800
1200	4	1200 × 4 = 4800
1600	3	1600 × 3 = 4800
2400	2	2400 × 2 = 4800

Observemos que los productos de esas dos magnitudes es el mismo (4800), es decir, es constante.

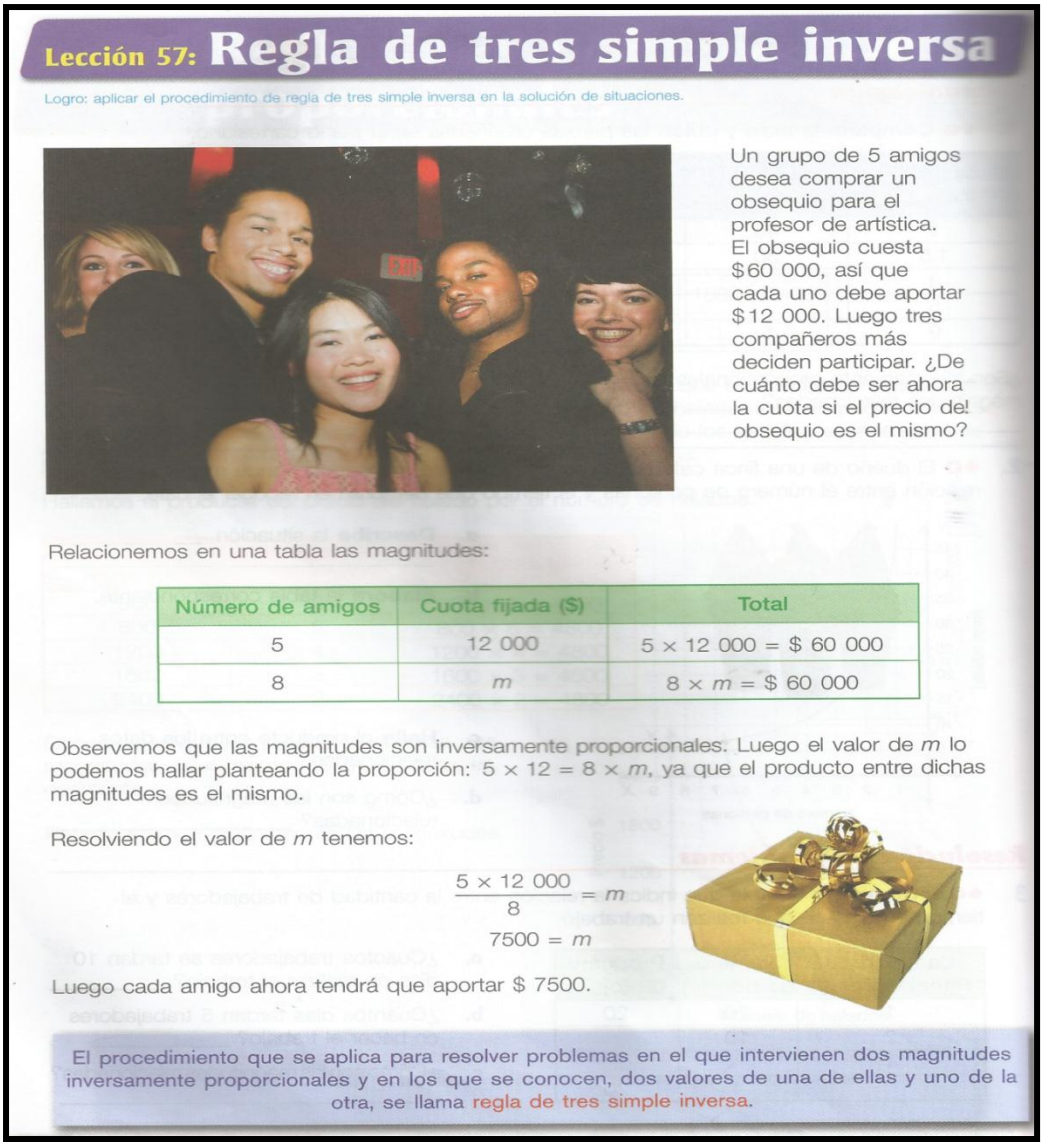
Representamos gráficamente las magnitudes.

Dos magnitudes son inversamente proporcionales si están inversamente correlacionadas y, además, el producto entre ellas es constante. Su gráfica es una curva que decrece.

Figura 47. Lección 56, Magnitudes inversamente proporcionales

Al igual que las anteriores lecciones se inicia desde una situación problema resuelta, que presenta datos de dos magnitudes mostrados en una tabla, permitiendo observar que estas dos magnitudes están inversamente correlacionadas, su gráfica es ilustrada por medio de una curva decreciente, representada en un plano cartesiano.

Finalmente en la figura 51, se presenta la leccion No 57 del texto escolar 1 que contiene el concepto de regla de tres simple inversa cuyo logro es *aplicar el procedimento de regla de tres,* tambien la definición de simple inversa en la solucion de situaciones.



Lección 57: Regla de tres simple inversa

Logro: aplicar el procedimiento de regla de tres simple inversa en la solución de situaciones.

Un grupo de 5 amigos desea comprar un obsequio para el profesor de artística. El obsequio cuesta $60 000, así que cada uno debe aportar $12 000. Luego tres compañeros más deciden participar. ¿De cuánto debe ser ahora la cuota si el precio del obsequio es el mismo?

Relacionemos en una tabla las magnitudes:

Número de amigos	Cuota fijada ($)	Total
5	12 000	$5 \times 12\,000 = \$\ 60\,000$
8	m	$8 \times m = \$\ 60\,000$

Observemos que las magnitudes son inversamente proporcionales. Luego el valor de m lo podemos hallar planteando la proporción: $5 \times 12 = 8 \times m$, ya que el producto entre dichas magnitudes es el mismo.

Resolviendo el valor de m tenemos:

$$\frac{5 \times 12\,000}{8} = m$$

$$7500 = m$$

Luego cada amigo ahora tendrá que aportar $ 7500.

El procedimiento que se aplica para resolver problemas en el que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales y en los que se conocen, dos valores de una de ellas y uno de la otra, se llama regla de tres simple inversa.

Figura 48. Lección 57, Regla de tres simple inversa

En la figura 51, el texto escolar presenta por medio de un ejemplo, el procedimiento que se aplica para resolver situaciones problema en el que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales y en las que se conocen, dos medidas de una magnitud, y una medida de la otra magnitud, haciendo uso de la categoría multiplicativa regla de tres, teniendo en cuenta que las magnitudes son inversamente proporcionales.

Seguidamente se presenta la figura 52 que exhibe la sección de resolución de problemas, propuestos por el texto escolar 1, el cual presenta los problemas del 16 al 21 de análisis del presente trabajo de grado y que en el texto se enumeran del 1 al 6.

Figura 49. Problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21 resolución de problemas, lección 57

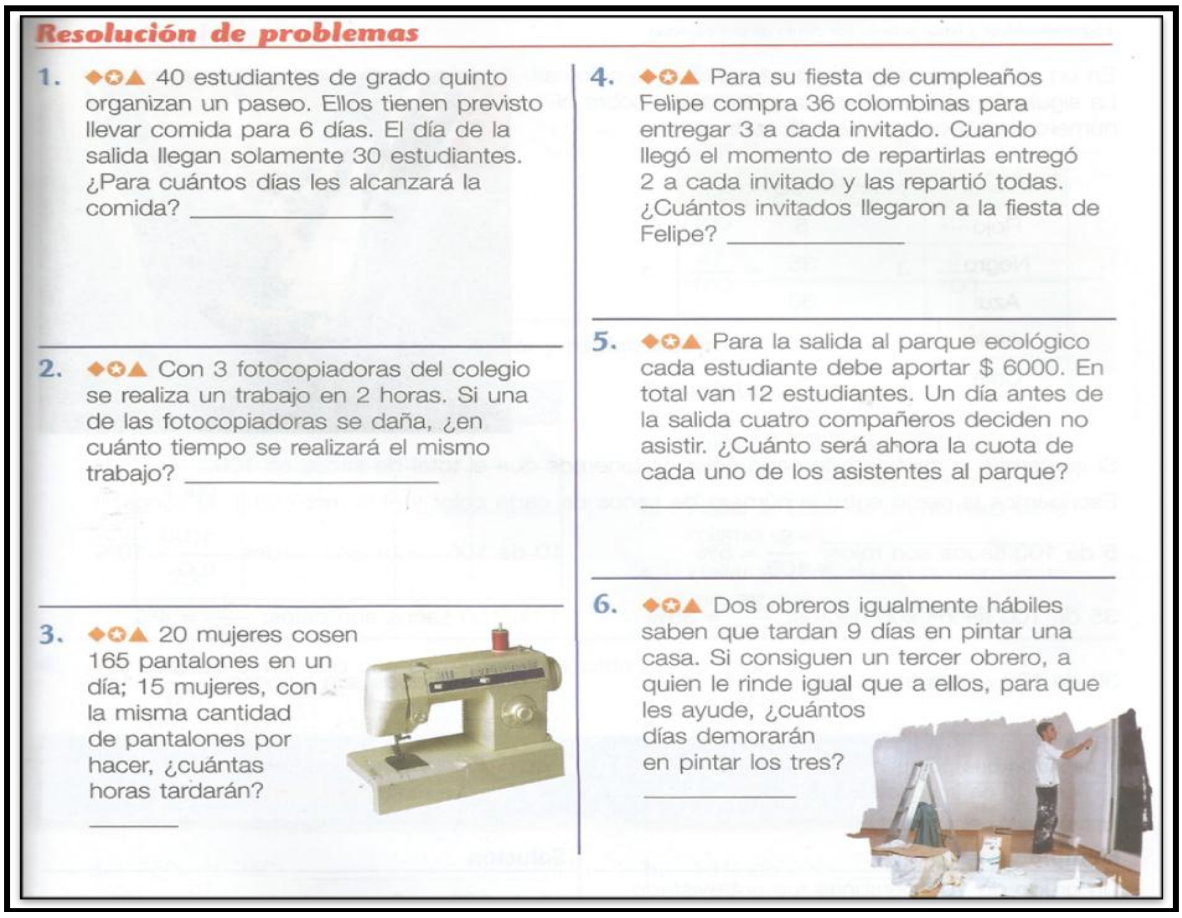


Figura 50. Problemas 16, 17, 18, 19, 20 y 21 resolución de problemas, lección 57

Se observa en la figura 52, que para dar solución a las situaciones propuestas por el texto, el estudiante debe encontrar las magnitudes que intervienen, dando cuenta que son inversamente proporcionales, es decir, no siempre el dato a encontrar es menor al ofrecido, por ejemplo en el problema 16, disminuye la cantidad de estudiantes por tanto aumenta la cantidad de días para su alimentación, en los problemas 17 al 20, al disminuir una magnitud (la cantidad de fotocopiadoras, de mujeres, la cantidad de colombinas, la cantidad de estudiantes respectivamente) aumentan la magnitud resultante, así(el tiempo de trabajo, la cantidad de invitados, el aporte en dinero),por en el contrario en el problema 21, aumenta la magnitud con

que se cuenta y disminuye el tiempo de trabajo; de este modo se infiere que en las situaciones analizadas, el estudiante debe tener en cuenta que el valor a obtener puede ser menor o mayor que el ofrecido inicialmente en la situación, sin ser directamente proporcional, es decir, debe hacer uso de la regla de tres simple inversa, la cual corresponde a la categoría del isomorfismo de medidas. Según Maza (1991), en el problema 16 se puede inferir que el estudiante puede incidir en errores de naturaleza semántica, en el concepto y procedimiento de la regla de tres inversa.

2.1.2.2 Texto Escolar 2 Estrategias en Matemáticas 5, editorial Libros & Libros (2009)

En la tabla 5 aparece la información general del texto 2, que aborda el nombre del texto, los autores, la editorial y el año de publicación.

Tabla 5 Información del texto escolar 2

Nombre del Texto Escolar:	Estrategias en Matemáticas 5
Autores:	Sandra P. Arévalo Ramírez. Betsy Perafán Liévano. Claudia Salazar Amaya . Yuly Marcela Vanegas M.
Editorial:	Libros & Libros S.A
Año de publicación:	Copyright 2009

A continuación en la figura 53 se exhibe la portada del texto escolar 2



Figura 51. Portada del texto: Estrategias en Matemáticas

El texto escolar 2, se encuentra organizado en cuatro unidades, cada una de las cuales indica que integra el desarrollo de los cinco pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. El texto caracteriza que cada pensamiento se encuentra estructurado a través de un contexto significativo adecuado para cada uno, contiene unas temáticas que se organizan teniendo en cuenta una motivación o contextualización del tema, seguido del concepto y finalmente la ejercitación, también cuenta con una sección denominada afianzamiento y en el texto se indica que tiene como fin recordar términos clave, relacionar conceptos, desarrollar habilidades y la formación ciudadana. Por último, cada unidad propone protocolos cognitivos que son los que facilitan el desarrollo de procesos presentes en la

formulación y resolución de problemas, que hacen posible el desarrollo de habilidades de pensamiento.

Seguidamente la tabla 6 indica la organización del contenido del texto, el número de unidad, título de unidad y tipo de pensamiento (s) asociado desde el marco legal curricular colombiano MEN (1998,2006).

Tabla 6 Organización de las unidades texto 2

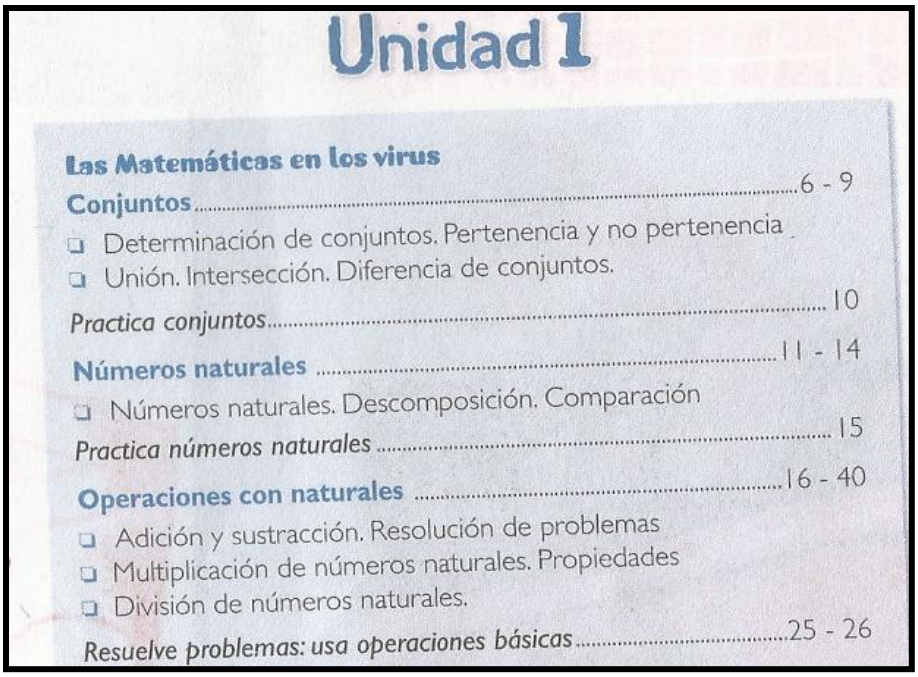
N° de Unidad	**Título de unidad (Contenido)**	**Tipos de pensamiento (s) asociados desde el marco legal curricular MEN (1998, 2006)**
Uno	Conjuntos, Números naturales y operaciones, ángulos y líneas ,medidas de longitud, tablas estadísticas, patrones	Numérico, geométrico ,métrico, aleatorio, variacional.
Dos	Fracciones, polígonos, medidas de superficie, azar y probabilidad, ecuaciones	Numérico, geométrico, métrico, aleatorio, variacional.
Tres	Números decimales, cuerpos geométricos, medidas de volumen, representación gráfica, situaciones de cambio.	Numérico, geométrico, métrico, aleatorio, variacional.
Cuatro	Razones y Proporciones, movimientos en el plano, magnitudes, representación de datos, proporcionalidad	Numérico, geométrico, métrico, aleatorio, variacional.

El texto 2 presenta la Prueba Saber propuesta por el ICFES, cuyo objetivo es evaluar la competencia matemática de los estudiantes de la Educación Básica a partir de evidencias presentes en la comunicación, los razonamientos y la resolución de problemas.

Para terminar esta presentación preliminar debe indicarse que el texto escolar de la

editorial Libros & Libros, expone que tiene como propósitos atender la diversidad cognitiva a través del desarrollo de procedimientos y actividades específicas para los diferentes niveles de aprendizaje, a su vez vincular la comprensión conceptual con la habilidad procedimental, además, el mismo texto 2, plantea situaciones de aprendizaje significativas y comprensivas para el estudiante y por último, el texto sostiene que con este proceso permite potencializar habilidades de mecanización, automatización, ejecución y uso de procedimientos a través del planteamiento de distintas situaciones problema.

Seguidamente se presenta la figura 54, que muestra un fragmento de la unidad 1 del texto 2, la cual es una de las unidades que será objeto de este análisis.



Unidad 1

Las Matemáticas en los virus
Conjuntos ..... 6 - 9
- Determinación de conjuntos. Pertenencia y no pertenencia
- Unión. Intersección. Diferencia de conjuntos.

Practica conjuntos 10
Números naturales ..... 11 - 14
- Números naturales. Descomposición. Comparación

Practica números naturales 15
Operaciones con naturales ..... 16 - 40
- Adición y sustracción. Resolución de problemas
- Multiplicación de números naturales. Propiedades
- División de números naturales.

Resuelve problemas: usa operaciones básicas ..... 25 - 26

Figura 52. Fragmento de la tabla de contenido de la unidad n° 1 del texto 2

La unidad 1 en este texto, con nombre las Matemáticas en los virus, se tendrá en cuenta las operaciones con números naturales, donde se encuentra la multiplicación sus propiedades y la

división en este conjunto numérico.

Ahora se muestra la figura 55, que expone las operaciones con números naturales, particularmente el concepto de la multiplicación, dando una definición, a su vez indican los términos de la misma, (factores y producto) más adelante mencionan los términos multiplicando y multiplicador pero no define qué significan, también muestra a su vez un esquema con el algoritmo del producto, se percibe que este esta definición el estudiante debe tenerla en cuenta como base para responder ejercicios que le son propuestos sobre algoritmos presentes en la unidad.

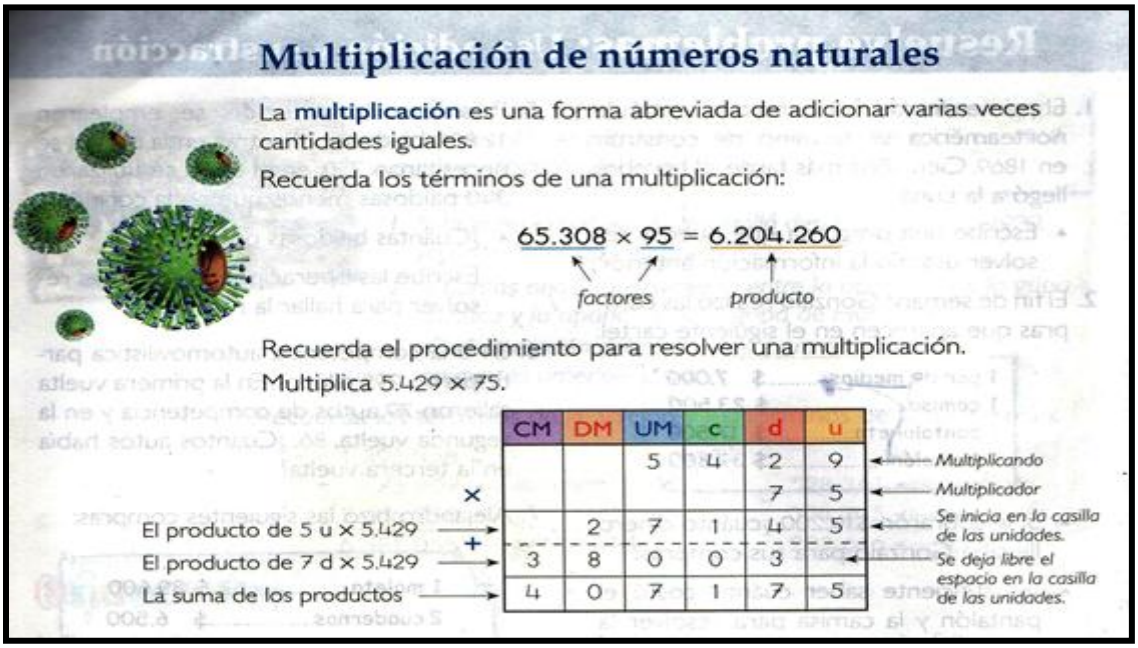
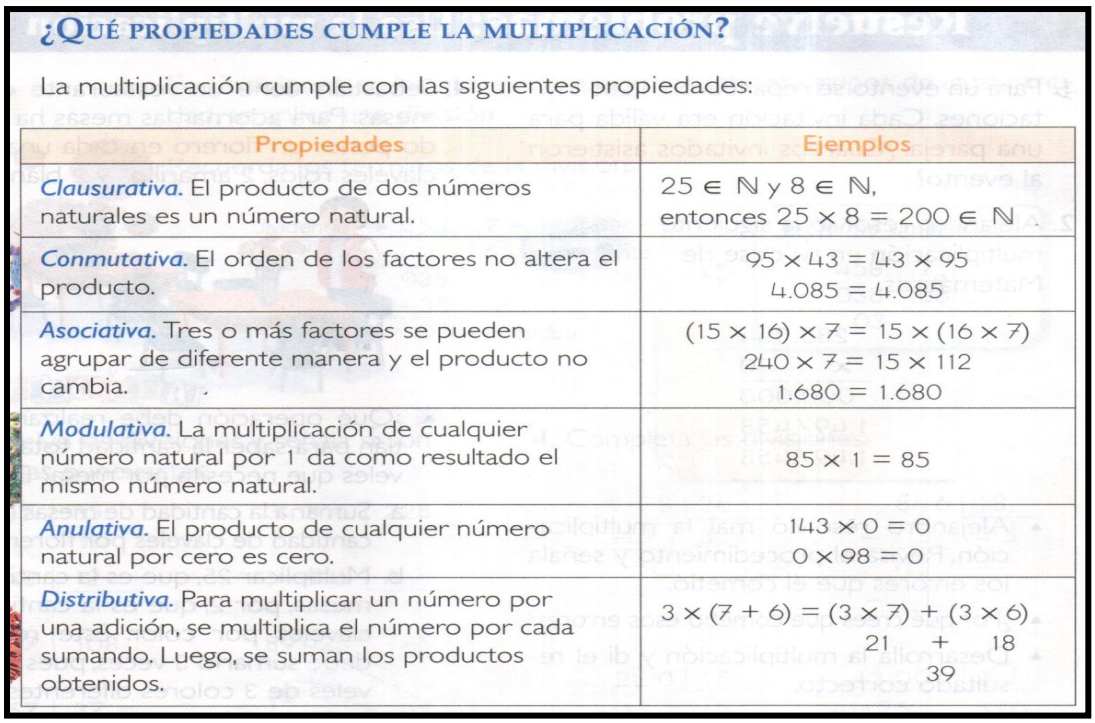


Figura 53. Concepto de multiplicación

Seguidamente como se presenta en la figura 56, donde el texto ejemplifica en lenguaje natural las propiedades de la multiplicación, en las cuales se observan: la clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa, anulativa y distributiva, que se encuentran definidas en la unidad 1.



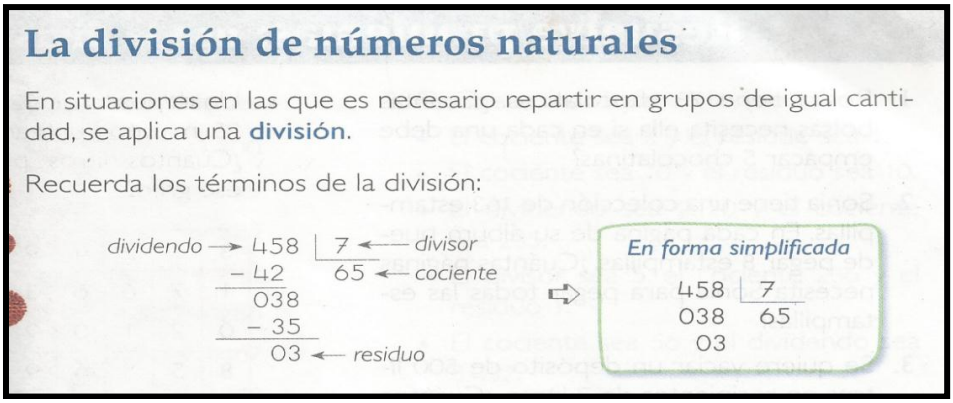
¿Qué propiedades cumple la multiplicación?

La multiplicación cumple con las siguientes propiedades:

Propiedades	Ejemplos
Clausurativa. El producto de dos números naturales es un número natural.	$25 \in \mathbb{N}$ y $8 \in \mathbb{N}$, entonces $25 \times 8 = 200 \in \mathbb{N}$
Conmutativa. El orden de los factores no altera el producto.	$95 \times 43 = 43 \times 95$ $4.085 = 4.085$
Asociativa. Tres o más factores se pueden agrupar de diferente manera y el producto no cambia.	$(15 \times 16) \times 7 = 15 \times (16 \times 7)$ $240 \times 7 = 15 \times 112$ $1.680 = 1.680$
Modulativa. La multiplicación de cualquier número natural por 1 da como resultado el mismo número natural.	$85 \times 1 = 85$
Anulativa. El producto de cualquier número natural por cero es cero.	$143 \times 0 = 0$ $0 \times 98 = 0$
Distributiva. Para multiplicar un número por una adición, se multiplica el número por cada sumando. Luego, se suman los productos obtenidos.	$3 \times (7 + 6) = (3 \times 7) + (3 \times 6)$ $21 + 18$ 39

Figura54. Propiedades de la multiplicación

Ahora, se presenta la figura 57, donde el texto expone el algoritmo de la división, la cual es dada como una repartición de grupos de igual cantidad, también se indican los términos de la división.



La división de números naturales

En situaciones en las que es necesario repartir en grupos de igual cantidad, se aplica una **división**.

Recuerda los términos de la división:

dividendo → 458 | 7 ← divisor
− 42 | 65 ← cociente
038
− 35
03 ← residuo

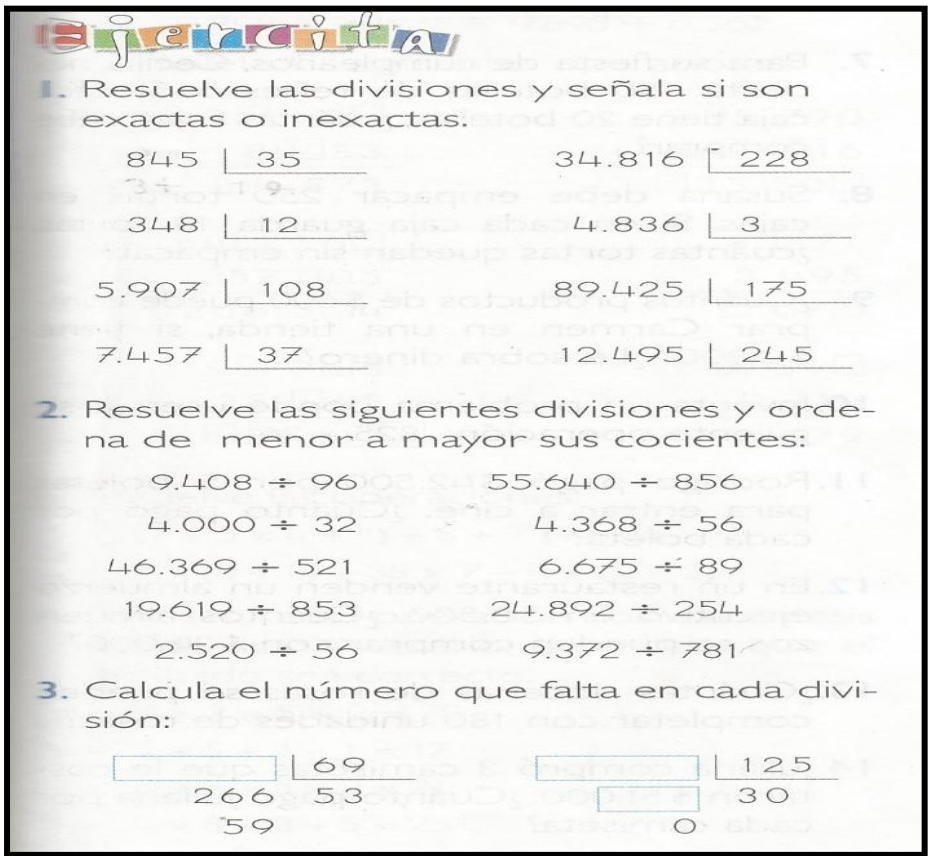
En forma simplificada

458 | 7
038 | 65
03

Figura 55. Definición de división

En el fragmento del texto dado en la figura 58, el cual propone a su vez ejercicios para reconocer que el residuo es la parte de la división que indica si es exacta o no, a su vez, deja

ilustrada una actividad que permite que el estudiante afiance el cómo hallar el dividendo, presentando con este la comprobación de que al multiplicar el cociente por el divisor, se obtiene el dividendo.



Ejercita

1. Resuelve las divisiones y señala si son exactas o inexactas.

845 | 35 — 34.816 | 228

348 | 12 — 4.836 | 3

5.907 | 108 — 89.425 | 175

7.457 | 37 — 12.495 | 245

2. Resuelve las siguientes divisiones y ordena de menor a mayor sus cocientes:

9.408 ÷ 96 — 55.640 ÷ 856

4.000 ÷ 32 — 4.368 ÷ 56

46.369 ÷ 521 — 6.675 ÷ 89

19.619 ÷ 853 — 24.892 ÷ 254

2.520 ÷ 56 — 9.372 ÷ 781

3. Calcula el número que falta en cada división:

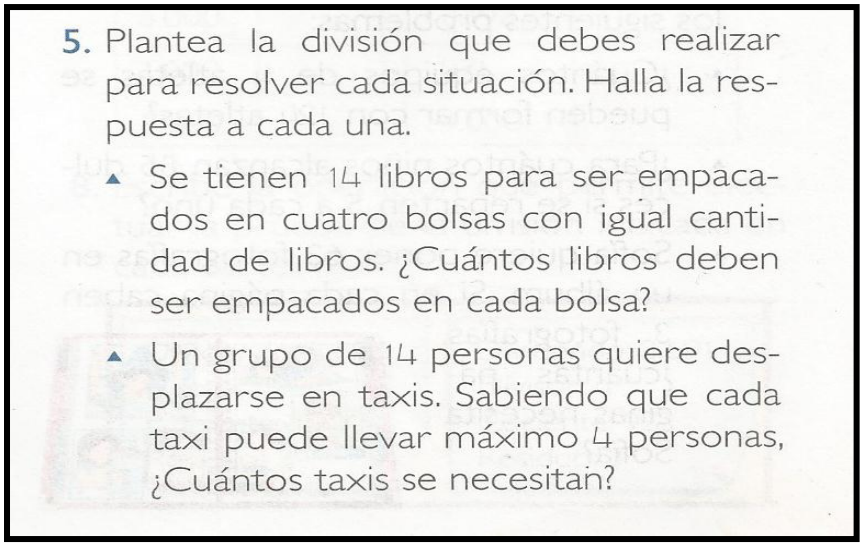
□ | 69 — □ | 125

266 — 53 — □ — 30

59 — 0

Figura 56. División exacta o inexacta

En el siguiente fragmento del texto, presentado en la figura 59se muestra el problema 22, correspondiente en el texto 2 al número 5, el cual está subdividido en dos ítems. Se observa la aplicación del algoritmo a una situación problema, no se exige razonar, entonces la tarea a realizar está definida, y se infiere que el problema tiene una aplicación en la división partitiva.


5. Plantea la división que debes realizar para resolver cada situación. Halla la respuesta a cada una.

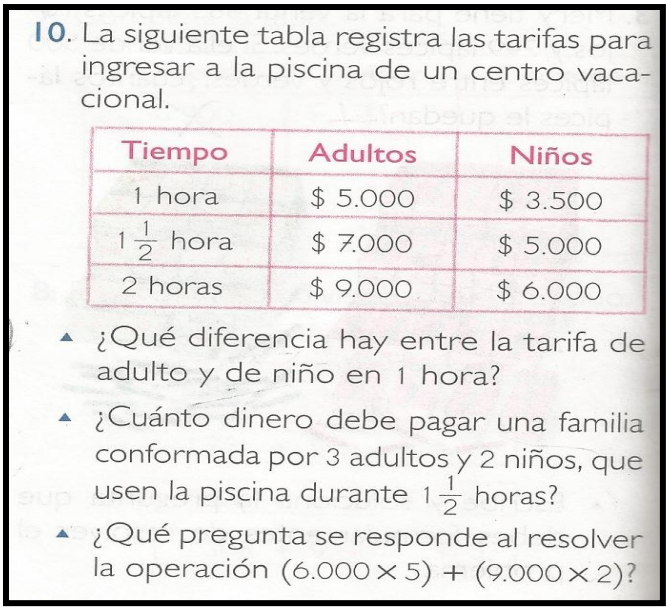
- Se tienen 14 libros para ser empacados en cuatro bolsas con igual cantidad de libros. ¿Cuántos libros deben ser empacados en cada bolsa?
- Un grupo de 14 personas quiere desplazarse en taxis. Sabiendo que cada taxi puede llevar máximo 4 personas, ¿Cuántos taxis se necesitan?

Figura 57. Problema 22, situación problemas división

De acuerdo a los modelos expuestos por Vergnaud (1991) se alude que el problema 22 se clasifica dentro de la categoría de isomorfismo de medidas en la clase de división partitiva (Partes iguales), además se observa que la división es inexacta dado que tiene residuo diferente de cero, para el cual se debe inferir en este caso qué significado tiene este residuo según el contexto de la situación problema y es que para el ítem uno deben ser empacados tres libros en cada bolsa y una cuarta bolsa contendrá dos libros, para el ítem dos necesitan cuatro taxis y uno de ellos irá con dos personas.

En la figura 60, se presenta la situación 10 de la unidad 1 correspondiente al problema 23 del presente análisis, la situación indica una información adicional que consiste en una tabla, donde se tiene la variable tiempo relacionada con el costo según la cantidad de personas, la cual se reparte en tres ítems, el primero hace referencia a la estructura aditiva, la cual no es objeto de análisis, el segundo el estudiante debe realizar una multiplicación rutinaria donde halle el costo a pagar por cierta cantidad de personas ejemplo $3 \times 7000 = 21000$ y $2 \times 5000 = 10000$, para

luego sumar los resultados, y dar solución, otra forma es la suma repetitiva, es decir, hallar el cardinal dado que se establece a partir de un valor y la cantidad que se repetirá en cada término. El tercer ítem atañe a una interpretación de una operación según los datos proporcionados, entonces se deduce que el problema 23 corresponde al isomorfismo de medidas en la categoría multiplicación.



10. La siguiente tabla registra las tarifas para ingresar a la piscina de un centro vacacional.

Tiempo	Adultos	Niños
1 hora	$ 5.000	$ 3.500
$1\frac{1}{2}$ hora	$ 7.000	$ 5.000
2 horas	$ 9.000	$ 6.000

- ¿Qué diferencia hay entre la tarifa de adulto y de niño en 1 hora?
- ¿Cuánto dinero debe pagar una familia conformada por 3 adultos y 2 niños, que usen la piscina durante $1\frac{1}{2}$ horas?
- ¿Qué pregunta se responde al resolver la operación $(6.000 \times 5) + (9.000 \times 2)$?

Figura 58. Problema 23 sección Situación problema

.

Seguidamente se presentan los problemas 24 y 25 en la figura 61, correspondiente al 4 y 5 en el texto escolar, donde se manifiesta el uso de la división, dado que la situación implícitamente tiene la acción de repartir, por ello, de inmediato se infiere la aplicación de ésta operación, de esta manera el estudiante debe recurrir a una división en la cual está implícita la regla de tres, definida dentro del isomorfismo de medidas y clase división partitiva según los modelos presentados por Vergnaud (1991). Así $5400 \div 36 = 150$, con respeto a la regla de tres se puede evidenciar así $\frac{1}{36} = \frac{x}{5400}$, para dar solución al problema 25 se deduce el mismo procedimiento del problema

anterior. Según Maza (1991), en los problemas 24 y 25, se infiere que pueden cometer errores de naturaleza sintáctica, al aplicar la propiedad distributiva en el cociente y si se suprime los ceros, sin tener en cuenta agregarlos al cociente y de naturaleza semántica, en el concepto y procedimiento de la regla de tres directa.

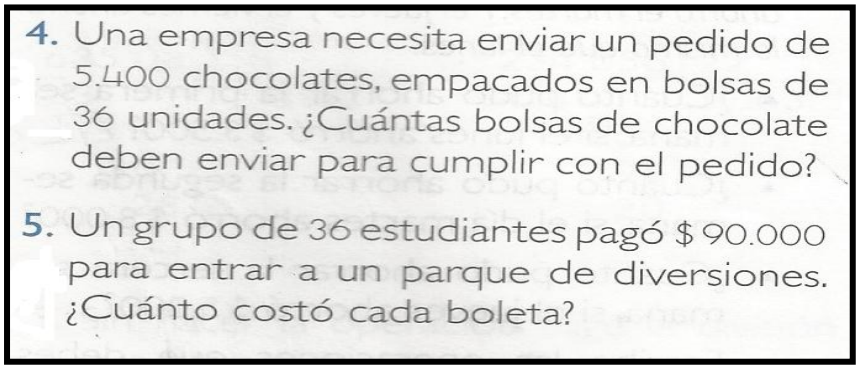


Figura 59. Problema 24 y 25, sección problemas de división

Por otro lado, se presenta en la figura 61, un fragmento del contenido de la unidad 2.

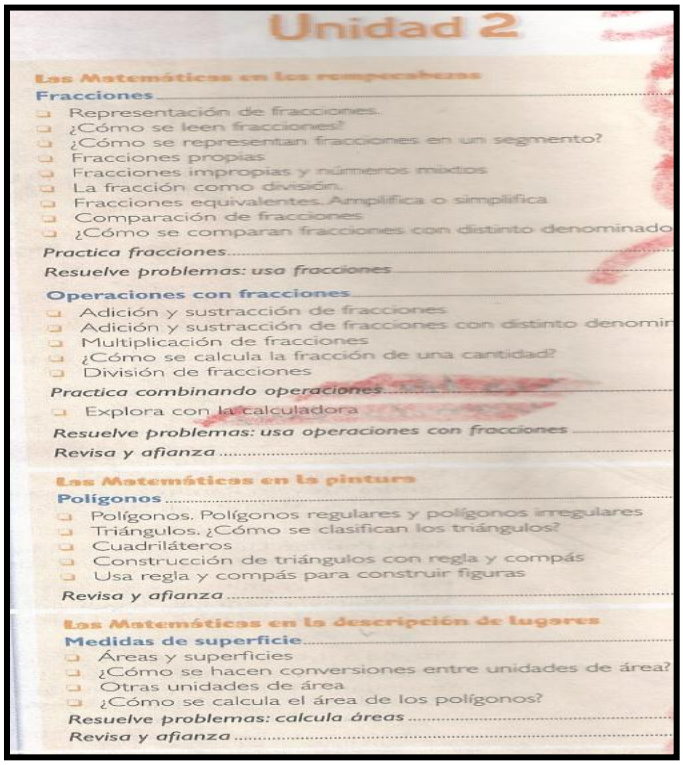


Figura 60. Contenido de la unidad 2

En la unidad 2, se encuentra “Las Matemáticas en la descripción de lugares”, con el cual se presentan las medidas de superficie, este como un ejemplo de una categoría de la estructura multiplicativa: producto cartesiano en la cual se presentan dos espacios de medidas de dimensión para luego encontrar una tercera. En la figura 63 se presenta específicamente el objeto de interés de esta unidad.

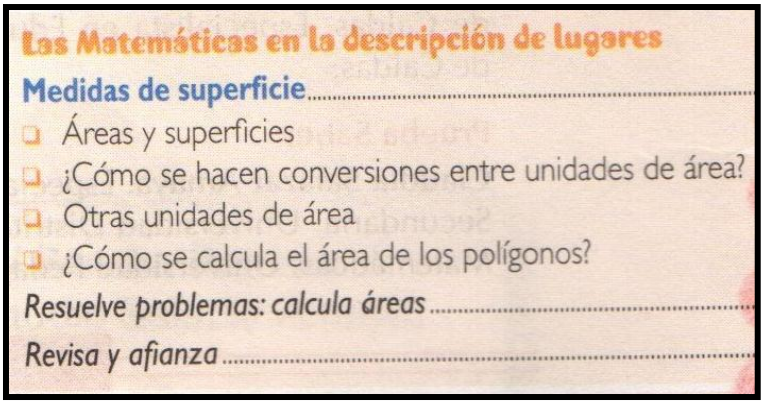


Figura 61. Fragmento de la unidad

En la figura 64 se contextualiza el concepto de área y superficie con situaciones de una finca, para seguidamente a partir de unas preguntas iniciarse en la construcción del concepto de área y finalizar con su definición.

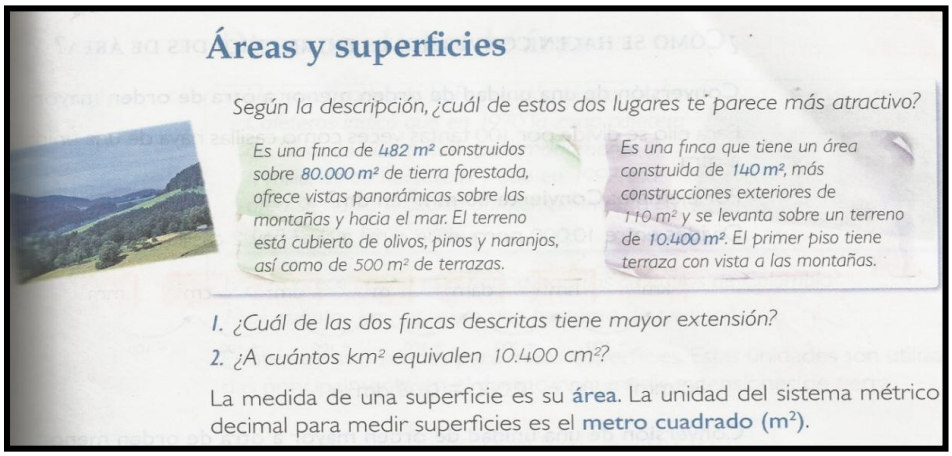


Figura 62. Contextualización del concepto de área

En la figura 65 se presenta un ejemplo del producto de medidas, en la cual se vinculan inicios de fórmulas de ciertas áreas de figuras planas (cuadrado, rectángulo, triángulo, polígono regular), en las cuales se busca hallar el cardinal producto de otros dos dados.

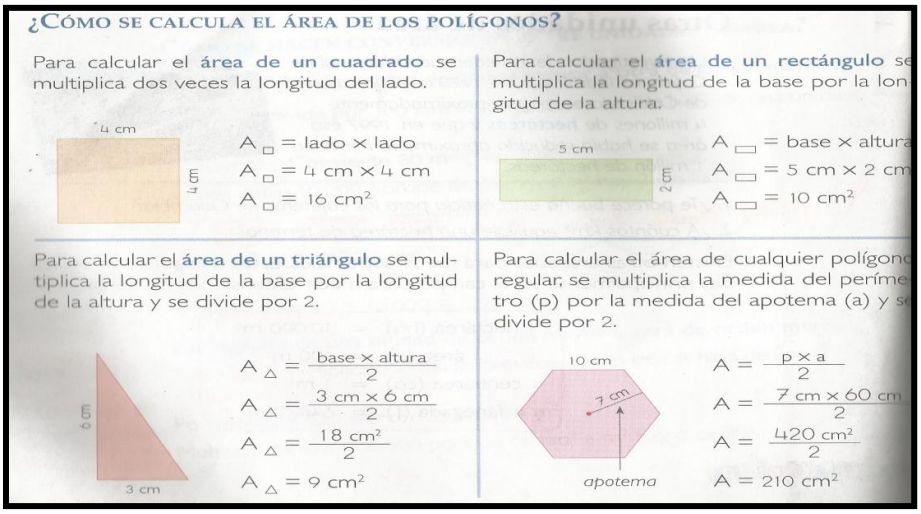


Figura 63, Ejemplo de situación problema con áreas

Por otro lado, en la figura 66, que exhibe el problema 26 se observa que el texto escolar 2 es ilustrativo dado que presenta imágenes que el lector usa para orientarse y utilizarlas como medio de razonamiento.

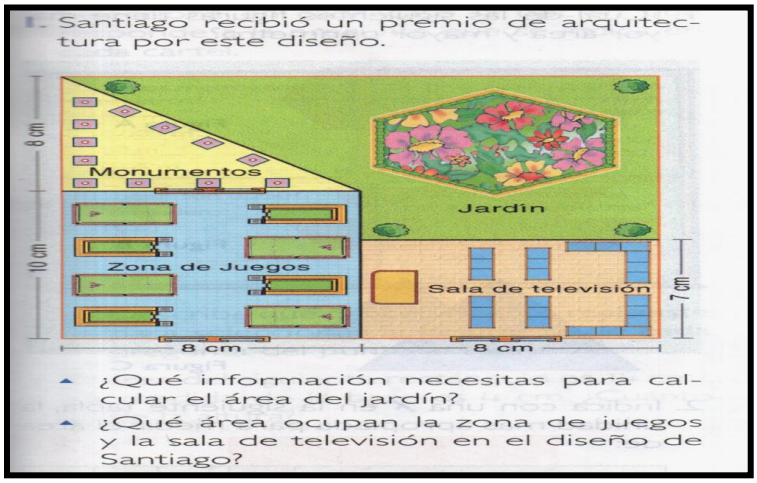


Figura 64. Problema 26.

Para dar solución al problema 26, en el primer ítem se deduce que el estudiante debe partir del conocimiento de área y el manejo de dos dimensiones, esto se puede inferir desde Vergnaud (1991), en el segundo se decide que el estudiante debe aplicar las fórmulas para hallar las áreas de rectángulos, dado que en el gráfico las áreas presentan esta forma, que corresponde área de zona de juegos $10cm \times 8cm$ que al ser sumado con el producto de área de sala de televisión $8cm \times 7cm$, con lo anterior se indica que esta situación corresponde a la categoría producto de medidas de la clase dimensión producto.

La figura 67, muestra el problema 27, para resolver esta situación necesita recubrir la superficie determinando que si para un anuncio se requieren cuatro láminas como las que indica el problema entonces para 10 anuncios requerirá más de 5 láminas, con ello se infiere que corresponde a la misma categoría y clase que la situación anterior y que implica la visualización para responderlo más que el uso de fórmulas.

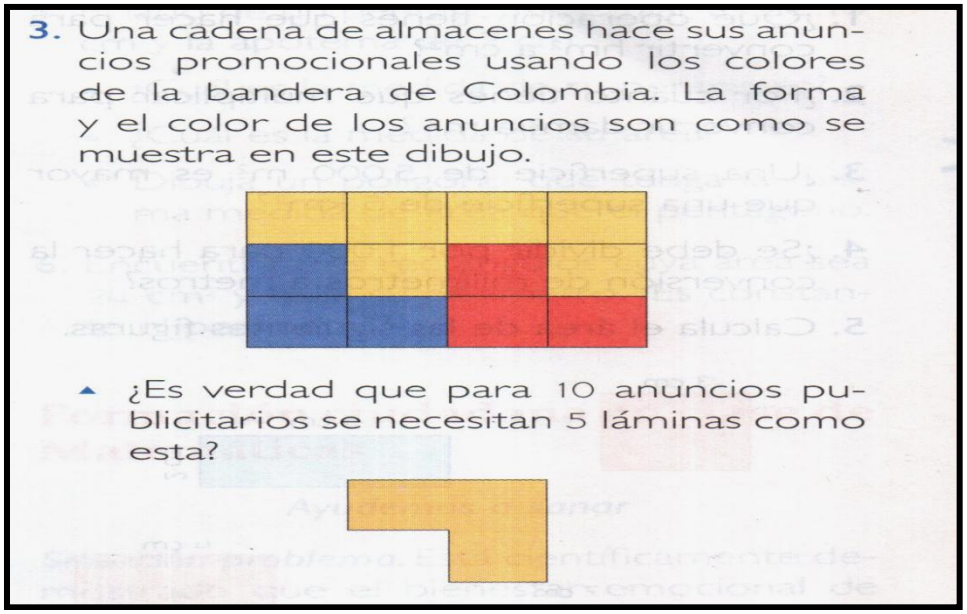


Figura 65. *Problema 27 Ilustraciones*

En la figura 68, se muestra el fragmento de la unidad 3 del libro de texto, que corresponde a medidas de volumen.

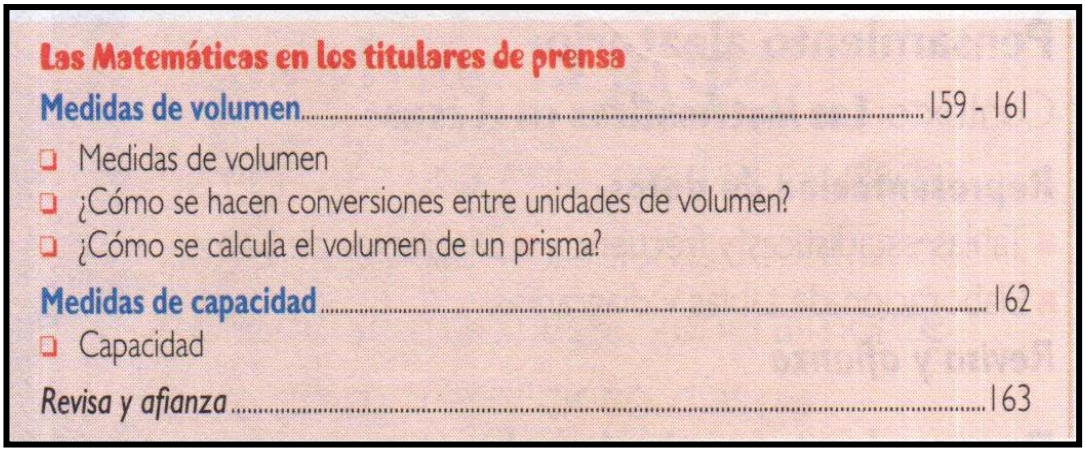


Figura 66. Fragmento de la unidad 3

En la figura 69, se presenta el concepto de volumen expuesto por el libro a partir de un corto texto informativo y una situación problema, además la unidad de medida que se usa el metro cúbico como unidad de patrón.

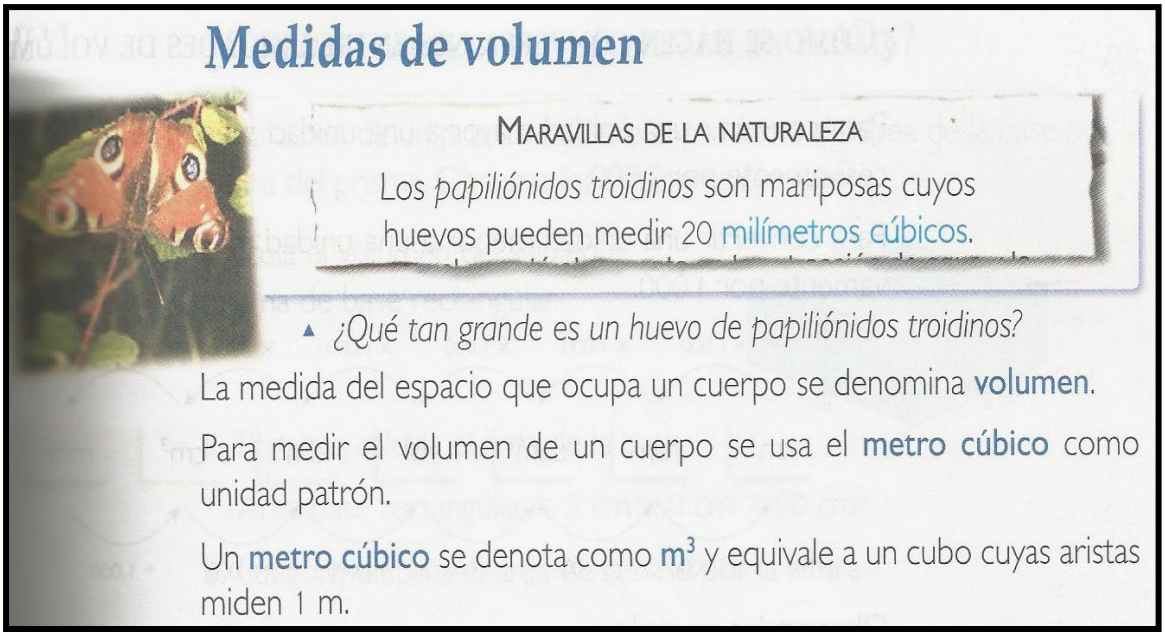


Figura 67. Concepto de Volumen

En la figura 70, muestra el problema 28, se indica la aplicación del producto de medidas con presencia de cantidades continuas en el que se le presenta al lector tres opciones para identificar con cuál de ellas se halla el volumen a su vez de la argumentación, teniendo en cuenta que se debe reconocer el concepto de volumen identificando las dimensiones a operar, en este caso la tercera opción es la correcta.

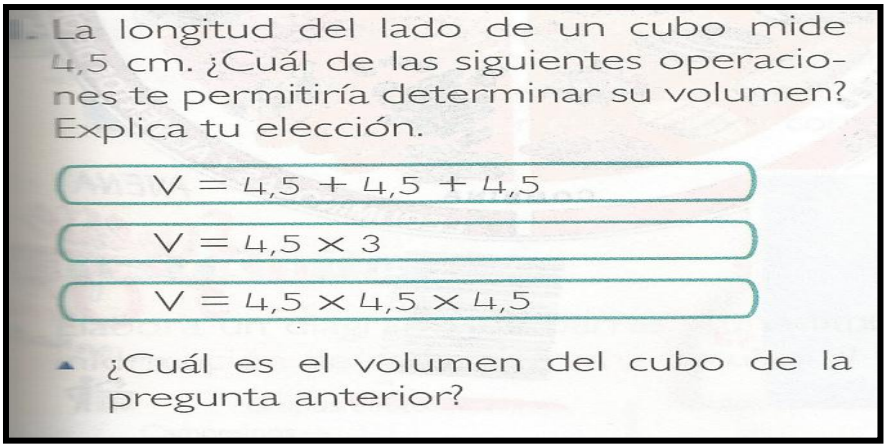


Figura 68. Problema 28, Determinar el Volumen

Seguidamente en la figura 71, aparece la presentación de la unidad 4 titulada "Las Matemáticas en las caricaturas", donde aparecen cómo el texto expone lo concerniente a las proporciones.

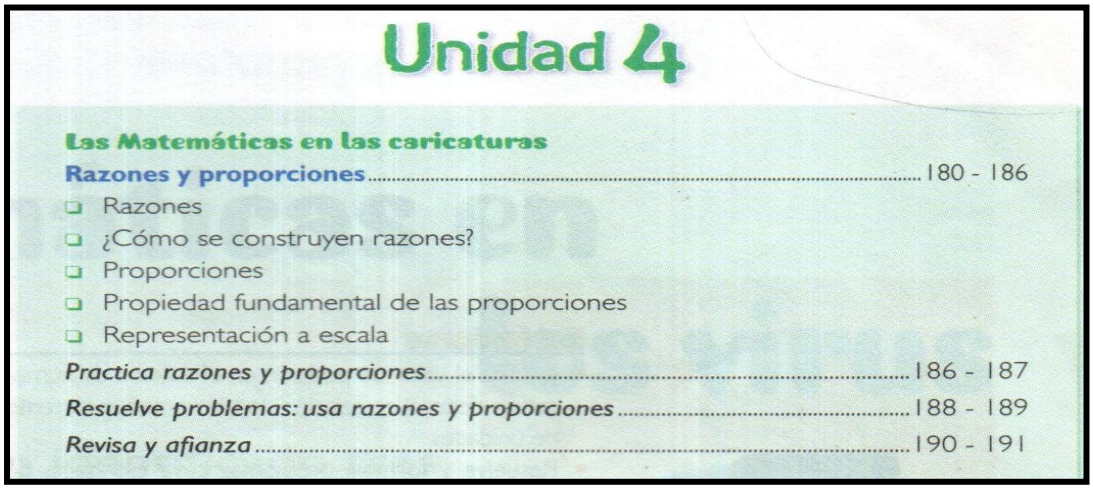


Figura 69. Contenido de la unidad 4

Luego, las proporciones se introducen relacionándose con una caricatura deformativaa la cual se le exageran los rasgos y proporciones para ridiculizar a un sujeto. Después, se introduce el concepto de proporción basándose en que son razones equivalentes, presentado en la figura 72, además se indican sus términos (extremos y medios), seguidamente se presenta un ejemplo con sus términos.

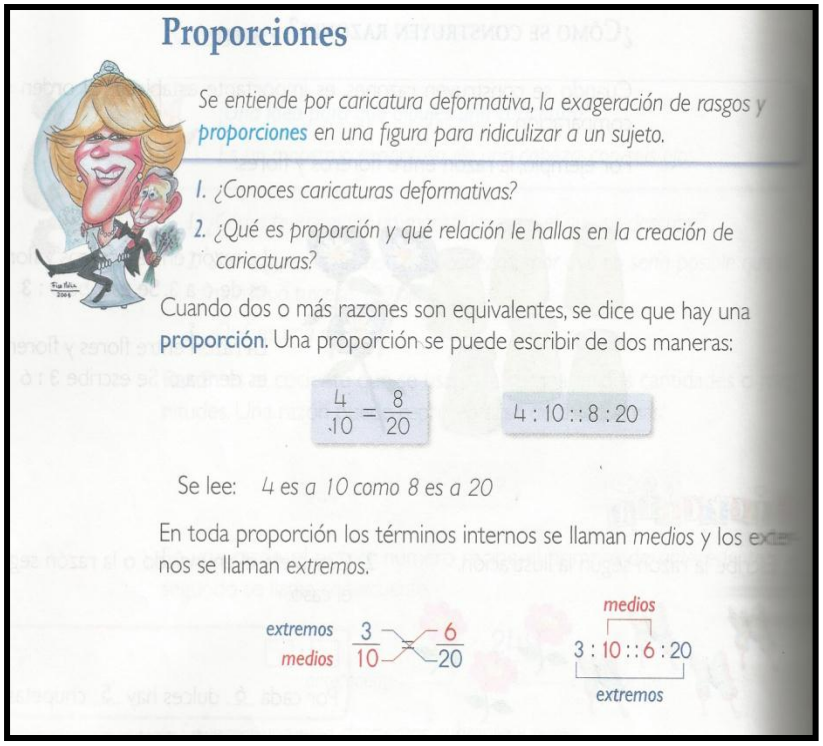
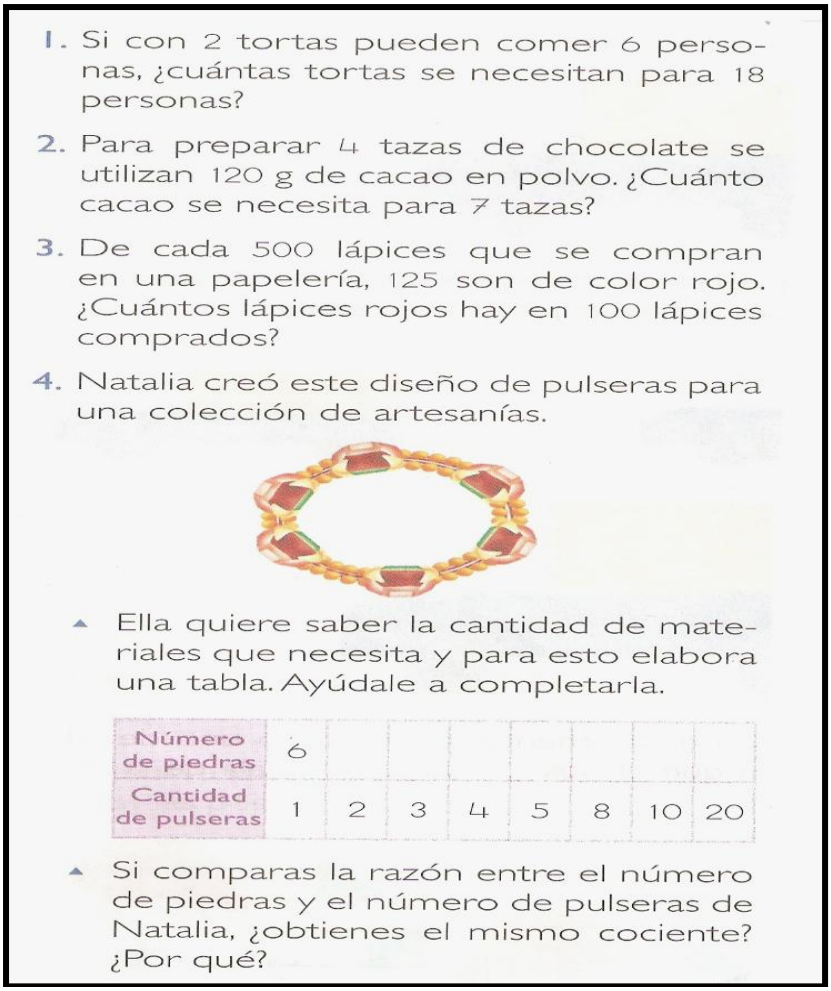


Figura 70. Definición de proporción

Seguidamente se presenta la figura 73, de la sección resuelve problemas: usa razones y proporciones en la que aparecen cuatro situaciones, de las cuales se escogen dos para analizar, la situación uno en el texto, denominada para este trabajo como problema 29 y 30, en estas se percibe la deducción en la respuesta a pesar de que se tiene el concepto de proporción, se hace uso de la propiedad fundamental de las proporciones para resolver problemas como parte del isomorfismo de medidas, dado que cada uno presenta dos datos de una magnitud y uno de otra magnitud, para luego encontrar el dato desconocido.



1. Si con 2 tortas pueden comer 6 personas, ¿cuántas tortas se necesitan para 18 personas?
2. Para preparar 4 tazas de chocolate se utilizan 120 g de cacao en polvo. ¿Cuánto cacao se necesita para 7 tazas?
3. De cada 500 lápices que se compran en una papelería, 125 son de color rojo. ¿Cuántos lápices rojos hay en 100 lápices comprados?
4. Natalia creó este diseño de pulseras para una colección de artesanías.

▲ Ella quiere saber la cantidad de materiales que necesita y para esto elabora una tabla. Ayúdale a completarla.

Número de piedras	6							
Cantidad de pulseras	1	2	3	4	5	8	10	20

▲ Si comparas la razón entre el número de piedras y el número de pulseras de Natalia, ¿obtienes el mismo cociente? ¿Por qué?

Figura 71. Problema 29,30

La situación uno, para este análisis problema 29, que presenta esta figura se plantea de la siguiente manera $\frac{2\ tortas}{personas} = \frac{x}{18\ personas}$, en la cual al aplicar la propiedad fundamental que consiste en igualar el producto de medios y extremos, donde se obtiene que $2 \times 18 = 6 \times x$, a lo que corresponde el valor de x a 6, es decir, se requieren 6 tortas para 18 personas.

La situación dos, denominada para este trabajo como problema 30, emplea el mismo tratamiento, es decir la propiedad de las proporciones, $\frac{4\ tasas}{120\ gramos} = \frac{7\ tasas}{x}$, indicando $4 \times x =$

120×7, donde el valor del dato desconocido es 210 que atribuye a los gramos de cacao que necesitan 7 tazas de chocolate.

El problema tres debe plantearse de la misma forma que los dos anteriores a manera de proporciones. Finalmente, en la situación cuatro para el primer ítem es necesario completar la tabla para observar el comportamiento de las variables en la razón, permitiendo con ella verificar que la propiedad fundamental de las proporciones está presente.

En la unidad 4, aparece el título "Las Matemáticas en la atmósfera", donde el texto propone la proporcionalidad, fragmento presentado en la figura 74.

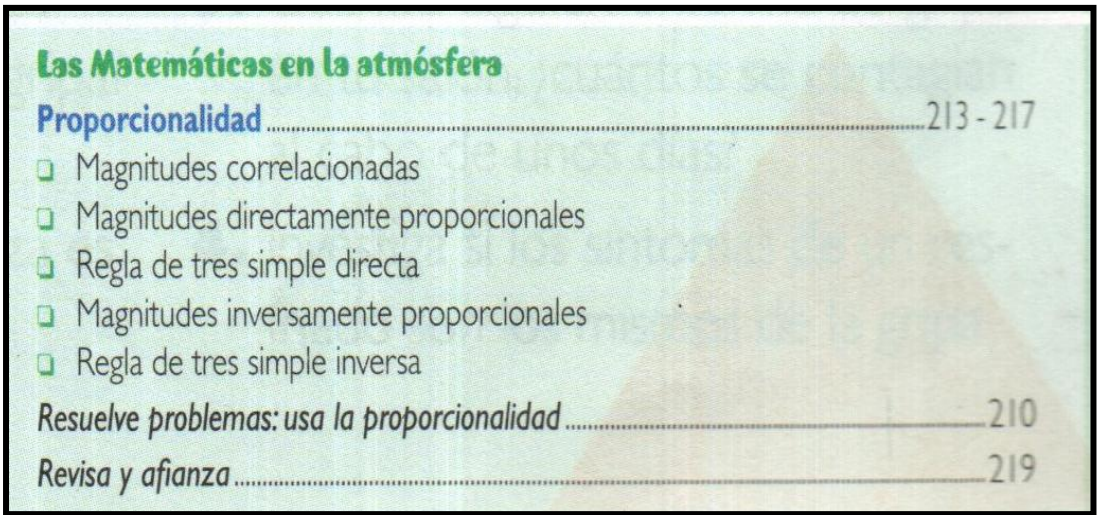
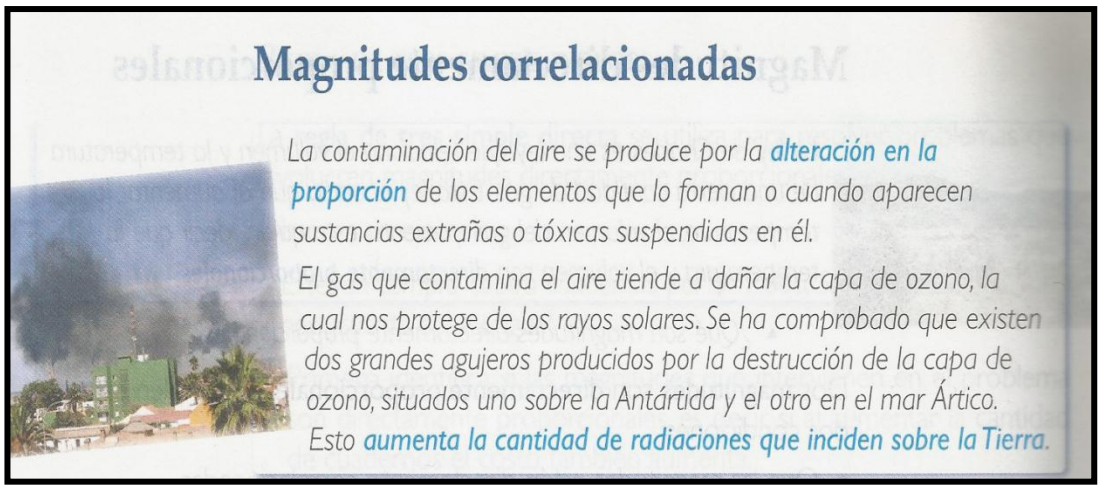


Figura 72. Fragmento de la unidad 4

Finalmente, aparece el concepto de magnitudes correlacionadas en la cual se aplica a su vez el concepto de proporción, este concepto se contextualiza con una situación de contaminación, seguidamente cuestiona al estudiante sobre la lectura presentada, como aparece en la figura 75.



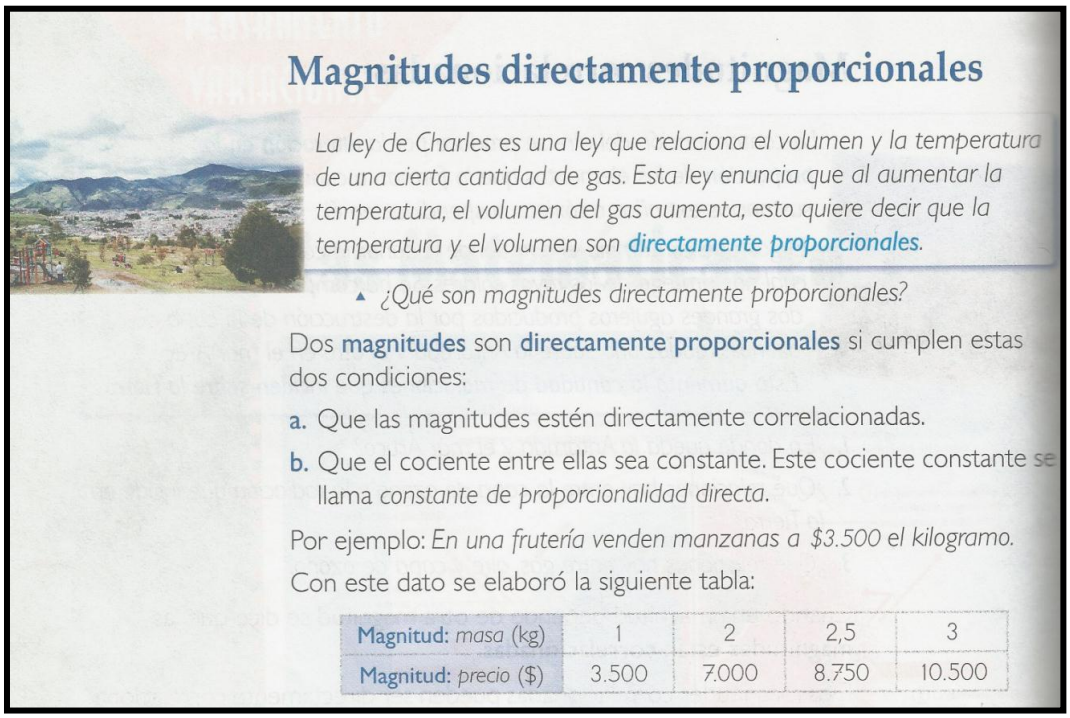
Magnitudes correlacionadas

La contaminación del aire se produce por la **alteración en la proporción** de los elementos que lo forman o cuando aparecen sustancias extrañas o tóxicas suspendidas en él.

El gas que contamina el aire tiende a dañar la capa de ozono, la cual nos protege de los rayos solares. Se ha comprobado que existen dos grandes agujeros producidos por la destrucción de la capa de ozono, situados uno sobre la Antártida y el otro en el mar Ártico. Esto **aumenta la cantidad de radiaciones que inciden sobre la Tierra.**

Figura 73. Contextualización de magnitudes directamente proporcionales

La figura 76 muestra que el texto escolar presenta situaciones en las cuales se muestran cómo se deben resolver problemas de proporcionalidad, mostrando dos condiciones, además de un ejemplo con su correspondiente solución.



Magnitudes directamente proporcionales

La ley de Charles es una ley que relaciona el volumen y la temperatura de una cierta cantidad de gas. Esta ley enuncia que al aumentar la temperatura, el volumen del gas aumenta, esto quiere decir que la temperatura y el volumen son **directamente proporcionales**.

▲ *¿Qué son magnitudes directamente proporcionales?*

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si cumplen estas dos condiciones:

a. Que las magnitudes estén directamente correlacionadas.

b. Que el cociente entre ellas sea constante. Este cociente constante se llama *constante de proporcionalidad directa.*

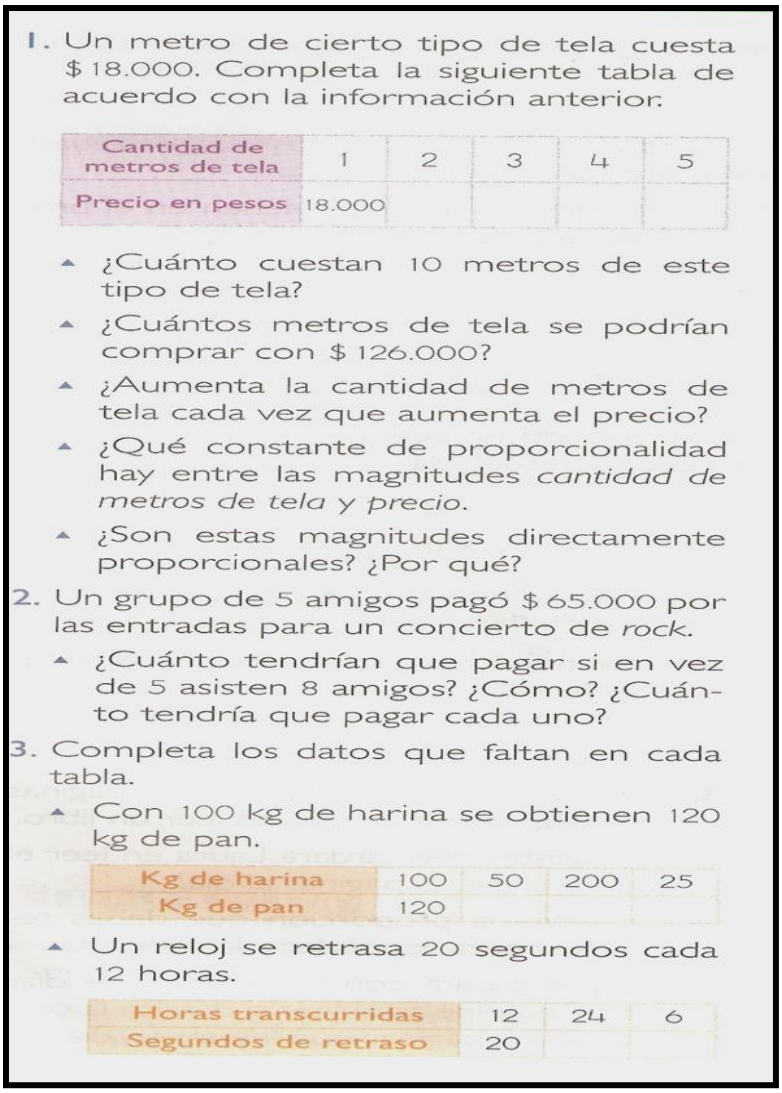
Por ejemplo: *En una frutería venden manzanas a $3.500 el kilogramo.*

Con este dato se elaboró la siguiente tabla:

Magnitud: *masa* (kg)	1	2	2,5	3
Magnitud: *precio* ($)	3.500	7.000	8.750	10.500

Figura74. Magnitudes directamente proporcionales

Las siguientes situaciones de la figura 77 presentadas en el texto, manifiestan el empleo de tablas para observar el comportamiento de las magnitudes en el cual el estudiante a partir de un dato debe hallar otro, igualmente se debe indicar según la relación entre las magnitudes si a medida que una aumenta la otra también y viceversa, con el fin de observar cómo se relacionan, finalmente para dar solución a cada problema se debe usar la regla de tres simple que es una categoría del isomorfismo de medidas



1. Un metro de cierto tipo de tela cuesta $ 18.000. Completa la siguiente tabla de acuerdo con la información anterior:

Cantidad de metros de tela	1	2	3	4	5
Precio en pesos	18.000				

- ¿Cuánto cuestan 10 metros de este tipo de tela?
- ¿Cuántos metros de tela se podrían comprar con $ 126.000?
- ¿Aumenta la cantidad de metros de tela cada vez que aumenta el precio?
- ¿Qué constante de proporcionalidad hay entre las magnitudes *cantidad de metros de tela* y *precio*.
- ¿Son estas magnitudes directamente proporcionales? ¿Por qué?

2. Un grupo de 5 amigos pagó $ 65.000 por las entradas para un concierto de *rock*.
   - ¿Cuánto tendrían que pagar si en vez de 5 asisten 8 amigos? ¿Cómo? ¿Cuánto tendría que pagar cada uno?

3. Completa los datos que faltan en cada tabla.
   - Con 100 kg de harina se obtienen 120 kg de pan.

Kg de harina	100	50	200	25
Kg de pan	120			

   - Un reloj se retrasa 20 segundos cada 12 horas.

Horas transcurridas	12	24	6
Segundos de retraso	20		

Figura 75. Resolución de problemas

2.1.3 Presentación general de las Pruebas Saber y los criterios para su selección

De acuerdo con las Pruebas Saber, estas evaluaciones se realizan a través de pruebas estandarizadas y deben basarse en instrumentos válidos y confiables, que permita hacer inferencias apropiadas sobre conocimientos, habilidades y capacidades de las personas evaluadas. Una prueba se valida cuando mida lo que debe medir, quiere decir que debe haber consistencia entre lo que se pregunta en la prueba y el referente que se definió para la evaluación y a su vez es confiable cuando consiente hacer mediciones precisas sobre lo que se está evaluando. El ICFES sustenta de la siguiente manera la estructuración de las pruebas:

> Las pruebas diseñadas y aplicadas por el Icfes se estructuran bajo la metodología denominada diseño de especificaciones a partir del modelo basado en evidencias**.** Se trata de un conjunto de prácticas de desarrollo de instrumentos que busca definir lo que mide una prueba y apoyar las inferencias que se hacen con base en las evidencias derivadas de la misma. Se busca asegurar la validez mediante la alineación de los procesos y productos de las pruebas con sus objetivos. A su vez, la metodología consiste en un conjunto de procesos -o pasos-, que parten de la identificación de los conocimientos, las habilidades o las competencias que serán evaluadas a través de las pruebas y llegan hasta la definición de las preguntas, de forma tal que se garantiza que la correcta respuesta a las preguntas del examen sea evidencia del desarrollo de lo que se ha propuesto evaluar. (p, 1). Lo anterior se evidencia en la figura 78, aportada por el ICFES (2013).

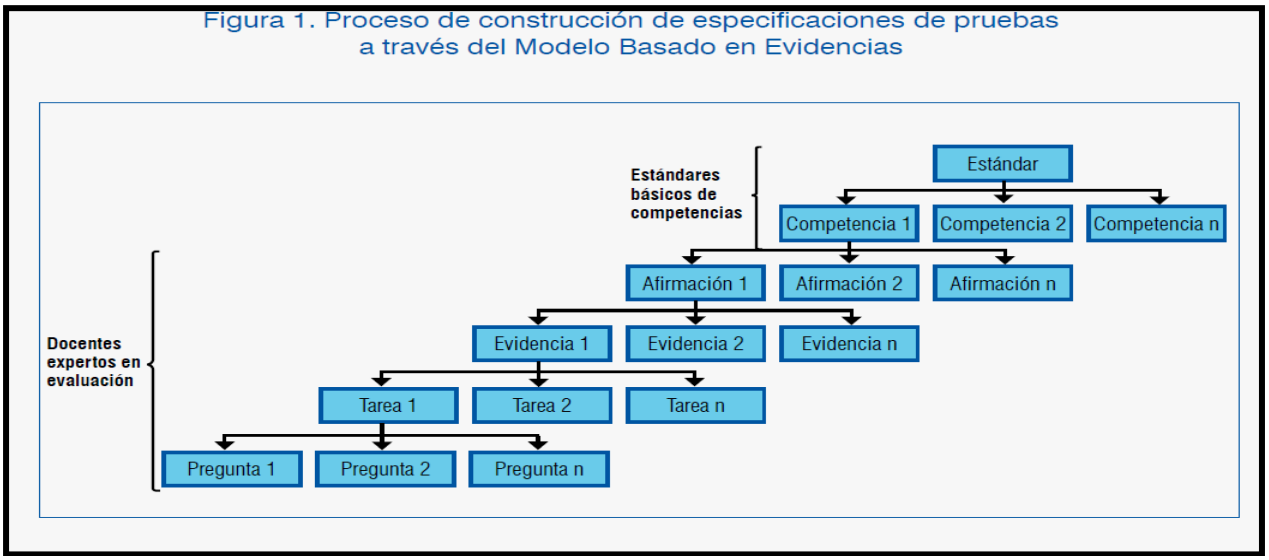


Figura 76. Estructura del diseño de las pruebas

Para la prueba de matemática, en esta se adopta la perspectiva integradora de los lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias respecto a los conocimientos, procesos y contextos. Se privilegian como contextos las situaciones problemáticas enmarcadas en las mismas matemáticas, la vida diaria y las otras ciencias. La evaluación se refiere al saber hacer en el contexto matemático escolar, es decir, a las formas de proceder asociadas al uso de los conceptos y estructuras matemáticas.

En la prueba, se evalúa el significado de los conceptos matemáticos y la práctica significativa, actividades que permitirán desarrollar descripciones matemáticas, explicaciones o construcciones. Lo anterior implica indagar por las formas de proceder (las competencias) y por los aspectos conceptuales y estructurales de las matemáticas (los componentes).

Las competencias que evalúa la prueba de matemáticas son: matemáticas de comunicación, modelación, razonamiento, planteamiento y resolución de problemas, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. En la construcción de las pruebas estas competencias se reagruparon así: el razonamiento y la argumentación; la comunicación, la representación y la modelación; y el planteamiento y resolución de problemas. En estas últimas quedan inmersas, desde luego, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, las anteriores competencias el ICFES las caracteriza de la siguiente manera:

- **Razonamiento y argumentación:** están relacionados, entre otros, con aspectos como dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, hacer conjeturas, explorar ejemplos y contraejemplos,

probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos.

- **Comunicación, representación y modelación:** están referidas, entre otros aspectos, a la capacidad del estudiante para expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, relacionar materiales físicos y diagramas con ideas matemáticas, modelar usando el lenguaje escrito, oral, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y construir argumentaciones orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretar lenguaje formal y simbólico y traducir de lenguaje natural al simbólico formal.
- **Planteamiento y resolución de problemas:** se relacionan, entre otros, con la capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrollar, aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida, verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema.

Para los componentes, la prueba reorganizo los cinco pensamientos descritos en los lineamientos curriculares y en los estándares básicos de competencias, en los tres componentes que evalúan, de la siguiente manera:

- **Numérico variacional:** indaga por la comprensión de los números y de la numeración, el significado del número, la estructura del sistema de numeración; por el significado de las operaciones, la comprensión de sus propiedades, de su efecto y de las relaciones entre ellas; por el uso de los números y las operaciones en la resolución de problemas diversos, el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; por conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos, a la variación inversa y al concepto de función.
- **Geométrico-métrico:** está relacionado con la construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos y sus transformaciones; más específicamente, con la comprensión del espacio, el desarrollo del pensamiento visual, el análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades, el razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición, la construcción de conceptos de cada magnitud (longitud, área, volumen, capacidad, masa, etc.), comprensión de los procesos de conservación, la estimación de magnitudes, la apreciación del rango, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos, el uso de unidades, la comprensión de conceptos de perímetro, área y volumen.
- **Aleatorio:** indaga por la representación, lectura e interpretación de datos en contexto; por el análisis de diversas formas de representación de información numérica, el análisis cualitativo de regularidades, de tendencias, de tipos de crecimiento, y la formulación de inferencias y argumentos usando medidas de tendencia central y de dispersión; y por el reconocimiento, descripción y análisis de eventos aleatorios.

Las Pruebas Saber 5°, presentan en la siguiente figura, la distribución porcentual de las preguntas de la prueba de matemáticas en cada una de las competencias y componentes considerados en la evaluación.

Quinto grado

Componente	Competencia			
	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación	Planteamiento y resolución de problemas	TOTAL
Numérico variacional	10	15	15	40
Geométrico - métrico	19	10	11	40
Aleatorio	6	10	4	20
Total	**35**	**35**	**30**	**100**

Figura 77. Distribución porcentual de las preguntas de la prueba de matemáticas5°

Para este análisis de acuerdo a la distribución de las Pruebas Saber, se tiene en cuenta los componentes Numérico variacional; Geométrico métrico y la Competencia Planteamiento y resolución de problemas, enfocados en el tema de estudio la estructura multiplicativa. Se escogieron dos cuadernillos de las Pruebas Saber 5°, uno del año 2012 y el otro del año 2013, las preguntas seleccionadas evalúan contenidos y desempeños relacionados con la aritmética movilizando las conceptualizaciones propias de las estructuras multiplicativas.

De las 96 preguntas de matemática, 48 en cada cuadernillo, se seleccionaron 21 preguntas que corresponden a los componentes y competencia en mención relacionados con la estructura multiplicativa, distribuidas de la siguiente manera: del cuadernillo 1 bloque 1 año 2012 se analizaron 3 preguntas y del cuadernillo 1 bloque 2 le corresponden 7 preguntas, del cuadernillo

27 del 2013, se evidencia en 11 preguntas la correspondencia de esta estructura las cuales han sido analizadas para evidenciar si hay relación o coherencia con los problemas planteados por los textos escogidos.

2.1.3.1 Cuadernillo 1 Pruebas Saber 5 año 2012

A continuación se hace el análisis de algunas preguntas del cuadernillo 1 Bloque 1 y 2, de las pruebas Saber 5 año 2012.

La pregunta correspondiente a la número 1, del análisis la cual se encuentra en el cuadernillo 1 bloque 1 como la número 5, será presentada a continuación en la figura 80.

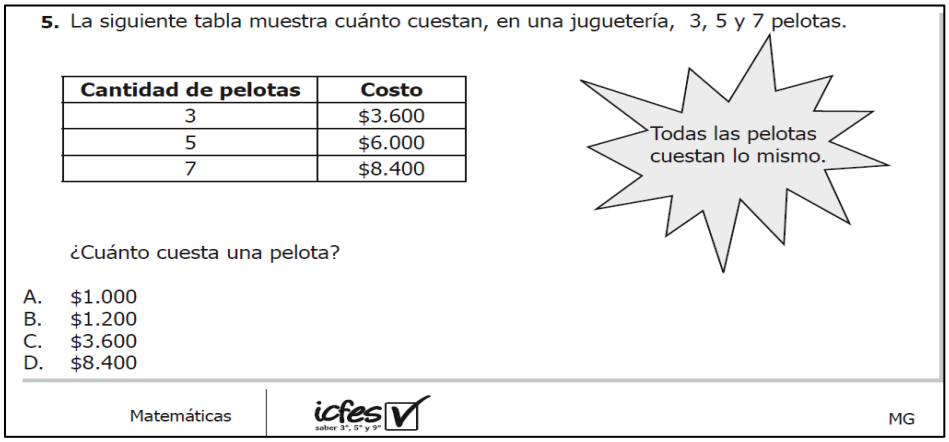


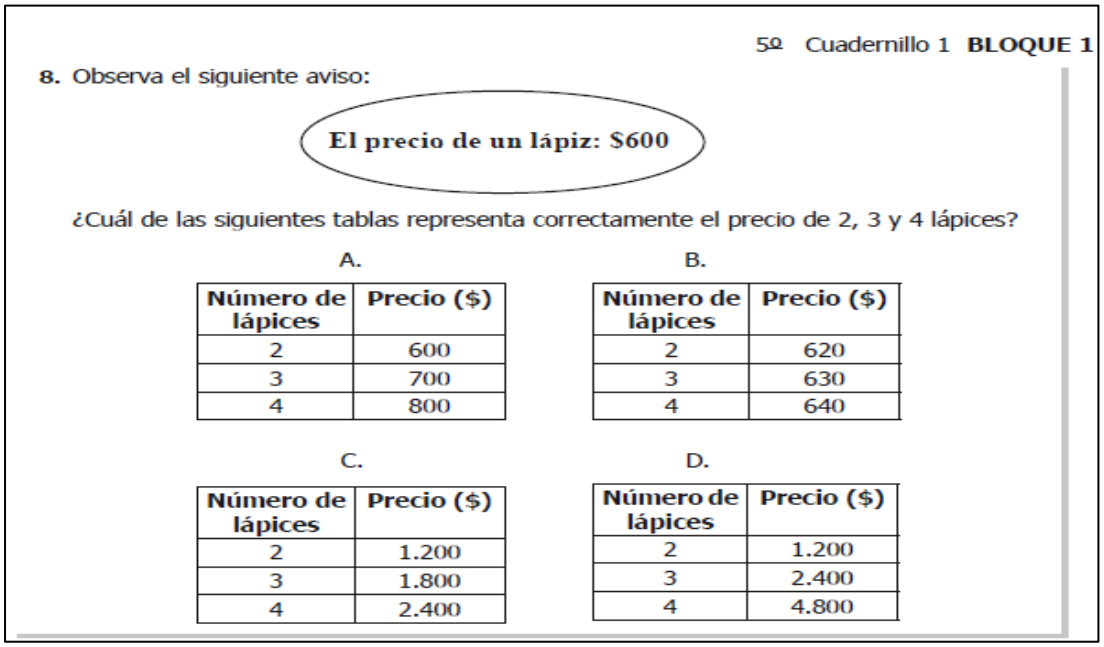
Figura 78. Pregunta 1

Pregunta 1 (número 5, página 3 del cuadernillo)

Para responder acertadamente esta pregunta la cual es la opción B, el estudiante debe tener en cuenta la representación de la cantidad en tabla (cantidad de pelotas y costo), además de la información adicional que se le indica en la estrella *"todas las pelotas cuestan lo mismo"*. Para hallar la respuesta el estudiante puede hacerlo mínimo de dos formas diferentes, de acuerdo a los modelos de estudio de la multiplicación y división en Vergnaud (1991), se puede realizar a partir

de la división del costo entre cantidad de pelotas, por ejemplo $3600 \div 3 = 1200$, correspondiendo este modelo a la división partitiva, la cual se relaciona con la búsqueda del valor unitario, así mismo con los otros dos pares de datos; o de otra manera si se hace uso de la proporcionalidad $\frac{3}{1} = \frac{3600}{x}$, que evidencia una correspondencia entre dos tipos de cantidades.

La siguiente pregunta corresponde al número 2 del análisis, la cual se encuentra en el cuadernillo 1 bloque 1 como la 8, se expone en la figura 81 y se presenta a continuación.



5º Cuadernillo 1 **BLOQUE 1**

8. Observa el siguiente aviso:

El precio de un lápiz: $600

¿Cuál de las siguientes tablas representa correctamente el precio de 2, 3 y 4 lápices?

A.

Número de lápices	Precio ($)
2	600
3	700
4	800

B.

Número de lápices	Precio ($)
2	620
3	630
4	640

C.

Número de lápices	Precio ($)
2	1.200
3	1.800
4	2.400

D.

Número de lápices	Precio ($)
2	1.200
3	2.400
4	4.800

Figura 79. Pregunta 2

Pregunta 2 (número 8, página 5 del cuadernillo)

Para responder acertadamente esta pregunta, ¿Cuál de las siguientes tablas representa correctamente el precio de 2, 3, y 4 lápices?, el estudiante se encuentra con diferentes formas de dar solución, la más sencilla, puede resolver una multiplicación de rutina, $600 \times 2 = 1200$, $600 \times 3 = 1800$ teniendo en cuenta la información adicional "*El precio de un lápiz: $600"*, estos son datos suficientes que le facilitan dar respuesta a la pregunta, también puede realizar una

adición repetida como $600+600=1200$, así mismo con tres y con cuatro lápices, ó, la otra forma de hacerlo es mediante el uso de la proporcionalidad donde un ejemplo sería $\frac{1}{2}=\frac{600}{x}$, que evidencia una relación de correspondencia entre dos tipos de cantidades. Y al finalizar cualquiera de estas alternativas el estudiante podrá escoger la opción adecuada C.

Ahora la pregunta que sigue corresponde a la pregunta número 3 de este análisis, la cual se encuentra en el cuadernillo 1 bloque 1 como la 24, la figura 82 presenta la pregunta a continuación.

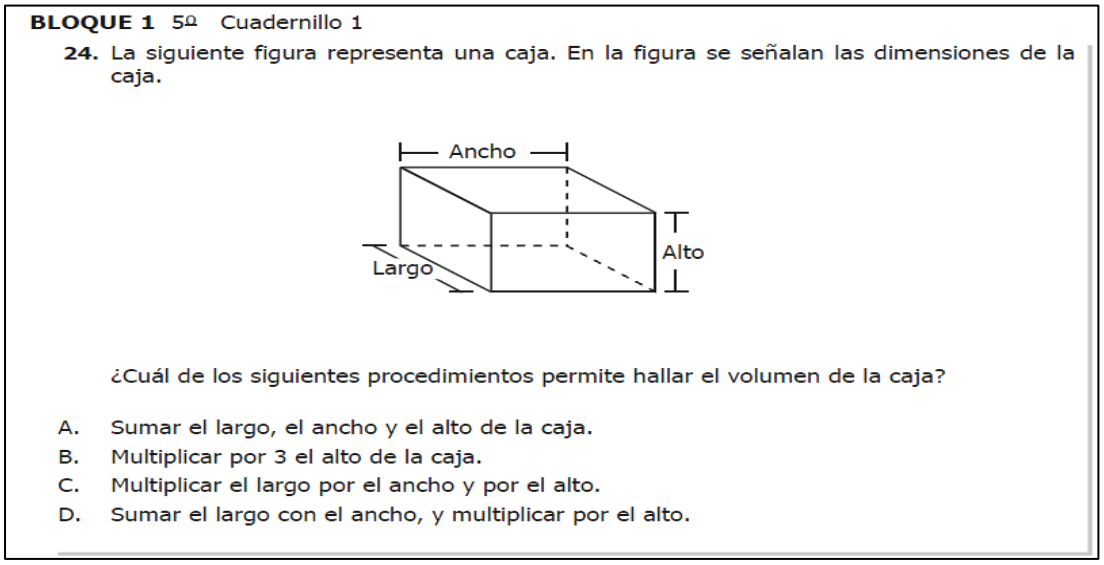


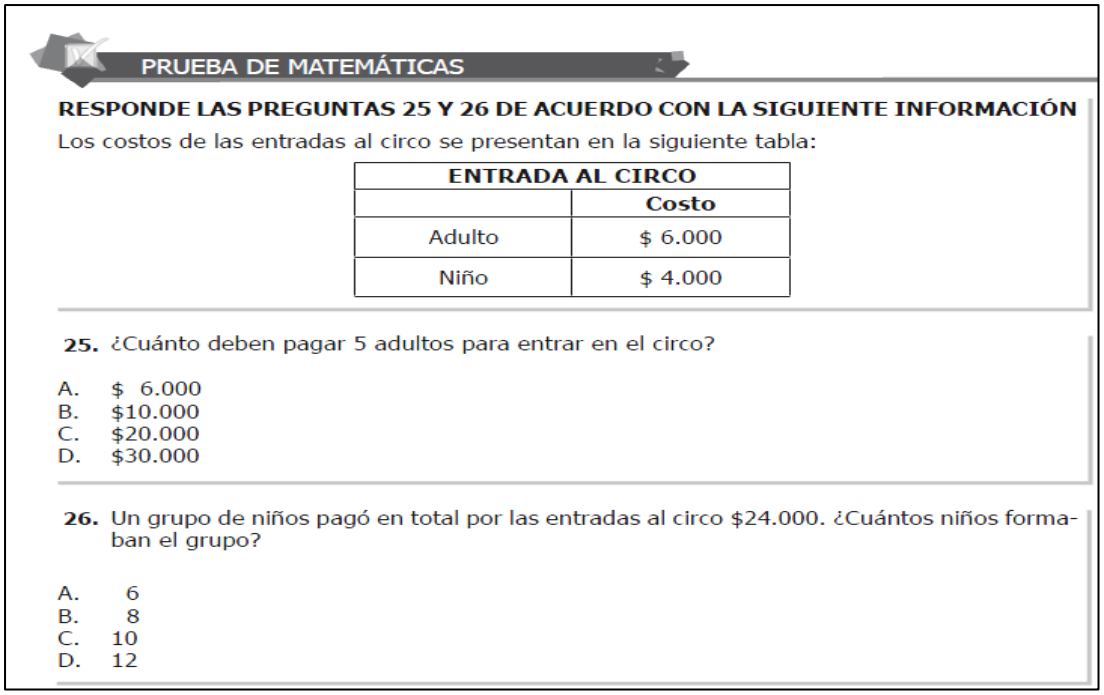
Figura 80. *Pregunta **3***

Pregunta 3 (número 24, página 14 del cuadernillo)

Para responder acertadamente esta pregunta, ¿Cuál de los siguientes procedimientos permite hallar el volumen de la caja?, el estudiante debe ante todo contar con el concepto de volumen y su cálculo, para saber utilizar el procedimiento adecuado que le permita dar respuesta a la pregunta, en este caso la opción C, la cual es un producto de tres magnitudes.

A continuación se presentan algunas preguntas y sus posibles estrategias de solución correspondiente al cuadernillo 1 Bloque 2 año 2012

Las preguntas 4 y 5 comparten la misma información inicial a continuación se describen consecutivamente, aunque su descripción y análisis se harán por separado, la figura 83 las presenta a continuación.



PRUEBA DE MATEMÁTICAS

RESPONDE LAS PREGUNTAS 25 Y 26 DE ACUERDO CON LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

Los costos de las entradas al circo se presentan en la siguiente tabla:

ENTRADA AL CIRCO	
	Costo
Adulto	$ 6.000
Niño	$ 4.000

25. ¿Cuánto deben pagar 5 adultos para entrar en el circo?

A. $ 6.000
B. $10.000
C. $20.000
D. $30.000

26. Un grupo de niños pagó en total por las entradas al circo $24.000. ¿Cuántos niños formaban el grupo?

A. 6
B. 8
C. 10
D. 12

Figura 81. Pregunta 4 y 5

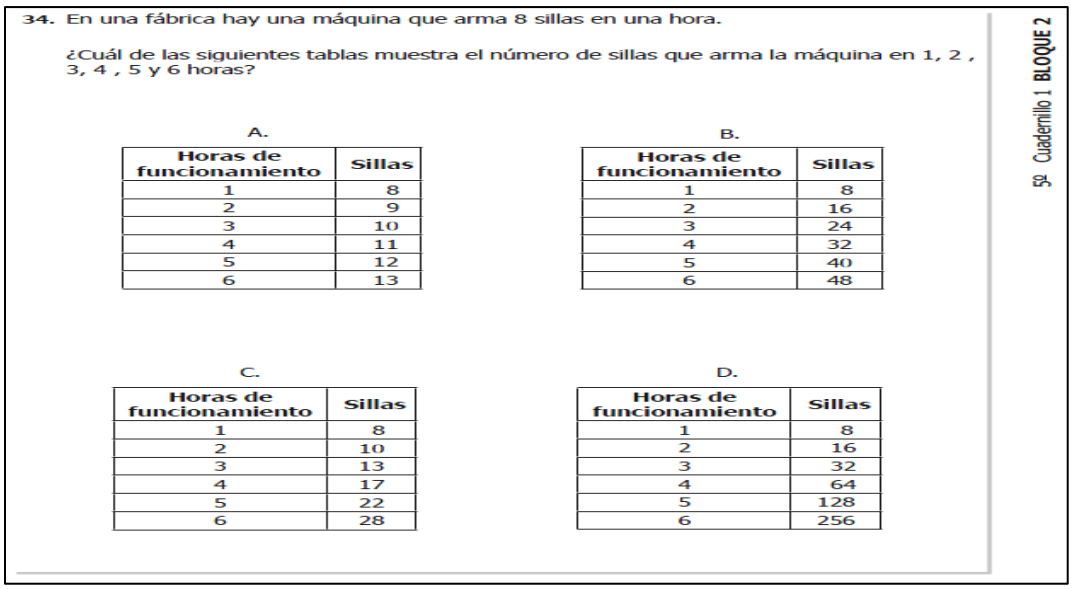
Pregunta 4 y 5 (número 25,26, página 16 del cuadernillo)

Para responder acertadamente la primer pregunta, ¿Cuánto deben pagar 5 adultos para entrar en el circo?, la pregunta 4del análisis es similar a la pregunta 2en cuanto a las posibles estrategias de solución, son semejantes aunque varié el contexto de las situaciones, el estudiante debe resolver una multiplicación de rutina, $6000 \times 5 = 30000$, teniendo en cuenta la información de la tabla, lo cual le facilita dar respuesta a la pregunta, también puede realizar una adición

repetida, $6000+6000+6000+6000+6000=30000$, o la proporción $\frac{1}{5}=\frac{6000}{x}$, que como se indicó anteriormente es una relación de correspondencia entre dos tipos de cantidades.

En cuanto a la pregunta 5 del presente análisis, la cual plantea que un grupo de niños pagó en total por las entradas al circo $24000 y cuestiona sobre ¿Cuántos niños formaban el grupo?, se puede afirmar que esta situación puede solucionarse con procedimientos similares a la pregunta 5, una de ellas es una multiplicación de rutina, de acuerdo a los datos de la tabla un niño paga $4000, entonces el estudiante podría realizar el producto $4000\times 2=8000$, luego por 3, por 4, y así sucesivamente hasta llegar al costo total el cual es 24000 y concluir que el grupo lo forman 6 niños. Otra manera es una suma reiterada como se evidencia en la pregunta anterior, una tercera forma corresponde a la relación de correspondencia, es decir el uso de las proporciones como esta $\frac{1}{x}=\frac{4000}{24000}$, pero otra manera adicional puede ser realizando el cociente entre $24000\div 4000=6$, el cual sería la estrategia más directa de solución, la cual parte del conocimiento del tamaño total del grupo (costo) y se cuenta con el dato del costo de la entrada de un niño, para saber el número de niños que forman el grupo resultante, en este caso la opción A.

La siguiente pregunta corresponde al número6 del análisis, la cual se encuentra en el cuadernillo 1 bloque 2 como la 34, la figura 84 presenta la pregunta a continuación.



34. En una fábrica hay una máquina que arma 8 sillas en una hora.

¿Cuál de las siguientes tablas muestra el número de sillas que arma la máquina en 1, 2 , 3, 4 , 5 y 6 horas?

5º Cuadernillo 1 BLOQUE 2

A.

Horas de funcionamiento	Sillas
1	8
2	9
3	10
4	11
5	12
6	13

B.

Horas de funcionamiento	Sillas
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
6	48

C.

Horas de funcionamiento	Sillas
1	8
2	10
3	13
4	17
5	22
6	28

D.

Horas de funcionamiento	Sillas
1	8
2	16
3	32
4	64
5	128
6	256

Figura 82. Pregunta 6

Pregunta 6 (número 34, página 21 del cuadernillo)

Para responder acertadamente a esta pregunta 6, ¿Cuál de las siguientes tablas muestra el número de sillas que arma la maquina en 1, 2, 3, 4, 5 y 6 horas?, partiendo de la información inicial *"en una fabrica hay una máquina que arma 8 silla por hora"*, el estudiante debe analizar la relación de dependencia en cada situación, puede realizarlo por medio de una multiplicación rutinaria,$8 \times 2 = 16, 8 \times 3 = 24$y así sucesivamente hasta completar la tabla con la cantidad de horas que se le pide 6 horas, en este caso la tabla de la opción B.

A continuación se presenta la pregunta número 7 del presente análisis, la cual se encuentra en el cuadernillo 1 bloque 2 como la 37, presentada en la figura 85 a continuación.

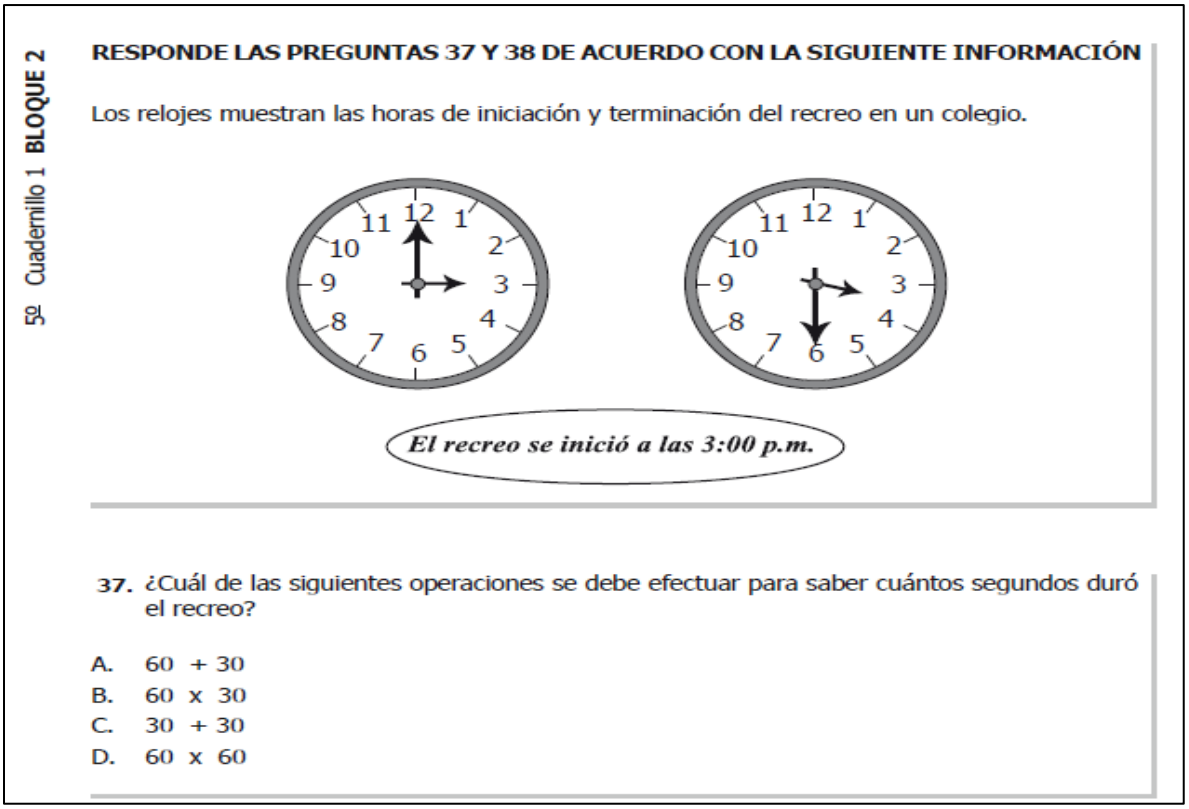


Figura 83. Pregunta 7

Pregunta 7 (número 37, página 21 del cuadernillo)

Esta pregunta 7 del análisis, la cual planteada ¿Cuál de las siguientes operaciones debe efectuar para saber cuántos segundos duró el recreo?, el estudiante debe identificar unidades estandarizadas apropiadas para diferentes mediciones en este caso la unidad de tiempo, además establecer relaciones entre ellas, si sabe que una hora tiene 60 minutos, un minuto tiene 60 segundos, que el *"el recreo se inicio a las 3 pm"*, además partir de que el segundo reloj marca la hora que terminó el recreo, es decir 30 minutos después; con esos conceptos e información puede escoger la opción acertada la opción B, en donde se requiere que el estudiante realice una multiplicación de rutina, la cual es 60×30.

Seguidamente se presenta la pregunta número 8 del análisis, la cual se encuentra en el cuadernillo 1 bloque 2 como la número 42, presentada en la figura 86 a continuación.

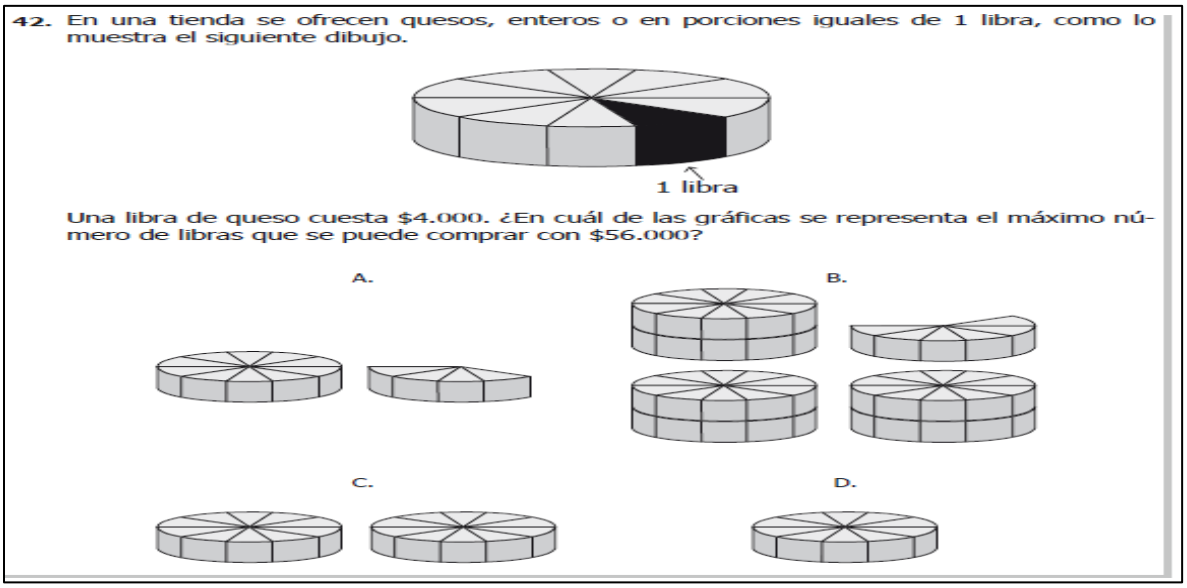


Figura 84. Pregunta 8

Pregunta 8 (número 42, página 26 del cuadernillo)

Para dar respuesta a la pregunta 8 del presente análisis, ¿En cuál de las gráficas se representa el máximo número de libras que puede comprar con $56.000?, según la información adicional de que se entrega al estudiante *"una libra de queso cuesta $4.000"*, el estudiante debe reconocer la fracción como parte de un todo, sin embargo, puede hallar el cociente entre 56.000 y 4.000, el cual es $56000 \div 4000 = 14$, en esta clase de división puede eliminar los ceros (división abreviada) para mayor facilidad de encontrar el cociente, otra manera es la proporción que evidencia la relación de correspondencia, si un queso cuesta 4000 cuantos se compran con 56000 así $\frac{1}{x} = \frac{4000}{56000}$ en ambos casos la opción acertada es la A.

Ahora se presenta la pregunta número 9 de este análisis, la cual se encuentra en el cuadernillo 1 bloque 2 como la número 43, la figura 87 presenta la pregunta seguidamente.

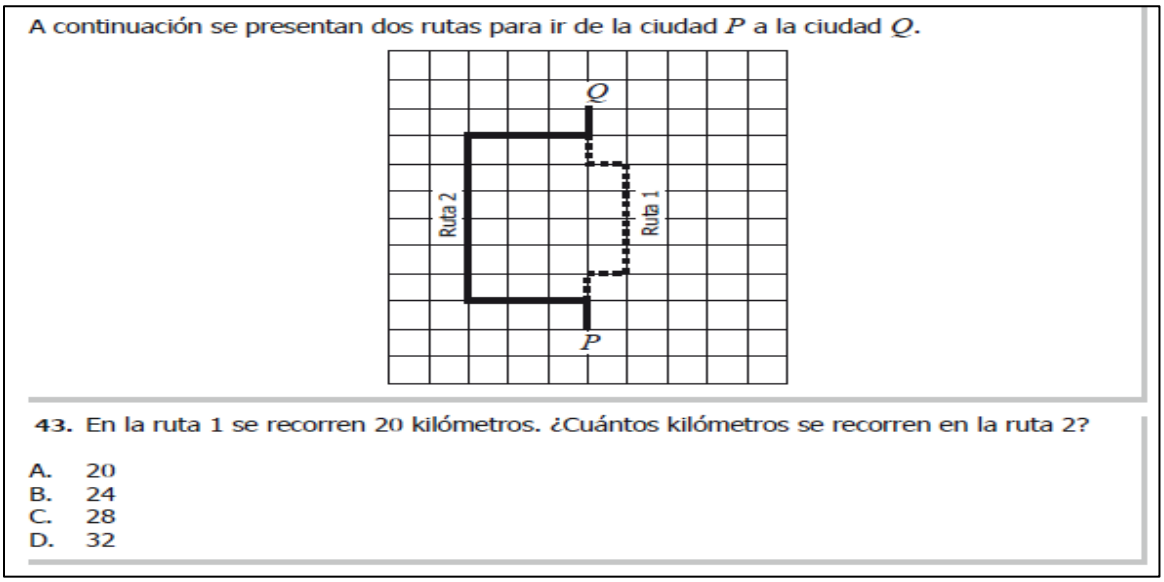


Figura 85. Pregunta 9

Pregunta 9 (corresponde al número 43, página 27 del cuadernillo)

Para dar respuesta a la pregunta ¿Cuántos kilómetros se recorren en la ruta 2?, partiendo de la información *"en la ruta 1 se recorren 20 kilómetros"* además de la ilustración que evidencia las dos rutas, el estudiante debe reconocer, usar magnitudes y sus respectivas unidades, en esta situación se presenta una magnitud de longitud con una unidad de medición en kilómetros, donde puede usar el modelo de razón o proporción para saber la longitud de cada segmento que representada kilómetros, sí observa que la ruta 1 tiene un recorrido de 10 segmentos, así de este modo para saber cuánto mide un segmento en kilómetros puede plantear la proporción, así $\frac{1}{10} = \frac{x}{20}$ evidenciando una relación de correspondencia entre dos magnitudes, al resolverla se obtendrá que un segmento equivale a 2 kilómetros y luego debe contar la cantidad de segmentos recorridos en la ruta 2 el cual es 14, para al final realizar una multiplicación rutinaria, la longitud

del segmento por la cantidad de segmentos recorridos, lo cual se realizaría así $2 \times 14 = 28$, y se obtendrá como opción acertada la C.

Seguidamente se presenta la pregunta número 10, ya finalizando la exploración del cuadernillo 1 bloque 2 correspondiendo al número 45, la figura 88 presenta la pregunta a continuación.

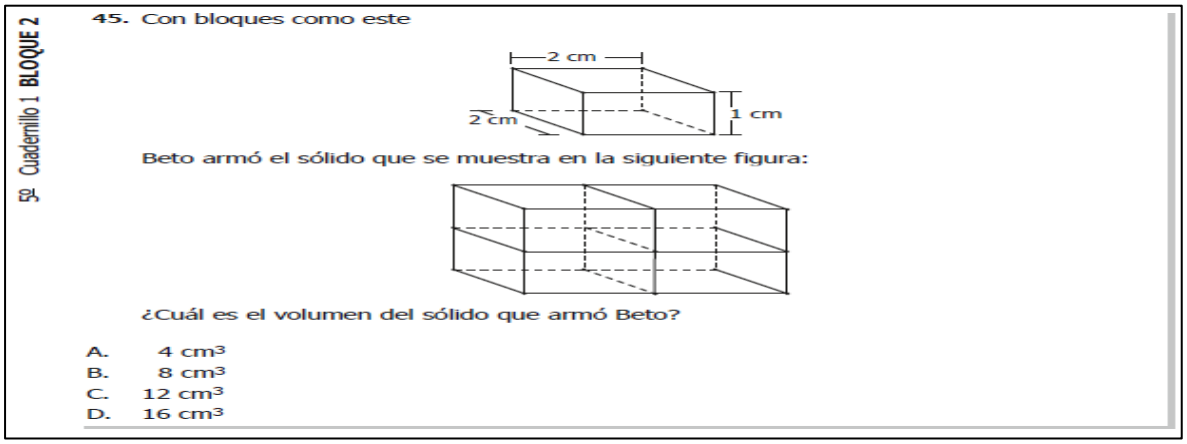


Figura 86. Pregunta 10

Pregunta 10 (número 45, página 28 del cuadernillo)

Para dar respuesta a la pregunta ¿Cuál es el volumen del sólido que armó Beto?, a partir de la información que proporciona la imagen inicial, el estudiante debe utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen, para esto primero debe hallar el volumen de la imagen inicial, debe saber cómo calcularlo usando el producto de las magnitudes ancho, alto y largo el cual seria para este caso $2\ cm\ \times 2\ cm\ \times 1\ cm = 4cm^3$, una vez hallado el volumen del bloque inicial debe realizar una multiplicación de rutina la cual consiste en hallar el producto del volumen inicial por la cantidad de bloques que forman el sólido que armó Beto, $4cm^3\ \times 4 = 16cm^3$ o realizar la suma repetitiva de $4cm^3 + 4cm^3\ +\ 4cm^3 +\ 4cm^3 = 16cm^3$

así dar la respuesta más acertada en este caso la opción D

2.1.3.2 Cuadernillo 27 Pruebas Saber 5 año 2013-1

A continuación se presenta el análisis de algunas preguntas del cuadernillo 27, Saber 5° correspondiente al año 2013 bloque 1, la pregunta 11 de la figura 89 corresponde a la número 2 en el cuadernillo en mención.

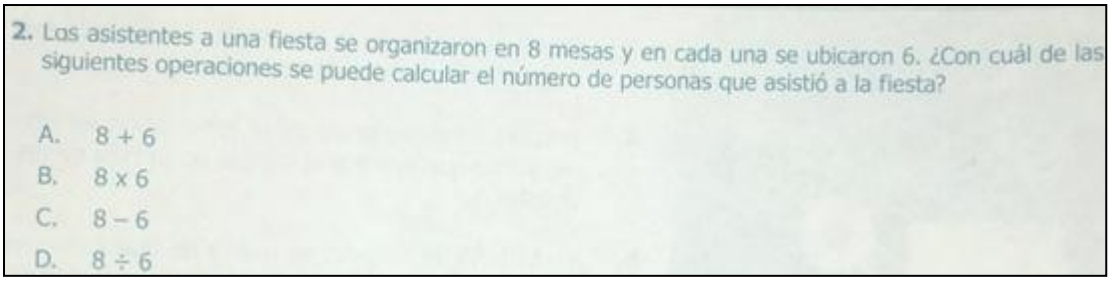


Figura 87. Pregunta 11

Pregunta 11 corresponde al Problema 2

La pregunta 11 de la figura 89 hace referencia a la adición repetida de un sumando, a un recuento como se puede observar en el enunciado, por ello, la noción a tener en cuenta es el producto $a \times n$, donde a representa el multiplicando en este caso el 6 y n que es el multiplicador es decir, el 8 la cantidad de veces que se repite el multiplicando así 6×8. A partir de lo anterior se analiza que la posible respuesta no cuenta con la definición precisa dado que el sumando que se repite es el 6 y no el 8 con ello, se encuentra una incoherencia entre la pregunta y las opciones de respuesta, que reflejan una dificultad asociada al concepto de los elementos de la multiplicacion que en este argumento se asumen como dos factores. De acuerdo a Maza (1991) se toma como un error de naturaleza semántica, pues es necesario el conocimiento conceptual para

una adecuada interpretación del algoritmo.

La pregunta 12 presentada en la figura 90 hace relacion a la número 5 del cuadernillo.

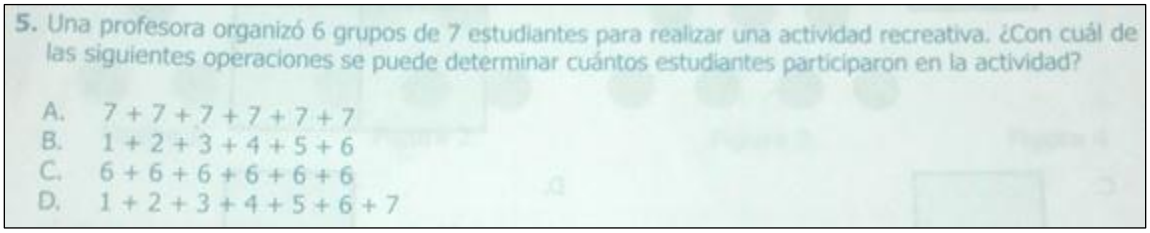


Figura 88. Pregunta 12

Corresponde al Problema 5 en el cuadernillo

La pregunta 12 presentada en la figura 90 refleja también una suma reiterada en el cual se debe dar sentido a cuál cantidad se repite (multiplicando) y a cual dice las veces que se repite la cantidad inicial (multiplicador), en este caso la opcion adecuada es la A, dado que se repite 6 veces, es decir, $7+7+7+7+7+7$ que seria igual a 7×6 lo cual es implicito. Se infiere entonces, que lo anterior alude a un error de naturaleza sintáctico según Maza (1991).

Seguidamente la pregunta 13, presentada en la figura 91, corresponde a la número 3 del cuadernillo.

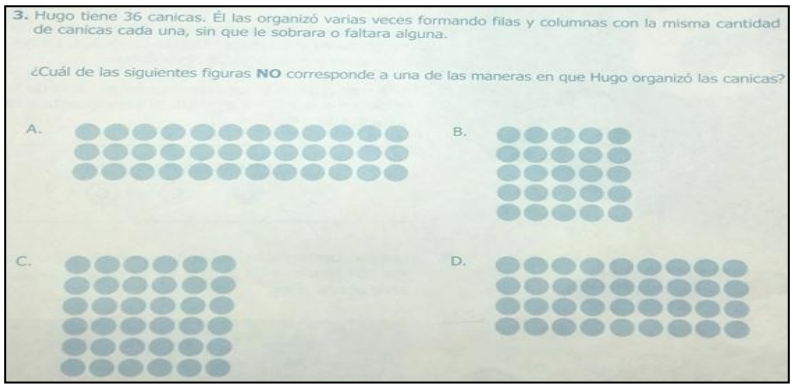


Figura 89. Pregunta 13

Corresponde al Problema 3 del cuadernillo

En la pregunta 13 presentada en la figura 91 se deduce que, también corresponde al

producto de medidas, el cual refleja el concepto de la multiplicación como relación ternaria, en este proceso el estudiante puede limitarse a realizar el conteo y por descarte indicar la figura que no cuenta con 36 canicas o simplemente tener presente que las figuras presentadas tienen dos dimensiones y basta con multiplicarlas y obtener la respuesta, es decir, puede realizar unas multiplicaciones de rutina que equivaldrían a 3×12, 5×5, 6×6 y 9×4 y al final el estudiante se entera que la opción B no coincide con las 36 canicas dadas como dato inicial.

Ahora la pregunta 14, correspondiente al número 8 del cuadernillo es presentada en la figura 92.

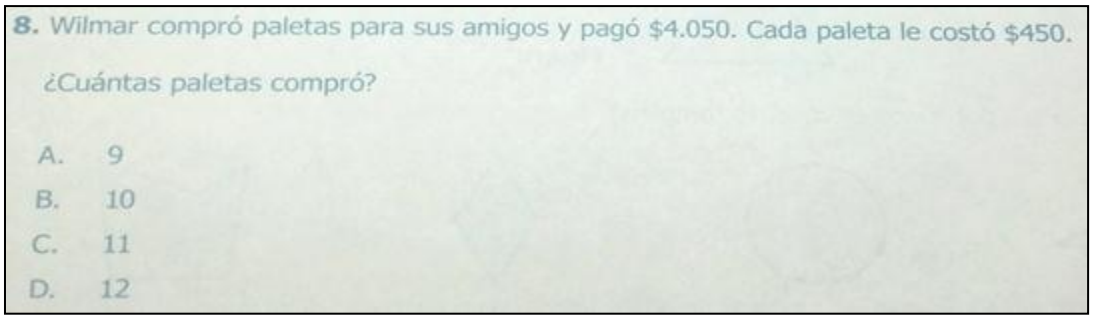


Figura 90. Pregunta 14

Corresponde al Problema 8 del cuadernillo

La pregunta 14 que se presenta en la figura 92 del cuadernillo, tiene como estrategia de solución que el estudiante use el algoritmo de la división, es decir, $4050 \div 450$ u otra estrategia sería que el estudiante acuda a multiplicar 450 por cada una de las opciones dadas, entendiéndola como operación ternaria, y finalmente, la relación de proporcionalidad que implica la relación cuaternaria de la multiplicación, con ello se infiere que la opción de respuesta es la A. También de acuerdo a los errores de naturaleza semántica en Maza (1991) el estudiante puede llegar a errores al suprimir el cero en la unidades y asumir que 405 es un múltiplo de 45 cuyo cociente sería 10.

En la pregunta 15 que se presenta en la figura 93 hace referencia a la repartición en el cual se pide cuál es el valor de cada uno de los billetes, para contestar adecuadamente el estudiante debe hallar el cociente, el cual se obtendrá bajo la estrategia de operar $50000 \div 25$ lo que corresponde a la opción B, otra estrategia sería mediante la realización de los productos para cada opción, partiendo que hay 25 billetes de cada valor. A partir de esto, se infiere que, según Maza (1991), la propiedad distributiva con el manejo de los ceros en el cociente, podría producir errores de naturaleza semántica.

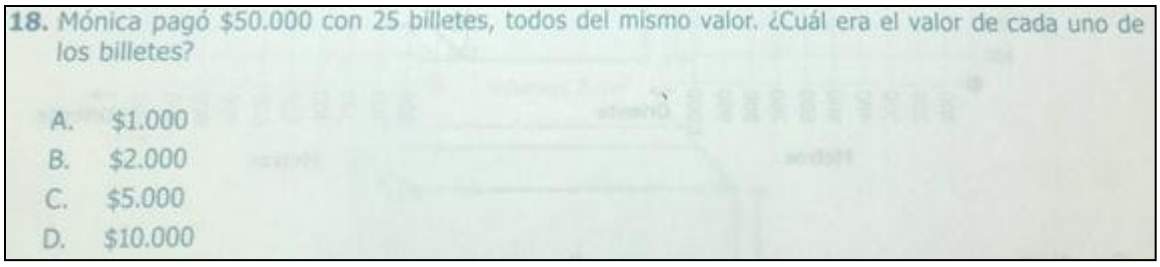


Figura 91. Pregunta 15
Corresponde al Problema 18 del cuadernillo

Se presenta en la figura 94 con la pregunta 16, que corresponde a la situación 48

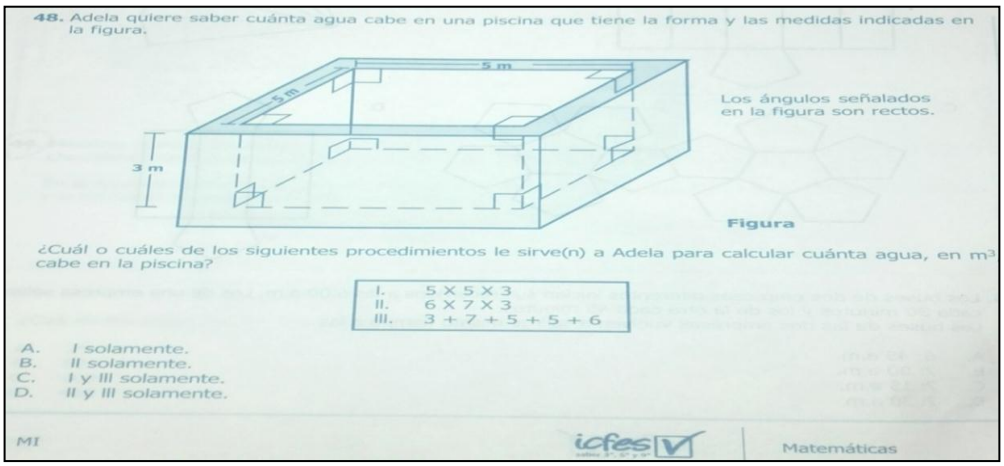


Figura 92. Pregunta 16
Corresponde al Problema 48 del cuadernillo

En este sentido, la pregunta 16 tiene consigo una dimensión producto en la cual se debe

recurrir al producto de las tres dimensiones de la piscina para elegir el procedimiento adecuado, es decir, multiplicar el ancho por alto y por largo, entonces la opción correcta sería la A.

Seguidamente se muestra en la figura 95 la pregunta 17 correspondiendo a la pregunta 24 del cuadernillo.

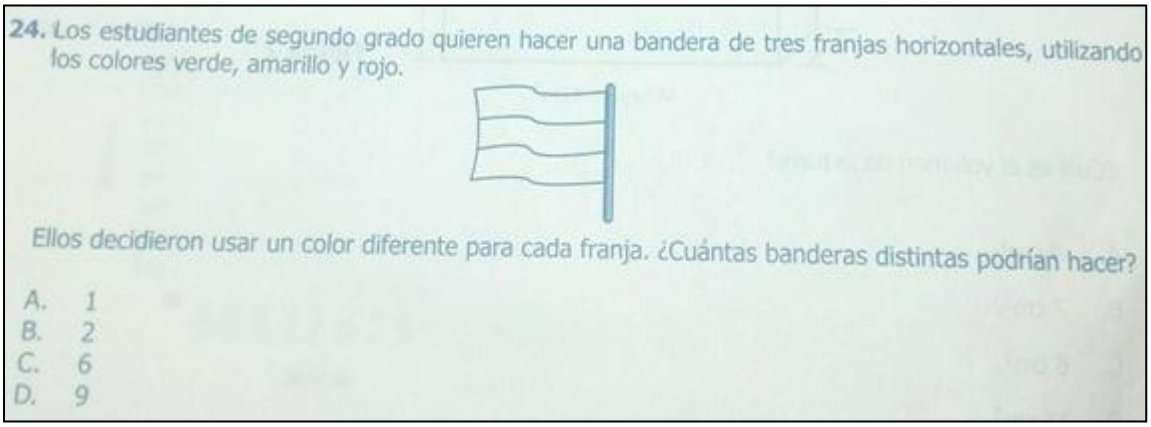


Figura 93. Pregunta 17

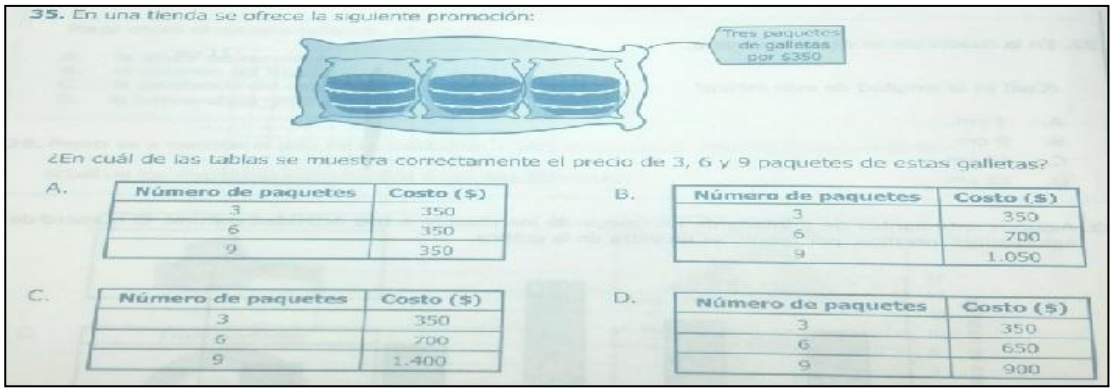
Corresponde al Problema 24 del cuadernillo

En la pregunta 17 se encuentra implícita una estructura multiplicativa la cual conduce sólo al uso del procedimiento de rutina, es decir, el cálculo del producto, que sería lo que corresponde al tipo de producto cartesiano, este problema presenta tres franjas horizontales y tres colores por tanto el total de banderas será el cardinal del conjunto $a \times b$ lo cual indica que para calcular el número de banderas, entonces se debe multiplicar el cardinal de a por el cardinal de b, esto es 3×3,que sería la opción D en el cual se va a obtener una cantidad superior a las mencionadas, la respuesta también se puede representar por medio del diagrama de árbol.

A continuación, se presentan algunas preguntas del cuadernillo 27 bloque 2, relacionadas

con las estructuras multiplicativas.

La primera es la pregunta 18 que corresponde al número 35 del cuadernillo, la cual se muestra en la figura 96, en esta se percibe el empleo de la regla de tres simple a partir de completar las tablas, en la que el estudiante debe revisar el comportamiento de las magnitudes que en este caso ambas aumentan seleccionando con base en la información inicial en el gráfico, seleccionar la opción B.



35. En una tienda se ofrece la siguiente promoción:

¿En cuál de las tablas se muestra correctamente el precio de 3, 6 y 9 paquetes de estas galletas?

A.

Número de paquetes	Costo ($)
3	350
6	350
9	350

B.

Número de paquetes	Costo ($)
3	350
6	700
9	1.050

C.

Número de paquetes	Costo ($)
3	350
6	700
9	1.400

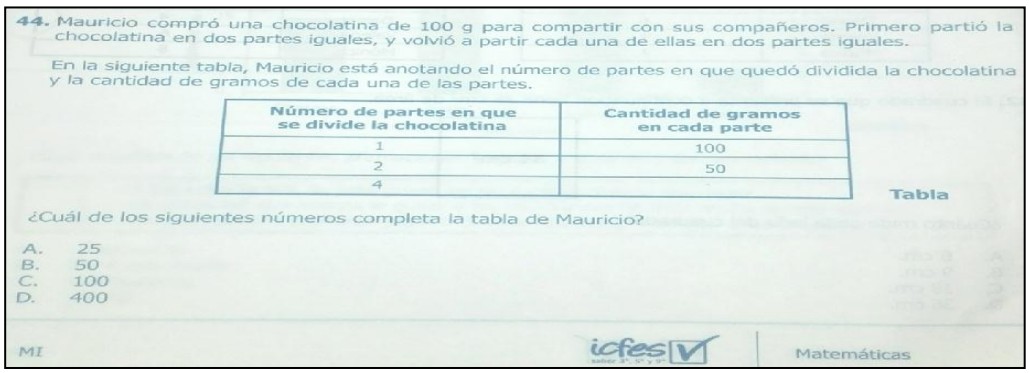
D.

Número de paquetes	Costo ($)
3	350
6	650
9	900

Figura 94. Pregunta18

Corresponde al Problema 35 del cuadernillo

La pregunta 19, se muestra en la figura 97, que corresponde a la 44 en el cuadernillo mencionado.



44. Mauricio compró una chocolatina de 100 g para compartir con sus compañeros. Primero partió la chocolatina en dos partes iguales, y volvió a partir cada una de ellas en dos partes iguales.

En la siguiente tabla, Mauricio está anotando el número de partes en que quedó dividida la chocolatina y la cantidad de gramos de cada una de las partes.

Número de partes en que se divide la chocolatina	Cantidad de gramos en cada parte
1	100
2	50
4	

Tabla

¿Cuál de los siguientes números completa la tabla de Mauricio?

A. 25
B. 50
C. 100
D. 400

Figura 95. Pregunta 19

Corresponde al Problema 44 del cuadernillo

En el problema 44 se observa la ejercitación por medio de una tabla de correspondencia entre dos espacios de medida observándose el isomorfismo entre estos dos espacios, (según la clasificación propuesta por Vergnaud), a su vez es una herramienta para reconocer la relación de proporcionalidad inversa que está involucrada en este problema, en tanto que se puede observar la dependencia de las variaciones de los valores de un espacio de medida con respecto a otro, que según la relación entre estas cantidades y siguiendo la proporción daría como opción de respuesta la A.

La figura 98 muestra la pregunta 20, la cual corresponde a la 42 del bloque 2.

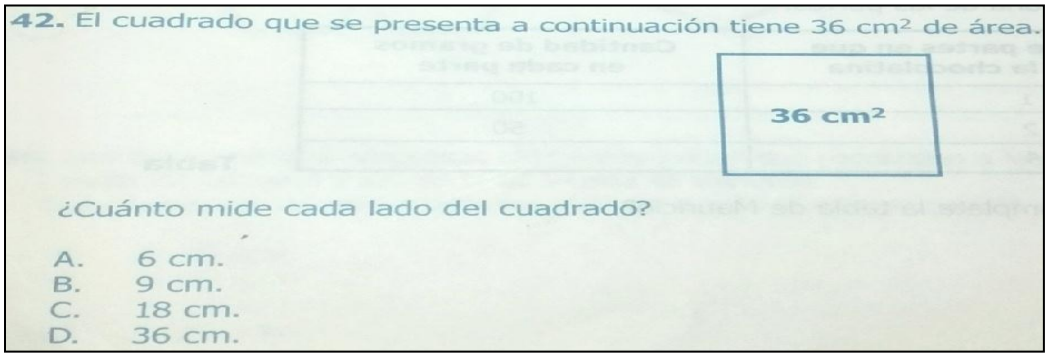


Figura 96. Pregunta 20

Corresponde al Problema 42 del cuadernillo

En la pregunta 20 presentada en la figura 98, se debe establecer la relación entre la multiplicación de dos longitudes lo que producirá unidades de área, la longitud es unidimensional mientras que el área es bidimensional, como es un cuadrado se debe establecer el producto de los números dobles que se pueden encontrar apoyándose con las opciones de solución en este caso la A.

CAPÍTULO III

3. ANÁLISIS DE REJILLAS Y CONCLUSIONES

3.1 Presentación de los criterios y construcción de las Rejillas de Análisis

Teniendo como punto de partida que el presente trabajo hace alusión a la manera en cómo dos textos escolares para el grado 5° de la Educación Básica en Colombia, abordan la resolución de problemas alrededor de las estructuras multiplicativas y cómo aplican y evalúan estos procesos las Pruebas Saber para el mismo grado, el siguiente apartado se centra, como se ha indicado anteriormente, en las unidades correspondientes a la temática expuesta por los textos, dentro de estas unidades no se tendrá en consideración la parte operativa de los ejercicios, sino, la forma cómo se presenta el concepto relacionado con esta estructura y como se aborda desde la sección de resolución de problemas. Según Vergnaud (1991), los campos conceptuales proporcionan un conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones (p. 8); y de esta forma se construye la primera rejilla para este análisis.

Alrededor de estas ideas se presenta la información que permite comprender los elementos que conforman las rejillas de análisis de textos y análisis de las preguntas seleccionadas en las Pruebas Saber 5, de la siguiente manera: categorías y clases propuestas por Vergnaud (1991), esta variable permite observar el modelo teórico que gira en torno a la concepción de las estructuras multiplicativas y su aplicación a través del planteamiento y resolución de problemas, en tres rejillas, de la siguiente manera: En la rejilla 1, las situaciones problemas seleccionadas de los dos textos escolares, en la rejilla 2, las preguntas aplicadas en las Pruebas Saber referenciadas y la rejilla 3 el contraste entre problemas de los textos escolares y preguntas Pruebas Saber 5°.

3.1.1 Identificación y observación a través de la rejilla de análisis en los textos escolares.

Con el fin de analizar las unidades correspondientes al concepto y procesos de las estructuras multiplicativas se elabora la siguiente rejilla de análisis que relaciona diferentes variables ubicadas de manera horizontal como son las categorías y clases de las estructuras multiplicativas expuestas por Vergnaud (1991), además los posibles errores en la aplicación del algoritmo de la multiplicación y división indicados por Maza (1991) y de manera vertical las situaciones problema escogidos para el análisis y propuestos por cada texto escolar los cuales ya fueron presentados en el capítulo 2.

A continuación en la tabla 7 se presenta el bosquejo de la rejilla 1, propuesta para el análisis de los textos seleccionados:

Tabla 7 Rejilla 1 de análisis de textos

VERGNAUD	CATEGORÍA	CLASES	Problemas Texto 1	Problemas Texto 2	Posibles errores Maza		MAZA
					Sintact.	Semánt.	
	Isomorfismo de Medidas	Multiplicación					
		División Partitiva					
		División Cuotitiva					
		Regla de Tres					
	Producto de Medidas	Dimensión Simple					
		Dimensión Producto					
		Dimensión Cociente					

3.1.2 Identificación y observación a través de la rejilla de análisis las preguntas de las Pruebas Saber seleccionadas

Seguidamente en la tabla 8, se presenta el bosquejo de la rejilla 2, donde se analizaron las preguntas seleccionadas de los cuadernillos de las Prueba Saber 5 años 2012-2013.

Tabla 8 Rejilla 2, análisis de las preguntas Pruebas Saber 5

VERGNAUD	CATEGORÍA	CLASES	Pruebas Saber 5 (2012)	Pruebas Saber 5 (2013)	Posibles errores Maza Sintact.	Semánt.	MAZA
	Isomorfismo de Medidas	Multiplicación					
		División Partitiva					
		División Cuotitiva					
		Regla de Tres					
	Producto de Medidas	Dimensión Simple					
		Dimensión Producto					
		Dimensión Cociente					

Así como se exhibió en el capítulo II, del presente trabajo, según Vergnaud (1991), ahora se muestra una síntesis de la caracterización de las estructuras multiplicativas: la categoría de

Isomorfismo de medidas se clasifica en la **Multiplicación** que hace referencia a la relación de correspondencia entre dos tipos de cantidades, la **División Partitiva** da cuenta de la relación de la cantidad total y el número de partes, solicitándose cada parte;por el contrario, en la **División Cuotitiva,** indica la relación del dato total y el tamaño de cada parte debiéndose hallar el número de partes; ahora la **Regla de Tres,** se refiere a la relación de dos magnitudes directamente proporcionales, cuando se conoce dos medidas de una magnitud y una medida de la otra magnitud desconociendo una.

Por otra parte, la otra categoría denominada, el producto de medida se clasifica en la **Dimensión Simple,** que refiere a la relación de magnitudes de longitud, tiempo, peso, costo, medidas directamente; la **Dimensión Producto** que presenta la relación de medidas de magnitudes para hallar el área de una superficie, o el volumen de un sólido geométrico y la **Dimensión Cociente** que es la relación de medidas de magnitudes para hallar velocidad, densidad y valor unitario.

Ahora se presentan las preguntas en los problemas que han sido propuestos por cada texto escolar, información previamente exhibida en el capítulo II, seguidamente se esbozan en la tabla 9 para su aplicación en la rejilla de análisis.

Tabla 9 Preguntas de los problemas texto 1

Texto escolar 1 del análisis.
Problema 1 le corresponde la siguientes preguntas a. ¿Cuántas barras de plastilina le corresponden a cada estudiante? b. ¿Cuántas partes de plastilina obtendrá cada uno de los 12 estudiantes?

Problema 2 ¿Cuánto dinero en total olvidó descontarles a los ahorradores durante esos tres meses? Problema 3, con la siguiente pregunta a) ¿Cuál es el precio unitario? b) ¿Cuánto recibió la distribuidora por las ventas de ese mes?
Problema 4 ¿Cuánto recibe la panadería diariamente por la venta de todos los productos?
Problema 5 Son ejercicios de aplicación
Problema 6 a) ¿Qué cantidad de cubos de $1cm^3$ le caben a una caja de 20 *cm* de largo, 12 *cm* de ancho y 10 *cm* de altura?
Problema 7 a) ¿Cuánto mide la altura?
Problema 8 ¿Cuántas gallinas habrá?
Problema 9 ¿Cuántas personas ocupan 28 mesas?
Problema 10 ¿Cuántas personas son zurdas?
Problema 11 ¿El extremo faltante en la proporción es 4?
Problema 12 ¿Cuánto tiempo recorre un ciclista?
Problema 13 ¿Cuántos días tarda en dar 5 vueltas?
Problema 14 a. ¿Será suficiente 6cajas para empacar 30 paquetes? b. ¿Cuántas cajas y la cantidad de paquetes son magnitudes directamente proporcionales? c. ¿Cuántos centímetros representan 25 km?

Problema 15 a. ¿Cuántos kilogramos consumen, semanalmente 15 perros? b. ¿Cuántas rosas empacará en media hora? c. ¿En cuántas horas bombea 1200 litros? d. ¿En cuánto tiempo recorrerá 3375 km? e. ¿Cuántos microbuses deben contratar?
Problema 16 ¿Para cuántos días les alcanzará la comida?
Problema 17 ¿En cuánto tiempo se realizará el mismo trabajo?
Problema 18 ¿Cuántas horas tardarán?
Problema 19 ¿Cuántos invitados llegaron a la fiesta de Felipe?
Problema 20 ¿Cuánto será ahora la cuota de cada uno de los asistentes al parque?
Problema 21 ¿Cuántos días demorarán en pintar los tres?

Seguidamente se exhibe en la tabla 10, las preguntas de los problemas seleccionados para el análisis correspondiente al texto 2.

Tabla 10 Preguntas de los problemas texto 2

El texto 2
Problema 22 a. ¿Cuántos libros deben ser empacados en cada bolsa? b. ¿Cuántos taxis se necesitan?

Problema 23 ¿Cuánto dinero debe pagar una familia conformada por 3 adultos y 2 niños, que usen la piscina durante 1 ½ horas?
Problema 24 ¿Cuántas bolsas de chocolate deben enviar para cumplir con el pedido?
Problema 25 ¿Cuánto costó cada boleta?
Problema 26 ¿Qué información necesitas para calcular el área del jardín?
Problema 27 Es verdad que para 10 anuncios publicitarios se necesitan 5 láminas como ésta? (muestra la figura)
Problema 28 ¿Cuál es el volumen del cubo de la pregunta anterior?
Problema 29 a. ¿Cuántas tortas se necesitan para 18 personas?
Problema 30 a. ¿Cuánto cacao se necesita para 7 tazas?

La tabla 11 muestra la aplicación en la rejilla de acuerdo al análisis realizado en la sección de resolución de problemas con estructuras multiplicativas, correspondiente a los dos textos escolares seleccionados para el grado 5°.

Tabla 11 Aplicación rejilla 1 de análisis, problemas textos escolares

VERGNAUD	CATEGORÍA	CLASES	Problemas Texto 1	Problemas Texto 2	Posibles errores Maza Sintáctica	Semántica	MAZA
	Isomorfismo de Medidas	Multiplicación	2,4,3,1	23	1,3		
		División Partitiva	3	22,24		3	
		División Cuotitiva	6			6	
		Regla de Tres	4, 8 al 21,	23 al 25, 29,30	15	4,16, 24, 25	
	Producto de Medidas	Dimensión Simple					
		Dimensión Producto	5, 6, 7	26, 27, 28			
		Dimensión Cociente	7				

A continuación se muestra en la tabla 12, las preguntas seleccionadas y analizadas en el capítulo anterior, de los cuadernillos 1 y 27 de las Pruebas Saber 5° años 2012-2013, respectivamente, para su aplicación en la rejilla de análisis 2.

Tabla 12 Preguntas seleccionadas y analizadas Pruebas Saber 5° año 2012

Pruebas Saber 5°2012
La pregunta 1 ¿Cuánto cuesta la pelota?
La pregunta 2

¿Cuál de las siguientes tablas representa correctamente el precio de 2, 3, y 4 lápices?
La pregunta 3 ¿Cuál de los siguientes procedimientos permite hallar el volumen de la caja?
La pregunta 4 ¿Cuál de los siguientes procedimientos permite hallar el volumen de la caja?
La pregunta 5 ¿Cuántos niños formaban el grupo?
La pregunta 6 ¿Cuál de las siguientes tablas muestra el número de sillas que arma la maquina en 1, 2, 3, 4, 5 y 6 horas?
La pregunta 7 ¿Cuál de las siguientes operaciones debe efectuar para saber cuántos segundos duro el recreo?
La pregunta 8 ¿Cuál de las gráficas se representa el máximo de libras que puede comprar con $56.000?
La pregunta 9 ¿Cuántos kilómetros se recorren en la ruta 2
La pregunta 10 ¿Cuál es el volumen del sólido que armo Beto?

En cuanto algunas preguntas de las Pruebas Saber 2013 se muestran en la tabla 13

Tabla 13 Preguntas seleccionadas y analizadas Pruebas Saber 5°año 2013

Pruebas Saber 2013
En la pregunta 11 Con cuál de las siguientes operaciones se puede calcular el número de personas que asistió a la fiesta?
Pregunta 12 ¿Con cuál de las siguientes operaciones se puede determinar cuántos estudiantes participaron en la actividad?

Pregunta13 ¿Cuál de las siguientes figuras **NO** corresponde a una de las maneras en que Hugo organizó las canicas?
Pregunta 14 ¿Cuántas paletas compró?
Pregunta 15 ¿Cuál era el valor de cada uno de los billetes?
Pregunta 16 ¿Cuál es el volumen de la torre?
Pregunta 17 ¿Cuál o cuáles de los siguientes procedimientos le sirve(n) a Adela para calcular cuánta agua, en m^3?
Pregunta 18 ¿Cuántas banderas distintas podrían hacer?
Pregunta 19 ¿En cuál de las tablas se muestra correctamente el precio de 3, 6 y 9 paquetes de estas galletas?
Pregunta 20 ¿Cuál de los siguientes números completa la tabla de Mauricio?
Pregunta 21 ¿Cuánto mide cada lado del cuadrado?

A continuación se presenta la tabla 14, que corresponde a la rejilla 2 de análisis de preguntas aplicadas por las Pruebas Saber 5, de los años 2012 y 2013

Tabla 14 Aplicación rejilla 2, preguntas Pruebas Saber 5°

VERGNAUD	CATEGORÍA	CLASES	Prueba Saber 2012	Prueba Saber 2013	Posibles errores Maza Sintact.	Semánt	MAZA
	Isomorfismo de Medidas	Multiplicación	4, 6, 7, 9, 10	11, 12, 14	14,15	11,12,	
		División Partitiva					
		División Cuotitiva	9, 5, 8	14,15			
		Regla de Tres	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8	19, 20			
	Producto de Medidas	Dimensión Simple		18			
		Dimensión Producto	3, 10	13,16, 17, 21			
		Dimensión Cociente					

3.1.3 Identificación y observación a través de la rejilla de análisis el contraste entre la propuesta de los textos escolares y las preguntas de las Pruebas Saber seleccionadas.

Seguidamente se presenta la tabla 15, correspondiente a la rejilla 3 donde se hace la compilación entre la rejilla 1 y 2, el análisis final, el cual consiste en evidenciar el contraste entre la presencia de las categorías definidas por Vergnaud (1991) en los textos escolares de matemáticas, lo aplicado y evaluado en las preguntas seleccionadas de las Pruebas Saber 5 (2012-2013). La tabla contiene los números de las preguntas observadas en los textos 1 y 2, además las Pruebas Saber 2012-2013.

Tabla 15 Rejilla 3, contraste entre problemas textos escolares y preguntas Pruebas Saber 5°

VERGNAUD	CATEGORÍA	CLASES	Texto 1	Texto 2	Prueba Saber 2012	Prueba Saber 2013	Posibles errores Maza Sint.	Semt	MAZA
	Isomorfismo de Medidas	Multiplicación	1,2,3 4	23	4, 6, 7, 9, 10	11, 12, 14	1,3, 14,15	11,12	
		División Partitiva	3	22, 24				3	
		División Cuotitiva	6		9, 5, 8	14,15		6	
		Regla de Tres	4, 8 al 21	23, 24,25, 29,30	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8	19, 20	15	4,16, 24,25	
	Producto de Medidas	Dimensión Simple				18			
		Dimensión Producto	5, 6, 7	26, 27, 28	3, 10	13,16, 17, 21			
		Dimensión Cociente	7						

3.2 Conclusiones del análisis

Considerando los resultados obtenido al aplicar la rejilla de análisis de los textos escolares se tiene que:

En el texto 1, se observó en cuanto al planteamiento de la resolución de problemas con estructuras multiplicativas se puede deducir que de los 21 problemas seleccionados de las 4 unidades del texto 1 y relacionados con esta estructura, 5 situaciones problema se hallan clasificadas en la categoría de isomorfismo de medidas en las clases multiplicación y división, aunque sólo una de ellas está implicada en la división cuotitiva, además 14 problemas se hallan relacionados con la clase regla de tres en la misma categoría y las 2 situaciones problemas restantes se evidencian en la categoría producto de medidas en la clase dimensión producto y dimensión cociente, habiendo ausencia de problemas en la dimensión simple de la misma categoría.

Con respecto al texto 2 se evidencia lo siguiente: En cuanto a la resolución de problemas con estructuras multiplicativa que el texto plantea, se infiere en las 9 situaciones problemas seleccionados en cuatro unidades, que 4 problemas corresponden a la categoría de isomorfismo de medidas de los cuales 1 pertenece a la multiplicación, 2 situaciones a la división partitiva y 3 a la regla de tres, (cabe anotar que en la multiplicación se encuentra implícita la regla de tres), evidenciándose ausencia en la división cuotitiva, con respecto a la categoría de producto de medidas se encontraron 3 situaciones que tienen relación a la dimensión producto, y se presenta nulidad en las dimensiones simple y cociente de la misma categoría.

En consideración a lo anterior, los dos textos en mención presentan poca resolución de problemas en la categoría producto de medidas en sus 3 dimensiones, especialmente en la dimensión simple, como también en la categoría isomorfismo de medidas, las clases de división tanto partitiva como cuotitiva se evidencian pocas situaciones problemas relacionadas con estas.

Por otro lado, en cuanto a los resultados arrojados en la rejilla de análisis de las Pruebas Saber, se evidencian que las 21 preguntas seleccionadas en los años 2012-2013, existen 15 preguntas que pertenecen al isomorfismo de medidas relacionados así: 8 en la clase multiplicación, 3 en la clase de división cuotitiva y 4 en la clase de regla de tres, con ausencia en la división partitiva, así mismo, las otras 6 preguntas ubicados en la categoría producto de medidas, se encuentran repartidas de la siguiente manera, 1 en dimensión simple, y 5 en dimensión producto, siendo ésta ultima la más representativa, careciendo de preguntas en la dimensión cociente.

Finalmente, al realizar el contraste entre los problemas de los textos escolares y preguntas Pruebas Saber 5°, a partir de Vergnaud (1991), se observó que las Pruebas muestran énfasis en la concepción de la multiplicación y regla de tres permitiendo tablas de apoyo para facilitar el razonamiento en el estudiante indicando con ellas que la multiplicación se encuentra implícita en estas, los contextos presentados son cotidianos, por otro lado, los textos muestran debilidad en la aplicación de esta clase, dado que informan de antemano cuál operación debe aplicar, se muestra como ejercitación del algoritmo de la multiplicación no como situación problema, presentan situaciones para la aplicación de la división cuotitiva (siendo esta la más común). En cuanto a la división, los textos muestran deficiencia en situaciones que se relacionan con la división cuotitiva y en contraste a esto las Pruebas Saber hacen mayor énfasis en la clase antes mencionada, sin embargo las Pruebas Saber muestran ausencia total en la división partitiva observándose en ellas la nulidad de situaciones que contengas esta clase, en contraste con los textos que si muestran algunas situaciones en esta clase del Isomorfismo de medidas; en cuanto a la categoría producto de medidas hay coherencia en la clase dimensión producto ya que se demuestran varias situaciones problema en los textos y preguntas en las Pruebas Saber que se relacionan con esta

dimensión, las Pruebas Saber cuestionan en esta categoría el hallar sólo una dimensión dando en el problema un área total, con esto se exige una mayor comprensión en lo que concierne al área de una figura plana, contrario a lo brindado por los textos, que presentan datos que serán aplicados a una fórmula de determinada figura plana.

Con respecto a lo que afirma Maza (1991) los posibles errores al presentarse para el procedimiento del algoritmo del producto y el cociente, en algunas preguntas de las Pruebas Saber (2013), se observó la presencia de errores de naturaleza semántica y sintáctica, dado que hay debilidades en lo concerniente a lo conceptual y por consiguiente a lo procedimental, de igual manera en ciertas situaciones propuestas por los textos analizados, por ejemplo el caso de que haya números de varias cifras que tengan ceros intermedios $4050 \div 450$ para el estudiante puede ser 10 ó 10×450 puede ser 4050, a su vez, el declarar la propiedad conmutativa indicando que cada término tiene igual significado.

CAPÍTULO IV

4. CONCLUSIONES FINALES Y RECOMENDACIONES

4.1 Conclusiones

De acuerdo a los análisis elaborados en el capítulo III, y a lo establecido en la formulación de los objetivos general y específicos, se presenta en el siguiente apartado las conclusiones finales referentes a la articulación entre lo que promueven las directrices curriculares vigentes en Colombia, (MEN, 1998, 2006) según lo evaluado en algunas preguntas por las Pruebas Saber 5° y lo que proponen algunos textos escolares de matemáticas escogidos para este grado.

- El análisis realizado ha puesto de manifiesto que la caracterización de las estructuras multiplicativas de acuerdo con las categorías indicadas por Vergnaud (1991), y los posibles errores en los algoritmos de la multiplicación y división según Maza (1991) en problemas de tipo multiplicativo, resultan útiles tanto para el análisis de las Pruebas Saber cómo para el análisis de una unidad de un texto puntual, alrededor de la resolución de problemas con estructura multiplicativa, que dan cuenta de la coherencia entre lo propuesto y lo evaluado.

- A partir de este trabajo, también se puede determinar que algunas de las conceptualizaciones históricas, matemáticas, curriculares y didácticas, alrededor de la resolución de problemas con estructuras multiplicativas exploradas, ofrece al campo de la Educación Matemática aportes significativos, ya que un docente al tener conocimiento de algunos elementos de la construcción teórica y formalista de un concepto, genera mejoras en la práctica educativa, ampliando el panorama de prever las posibles dificultades a las

que el estudiante se puede enfrentar cuando esté aplicando este concepto en la resolución de situaciones problema, sin embargo, se considera que ni en el marco legal, ni en los textos escolares hay un espacio para las reflexiones de carácter histórico y epistemológico con los estudiantes, pues en estos textos no se evidencia reseñas históricas de los conceptos propuestos, que permita ser retomados para ampliar las temáticas desarrolladas.

- A través de este documento también se da cuenta de no haber total coherencia entre el marco legal en la Educación Matemática colombiana a partir de las Pruebas Saber y los textos escolares en lo concerniente a las estructuras multiplicativas alrededor de la resolución de problemas, ya que a nivel del currículo esperado y el desarrollado, difiere en algunos casos, por ejemplo: Los textos definen la multiplicación como una suma repetida equivalente a una relación ternaria dejando oculta la relación cuaternaria donde implícitamente se aplica la regla de tres cuyo concepto es más tenido en cuenta en las Pruebas Saber, mostrando riqueza en la variedad de situaciones problema.

  i. La división en su modelo implícito se puede encontrar que es partitiva (repartir partes iguales) o división cuotitiva, (hallar número de partes), las cuales no son explicadas ni ejemplificadas de acuerdo a su clasificación, en los textos analizados sólo se asume la división como operación inversa a la multiplicación presentando situaciones problemas en la clase de división partitiva omitiendo la división cuotitiva, la cual es tenida en cuenta en gran proporción por las Pruebas saber.

  ii. Además en el concepto de área en los textos analizados, se ofrece una definición y aplicación muy superficial, pues brinda un paso a paso en la aplicación de fórmulas para hallar áreas, correspondiendo a un método deductivo.

  iii. Por otro lado, en los textos escogidos se esconde el tratamiento de las unidades en las

operaciones indispensables para la solución de una determinada situación, estos presentan en la gran mayoría situaciones problema de forma deductiva indicando al estudiante cuál operación aplicar, ofrece un espacio muy limitado para razonar, por el contrario las Pruebas Saber presentan situaciones de forma inductiva que exige al estudiante un razonamiento más profundo.

- El presente trabajo en su análisis encontró debilidades en cuanto al procedimiento de la regla de tres simple inversa, por lo tanto, se deja para próximas investigaciones puertas abiertas respecto al análisis en la categoría de isomorfismo de medidas la clase de regla de tres simple, en cuanto a la propuesta de los textos escolares con relación al tratamiento de las unidades que se presenta en las situaciones problema.

4.1.1 Recomendaciones.

- Los textos escolares son una herramienta importante para el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, pero es el docente quien debe contar con unos criterios de selección precisos para elegir esa herramienta, no sólo limitarse a su contenido sino utilizarlo como afianzamiento de ciertos conceptos, dado que es él quien conoce los elementos matemáticos que están presentes en ciertas temáticas. Además se sugiere que en los textos escolares sea necesario ampliar las temáticas y el desarrollo de las mismas a partir de la elaboración de situaciones que involucren la riqueza del objeto matemático tratado en este trabajo, dado que se observó carencia de ciertas clases en cuanto a la estructura multiplicativa se refiere.

- Es indispensable que los libros de textos presenten claridad en cuanto a cada uno de los términos de la multiplicación, dado que pareciera que cada uno en diferente orden atiende a lo mismo (propiedad conmutativa).

- Siendo el ICFES, por medio de las Pruebas Saber un instrumento de medición de la calidad educativa, en cuyo objetivo dice "Contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana" se observa en el análisis, poca coherencia entre lo que orienta los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y lo que evalúa las Pruebas Saber, pues no cumple completamente con los estándares propuestos por el MEN, uno de ellos dice *"Uso diversas estrategia de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas"* (E3 en este trabajo), sin embargo existe nulidad en situaciones problemas de la clase de división partitiva pertenecientes al Isomorfismo de medidas, por tanto es una competencia que no puede ser medida al finalizar el grado 5 por esta entidad, aunque los textos escogidos lo presente en su propuesta pedagógica.

- De igual manera sucede con la dimensión Simple, en situaciones que contenga relación de magnitudes de longitud, tiempo, peso, costo, si bien en la prueba se observo una pregunta de longitud, también existió ausencia de situaciones problema que conciernan con las otras magnitudes; encontrándose inconsistencia entre lo evaluado por las Pruebas Saber, lo propuesto por el MEN, según el siguiente estándar *"Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas"* (E5 en este trabajo). Así mismo, ocurrió con la dimensión cociente, que relaciona magnitudes para hallar velocidad, densidad, valor unitario, en la Pruebas Saber de los años 2012 y 2013, se encontró ausencia total en esta clase de la Categoría de Producto de Medidas, aunque uno de los textos analizados hace presencia en esta clase, es decir, en su propuesta pedagógica tiene en cuenta la dimensión cociente.

Finalmente, se puede inferir que no existe completa articulación entre la propuesta pedagógica de algunos textos escolares de matemáticas para el grado quinto, alrededor de la resolución de problemas aritméticos con estructuras multiplicativas y las Pruebas Saber en Colombia.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E., & Sánchez, G. (1998). Análisis de textos escolares de Matemáticas. Universidad del Valle, Cali Colombia. 26 – 30.

Bermúdez, D (2011). Aplicación de las Estructuras Multiplicativas en la resolución de problemas aritméticos dirigida a tercer grado de educación básica. Universidad Del Valle, Cali Colombia

Castro E, Rico L, Castro E. (1995). Estructuras aritméticas elementales y su modelización. Bogotá. Colombia: Grupo editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Cooney, T, Davis, E & Henderson, K (1975). Dynamics of teaching secundary school mathematics. Boston: HoughtonMilfflinCompany.

Enrique, C (2008). Resolución de Problemas, Ideas, tendencias e influencias en España Universidad de Granada. España

Fernández, E. Babilonia y las matemáticas en el aula s.s. (sf).

Gómez D, Valencia J. (2010). *Trayectoria didáctica orientada al aprendizaje de conceptos relativos a la multiplicación a través de situaciones de covariación lineal con niños de tercero de primaria.* Tesis de grado, Licenciatura en educación básica con énfasis en matemática. Universidad del Valle Cali Colombia.

González, M. Teresa., Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Enseñanzas de la Ciencias (22) 3, 389-408

Hernández & Ojeda (2014) Divulgación matemáticas Vol, VII Número 3 10/21 hptt://boletinmatemático.ula.es.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación ICFES, (2016). Informe nacional. Saber 3°, 5º y 9º. Resultados Nacionales, del año 2009-2014. Recuperado de http://www.icfes.gov.co/examenes/pruebas-saber/resultados.

Martínez, M. J. (2008). Competencias Básicas en las matemáticas. Una nueva práctica. España (Madrid). Editorial WoltersKluwer S.A.

Martínez Sierra Gustavo (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento *Revista Clame (revista oficial del comité latinoamericano de matemática educativa A.C.)* Relime Vol 8 No 2 (195-218).

Maza C. (1991). Enseñanza de la multiplicación y división. España. Editorial Síntesis

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Serie Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Bogotá. Colombia.

Moya P (1784). Aritmética práctica y especulativa del bachiller. España. Imprenta Joseph Otero.

Ortiz, G. (2005) Introducción a la teoría de conjuntos y los sistemas numéricos. Notas del Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle. Cali Colombia.

Ospina, M., Salgado J (2011). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo*. Tesis de grado, Licenciatura en educación básica con énfasis en matemática. Universidad del Valle, Cali Colombia

Polya, G. (1965). How to Solve it.2 ed U.S.A. México Editorial Tirilllas (p 28-38, 161-163).

Porras & Monge, 2012, Un viaje por los diversos métodos de multiplicar.

Puig, L., Cerdán, F (1988). Problemas aritméticos escolares. Cap. 1 p. 1-32. Editorial Madrid: Síntesis, D.L. 1996.

Rico, L (1997). Los organizadores del currículo de matemática. (cap., 2) Universidad de Granada.

Ruiz, a (2003). Historia y filosofía de las matemáticas, San José de Costa Rica, EUNED.

Santiago, F. (2009). Evaluaciones en matemáticas el caso de Colombia Pruebas Saber e ICFES. Sigma 34, 38-1.

Vergnaud, G (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. México D.F Editorial Tirilla S.A. de C.V.

Vergnaud, G (1994). La teoría de los campos conceptuales. México D.F Editorial Tirilla S.A. de C.V.

Vila, A & Callejo M. (2005). Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas. España. Editorial Narcea.