



**UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS
NÚMEROS IRRACIONALES TOMANDO COMO REFERENCIA
SU DESARROLLO HISTORICO Y EPISTEMOLOGICO
HACIENDO USO DE LAS TIC**

LUZ MARINA NARANJO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI, 2016



**UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS
NÚMEROS IRRACIONALES TOMANDO COMO REFERENCIA
SU DESARROLLO HISTORICO Y EPISTEMOLOGICO
HACIENDO USO DE LAS TIC**

LUZ MARINA NARANJO

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciada en Matemáticas y Física

Director:

Dr. Luis Cornelio Recalde

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGIA

LICENCIATURA DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

SANTIAGO DE CALI, 2016



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y
PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO
DE GRADO

Programa Académico Licenciatura en Matemática y Física Fecha

Código del programa: 3487

Resolución del programa: 044

Día	Mes	Año
03	10	2016

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
Una propuesta para la enseñanza de los números irracionales; tomando como referencia su desarrollo histórico y epistemológico haciendo uso de las TIC.				
Se trata de:				
Proyecto ☐		Informe Final ☒		
Director				
Luis Cornejo Recalde Caicedo				
Nombre del Primer Evaluador				
Leonel Monroy Guzman				
Nombre del Segundo Evaluador				
Humberto Mora				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Téfonos de contacto
Luz Marina Noranjo	2139816	3487	luz_marina0314@hotmail.com	310 8429913
Evaluación				
Aprobado ☒	Meritorio ☐	Laureado ☐		
Aprobado con recomendaciones ☐	No Aprobado ☐	Incompleto ☐		
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐	Primer Evaluador ☐	Segundo Evaluador ☐		
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: ____ dd ____ mm ____ aa				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).				
Firmas				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador		

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a todas las personas que me apoyaron durante el desarrollo de este trabajo de grado.

A Dios por permitirme la vida y por estar siempre conmigo.

A mi hijo, fuente de motivación y perseverancia.

A mis padres y tíos, por su apoyo incondicional durante todos mis estudios.

A mi tutor, Luis Cornelio Recalde, por su acompañamiento y conocimiento durante el desarrollo de este trabajo. Especialmente, a su estilo particular de enseñar.

A Humberto Mora y Leonel Monroy, evaluadores de la tesis, por sus aportes y sugerencias que permitieron mejorar algunos aspectos del trabajo.

A mis profesores, por sus enseñanzas y formación, especialmente a Ligia Amparo Torres por su apoyo cuando más lo necesitaba y a Octavio Pabón por su carisma y por su perspectiva hacia la educación matemática.

A mis compañeros de estudio, por su amistad y cariño, por las intensas rutinas de estudio que hoy me permiten concluir mi carrera con éxito.

Tabla de contenido

Agradecimientos	4
Resumen	7
Introducción	8
Capítulo 1 Desarrollo histórico y epistemológico del número irracional	12
1. El problema de las magnitudes inconmensurables.....	13
1.1. La diagonal del pentágono y la Antipharesis	15
1.2. El caso del cuadrado y el problema de raíz de dos	17
2. Euclides y la teoría de razones y proporciones	21
2.1. Teoría para magnitudes	22
2.2. Teoría de números	24
3. Los irracionales en la solución de ecuaciones.....	25
3.1. Los aportes de Diofanto en la expansión de la noción de número	25
3.2. El álgebra de los Hindúes y el sistema decimal	28
3.3. Al-Khowarizmi y los algoritmos para la solución de ecuaciones.	30
3.4. Los aportes de Europa en el reconocimiento de los irracionales	31
4. Aritmetización de las magnitudes con Descartes	33

5. Las fracciones continuas y el descubrimiento de los trascendentes.....	35
6. La formalización de los irracionales como números.....	38
Capítulo 2 Obstáculos epistemológicos de los números irracionales	41
1. Obstáculos relacionados con la representación.....	44
2. Obstáculos relacionados con la operatividad	52
Capítulo 3 Una propuesta para la enseñanza de los números irracionales.....	64
1. El uso de Geogebra como herramienta educativa en las matemáticas	65
1.1 Construcción de números irracionales	66
1.2 Suma y resta de segmentos	68
1.3 Teorema de Tales, para multiplicar y dividir segmentos.....	69
2. Propuesta para la enseñanza de los irracionales.....	72
Capítulo 4 Conclusiones	105
Bibliografía	110

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta para la enseñanza de los números irracionales en el bachillerato, con el objetivo de aportar al docente una herramienta práctica con la que se pueda trabajar, de manera dinámica y activa, el concepto de número irracional. Esta propuesta se diseñó para el proyecto “Construyendo capacidades para el uso de las TIC para innovar en la educación” del Ministerio de Educación Nacional, para la elaboración del objeto de aprendizaje: “*construcción de algunos irracionales*”, fundamentada por los contenidos y habilidades descritas en la malla curricular, llevado a cabo por CIER-SUR en la Universidad del Valle.

Inicialmente se realiza un estudio de algunos aspectos históricos sobre la evolución del número irracional, desde la aparición de las magnitudes inconmensurables hasta la construcción de los números reales por Cantor y Dedekind. Luego, se identifican algunos obstáculos que estuvieron presentes en la evolución del concepto de número irracional, referidos a la representatividad y operatividad, de lo cual se concluye en que una de las mayores dificultades para la comprensión de los números irracionales, se basa en la falta de una representación general para caracterizarlos y con ello se despliega la dificultad de operar con estos números, pues las operaciones se realizan a través de las representaciones.

Palabras claves: número irracional, historia, obstáculo epistemológico, propuesta de enseñanza, CIER-SUR.

Introducción

Uno de los problemas de la enseñanza de las matemáticas se encuentra en la poca comprensión de los números reales, pues son considerados como la unión de números racionales e irracionales, y en la escuela se da prioridad a la enseñanza de los racionales. En este trabajo se realiza un estudio sobre el desarrollo del número irracional, con el objetivo de aportar a la educación una herramienta para la enseñanza de este concepto.

En la escuela hay una tendencia a introducir los números por paquetes, primero los números naturales, los cuales son aceptados sin mucho problema por los estudiantes, tal vez debido a que son de gran utilidad para suplir la necesidad de contar y de ordenar; posteriormente se presentan los números Enteros y con ellos empiezan a surgir algunos obstáculos para la comprensión de los mismos, alusivo al típico problema de sumar y multiplicar números negativos.

Luego, se pasa a introducir los números racionales en sus diferentes representaciones, y finalmente, se habla de la existencia de los números irracionales, que unidos con los números racionales forman el gran conjunto de los números reales.

Pero, ¿Qué se entiende por número Irracional? ¿Cómo son o cuántos son? ¿Cuál es su comportamiento operativo? En general, todos tenemos alguna idea de los infinitos números Naturales y Enteros y, por consiguiente, de los números Racionales. Los números Racionales se pueden establecer como aquellos que guardan la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son números enteros y $q \neq 0$, y con una operatividad que se define con base en las operaciones entre enteros; pero no pasa lo mismo con los números Irracionales, debido a que no tienen una representación decimal finita o periódica. Esto hace que para definir las operaciones entre irracionales haya que recurrir a otras instancias que tienen relación con procesos infinitos.

Tanto la enseñanza como el aprendizaje de los números irracionales se han convertido en un problema que aborda la educación matemática. Son múltiples las razones de esta problemática; uno de estos problemas se debe al desconocimiento, por parte de algunos docentes, de sus dificultades intrínsecas y de la falta de estudios investigativos sobre su enseñanza y aprendizaje.

Al observar la malla curricular de matemáticas del MEN (CIER-SUR, 2014) y Los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, se encuentra que los números irracionales se abordan en grado octavo y luego, se retoman en grado once como complemento para estudiar el conjunto numérico de los Reales, que sirven de base para la introducción al cálculo. Pero en los libros de textos escolares de grado octavo se encuentra escasa información sobre los números irracionales. Con suerte, algunos muestran su historia, aplicabilidad y uno que otro ejercicio con números irracionales. Por el lado de los textos escolares de matemáticas de grado once, se observa que no hay profundización en el conjunto de los números irracionales y hablan directamente de los números Reales. Autores como Sánchez & Valdivie (2014) y Giraldo & Quesada (2012) realizaron investigaciones sobre los números irracionales en los libros de textos escolares y se encontraron con una deficiencia en contenido y desarrollo de los números irracionales.

Cuando se introducen los números irracionales, lo que generalmente hace el docente es enfatizar en las propiedades y características que cumplen los números racionales, para luego decir, que aquellos números que no cumplan estas condiciones se llamaran irracionales. Aunque esto es importante para diferenciar racionales de irracionales, queda faltando caracterizar los irracionales. En esta dirección sería importante mostrar su aplicabilidad e historia, al igual que realizar y explorar, en clase, algunos procesos demostrativos que permitan esclarecer el concepto de número irracional. Igualmente es necesario que el docente entienda la necesidad de incorporar algunos elementos generales de la operatividad de los irracionales, pues justamente, los análisis

históricos muestran que un conocimiento adecuado de los números irracionales difícilmente se consigue si no se entiende su aritmética. El estudiante debe apropiarse de algunos elementos primigenios operativos a través de magnitudes. No es necesario recurrir a clases de equivalencias, a cortadura o a al concepto de límite. Bastaría introducir algunos elementos operatorios a través de lo geométrico vía suma y producto de segmentos como lo hacen Euclides y Descartes. En algunos libros solo suelen presentar su definición como: “Los números de infinitas cifras decimales no periódicas se llaman números irracionales” (Londoño & Bedoya, 1988). Esta definición no corresponde con las definiciones que a través de la historia ha ido formando al número irracional. La dificultad de su enseñanza se debe a que en los números irracionales se encuentra involucrado el infinito, como se hace anotar a lo largo de este trabajo, cuestión que hace que se establezca una gran confusión entre el número irracional, su representación y los procesos operativos aproximados.

Por otro lado nos encontramos en un mundo en donde la tecnología avanza, a pasos agigantados, hacia un futuro con mejores y novedosas herramientas tecnológicas. Aunque el mundo moderno gire en torno a las nuevas tecnologías y éstas puedan aportar significativamente en el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, aún se presentan muchos obstáculos para acceder a ellas como el factor económico o la cobertura de internet, entre otros. Otro de los obstáculos que se presentan, es el de la resistencia, por parte de algunos docentes, a la innovación tecnológica por diversas razones. Debido a la gran evolución tecnológica que se vive hoy en día, es importante renovar la labor docente incorporando las nuevas tecnologías en las aulas de clase, siendo este el principal objetivo del proyecto “construyendo capacidades en el uso de las TIC para innovar en la educación” del MEN, elaborar recursos digitales en pro de mejorar la educación.

Todo lo anterior, nos lleva a la conclusión de que es necesario, repensar el proceso de enseñanza y aprendizaje de este conjunto numérico, teniendo en cuenta su desarrollo histórico, ya que permite conocer los elementos de causalidad que intervinieron en la construcción de los números irracionales, dotándolos de significado e importancia. En este ámbito se inscribe el problema de investigación que se aborda en este trabajo. Se trata de pensar y diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de los números irracionales teniendo en cuenta su evolución histórica en las matemáticas y apoyándose en las nuevas tecnologías.

Este trabajo de grado contiene cuatro capítulos. En el primer capítulo se realiza un estudio epistemológico del desarrollo de los números irracionales. Se trata de establecer los elementos conceptuales que se utilizarán para determinar algunos obstáculos epistemológicos que se tuvieron en cuenta en la elaboración de la propuesta de intervención. Se identifican seis etapas de evolución, desde la teoría de magnitudes en Euclides hasta la construcción de los números reales por parte de Cantor y Dedekind. No se hace un análisis exhaustivo en cada etapa, sino que se hace una descripción de los elementos conceptuales importantes.

En el segundo capítulo se identifican algunos obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico de los números irracionales. En particular se describen los obstáculos de la operatividad y de la representación.

En el capítulo tres se describe la propuesta de intervención. Se hace una introducción del paquete Geogebra, con el propósito de sustentar algunas actividades que han sido diseñadas como propuestas para los docentes. La propuesta se describe de acuerdo al diseño llevado a cabo por CIER-SUR en la Universidad del Valle.

Algunas conclusiones se describen en el capítulo cuatro. Se trata de establecer una síntesis de lo desarrollado en el trabajo de grado y destacar los aspectos más importantes de la propuesta.

Capítulo 1

Desarrollo histórico y epistemológico del número irracional

A través de la historia se intenta esclarecer el origen y la evolución de los objetos matemáticos que se utilizan en la actualidad. En el estudio histórico de las matemáticas se presentan algunos inconvenientes que impiden establecer con exactitud el origen de las cosas. Sin embargo, con los estudios históricos realizados hasta el momento, se conoce que en la antigüedad el hombre se interesó en tres actividades elementales: medir, contar y ordenar, cuyo desarrollo fue el origen de lo que hoy conocemos como los números Reales (Recalde, 2011).

Los primeros problemas de las matemáticas griegas corresponden a problemas de medida como lo fue la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. En este trabajo, se aborda la actividad de medir para mostrar cómo, en su evolución, dieron paso a los números Irracionales. La actividad de medir, en la antigüedad, consistía en comparar magnitudes de la misma naturaleza entre sí, es decir, segmentos con segmentos, superficies con superficies, etc. Al comparar las magnitudes, se buscaba una medida común que las midiera, aclarando que en esos tiempos no hacían uso de una regla métrica o de un compás que transportara medidas, ellos hacían uso de la idea intuitiva de encajar. En los tiempos actuales, la medida se ha simplificado al uso de una métrica, esto gracias a los desarrollos matemáticos que permitieron la biyección entre la recta geométrica y los números reales.

Los estudios históricos de la evolución de un concepto matemático son importantes en el área de la educación matemática en la medida que muestra los obstáculos que se presentaron durante su consolidación como objeto matemático en el correr del tiempo. Esto sirve de ayuda a los

didactas al tener puntos de referencia sobre la complejidad del concepto, para el desarrollo de situaciones de aprendizaje apropiadas. Por ello iniciaremos un breve recorrido histórico del número irracional a través de los siglos, empezando por la época griega hasta el siglo XIX donde se formalizan como números irracionales.

1. El problema de las magnitudes inconmensurables

En la antigüedad griega, la escuela de los pitagóricos argumentaba que todo se podía medir en relación con los números, pero los únicos números aceptados por ellos eran los números naturales, es decir, los que se utilizan para contar. Dichas mediciones consistían en comparar magnitudes entre sí, lo que significa que, dadas dos magnitudes A y B , se pueden encontrar dos números n y m tales que $nA = mB$, lo que es equivalente a decir que “ n copias de A ” es igual a “ m copias de B ”.

En términos de comparación, puede interpretarse así: “ A es a B como m es a n ” o escrito de la siguiente manera $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$; aunque esta última expresión puede verse como un número racional (fraccionario), debe aclararse que en la escuela pitagórica esta relación numérica no era considerada como un número.

Debido a que los pitagóricos concebían al número como el generador de todas las cosas del universo, todo podía ser medido con números. El proceso de medir dos magnitudes de la misma naturaleza consistía en determinar cuántas veces encajaba la menor en la mayor, si encajaba un número de veces exacto, ya habían encontrado la medida de la magnitud mayor con relación a la menor, es decir, que la unidad de medida común sería la menor. En caso de no encajar perfectamente entonces procedían a tomar la parte sobrante como unidad de medida, empezaban a comparar la magnitud menor anterior con esta, y así sucesivamente hasta encontrar una medida común, en un proceso que seguía los siguientes delineamientos: Sean AB y CD magnitudes de la

misma naturaleza, en este caso supongamos que son segmentos. Sea AB mayor que CD , entonces, si CD cabe n veces en AB , la medida común, corresponde a CD . Si no encaja exactamente, existe n tal que $AB = nCD + EF$, donde $EF < CD$. Ahora, si EF cabe exactamente m veces en CD , entonces se tiene que:

$$AB = nCD + EF$$

$$CD = mEF$$

$$AB = n(mEF) + EF = kEF \text{ donde } k = (mn + 1)$$

CD es a AB como m es a k o escrito de otra forma

$$\frac{CD}{AB} = \frac{m}{k}$$

Esto quiere decir que las magnitudes AB y CD tienen una medida en común que es EF y por tal motivo se denominan magnitudes conmensurables.

Definición: dos magnitudes A y B son conmensurables si existen dos números n y m tal que $nA = mB$.

Para los pitagóricos estas eran las únicas magnitudes que gobernaban el universo, lo que dejaba entrever que los únicos números necesarios eran los de contar. Esta teoría sufrió una gran crisis cuando descubrieron que era imposible encontrar una relación de medida entre el lado de un cuadrado y su diagonal.

Pese a que los pitagóricos consideraban que todas las magnitudes eran conmensurables, en su camino se encontraron con algunas magnitudes que no guardaban relación con los números; es decir, los pitagóricos caen en cuenta que existen magnitudes L y K para las cuales no existen dos números n y m tales que $nL = mK$. Para demostrar esto debe recurrirse al método de reducción al absurdo, pues el proceso involucraba el infinito. La gran idea de los pitagóricos fue incorporar un proceso abstracto que demuestra tal imposibilidad.

Se piensa que estas magnitudes aparecieron en tres contextos distintos: la música, el problema de la diagonal del cuadrado y el problema de la diagonal del pentágono. Se hará énfasis en el problema de la diagonal del cuadrado que corresponde a la imposibilidad de encontrar una relación entre el lado de un cuadrado y su diagonal. Cuando los pitagóricos se dispusieron a hallar la relación de medida entre el lado y la diagonal de un cuadrado, se encontraron con que el proceso se hacía infinito y nunca podían llegar a una medida común para estas dos magnitudes.

1.1. La diagonal del pentágono y la Antipharesis

El problema del pentágono surgió cuando se demostró que la diagonal del pentágono comparado con uno de sus lados, eran magnitudes inconmensurables. Esto se consiguió a través de un proceso denominado *Antipharesis*. Este proceso consiste en hallar la máxima magnitud común que mida a dos magnitudes dadas, lo cual se realiza mediante sustracciones repetidas de la siguiente manera:

Sean AB y CD los segmentos dados y $AB > CD$, entonces al mayor se le resta el menor, es decir, $AB - CD = A_1B_1$.

Figura 1

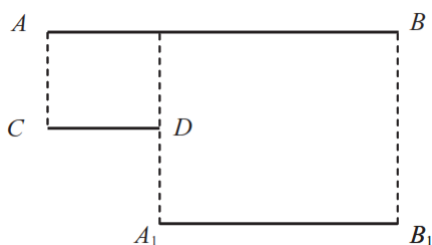


Figura 1. Muestra el proceso geométrico de restar segmentos, al segmento AB se resta el segmento CD obteniendo A_1B_1 . Tomada de *Lecciones de historia de las matemáticas*, Recalde, (2011).

En caso de que $CD < A_1B_1$, se repite el procedimiento anterior, siempre al segmento mayor le resto el menor, es decir, a A_1B_1 le resto CD . Cuando se llega al segmento $A_kB_k < CD$, se cumple que:

$$AB - kCD = A_kB_k$$

Luego, si $A_kB_k = 0$, se concluye que CD es el mayor segmento que mide a AB y a CD . Pero si $A_kB_k \neq 0$ entonces se compara con CD y se repite el procedimiento anterior, de restar al segmento mayor el menor. Si este proceso concluye con $C_kD_k = 0$ se habrá encontrado un segmento común que mide a los segmentos iniciales dados y por lo tanto corresponden a ser magnitudes conmensurables. Pero si el proceso sigue indefinidamente, los segmentos serán magnitudes inconmensurables. Tal caso se evidencia en el pentágono, cuando se compara la diagonal con uno de sus lados:

Figura 2.

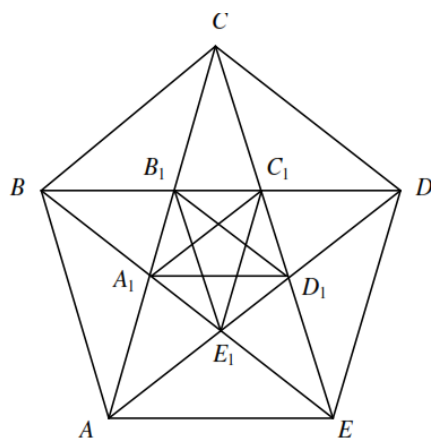


Figura 2. La construcción geométrica del pentágono regular, permite evidenciar el proceso infinito al comparar la diagonal con el lado. Tomada de *Lecciones de historia de las matemáticas*, Recalde, (2011).

Para medir la diagonal AD con el lado BC del pentágono regular $ABCDE$, se procede a comparar dichos lados de la siguiente manera, dado que $AD > BC$ entonces se procede a ver

cuántas veces cabe BC en AD . Como $ABCD_1$ es un paralelogramo, se tiene que $BC = AD_1$ por ser lados opuestos del paralelogramo. Luego BC cabe una vez en AD y sobra DD_1 . Se repite el proceso de comparar los lados, ahora DD_1 con BC , como $BC = AD_1$ y $DD_1 = AE_1$ se tiene que DD_1 cabe una vez en AD_1 y sobra E_1D_1 . Debido a que aún no se ha llegado a la medida común se vuelve a repetir el proceso, esta vez se comparan el sobrante E_1D_1 con la menor magnitud anterior que corresponde a DD_1 que es igual a AE_1 .

Como $AA_1C_1E_1$ es un paralelogramo, se tiene que AE_1 es igual a A_1C_1 , por lo tanto comparar E_1D_1 con DD_1 es igual que comparar E_1D_1 con A_1C_1 y como E_1D_1 y A_1C_1 corresponden al lado y a la diagonal del pentágono regular respectivamente, es como volver al punto de partida del problema inicial y por esa razón el proceso se hace infinito. Con lo que se evidencia en la antigüedad, la existencia de las magnitudes inconmensurables.

1.2. El caso del cuadrado y el problema de raíz de dos

Al igual que en el caso del pentágono, en el cuadrado se presenta la inconmensurabilidad entre su diagonal y su lado; este a la vez lleva intrínsecamente el problema de raíz de dos. Esclareciendo que, aunque ambos problemas están interrelacionados, son dos cuestiones diferentes: la primera es de carácter geométrico mientras que la segunda es de carácter aritmético.

Desde lo geométrico, el problema surge cuando se compara la diagonal y el lado de un cuadrado entre sí, pues no se logra llegar a una medida común para ambos segmentos. Es decir, que no es posible encontrar dos números naturales n y m tales que $nA = mB$. Para demostrar esto se recurre a la demostración por reducción al absurdo, la cual consiste en negar la hipótesis y llegar a una contradicción:

Dado el cuadrado $ABCD$

Figura 3.

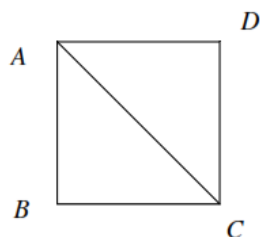


Figura 3. Muestra el cuadrado con su diagonal. Tomada de *Lecciones de historia de las matemáticas*, Recalde, (2011).

supóngase que existe una medida común entre la diagonal AC y el lado BC designada como U , de tal manera que:

$$BC = nU$$

$$AC = mU$$

Debido a que el triángulo ABC es rectángulo,

Figura 4.

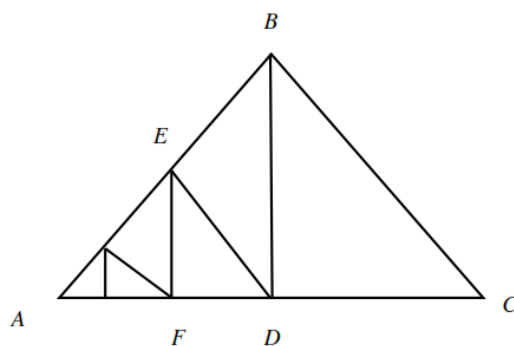


Figura 4. El triángulo formado por la diagonal (AC) y dos lados del cuadrado (AB y BC), muestra el proceso infinito. Tomada de *Lecciones de historia de las matemáticas*, Recalde, (2011).

por el teorema de Pitágoras se obtiene que:

Cuadrado de lado AC = cuadrado de lado AB + cuadrado de lado BC

Como $AB = BC$, se tiene que:

Cuadrado de lado AC = cuadrado de lado BC + cuadrado de lado BC

Cuadrado de lado $AC = 2$ (cuadrado de lado BC)

Cuadrado de lado $mU = 2$ (cuadrado de lado nU)

m^2 (cuadrado de lado U) = $2 n^2$ (cuadrado de lado U)

$$m^2 = 2 n^2 \quad (I)$$

De la anterior igualdad se observa que m^2 es par, y por lo tanto m también lo es, y dado que $AC = mU$, entonces la altura BD corta a AC en el punto medio D , el cual corresponde al punto que une dos unidades, lo que significa que $m = 2k$. Al reemplazar esta igualdad en (I) se obtiene $(2k)^2 = 2 n^2$ de donde se concluye que n también es par. Sea E el punto medio del segmento AB y trácese la recta EF paralela BD , como se muestra en la figura 4, se tiene de nuevo que la hipotenusa AD , que es igual a la mitad del lado AC , es una cantidad par de unidades y por ello la altura EF corta a AD en el punto medio, y al repetir la construcción se tiene que este proceso se hace infinito, lo cual es contradictorio puesto que una cantidad par en algún momento debe llegar a la unidad o a un número impar, y según esto siempre que se divida se obtiene una cantidad par. Por ello se concluye que AB y AC corresponden a magnitudes inconmensurables.

El problema de la inconmensurabilidad entre la diagonal y el lado del cuadrado, como ya se ha mencionado, guarda estrecha relación con la irracionalidad de raíz de dos. Desde la perspectiva aritmética, este problema se relaciona con la imposibilidad de expresar la raíz de dos como la razón de dos números enteros positivos tal que:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$p^2 = 2q^2 \quad (II)$$

Para demostrar que no existen p y q tales que satisfagan la ecuación (II) se recurre al método de reducción al absurdo, por consiguiente supóngase que existen dos números enteros positivos p y q tales que:

$$p^2 = 2q^2 \quad (II)$$

Debido a que p y q pueden ser pares o impares, se pueden presentar los siguientes casos:

1. p impar y q par
2. p par y q impar
3. p impar y q impar
4. p par y q par

En los casos 1 y 3, se demuestra que no es posible que p sea impar por la ecuación (II), puesto que:

Si p es impar, implica que p^2 es impar, pero por (II) p^2 es par, lo cual es contradictorio, pues no se puede ser par o impar a la vez.

En el caso 2, si p es par, es de la forma $2n$ donde $n \in N$, al reemplazar en (II) se obtiene:

$$(2n)^2 = 2q^2$$

$$4n^2 = 2q^2$$

$$2n^2 = q^2$$

Lo anterior implica que q^2 es par, pero como se parte del supuesto que q es impar se tendría también que q^2 es impar llegando a una contradicción con lo cual se demuestra que el caso 2 no es posible.

En el último caso, al suponer que tanto p como q son pares se tiene lo siguiente:

$$\text{Si } p = 2t_1$$

$$(2t_1)^2 = 2q^2$$

$$4t_1^2 = 2q^2$$

$$2t_1^2 = q^2 \quad (\text{III})$$

A su vez, como q es par, es de la forma $q = 2t_2$ y al reemplazar en (III) se obtiene que $t_1^2 = 2t_2^2$ lo que implica que t_1 es par de la forma $t_1 = 2t_3$ que sustituyéndolo en la anterior igualdad se llegaría a $2t_3^2 = t_2^2$ y como se puede observar el proceso sigue indefinidamente, encontrando la mitad de la anterior sin parar, lo cual no es posible, pues contradice la teoría de los pitagóricos sobre los números pares, quienes al dividirse una cantidad finita de veces se llega a la unidad o a un número impar. Por lo tanto, debido a que no se cumplen ninguno de los cuatro casos posibles, se concluye que no existen p y q tales que $p^2 = 2q^2$.

Estos primeros descubrimientos de las magnitudes inconmensurables, son considerados como las primeras causas de la aparición de los números irracionales, quienes toman ese nombre por ser lo contrario de los que se conocen como Racionales, que de cierta forma corresponden a las razones entre magnitudes conmensurables, aunque en ese tiempo no tuvieran el carácter de número.

2. Euclides y la teoría de razones y proporciones

Luego de los pitagóricos, en la historia de las matemáticas aparece Euclides con una de las obras más significativa para el desarrollo de la misma. En su libro *Los Elementos*, Euclides logra sistematizar las primeras bases de las matemáticas a la vez que le otorga el carácter demostrativo del que gozan actualmente.

Los Elementos de Euclides contiene trece libros en los que se encuentran primeramente cinco postulados y cinco nociones comunes, seguidos por unas definiciones especificadas en cada libro, a partir de las cuales se empieza a construir un cuerpo teórico, basado en proposiciones, sobre la medida relativa.

Se encuentra que Euclides desarrolla una teoría de razones y proporciones para magnitudes y, otra aparte, para números. Esta distinción se debe al diferente carácter de cada concepto, pues la magnitud era concebida como algo continuo que podía ser infinitamente divisible, mientras que los números eran considerados como algo discreto que solo admitía un número finito de divisiones.

2.1. Teoría para magnitudes

En los *Elementos* se establece una primera salida al problema de las magnitudes incommensurables con la teoría de razones y proporciones realizada en el libro V. En este libro Euclides establece relaciones cuantitativas entre magnitudes de la misma naturaleza. Inicia suponiendo que las magnitudes se pueden sumar, restar y comparar, y aunque no aparece de manera explícita cómo medir magnitudes, se supone que son medidas siguiendo el proceso de la antipharesis. El libro V está constituido por 18 definiciones y 25 proposiciones sobre magnitudes.

En la primera definición establece que una magnitud es parte de otra magnitud mayor, cuando la menor mide a la mayor y en la segunda definición establece que la mayor magnitud es múltiplo de la magnitud menor cuando la menor mide a la mayor.

En la tercera definición, establece una razón como determinada relación de tamaños entre dos magnitudes de la misma naturaleza, con esto, “Euclides establece una relación de cantidad, que

abarca a las magnitudes inconmensurables” (Recalde, 2011) puesto que la razón es vista como un proceso de comparación cuantitativa entre dos magnitudes, no como algo acabado.

La cuarta definición dice que dos magnitudes guardan razón entre sí, si al multiplicarse pueden exceder una a la otra, esta definición es importante porque se basa en la propiedad arquimediana, que establece que todas las magnitudes son de orden de magnitud comparable, es decir, que no existe ni la magnitud más pequeña, ni la más grande, ni tampoco la magnitud de cantidad cero.

En la quinta definición establece la igualdad entre razones, la cual consiste en que dadas cuatro magnitudes, se dice que la primera guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, si cualesquiera equimúltiplos de la primera y de la tercera exceden a la par, son iguales a la par o resultan inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y de la cuarta magnitud. De esta definición se desprende que existe un orden total en las magnitudes cumpliendo la propiedad de la tricotomía, es decir, que entre dos magnitudes se cumple solo uno de los siguientes casos:

1. $A = B$
2. $A > B$
3. $A < B$

En términos modernos la definición V.5 de los *elementos* se puede ver de la siguiente manera:

Sean A , B , C y D magnitudes homogéneas, se tiene que:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

si para n , m números, se cumple:

1. $nA = mB$ implica $nC = mD$,

2. $nA > mB$ implica $nC > mD$,
3. $nA < mB$ implica $nC < mD$.

En la sexta definición, llama proporcionales a las magnitudes que guardan la misma razón.

En la antigua Grecia solo operaban con números enteros positivos, lo cual fue un inconveniente en el momento en que aparecen las magnitudes inconmensurables. Euclides en su libro V de los elementos da una salida conceptual a la comparación de magnitudes a través de la teoría de proporciones.

2.2. Teoría de números

Recordemos que Euclides separa la teoría de las magnitudes de la teoría de números, puesto que las magnitudes son continuas y por lo tanto podían ser infinitamente divisibles, mientras que los números, por ser discretos, son divisibles un número finito de veces. Por ello en los libros VII, VIII y IX, Euclides desarrolla la teoría de números, independientemente de la teoría de magnitudes. En las dos primeras definiciones del libro VII establece que: “una unidad es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamado uno” y que “un número es una pluralidad compuesta de unidades”. De estas definiciones se observa que, para Euclides, la unidad no es considerada como número, pues no cumple con la definición de pluralidad de unidades. Además la unidad no es divisible, es tomada como un todo, como la unidad generadora, el punto de partida para construir los números. En cambio las magnitudes no cuentan con una magnitud generadora de las demás a partir de la operación suma.

Euclides define en la teoría de números, al igual que con las magnitudes, las operaciones de sumar, restar y comparar; pero además incorpora una nueva operación, la multiplicación por medio de la suma. También define las nociones de divisor y múltiplo, número primo, primos relativos y compuestos e incorpora la noción de proporción en la definición VII.21: “unos

números son proporcionales cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto” y demuestra en la proposición 20 del libro IX, que los números primos son infinitos en sentido potencial.

En el libro X de los *Elementos*, Euclides establece un acercamiento entre número y magnitud, en el que formaliza las nociones de magnitudes conmensurables e inconmensurables. La primera definición plantea que las magnitudes conmensurables son aquellas que tienen una medida común, mientras que las inconmensurables son aquellas que no tienen medida común.

3. Los irracionales en la solución de ecuaciones

El concepto de número que se utiliza en la antigüedad ha sido incorporado por Euclides en Los *Elementos*. Un número es una colección de unidades. Las cantidades racionales y algunas cantidades irracionales se van incorporando en el proceso de resolución de ecuaciones y justamente en los procesos operativos van tomando la forma de número. En este sentido, el itinerario que sigue el desarrollo del concepto de número tiene relación con la búsqueda de algoritmos para resolver ecuaciones polinómicas por medio de radicales.

3.1. Los aportes de Diofanto en la expansión de la noción de número

Entre los matemáticos que aportaron al desarrollo de esta teoría, se encuentra Diofanto, quien es considerado uno de los pioneros del desarrollo del álgebra. Diofanto establece un lenguaje que combina lo simbólico y lo retórico, en contraposición al lenguaje netamente retórico que se utilizaba en matemáticas. De esta forma, el cuadrado de la incógnita la representó con ΔY y el KY , simbolizaba el cubo de la incógnita. A esta etapa del álgebra se le denomina álgebra sincopada.

El principal objeto de estudio de Diofanto son las propiedades y relaciones numéricas. En su obra *La Aritmética*, de la cual solo se conocen los seis primeros libros de los trece que contiene

originalmente. Diofanto se dedica a resolver una serie de problemas matemáticos entre los cuales se encuentran problemas determinados e indeterminados sin que especifique a qué tipo pertenece cada uno. En la resolución de estos problemas Diofanto se conformaba con encontrar al menos una solución numérica, incluso en aquellos problemas indeterminados que admiten más de una solución. Diofanto solo aceptaba las soluciones racionales exactas y positivas, a diferencia de otros babilonios que admitían aproximaciones de relaciones que posteriormente correspondieron a números irracionales. Herón, por ejemplo, encontró un método para calcular aproximaciones de raíces cuadradas y cúbicas.

La especialidad de Diofanto era su método para resolver ecuaciones con varias incógnitas, el cual consistía en establecer la ecuación en términos de una sola incógnita, para ello buscaba una expresión para determinar las incógnitas en términos de una sola, usando adecuadamente números exactos de tal manera que satisficieran las primeras condiciones para finalmente hallar la solución que satisfaga la condición final. Los aportes de Diofanto fueron de gran importancia para la teoría de números.

En la *Arithmetica*, se puede observar que Diofanto acepta a los racionales como cantidades matemáticas y establece operaciones entre ellos; por ejemplo en la definición V dice que “todo número multiplicado por la fracción que lo tiene por denominador da la unidad”, en la siguiente definición dice que “la unidad es una cantidad constante y por lo tanto cualquier especie multiplicada con ella da la misma especie”, es decir que le otorga a la unidad la propiedad de neutro multiplicativo. Después establece algunas propiedades para la multiplicación entre fracciones y entre fracciones y números así como también establece la multiplicación de signos, que hoy se conoce como ley de signos, donde menos por menos da mas y menos por mas da

menos. Finalmente, en la definición XI establece un tratamiento para reducir términos semejantes que estén sumando o restando a uno y otro lado de una ecuación.

En los siguientes problemas se puede observar el método de resolución de Diofanto, aclarando que evita las soluciones negativas e irracionales:

Problema I, 2. Descomponer un número dado en dos partes que estén en una razón dada.

Solución original. Dados los números a y $m > 1$, encontrar x, y tales que $x + y = a$, $x = my$.

Sea $a = 60$ y la razón de 3 a 1, es decir, dada por $m = 3$. Si se pone $y = \alpha$ para la parte mas pequeña, la mayor será $x = 3\alpha$, y entonces $4\alpha = 60$, de donde resulta $\alpha = 15$ y los números son $y = 15$ y $x = 45$.

En este problema Diofanto muestra una solución para un caso particular cuando el número dado sea 60 y la razón dada sea 3 a 1. Se puede observar como expresa las variables iniciales en términos de una sola incógnita satisfaciendo la segunda condición, para finalmente resolver una ecuación de una incógnita que satisfaga la primera condición. De igual manera resuelve todos los problemas planteados en su libro. En el siguiente problema se observa la aceptación de números racionales como solución de ecuaciones:

Problema II, 9. Dado un número que es suma de dos cuadrados, descomponerlo en otros dos cuadrados. Es decir si $a = b^2 + c^2$, encontrar x, y tales que $a = x^2 + y^2$.

Solución original. Sea $a=13$, suma de los cuadrados 4 y 9, el número que queremos descomponer en otros dos cuadrados. Considerando los lados 2 y 3 de los cuadrados supuestos, supongamos que el lado de uno de los cuadrados sea $x = \alpha + 2$ y que el lado del otro sea $m\alpha - 3$ con m arbitrario; por ejemplo, $y = 2\alpha - 3$. Entonces, uno de los cuadrados es $x^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4$ y el otro $4\alpha^2 + 9 - 12\alpha$; como la suma de estos dos cuadrados es igual a 13 resulta $5\alpha^2 + 13 - 8\alpha = 13$, de donde $\alpha = \frac{8}{5}$.

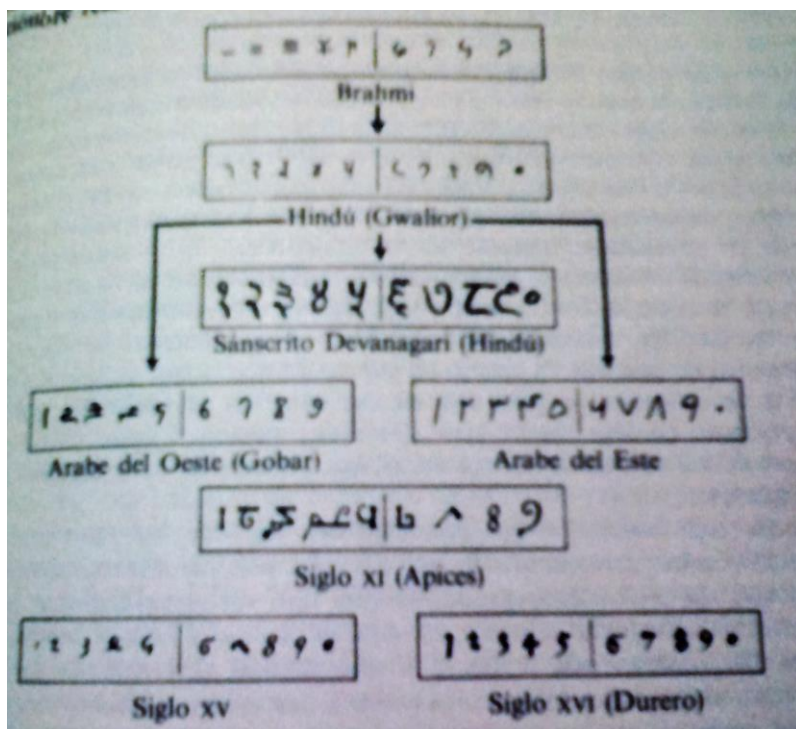
Por lo tanto el lado del primer cuadrado es $x = \alpha + 2 = \frac{18}{5}$, y el lado del segundo cuadrado es $y = 2\alpha - 3 = \frac{1}{5}$; luego los cuadrados son $x^2 = \frac{324}{25}$ e $y^2 = \frac{1}{25}$, cuya suma es $\frac{325}{25} = 13$, el numero dado.

En resumen, a Diofanto no le preocupa encontrar algoritmos de resolución de ecuaciones, sino encontrar al menos una solución numérica para dar respuesta a los problemas planteados. En él se observa una aceptación de las cantidades racionales como solución numérica, le da el carácter de neutro multiplicativo a la unidad, establece la ley de signos y solo trabaja con números naturales y con racionales positivos.

3.2. El álgebra de los Hindúes y el sistema decimal

Por otro lado, se tienen los desarrollos matemáticos de los Hindúes entre los siglos III y XIII d.C. en donde se muestra la aceptación de las raíces negativas y las raíces inexactas como cantidades numéricas. En este periodo se destaca a: Aryaghata (476), a quien se le atribuyen la formulación de una serie de secuencias para calcular raíces cuadradas y cubicas, y la utilización de un sistema decimal posicional, con nueve dígitos (1, 2,...,9) puesto que para esta época, el cero todavía no era considerado numero como tal. Aunque con el tiempo apareció el símbolo 0 (cero) para representar la nada, la ausencia de cantidad.

Figura 5.

Figura 5. Muestra la evolución histórica de los símbolos numéricos. Tomada de *historia de las matemáticas*,

Boyer, (1987)

La incorporación del sistema posicional decimal trajo a las matemáticas un ahorro significativo de lenguaje y operatividad.

Brahmagupta (598), más conocido por su aporte al álgebra, encuentra una solución general a la ecuación diofántica de primer grado $ax+by=c$ con a , b y c números naturales, acepta como solución de ecuaciones a las raíces negativas e inexactas y establece propiedades operativas para ellas. Brahmagupta, al igual que Diofanto, utilizaba un álgebra sincopada, esto es, un intermedio entre el álgebra retórica y álgebra simbólica.

3.3. Al-Khowarizmi y los algoritmos para la solución de ecuaciones.

De los árabes, Al-Khowarizmi es de los matemáticos más relevantes. Aportó al desarrollo del álgebra árabe al incorporar algoritmos de resolución de ecuaciones. El álgebra de Al-Khowarizmi era completamente retórica y se ayudaba de argumentos geométricos para validar sus procedimientos algebraicos, tal como lo dice Berge: “probablemente la nueva herramienta algebraica no tenía un estatuto como para ser aceptada como instrumento de validación. La geometría, por su parte, constituía un dominio sólido y aceptado para la validación.” (2003, p, 11). El trabajo de Al-Khowarizmi consistió primero en determinar seis formas canónicas de ecuaciones, de primer y segundo grado. Dada una ecuación determinada, se buscaba que pudiera expresarse en términos de una de las formas canónicas y luego aplicarle el algoritmo de resolución; finalmente se apoyaba en la validación geométrica, como se muestra a continuación.

Para la ecuación $x^2 + 21 = 10x$, Al-Khowarizmi construye un cuadrado ab para representar x^2 seguido por un rectángulo bg que representa 21 unidades, por lo tanto el rectángulo completo ad debe ser igual a $10x$ y como el lado ah es igual a x , el lado ag debe ser igual a 10 unidades. Luego traza la mediatriz de ag y construye el cuadrado tl de lado tg , cuya área será 25 unidades ya que tg vale 5 unidades

Figura 6.

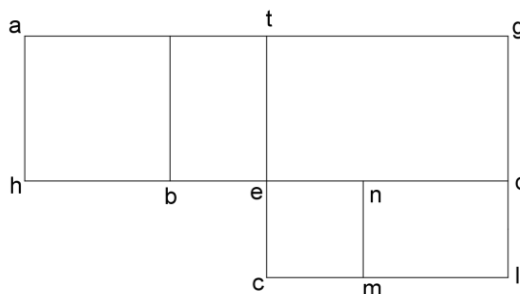


Figura 6. Muestra la construcción geométrica necesaria para demostrar la solución de $x^2 + 21 = 10x$,

creación propia, basada en *historia de las matemáticas*, Boyer, (1987)

Los rectángulos tb y md tienen el mismo área, por lo tanto el gnomon $tenmlg$ mide 21, de lo que resulta que el cuadrado em tiene área igual a 4 y su lado mide 2, como $he = 5$, se obtiene que $x = hb = 5 - 2 = 3$, demostrando que la solución es cierta.

Al-Khowarizmi entonces contribuye al desarrollo del algebra con la sistematización de algoritmos algebraicos como la trasposición y cancelación de términos y completar cuadrados como se conoce actualmente. Además resaltar que Al-Khowarizmi solo admitía soluciones positivas mayores que cero.

3.4. Los aportes de Europa en el reconocimiento de los irracionales

En Europa, algunos matemáticos como Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, quien encuentra una sucesión al resolver un problema de reproducción de una pareja de conejos, la cual se reproduce después del segundo mes y cada pareja da origen a otra nueva. La sucesión de Fibonacci es:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots a_n \text{ donde } a_1 = 1, a_2 = 1 \text{ y } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Curiosamente, los números de esta sucesión se encuentran en muchas partes de la naturaleza como en la cantidad de pétalos de una flor o la cantidad de hojas al dar un giro sobre su tallo, entre otras más; al dividir un numero de la sucesión con su antecesor, se encuentra un valor aproximado al número ϕ (phi, oro, áureo), esta sucesión cumple con la propiedad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esta cantidad se encuentra implícita en la proposición II.11 de los *Elementos* de Euclides, al dividir un segmento de tal manera que el rectángulo formado por el segmento con una de sus

partes, sea igual al cuadrado del segmento sobrante, lo que se conoce como dividir un segmento en media y extrema proporción. Fibonacci además intento establecer un método para solucionar ecuaciones cúbicas, aunque no lo consiguió, se destaca el reconocimiento de soluciones no racionales y que no corresponden a raíces cuadradas.

Un avance substancial en la incorporación de nuevas cantidades se da a partir de los trabajos de Cardano. En *Ars magna* de 1545, se divulga las soluciones a ecuaciones cúbicas y cuárticas lo que significó un avance significativo para los algebristas de la época, que, hasta ese entonces, sólo habían encontrado soluciones a ecuaciones cuadráticas. Cardano aclara que no fue el descubridor de la solución cúbica ni de la cuártica, reconoce a Niccolo Tartaglia (ca. 1500-1557) y Ludovico Ferrari (1522-1565) como los primeros descubridores de cada una respectivamente. Cardano presenta un método para solucionar distintos casos de ecuaciones cúbicas de forma general, por ejemplo para las ecuaciones de tipo $x^3 + px = q$ encontró la siguiente regla:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{3} + \frac{q^2}{2}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{3} + \frac{q^2}{2}} - \frac{q}{2}}$$

Cardano rechaza las soluciones negativas, pero las utiliza operativamente; además visualiza la existencia de raíces cuadradas de números negativos como solución de ecuación, aunque para él, esos resultados carecían de sentido, pues no eran aceptados aún como números. Por su lado Bombelli, tampoco les da el carácter de número pero introduce la notación de i para representar $\sqrt{-1}$ y así utilizarlas como cantidades operables que permiten llegar a soluciones lógicas. En esta época los irracionales empezaron a reconocerse como cantidades numéricas mediante aproximaciones a números racionales, hacía falta fundamentarlos de manera rigurosa para que obtuvieran su carácter numérico como tal.

4. Aritmetización de las magnitudes con Descartes

Hacia el siglo XVII, se da otro salto cualitativo en el desarrollo de la noción de número a través de la obra *Discours de la méthode*, escrito por René Descartes. En esta obra, Descartes introduce el método que hoy se conoce como *Geometría Analítica*. A partir de la geometría analítica cartesiana se empieza a establecer un puente de contacto entre la geometría y el álgebra. Para ello introduce la multiplicación, división y extracción de raíces en segmentos, utilizando el segmento unidad y la teoría de proporciones desarrollada por Euclides, demostrando que el resultado de dichas operaciones son segmentos. Con esto, Descartes, establece una forma diferente de ver las operaciones con segmentos, ya que anteriormente, sólo la suma y resta entre segmentos daba como resultado otro segmento, pensar en la multiplicación de dos segmentos A y B conducía a la idea del área de un rectángulo de lados A y B . Ahora con el método de Descartes se podía pensar en operar segmentos de la igual manera que con los números. Analizando la multiplicación de segmentos que consistía en lo siguiente:

Dados los segmentos AB y CD encontrar $AB \cdot CD$. Trácese el segmento AB y el segmento unidad (AC) y en línea recta a este, el segmento CD . Luego, trazar el segmento CB y una paralela a CB que pase por el punto D , prolongar en línea recta el segmento AB hasta cortar la paralela en el punto E tal como se muestra en la figura:

Figura 7.

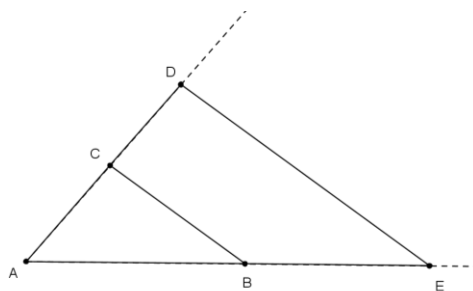


Figura 7. Muestra la construcción geométrica del teorema de Tales. Creación propia

Así queda construida geométricamente la multiplicación entre segmentos, donde el segmento BE es el resultado de multiplicar AB y CD , pues por la teoría de proporciones se tiene que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

Luego, se obtiene la igualdad $AB.CD = BE$ debido al carácter neutro de la unidad AC en la multiplicación. Similarmente, encuentra la división de segmentos, mientras que para la extracción de raíces de segmentos acude a la construcción de la media proporcional entre el segmento y la unidad.

Con esto, Descartes otorga a los segmentos las mismas propiedades operativas que tienen los números, con lo que facilita la solución de problemas geométricos, ya que pueden resolverse sin necesidad de acudir a la construcción geométrica del mismo. Además se debe resaltar que Descartes introduce una simbología muy similar a la utilizada actualmente, los signos: $+$, $-$, a^2 , son algunas de las notaciones que se observan en su legado.

Descartes establece en *La Géométrie* una manera de resolver los problemas geométricos por medio del algebra, él buscaba liberar a la geometría del uso de figuras por medio de métodos algebraicos y darle significado a las operaciones algebraicas por medio de interpretaciones geométricas.¹ Los problemas geométricos son divididos en tres grupos: planos, que corresponden a la geometría euclidiana, los cuales se solucionan por medio de rectas y circunferencias; solidos, los cuales se resuelven con las cónicas y finalmente los lineales que se resuelven con curvas compuestas. Se debe resaltar que, aunque Descartes con su método, establece un acercamiento entre magnitud y número, su único objetivo era operar con segmentos.

¹ (Boyer, 1987), p. 429.

5. Las fracciones continuas y el descubrimiento de los trascendentes.

A partir de los trabajos de Descartes, Wallis (1616-1703) culmina el proceso de la aritmetización de las secciones cónicas en el *Tractatus de sectionibus conicis* y desarrolla la *Arithmetica infinitorum* en el año 1655, en esta última, Wallis aritmetiza la geometría de los indivisibles de Cavalieri, es decir, relaciona los indivisibles con valores numéricos para operar con ellos de forma más simplificada, sin tener que recurrir a la geometría (Recalde, 2011).

A Wallis se le reconoce por su manera particular de hacer matemáticas: inducción incompleta e interpolaciones. Al convertirse el problema de la cuadratura de una curva, en un problema de hallar la razón entre el área de la figura curvilínea determinada por indivisibles y el área del polígono circunscrito en ella, Wallis empieza a buscar dicha razón para curvas de la forma $y = x^n$, llegando a la conclusión de que la razón correspondería a $\frac{1}{n+1}$, o en otras palabras $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$; la forma en que llega a esta conclusión es por inducción incompleta, lo demuestra para algunos casos, e induce que se cumplirá para el resto, incluso admite que funciona igualmente para n fraccionarios, negativos (excepto -1) y hasta algunos irracionales, lo que constituye los primeros indicios de funciones trascendentes. Este resultado ya había sido mostrado por Cavalieri, la diferencia es que Wallis lo obtuvo por series numéricas (sumas infinitas).

Uno de los resultados más famosos de Wallis, el cual obtiene al querer encontrar la cuadratura del círculo, sin éxito, consiste en el producto infinito de π :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \dots}$$

que puede verse como:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times \dots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times \dots}$$

Lo interesante de Wallis, al llegar al anterior resultado, es que se cuestiona sobre la naturaleza de este producto infinito, según Recalde, este hecho abre camino a la existencia de números irracionales diferentes a las raíces.

A diferencia de Wallis, Newton puede encontrar la cuadratura del círculo, es decir,

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ mediante su teorema binomial:

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}x^2 + \dots + x^n \text{ para } n \text{ entero positivo}$$

el cual extiende por interpolación a $(a+x)^{p/q}$ con el objetivo de llegar a la forma $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, que corresponde al problema buscado. Después de analizar los resultados obtenidos llega al siguiente desarrollo binomial:

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \dots$$

Newton generaliza sus resultados y establece que para una curva de la forma:

$y = ax^{\frac{m}{n}}$, le corresponde la cuadratura $\frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$. A partir de aquí empieza a consolidarse

históricamente la rama del cálculo, con las obras de Newton y Leibniz.

El producto infinito de Wallis $\frac{4}{\pi} = \frac{3x3x5x5x7...}{2x4x4x6x6...}$, es expresado por Brouncker en forma de

fracción continua de la siguiente manera:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \ddots}}}}$$

Para comprobar este resultado, Wallis establece las siguientes relaciones:

$$Ax B = 2^2$$

$$Bx C = 4^2$$

$$Cx D = 6^2$$

⋮

Descubriendo las siguientes fracciones continuas que satisfacen cada igualdad:

$$A = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \ddots}}}}, B = 3 + \frac{1}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \ddots}}}}, C = 5 + \frac{1}{10 + \frac{3^2}{10 + \frac{5^2}{10 + \frac{7^2}{10 + \ddots}}}}$$

Como ya se había dicho antes, estas representaciones se consideran como la primera evidencia sobre la existencia de las cantidades trascendentes.

Antes de Wallis, ya se había trabajado con fracciones continuas: inicialmente en Euclides se reconoce el método de la antipharesis como un proceso que permite llegar a una fracción continua, sin decir que Euclides hubiera trabajado con estas representaciones. A Bombelli y Cataldi (1548-1626) se les considera los primeros matemáticos que implementaron las fracciones continuas para obtener buenas aproximaciones de las raíces cuadradas, Cataldi expresa, por ejemplo, la raíz de dos en fracción continua así:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ddots}}}$$

Bombelli por su lado establece un método para hallar la fracción continua de cualquier raíz cuadrada, tal como se detalla a continuación:

$$\sqrt{n} = a + (\sqrt{n} - a) \cdot \frac{(\sqrt{n} + a)}{(\sqrt{n} + a)} = a + \frac{r}{(\sqrt{n} + a)} \quad \text{donde } r = n - a^2$$

$$\sqrt{n} = a + \frac{r}{(a + \sqrt{n})}$$

$$\sqrt{n} = a + \frac{r}{\left(a + \left(a + \frac{r}{(a + \sqrt{n})}\right)\right)} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{(a + \sqrt{n})}}$$

$$\sqrt{n} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \ddots}}}$$

Pero, el más significativo, en el desarrollo de la teoría de fracciones continuas, es el matemático Euler, considerado como el iniciador del análisis como rama de las matemáticas. Desarrolla una teoría sistematizada de fracciones continuas, primero las clasifica entre finitas e infinitas:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

Luego, demuestra que los números racionales corresponden a fracciones continuas finitas y los irracionales corresponden a fracciones continuas infinitas, además concluye que las fracciones continuas infinitas periódicas, corresponden a las raíces cuadradas de números que no son cuadrados perfectos, y el resto corresponderían a los trascendentes. Euler determina que todo irracional se puede representar como el límite de una sucesión de racionales $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ donde cada $\frac{p_n}{q_n}$ corresponde a los convergentes de la fracción continua, con ello establece una relación entre sucesiones y fracciones continuas.

6. La formalización de los irracionales como números

Hasta 1850 se observa un manejo libre de los números reales, pues se aceptaban los irracionales como cantidades numéricas con las que se podía operar. El matemático Hankel, en su libro *Theorie der komplexen Zahlensysteme*, señala que “la condición para construir una aritmética universal es por lo tanto la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles” (Boyer, 1987, p 693) en otras palabras, Hankel invita a

desarrollar un cuerpo numérico que se desprenda netamente de los números racionales, quienes ya han sido contruidos formalmente a partir de los números naturales para darle una caracterización de la misma naturaleza a los irracionales, que a lo largo de la historia, se han utilizado libremente a medida que han surgido como relaciones de la geometría o como soluciones de ecuaciones en el álgebra. Por esta razón, en el siglo XIX se llega a la construcción de los números reales gracias a las contribuciones de Cantor y Dedekind. Cantor desarrolla una teoría de números por medio de la noción de sucesión fundamental:

Definición: la sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$ de números racionales, se llama sucesión fundamental si para todo $\varepsilon \in \mathbf{Q}$, $\varepsilon > 0$, existe un numero natural N tal que:

$$|a_{m+1} - a_n| < \varepsilon, \text{ para todo } m, \text{ y para todo } n > N.$$

Para Cantor toda sucesión fundamental esta denotada convencionalmente por un límite b , sin que b sea el valor del límite de la sucesión. Luego pasa a definir la igualdad entre sucesiones, lo que le permite comparar sucesiones entre sí, establecer una relación de orden y definir operaciones aritméticas, es decir dotar su conjunto de una estructura de cuerpo ordenada. Cantor pone a corresponder cada número con un punto sobre la recta L lo cual no tenía dificultad en el caso de los racionales, pero en el caso de los irracionales, Cantor utilizaba la aproximación por una sucesión de puntos racionales. Pudo demostrar que a cada punto de la recta le correspondía un número y tuvo que enunciar un axioma por no poder demostrar lo inverso, es decir que para cada número correspondía un punto sobre la recta.

Cantor fue considerado el creador de los números transfinitos al demostrar que existen diferentes potencias de infinitos, primero demostró la correspondencia biunívoca entre el todo y la parte, estableciendo que tienen el mismo cardinal como por ejemplo el conjunto de los números pares con el conjunto de los números naturales, son conjuntos numerables, tienen el

mismo cardinal que corresponde al primer transfinito establecido por Cantor, $\aleph_0$, que identifica un infinito numerable, luego demuestra que el conjunto de los números reales no es numerable y por lo tanto tendría un infinito más grande que $\aleph_0$; también encuentra que el conjunto de $\mathbf{Q}$ y el de los números algebraicos son numerables y que por lo tanto los números trascendentes son los que le dan el carácter de densidad a los reales y con ello un cardinal mayor.

Dedekind por su lado al ver que los números racionales no llenaban la recta, en otras palabras que al existir un racional entre dos racionales, implica que no se puede establecer el próximo racional que le continua a uno cualquiera, lo cual sugiere que siempre existe un espacio entre dos racionales y por lo tanto estos espacios son los que corresponden a los números irracionales o de una manera más burda los irracionales rellenan la recta. Por ello, para establecer una teoría que argumente la continuidad aritmética así como la continuidad geométrica, Dedekind utiliza la noción de cortaduras para establecer una relación entre el continuo aritmético y el continuo geométrico:

Definición: una cortadura de $\mathbf{Q}$ es un par (A_1, A_2) de subconjuntos de $\mathbf{Q}$ donde $A_1 \cup A_2 = \mathbf{Q}$ y para todo $a_1 \in A_1$ y para todo $a_2 \in A_2$ se cumple $a_1 < a_2$.

Dedekind advierte que toda cortadura es producida por un número, y demostró que existen cortaduras que no son producidas por racionales y por lo tanto el número correspondiente sería un irracional.

Capítulo 2

Obstáculos epistemológicos de los números irracionales

En este capítulo se exponen algunos obstáculos epistemológicos que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de los números irracionales. Los obstáculos son aquellos conocimientos ya adquiridos que ponen resistencia a nuevos conocimientos, tal como lo plantean Bachelard y Brousseau, según Martin Socas:

Se denomina obstáculo aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas. (2010, p.30).

En los últimos años se han desarrollado varias investigaciones sobre obstáculos epistemológicos, aunque principalmente se reconoce a Bachelard como el primero en dar una definición sobre obstáculos epistemológicos en el contexto de las ciencias en general, en su obra *la formación del espíritu científico*. Allí, Bachelard define como obstáculo epistemológico a las causas que producen estancamiento, confusiones y hasta retroceso en el proceso de construir conocimiento; indica que para estudiarlos se debe recurrir a la evolución histórica del concepto y agrupa los obstáculos según su proveniencia:

- La experiencia básica, que hace referencia a las creencias o conocimientos que se obtienen a través de la observación, donde la experiencia intuitiva es la herramienta de validación

- El conocimiento general que corresponde a las generalizaciones que se efectúan a partir de la experiencia básica, lo cual puede ocultar la particularidad de la situación
- Obstáculo verbal, asociado con las ideas arraigadas explicadas por imágenes y palabras.

Bachelard desarrolla la noción de obstáculo epistemológico desde una perspectiva científica, mientras que Brousseau, desde una perspectiva local, define los obstáculos epistemológicos en el campo de las matemáticas y aunque Brousseau opina que es una noción que está en pleno proceso de construcción, plantea que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se debe hablar de obstáculos que surgen en la construcción del conocimiento matemático, los cuales clasifica según su origen en:

- Origen ontogenético que está relacionado con las características del desarrollo del sujeto
- Origen didáctico que está relacionado con las situaciones de enseñanza que se emplean en el proceso de enseñanza de las matemáticas
- Origen epistemológico que está relacionado con el concepto matemático en sí, con su complejidad

Sobre los obstáculos de origen epistemológicos, Brousseau dice: “que son aquellos a los cuales uno no puede ni debe escaparse, del hecho mismo de su rol constitutivo del conocimiento a que se apunta. Uno puede encontrarlos en la historia del concepto mismo” (1983, p.073), y aunque se refiere a la existencia de dichos obstáculos en la evolución histórica del concepto, aclara que no es necesario reproducir de nuevo la historia como tal para lograr alcanzar el conocimiento, pero si hay que tenerla presente en el proceso formativo.

En este trabajo se pueden observar los obstáculos epistemológicos que se presentaron en el desarrollo histórico del concepto de número real en general y del número irracional, en particular. Por ejemplo, en la época de los pitagóricos se establecieron teorías entorno a los números naturales, porque eran los únicos números necesarios para llevar a cabo las actividades de medir, contar y ordenar. Para los problemas planteados en este momento histórico era suficiente con esta conceptualización, pero cuando aparecen nuevos problemas, por fuera del contexto, aparecen los obstáculos, la resistencia a aceptar nuevas concepciones de lo que ya tenían establecido como teorías, las cuales hasta ese momento habían funcionado muy bien. Este es el caso de la aparición de las magnitudes inconmensurables que causó una profunda crisis en la escuela pitagórica.

Según Brousseau los obstáculos se manifiestan a través de los errores, pero no cualquier error. Brousseau se refiere a aquellos errores que son persistentes y reproducibles. En la escuela, a modo de ejemplo, se puede evidenciar un típico error como manifestación del obstáculo que conlleva pasar del sistema numérico de los naturales al de los enteros, debido a que por mucho tiempo, durante los primeros seis años escolares de los niños, se les enseña a reconocer, representar, operar y ordenar números naturales. Y durante ese tiempo la regla para la operación resta: “al número mayor siempre se le quita el menor” o, de otra forma, “al número (cantidad) menor no se le puede quitar un número (cantidad) mayor”, funciona bastante bien, pero cuando los estudiantes pasan a la secundaria y empiezan a trabajar con los enteros negativos, se presenta un obstáculo frente al nuevo conocimiento, pues contradice la regla anterior, presentando errores que persisten en el aprendizaje de los estudiantes tales como: $5 - 8 = 3$ o $-8 + 5 = -13$. Estos obstáculos son producto de un conocimiento adquirido válido en el campo de los números naturales, pero al salirse del contexto producen respuestas incorrectas, y mientras más tiempo

haya sido utilizado ese conocimiento más resistente es a los cambios o adquisición de nuevos conocimientos que se necesiten para la construcción del conocimiento matemático, de acuerdo a lo que expresa Martin Socas:

Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento... Tiene un dominio de eficacia... Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas. Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez (2010, p.30).

A continuación se presentan algunos obstáculos subyacentes en el concepto mismo de número irracional que pueden identificarse en su evolución histórica, capítulo anterior. Para el propósito de este trabajo, se tienen en cuenta aquellos obstáculos presentes en la enseñanza de los números irracionales en la secundaria, esto debido a que el objetivo final es la construcción de una propuesta para la enseñanza de ellos en grado once, siguiendo los lineamientos de la malla curricular establecida por el MEN. Bajo este parámetro los obstáculos se clasifican desde dos perspectivas: unos relacionados con la representación y los otros con la operatividad.

1. Obstáculos relacionados con la representación

Uno de los aspectos importantes de la teoría de la representación corresponde al sistema simbólico a través del cual nos referimos a los objetos de la teoría. De esta manera, existe una relación entre la representación y el objeto representado, aunque se debe diferenciar el concepto de su representación, pues cuando nos referimos a un objeto, la idea mental que se tenga de él, una figura, una palabra entre otras, solo hacen referencia a la representación de dicho objeto, no

constituyen el objeto como tal. Es lo que ocurre entre la imagen mental que se tenga de un árbol y el árbol mismo. Si bien la representación mental corresponde al objeto árbol no es el árbol.

Toda teoría de conocimiento está mediada por los sistemas de representación de los objetos. En este sentido para entender el desarrollo del concepto de número, es indispensable analizar la evolución de las diversas formas de representación, pues en algunas ocasiones, estos cambios de representación producen obstáculos epistemológicos. En matemáticas, particularmente para los números, se destacan los sistemas de representación simbólico y de representación gráfica. Las representaciones simbólicas son aquellas de carácter alfanumérico y discretas que responden a reglas procedimentales, mientras que las representaciones de tipo gráfico son continuas y responden a reglas de composición. Ambos sistemas se complementan, como lo dice Rico y Romero: pues “las representaciones simbólicas destacan los aspectos operativos y discretos de los reales” mientras que “las representaciones gráficas ayudan a intuir las propiedades de continuidad y medida” (1999, p. 124). Los sistemas de representación simbólicos se clasifican en: notación decimal, considerada por Rico y Romero como el sistema integrador de todos los sistemas simbólicos, “puesto que toda notación decimal (finita, periódica y no periódica) representa un número real y, recíprocamente cada número real puede ser expresado como notación decimal” (1999, p. 124). Y en notación operatoria habitual, como por ejemplo, las fracciones, raíces cuadradas, logaritmos, entre otras. Las representaciones gráficas hacen alusión al modelo de la recta geométrica, donde cada punto sobre la recta corresponde a un número real y viceversa a cada número real le corresponde un punto sobre la recta.

En la matemática, diferenciar la representación externa (simbólica o gráfica) del concepto matemático es más complejo por la naturaleza abstracta de las matemáticas, y es allí donde se presenta un obstáculo epistemológico: se confunde el objeto con su representación.

Retomando la época de los griegos, específicamente en Euclides, se tiene la definición de número como pluralidades de unidades, es decir que, a partir de una unidad establecida, se construyen los demás números, bajo el procedimiento de añadir unidades. Euclides lo demuestra mediante el uso de la representación lineal, de la siguiente manera:

Figura 8.

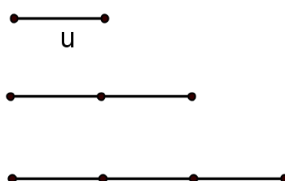


Figura 8. Muestra la manera como se iban construyendo los números a partir de la unidad. Creación propia.

Esta manera de representar los números en la antigüedad, impedía la aceptación de números que no fueran enteros positivos, entre otras, el carácter indivisible de la unidad y el no ser considerada como número por mucho tiempo, fue el obstáculo para la aceptación de los racionales como números, aunque en la época de Euclides se visualizan tratamientos con razones de números enteros positivos, estos no constituían cantidades numéricas, solo se utilizaban en forma de comparación para las medidas.

A medida que los sistemas de representación evolucionan, los obstáculos se van superando. El obstáculo descrito anteriormente, evoluciona con el desarrollo de la teoría de ecuaciones, el considerar la unidad como un todo, indivisible, no permitía que las fracciones se consideraran como números, pero en el proceso de resolución de ecuaciones se van incorporando los racionales y algunos irracionales como cantidades numéricas. Se presenta un cambio en la

representación de número con la aparición de las soluciones por radicales y fracciones. Esto se logra en un principio con Diofanto, el primero en utilizar un lenguaje combinado entre lo simbólico y lo retorico, etapa del desarrollo del algebra denominada algebra sincopada. Diofanto estudia las propiedades y relaciones numéricas, su objetivo fue hallar, al menos una, solución numérica a los 150 problemas planteados en su obra la *Arithmetica*. La incorporación de los racionales como cantidades numéricas, se da gracias a las operaciones para fracciones establecidas por Diofanto con el objetivo de que fueran aceptadas como solución de ecuaciones, por ejemplo:

$$3x + 2 = 7$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Este tipo de solución numérica fue aceptada por Diofanto, como se expuso en el anterior capítulo.

Diofanto se aparta de la concepción que Euclides tenía de número, es decir deja a un lado la representación lineal. Esta nueva forma de representar un número fue posible al establecer propiedades y operaciones, como el carácter de neutro multiplicativo a la unidad, la suma y la multiplicación, entre fracciones y entre fracciones y números. Esto significó un avance en el desarrollo del concepto de número, aunque sigue siendo un obstáculo para los irracionales debido a que, como se sabe actualmente, no se pueden representar de la forma p/q .

Otro gran salto hacia la consolidación de los irracionales como números, surge en la época de Cardano y Tartaglia con sus desarrollos en la teoría de ecuaciones. Aunque tiempo atrás, en los hindúes y árabes, se observa un tratamiento libre de las cantidades irracionales como en la ecuación: $x^2 - 2 = 0$ cuya solución corresponde a $\sqrt{2}$, a Cardano y Tartaglia se le reconoce el

descubrimiento de un algoritmo para hallar la solución general para las ecuaciones cuadráticas y cubica y con ello la aceptación de radicales.

Por ejemplo, para ecuaciones de la forma $x^3 + px = q$ Cardano encuentra la siguiente regla:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{3} + \frac{q^2}{2}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{3} + \frac{q^2}{2}} - \frac{q}{2}}$$

Este descubrimiento llevó a la aceptación de las raíces cuadradas y raíces cúbicas como cantidades numéricas; incluso Bombelli le da utilidad a las raíces cuadradas de números negativos, sin que fueran aceptadas como números, solo eran cantidades operables que permitían llegar a resultados verdaderos como es el caso de la ecuación $x^3 = 15x + 4$ que al resolverla por el método de Cardano, correspondiente al caso 2 y al hacer $u + v = 4$ y $uv = \left(\frac{15}{3}\right)^3$ se tiene que:

$$u = 2 + \sqrt{-121}$$

$$v = -2 + \sqrt{-121}$$

$$x = u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$(2 + \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}} - (-2 + \sqrt{-121})^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$(2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4$$

Mostrando efectivamente que las raíces negativas como cantidades operables arrojaban resultados coherentes. La representación de cantidades numéricas a través de radicales, los

racionales y los enteros, van emergiendo como solución de ecuaciones, y adquieren sentido desde un aspecto operativo.

La representación numérica decimal, considerada un aporte esencial de los hindúes en el siglo VI, inicialmente con nueve dígitos y, dos siglos después, con la incorporación del cero, constituye un avance importante para la representación de los números.

El sistema de notación decimal es posicional, es decir, cada posición representa una potencia de diez. Cada dígito ubicado en determinada posición, equivale a la multiplicación del dígito por la potencia de diez correspondiente, el número 387 equivale a $3 \times 100 + 8 \times 10 + 7$ como ejemplo; esta nueva forma de representar los números permitía economía en la escritura y en los procesos aritméticos, ya que a diferencia de otros sistemas, como el sistema numérico de los romanos, para representar el mismo número lo hacían así: CCCLXXXVII. A medida que los números fueran más grandes, su escritura se hacía más tediosa por el carácter aditivo de la escritura antigua. Por otro lado, la economía en los procesos aritméticos se apreciaba en los algoritmos para la suma, resta, multiplicación y división que hoy en día se utilizan sin ningún problema en la escuela, de forma posicional.

Este sistema de igual manera sirve para representar las fracciones decimales. Para llegar a la expresión decimal de una fracción, se efectúa el algoritmo de la división. Las notaciones decimales posibles para una fracción son: notación decimal finita o notación decimal infinita periódica. En el caso de los números decimales, las posiciones decimales corresponden a potencias negativas de diez.

El sistema de notación decimal, resulta apropiado al caracterizar un número irracional como aquellos números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas, pues abre el panorama respecto a la cantidad y variedad de irracionales que existen, cuestión que no sucedía con los

radicales, pues solo se concebían como irracionales las raíces inexactas, mientras que con esta nueva caracterización, se pueden formar muchos otros irracionales con infinitas cifras decimales no periódicas como el caso del número $4,1010010001\dots$ cuya construcción evidencia la no periodicidad de los decimales.

Sin embargo, a diferencia de las fracciones decimales, en este sistema de notación decimal no se puede establecer un algoritmo para la suma y la multiplicación de irracionales y por lo tanto no hay posibilidad de una caracterización completa de los números irracionales. Mediante la aproximación decimal se representaron los irracionales, y se operaba con dichas aproximaciones de igual manera que con los racionales, por ejemplo para sumar $\sqrt{2}$ con $\sqrt{3}$, se hace uso de su representación aproximada en notación decimal para visualizar un resultado aproximado.

Otra forma de representar los números se dio a través de las fracciones continuas, las cuales corresponden a la forma:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

Por ejemplo para representar el racional $\frac{436}{24}$ en fracción continua, se hace el siguiente proceso:

$$\begin{aligned} \frac{437}{24} &= 18 + \frac{5}{24} \\ &= 18 + \frac{1}{\frac{24}{5}} \\ &= 18 + \frac{1}{20 + \frac{4}{5}} \end{aligned}$$

$$= 18 + \frac{1}{20 + \frac{1}{\frac{5}{4}}}$$

$$\frac{437}{24} = 18 + \frac{1}{20 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

Para representar un radical el proceso que se sigue es el siguiente:

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= 2 + \sqrt{5} - 2 \\ &= 2 + \frac{(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} + 2)} \\ \sqrt{5} &= 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}} \\ \sqrt{5} &= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \ddots}}}\end{aligned}$$

Euler establece que las fracciones continuas finitas corresponden a los racionales, y que las fracciones continuas infinitas corresponden a los irracionales. Euler además descubre que existen fracciones continuas infinitas periódicas y no periódicas, e identifica que las periódicas corresponden los radicales, es decir a las raíces n -ésimas inexactas que surgen como solución de polinomios de grado n . Este descubrimiento conlleva a la existencia de otros irracionales diferentes a los que se habían trabajado hasta el momento, los números trascendentes.

Entre los números trascendentes más famosos se tienen: π y e .

Pese a que los irracionales se utilizan libremente como cantidades numéricas, aún no se han caracterizado completamente, por ello se hace necesaria la construcción de una teoría que

caracterice por completo los números irracionales. Cantor y Dedekind lo consiguen a la par, desarrollando una teoría conjuntista, Cantor desde su visión de los números reales como límites de sucesiones y Dedekind quien los establece a partir de cortaduras. El aporte más significativo de esta teoría es la operación de paso al límite, que permite caracterizarlos completamente.

2. Obstáculos relacionados con la operatividad

Una de las actividades a la que se le dedica más tiempo en la enseñanza de las matemáticas es la operatividad. Desde los primeros grados escolares se empiezan a enseñar los números y las operaciones básicas que con ellos se pueden realizar. En la educación matemática se han hecho aportes significativos para la enseñanza y aprendizaje de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división, sin embargo, en el transcurso de su aprendizaje los estudiantes enfrentan algunos obstáculos difíciles de evadir, a pesar de los diversos esfuerzos que la didáctica hace por superarlos, como por ejemplo el problema que se presenta con la aceptación de los negativos y la suma de enteros.

El sistema educativo ha establecido mediante estándares y lineamientos curriculares, que la enseñanza de las matemáticas se debe realizar de manera fragmentada: durante los primeros años se enseñan los números naturales y sus operaciones, luego, introducen los números fraccionarios como “parte-todo” y las operaciones de suma y resta. A comienzos de la secundaria se introducen los números enteros con las operaciones básicas, se introducen las operaciones de potenciación y radicación, y se amplía el campo de los fraccionarios y sus operaciones desde la perspectiva como cociente de dos números. Para grado octavo se introducen a los estudiantes en la resolución de ecuaciones, es decir, en álgebra. En este grado se hace un reconocimiento a los números irracionales, se les caracteriza como aquellos que en notación decimal tienen infinitas

cifras decimales no periódicas y como ejemplo de ellos se exponen las raíces inexactas. Después de este reconocimiento numérico se considera la existencia de los números reales, considerados como la unión de los racionales con los irracionales, encerrando así a “todos los números”. Para representar los números reales se utiliza la recta geométrica compuesta de infinitos puntos, de tal manera que se puedan relacionar números con puntos y viceversa. Finalmente se trabaja parte de la geometría analítica, la trigonometría y la introducción al cálculo mediante el uso libre de los reales.

La importancia que se otorga a los números irracionales en la escuela es mínima, en la mayoría de los casos son considerados como números de relleno para completar la recta geométrica. Parte de esto se debe tal vez a la complejidad de operar entre irracionales, debido a que, para la escuela, la potencia de un sistema numérico está en su operatividad. Esto no significa que no se pueda operar con irracionales, solo que para hacerlo se necesita de un razonamiento matemático avanzado, se necesita superar el obstáculo del infinito potencial al que se ha acostumbrado la mente humana, para poder aceptar el infinito actual.

Analizando el desarrollo histórico de los números, se observa a la par la evolución de las operaciones, pues a medida que se incorporan nuevas cantidades numéricas, las operaciones se modifican para que estas puedan ser utilizadas y aceptadas como números.

Las primeras operaciones estudiadas se rigen bajo las reglas de los números naturales, pues son los primeros que aparecen en la historia y en la escuela. Las operaciones entre naturales consisten en:

- Suma: se refiere a la operación de añadir cantidades numéricas
- Resta: hace referencia a la operación quitar a una cantidad mayor una menor
- Multiplicación: es la operación de sumar repetidas veces un mismo número

- División: es la operación de repartir en partes iguales una cantidad

Estas operaciones se trabajan en la primaria sin mayor inconveniente. La suma inicialmente se basa en el principio básico de contar la cantidad total de unidades que se tienen al unir dos o más cantidades, y a medida que los números se hacen más grandes se introduce el algoritmo de la suma posicional. Para la resta se utiliza la noción de quitar; estrictamente hablando, se trata de quitar a una cantidad mayor una cantidad menor: dados $x, y \in N$ y si $x < y$, entonces $y - x = z$ si y solo si $y = z + x$ donde $z \in N$.

Por ejemplo:

$$8 - 3 = 5 \quad \text{porque} \quad 8 = 5 + 3.$$

La multiplicación primero se concibe como la suma repetida de un mismo número pero luego toma el carácter de tabla numérica a memorizar, para después aprender el algoritmo de la multiplicación.

La división en la escuela se refiere a la actividad de repartir en partes iguales, para la cual, inicialmente, se aplica la restricción de los números naturales: la cantidad mayor se reparte entre las unidades que componen la cantidad menor, por ejemplo repartir 8 dulces para 4 niños:

$$8 \div 4 = 2$$

En la antigüedad la división hace alusión a la cantidad de veces que cabe la cantidad menor en la mayor.

Cuando se introducen los enteros ocurre una transformación en las operaciones lo cual se ha convertido en obstáculo para los estudiantes, pues al aceptación de las cantidades negativas tomó mucho tiempo, incluso se aceptaron primero las cantidades irracionales. En los enteros, la suma y la resta sufren cambios sustanciales, con la incorporación de las cantidades negativas, carece de sentido hablar de agregar o quitar cantidades porque el estudiante no tiene una representación

mental de una cantidad negativa. Para dar sentido a las operaciones con enteros, se introduce la conocida regla de signos; sin embargo, el problema persiste cuando el estudiante se enfrenta a situaciones en la que debe restar de un número menor uno mayor, algo completamente contrario a la regla que aplicaba en los naturales, como por ejemplo: $3 - 8 = -5$.

Estudiar la manera de superar este obstáculo, ha sido el objetivo de muchos didactas; uno de los intentos para ello consiste en establecer la regla “el resultado conserva el signo del mayor” o la utilización de la recta numérica, en donde la suma y la resta adquieren el sentido de movimientos laterales, si se suma el movimiento en la recta es hacia la derecha y si se resta será hacia la izquierda. La multiplicación y la división no presentan muchos inconvenientes, pues el algoritmo sigue siendo el mismo, solo es cuestión de añadir la multiplicación de signos, que no afecta lo demás.

Después se amplía el campo numérico a los racionales, con ellos una evolución del concepto de número, pues la unidad adquiere la característica de divisibilidad. La división de una cantidad menor entre una mayor adquiere sentido con la introducción de los decimales. Las operaciones entre racionales se ven obligadas a evolucionar, los algoritmos que se utilicen dependen del tipo de representación que se use. Los racionales se representan en notación decimal o en fraccionario, la suma y resta de racionales en notación decimal se basa en la organización posicional, la multiplicación no sufre gran cambio, se realiza el mismo procedimiento y al resultado final se le asigna la cantidad de decimales que contenga la multiplicación. La división de decimales consiste en eliminar las cifras decimales del divisor y el dividendo para trabajar con números enteros, el proceso sigue el mismo algoritmo con la excepción de que finaliza hasta que el residuo sea cero o se repita periódicamente.

Desde la representación en notación decimal de los racionales, la operatividad no presenta muchos obstáculos, pues se basan en el sistema posicional y los algoritmos que se utilizan con los naturales. Sin embargo, cuando aparecen los números decimales periódicos, esta representación se queda corta, pues no permite operar entre ellos. ¿Cómo sumar, restar, multiplicar o dividir números con infinitas cifras decimales?

La salida a este problema fue la representación del número racional como una fracción entre dos números enteros. Esta idea de fracción tiene variados significados; puede entenderse como el cociente de dos números; la razón entre dos cantidades; puede entenderse como un operador o la parte de un todo. Pero a diferencia de la notación decimal, las operaciones con fracciones se realizan a través de algoritmos sencillos que, aunque en principio exigen de la propiedad homogénea, es decir igualdad en los denominadores, se pueden generalizar a fracciones heterogéneas. Sin embargo, al tratar de explicar, en el mismo sentido de los naturales, las operaciones aritméticas, no tropezamos con un obstáculo: ¿De qué manera se puede establecer la multiplicación entre fracciones, como una suma repetida? A los estudiantes se les enseña que:

$$4 \times 3 \text{ equivale a } 4 + 4 + 4 \text{ o } 3 + 3 + 3 + 3$$

Pero, la operación entre fracciones exige un planteamiento diferente, aunque es posible seguir el sentido anterior cuando se multiplica un entero con una fracción, por ejemplo:

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12}{5} = \frac{3 \times 4}{5}$$

No ocurre lo mismo si se quiere multiplicar $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$, pensar en sumar tres quintos de veces la cantidad tres cuartos no tiene sentido, la solución está en ver la operación de la siguiente manera:

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{5}\right) \times 3 \times \frac{3}{4} \\
 &= \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{9}{4}\right);
 \end{aligned}$$

aquí $\frac{1}{5}$ toma el carácter de operador, es decir, dividir la cantidad en cinco.

$$= \frac{9}{5 \times 4} = \frac{9}{20} = \frac{3 \times 3}{5 \times 4}.$$

Con esto se llega al clásico algoritmo que se presenta en la escuela: “la multiplicación entre fraccionarios es derecha, es decir, numerador por numerador y denominador por denominador”, ahorrándole al alumno el proceso, y aunque el algoritmo es sencillo y fácil de asimilar se pierde el sentido numérico de la operación. Una manera conveniente de introducir la multiplicación de fraccionarios es recurriendo a la representación geométrica, por ejemplo en los enteros la multiplicación se puede ver como:

Figura 9.

$$3 \times 4 = 12$$

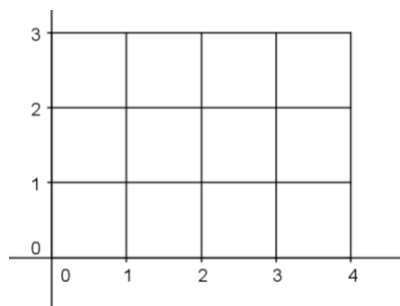


Figura 9. Muestra la representación de la multiplicación entre naturales a través del concepto de área, creación propia.

De igual manera la multiplicación entre fracciones también se puede ver así:

Figura 10.

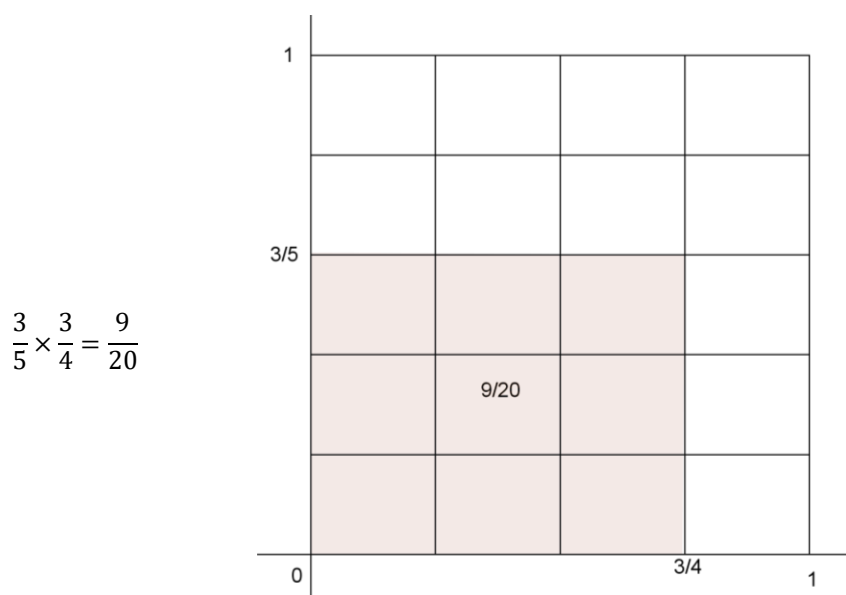


Figura 10. Muestra la representación de la multiplicación entre fracciones a través del concepto de área, creación propia.

Cuando se pasa a la división de fracciones, la idea de repartir una cantidad en partes iguales también crea un obstáculo en los estudiantes, por ejemplo $3 \div \frac{1}{2}$, repartir tres cosas entre media cosa no tiene mucho sentido, por ello evoluciona el concepto de división. En los naturales la división se hace desde una cantidad mayor a una menor, como:

$$32 \div 8 = 4 \quad \text{porque} \quad 4 \times 8 = 32$$

$$6 \div 2 = 3 \quad \text{porque} \quad 3 \times 2 = 6.$$

Esta operación corresponde: a la partición de una cantidad en partes iguales o a la cantidad de veces que cabe la cantidad menor en la mayor; pero si se tiene lo contrario $2 \div 6$ se hace necesario fraccionar la unidad, por lo tanto :

$$2 \div 6 = \frac{1}{3} \quad \text{pues} \quad \frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3} = 2.$$

Al operar con fracciones, se debe interpretar la división como la operación opuesta a la multiplicación, de la siguiente manera:

$$3 \div \frac{1}{2} = x \quad \text{entonces} \quad 3 = x \times \frac{1}{2}$$

$$x = 6 \quad \text{porque} \quad 3 = 6 \times \frac{1}{2},$$

que geométricamente se puede interpretar como $\frac{1}{2}$ cabe 6 veces en 3, o como dividir cada unidad en 2:

Figura 11.

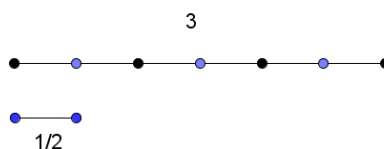


Figura 11. Muestra la representación de la división entre un entero y una fracción por medio de la comparación de segmentos, creación propia.

Al querer operar $\frac{1}{2} \div 3$, se puede pensar en dividir en tres partes iguales el $\frac{1}{2}$, cada parte equivale a $\frac{1}{6}$ en referencia a la unidad, pensar en cuantas veces cabe el 3 en $\frac{1}{2}$ no tiene sentido. Una salida a este obstáculo está en la teoría de razones y proporciones, en la cual dos magnitudes se comparan entre sí encontrando la razón de medida, donde $a \div b = \frac{a}{b}$; por ejemplo:

$$3 \div \frac{1}{2} = \frac{3}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{1}$$

Esto equivale a decir que 3 es a 6 como $\frac{1}{2}$ es a 1; es decir, que la medida en común, cabe una vez en $\frac{1}{2}$, y en 3 cabe seis veces. De esta manera se puede abordar la división de una cantidad menor entre una mayor:

$$\frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}.$$

La interpretación es igual que la anterior.

Para dividir dos fracciones, la clave esta en hallar una medida común entre ambas, lo cual se encuentra con equivalencia de fracciones, la solución consiste en medir, con la unidad de medida establecida, las dos fracciones, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{4} \div \frac{3}{4} \quad \text{pues la medida común es } \frac{1}{4}$$

$$\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

lo anterior se interpreta como $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en $\frac{2}{4}$ y en $\frac{3}{4}$ cabe tres veces.

Sin embargo, en la escuela no se hace referencia a la división como una igualdad de razones. La multiplicación y la división se presentan al estudiante como simples algoritmos multiplicativos de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad y \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Estos algoritmos crean confusión, pues el estudiante tiende a confundir cuando se debe multiplicar derecho y cuando, en cruz; también le causa ruido al estudiante que la división consista en multiplicar. A pesar de todo, las operaciones con racionales alcanzan un nivel de entendimiento aceptable en la escuela.

El problema de la operatividad se torna más agudo con la aparición de los números irracionales; a la anterior pregunta se le dio solución con las fracciones que representan los decimales finitos y periódicos, pero no ocurre lo mismo con los irracionales, pues justamente esa es la característica que los diferencia de los racionales: *no se pueden expresar en forma de fracción*. La incertidumbre continua ¿Cómo operar números con infinitas cifras decimales?

Los primeros irracionales que aparecen son las raíces inexactas, producto de la solución de ecuaciones del tipo $x^2 - a = 0$, cuya solución corresponde a $\sqrt{a}$. Estas raíces se establecieron bajo la característica de operación inversa de las potencias, es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{donde} \quad b^n = a$$

En la escuela, inicialmente se introduce la operación de la radicación de números cuadrados perfectos, es decir, raíces cuadradas exactas, como por ejemplo:

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{porque} \quad 4^2 = 16$$

$$\sqrt{49} = 7 \quad \text{porque} \quad 7^2 = 49$$

$$\sqrt{100} = 10 \quad \text{porque} \quad 10^2 = 100$$

Luego amplían el concepto a raíces n -ésimas siguiendo el mismo procedimiento. Pero cuando el valor no es exacto, como en $\sqrt{11}$, no es posible solucionarlo por el método anterior, así que el estudiante recurre a las aproximaciones de dicho valor por ensayo y error o utilizando la calculadora. En la escuela no se da mucha importancia a los números irracionales, por ello se tiende a trabajar con aproximaciones y a confundir el número irracional con alguna de ellas. De esta manera abordan la operatividad con irracionales: con la burda utilización de aproximaciones para sumar, restar, multiplicar y dividir de manera similar a los racionales.

La radicación es equivalente a las potencias de exponentes racionales y por lo tanto goza de las mismas propiedades que permite realizar las operaciones de multiplicación y división entre radicales, como por ejemplo:

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

$$\sqrt[n]{a} / \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} / a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}$$

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} / b^{\frac{1}{n}} = (a/b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a/b}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Sin embargo no es suficiente para caracterizar operativamente el conjunto de los irracionales, pues no todos los irracionales se pueden representar por medio de radicales. Una manera de abordar las operaciones con irracionales en la escuela corresponde al uso de la representación geométrica de los irracionales, aunque los únicos irracionales que se pueden representar geométricamente sean las raíces cuadradas inexactas, es importante resaltar la operatividad entre ellos. Las raíces cuadradas se obtienen por medio de las hipotenusas de triángulos rectángulos, la suma y la resta entre irracionales o entre irracionales y racionales se puede representar por medio suma y resta de segmentos con regla y compas. Y la multiplicación y la división se pueden abordar mediante el teorema de Tales.

La no exploración de los números irracionales en el aula, impide la visualización de los diferentes tipos de irracionales que existen, generalmente se piensa en raíces inexactas cuando se habla de irracionales, es interesante mostrar que al sumar y multiplicar irracionales se obtienen otros irracionales y además que no satisfacen la propiedad clausurativa, pues al sumar o multiplicar irracionales, hay casos en los que el resultado corresponde a un racional como:

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \quad y \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$$

La caracterización completa se logra con la axiomatización de los reales y la incorporación del axioma de completitud.

La intención de este trabajo no es solo abordar los obstáculos que se presentan en la enseñanza de los números irracionales en la escuela, sino mostrar diferentes caminos que se pueden efectuar para una enseñanza más significativa de los números irracionales. Para ello se presenta a continuación una propuesta para su enseñanza.

Capítulo 3

Una propuesta para la enseñanza de los números irracionales

El libro de texto escolar es, generalmente, la guía para el docente, con la cual se preparan y diseñan actividades en clases. De acuerdo a investigaciones realizadas por Sánchez & Valdivie, sobre el desarrollo del concepto de número irracional en los libros de textos, encuentran:

Luego de realizar las matrices y caracterizar el contenido expuesto en los libros de textos estudiados se pudo observar que los libros de 9° grado de Educación Básica no desarrollan de manera minuciosa el concepto de número irracional, los cuales por lo general sólo hacen referencia a la definición ingenua de este concepto matemático “*una expresión decimal no periódica*”, “*Un decimal no periódico que no tiene fracción generatriz*” y la representación de alguno de estas idealizaciones matemáticas en la recta numérica, entre ellos . La mayoría de los textos analizados, no definen operaciones básicas (adición y multiplicación) entre irracionales y los efectos que producen estas operaciones en sus resultados, como podrían ser, el no cumplimiento de la cerradura de las operaciones adición y multiplicación en el conjunto I , la propiedad de densidad en I (2014, p. 46).

Por tal motivo, el principal objetivo de este trabajo es elaborar una serie de actividades que sirvan de ayuda al docente para la enseñanza de los irracionales en la escuela, para ello se tienen en cuenta los lineamientos curriculares del MEN y la incorporación de las nuevas tecnologías en la educación matemática.

1. El uso de Geogebra como herramienta educativa en las matemáticas

Geogebra es un programa interactivo libre, donde se moviliza, de forma dinámica, la geometría, el álgebra, el cálculo y la estadística. Este programa facilita la construcción de figuras geométricas y la visualización de las propiedades geométricas de las figuras. La interfaz del programa se muestra a continuación:

Figura 12.

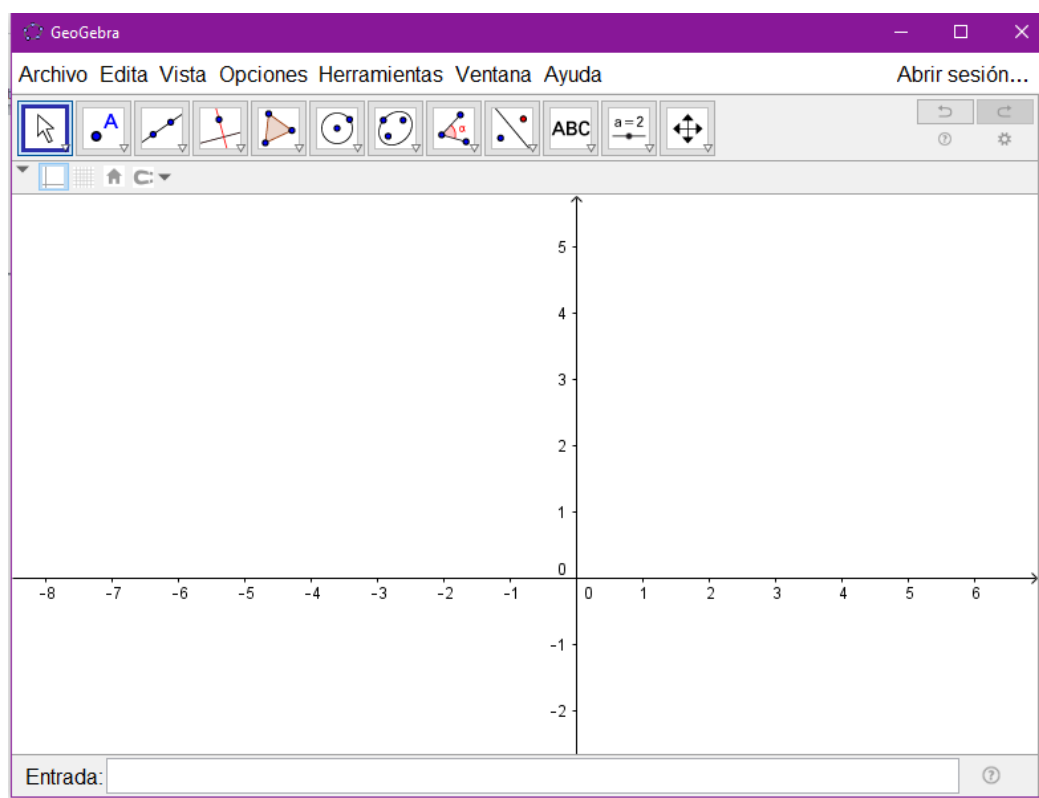


Figura 12. Muestra la interfaz inicial del programa Geogebra, creación propia.

Los iconos que se encuentran en la parte superior, representan las herramientas que se pueden utilizar de acuerdo a la necesidad de la construcción geométrica, al pasar el cursor sobre el icono se despliega la lista de herramientas, entre las cuales tenemos: dibujar un punto, trazar segmento por dos puntos o segmento de longitud dada, trazar semirrectas o rectas por dos

puntos, rectas paralelas y perpendiculares, construir polígonos regulares e irregulares, trazar circunferencias de radio fijo o variable, trazar curvas, medir longitudes y ángulos, el arrastre de las figuras, entre muchas otras más. Cuando se selecciona la herramienta deseada, al poner el cursor sobre la herramienta, el programa muestra un mensaje de ayuda o explicación de la herramienta.

El uso de Geogebra para la enseñanza de los irracionales se justifica bajo el criterio geométrico con el que se pueden representar algunos irracionales. Desde este punto de vista, la idea es incorporar operaciones entre irracionales geométricamente, lo cual es posible mediante la suma y resta de segmentos y la teoría de razones y proporciones.

Geogebra es una herramienta que permite construir dinámicamente algunos números irracionales, especialmente raíces cuadradas inexactas, por medio de la construcción de triángulos rectángulos y el uso del compás, el teorema de Pitágoras y el teorema de Tales.

1.1 Construcción de números irracionales

Los números irracionales construibles con regla y compas corresponden a raíces cuadradas inexactas. Para representar geométricamente estos números irracionales se utiliza el triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras.

Pasos para construir un triángulo rectángulo en Geogebra:

- Se traza un segmento de longitud dada sobre el eje X, desde el origen. (cateto 1)
- Se traza una recta perpendicular al segmento y que pase por el punto final del segmento.
- Se traza una circunferencia con centro en el punto final del segmento y radio dado.
Marcar el punto intersección entre la circunferencia y la recta perpendicular.
- Se traza el segmento que una el punto final del segmento inicial con el punto intersección. (cateto 2)

- Se traza un segmento que una el punto inicial del primer segmento (origen) con el punto final del segundo segmento. (hipotenusa)

Para construir un número irracional de la forma $\sqrt{n}$, primero se deben hallar el valor de los catetos del triángulo rectángulo utilizando el teorema de Pitágoras de la siguiente manera:

Por ejemplo, $\sqrt{10}$:

$$\sqrt{10} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = 1 \quad y \quad b^2 = 9$$

$$a = 1 \quad y \quad b = 3$$

De esta manera se construye el triángulo con los valores obtenidos:

Figura 13.

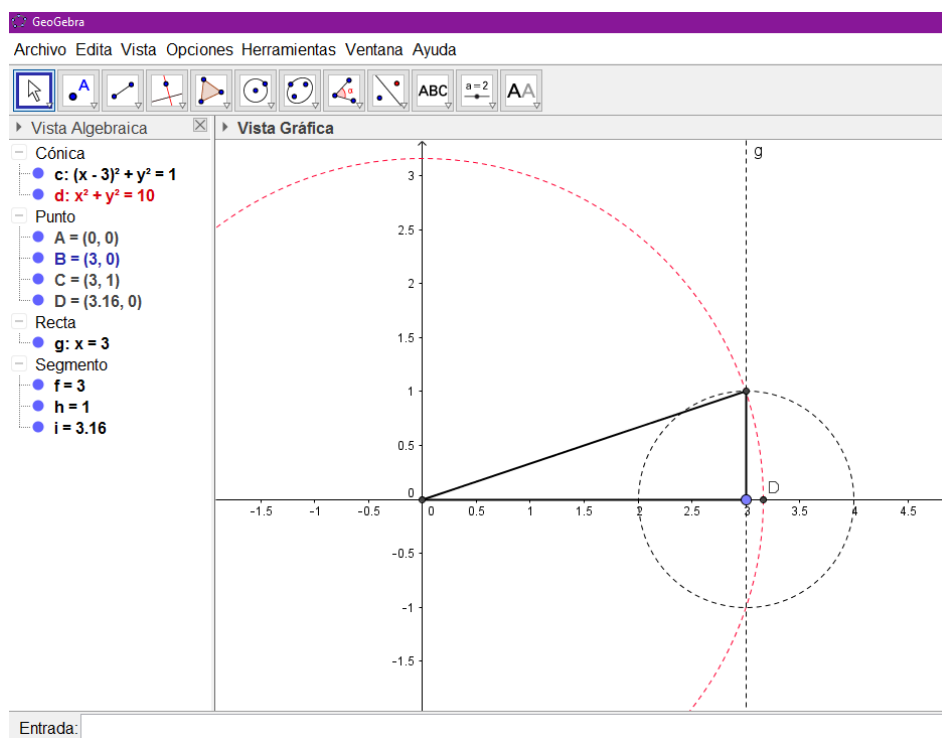


Figura 13. Muestra la construcción geométrica de $\sqrt{10}$ en el programa Geogebra, creación propia.

Finalmente se traza una circunferencia (color rojo) con centro en el origen y radio igual a la hipotenusa. La intersección de esta circunferencia con el eje X corresponde al número $\sqrt{10}$ sobre la recta numérica y la hipotenusa es el segmento que representa el número $\sqrt{10}$.

1.2 Suma y resta de segmentos

Para sumar y restar segmentos se recurre a la idea de añadir o quitar, en línea recta, segmentos. El primer paso consiste en construir los segmentos requeridos, luego se agrega o se quita segmento en línea recta de la siguiente manera:

- Construir los segmentos que se desean sumar o restar.
- Sobre el segmento mayor trazar una recta.
- Trazar una circunferencia con la herramienta llamada compás: con radio igual al segmento menor y centro en el punto final del segmento mayor (sobre el que se acaba de trazar la recta).
- Marcar los puntos intersección entre la circunferencia y la recta. El segmento formado por el punto inicial del segmento mayor y el primer punto intersección (punto sobre el segmento mayor), corresponde a la resta de los segmentos. El segmento formado por el punto inicial del segmento mayor y el segundo punto intersección (punto por fuera del segmento mayor), corresponde a la suma de los segmentos.

Sean los segmentos AB y CD, encontrar $AB + CD$ y $AB - CD$:

Figura 14.

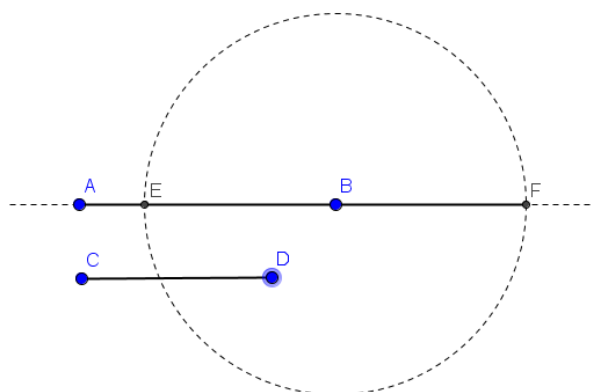


Figura 14. Muestra la suma y resta de segmento. El segmento AE es la resta de los segmentos AB y CD; mientras que AF corresponde a la suma de AB y CD, creación propia.

1.3 Teorema de Tales, para multiplicar y dividir segmentos

El teorema de Tales permite multiplicar y dividir segmentos a través de la teoría de proporciones:

Figura 16.

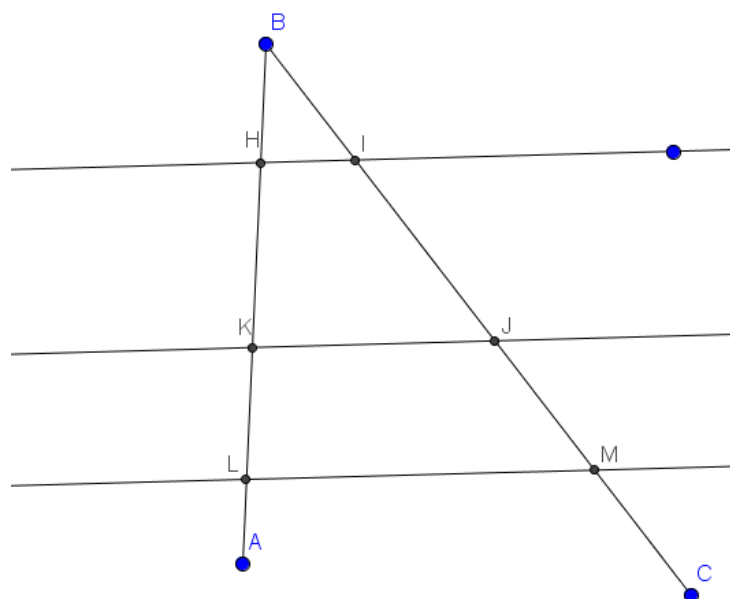


Figura 15. Muestra la representación geométrica del teorema de Tales, dos líneas concurrentes son atravesadas por varias rectas paralelas, creación propia.

El enunciado del teorema es:

Si dos rectas concurrentes l_1 y l_2 , son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos cortados por las paralelas sobre la recta l_1 , y los segmentos cortados sobre la recta l_2 , son proporcionales.

(Viedma, J. 1969, p. 264).

En términos algebraicos se tiene:

$$\frac{HB}{IB} = \frac{HB}{IJ} = \frac{KL}{JM}$$

Utilizando el teorema de Tales para multiplicar segmentos, se tiene lo siguiente:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

$$AB \cdot CE = BD \cdot AC$$

Si AB es el segmento unidad, entonces se tiene:

$$CE = BD \cdot AC$$

Para realizar el proceso de la multiplicación entre segmentos en el programa de Geogebra, se siguen estos pasos:

Multiplicar los segmentos BD y AC :

- Trazar el segmento AB de longitud 1
- Trazar en línea recta con AB , el segmento BD (primer segmento a multiplicar)
- Trazar el segundo segmento de la multiplicación (AC) desde el punto A y en cualquier dirección distinta de AB
- Trazar una recta entre AC
- Trazar el segmento BC

- Trazar una recta paralela a BC que pase por el punto D
- Marcar el punto intersección E entre la recta paralela y la recta que pasa por AC .
- Trazar el segmento CE correspondiente a la multiplicación de BD y AC

Figura 16.

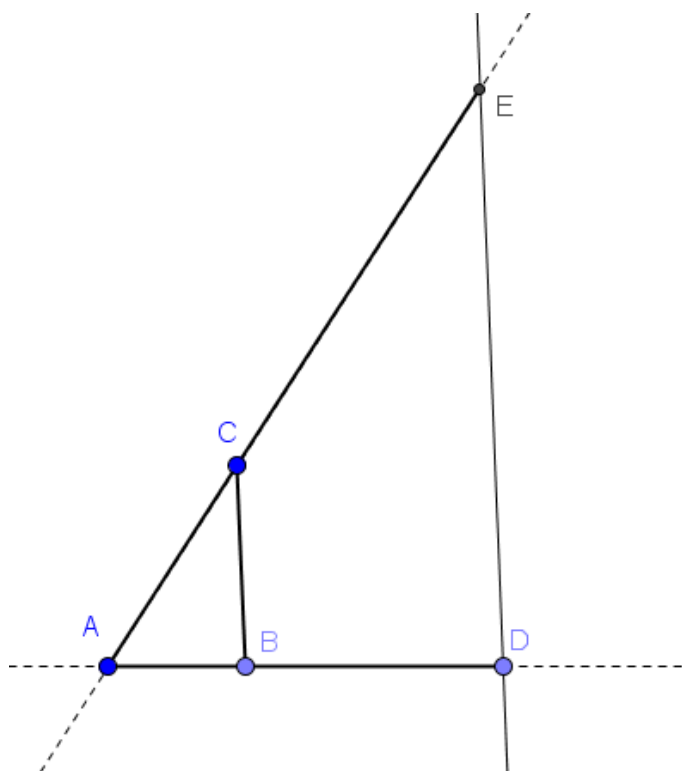


Figura 16. Muestra la representación geométrica de la multiplicación entre segmentos, creación propia.

Utilizando el mismo teorema Tales se puede realizar la operación de división entre segmentos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$$

$$AB \cdot CE = BD \cdot AC$$

Si AB es el segmento unidad, entonces se tiene:

$$\frac{CE}{AC} = \frac{BD}{AB}$$

$$\frac{CE}{AC} = BD$$

2. Propuesta para la enseñanza de los irracionales

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) es la entidad encargada de administrar las políticas educativas y brindar las herramientas necesarias para una educación de calidad en Colombia, para lo cual está desarrollando varios proyectos, como la jornada única, la capacitación en TIC de los docentes, las becas de maestrías para los docentes, ser pilo paga, entre otras.

Uno de los proyectos: “Construyendo capacidades en el uso de las TIC para innovar en la educación” es desarrollado por el CIER-SUR (Centro de innovación educativa regional sur, alojado en Univalle). Este proyecto se encarga del diseño, elaboración y divulgación de contenidos educativos digitales en lenguaje, ciencias y matemáticas para los grados decimo y once. Estos contenidos se rigen por la malla curricular del MEN:

Los contenidos se presentan en forma de Objetos de Aprendizaje (OA). Se entiende por OA a un conjunto de recursos digitales, autocontenible y reutilizable, con un propósito educativo y constituido por al menos tres componentes internos: Contenidos, actividades de aprendizaje y elementos de contextualización. Los OA presentados están fundamentados en las Mallas Curriculares establecidas por el Ministerio de Educación Nacional para cada área. Dichos contenidos están orientados a ser un soporte para las clases presenciales a través de una serie de recursos digitales y actividades de aprendizaje que el profesor podrá utilizar de acuerdo a sus necesidades y criterios. (CIER-SUR).

Para la elaboración de los contenidos se cuenta con un equipo de diseño pedagógico y de desarrollo, entre los cuales encontramos: expertos pedagógicos, asesores pedagógicos, diseñadores instruccionales, diseñadores de multimedia, guionistas, ilustradores y programadores. El experto pedagógico se encarga de la elaboración del manuscrito del OA seleccionado, en cual se diseñan las actividades pertinentes para abordar los contenidos y habilidades descritas en la malla curricular. El flujo de aprendizaje en OA se caracteriza por cinco fases:

- **Introducción:** el concepto a trabajar se introduce de manera lúdica y novedosa, se recomiendan videos introductorios, historia, juegos, problemáticas, etc., que motiven al estudiante a querer aprender.
- **Objetivos:** se construyen los objetivos, en conjunto con los estudiantes y guiado por el docente, que se desean alcanzar con el desarrollo del OA
- **Actividades:** se desarrollan de acuerdo a las habilidades que contenga el OA en la malla curricular, se organizan y se agrupan las habilidades que puedan potencializarse en una misma actividad.
- **Resumen:** se plantea una actividad que recoja todo lo desarrollado en clase de forma breve y puntual.
- **Tarea:** se explicitan las actividades que el estudiante puede realizar por si solo al término de la clase.

Además, el manuscrito incluye instrucciones para la elaboración del recurso virtual y el manual del estudiante.

En este proyecto se participó en la elaboración de algunos manuscritos pedagógicos en el área de matemática, en especial, el manuscrito MG_M_G11_U01_LO2: Construcción de algunos

irracionales. Para la elaboración del manuscrito se contó con la asesoría del docente de la Universidad del Valle, Jaime Robledo Pote. Este OA se encuentra en la malla curricular de matemáticas del grado once en la unidad 1: Operando en el conjunto de los números reales. El primer paso consiste en analizar la malla curricular y organizar las habilidades semejantes que puedan incluirse en una misma actividad, identificar los recursos de aprendizaje previos y los objetivos de aprendizaje. Después se procede a diseñar las actividades que se implementaran en clase y las instrucciones para el docente.

El proceso de elaboración del manuscrito pedagógico fue complejo, en cuanto se tenían que satisfacer las necesidades del MEN que básicamente consistían en economía de tiempo, es decir, se buscaban actividades puntuales y efectivas para abordar la enseñanza de los contenidos, el resultado de este proceso se observa en el manuscrito final que se presenta a continuación:

Asignatura	Matemáticas	Grado	11	UoL_1	Operando en el conjunto de los números reales
Título de LO	Construcción de algunos números Irracionales				
Recursos de Aprendizaje relacionados (Pre clase)	Grado: 11° UoL_1: Operando en el conjunto de los números reales LO_1: Construcción de los números naturales, enteros y racionales				
Objetivo de aprendizaje	• Construir algunos I con regla y compás, para determinar su posición en la recta numérica ➤ Reconocer el conjunto de los irracionales a partir de procesos históricos ➤ Clasificar los números irracionales y sus propiedades ➤ Construir algunos irracionales con regla y compás				
Habilidades / Conocimientos	[SCO1] Reconoce el conjunto de los números Irracionales [S/K] - 1: Investiga sobre el origen de los números irracionales. [S/K] - 2: Relaciona las características del período de las cifras decimales de un número con el conjunto de los Irracionales [S/K] - 3: Determina los números irracionales como aquellos que presentan relación con los números cuadrados y cubos perfectos [S/K] - 4: Conjetura a partir de los números cuadrados y cubos perfectos la definición de número Irracional [SCO2] Identifica el conjunto de los números Irracionales [S/K] - 5: Diferencia los números racionales e irracionales. [S/K] - 6: Clasifica los números en Irracionales trascendentes e irracionales algebraicos. [S/K] - 7: Establece jerarquía entre los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e Irracionales. [S/K] - 8: Determina las propiedades de los números Irracionales. [S/K] - 9: Aproxima números irracionales a racionales para realizar cálculos.				

	[SCO3] Modela con construcciones el conjunto de los números Irracionales [S/K] - 10: Determina que los números irracionales trascendentes no son construibles con regla y compás. [S/K] - 11: Argumenta sus conclusiones sobre números irracionales no construibles [S/K] - 12: Relaciona la división de segmentos con regla y compás con la construcción de números racionales [S/K] - 13: Construye números irracionales con regla y compás [S/K] - 14: Realiza construcciones con programas interactivos para comprobar su procedimiento [S/K] - 15: Identifica aplicaciones de algunos números irracionales (π, e, número de oro, etc.)
Flujo de aprendizaje	Introducción → Objetivos → Desarrollo → Resumen → Tarea Introducción: ¿Qué? ¿Hay más números? [S/K 1 - S/K 5 – S/K 15] Objetivos de aprendizaje. Actividad 1: ¿Cómo diferenciar los números irracionales? [S/K 2 - S/K 5] Actividad 2: Cuadrados y Cubos Perfectos, ¿imperfectos? [S/K 3 - S/K 4] Actividad 3: ¿Algebraicos? ¿Trascendentes? Descubre más Irracionales [S/K 6 - S/K 7 - S/K 10 - S/K 11] Actividad 4: Trabajando con los Irracionales [S/K 8 - S/K 9] Actividad 5: ¡Ahora SI! Construyamos algunos Irracionales [S/K 12 - S/K 13 - S/K 14] Resumen: Reflexionando. Tarea.
Lineamientos evaluativos	Los estudiantes a través de las diferentes actividades estarán en la capacidad de reconocer la caracterización de los números irracionales para diferenciarlos de los números racionales mediante el desarrollo histórico de estos, además podrán clasificarlos entre números algebraicos o trascendentes al igual que reconocer sus propiedades. Los estudiantes también podrán realizar cálculos aproximados entre Irracionales y construir algunos de los Irracionales con regla y compas para poder representarlos en la recta numérica de forma correcta.

Etapas	Flujo de aprendizaje	Actividades de enseñanza / aprendizaje	Materiales / recursos sugeridos
Introducción	Introducción	¿Qué? ¿Hay más números? [S/K 1: Investiga sobre el origen de los números irracionales] [S/K 5: Diferencia los números racionales e irracionales] [S/K 15: Identifica aplicaciones de algunos números irracionales (π, e, número de oro, etc.)]	Recurso interactivo Presenta el título ¿Qué? ¿Hay más números? Acompañado de un dibujo que muestra una expresión de asombro y con un enlace al video introductorio.

		El docente presenta las preguntas de la actividad introductoria que deben realizar los estudiantes al término del video, esto con el objetivo de lograr obtener la atención de los estudiantes en el video ya que es el material clave para poder responder a: • ¿A qué hace alusión la palabra Fibonacci en el video? • ¿Cómo empezaron a aparecer los números irracionales? • ¿Qué opinas de los números irracionales? • ¿Por qué el número $\sqrt{2}$ es irracional? ¿Cómo puede asegurarlo? ¿es $\sqrt{2} = 1.4142$? El video muestra parte de la historia de los primeros irracionales que surgieron y que por sus características especiales gozan de gran fama, entre ellos tenemos al número áureo y raíz de 2. Posterior a la presentación del video, el docente debe: • Solicitar a los estudiantes que contesten las preguntas de la actividad introductoria que ya fueron socializadas al inicio de la clase. • El docente pide a unos 3 o 4 estudiantes que compartan su respuesta con el resto del grupo y luego se enfoca en la última pregunta, es decir en la irracionalidad de $\sqrt{2}$. La irracionalidad de $\sqrt{2}$: Antes de discutir la irracionalidad de raíz de 2, el docente presenta el recurso “Crisis científicas y argumentación lógica”, en el que se plantea la importancia de la forma de argumentación por reducción al absurdo. Aquí el docente apoyado en el recurso, muestra la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y posteriormente la solución a la pregunta ¿es	Video: El video consiste en mostrar algo de la historia de las matemáticas que contribuyeron a la aparición de los números irracionales. Se empieza con un corto discurso sobre la importancia de las matemáticas para el mundo, seguido a esto se inicia con el descubrimiento de $\sqrt{2}$ y luego con la aparición del número áureo; son dos irracionales que gozan de buena fama en el mundo de las matemáticas. Ver (Anexo1). Recurso Interactivo Presenta la actividad introductoria que consta de cuatro preguntas: • ¿A qué hace alusión la palabra Fibonacci en el video? • ¿Cómo empezaron a aparecer los números irracionales? • ¿Qué opinas de los números irracionales? • ¿Por qué el número $\sqrt{2}$ es irracional? ¿Cómo asegurarlo? ¿es $\sqrt{2} = 1.4142$? Recurso Interactivo Presenta el recurso crisis científicas y argumentación lógica junto con la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y la respuesta a ¿es $\sqrt{2} = 1.4142$? (Anexo 2).
--	--	---	--

		$\sqrt{2} = 1.4142?$ la cual consiste en mostrar que de ser cierta, se llega a la conclusión de ser una fracción lo cual está en contra con lo demostrado ya que $\sqrt{2}$ NO se puede expresar en la forma de fraccionario, pero es seguido por otra argumentación que consiste en mostrar que efectivamente al elevar 1.4142 al cuadrado ese resultado no da exactamente 2, solo da aproximadamente 2. Objetivos de aprendizaje El docente, en compañía de los estudiantes, escribe el objetivo al que creen que se debe llegar. Después, se recomienda presentar el objetivo propuesto para este objeto de aprendizaje. Se considera importante, que se realice la explicación del objetivo propuesto, pues a partir de éste el estudiante reconocerá lo que debe alcanzar finalizado el proceso enseñanza-aprendizaje.	Texto. Se presenta en pantalla los objetivos de este objeto de aprendizaje.
Contenidos	El docente presenta el tema	Actividad 1: ¿Cómo diferenciar los números irracionales? [S/K 2: Relaciona las características del período de las cifras decimales de un número con el conjunto de los Irracionales] [S/K 5: Diferencia los números racionales e irracionales.] Ahora el docente conduce al estudiante a comprender la diferencia que existe entre números racionales e irracionales, la cual se basa en la expansión infinita de decimales no periódicos que caracteriza a los irracionales, por medio de la siguiente actividad: • Encuentre la expresión decimal de $7/4$ y $4/7$. • Encuentre una expresión fraccionaria para representar 2,34 y 0,3333... • ¿Qué puedes concluir de los anteriores resultados? Al socializar las respuestas el docente debe guiarlos a la conclusión de que toda división de dos números enteros da como resultado una expresión decimal finita o infinita periódica, y viceversa, de esta forma se definen los racionales: son números que se pueden expresar de la forma p/q.	Recurso Interactivo Presenta la actividad: • Encuentre la expresión decimal de $7/4$ y $4/7$. • Encuentre una expresión fraccionaria para representar 2,34 y 0,3333...? • ¿Qué puedes concluir de los anteriores resultados? Con sus respectivas

		Con ayuda del recurso muestra la solución de las preguntas anteriores junto con la conclusión seguido de una última pregunta: <i>¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?</i> La respuesta a la anterior pregunta aparece al dar click sobre ella, de la siguiente manera: <i>Si un número tiene infinitos decimales no periódicos, este no se puede representar de la forma p/q y por lo tanto no es racional, a este tipo de números se les denomina irracionales.</i> ----- Al final de la actividad en el material del estudiante aparecerá en forma llamativa la pregunta: <i>¿Sabes cómo hallar otros números irracionales?</i> Esta pregunta tiene como fin el de poner a los estudiantes a pensar sobre qué otros números irracionales conocen.	respuestas al dar click sobre cada una. (Anexo 3). Al final aparece la pregunta, seguida de su respuesta: <i>¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?</i> ----- Recurso Interactivo Presenta la pregunta: <i>¿Sabes cómo hallar otros números irracionales?</i> de forma llamativa. Material del estudiante Presenta la actividad 1: cada ítem con su espacio para contestar, seguido a esto presenta la pregunta: <i>¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?</i> Material del estudiante Presenta la pregunta <i>¿Sabes cómo hallar otros números irracionales?</i>
		Actividad 2: Cuadrados y Cubos Perfectos, ¿imperfectos? [S/K 3: Determina los números irracionales como aquellos que presentan relación con los números cuadrados y cubos perfectos] [S/K 4: Conjetura a partir de los números cuadrados y cubos perfectos la definición de número Irracional] El docente retoma la anterior pregunta <i>¿Sabes cómo hallar otros números irracionales?</i> y continúa con las siguientes preguntas, las cuales se espera	Recurso Interactivo Presenta las preguntas: • <i>¿Qué resultado se</i>

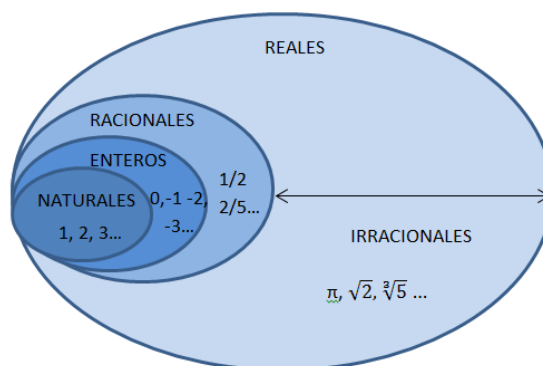
		conduzcan al estudiante a comprender la existencia de infinitos irracionales: • ¿Qué resultado se obtiene al realizar la siguiente operación $\sqrt{2} + 1/2$? • ¿A qué conjunto numérico pertenece el anterior resultado? • Y si le sumamos otro número racional cualquiera a $\sqrt{2}$, ¿a qué conjunto numérico pertenece el resultado? • ¿Qué sucede si resto, multiplico o divido un racional cualquiera con $\sqrt{2}$? Con esto se espera que los estudiantes descubran y comprendan que existen infinitos irracionales. En la socialización, el docente explica la razón por la cual los números trabajados pertenecen al conjunto de los irracionales de la siguiente manera: Explicación: • La operación $\sqrt{2} + 1/2$ implica un proceso infinito puesto que $\sqrt{2}$ es irracional, lo que equivale a que es un número cuya expresión decimal es infinita y no periódica, observe: $\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1.\mathbf{4}14213562 \dots + 0.\mathbf{5} = 1.\mathbf{9}14213562 \dots$ De acuerdo a la definición anterior este número $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional porque tiene infinitos decimales y no periódicos. Ahora una mejor forma de ver que $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional: Dado que todo número real o es racional, o es irracional, se puede demostrar la irracionalidad usando reducción al absurdo. Para ello se supone que $\sqrt{2} + 1/2$ es racional, entonces: $\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{m} \text{ donde } m \text{ y } n \text{ son enteros,}$ Esta última ecuación implica que $\sqrt{2} = \frac{n}{m} - \frac{1}{2}$ y de acuerdo a las propiedades de los racionales, la suma (resta) de dos números racionales es racional, llegando a una contradicción pues $\sqrt{2}$ es irracional como ya se había demostrado. Por lo tanto $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ es irracional. De esta misma manera se puede demostrar que la suma de $\sqrt{2}$ con cualquier racional de la forma n/m pertenece al conjunto de los números irracionales.	obtiene al realizar la siguiente operación $\sqrt{2} + 1/2$? • ¿A qué conjunto numérico pertenece el anterior resultado? • Y si le sumamos otro número racional cualquiera a $\sqrt{2}$, ¿a qué conjunto numérico pertenece el resultado? • ¿Qué sucede si resto, multiplico o divido un racional cualquiera con $\sqrt{2}$? Recurso Interactivo Presenta la explicación de la irracionalidad de los números trabajados en las preguntas mencionadas arriba, junto con las excepciones de la multiplicación y la división. (Anexo 4).
--	--	--	---

	Con esta explicación se espera que el estudiante comprenda que existen infinitos irracionales, por lo menos tantos como racionales y además que tenga la capacidad de dar respuesta al resto de las preguntas. Sin embargo el docente debe aclarar los casos particulares que se presentan en la última pregunta <i>¿Qué sucede si resto, multiplico o divido un racional cualquiera con $\sqrt{2}$?</i> para ello en el recurso se muestran las excepciones: La multiplicación de $0 \cdot \sqrt{2} = 0$ y 0 es racional. No se puede dividir por 0 (cero) porque no está establecida debido a que todo número multiplicado por cero da cero. ----- Ahora el docente realiza la siguiente pregunta: ¿Existe algún otro irracional diferente a $\sqrt{2}$, aparte de los vistos? Esta pregunta es con el objetivo de introducir otros números irracionales como $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$ entre otros de la misma naturaleza. Para ello, el docente con ayuda del recurso muestra: RAICES EXACTAS $\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{196} = 14$ ¿Qué tienen en común estas raíces cuadradas? Tienen en común que 4, 9, 64 y 196 son números cuadrados perfectos porque $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $64 = 8^2$ y $196 = 14^2$ La propiedad de los exponentes plantea lo siguiente: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ Por esta propiedad es que resulta: $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2$ $\sqrt{4} = 2$ De lo anterior se puede observar que entonces todas las raíces cuadradas de números cuadrados perfectos son números racionales.	----- Recurso Interactivo Presenta las preguntas: ¿Existe algún otro irracional diferente a $\sqrt{2}$, aparte de los vistos? ¿la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es racional, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{6}$ entre otros? Con sus respectivas explicaciones de raíces exactas y raíces inexactas (Anexo 5)
--	---	--

		$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$ Ahora el docente plantea la siguiente pregunta: ¿la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es racional, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{6}$ entre otros? Tras la socialización se espera que los estudiantes relacionen la irracionalidad de $\sqrt{2}$ para dar respuesta a la anterior pregunta, sin embargo el docente explica lo siguiente: RAICES INEXACTAS Observe lo siguiente: $\sqrt{4} = 2 \quad \text{porque} \quad 2^2 = 4$ y ahora: $\sqrt{2} = ?$ Busquemos un número que al elevarlo al cuadrado de 2, es decir, $n^2 = 2$ Por ejemplo: $\begin{array}{ll} 1^2 = 1 & \text{ó} & 1.4^2 = 1.96 \\ 1.41^2 = 1.9881 & & 1.42^2 = 2.0164 \end{array}$ Esto quiere decir que el número que se busca está entre 1.41 y 1.42, pero observe que al elevar al cuadrado un número con cifras decimales, estas se duplican, o sea que un número con tres cifras decimales al elevarlo al cuadrado tendrá seis cifras decimales y así sucesivamente, lo que deja ver que a medida que se tomen más cifras decimales se aproxima más a 2, pero nunca será igual. Es por esta razón que cualquier raíz cuadrada $\sqrt{n}$ de un número n, que no es cuadrado perfecto, es irracional, porque no existe un número racional que al elevarlo al cuadrado de exactamente n. ----- Luego de la explicación el docente solicita a los estudiantes contestar en el material del estudiante: • ¿Cuáles raíces cúbicas tienen solución en los racionales? • De tres ejemplos de raíces cúbicas que sean irracionales y explique ¿Por qué?	----- Material del estudiante Presenta las preguntas con su respectivo espacio para responder: • ¿Cuáles raíces cúbicas tienen solución en los racionales?
--	--	---	--

		Con ello se espera que los estudiantes tengan un conocimiento más amplio sobre los números irracionales que existen. Luego el docente muestra la siguiente pregunta con el objetivo de inquietar y enlazar a los estudiantes con la actividad siguiente. Para pensar: <i>¿Será que todos los irracionales tienen la forma de raíz inexacta?</i>	De tres ejemplos de raíces cúbicas que sean irracionales y explique ¿Por qué? Con el respectivo espacio para responder. Recurso Interactivo Presenta de forma llamativa la expresión: Para pensar: <i>¿Será que todos los irracionales tienen la forma de raíz inexacta?</i>
		Actividad 3: ¿Algebraicos? ¿Trascendentes? Descubre más Irracionales [S/K 6: Clasifica los números en Irracionales trascendentes e irracionales algebraicos.] [S/K 7: Establece jerarquía entre los conjuntos de números naturales, enteros, racionales e Irracionales] [S/K 10: Determina que los números irracionales trascendentes no son construibles con regla y compás] [S/K 11: Argumenta sus conclusiones sobre números irracionales no construibles] Jerarquía de los conjuntos numéricos Esta actividad empieza con la clasificación de los números en Naturales, Enteros, Racionales o Irracionales. La actividad consiste en una tabla en la cual cada estudiante señala la pertenencia o la no pertenencia de los números propuestos en la primera columna en uno o más de uno de los conjuntos numéricos. Luego el docente con ayuda de los estudiantes completa el diagrama de Venn que se muestra en el recurso interactivo, esto con el objetivo de enfatizar las relaciones de los conjuntos numéricos en cuanto a su contención, y además verificar las respuestas de acuerdo a la información acabada de construir sobre la jerarquía de los conjuntos numéricos. Con esto, se espera que el estudiante identifique	Recurso Interactivo Presenta de forma llamativa el título: Jerarquía de los conjuntos numéricos con una ilustración en forma de diagrama de Venn en la que deberán completar el orden correcto de cada conjunto numérico. (Anexo 6)

claramente cada uno de los conjuntos numéricos.



Ahora el docente realiza las siguientes preguntas para recordar un poco sobre ecuaciones y así poder introducir los números algebraicos y trascendentes:

- ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$?
- ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $nx - m = 0$ donde n y m son enteros y $n \neq 0$?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^2 - m = 0$ con m entero positivo?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^3 - m = 0$ con m entero positivo?

El docente solicita a tres o cuatro estudiantes que compartan sus respuestas con el resto del grupo, luego hace énfasis en las tres últimas preguntas y muestra en el recurso las siguientes conclusiones:

La solución general a la ecuación $nx - m = 0$ es:

$$x = \frac{m}{n}$$

La solución general a la ecuación $x^2 - m = 0$ es:

$$x = \sqrt[2]{m}$$

La solución general a la ecuación $x^3 - m = 0$ es:

$$x = \sqrt[3]{m}$$

De esto se puede concluir que todo número racional, toda raíz cuadrada de un entero positivo y toda raíz cúbica de un entero positivo son soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros.

Material del estudiante

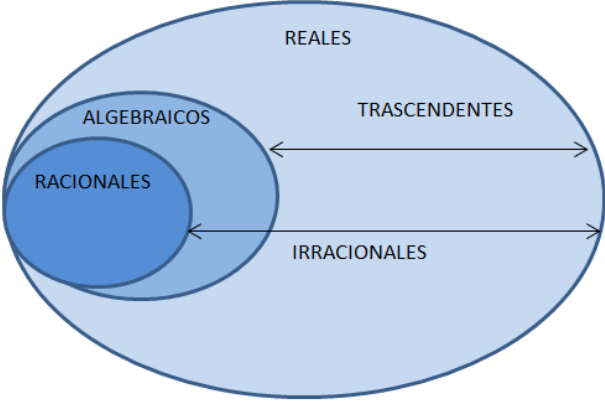
Presenta la actividad de clasificación de números en Naturales, Enteros, Racionales o Irracionales. (Anexo 7)

Recurso Interactivo

Presenta las preguntas:

- ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$?
- ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $nx - m = 0$ donde n y m son enteros y n es distinto de cero?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^2 - m = 0$ con m entero positivo?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^3 - m = 0$ con m entero?

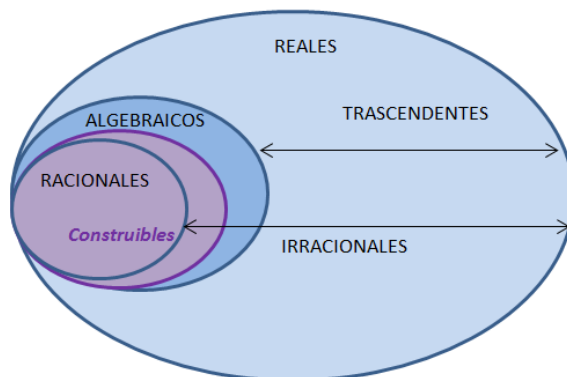
		Con base en lo anterior, el docente presenta la definición de número algebraico: <i>Los números algebraicos son todos aquellos que son solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros.</i> ¿Cuáles de los siguientes números son algebraicos? ¿Por qué? 2 , -5 , $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$ ----- Tras la definición de números algebraicos se plantea la siguiente pregunta: ¿Existe algún número que NO sea algebraico? El objetivo de esta pregunta es introducir de manera informativa los números trascendentes por medio de una reseña histórica sobre el número π. De la siguiente manera: Efectivamente existen números que NO son algebraicos por no ser solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros y reciben el nombre de números TRASCENDENTES. La trascendencia de algunos números como π solo fue demostrada en el siglo XIX, aunque se haya trabajado con él desde la antigüedad, pues los babilonios, egipcios, griegos y chinos conocían la existencia de π y trabajaban con aproximaciones de este al relacionar la circunferencia con su diámetro: $\pi = c/d$ donde c:perímetro de la circunferencia d: diámetro de la circunferencia ----- Ahora el docente plantea la siguiente pregunta: Si un número trascendente no es algebraico y todo racional es algebraico, ¿habrá algún número trascendente que sea racional? Después de discutir la pregunta anterior el docente presenta el recurso donde se muestra la jerarquía	positivo? De tal manera que al dar click sobre la última se muestre la solución junto con la conclusión (Anexo 8). Recurso Interactivo Presenta la definición de número algebraico y la pregunta: ¿Cuáles de los siguientes números son algebraicos? ¿Por qué? 2 , -5 , $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$. ----- Recurso Interactivo Presenta de forma llamativa la pregunta: ¿Existe algún número que NO sea algebraico? Seguida por una flecha que apunte hacia la derecha y que contenga la palabra SI; de tal manera que al dar click sobre la flecha se muestre la reseña sobre el número π (Anexo 9). Material del estudiante Se muestra la reseña histórica sobre trascendencia y el número π. ----- Recurso Interactivo Presenta la pregunta: Si un número trascendente no es algebraico y todo racional es algebraico, ¿habrá algún número trascendente que sea
--	--	---	---

		entre los racionales, los algebraicos y los trascendentes. Esta jerarquía muestra la importancia de los números trascendentes: pues si se demuestra que un número es trascendente, esto prueba que tal número no es racional y por lo tanto es irracional.  ----- Para finalizar, el docente hace un recorrido completo de los números, desde los naturales hasta los Racionales y luego la aparición de los Irracionales haciendo énfasis en su clasificación. Primero presenta a los naturales como aquellos que se utilizan para contar y que justamente surgieron para satisfacer esa necesidad. Luego presenta a los enteros como una ampliación de los naturales hacia los números negativos incluyendo al cero para establecer la propiedad de cerradura en las operaciones de suma y resta. Después presenta la ampliación del conjunto numérico a los racionales que representan cocientes de números enteros. Ahora presenta a los irracionales como aquellos números que tienen infinitos decimales no periódicos. Finalmente muestra que los irracionales se clasifican en algebraicos y trascendentes, además que los naturales, enteros y racionales también son algebraicos. ----- Actividad 4: Trabajando con los Irracionales [S/K 8: Determina las propiedades de los números Irracionales] [S/K 9: Aproxima números irracionales a racionales]	racional? Seguido por la gráfica que muestra la jerarquía entre los algebraicos y los trascendentes. ----- Recurso Interactivo Presenta un diagrama que muestre la jerarquía de los conjuntos numéricos (Anexo 9).

		para realizar cálculos] En esta actividad el objetivo es el de realizar cálculos con números irracionales haciendo uso de la aproximación decimal e identificar las propiedades de los irracionales. Para empezar el docente realiza la siguiente pregunta con la explicación: Si los números irracionales tienen infinitos decimales ¿Cómo hago para sumar, restar, multiplicar o dividir números irracionales? Para sumar o restar irracionales solo puedo hacerlo entre cantidades irracionales semejantes, utilizando el método de factor común, por ejemplo: $\begin{aligned} 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} &= 8\sqrt{3} \\ 3\pi - 7\pi + 2\pi &= 2\pi \end{aligned}$ Mientras que: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{2} + \sqrt{3}$ No se puede resolver porque no tienen un factor común. Para multiplicar o dividir irracionales se siguen las reglas del algebra, y en el caso de los irracionales con radicales se siguen las reglas de la radicación, observen algunos ejemplos: $\begin{aligned} e. 4e^{2x+3} &= 4e^{2x+4} \text{ con } x \in Z \\ 3\pi \cdot 7\pi^3 &= 21\pi^4 \\ \frac{12\pi^3}{3\pi} &= 4\pi^2 \end{aligned}$ para multiplicar irracionales con radicales existen muchos caminos: $\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$ $\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4(\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$ $\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = 4 \cdot \sqrt{3 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$ $\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 4^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 48} = \sqrt{144} = 12$ cuando los radicales no tienen el mismo índice: $\begin{aligned} \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{6} &= \sqrt[2 \cdot 3]{5^3 \cdot 6^2} = \sqrt[6]{125 \cdot 36} = \sqrt[6]{125 \cdot 36} \\ &= \sqrt[6]{4500} \end{aligned}$	Recurso Interactivo Presenta la pregunta: Si los números irracionales tienen infinitos decimales ¿Cómo hago para sumar, restar, multiplicar o dividir números irracionales? Junto con la explicación (anexo 10).
--	--	---	---

		Verificando las propiedades: El docente con ayuda del recurso y de los estudiantes resuelve algunos ejercicios de suma, resta, multiplicación y división con irracionales con el objetivo de identificar las propiedades conmutativa, asociativa, distributiva, inversos y elementos neutros y además la no existencia de la propiedad clausurativa en los irracionales: $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ $\sqrt{8} - \sqrt{8} = 0$ $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$ $\sqrt{5} \cdot (e + 7) = \sqrt{5}e + 7\sqrt{5}$ $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ Como se puede observar algunos resultados de las operaciones entre irracionales son racionales, por esa razón los irracionales no satisfacen la propiedad clausurativa. Ahora el docente retoma el ejercicio donde la suma de irracionales no se puede resolver y procede a explicar cómo se realizan las aproximaciones decimales de los números irracionales en la vida cotidiana, para poder obtener un valor aproximado, la cual consiste en tomar unos cuantos decimales del número irracional, por ejemplo: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots \quad \sqrt{3} = 1,732050808 \dots$ $\sqrt{2} \cong 1,41 \text{ ó } \sqrt{2} \cong 1,4142 \quad \sqrt{3} \cong 1,73 \text{ ó } \sqrt{3} \cong 1,7320$ La suma sería: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 1,41 + 1,73 \cong 3,14$ Se puede aproximar con la cantidad de cifras decimales que se desee, la elección depende del tipo de medida que se esté realizando. Cualquiera de las aproximaciones sirve de igual manera, la diferencia radica en la precisión, mientras más cifras decimales se tomen, más aproximado estará al valor real.	Recurso Interactivo Presenta la actividad en donde se verifican las propiedades de los irracionales. Recurso Interactivo Presenta la explicación de la aproximación decimal que se debe realizar a los irracionales para facilitar el cálculo y poder obtener una idea cercana del resultado. Recurso Interactivo Muestra las diferentes
--	--	---	--

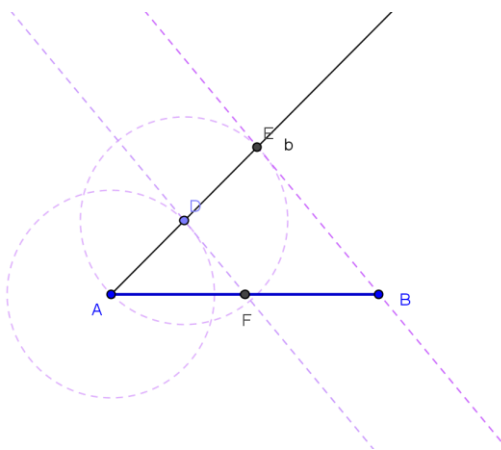
		El docente hace énfasis en que la solución encontrada no es más que una aproximación al resultado real, que nunca serán iguales, que solo nos sirve para tener una idea muy cercana del resultado. Con respecto a la aproximación decimal, el docente debe aclarar que la cantidad de decimales que se requieran en la aproximación depende del contexto en el que se estén utilizando. La aproximación con dos decimales como $\sqrt{2} = 1.41$, significa que el error de precisión es menor que una centésima y este error para un constructor tal vez sea aceptable mientras que para un físico tal vez sea un error garrafal. También debe mostrar que mientras más decimales se tomen en la aproximación, más precisa es la medida.	aproximaciones de acuerdo al contexto en que se estén utilizando. Y la precisión de la medida en cuanto a cantidad de decimales tomados por ejemplo las medidas que realizan los arquitectos comparadas con las medidas que utilizan los físicos o las medidas utilizadas por cocineros comparadas con la medidas que utilizan los químicos.
		Actividad 5: Ahora SI! Construyamos algunos Irracionales [S/K 12: Relaciona la división de segmentos con regla y compás con la construcción de números racionales] [S/K 13: Construye números irracionales con regla y compás] [S/K 14: Realiza construcciones con programas interactivos para comprobar su procedimiento] El docente con ayuda del recurso muestra lo siguiente: Algunos de los números irracionales se pueden construir geométricamente con regla y compás como por ejemplo $\sqrt{2}$. La frase “construir con regla y compás” hace referencia a la geometría euclidiana en donde la regla carece de medida y solo sirve para trazar líneas rectas y el compás se cierra al levantarse del papel razón por la cual no sirve para trasladar medidas.	Recurso Interactivo Presenta la explicación de números construibles junto con la gráfica.



En la gráfica se puede observar:

- Los números construibles son números algebraicos
- No todos los algebraicos son construibles
- Los trascendentes no son construibles.

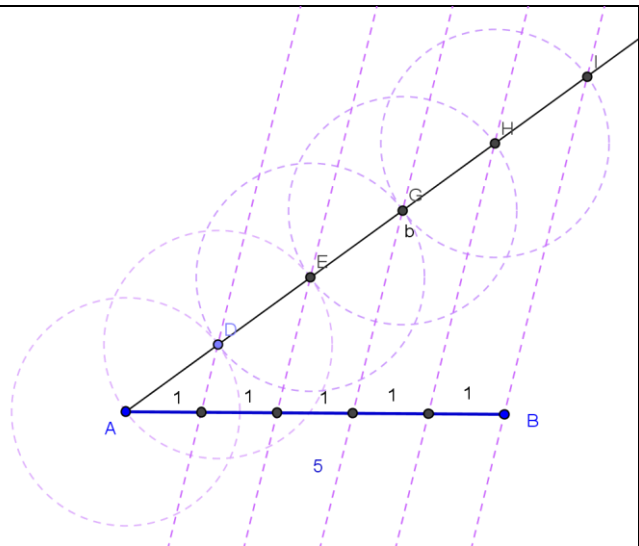
Luego con el recurso el docente recuerda, con ayuda del teorema de Tales, cómo se puede dividir un segmento en partes iguales, lo cual se utiliza para construir los números racionales y que podrá ser de ayuda para construir irracionales del tipo $\sqrt{2} + \frac{2}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ entre otros.



Aquí el segmento se divide en dos partes iguales.

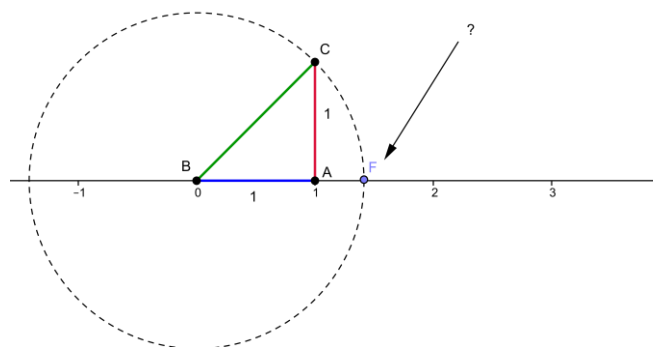
Recurso Interactivo

Presenta de forma interactiva la división de segmentos en partes iguales, la idea es que se vaya construyendo paso a paso al dar click.



Y acá el segmento se divide en cinco partes iguales.

Ahora el docente con ayuda del recurso plantea las siguientes preguntas relacionadas con la ubicación de algunos números irracionales en la recta numérica a igual que su construcción con regla y compas:



Analizando la gráfica responde:

- ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo ABC?
- ¿Cuánto mide el segmento de color verde?
- ¿Qué método utilizo para hallar su medida?
- ¿Cuánto mide el segmento BF?

Se espera que los estudiantes logren llegar a la conclusión de que se acaba de construir el número $\sqrt{2}$ por medio del teorema de Pitágoras aplicándolo al triángulo rectángulo ABC para hallar la medida de la hipotenusa y llegar a que el punto F sobre la recta numérica corresponde a $\sqrt{2}$, sin embargo el docente muestra el paso a paso de la construcción con regla y compas para dejar claro el procedimiento de la

Recurso Interactivo

Presenta la gráfica junto con las preguntas:

- ¿Qué tipo de triángulo es el triángulo ABC?
- ¿Cuánto mide el segmento de color verde?
- ¿Qué método utilizo para hallar su medida?
- ¿Cuánto mide el segmento BF?

siguiente manera:

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 1 y haciendo uso del teorema de Pitágoras se obtiene que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ así:

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow h^2 = 1^2 + 1^2$$

$$h^2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow h = \sqrt{2}$$

Luego se traza una circunferencia con centro en el origen y radio $AC = \sqrt{2}$ trasladando de esta manera la medida de $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica, ya que AE es radio de la misma circunferencia por tanto:

$$AC = AE = \sqrt{2}$$

Ahora el docente solicita a los estudiantes construir en el material del estudiante los siguientes números irracionales de forma similar a $\sqrt{2}$:

$$2\sqrt{3} \quad \sqrt{5} \quad 1 + \sqrt{6} \quad y \quad 1 - \sqrt{7}$$

El docente muestra una ayuda para construirlos la cual consiste en utilizar el teorema de Pitágoras de atrás para delante de la siguiente manera:

Si quiero construir $\sqrt{3}$ entonces

$$h = \sqrt{3} \rightarrow h^2 = ? + ? = 3$$

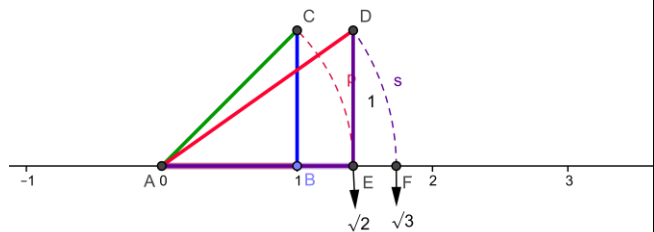
$$h^2 = 2 + 1 = 3$$

$$h^2 = a^2 + b^2 = 3$$

$$es\ decir\ que\ a^2 = 2\ y\ b^2 = 1$$

$$por\ lo\ tanto\ a = \sqrt{2}\ y\ b = 1$$

Entonces si construyo un triángulo rectángulo similar al ejemplo de raíz de dos, pero cuyos catetos midan $\sqrt{2}$ y 1 obtengo la hipotenusa que mide $\sqrt{3}$, luego con una circunferencia puedo trasladar la medida sobre la recta numérica.



Recurso Interactivo

Presenta la explicación de la construcción de $\sqrt{2}$ paso a paso (Anexo 11).

Recurso Interactivo

Presenta la ayuda que muestra cómo utilizar el teorema de Pitágoras de atrás para adelante para construir otros números irracionales como $\sqrt{3}$ (Anexo 12).

Material del estudiante

Presenta los números irracionales que se proponen como ejercicios para construirlos con regla y compas, junto con la gráfica que facilite dicha construcción. Además también muestra los ejemplos de la construcción de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ (Anexo 12 y 13).

		Solo se pueden construir números con regla y compás utilizando otros números que de igual manera sean construibles. El estudiante deberá trabajar solo con la ayuda del material del estudiante en donde encontrará los números irracionales que debe construir así como el ejemplo anterior que sirve de guía para realizarlos con regla y compas.	
Conclusión y cierre	Resumen	Reflexionando. Para concluir el objeto de aprendizaje se hace un recorrido por todo lo visto a través de las actividades anteriores; se puede iniciar con la realización de una lluvia de preguntas abiertas que en conjunto con los estudiantes se analizan y responden. Lluvia de preguntas: ¿Que son los irracionales? ¿Cómo surgieron los irracionales? ¿Quién fue Pitágoras? ¿Cómo surgió el $\sqrt{2}$, el número de oro y π? ¿En qué consiste la aproximación decimal? ¿Por qué y cuáles irracionales se pueden construir? A medida que se recogen las opiniones se construye una conclusión.	Recurso Interactivo. Se presentan las preguntas planteadas cada con su respuesta escondida.
Tarea	Evaluación (Post clase)	TAREA Tras haber realizado un recorrido por todos los temas vistos en las clases anteriores y habiendo construido una conclusión fuerte y coherente sobre lo que es un número Irracional, el docente solicita a los estudiantes lo siguiente: • Construir un mapa conceptual de los números Irracionales. • Construir el número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ con Geogebra. • Hallar experimentalmente el número π, midiendo el perímetro de una circunferencia y dividiéndolo por el diámetro de la misma. • Investigar sobre otros números irracionales, cómo e, <i>algunos logaritmos u otros?</i> • Pensar: ¿Qué conjunto es más “grande” el conjunto de los Racionales o el conjunto de los Irracionales?	Material del estudiante Presenta la tarea propuesta para la casa.

Anexo 1:

El video empieza con una introducción de las matemáticas en general, cómo surgieron y su importancia. Video de referencia: <https://www.youtube.com/watch?v=IEU1TGOV4QI> (0:00 a 0:32)

Luego se presenta los primeros atisbos en la historia del número $\sqrt{2}$ (raíz de 2). Video de referencia: <https://www.youtube.com/watch?v=IEU1TGOV4QI>

(33:02-36:23)+
(40:40-42:04)+
(42:47-42:58)+
(43:40-45:20).

Se presenta el descubrimiento del número ϕ (numero áureo), así como su aparición en la naturaleza y sus aplicaciones en la realidad. Video de referencia: <https://www.youtube.com/watch?v=j9e0auhmxnc>

Anexo 2:

Antes de presentar la demostración de la irracionalidad de raíz de 2, se muestra por medio de un video la explicación del método de demostración por reducción al absurdo.

El video se llamaría “crisis científica y argumentación lógica” Se envía adjunto el documento en pdf, que explica en qué consiste.

Raíz de 2 es irracional – Demostración por Reducción al Absurdo

Esta demostración consiste en suponer cierto lo contrario y llegar a una contradicción.

Suponemos entonces que raíz de 2 no es irracional, por lo tanto es racional es decir que se puede expresar de la forma p/q donde p y q son primos relativos es decir p/q es irreducible.

Si $\sqrt{2}$ no es irracional, entonces es racional, y si es racional es de la forma p/q

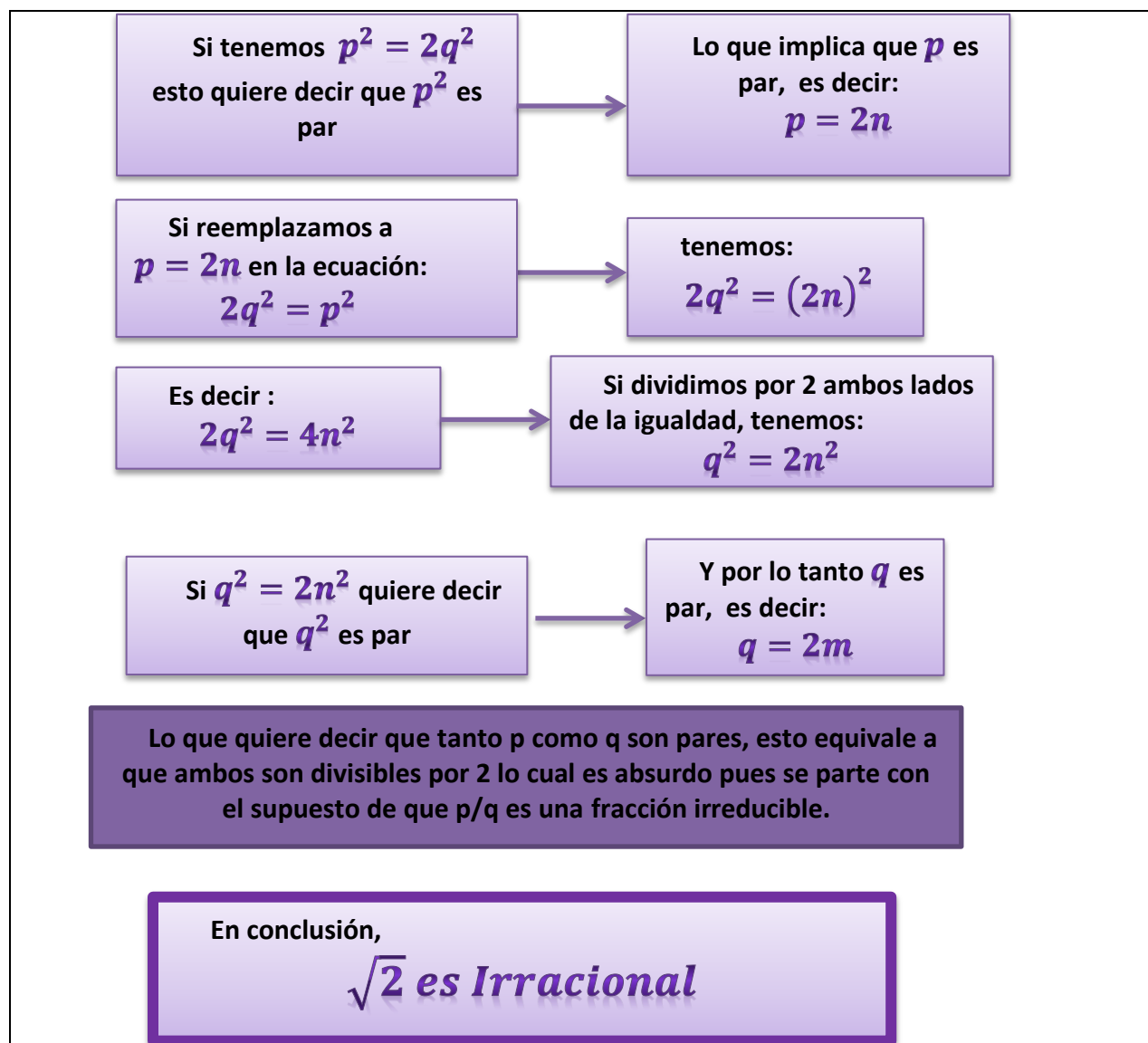
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Ahora para eliminar la raíz cuadrada, elevo al cuadrado ambos lados de la igualdad y resuelvo.

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$



Anexo 3:

[La idea es mostrar esta solución paso a paso, de manera que el docente pueda ir explicando el algoritmo de la división (que seguramente ya han olvidado los estudiantes de once)]

- Encuentre la expresión decimal de $7/4$ y $4/7$.

Respuesta:

$$\frac{7}{4} \quad \text{es} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 30 \overline{) 4} \\ 20 \\ 0 \end{array} \quad 1,75$$

El número racional $7/4$ tiene expresión decimal finita igual a 1.75 es decir:

$$7/4 = 1.75$$

Mientras que:

$$\frac{4}{7} \text{ es } \begin{array}{r} 40 \\ 50 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \\ 4... \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 0,571428... \end{array}$$

El número racional $\frac{4}{7}$ tiene expresión decimal infinita periódica igual a $0.571428...$ es decir:

$$\frac{4}{7} = 0.571428...$$

Lo que indica que la división entre dos naturales da como resultado un número decimal finito o infinito periódico.

- Encuentre una expresión fraccionaria para representar $2,34$ y $0,3333...$?

Respuesta:

[La idea es recordar la conversión de números decimales finitos o infinitos periódicos a número fraccionario, sería bueno que su presentación sea de forma interactiva, por ejemplo que al dar click se vaya desarrollando paso a paso y que cada paso tenga su explicación respectiva]

$2,34$ es un número decimal finito, para encontrar una fracción equivalente se debe multiplicar por un fraccionario de la forma $\frac{100}{100}$ de la siguiente manera:

$$2,34 \times \frac{100}{100} = \frac{234}{100}$$

La fracción que se escoge es una potencia de 10 que depende de la cantidad de cifras decimales que tenga el número decimal finito al que se le quiere hallar un fraccionario equivalente, como en este caso $2,34$ tiene dos cifras decimales se escoge la potencia de $10^2 = 100$ y la razón por la que se multiplica $2,34$ por $\frac{100}{100}$ es porque $\frac{100}{100} = 1$ y todo número multiplicado por 1 da el mismo número.

$0,3333...$ Es un número decimal infinito periódico cuya expresión fraccionaria es $\frac{1}{3}$ ya que:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 1... \end{array} \begin{array}{r} 3 \\ 0,333... \end{array}$$

Pero recordemos el método para hallar una fracción equivalente a un número decimal infinito periódico dado. En este caso $0,3333 = 0,\bar{3}$ tiene una sola cifra decimal periódica.

Multiplicamos x por 10 tantas veces hasta cuando el decimal resultante tenga su parte periódica en "correspondencia" con $0,3333...$ y después restamos x al resultado de forma tal que las dos "colas" de decimales se anulen:

$$10x = 3.3333...$$

Ahora podemos restar x de $10x$:

$$\begin{array}{r} 10x = 3.3333... \\ x = 0.3333... \\ \hline 9x = 3 \end{array}$$

$$x = 3/9 = 0.33$$

$$0.\hat{3} = \frac{3}{9}$$

Claramente se observa que al simplificar $3/9$ se obtiene $1/3$ como se había mostrado al principio.

- ¿Qué puedes concluir de los anteriores resultados?

Respuesta:

Toda división de dos números enteros, es decir fracción, tiene una expresión decimal finita o infinita periódica, y toda expresión decimal finita o infinita periódica se puede expresar en forma de fracción. Determinando de esta manera todos los números racionales.

Anexo 4:

Explicación:

- La operación $\sqrt{2} + 1/2$ implica un proceso infinito puesto que $\sqrt{2}$ es irracional, lo que equivale a que es un número cuya expresión decimal es infinita y no periódica, observe:

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1.414213562... + 0.5 = 1.914213562...$$

De acuerdo a la definición anterior este número $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional porque tiene infinitos decimales y no periódicos.

Ahora una mejor forma de ver que $\sqrt{2} + 1/2$ es irracional:

Dado que todo número real o es racional, o es irracional, se puede demostrar la irracionalidad mostrando que no es racional. Para ello se supone que $\sqrt{2} + 1/2$ es racional, entonces:

$$\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{m} \text{ donde } m \text{ y } n \text{ son enteros,}$$

Esta última ecuación implica que $\sqrt{2} = \frac{n}{m} - \frac{1}{2}$ y de acuerdo a las propiedades de los racionales, la suma (resta) de dos números racionales es racional, llegando a una contradicción pues $\sqrt{2}$ es irracional como ya se había demostrado. Por lo tanto $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$ es irracional.

De esta misma manera se puede demostrar que la suma de $\sqrt{2}$ con cualquier racional de la forma n/m pertenece al conjunto de los números irracionales.

De igual manera se procede con la resta, la multiplicación y la división de un racional con

$\sqrt{2}$ teniendo en cuenta las siguientes restricciones en la multiplicación y división:

La multiplicación de $0 \cdot \sqrt{2} = 0$ y 0 es racional.

No se puede dividir por 0 (cero) porque no está establecida debido a que todo número multiplicado por cero da cero.

Anexo 5:

RAICES EXACTAS

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{196} = 14$$

¿Qué tienen en común estas raíces cuadradas?

Tienen en común que 4, 9, 64 y 196 son números cuadrados perfectos porque $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $64 = 8^2$ y $196 = 14^2$

La propiedad de los exponentes plantea lo siguiente:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por esta propiedad es que resulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{4} &= \sqrt{2^2} = 2^{\frac{2}{2}} = 2^1 = 2 \\ \sqrt{4} &= 2 \end{aligned}$$

De lo anterior se puede observar que entonces la raíz cuadrada de un número cuadrado perfecto es racional:

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a$$

¿la raíz cuadrada de un número que no sea cuadrado perfecto es racional, por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ o $\sqrt{6}$ entre otros?

RAICES INEXACTAS

Observe lo siguiente:

$$\sqrt{4} = 2 \quad \text{porque} \quad 2^2 = 4$$

$$\text{y ahora:} \quad \sqrt{2} = ?$$

Busquemos un número que al elevarlo al cuadrado de 2 es decir $n^2 = 2$

Por ejemplo:

$$\begin{array}{lcl} 1^2 = 1 & \text{ó} & 1.4^2 = 1.96 \\ 1.41^2 = 1.9881 & & 1.42^2 = 2.0164 \end{array}$$

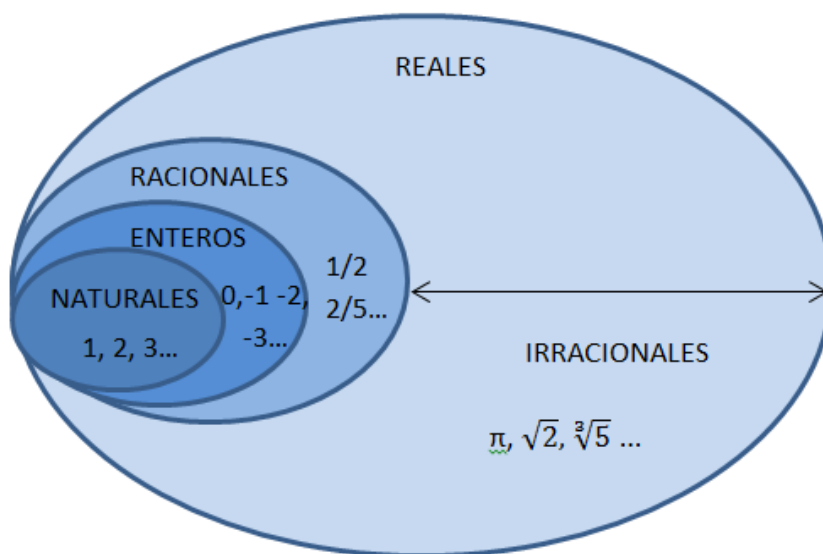
Esto quiere decir que el número que se busca está entre 1.41 y 1.42, pero observe que al elevar al cuadrado un número con cifras decimales, estas se duplican, o sea que un número con tres cifras decimales al elevarlo al cuadrado tendrá seis cifras decimales y así sucesivamente, lo que deja ver que a medida que se tomen más cifras decimales se aproxima más a 2, pero nunca será igual.

Es por esta razón que cualquier raíz cuadrada $\sqrt{n}$ de un número n , que no es cuadrado perfecto, es irracional, porque no existe un número racional que al elevarlo al cuadrado de exactamente n .

Anexo 6:

[La idea es completar el diagrama ubicando el nombre del conjunto numérico adecuado (**N**: naturales, **Z**: enteros, **Q**: racionales, **I**: irracionales) en los espacios, de tal manera que al acertar con la letra aparezcan algunos números en el conjunto correspondientes a él, y una nube que muestre la característica de dicho conjunto pero que al dar click desaparezca solo la nube para darle continuidad a la siguiente].

El diagrama inicial se encuentra vacío, luego a medida que se va dando click se va llenando hasta llegar al diagrama final que es:



Las nubes que presentan a cada conjunto dirán lo siguiente:

N: {son aquellos que se utilizan para contar}

Z: {es la ampliación de los naturales hacia los números negativos incluyendo al cero para establecer la propiedad de cerradura en las operaciones de suma y resta}

Q: {son aquellos que representan los cocientes entre dos números enteros}

I: {son aquellos que tienen infinitos decimales no periódicos}

Anexo 7:

Señalar con una x si pertenece o no a cada conjunto numérico:

Número	N	Z	Q	I
-8				
$\sqrt{10}$				
5				
127				
-17				
36				
$\sqrt[3]{8}$				
$3\sqrt{2}$				
8,36				
93,18...				
-5,21				
7,8				
$5 + \sqrt{3}$				
-46				
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$				

Anexo 8:

[La idea es presentar estas preguntas, y que al dar click sobre la última pregunta de paso a la solución que esta más abajo].

- ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$?
- ¿Cuál es la solución de la ecuación $x^2 - 3 = 0$?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $nx - m = 0$ donde n y m son enteros y n es distinto de cero?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^2 - m = 0$ con m entero positivo?
- ¿Cuál es la solución en general para una ecuación de la forma $x^3 - m = 0$ con m entero positivo?

La solución general a la ecuación $nx - m = 0$ es:

$$x = \frac{m}{n}$$

La solución general a la ecuación $x^2 - m = 0$ es:

$$x = \sqrt[2]{m}$$

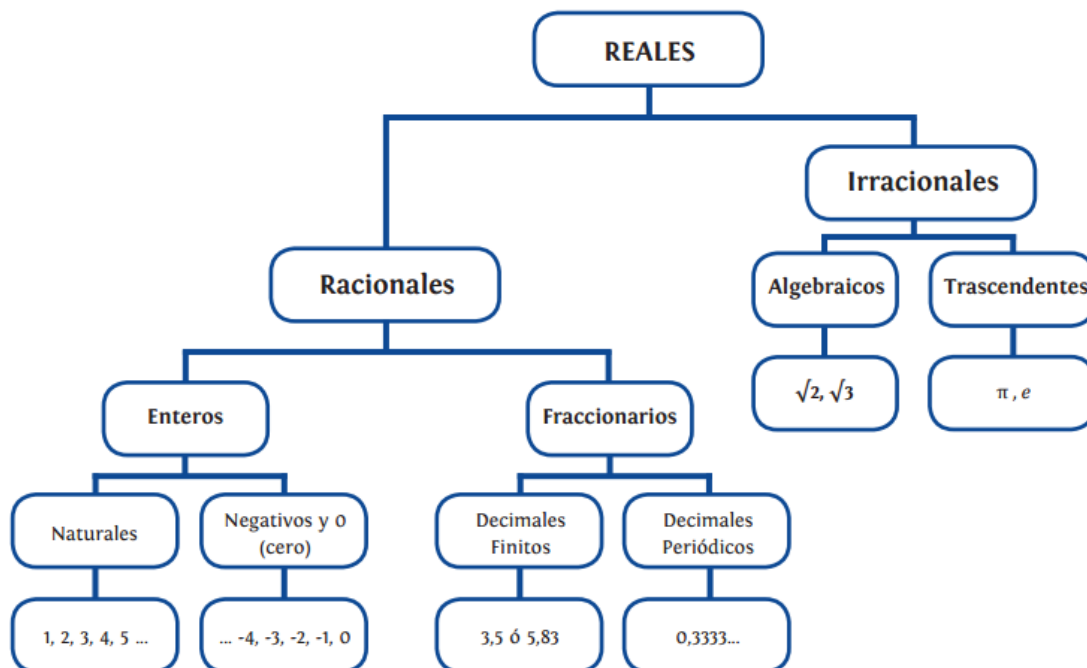
La solución general a la ecuación $x^3 - m = 0$ es:

$$x = \sqrt[3]{m}$$

De esto se puede concluir que todo número racional, toda raíz cuadrada de un entero positivo y toda raíz cúbica de un entero positivo son soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros.

Anexo 9:

[La idea es que se vaya descubriendo paso a paso todo el diagrama desde abajo hacia arriba]

**Anexo 10:**

- Si los números irracionales tienen infinitos decimales ¿Cómo hago para sumar, restar, multiplicar o dividir números irracionales?

Para sumar o restar irracionales solo puedo hacerlo entre cantidades irracionales semejantes, utilizando el método de factor común, por ejemplo:

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$3\pi - 7\pi + 2\pi = 2\pi$$

Mientras que:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

No se puede resolver porque no tienen un factor común.

Para multiplicar o dividir irracionales se siguen las reglas del álgebra, y en el caso de los irracionales con radicales se siguen las reglas de la radicación, observen algunos ejemplos:

$$e \cdot 4e^{2x+3} = 4e^{2x+4} \text{ con } x \in \mathbb{Z}$$

$$3\pi \cdot 7\pi^3 = 21\pi^4$$

$$\frac{12\pi^3}{3\pi} = 4\pi^2$$

para multiplicar irracionales con radicales

existen muchos caminos:

$$\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4(\sqrt{3})^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = 4 \cdot \sqrt{3 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

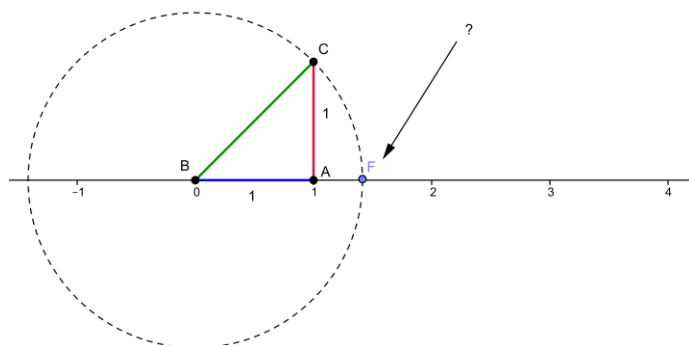
$$\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 4^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{3 \cdot 48} = \sqrt{144} = 12$$

Cuando los radicales no tienen el mismo índice:

$$\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \sqrt[2 \cdot 3]{5^3 \cdot 6^2} = \sqrt[6]{125 \cdot 36} = \sqrt[6]{4500}$$

Anexo 11:

[La idea es que el recurso muestre la construcción paso a paso del número $\sqrt{2}$]



El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 1 y haciendo uso del teorema de Pitágoras se obtiene que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ así:

$$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow h^2 = 1^2 + 1^2$$

$$h^2 = 1 + 1 = 2 \rightarrow h = \sqrt{2}$$

Luego se traza una circunferencia con centro en el origen y radio $AC = \sqrt{2}$ trasladando de esta manera la medida de $\sqrt{2}$ sobre la recta numérica, ya que AE es radio de la misma circunferencia por tanto:

$$AC = AE = \sqrt{2}$$

Anexo 12:

Si quiero construir $\sqrt{3}$ entonces

$$h = \sqrt{3} \rightarrow h^2 = ? + ? = 3$$

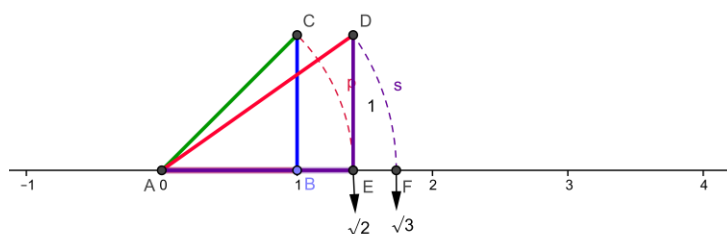
$$h^2 = 2 + 1 = 3$$

$$h^2 = a^2 + b^2 = 3$$

es decir que $a^2 = 2$ y $b^2 = 1$

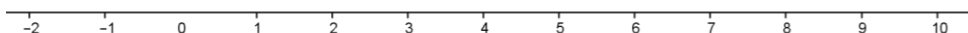
por lo tanto $a = \sqrt{2}$ y $b = 1$

Entonces si construyo un triángulo rectángulo similar al ejemplo de raíz de dos, pero cuyos catetos midan $\sqrt{2}$ y 1 obtengo la hipotenusa que mide $\sqrt{3}$ y luego con una circunferencia puedo trasladar la medida sobre la recta numérica.



Anexo 13:

[La idea es que el material del estudiante tenga el ejemplo del anexo 12 y la gráfica de la recta numérica sin el eje y, 4 veces para que puedan trabajar en cada una un número por separado]



A partir del manuscrito pedagógico, expertos diseñadores instruccionales y de multimedia desarrollan el recurso interactivo virtual que usará el docente para desarrollar la clase. El recurso virtual se encuentra disponible para todo público en la página principal del Cier-sur. El docente en compañía de los estudiantes desarrollan las actividades propuestas en cada objeto de aprendizaje, por ejemplo:

← → ↻ objetos.ciersur.co/LO/M_G11_U01_L02/M_G11_U01_L02/index.html

« Ocultar menú Anterior Siguiente »

Introducción

Objetivos de Aprendizaje

Objetivos

Contenido

Actividad 1

Actividad 2

Actividad 3

Actividad 4

Actividad 5

Resumen

Resumen

Tarea

Tarea

Créditos y Derechos

CONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES

ACTIVIDAD 1 ¿CÓMO DIFERENCIAR LOS NÚMEROS IRRACIONALES (I)?

Hacer clic en el botón para desplazarte

Realiza el ejercicio que se propone a continuación y empecemos a construir los números irracionales!!!

¿Recuerdas la diferencia entre números racionales e irracionales? Hagámoslo por medio del siguiente ejercicio.

Encuentra la expresión decimal de $7/4$ y $4/7$.

1

Encuentra la expresión fraccionaria para representar $2,34$ y $0,3333\dots$

2

¿Qué puedes concluir con los anteriores resultados?

3

Esta imagen muestra parte de la primera actividad, se observa que cada ejercicio cuenta con un espacio para anotar los aportes de los estudiantes. Luego al dar click sobre la flecha derecha, se llega a la fase de comprobación de respuestas:

« Ocultar menú Anterior Siguiente »

Introducción

Objetivos de Aprendizaje

Objetivos

Contenido

Actividad 1

Actividad 2

Actividad 3

Actividad 4

Actividad 5

Resumen

Resumen

Tarea

Tarea

Créditos y Derechos

CONSTRUCCIÓN DE ALGUNOS NÚMEROS IRRACIONALES

ACTIVIDAD 1 ¿CÓMO DIFERENCIAR LOS NÚMEROS IRRACIONALES (I)?

Hacer clic en el botón para desplazarte

Siguiendo el recurso constata los resultados a los ejercicios y la pregunta anterior

Para el primer ítem debiste haber obtenido los siguientes

1

Para el segundo ítem debiste haber tenido en cuenta los procedimientos para convertir de decimal a fracción, observa:

2

¿Notaste las diferencias que hay entre una y otra situación? Entonces tu conclusión del ejercicio tuvo que estar cerca de esta:

3

Pero, ¿Qué sucede si un número tiene infinitos decimales que no sean periódicos?

Cada pregunta tiene su explicación, la cual se obtiene al dar click sobre el número deseado. El recurso virtual está compuesto por tres componentes: la plataforma virtual, material del estudiante y material para el docente (manuscrito pedagógico). Se encuentra directamente en:

http://objetos.ciersur.co/LO/M_G11_U01_L02/M_G11_U01_L02/index.html

Capítulo 4

Conclusiones

Como hemos observado a lo largo de este trabajo, el reconocimiento de las cantidades no racionales se dio en un proceso largo y tortuoso. Así, los primeros atisbos de lo irracional se remonta a la época de los pitagóricos con la aparición de las magnitudes inconmensurables, las cuales surgieron en la actividad de comparar magnitudes entre sí en busca de una medida común a ambas. En el clásico problema de buscar una medida común para la diagonal del pentágono regular o la diagonal del cuadrado y sus respectivos lados, se perfilaba un proceso infinito de medidas sucesivas. Este descubrimiento llevó a crisis la teoría pitagórica sobre los números, para quienes los únicos números que gobernaban el universo correspondían a los números naturales. Después, con la llegada de la teoría de ecuaciones, se vio la necesidad de ampliar el campo numérico, aparecieron los racionales, para quienes se establecieron características operativas que les daba característica de números; igualmente se incorporaron algunos irracionales en la medida, en que como cantidades operables, permitían obtener resultados racionales. Cuando aparecen los trabajos de Wallis con fracciones continuas se descubren dos clases de números irracionales: algebraicos y trascendentes. Los algebraicos corresponden a todos los números que son solución de polinomios de grado n , con coeficientes enteros, entre los cuales se tienen a los racionales y las raíces inexactas, que en representación de fracción continua, correspondían a las fracciones finitas o infinitas periódicas. Mientras que los números trascendentes correspondían a las fracciones continuas infinitas no periódicas como el caso de π y e . Con el tiempo estas cantidades irracionales se aceptaban y usaban libremente sin preguntarse por la naturaleza de

dichos números, hasta que llega la formalización de los números reales con las teorías de Cantor y Dedekind.

Estos aportes históricos, sobre la evolución del concepto de número irracional, permite identificar algunos obstáculos epistemológicos presentes en el concepto mismo. Es para la educación matemática una necesidad determinar este tipo de obstáculos que se encuentra ligados al concepto, pues el desconocimiento de ellos dificulta el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo con Brousseau, los obstáculos son: “aquellos a los cuales uno no puede ni debe escaparse, del hecho mismo de su rol constitutivo del conocimiento a que se apunta. Uno puede encontrarlos en la historia del concepto mismo” (1983, p.073); tener conocimiento de los obstáculos epistemológicos amplía la perspectiva para desarrollar propuestas de enseñanza adecuadas, en la que se logre minimizar el impacto del choque cognitivo; recordemos que un obstáculo es la resistencia de un conocimiento adquirido a otro nuevo o a modificaciones.

En este trabajo se abordaron los obstáculos desde dos perspectivas: representatividad y operatividad. En cuanto a obstáculos referidos a la representación, se encuentra que el mayor obstáculo es la representación clásica de los números a través del sistema decimal posicional, pues desde este sistema no se logran caracterizar completamente los números irracionales. Se tiende a confundir los irracionales con sus aproximaciones, que es el método más utilizado y explotado en la escuela con el fin de facilitar la operatividad entre irracionales. El problema radica en el carácter infinito no periódico de cifras decimales. Cognitivamente es un proceso complejo pues involucra la aceptación inconsciente del infinito actual. Otro obstáculo se presenta cuando se caracterizan los irracionales desde la representación en forma de radicales, aunque se supera el problema de las cifras decimales infinitas no periódicas, no deja claridad sobre la

existencia de irracionales diferentes a los radicales, como logaritmos, π , e , entre otros. Con la incorporación de la representación en fracciones continuas se amplía el campo de los números irracionales y se pueden diferenciar los irracionales algebraicos de los trascendentes.

Los obstáculos relacionados con la operatividad, se refieren a la falta de un algoritmo general para realizar las cuatro operaciones básicas entre números irracionales. Teniendo en cuenta que se opera con las representaciones de los números, los algoritmos operativos varían de acuerdo a la representación que se utilice. Para los números racionales, por ejemplo, se logra establecer algoritmos para las cuatro operaciones, ya sean representados en el sistema decimal posicional o como fracción de la forma p/q con p y q números enteros y $q \neq 0$. Con los irracionales no sucede lo mismo, no se puede establecer un algoritmo universal. Cuando se utiliza la representación radical para algunos irracionales, se pueden llevar a cabo operaciones como multiplicación y división ya que se rigen bajo las propiedades de las potencias, sin embargo son muchos otros irracionales los que se quedan sin algoritmo operativo. Desde nuestra perspectiva, enfocada a la enseñanza en la secundaria, se plantea una pequeña salida al obstáculo de la operatividad a través de la representación geométrica de algunos irracionales, pues desde la geometría de segmentos se pueden realizar las cuatro operaciones básicas entre ellos. Claro está, que el obstáculo no se ha superado por completo, pues solo una pequeña parte de los números irracionales se puede representar a través de segmentos, aquellos que corresponden a las raíces cuadradas inexactas. Se quedan muchos por fuera, pero al menos se pueden abordar las cuatro operaciones desde esta representación.

La propuesta realizada en el marco del proyecto “Construyendo capacidades en el uso de las TIC para innovar en la educación” del MEN, estuvo limitada a los requerimientos que el Ministerio de educación había implementado para el desarrollo de dicho proyecto, básicamente la propuesta

se regía por los contenidos y habilidades establecidas en la malla curricular y desde una perspectiva constructivista. Los contenidos en la malla curricular apuntan hacia el reconocimiento de los números irracionales, a diferenciarlos de los racionales, a clasificar los números en los distintos conjuntos numéricos y finalmente a construir algunos irracionales.

La propuesta desarrollada permite llevar a cabo actividades en clase que potencialicen la comprensión de la existencia de los números irracionales, como fueron surgiendo a través de la historia y en donde se pueden encontrar. Sin embargo queda faltando actividades que potencialicen la operatividad entre irracionales, aunque se deja una pequeña guía de cómo hacerlo, y se propone como tarea, hace falta desarrollar más actividades que movilicen el conocimiento operativo de los números irracionales.

Esta propuesta se encuentra en una plataforma virtual, dinámica, que se espera sea utilizado por los docentes para el desarrollo de las clases. En la página del CIER-Sur se pueden encontrar otros objetos de aprendizaje, especialmente el anterior y posterior a este, llamados: construcción de los números naturales, enteros y racionales y Caracterización de los números reales; también se encuentran objetos de aprendizaje en las áreas de lenguaje y ciencias.

Cabe resaltar que el campo de los números irracionales abarca muchos aspectos, desde representación y operatividad hasta la construcción de reales con cortaduras de Dedekind o con sucesiones de Cantor, la incorporación de la operación de paso al límite juega un papel importante en esta teoría, y exige un análisis más profundo, especialmente sobre los últimos aportes relacionados con la axiomatización o construcción de los números reales. En un futuro se espera diseñar una mejor propuesta para la enseñanza de los números irracionales, donde se pueda incorporar representaciones en fracciones continuas y operatividad entre irracionales, así como también el carácter de densidad de los irracionales. Aunque en la propuesta se quiso

abordar parte de esto, no fue aceptado en tanto que se salía del margen de los contenidos establecidos en la malla curricular, debido en gran manera a que correspondían a las habilidades y conocimientos del objeto de aprendizaje siguiente, según la malla.

Esperamos que este trabajo sea de gran utilidad para los docentes de bachillerato.

Bibliografía

- Arbelaez, G., & Recalde, L. (2011). *los numeros reales como objeto matematico*. Cali: Programa editorial Universidad del Valle.
- Bergé, A., & Sessa, C. (2003, noviembre). completitud y continuidad revisadas a traves de 23 siglos. aportes a una investigacion didactica. *Revista latinoamericana de investigacion en matematica educativa*. Vol. 6, num 3. pp 163-197.
- Boyer, C. (1987). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial.
- CIER. (2015, junio 15). *CIER-SUR: Centro de innovación educativa regional Sur*. [pagina web]
Recuperado de <http://ciersur.univalle.edu.co>
- Dedekind, R. (1927). continuidad y numeros irracionales. (5° edición). (J. Bares, & J. Climent, Trads.)
- Giraldo, A. & Quesada, A. (2012) Un estudio de los números irracionales en los libros usados en el grado octavo en Florencia, Caquetá. *Asocolme (227-232)* Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/2526/1/UnestudioGiraldoAsocolme2012.pdf>
- Euclides. (1991). *Elementos*. (M. L. Puertas, Trad.) Madrid: Gredos.
- Londoño, N., & Bedoya, H. (1988). *Serie Matemática Progresiva*. Bogota: Editorial Norma.
- MEN. (2006). *Estandares Básicos*. Bogotá.
- Recalde, L., & Valencia, S. (2009). La construccion historica de los numeros reales:de las tecnicas operativas a las representaciones formales. cali.
- Recalde, L. (2011). *Lecciones de Historia*. Cali: Universidad del Valle.

- Recalde, L. (2011). medida, numero y magnitud en la antigüedad griega. En L. Arboleda, L. Recalde, G. Arbelaez, M. Anacona, G. Ortiz , F. Galvez, . . . L. Valoyes, *los numeros reales: una perspectiva historico epistemologica* (págs. 39-68). Cali: Universidad del Valle.
- Sanchez, J., & Valdiva, C. (2011). el numero irracional: un punto de vista epistemologico con interes didactico. *TEACS*, 31-45.
- Sanchez, J., & Valdiva, C. (2014). estudio del numero irracional en los libros de texto escolar: una vision desde el PMA. *Revista Premisa*, 36-48. Recuperado de www.soarem.org.ar/Documentos/62_Sanchez_Valdiva.pdf.
- Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar numeros reales en la recta*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada. Granada.
- Socas, M. (2010). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En: Velasco, M. Mejía, M. *Las matemáticas su enseñanza y aprendizaje: I. Pensamiento variacional y algebra en la escuela..* (19-48) Cali: Universidad del valle.
- Veles, N. (2011). analisis historico-epistemologico del concepto de numero irracional y los obstaculos presentes en su transposicion textual. (Tesis pregrado). Universidad del valle. Cali.
- Viedma, J (1969). *Lecciones de geometria intuitiva*. Ed. 8 Cali: Norma..