



Las decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas: El caso de la semejanza

Vladimir Alexander Pechene Montenegro

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática

2024



Las decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas: El caso de la semejanza

Vladimir Alexander Pechene Montenegro

PhD. Diego Garzón Castro

Director trabajo de grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática

2024

Dedico este trabajo a mis padres Hilda y Juvenal

Agradecimientos

En primer lugar, doy gracias a Dios por permitirme culminar a satisfacción este trabajo.

A mi madre Hilda por sus tantas palabras de aliento que me impulsaron a seguir adelante y culminar este proceso.

A mi padre Juvenal. Su partida me mostró lo duro que puede ser la vida, pero a la vez esta pérdida me hizo más fuerte, más resiliente.

Al profesor Diego Garzón Castro por su confianza, dedicación, apoyo constante e infinita paciencia. Sin su orientación, sugerencias y discusiones no hubiera sido posible este trabajo.

A los compañeros integrantes del Grupo de Educación Matemática, GEM, por ser como son.

A todas las personas que directa o indirectamente me apoyaron en este proceso.

A la Universidad del Valle por darme el privilegio de encontrar maestros y compañeros que con sus aportes moldearon el profesional que soy hoy.

Este resultado se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación que financió el programa de investigación «Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro»,

código 1115-852-70767, a través de la convocatoria 891- 2020, contrato 133-2021, proyecto

código 71327 del Patrimonio Autónomo Fondo Nacional de Financiamiento para la Ciencia, la Tecnología y la Innovación Francisco José de Caldas

Resumen

Este estudio tuvo como objetivo caracterizar las decisiones de acción del futuro profesor de matemáticas al aplicar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. Para dar cuenta de las decisiones de acción del futuro profesor se emplearon las aproximaciones teóricas de la competencia docente *mirada profesional del profesor de matemáticas*, la heurística de los modelos emergentes, la trayectoria hipotética de aprendizaje y la semejanza como objeto de reflexión. La aproximación metodológica correspondió a la investigación basada en el diseño (IBD) y la estrategia metodológica a los experimentos de enseñanza. Se obtuvieron dos resultados de investigación. El primer resultado mostró que la relación de los futuros profesores con los elementos constitutivos de la trayectoria hipotética de aprendizaje para responder al pensamiento matemático de los estudiantes se centró en el desarrollo de las tareas de aprendizaje. El segundo resultado mostró que las decisiones de acción de los futuros profesores se destacaron por privilegiar acciones dominantes centradas en representaciones de cómo los estudiantes comprenden la semejanza de figuras planas, y en función de razonar respecto al pensamiento matemático del estudiante. Este estudio pretende contribuir al creciente número de investigaciones que reflexionan respecto al uso de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como lente teórico que posibilita a los profesores comprender el pensamiento matemático del estudiante y planificar respuestas con base en dicha comprensión.

Palabras claves: decisiones de acción, formación de profesores, heurística de los modelos emergentes, semejanza, trayectoria hipotética de aprendizaje.

Abstract

This study aimed to characterize the action decisions of future mathematics teachers when implementing a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) for teaching similarity using digital curricular resources. To account for the future mathematics teachers' action decisions, the theoretical approaches of teacher competence, the professional view of the mathematics teacher, the heuristic of emerging models, the hypothetical learning trajectory, and similarity as an object of reflection were employed. The methodological approach corresponded to Design-Based Research and the methodological strategy to teaching experiments. Two research results were obtained. The first result showed that the future teachers' relationship with the constituent elements of the HLT to respond to students' mathematical thinking focused on the development of learning tasks. The second result showed that the future teachers' action decisions were characterized by privileging dominant actions focused on representations of how students understand the similarity of plane figures, and making decisions based on reasoning about students' mathematical thinking. This study aims to contribute to the growing body of research that reflects on the use of HLTS as a theoretical lens that enables teachers to understand students' mathematical thinking and plan responses based on that understanding.

Keywords: action decisions, teacher education, heuristic of emergent models, similarity, hypothetical learning trajectory

Tabla de contenido

Resumen	IX
Abstract	X
1. Planteamiento del problema	16
Pregunta de investigación	25
Objetivo general	25
Objetivos específicos	25
2. Referentes teóricos	26
La competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante	26
La trayectoria hipotética de aprendizaje	29
La heurística de los modelos emergentes	31
La semejanza como objeto de reflexión	34
La semejanza desde un punto de vista matemático	34
La semejanza desde un punto de vista didáctico	36
3. Metodología	39
La investigación basada en el diseño (IBD)	39
Las fases de la IBD	40
Fase 1. Preparación del experimento	40
Cuestionario de caracterización de los futuros profesores	41

Entrevista semiestructurada -----	44
Operacionalización de la habilidad de decidir y de la escala de nivel de respuesta de los FP -----	47
Elaboración de la THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales -----	48
Fase 2. El experimento de enseñanza-----	62
Intervención por parte de los futuros profesores con la THA para la enseñanza de la semejanza -----	62
Fase 3. El análisis retrospectivo -----	63
Transcripción, segmentación e identificación de acciones de los FP y emergencia de categorías descriptivas -----	64
4. Resultados -----	74
La relación de los FP con los elementos constitutivos de la THA que se usa como medio para la enseñanza de la semejanza ----- y para la formación de profesores -----	74
Las decisiones de acción del FP al utilizar la THA para la enseñanza de la semejanza -----	79
Las acciones dominantes del FP que limitan la respuesta a la expresión matemática del estudiante -----	80
Transformación de las acciones del FP como respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante -----	84
Estado de las acciones del FP al intervenir con la THA para la enseñanza de la semejanza en el aula -----	94

Falta de evidencia de decidir del FP con base en la respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante -----	94
Evidencia limitada de las decisiones de acción del FP en su gestión de aula -----	97
5. Conclusiones y discusiones-----	102
Una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales -----	102
Las decisiones de acción de los FP al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza-----	103
Limitaciones y recomendaciones-----	105
Contribuciones al campo de investigación-----	106
Futuras líneas de investigación -----	106
6. Referencias -----	108

Índice de tablas

Tabla 1. Cuestionario de caracterización de los futuros profesores de matemáticas	42
Tabla 2. Preguntas del instrumento para la entrevista semiestructurada.....	45
Tabla 3. Niveles de la heurística de los modelos emergentes y la relación con las tareas de aprendizaje.	51
Tabla 4. Tareas de aprendizaje y proceso hipotético de aprendizaje de la THA respecto a la semejanza.	55
Tabla 5. Reconocimiento de las interacciones profesor-estudiante en el segmento de enseñanza S14	66
Tabla 6. Categorías emergentes de las acciones de Anderson y Katherine	69
Tabla 7. Categorías emergentes del análisis de la entrevista final realizada a los FP	72
Tabla 8. Relación del FP Katherine con los elementos constitutivos de la THA.....	75
Tabla 9. Relación del FP Anderson con los elementos constitutivos de la THA	77
Tabla 10. Acciones dominantes del FP que limitan la respuesta a la expresión matemática del estudiante	81
Tabla 11. Transformación de las acciones del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante	85
Tabla 12. Transformación de las acciones del FP en respuesta al PM del estudiante.....	90

Índice de figuras

Figura 1. Niveles de actividad matemática vinculados a los modelos emergentes.	33
Figura 2. Semejanza de espiral.....	35
Figura 3. Reflexión dilatativa	35
Figura 4. Acción dominante del FP de proveer instrucciones para el uso del recurso.	84
Figura 5. Transformación de las acciones del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante	89

1. Planteamiento del problema

Este estudio se inscribe en la línea de investigación Prácticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática (PTICEM). En particular, en la sublínea que se ocupa del estudio de las habilidades situadas del profesor.

La investigación se apoya en la *competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante*, que se define como el conjunto de tres habilidades articuladas entre sí: identificar, interpretar y decidir (Jacobs *et al.*, 2010). El interés de esta investigación radica en analizar cómo los futuros profesores de matemáticas usan el conocimiento profesional para gestionar la enseñanza del razonamiento y la construcción de sentido geométrico acerca de la semejanza.

La competencia docente mirar profesionalmente ha sido objeto de atención en la investigación reciente (Amador *et al.*, 2021; Dindyal *et al.*, 2021). Esta competencia implica la capacidad de los futuros profesores para identificar aspectos relevantes en el aula, interpretarlos basado en principios teóricos y tomar decisiones informadas sobre la instrucción (Fernández y Choy, 2020).

La competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante se caracteriza por el uso del conocimiento profesional del futuro profesor en situaciones de enseñanza. Esta le permite reconocer las estrategias que usan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problema, interpretar las estrategias empleadas con relación a

una situación y decidir cómo responder (decisiones de acción¹) teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

De estas habilidades, varias han sido las investigaciones que han mostrado que la habilidad de decidir cómo responder a la comprensión del estudiante, es la más difícil de desarrollar por los profesores y futuros profesores de matemáticas (Amador *et al.*, 2021; Stahnke *et al.*, 2016).

Por ejemplo, Mason (2011) manifiesta que la capacidad de tomar decisiones teniendo en cuenta el pensamiento y el razonamiento de los estudiantes depende de la visión específica de la profesión, por tanto, requiere de un dominio de conocimiento tanto de contenido pedagógico como de matemático.

En ese sentido, Krupa *et al.* (2017) argumentan que decidir es la habilidad más exigente de desarrollar y no necesariamente aumenta con la experiencia, sino que requiere de trabajo focalizado y experiencias de desarrollo profesional.

Se ha evidenciado que los futuros profesores pueden aprender a identificar detalles en las estrategias usadas por los estudiantes que les permiten interpretar su comprensión, pero en ocasiones no son capaces de utilizar esta información para apoyar sus decisiones de enseñanza.

En ese sentido, se ha logrado reconocer que la investigación sobre el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante ha examinado cómo las THA pueden proporcionar a los futuros profesores un marco estructurado que les ayude a

¹ Las decisiones de acción forman parte de uno de los tres componentes de la mirada profesional del profesor. Se encuentran asociadas con el razonamiento del profesor para responder a las estrategias del estudiante que aborda una situación problema y dan cuenta de la capacidad del docente para interpretar y mirar con sentido las interacciones que emergen en el aula.

identificar las estrategias de los estudiantes, interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y decidir con una instrucción apropiada (Fernández y Choy, 2020; Ivars *et al.*, 2020)

Así pues, las THA se conciben como un instrumento que sirve de referencia a los futuros profesores para identificar diferentes grados de comprensión, y proponer tareas que enfatizan en la progresión conceptual del estudiante de un concepto matemático determinado (González-Forte *et al.*, 2020)

En este sentido, Ivars *et al.* (2018) señalan la importancia del uso de las THA como guía para observar el pensamiento matemático del estudiante y como herramienta para mejorar el discurso profesional del futuro profesor acerca de los contenidos matemáticos y sobre la comprensión de los estudiantes.

Al respecto, Yuliardi y Rosjanuardi (2021) en su artículo —cuyo propósito consistió en explorar las habilidades espaciales (percepción espacial, visualización espacial y razonamiento espacial) de veinte estudiantes de noveno curso de una escuela privada islámica relacionadas con las transformaciones geométricas a partir del uso de una THA— mostraron que la THA es un instrumento importante para que los profesores organicen las trayectorias de aprendizaje y promuevan el desarrollo de habilidades espaciales de los estudiantes relacionadas con las transformaciones geométricas. De la misma manera, destacaron que el acompañamiento continuo de los profesores en el proceso de aprendizaje es esencial para alcanzar la trayectoria de aprendizaje y, además, que el uso de recursos tecnológicos como Cabri 3D y GeoGebra pueden mejorar el desarrollo de habilidades espaciales de los estudiantes.

Asimismo, Kuncoro *et al.* (2023) en su artículo reportan el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para el concepto de semejanza, basada en la investigación de diseño didáctico (IDD por sus siglas en inglés) que tuvo como propósito diseñar una secuencia de tareas

que apoye a los estudiantes a superar errores y dificultades asociadas con los conceptos de escala, ampliación y las relaciones entre las proporciones y el factor de semejanza. Entre los resultados se destaca que el uso de enfoques centrados en el estudiante, el uso de estrategias de aprendizaje activo y la participación interactiva son factores clave para ayudar a superar errores y dificultades, asimismo, el diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje cuidadosamente diseñada puede mejorar la comprensión de los estudiantes del concepto de semejanza y la posibilidad de aplicarlo en situaciones del mundo real.

Por su parte, Sacristán *et al.* (2010) en su artículo reflexionan en torno a las THA argumentando que la mediación por tecnologías digitales ofrece a los docentes la oportunidad de examinar o explorar formas en las que se pueden desarrollar conceptos matemáticos y estrategias de resolución de problemas, convirtiéndose en elementos relevantes para organizar y estructurar rutas potenciales que pueden guiar el desarrollo de conceptos matemáticos y los enfoques de resolución de problemas de los estudiantes. En concordancia con esta reflexión, se presentan algunos estudios en los cuales las THA integraron recursos curriculares digitales².

² Adler (2000) conceptualiza los recursos como «reaprovechamiento». Al respecto, plantea que describir el trabajo del profesor en términos de «reaprovechamiento» implica entender que los recursos no son objetos estáticos, sino que su uso es una acción activa por parte de los profesores, quienes constantemente los adaptan y reutilizan en la práctica educativa. Remillard (2018) hace referencia al término currículo en relación con el itinerario o secuencia de aprendizaje guiada para los estudiantes. En ese sentido, los recursos curriculares son aquellos artefactos diseñados específicamente para apoyar procesos de enseñanza y aprendizaje que ayudan a secuenciar o planificar el aprendizaje de los estudiantes a lo largo de un periodo. Así pues, los recursos curriculares incluyen los libros de texto (diseñados para el uso directo de los estudiantes), las guías del profesor (contienen orientaciones específicas para ayudar a los docentes a estructurar y dar forma a su enseñanza) y los documentos (corresponden al resultado del trabajo de diseño curricular de los profesores). Según Remillard (2018) los recursos curriculares digitales comprenden una amplia gama de herramientas y materiales diseñados para apoyar los procesos de enseñanza y

Sarvita y Syarifuddin (2020) en su artículo analizan el desarrollo de una THA para el estudio de la integral definida basada en la educación matemática realista, el propósito consiste en que los estudiantes conceptualizan el objeto matemático por sí mismos a partir de su experiencia. El enfoque metodológico correspondió a la investigación basada en el diseño con sus tres fases: diseño, intervención y análisis retrospectivo. Entre sus resultados se destaca que el diseño de una THA para el estudio de la integral definida es un instrumento valioso para guiar a los estudiantes a construir y descubrir el concepto de integral por sí mismos a partir de su experiencia. También, la THA posibilita que los estudiantes utilicen su capacidad de razonamiento para resolver el problema real dado con el fin de mejorar su razonamiento matemático.

Morales *et al.* (2019) en su artículo describen una propuesta teórico-didáctica para la planeación de enseñanza del concepto de área de polígonos a partir de dos THA mediadas por el uso del software GeoGebra. El resultado que se destaca es que el software GeoGebra juega un papel de recurso heurístico principal, ya que permite realizar transformaciones que posibilitan demostrar fórmulas para medir el área de un triángulo, favoreciendo propiedades esenciales que reafirman el concepto de área.

Por otro lado, en su informe final de maestría Cumbal (2020) contribuye al desarrollo de investigaciones que emergen de estudios empíricos en las que se caracterizan las prácticas de profesores noveles en la integración de recursos digitales. Entre sus resultados se destaca que: (a)

aprendizaje de los estudiantes a lo largo del tiempo, estos recursos pueden ser proporcionados, apropiados o diseñados por los profesores. Así pues, los recursos curriculares digitales incluyen, por ejemplo, simulaciones, vídeos y herramientas interactivas.

el conocimiento tecnológico pedagógico del contenido determina las características de la práctica del profesor en el desarrollo de las tareas, y (b) las THA son una herramienta eficaz en la enseñanza, ya que permite a los profesores noveles en la integración de recursos digitales atender el pensamiento matemático de los estudiantes en el momento del desarrollo de las tareas de aprendizaje.

Finalmente, Lee (2020) en su artículo presenta un estudio en el que indaga la interacción del futuro profesor con un ambiente tecnológico con el fin de determinar potencialidades y limitaciones de dicho ambiente para contribuir al desarrollo de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes. Entre los hallazgos se destaca: (a) el uso de instrumentos tecnológicos ayuda a los futuros profesores a centrarse en cómo hacer preguntas, predecir las posibles respuestas de los estudiantes y responder para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, (b) los futuros profesores lograron identificar los errores de los estudiantes, pero varios de ellos no lograron interpretar las dificultades matemáticas de los estudiantes, (c) el razonamiento de los estudiantes incluyó sugerencias pedagógicas centradas en el profesor y de tipo procedimental dejando de lado los razonamientos para apoyar el aprendizaje conceptual.

Por otro lado, en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza se reconoce que en los referentes curriculares (lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias) se enfatiza en promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, en especial, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. De manera particular, estos referentes proponen el estudio de la semejanza entre los grados séptimo y noveno, convirtiéndose así en un pilar fundamental en el desarrollo de las matemáticas en grados de la educación media en el estudio de la trigonometría, y en educación superior en el aprendizaje de la geometría euclidiana, analítica y el cálculo (Vanegas, 2019).

Teniendo como base la promoción del desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos, en particular, el razonamiento y la construcción de sentido geométrico respecto a la semejanza, algunos autores como Gualdrón y Gutiérrez (2006) en su artículo reflexionan en torno a las ideas previas, conocimiento y razonamiento que poseen estudiantes de grado noveno en relación con la semejanza de figuras planas. Entre sus resultados se destaca que: (a) los estudiantes logran reconocer y usar estrategias correctas al enfrentarse y desarrollar las actividades propuestas relacionadas con la semejanza, (b) los estudiantes mostraron evidencia de haber adquirido estrategias correctas y un casi nulo uso de estrategias erróneas para resolver tareas relacionadas con la semejanza, y (c) los estudiantes comprendieron y son conscientes que la operación necesaria para enfrentar tareas relacionadas con la razón y la proporción es la multiplicación y no la adición.

Más adelante, Gualdrón (2014) presenta los resultados preliminares de una investigación sobre la evolución del razonamiento de los estudiantes al enfrentar tareas de semejanza, caracterizando a priori los descriptores de nivel de van Hiele según estudios previos (Gualdrón y Gutiérrez, 2006). Estos descriptores se validan y amplían mediante una intervención educativa basada en la unidad de enseñanza de Lemonidis (1991) y el modelo de razonamiento de van Hiele. Los resultados muestran que los estudiantes poseen herramientas de razonamiento más avanzadas y efectivas en comparación con estudios anteriores (Gualdrón y Gutiérrez 2006) y que la mayoría ha alcanzado el tercer nivel de van Hiele en semejanza, lo cual es significativo, ya que generalmente solo alcanzan el segundo nivel (Gualdrón y Gutiérrez, 2006).

Por su parte, Ojeda (2022) en su artículo, desde una perspectiva cognitiva, resalta la importancia de favorecer procesos como el de visualización en la construcción del concepto de semejanza de figuras geométricas en estudiantes de séptimo. El enfoque metodológico que

empleó fue la investigación basada en el diseño con sus tres fases, ya que permitió construir, implementar y evaluar una secuencia de tareas que apuntan a promover la comprensión de la semejanza a través de la visualización. Los resultados muestran que los estudiantes tienden a privilegiar la visualización icónica, reconociendo figuras más que identificando sus propiedades. A medida que avanzan, proponen trazos auxiliares que generan nuevas figuras, pasando de la aprehensión perceptiva a la operatoria. Finalmente, el análisis revela que estos trazos auxiliares favorecen las propiedades cualitativas y la representación no icónica, con la aprehensión perceptiva actuando como eje entre el discurso y las operaciones sobre las representaciones.

De Souza Brito y Bairral (2023) en su artículo destacan que los triángulos son el único grupo de polígonos no deformables, por tanto, presentan características fundamentales para el estudio de la semejanza. Con base en ello, Machado (2000) resalta que las condiciones de semejanza en los triángulos tienden a privilegiar la relación: a segmentos proporcionales, ángulos correspondientes congruentes y viceversa, lo que favorece la comprensión de la semejanza en contextos geométricos. No obstante, González *et al.* (1990) mencionan que en el lenguaje cotidiano tal relación puede ser confusa para los estudiantes, ya que la expresión «semejante» puede referirse a objetos idénticos o parecidos, lo que discrepa de la definición de semejanza asociada a la igualdad en la forma y a la diferencia o equivalencia en el tamaño.

Por otra parte, Sanabria (2018) presenta como resultado de una propuesta didáctica para la enseñanza de los conceptos de semejanza y congruencia, dirigida a estudiantes de grado octavo que: (a) el análisis histórico de la semejanza y la congruencia aportan una mirada amplia del desarrollo de estos conceptos, lo que posibilita generar inquietudes en los estudiantes y con ello la interiorización de dichos conceptos, (b) las aplicaciones de situaciones en la vida real son excusas poderosas en la asimilación de conceptos de semejanza y congruencia, ya que permite que los

estudiantes a partir de su experimentación directa los comprendan e interioricen, y (c) la apropiación de un concepto no se puede delegar al uso de un programa o software, es necesario que los estudiantes experimenten con sus propios sentidos y usen los materiales para entrar en comunicación directa con la geometría.

Dündar y Gündüz (2017) en su estudio examinan el nivel de conocimientos conceptuales de los futuros profesores de matemáticas de primaria relacionados con la congruencia y semejanza en triángulos, así como su capacidad para representar estos conocimientos relacionarlos con la vida cotidiana y resolver problemas geométricos asociados estos conceptos matemáticos. Entre sus resultados se destaca que: (a) los futuros profesores tienen éxito en preguntas de conocimientos conceptuales, pero presentan dificultades en la justificación de sus respuestas, (b) los futuros profesores presentan dificultades al resolver problemas de situaciones reales relacionadas con congruencia y semejanza en triángulos, y (c) tales dificultades afectan la frecuencia de uso de la justificación matemática por parte de los futuros profesores en los cursos. Se sugiere que en la formación de profesores se privilegien actividades centradas en la justificación y resolución de problemas de la vida real relacionados con congruencia y semejanza.

Finalmente, Quintero *et al.* (2012) señalan como resultado de su estudio la importancia y necesidad de mejorar el nivel de conciencia que los profesores de matemáticas tienen frente al conocimiento matemático en relación con la proporcionalidad geométrica y la semejanza. Entre los resultados destacados se tiene que: (a) la semejanza alude a una relación entre figuras rectilíneas, en tanto que la proporcionalidad geométrica alude a relaciones de segundo orden, esto es relaciones de magnitudes geométricas homogéneas, (b) la semejanza como la proporcionalidad son percibidas a través de la representación propia de los objetos geométricos y por tanto, se deducen desde una perspectiva hipotética deductiva.

En síntesis, teniendo en cuenta las investigaciones presentadas, el estudio de las prácticas del profesor en la que se integran recursos curriculares digitales para el desarrollo del pensamiento geométrico se considera un campo de indagación que puede proporcionar información que permita favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, en particular, el desarrollo de la competencia mirada profesional del pensamiento matemático del estudiante. En ese sentido, se plantea la siguiente pregunta de investigación.

Pregunta de investigación

¿Cómo las decisiones de acción de los futuros profesores se modifican con los usos de la trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la semejanza al integrar recursos curriculares digitales?

Objetivo general

Analizar las decisiones de acción de los futuros profesores al implementar una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales.

Objetivos específicos

Analizar los elementos de la trayectoria hipotética de aprendizaje que contribuyen a la enseñanza de la semejanza y a la formación de profesores de matemáticas.

Describir las decisiones de acción de los futuros profesores de matemáticas al usar la trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la semejanza.

2. Referentes teóricos

Con el fin de describir atributos relacionados con las decisiones de acción de los futuros profesores al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales se articulan dos aproximaciones teóricas: la competencia docente *mirada profesional del pensamiento matemático del estudiante* (Jacobs *et al.*, 2010) y la *trayectoria hipotética de aprendizaje* (Fernández y Choy, 2020).

Para el estudio de las prácticas se recurre al diseño de una THA que se apoya en la heurística de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999) y de una reflexión de la semejanza como objeto de estudio.

La competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante

Mirar es algo que se hace todo el tiempo. Mason (2002) afirma que los profesionales tienen sensibilidad al mirar ciertas cosas en situaciones profesionales. En el caso de los profesores, el aula es el entorno profesional y acorde con van Es y Sherin (2002) las interacciones en el aula son el centro de la atención del profesor.

Mirar ha sido conceptualizado desde distintas perspectivas, por ejemplo, Mason (2002) sugiere que *mirar profesionalmente* refiere a la acción de sensibilizarse para observar lo que una persona no está acostumbrada a observar, desde esta postura se distinguen cuatro características: (a) identificar aspectos relevantes a partir de un objetivo que guía la observación, (b) describir los aspectos observados, (c) reconocer alternativas de acción, y (d) validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido.

En contextos de la enseñanza, van Es y Sherin (2002) reconocen la mirada profesional como: (a) detectar en la situación de clase lo que es importante, (b) establecer conexiones entre los aspectos específicos de las interacciones de clase y los principios de la enseñanza y el aprendizaje

que los representan, y (c) razonar respecto a las interacciones en el aula sobre la base de lo que se conoce en relación con el contexto.

Ambas perspectivas enfatizan en la importancia de identificar e interpretar aspectos relevantes de una situación (de enseñanza y aprendizaje en el caso de van Es y Sherin (2002).

Esta forma de conceptualizar la mirada profesional dirige su foco en la interpretación como instrumento para comprender cómo los docentes usan su conocimiento profesional para atender las distintas situaciones de aula (Ivars y Fernández, 2015).

Otra perspectiva a través de la que se ha conceptualizado la mirada profesional del profesor de matemáticas ha sido la de «dar sentido a lo que los profesores ven en el aula de clase», para lo cual la experiencia, posturas filosóficas y antecedentes culturales influyen en cómo se ve y se dota de sentido.

Así pues, Jacobs *et al.* (2010) conceptualizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante como un conjunto de tres habilidades interrelacionadas entre sí: *identificar* las estrategias de los estudiantes, *interpretar* la comprensión del estudiante y *decidir* cómo responder con base en la comprensión del estudiante.

Desde esta perspectiva, la habilidad de decidir es el elemento central de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante y su foco se dirige a dar cuenta de cómo los docentes aplican su conocimiento de las matemáticas del estudiante en contextos particulares y reconocer la medida en que este razonamiento se alinea con la investigación en el campo. Así las cosas, la toma de decisiones se basa en una articulación de conocimientos teóricos, experiencia práctica y una comprensión contextual del estudiante.

Según Jacobs *et al.* (2011) la habilidad de decidir cómo responder con base en el pensamiento matemático del estudiante refleja la intención del profesor de responder, no la

ejecución de la respuesta en sí. Se reconoce que la respuesta prevista del profesor no siempre se realiza según lo planeado, sin embargo, la decisión del profesor de responder basándose en el pensamiento matemático del estudiante implica una intención deliberada de hacerlo. En otras palabras, decidir comprende reconocer si la toma de decisiones del profesor se fundamenta y es coherente con el pensamiento matemático del estudiante en una situación determinada y con la investigación sobre el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Con base en esto, Jacobs *et al.* (2011) describen escalas que dan cuenta del nivel de respuesta de los profesores en la habilidad de decidir, a partir de la respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática de los estudiantes.

Pruebas sólidas de decidir a partir de las respuestas a las manifestaciones de la expresión matemática de los estudiantes. Comprende las respuestas del profesor en las que considera de manera amplia y detallada las expresiones matemáticas del estudiante, relacionadas con las estrategias y la solución de problemas. *Evidencia limitada de decidir a partir de las respuestas a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante.* Comprende las respuestas del profesor en las que consideran parcialmente las expresiones matemáticas del estudiante, es decir, suministra menos detalle en las respuestas proporcionadas. *Falta de evidencia de decidir en función de las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante.* Comprende la respuesta del profesor centrada en comentarios generales u observaciones dominadas por el pensamiento del profesor.

Posteriormente, Amador (2019, 2022) amplía el marco para enfatizar en la importancia del contexto y la reflexión en el desarrollo de esta competencia. Desde esta perspectiva se subraya que la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante no solo implica habilidades técnicas, sino también una reflexión profunda y continua sobre las

prácticas pedagógicas y el impacto de estas en el aprendizaje de los estudiantes. La reflexión crítica sobre las propias prácticas y las interacciones con los estudiantes es esencial para mejorar la competencia.

De la misma manera, Amador *et al.* (2021) subrayan el papel de las tecnologías digitales en el desarrollo de la competencia. Herramientas como el videoanálisis y las plataformas interactivas permiten a los profesores revisar y reflexionar sobre las interacciones en el aula de manera más detallada. Estas tecnologías facilitan una observación más precisa y una retroalimentación más efectiva, apoyando el desarrollo profesional continuo de los docentes.

En síntesis, este estudio se apoyará en la competencia docente mirada profesional del pensamiento matemático del estudiante como herramienta de análisis investigativo para dar cuenta del estado del desarrollo de la competencia mirada profesional de los futuros profesores al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. En otras palabras, se analizará la competencia docente mirada profesional de los futuros profesores cuando diseñan y gestionan situaciones de enseñanza y aprendizaje relacionadas con la semejanza.

La trayectoria hipotética de aprendizaje

Varias investigaciones (Fernández y Choy, 2020; Ivars *et al.* 2020; Wickstrom y Langrall (2018) muestran que el uso de las THA en la enseñanza resultan ser recursos eficaces para la práctica de los profesores porque les permiten comprender el pensamiento matemático de los estudiantes y planificar respuestas de instrucción con base en la comprensión de los estudiantes.

De acuerdo con Ivars *et al.* (2020) las THA son herramientas que sirven de apoyo a los profesores para identificar los objetivos de aprendizaje, interpretar el pensamiento matemático

del estudiante y decidir cómo responder con una instrucción adecuada a las ideas matemáticas de los estudiantes.

Desde Simon (1995) las THA son los potenciales caminos de aprendizaje de los estudiantes, que son hipotéticos porque la comprensión no se conoce hasta después de haberse realizado. Así mismo, afirmó que los estudiantes pueden avanzar por caminos similares en la comprensión de un tema en particular a medida que se involucran en tareas cuidadosamente seleccionadas para trabajar hacia una meta de aprendizaje; aunque esta noción de THA parece indicar que todos los estudiantes siguen la misma trayectoria de aprendizaje a la misma velocidad, la THA representa una ruta flexible en la que los estudiantes transitan a ritmos diferentes, siendo posible incluso que pueda surgir otra ruta de aprendizaje que desvíe la THA inicialmente propuesta (Drijvers, 2004).

Para Simon (1995) una THA es un modelo teórico para el diseño de la enseñanza de las matemáticas que consta de tres elementos: (1) el objetivo de aprendizaje que define la dirección, (2) las tareas de aprendizaje que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y (3) el proceso hipotético de aprendizaje. Una predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionarán en el contexto de las tareas de aprendizaje.

De esto se tiene que, según Simon (2020), las tareas de aprendizaje están diseñadas o adaptadas para que los estudiantes se movilicen a través de una progresión que involucra niveles de pensamiento, con el fin de alcanzar metas específicas de un dominio matemático. Estas tareas de aprendizaje están basadas en procesos de aprendizaje anticipados, no obstante, estos procesos dependen de la naturaleza de las tareas de aprendizaje planificadas.

Es así como las THA proporcionan a los profesores un modelo cognitivo para pensar (interpretar), actuar (decidir) y un lenguaje matemático específico para describir el pensamiento matemático de los estudiantes (Edgington *et al.*, 2016).

Del mismo modo, según Fernández y Choy (2020) las THA proporcionan una estructura definida para discernir objetivos de aprendizaje, interpretar el pensamiento matemático del estudiante y articular una enseñanza adecuada. Así pues, las THA determinan un modelo cognitivo, que provee a los profesores un lenguaje específico para comunicar el pensamiento matemático lo que facilita la anticipación de estrategias y la identificación de dificultades de los estudiantes.

En este contexto, las THA son una herramienta valiosa en la investigación porque permiten controlar la brecha entre una teoría de instrucción y un experimento de enseñanza concreto (Bakker, 2018).

Por tales razones, para este estudio se diseñará una THA para la enseñanza de la semejanza que se utilizará como dispositivo para orientar la gestión del aprendizaje y la enseñanza atendiendo al pensamiento matemático del estudiante a partir de tareas en las que se articulan recursos curriculares digitales.

La heurística de los modelos emergentes

Es una de las heurísticas del diseño instruccional y hace parte de la teoría de instrucción conocida como educación matemática realística (EMR)³. La característica principal radica en que

³ La EMR es una teoría de instrucción de dominio específico para las matemáticas que se ha desarrollado en los Países Bajos. La característica de EMR es que a situaciones ricas y «realistas» se les da una posición destacada en el proceso de aprendizaje. Estas situaciones sirven como una fuente para iniciar el desarrollo de conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos y como un contexto en el que los estudiantes pueden en una etapa posterior aplicar sus conocimientos matemáticos, que luego gradualmente se vuelven más formales y generales, siendo menos específicos del contexto. Desde esta perspectiva realista no alude solo a situaciones del mundo real, sino que hace referencia de manera general a todas las situaciones problemáticas que los estudiantes pueden imaginar.

ayuda a los estudiantes a formar una realidad matemática que no existe para ellos, a través de un proceso progresivo en el que las matemáticas formales pasan a primer plano como una extensión de la experiencia de los estudiantes (Gravemeijer, 1999).

El término modelo refiere a un entorno de trabajo, una descripción verbal, formas de simbolización y notación, en otras palabras, modelo hace referencia a las formas generadas por los estudiantes de organizar la actividad matemática con herramientas observables (cosas de su entorno como gráficos, definiciones u objetos) y mentales (formas de pensar y razonar a medida en que resuelven problemas) (Zandieh y Rasmussen, 2010).

En relación con los modelos, estos son *emergentes* en el sentido de que varias formas de crear y utilizar gráficos, definiciones, objetos, expresiones analíticas, etc., surgen con otras formas de razonamiento cada vez más sofisticadas (Rasmussen y Blumenfeld, 2007).

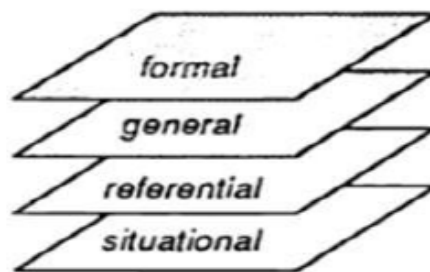
Inicialmente, los modelos son propios de un contexto y hacen referencia a situaciones concretas o reales para los estudiantes. En este nivel el modelo debe permitir estrategias informales que correspondan con estrategias de solución de la situación. A partir de ello, el papel del modelo empieza a transformarse gradualmente a medida que los estudiantes adquieren más experiencia con problemas similares, permitiendo que su atención se dirija hacia las relaciones y estrategias matemáticas, obteniendo así que un modelo de actividad matemática informal se convierta en un modelo para un razonamiento matemático más formal (Gravemeijer, 2007).

La transición de un *modelo de* actividad matemática informal a un *modelo para* un razonamiento matemático formal se define en términos de cuatro niveles establecidos por Gravemeijer, (1999) (ver Figura 1). El nivel situacional involucra que los estudiantes trabajen en dirección a los objetivos matemáticos a partir de experiencias reales para ellos. El nivel referencial abarca modelos de descripciones, conceptos y procedimientos que refieren al problema de la

actividad situacional. El nivel general supone modelos para explorar, reflexionar y generalizar lo obtenido en el nivel anterior. El nivel formal conduce a que los estudiantes reflejen el surgimiento de una nueva realidad matemática, por tanto, trabajan con procedimientos y notaciones convencionales desligadas de las situaciones que le otorgaron su significado inicial.

Figura 1

Niveles de actividad matemática vinculados a los modelos emergentes.



Fuente: Gravemeijer (1999).

Esta heurística del diseño apoya a investigadores en el desarrollo de teorías de instrucción y las actividades correspondientes para favorecer los procesos de aprendizaje, de tal manera que los estudiantes puedan interpretar una nueva realidad matemática (Gravemeijer, 2004). En ese sentido, el futuro profesor es el encargado de favorecer la construcción del conocimiento a medida en que se van construyendo matemáticas cada vez más formales. Para ello, se han de desarrollar rutas de aprendizaje orientadas a realizar conexiones entre el conocimiento interno del estudiante y el conocimiento externo por aprender, dando lugar a teorías de instrucción de dominio específico en la EMR (Zolkower y Bressan, 2012).

Para este estudio, la heurística de los modelos emergentes provee una estructura para la elaboración de las tareas de aprendizaje de la THA. Tal estructura admite una configuración para secuenciar, adaptar o diseñar las tareas de aprendizaje y describir el proceso de aprendizaje hipotético de la THA.

La semejanza como objeto de reflexión

Para la realización de este trabajo de investigación se considera la semejanza vista desde un punto de vista matemático y desde un punto de vista didáctico para la enseñanza. Ambas miradas conforman una directriz para la consecución de los objetivos planteados.

La semejanza desde un punto de vista matemático

La semejanza (o «transformación semejante» o «similitud») como objeto matemático es una transformación geométrica (en el plano o en el espacio) que cumple una serie de propiedades.

En el presente apartado se presentan las definiciones y teoremas que definen la semejanza. Para tal fin, se usará como referencia lo expuesto en el texto *Fundamentos de Geometría* de (Coxeter, 1971).

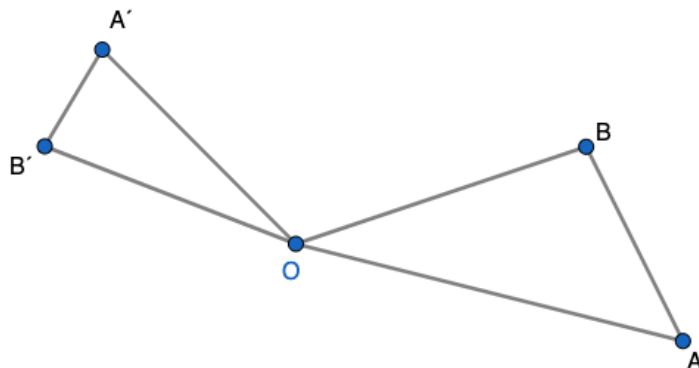
Definición 1. Dilatación. Una dilatación es una transformación que preserva (o invierte) la dirección, es decir, transforma toda recta en una recta paralela a ella y se simboliza $AB \rightarrow A'B'$. De igual manera, se tiene que la inversa de la dilatación $AB \rightarrow A'B'$ es la dilatación $A'B' \rightarrow AB$. También se tiene que $AB \rightarrow AB$ es la identidad, $AB \rightarrow BA$ es un semigiro (alrededor del punto medio de AB), y si $ABB'A'$ es un paralelogramo, $AB \rightarrow A'B'$ es una traslación. Así pues, se dice que dos figuras son homotéticas cuando son semejantes y están colocadas de manera semejante.

Definición 2. Semejanza. Transformación que lleva cada segmento AB a un segmento $A'B'$, de longitud dada por $\frac{A'B'}{AB} = \mu$; donde μ es un número constante y positivo que se denomina razón de amplificación. Si $\mu = 1$ la semejanza es una isometría.

Definición 3. Semejanza de espiral o rotación dilatativa. Corresponde al producto de una dilatación $O(\mu)$ y una rotación alrededor de O .

Figura 2

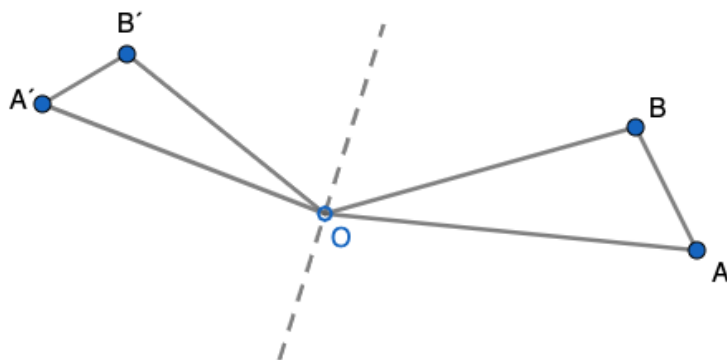
Semejanza de espiral



Definición 4. Reflexión dilatativa. Es el producto de una dilatación $O(\mu)$ y la reflexión en una recta que pase por O .

Figura 3

Reflexión dilatativa



Una reflexión dilatativa tiene dos rectas perpendiculares que se conservan invariantes (sus ejes), que son las bisectrices interna y externa de $\angle AOA'$ y de $\angle BOB'$.

Teorema 1. Toda semejanza directa que no es una isometría es una rotación dilatativa.

Considérese una semejanza directa determinada, cuya razón de ampliación μ no sea 1.

Como hay un punto invariante, sea O , esta semejanza se podrá expresar como producto de la

dilatación $O(\mu)$ y una isometría directa tal que conserve invariante O , por tanto, esa isometría no es sino una rotación alrededor de O .

Teorema 2. Toda semejanza opuesta que no es una isometría es una reflexión dilatativa.

Considérese una semejanza opuesta cuya razón de ampliación μ no sea 1. Como existe un punto invariante, sea O , esta semejanza se podrá expresar como producto de la dilatación $O(\mu)$ y una simetría opuesta que conserve invariante O , por tanto, esa isometría no es sino una reflexión en una recta que pasa por O .

En las definiciones y teoremas anteriores se consideran las propiedades características de la semejanza. Dado que en esta reflexión se centra en la semejanza como objeto de enseñanza, las anteriores definiciones y teoremas serán referentes para tener en cuenta.

La semejanza desde un punto de vista didáctico

La definición actual de semejanza que aparece en libros de geometría o matemáticas generales para universitarios es un objeto muy elaborado; visión que es consecuencia de las numerosas generalizaciones realizadas a lo largo de los siglos. Esto conduce a reflexionar en torno a la evolución histórica del concepto y de las transformaciones geométricas del plano que están relacionadas con él (Escudero, 2003).

Para ello, se consideran los aportes hechos por Lemonidis (1990, 1991) que brindan una explicación de la relación entre la evolución histórica y la manera en cómo se ha abordado la semejanza desde la enseñanza.

Lemonidis (1990) identifica una progresión en dicha evolución histórica en la que se destacan tres grandes periodos. El griego, la influencia de geometría de Euclides, en la que las transformaciones no están presentes. Del siglo XVI al XVIII, periodo en el que, a partir de los problemas de la representación del espacio, se inicia el estudio de las transformaciones sin una

utilización consciente ni conceptualización de estas (transformación como útil en la resolución de problemas). Siglos XVI y XX, periodo de estructuración y algebrización de la geometría considerando la homotecia y la semejanza como objetos matemáticos, a raíz del desarrollo de la geometría con la publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799), el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico.

De este análisis, Lemonidis (1991) identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza, determinando tres aproximaciones al concepto de semejanza cuando se considera como objeto de enseñanza.

- a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante en ausencia de la idea de transformar una figura en otra. Se distingue: (i) Cuando las figuras forman parte de configuraciones de Thales, en la que se consideran los aspectos proyección y homotecia, con sus correspondientes razones. (ii) Cuando las figuras no están formando parte de una configuración, distinguiéndose las razones interna y externa.
- b) Transformación geométrica vista como una herramienta. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en sí mismo. Se utiliza la semejanza como una herramienta en la resolución de problemas gráficos.
- c) Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

Con base en estos momentos y en relación con el tratamiento de la semejanza en el contexto escolar en la educación básica secundaria se tiene que esta surge como un método para

resolver problemas de construcciones geométricas desde el punto de vista sintético, el cual se encuentra influenciado por la geometría euclidiana, donde el teorema de Thales genera nuevos conceptos como por ejemplo, los criterios de semejanza de triángulos, acercándose en este nivel educativo a la semejanza dentro de la relación intrafigural (Nolasco y Velázquez, 2013).

Por otro lado, aceptando que el libro de texto constituye uno de los referentes básicos para la organización de un proceso de enseñanza, Konic *et al.* (2010) reseñan la necesidad de mejorar el nivel de conciencia que los profesores de matemáticas tienen frente al conocimiento matemático de la semejanza y la proporcionalidad geométrica, esto con el fin de que se distinga la semejanza geométrica como relación entre figuras rectilíneas y la proporcionalidad geométrica como relación de segundo orden, es decir, relaciones de magnitudes geométricas homogéneas (Quintero *et al.*, 2012).

Con lo anterior, se destaca que la presente reflexión se enmarca en la concepción de la semejanza cuando esta es objeto de enseñanza dentro de una *transformación geométrica como objeto matemático*, esto porque el uso de las transformaciones es una estrategia que posibilita hacer síntesis en la solución de diversos problemas, a razón de que las propiedades de una transformación geométrica que se cumplen en el plano por isomorfismo se cumplen en el espacio, lo cual converge con el actual consenso en señalar la importancia de la semejanza en términos de situaciones matemáticas de referencia y de relaciones con contextos del mundo real (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, NCTM, 2000).

3. Metodología

En este capítulo se describe como aproximación metodológica la investigación basada en el diseño (IBD) y se detallan cada una de las fases que la distinguen: la preparación del experimento, el experimento de enseñanza y el análisis retrospectivo.

La investigación basada en el diseño (IBD)

En este estudio la IBD se utilizó para dar cuenta de las decisiones de acción de los futuros profesores al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza, asimismo, para dar cuenta de las prácticas de enseñanza en la interacción futuro profesor-estudiante y de la interacción futuro profesor-recursos.

La IBD consiste en el estudio sistemático del diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas, tales como, programas, estrategias y materiales de enseñanza-aprendizaje, productos y sistemas.

Desde esta mirada, interesa descubrir soluciones a problemas complejos en la práctica educativa con el objetivo de avanzar en el conocimiento sobre las características de las intervenciones como en los procesos para diseñarlos y desarrollarlos (Plomp, 2010).

Así pues, el propósito general de la IBD consiste en comprender y mejorar la realidad educativa a través de considerar contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis de nuevas formas de aprendizaje (Gravemeijer y van Eerde, 2009).

La IBD se caracteriza por la interdependencia entre el diseño instruccional y la investigación. De esta manera, el diseño de ambientes de aprendizaje sirve como contexto para la investigación y, a su vez, tanto los análisis continuados que se van realizando como el análisis retrospectivo de la misma informan sobre el diseño permitiendo mejorarlo (Cobb y Gravemeijer, 2008).

Sus principales fortalezas están en que: (a) las ideas educativas para el aprendizaje de estudiantes o profesores se formulan en el diseño, pero estas a su vez se pueden ajustar durante la prueba empírica, (b) reduce el abismo entre la práctica y la teoría, puesto que apunta al desarrollo de teorías de aprendizaje en un dominio específico como a los medios diseñados con el objeto de apoyarlos (Bakker, 2018).

Los resultados o productos de la IBD por lo general son: un diseño instruccional y una teoría de instrucción, que suelen ser juzgados tanto por el rigor del proceso de investigación (más prominente en la evaluación de verdaderos experimentos) como por su innovación y utilidad (Plomp, 2010).

Según Cobb y Gravemeijer (2008) en la IBD se distinguen tres fases: (1) preparación del experimento, (2) el experimento de enseñanza (se experimenta con el fin de promover la comprensión) y (3) análisis retrospectivo. La fase uno contempla el diseño o adaptación de una THA, instrumento que posibilita minimizar la brecha entre la teoría de instrucción y la práctica educativa.

Las fases de la IBD

En esta investigación se desarrollará un solo ciclo de experimento de enseñanza donde los FP usarán la THA para movilizar el concepto de semejanza. El ciclo involucra las tres fases de la IBD: la preparación del experimento, el experimento de enseñanza y el análisis retrospectivo. A continuación, se describe cada una de las fases.

Fase 1. Preparación del experimento

La fase uno comprendió el diseño de los instrumentos de recolección de datos como el cuestionario de caracterización de los FP de matemáticas y la entrevista semiestructurada.

Asimismo, se operacionalizó el marco teórico en función del contexto de la investigación y se

diseñó la THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales lo que implicó precisar sus componentes: meta de aprendizaje, tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje (Simon, 1995).

Cuestionario de caracterización de los futuros profesores

El cuestionario tuvo como propósito caracterizar condiciones personales, conocimientos previos de la semejanza y los usos de los recursos digitales en la enseñanza y aprendizaje de la semejanza por parte de los futuros profesores de matemáticas del programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad de la ciudad de Cali (ver Tabla 1). Respecto al diseño del cuestionario, las preguntas se construyeron y adaptaron a partir de los trabajos de Valdez (2011) y Gualdrón (2011). Estos estudios tuvieron por interés caracterizar las prácticas de enseñanza de profesores al integrar recursos digitales al aula y obtener información acerca del posicionamiento inicial del profesor en relación con el objeto de estudio. El cuestionario se presentó en diversos espacios como, por ejemplo, el curso obligatorio Seminario de Integración y Evaluación⁴ de la

⁴ El Seminario de Integración y Evaluación se ofrece en el programa de Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle y tiene como propósito general aportar a la consolidación de la comunidad de educadores matemáticos mediante el ingreso de nuevos miembros: nuestros estudiantes de maestría. En tal sentido, el seminario brinda a cada estudiante el espacio para la reflexión y presentación de sus avances investigativos y su discusión por parte de los otros estudiantes y los profesores; se hace de manera tal que motive a que el estudiante allegue elementos que le ayuden a identificar con claridad el problema de investigación y el «nicho» académico e investigativo en que este se aloja. Esta experiencia brinda elementos para la precisión del marco teórico y para la toma de decisiones de orden metodológico.

Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle y al interior del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GEM) de la misma universidad.

El cuestionario fue diligenciado por nueve futuros profesores de matemáticas del último semestre del programa académico de Licenciatura en Matemáticas. Las respuestas se recolectaron a través de un formulario en línea que estuvo disponible por ocho días. Las preguntas del cuestionario se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1

Cuestionario de caracterización de los futuros profesores de matemáticas

Eje temático	Preguntas
	Nombre completo
Caracterizar condiciones personales	Correo electrónico
	Edad en años
	Semestre que cursa actualmente
Uso de recursos digitales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	1. Para usted, ¿cuál es la importancia que tiene el uso de recursos digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? 2. El desarrollo de sus competencias respecto al uso de recursos digitales se encuentra en un estado de: (a) Reconocer un amplio espectro de herramientas tecnológicas y algunas formas de integrarlas a las prácticas enseñanza. (b) Utilizar diversas herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (c) Aplicar el conocimiento de una amplia variedad de tecnologías para el diseño de ambientes innovadores de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Explica por qué.

3. ¿Cuáles son los procesos y conceptos matemáticos que, desde su punto de vista, pueden apoyarse con el uso de recursos digitales?
4. ¿Por qué considera que esos procesos y conceptos matemáticos pueden apoyarse con el uso de recursos digitales?
5. Desde su punto de vista, considera que el uso de los recursos digitales en clase de matemáticas (puede marcar más de una opción):
-
6. ¿Qué importancia cree que tiene el estudio de la semejanza de figuras planas dentro del currículo de matemáticas?
7. ¿Cómo abordaría la enseñanza de la semejanza de figuras planas en los grados octavo y noveno?
8. ¿Cuáles cree que son los errores que cometen los estudiantes con más frecuencia cuando se enfrentan a tareas que para su solución se emplea la semejanza?
- Conocimientos previos de la semejanza
9. La semejanza como objeto de enseñanza puede verse como: (a) la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, en la que está ausente la idea de transformar una figura en otra, (b) un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones. c) una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo ¿cuál de las tres aproximaciones valora es pertinente para una propuesta didáctica? ¿por qué?
-

Nota. Preguntas adaptadas de Valdez (2011) y Gualdrón (2011).

Con base en las respuestas suministradas en el cuestionario y acorde a los fines del estudio se seleccionaron tres futuros profesores de matemáticas (FP) Anderson, Katherine y Paula que compartían las siguientes condiciones: haber cursado y aprobado los cursos obligatorios de la línea de formación en tecnología de la información y la comunicación en educación matemática, ser estudiantes de último año del programa de Licenciatura en Matemáticas, estar cursando las asignaturas de Práctica Profesional II y Seminario de Práctica Profesional II, tener la práctica profesional vinculada a la modalidad de acompañamiento a colegio y hacer manifiesto su disposición de participar en el trabajo de investigación.

Entrevista semiestructurada

La entrevista semiestructurada tuvo como propósito la reflexión por parte de los FP a partir de las acciones destacadas en su práctica de enseñanza haciendo uso de la THA, y reconocer en qué medida la THA incidió en las decisiones de los FP en el aula.

El diseño del instrumento de la entrevista consideró los fenómenos que a juicio del investigador fueron relevantes para el objeto de la investigación. Las preguntas fueron validadas mediante su presentación y discusión en diversos espacios como el curso obligatorio Seminario de Integración y Evaluación de la Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle y al interior del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GEM) de la misma universidad.

La entrevista semiestructurada se aplicó a los FP posterior a la última intervención de aula y tuvo una duración promedio de 40 minutos. Las preguntas que conformaron el instrumento para llevar a cabo la entrevista semiestructurada se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2

Preguntas del instrumento para la entrevista semiestructurada

Eje temático	Preguntas
Reflexión de los FP de matemáticas de su práctica de enseñanza	1. En contexto de enseñanza ¿cómo caracteriza lo que es un evento importante de aula y que sea significativo para gestionar una clase?
	2. Con base en la THA ¿cuáles son los logros y limitaciones del uso de la THA acorde con lo acontecido en la intervención?
	3. ¿Hasta dónde ustedes juzgan o valoran que la formulación de las situaciones para activar a los estudiantes es clara? es decir, ¿hasta dónde los estudiantes entienden que hay una consigna de una situación que ellos tienen que abordar?
	4. De la intervención realizada ¿cuál segmento de enseñanza destacaría como un evento significativo?, ¿qué lo lleva a catalogar esa selección del

segmento de enseñanza como un
evento significativo de la clase?

5. De acuerdo con la fundamentación
teórica reportada en la planificación
¿el evento destacado como
significativo tiene alguna explicación?
es decir, ¿lo sucedido en clase se
reporta o lo han encontrado en la
investigación en didáctica?

6. ¿Cómo valoran ustedes la selección y
uso del recurso?

Preguntas auxiliares: ¿el uso del
recurso es adecuado para las metas o
propósitos pretendidos?, ¿cabe la
posibilidad de seleccionar o usar otro,
que privilegie o dé más peso a
aspectos como, por ejemplo, los
problemas de construcción?, ¿la
selección y uso del recurso es
apropiada?, ¿consideran que es
posible realizar algún ajuste?

-
7. ¿En qué medida el uso de la trayectoria favoreció o limitó la instrucción?
 8. De acuerdo con el uso de la trayectoria para la instrucción ¿cuáles considera son las ventajas o limitaciones que tuvo haber usado este recurso?
-

Fuente. Elaboración propia

Operacionalización de la habilidad de decidir y de la escala de nivel de respuesta de los FP

Para establecer el estado de las decisiones de acción de los FP al utilizar la THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales se consideró los niveles de respuestas de los FP y en particular la habilidad de decidir que hace parte de la competencia mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs *et al.*, 2011).

Así pues, la habilidad de decidir comprendió las acciones del profesor para responder a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante, en relación con la semejanza a partir de los elementos didácticos, curriculares y matemáticos que subyacen a los niveles del proceso de aprendizaje hipotético, la naturaleza de las tareas y su secuenciación.

Del mismo modo, la escala para establecer el estado de las decisiones de acción de los FP a partir del nivel de respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante se construyó considerando: la evidencia limitada de decidir a partir de las respuestas a las

manifestaciones de la expresión matemática del estudiante, y la falta de evidencia de decidir en función de las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante. El nivel de pruebas sólidas no se consideró puesto que no se reconoció acciones del profesor que se ubicaran en el nivel.

Evidencia limitada de decidir a partir de las respuestas a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante. El FP decide en respuesta a la expresión matemática del estudiante, sin embargo, las respuestas suministradas para justificar sus decisiones carecen de detalles de orden didáctico, curricular o matemático relacionados con la semejanza.

Falta de evidencia de decidir en función de las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante. El FP privilegia acciones dominantes centradas en sus representaciones de cómo los estudiantes comprenden la semejanza de figuras planas y no en función de las respuestas a la expresión matemática del estudiante.

Elaboración de la THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales

En este apartado se describen los tres componentes que definen la THA: meta de aprendizaje, tareas de aprendizaje y proceso hipotético de aprendizaje. La meta de aprendizaje fue el primer componente que se elaboró, ya que proporciona la dirección para la THA (Simon, 1995). La meta se determinó a partir de la revisión y estudio de documentos en educación matemática relacionados con el concepto matemático (Escudero, 2003; Gualdrón y Gutiérrez, 2006; Nolasco y Velázquez, 2013; Quintero *et al.*, 2012), asimismo, documentos curriculares para el área de matemáticas en grado 9º como: *Lineamientos curriculares en matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 1998), *Estándares básicos en competencias matemáticas* (Ministerio de

Educación Nacional, 2006) y *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

Así pues, la meta de aprendizaje consistió en que los estudiantes conjeturaran respecto a las propiedades de la semejanza entre figuras bidimensionales en contextos de resolución de problemas.

Definir la meta de aprendizaje, condujo a caracterizar la semejanza como objeto matemático de enseñanza, para ello se determinó: la noción de semejanza, sus características y propiedades, la relación de la semejanza con otros conceptos matemáticos, conocimientos matemáticos previos que se requieren para cada tarea de aprendizaje y en cómo se articularon las tareas de aprendizaje susceptibles de ser adaptadas al ambiente de geometría dinámica.

Posteriormente, se procedió a precisar el marco teórico para guiar el diseño y adaptación de las tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje. La estructura de las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje se fundamentó en la heurística de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999) y tomó como referencia la tesis doctoral de Gualdrón (2011) ya que aportaba elementos fundamentales respecto a la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas.

Posterior a caracterizar el objeto matemático y precisar el marco teórico se procedió a seleccionar, diseñar o adaptar las tareas de aprendizaje y describir el proceso de aprendizaje hipotético. Al considerar la relación de interdependencia entre las tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje, consistente en seleccionar, diseñar o adaptar cada tarea de aprendizaje, se especificaba, además, el proceso hipotético de aprendizaje, y se reflexionaba respecto a la tarea de aprendizaje que iba a proseguir.

La selección, adaptación y estructuración de las tareas de aprendizaje se seleccionaron teniendo como referentes el trabajo de Gualdrón (2011) y los niveles de la actividad matemática que se describen en la heurística de los modelos emergentes (Gravemeijer, 1999).

La selección de las tareas debía favorecer la transición entre cada uno de los niveles de la actividad matemática, del mismo modo, la adaptación al AGD debía posibilitar que a través de la manipulación se reconozcan características centrales del objeto de estudio y conjeturar y validar propiedades.

En la tarea 1A del nivel situacional se espera que los estudiantes reconozcan rasgos generales de figuras que se relacionan a través de una semejanza (conservación de la forma, cambio en el tamaño, conservación de la orientación) a partir de visualizar el movimiento de las figuras. Posterior a la tarea, el profesor focalizará la atención en distinguir entre ser parecido y tener la misma forma, atendiendo a la sugerencia de Gualdrón (2011).

Para las tareas 2A hasta 2F del nivel referencial se espera que los estudiantes identifiquen las condiciones suficientes y necesarias para determinar en figuras relacionadas la semejanza. Se pretende que los estudiantes distingan en figuras relacionadas a través de una transformación de homotecia la colinealidad entre puntos que se corresponden, el centro de homotecia, el factor de homotecia, la conservación de la forma, el cambio en el tamaño, elementos homólogos y correspondientes.

El docente formalizará los conceptos y las posibles variantes que se pueden reconocer en las tareas de aprendizaje. Asimismo, el docente empleará las tareas de contraste (aquellas que se relacionan mediante una transformación distinta a una homotecia) para ilustrar las condiciones suficientes y necesarias que han de cumplir figuras semejantes.

En las tareas 3A hasta la 3E del nivel general se espera que los estudiantes comprendan y justifiquen la semejanza de figuras relacionadas, a partir de la congruencia de la amplitud angular, la convergencia de los puntos que se corresponden en el centro de homotecia, la conservación de la orientación para factor de homotecia $K > 1$ y $0 < k < 1$ (Gualdrón, 2011). Además, para las tareas de este nivel se espera que los estudiantes conjeturen características que subyacen a la relación de figuras semejantes y que han reconocido en las tareas previas. Para este nivel el docente formalizará las conjeturas realizadas por los estudiantes posibilitando destacar conceptos asociados a la semejanza.

Por último, para las tareas 4A y 4B del nivel formal se proyecta que los estudiantes puedan reconocer la propiedad central de la semejanza (dos figuras planas son semejantes si las longitudes de los lados que se corresponden son proporcionales) explicitando los conceptos asociados a esta y estudiados en las tareas previas. El docente dirigirá la atención a reconocer configuraciones visuales en las figuras relacionadas.

En la Tabla 3 se presenta la progresión del modelo de semejanza para los grupos de tareas de aprendizaje para cada nivel.

Tabla 3

Niveles de la heurística de los modelos emergentes y la relación con las tareas de aprendizaje.

Nivel	Tarea	Progresión del modelo de semejanza
Situacional	Tarea 1A	En el modelo de semejanza los estudiantes reconocen rasgos de figuras que se encuentran relacionadas por medio de una semejanza a partir de su visualización.

		Las figuras relacionadas conservan la forma y cambian de tamaño.
		En el modelo de semejanza los estudiantes infieren condiciones suficientes y necesarias en la determinación de figuras semejantes.
Referencial	Tarea 2A	Los estudiantes conjeturan respecto a las características centrales de la transformación de homotecia, tales como: conservación de la forma, cambio en el tamaño y colinealidad de los puntos correspondientes. Además, reconocen el centro de homotecia y las relaciones entre elementos homólogos y elementos correspondientes.
	Tarea 2B	
	Tarea 2C	
	Tarea 2D	
	Tarea 2E	
	Tarea 2F	
General	Tarea 3A	El modelo para la semejanza comprende relacionar la homotecia de figuras planas con la semejanza de figuras planas. Los estudiantes comprenden y justifican la homotecia como una transformación que genera figuras semejantes.
	Tarea 3B	
	Tarea 3C	
	Tarea 3D	
	Tarea 3E	

		Además, justifican que en figuras semejantes obtenidas a partir de una transformación de homotecia los ángulos correspondientes son congruentes y los lados que se corresponde son proporcionales.
		El modelo para la semejanza se transforma en un modelo formal en el que se reconoce la propiedad central de una semejanza: dos figuras planas son semejantes si las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales.
Formal	Tarea 4A	
	Tarea 4B	Además, se infiere la colinealidad entre los elementos correspondientes (vértices) de la figura inicial y su respectiva figura final, como también, el factor de semejanza entre figuras relacionadas por medio de una transformación de homotecia.

Fuente. Elaboración propia

Posterior al diseño de la THA se realizaron tres sesiones de socialización con los FP. La primera sesión correspondió a la presentación de la THA con sus respectivos componentes: meta de aprendizaje, tareas de aprendizaje y proceso hipotético de aprendizaje. En relación con la meta

de aprendizaje se presentaron los aspectos considerados para su elaboración, es decir, los referentes de orden curricular, didáctico y matemático. En cuanto a las tareas de aprendizaje y el proceso hipotético de aprendizaje, estos se presentaron de manera simultánea por medio de una presentación en PowerPoint y del ambiente de geometría dinámica (en adelante AGD) GeoGebra. En esta sesión participaron los tres futuros profesores y suministraron sugerencias relacionadas con las tareas de aprendizaje, por ejemplo, precisar la redacción de algunas de las preguntas que componen las tareas de aprendizaje.

La segunda sesión tuvo como fin que los FP Katherine y Paula posterior a la exploración con la THA hicieran manifiesto sugerencias respecto a alguno de los componentes de la THA. Así pues, los FP manifestaron la necesidad de incorporar preguntas en las que el estudiante suministrará detalles en sus respuestas, precisar la redacción de algunas de las consignas de las tareas, revisión de algunas de las construcciones de las tareas de aprendizaje, entre otras.

Para el tercer encuentro, se les presentó a Katherine y Paula la THA con las adecuaciones y sugerencias que habían hecho manifiesto. Es importante destacar que Anderson no suministró sugerencias a la THA, aludiendo a considerar pertinente tanto las tareas de aprendizaje como el proceso hipotético de aprendizaje.

La versión final de la THA⁵ se subió al portal de GeoGebra recursos, esto con el fin de que los futuros profesores tuvieran acceso directo a ella. Asimismo, se compartió el documento en versión digital correspondiente a la descripción de la THA. Hay que hacer notar que todas las sesiones de socialización se registraron mediante audio y vídeo.

⁵ La THA se encuentra publicada en Pechene (s. f.).

Dado que la THA se compone de catorce tareas de aprendizaje y cada una de ellas incluye el respectivo proceso de aprendizaje hipotético, se realiza una selección de al menos una tarea de aprendizaje por nivel para ser presentada. Un criterio de selección para la presentación de las tareas corresponde a considerar aquellas tareas de aprendizaje que fueron objeto de discusión en la fase del análisis retrospectivo. En la Tabla 4 se presenta las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético de la THA.

Tabla 4

Tareas de aprendizaje y proceso hipotético de aprendizaje de la THA respecto a la semejanza

Tareas de aprendizaje	Proceso hipotético de aprendizaje
Tarea 1A. La figura inicial y la figura final, que corresponden respectivamente a la composición geométrica 1 y composición geométrica 2, están relacionadas por medio de una transformación geométrica. En cada una de las composiciones activa el botón iniciar para observar el movimiento. Luego responde las siguientes preguntas: (a) Al comparar la figura inicial con la figura final en la composición 1 y composición 2, ¿Qué relaciones se pueden establecer entre la figura inicial y la figura final? (b) Al comparar la figura final con la figura inicial	Los estudiantes: (a) comparan la figura inicial con la figura final, (b) observan y reconocen a partir del movimiento de figuras relacionadas a través de una transformación de homotecia, el cambio en el tamaño, la conservación de la forma y el paralelismo entre los lados homólogos.

en la composición 1, ¿se conserva el

tamaño? Explica tu respuesta. (c) Al

relacionar la figura final con la figura inicial

en la composición uno ¿es posible afirmar

que «tienen la misma forma»? ¿Por qué?

Tarea 2B. La tarea 2B diseñada para este

nivel tiene por consigna: en el esquema se

presentan ilustraciones que van desde la

ilustración 1 hasta la ilustración 6, en cada

ilustración se distingue la figura inicial y la

figura final. Para cada ilustración, arrastrar

la figura inicial de tal manera que se

superponga con la figura final, haciendo

coincidir todos sus puntos. Luego responde

las siguientes preguntas: (a) ¿Qué

ilustraciones cumplen que la figura inicial y

la figura final tienen la «misma forma»? (b)

¿Qué ilustraciones cumplen que la figura

inicial y la figura final tienen el mismo

tamaño? (c) ¿En cuáles ilustraciones se

verifica que la figura inicial y la figura final

NO tiene la «misma forma» que las demás?

Los estudiantes: (a) identifican la trayectoria que describe la figura inicial al ser arrastrada hasta la figura final, y (b) reconocen al superponer la figura inicial con la final características de la transformación de homotecia (conservación de la forma, cambio en el tamaño y colinealidad entre puntos correspondientes).

(d) ¿En cuáles ilustraciones se verifica que la figura inicial y la figura final NO tienen el mismo tamaño que las demás? (e) ¿En cuáles ilustraciones la figura inicial y la figura final no conservan la orientación? (f) ¿En qué ilustraciones la figura inicial y la figura final no coinciden en todos sus puntos? Explica por qué no coinciden.

Tarea 2C. La figura inicial y la figura final que corresponden respectivamente a la ilustración 1, ilustración 2 e ilustración 3, están relacionadas por medio de una transformación geométrica. Compara la figura inicial con la figura final después del movimiento, luego responde las siguientes preguntas: (a) ¿Qué caracteriza a cada par de figuras (figura inicial y figura final) en cada una de las ilustraciones? (b) ¿Qué características comunes tienen todas las figuras?

Los estudiantes, (a) observan el movimiento y trayectoria que describe la figura inicial hasta obtener la figura final, (b) reconocen la colinealidad entre los puntos correspondientes de cada figura, e (c) identifican el centro de homotecia a partir de la convergencia de los segmentos de recta que contienen los puntos correspondientes de las figuras planas semejantes cuyo factor de semejanza es $k > 1$.

Tarea 3B. En el esquema se presentan distintas ilustraciones, en cada una se destaca la figura inicial y la figura final.

Mueve el punto negro de izquierda a derecha para observar el movimiento.

Luego responde las siguientes preguntas:

(a) ¿En cuál de las ilustraciones la figura inicial y la figura final se encuentran relacionadas a través de una transformación de homotecia? Justifica, en cada caso, por qué sí o por qué no lo son.

(b) Si la figura inicial y la figura final están relacionadas a través de una transformación de homotecia: ¿Qué trayectoria describen los puntos correspondientes de la figura inicial y la figura final? (c) Dado el centro de homotecia y la figura inicial ¿Qué características matemáticas debe cumplir la figura final para poder decir que dos figuras son semejantes? Justifica tu respuesta.

Los estudiantes: (a) observan la transformación que se obtiene al mover el deslizador e infieren que figuras relacionadas a través de una transformación de homotecia cambian de tamaño y conservan la misma forma, y (b) establece que el cambio de tamaño, conservación de la forma y colinealidad entre puntos son condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas.

Tarea 3D. La tarea 3D que corresponde a un esquema, presenta las ilustraciones 1, 2 y 3, en las que se destacan la figura inicial y final. Se pide arrastrar en línea recta la figura inicial desde uno de sus vértices hasta superponerla con la figura final, de tal manera que coincidan todos sus puntos.

Luego, responde las siguientes preguntas:

(a) Todas las figuras que tienen la misma forma ¿corresponden a una semejanza? ¿Por qué? (b) ¿En cuáles de las ilustraciones la figura inicial y la figura final son semejantes? Justifica, en cada caso, por qué sí o por qué no lo son. (c) ¿Por qué en la ilustración 3 al arrastrar la figura inicial no cambia de tamaño? (d) ¿Cuáles consideras que son las características matemáticas que se deben cumplir para poder decir que dos figuras son semejantes? Justifica tu respuesta.

Los estudiantes: (a) arrastran la figura inicial hasta la figura final observando el rastro que dejan los vértices de la figura inicial y que se corresponden con los de la figura final, y (b) determinan que la colinealidad entre puntos correspondientes, el cambio de tamaño y la conservación de la forma son características centrales de la semejanza.

Tarea 4B. En el esquema se presenta la

ilustración 1 y la ilustración 2. Activa el
botón «Ver homotecia» de la ilustración 1
y el botón «Ver segmentos» de la
ilustración 2 para observar el movimiento.

Luego responde las siguientes preguntas:

(a) ¿Qué relación se puede establecer
entre los lados homólogos de la figura
inicial y la figura final que se muestran en

la ilustración 2? (b) ¿Cuál es el valor que se

usó para reducir la figura final de la

ilustración 1? Justifica tu respuesta.

Los estudiantes: (a) observan el rastro que dejan

los vértices del movimiento de la figura inicial al

superponerse con la figura final, (b) el centro de

homotecia corresponde a la convergencia de las

semirrectas que contienen los vértices de la figura

inicial y la final, y (c) el paralelismo entre los lados

homólogos y la proporcionalidad entre la longitud

de los lados correspondientes son características

centrales de la semejanza.

Fuente. Elaboración propia

Finalmente, otro aspecto a considerar para el diseño de la THA correspondió a determinar los conocimientos previos de los estudiantes del concepto matemático de la semejanza. Para ello, se revisaron los resultados de la prueba Saber 9º 2022 con el fin de identificar el desarrollo de competencias básicas en el área de matemáticas respecto a los conocimientos básicos, procesos y contextos.

En cuanto al proceso de razonamiento y argumentación relacionado con el pensamiento espacial-métrico, se evaluaron habilidades y destrezas que se esperan que los estudiantes sean capaces de saber-hacer, por ejemplo, conjeturar sobre las propiedades de los objetos bidimensionales y tridimensionales relacionadas con sus atributos mensurables y de posición. Tales habilidades y destrezas son evidenciables a partir de los aspectos observables que se espera

muestre el estudiante como: (a) verifica criterios y propiedades de la semejanza y congruencia de figuras geométricas en contextos matemáticos o aplicados, y (b) establece relaciones de paralelismo o perpendicularidad entre segmentos.

Respecto a esto, los resultados muestran que el nivel de desempeño de los estudiantes de grado 9º relacionados con el pensamiento espacial-métrico y acorde con los descriptores se encuentran en bajo. Para los estudiantes de las instituciones educativas no oficiales se encuentra en un 43 %, para los de instituciones educativas oficiales está en 24 % y para los de instituciones educativas de carácter rural y urbano 16»% y 30 % respectivamente (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), 2022).

Asimismo, el Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por sus siglas en inglés) evaluó en 2007 a los estudiantes de cuarto y octavo grado en Colombia, con el objetivo de ofrecer datos que ayudarán a mejorar la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas y ciencias.

En cuanto a los resultados, de manera puntual para este estudio se consideran aquellos que centran la atención en el análisis por áreas temáticas, en particular, las tendencias erróneas (errores que cometen los estudiantes en sus respuestas de opción múltiple) que señalan posibles deficiencias en la formación matemática de los estudiantes.

En relación con la congruencia y semejanza se observó que los estudiantes colombianos identifican figuras congruentes o semejantes con relativa facilidad, aunque tienen dificultades significativas para manejar las propiedades geométricas que se derivan de estas relaciones, por ejemplo, preguntas que pertenecen al desempeño de uso de procedimientos rutinarios (calcular, graficar, transformar, medir) en la que se presentan datos suficientes para determinar mediante una proporción la medida de la longitud de uno de los lados de una figura semejante a otra, los

estudiantes colombianos tienden a seleccionar respuestas que presentan error en el planteamiento de la proporción o en el cálculo de la cuarta proporcional (Mullis *et al.*, 2007).

Teniendo en cuenta los resultados de las pruebas SABER 9º y TIMSS relacionados con el desarrollo de pensamiento espacial y los procesos de razonamiento y argumentación asociados al concepto de semejanza para el grado noveno, se reconocieron dificultades y tendencias erróneas que presentan los estudiantes al enfrentarse a situaciones problemas relacionadas con el concepto matemático, en ese sentido, tales errores y dificultades fueron la base y punto de partida para el diseño y adaptación de las tareas de aprendizaje que conforman la THA.

Fase 2. El experimento de enseñanza

En esta fase se describen las intervenciones que realizaron Anderson, Katherine y Paula usando la THA en la clase de geometría con estudiantes de grado 9º y la entrevista semiestructurada. De las intervenciones y entrevista semiestructurada se obtuvo registro de audio y vídeo. El registro de audio y vídeo de las intervenciones y de la entrevista semiestructurada tuvo como propósito capturar las interacciones del FP con el estudiante y reconocer las decisiones que el FP tomó en el contexto del aula.

Intervención por parte de los futuros profesores con la THA para la enseñanza de la semejanza

Anderson, Katherine y Paula utilizaron la THA para la enseñanza de la semejanza en tres sesiones de clase, para un total de seis intervenciones.

La primera, segunda y tercera sesión que realizó Anderson fue llevada a cabo en un salón de clase con el grado noveno dos.

Respecto a la disponibilidad de recursos, el salón dispone de proyector de vídeo y 40 computadores portátiles para ser usados por los estudiantes; sin embargo, es importante destacar

que la conectividad a internet era limitada, lo que condujo a disponer de dispositivos portátiles de almacenamiento para instalar en cada computador el software de GeoGebra y las tareas de aprendizaje que se usaron en las intervenciones. En cada sesión participaron 32, 30 y 28 estudiantes respectivamente.

Las dos primeras intervenciones realizadas por Katherine y Paula fueron con el grado noveno uno y se llevaron a cabo en el mismo salón de clase que utilizó Anderson. Para estas intervenciones los futuros profesores en común acuerdo asignaron el rol de profesor a Katherine y profesor de apoyo a Paula, es decir, el profesor de apoyo se encargó de ayudar aquellos estudiantes que presentaron dificultades con el uso del recurso y con el manejo de los computadores portátiles. En estas dos sesiones participaron 28 y 25 estudiantes respectivamente. La tercera intervención fue realizada solo por Katherine y se llevó a cabo en un salón distinto al de las sesiones anteriores. Respecto a la disponibilidad de recursos, los salones disponen de proyector de vídeo y 30 computadores portátiles para ser usados por los estudiantes. En la última sesión participaron 24 estudiantes.

La intervención con la THA estaba proyectada para dos sesiones de clase; no obstante, se requirió de una sesión adicional para completar la intervención con la THA. El tiempo que se estimó para la intervención con la THA completa fue de 4,5 horas.

Las intervenciones fueron grabadas en audio y vídeo con el fin de registrar y obtener información respecto al uso de los futuros profesores de la THA. El promedio de duración de cada sesión fue de 90 minutos.

Fase 3. El análisis retrospectivo

Esta fase tuvo como propósito analizar las acciones de los FP de matemáticas al usar la THA de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. Se analizaron los datos

provenientes del registro de vídeo de las intervenciones de los FP y de la entrevista semiestructurada. Para esto, se empleó teoría fundamentada y para la codificación abierta del cuerpo de datos se usó el software MaxQDA. El tratamiento y análisis de los datos comprometió la transcripción, segmentación, codificación y categorización (Kvale, 2012; Teppo, 2015).

A continuación, se describe cada uno de los procesos.

Transcripción, segmentación e identificación de acciones de los FP y emergencia de categorías descriptivas

Las videograbaciones de las sesiones de clase y la entrevista semiestructurada se transcribieron empleando símbolos para su interpretación. Respecto a la intervención, el reconocimiento de los estudiantes se realizó con base en el orden de intervención y se empleó una etiqueta con números secuenciales (E1, E2, E3, ..., En). En cuanto a la entrevista semiestructurada, los FP se etiquetaron de la siguiente manera: Anderson (G01) y Katherine y Paula (G02).

La transcripción se realizó siguiendo un protocolo que comprendió leer y organizar los datos, enumerar, clasificar, realizar comentarios u observaciones para conjeturar respecto a posibles clasificaciones con base en las acciones de los FP.

La segmentación de las intervenciones de los FP se realizó a partir de reconocer segmentos de enseñanza⁶ teniendo en cuenta que: el segmento de enseñanza seleccionado se enmarcará en una discusión matemática futuro profesor- estudiante, en la que el estudiante hiciera manifiesto

⁶ Un segmento de enseñanza refiere a un fragmento o unidad de interacción de no más de 10 líneas entre el profesor y los estudiantes, en el que el estudiante hace manifiesto sus matemáticas y el profesor realiza una acción en respuesta a la manifestación del estudiante. Los segmentos de enseñanza suelen ser identificados a través de la observación detallada de las interacciones que se originan en el aula.

sus matemáticas y el futuro profesor realizará una acción (preguntar, orientar, explicar, afirmar, etc.) en respuesta a la manifestación del estudiante.

Los segmentos de enseñanza reconocidos se etiquetaron con números secuenciales (S1, S2, S3, ..., Sn) respetando el orden en el que ocurrieron en el tiempo de la sesión de clase. Asimismo, se asignaron etiquetas que permitieran reconocer el número de la intervención (I1, I2 e I3) y el grupo protagonista (G01 o G02).

Se empleó la codificación abierta en la que se examinaron los datos sin preconcepciones y con el fin de observar y reconocer fenómenos y relaciones. El proceso de codificación implicó tres procesos analíticos de creación de significado (1) hacer preguntas sobre los datos (¿qué está pasando aquí?), (2) comparar constantemente los incidentes y (3) escribir memorandos. En cuanto a los memos escritos durante el proceso de codificación, estos tienen como fin registrar el pensamiento del investigador respecto a propiedades destacadas y vinculadas a la conceptualización del dato en particular (Teppo, 2015).

La técnica de comparación constante para convertir los datos en códigos refleja capas de abstracción basadas en fenómenos y relaciones observadas en los datos por parte del investigador. Con el fin de refinar los códigos y memorandos que emergían en el proceso de análisis, se llevó a cabo la validación mediante la presentación y discusión de los productos obtenidos en diversos espacios como el Seminario de Integración y Evaluación de la Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle y al interior del Grupo de Investigación en Educación Matemática (GEM) de la misma universidad.

Otro aspecto que se debe considerar del proceso de codificación corresponde a la elección de la unidad de análisis. Para la intervención de aula la unidad de análisis seleccionada fue línea a línea, ya que el interés estaba en examinar cuidadosamente en cada línea la respuesta individual

del estudiante o profesor con el fin de reconocer patrones, temas y conceptos. Para la entrevista semiestructurada, la unidad de análisis correspondió a la frase o párrafo, ya que el interés estaba en capturar significados o el tema general de cada párrafo o frase. De dicho proceso se reconocieron 84 segmentos de enseñanza. En la tabla 5 se presenta una ilustración de un segmento de enseñanza reconocido de la intervención del FP Anderson.

Tabla 5

Reconocimiento de las interacciones profesor-estudiante en el segmento de enseñanza S14

Intervención (I),		
Grupo (G), Posición (Pos)	Transcripción segmento de enseñanza	Código
I2-G01, Pos. 56	Anderson: lo mismo... ¿sí? es claro para todos, entonces, ahí va la siguiente pregunta: ¿qué características comunes tienen todas las figuras?	Pregunta para centrar la atención en el tamaño, forma y orientación.
I2-G01, Pos. 57	E3: que al moverse todas las figuras se agrandan.	Respuesta en que reconoce el cambio del tamaño.
I2-G01, Pos. 58	Anderson: Ok, esa es una. Todas las figuras se están agrandando, ¿cierto? o ¿hay alguna que no?	Afirma respuesta respecto al aumento en el tamaño de las figuras.
I2-G01, Pos. 59	E3: ¡todas!	Reafirma respuesta a interrogante planteado por el profesor.

I2-G01, Pos. 60	Anderson: todas van agrandándose ¿no? ¿qué más?	Afirma respuesta respecto al aumento de tamaño de las figuras.
I2-G01, Pos. 61	E3: todas las figuras siguen la misma orientación.	Respuesta en que reconoce la conservación de la orientación.
I2-G01, Pos. 62	Anderson: todas siguen la misma orientación ajá y ¿la forma?	Pregunta para determinar la conservación de la forma entre las figuras.
I2-G01, Pos. 63	E7: no cambia.	Respuesta en que reconoce la conservación de la forma.
I2-G01, Pos. 64	Anderson: la forma no cambia ¿cierto?, mantiene su forma, listo.	Retoma respuesta relacionada con la forma para confirmarla.

Fuente. Elaboración propia

El segmento de enseñanza S14 de la intervención (I2) que abarca de las líneas 56 a 64 se destacó porque en la interacción de G01 con E3 y E7 se privilegiaron acciones como: preguntar con distintos fines, afirmar respuesta en la que se reconocen características de la semejanza y retomar respuesta para confirmar una manifestación. Se reconocieron un total de 373 acciones por parte de Anderson y Katherine.

De las acciones reconocidas y codificadas se prosiguió con el proceso de formular categorías. Según Teppo (2015) el proceso de categorización consiste en abstraer propiedades

comunes de los códigos y agruparlos a partir de reconocer características similares. El proceso se realizó de manera inductiva, abierta y generativa, lo que implica que no hubo esquema de categorías de referencia para agrupar los códigos.

Se empleó el método de comparación constante por lo que el proceso de codificación y categorización se realizó de manera simultánea, es decir, conforme se generaban códigos, emergían categorías para representar aspectos compartidos entre los códigos. Según Teppo (2015) el método de comparación constante utiliza un razonamiento inductivo para abstraer conceptos y categorías a partir de patrones identificados en los datos.

La construcción de categorías terminó al comprobar la saturación de los datos, es decir, al comprobar que ya no se obtienen nuevos datos que añaden información significativa a las categorías emergentes o a la comprensión del fenómeno (Teppo, 2015).

Del proceso de codificación y categorización surgieron: 12 categorías que refieren a las acciones de los FP en las intervenciones de aula, y 7 categorías que dan cuenta de la reflexión de los FP respecto a la práctica de enseñanza haciendo uso de la THA. En las Tablas 4 y 5 se presentan ilustraciones de categorías emergentes de las intervenciones y la entrevista final.

Tabla 6

Categorías emergentes de las acciones de Anderson y Katherine

Categoría	Definición categoría	Códigos
		Afirma reconociendo conservación de la forma usando el recurso.
		Afirma respuesta relacionada con la conservación de la forma y cambio de tamaño.
Esta categoría comprende las acciones del profesor de afirmar las respuestas que suministran los estudiantes relacionadas con reconocer la forma, tamaño, trayectoria y orientación de figuras como condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza entre figuras.		Afirma respuesta relacionada con la conservación de la orientación y el cambio en el tamaño.
Afirma respuesta del estudiante en la que infiere condiciones suficientes y necesarias en la determinación de figuras semejantes.		Afirma respuesta relaciona con reconocer el cambio en la orientación.
		Afirma respuesta respecto a disminución de tamaño entre figuras.

	Afirma respuesta respecto al aumento de tamaño de las figuras.
	Afirma respuesta en que se reconoce los lados homólogos.
	Afirma respuesta relacionada con la conservación de la forma entre figuras.
	Afirma respuesta relacionada con la conservación del tamaño entre figuras.
	Afirma respuesta relacionada con reconocer la trayectoria que describen las figuras.
Pregunta para reconocer características de las figuras.	Esta categoría abarca las acciones del profesor de formular interrogantes para que el estudiante reconozca y describa características de las figuras que se Pregunta para determinar la trayectoria que describen las figuras. Pregunta para que argumente la clasificación de figuras que hace.

	relacionan (vértices, lados correspondientes, trayectoria).	Pregunta para determinar el número de vértices que tiene la figura. Pregunta para clasificar figuras según el número de lados.
		Pregunta para reconocer los vértices de la figura usando el recurso. Pregunta para clasificar figuras usando el recurso. Pregunta para determinar la trayectoria de las figuras usando el recurso. Pregunta para que determine la relación entre lados de la figura. Llama a centrar la atención en las figuras relacionadas. Llama a centrar la atención en la forma de las figuras.
Dirige la atención a reconocer en las figuras relacionadas con propiedades de la semejanza.	Esta categoría abarca las acciones del profesor de requerir la atención de los estudiantes para reconocer características	

	de figuras relacionadas para determinar la semejanza.	Determina la conservación de la orientación al establecer la semejanza.
Fuente. Elaboración propia		

Tabla 7

Categorías emergentes del análisis de la entrevista final realizada a los FP

Categoría	Definición categoría	Códigos
		Manifiesta las razones de las adaptaciones propuestas.
	Esta categoría abarca las formulaciones del profesor que refieren a las adaptaciones realizadas al recurso con el fin de que posibilite alcanzar los propósitos proyectados.	Refiere a incorporar tareas que promuevan la construcción. Ejemplifica adaptación en la estructura del recurso. Destaca las preguntas del estudiante para adaptar el recurso. Propone ajustes a la estructura del recurso.
Justifica adaptación del recurso.		

Valoración de errores y dificultades.	Esta categoría comprende las declaraciones de los profesores en las que reconoce, comprende y menciona estrategias para abordar errores y dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a tareas relacionadas con el estudio de la semejanza.	Identifica errores y dificultades de los estudiantes. Menciona estrategias para afrontar errores y dificultades. Representación de los obstáculos y errores manifestados. Menciona dificultades relacionadas con los conceptos previos.
Conceptualización de la semejanza.	Esta categoría abarca las manifestaciones del profesor asociadas con representaciones relacionadas con el estudio de la semejanza en contextos escolares.	Manifiesta cómo abordaría la conceptualización de la semejanza. Representación del estudio del objeto matemático en la escuela. Destaca el estudio de las propiedades para conceptualizar.

4. Resultados

En este capítulo se presentan dos resultados de la investigación relacionados con la relación de los FP con los elementos constitutivos de la THA que se usa como medio para la enseñanza de la semejanza y la formación de profesores, y las decisiones de acción de los FP al utilizar la THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. A continuación, se detallan cada uno de los resultados.

La relación de los FP con los elementos constitutivos de la THA que se usa como medio para la enseñanza de la semejanza y para la formación de profesores

En la práctica de enseñanza y en particular en la interacción del FP con la THA los resultados del análisis muestran que los FP tienden a privilegiar el uso de la THA centrado en el desarrollo de las tareas de aprendizaje. Así pues, los aspectos constitutivos de la THA como objetivo y proceso de aprendizaje hipotético pocas veces se consideraron en el desarrollo de las tareas.

A continuación, se destacan dos ilustraciones para describir la relación por parte de los FP con los elementos constitutivos de la THA (meta de aprendizaje, tareas de aprendizaje y proceso de aprendizaje hipotético).

En primer lugar, Katherine en la interacción con el estudiante E3 abordó la tarea 2B que tuvo como propósitos: (a) describir figuras planas que tienen la «misma forma» y (b) reconocer las

relaciones entre los elementos homólogos (lados) y elementos correspondientes (vértices y ángulos) en figuras que tienen «la misma forma».

En cuanto a la relación del FP con la meta de aprendizaje se reconoció que Katherine formuló interrogantes con distintos fines (reconocer las matemáticas del estudiante, clasificar figuras que cumplen condición ser congruente y ampliar las discusiones matemáticas); no obstante tales interrogantes tuvieron como fin obtener información de carácter general, ya que no se cualificaron las preguntas de tal manera que posibilitara que el estudiante refiriera a características centrales de la semejanza contemplados en el propósito de la tarea, por ejemplo, relaciones entre lados homólogos, colinealidad entre puntos que se corresponden y la congruencia entre la amplitud de ángulos homólogos (Línea 172, 176). La tabla 8 presenta una ilustración de un segmento de enseñanza de la relación del FP Katherine con los elementos constitutivos de la THA.

Tabla 8

Relación del FP Katherine con los elementos constitutivos de la THA

Línea	Turno	Ilustración	Tipo de acción
172	Katherine	¿Tú qué entiendes por tamaño?	Pregunta para que el estudiante explicita su idea matemática respecto al tamaño.
173	E3	Pues sí, el tamaño, como las medidas, esas cosas.	Manifiesta idea relacionada con el tamaño de figuras.
174	Katherine	(...) entonces, al superponer la figura inicial con la figura final, ¿ellas se superponen perfectamente?, ¿en	Dirige la atención a superposición de figuras y

		cuáles ilustraciones los puntos coinciden en cada una de las figuras?	formula interrogante para que el estudiante clasifique.
175	E3	Ah, o sea, las que no se cambian de tamaño como estas [señala y desplaza de izquierda a derecha el dedo índice de la mano derecha desde la ilustración 1 hasta la ilustración 3 de la tarea 2B proyectada en el computador] por lo menos.	Reconoce la conservación del tamaño en figuras relacionadas.
176	Katherine	¿Por qué no cambian de tamaño?... ¿en esta [señala con el dedo índice de la mano derecha la ilustración 1 de la tarea 2B proyectada en el computador] pasa eso?, ¿la ilustración 3, 4, 5 y la 6?	Pregunta para que el estudiante justifique su respuesta.
177	E3	La 6 no, no tienen la misma forma, sería la ilustración 6 porque los puntos no encajan.	Reconoce el cambio de la forma a partir de la superposición de figuras.

Fuente. Elaboración propia.

En cuanto al proceso de aprendizaje hipotético se proyectó que los estudiantes (a) observaran la trayectoria que describía la figura inicial al ser arrastrada hasta la figura final, y (b) reconocieran características visuales de la transformación de homotecia (conservación de la forma,

cambio en el tamaño y colinealidad de los puntos correspondientes) al superponer la figura inicial con la figura final.

De esto se tiene que, Katherine consideró de manera parcial el proceso de aprendizaje hipotético establecido en la tarea, puesto que, si bien sus intervenciones estaban dirigidas a que los estudiantes reconocieran características visuales de la semejanza como la conservación de la forma y cambio en el tamaño, la colinealidad entre puntos correspondientes se desestimó.

En segundo lugar, Anderson al interactuar con los estudiantes E1, E2 y E3 abordó la tarea 3D del nivel general que tuvo como propósitos: (a) estimular la discusión en la justificación de sus respuestas, y (b) justificar la semejanza entre figuras planas.

En cuanto a la relación del FP con la meta de aprendizaje se evidenció que Anderson formuló interrogantes orientados a que los estudiantes recurrieran a las ideas aprendidas en las tareas previas, por ejemplo, ideas como el paralelismo entre segmentos que se corresponden y la conservación de la forma entre figuras relacionadas mediante una transformación de homotecia. Estas ideas fueron evocadas por el FP en el desarrollo de la tarea de aprendizaje. No obstante, los interrogantes formulados limitaron la construcción de argumentos por parte del estudiante que le permitiera justificar la semejanza de figuras planas (aspecto central del segundo propósito de la tarea) (líneas 129, 135 y 137). La tabla 9 presenta una ilustración de un segmento de enseñanza de la relación del FP Anderson con los elementos constitutivos de la THA.

Tabla 9

Relación del FP Anderson con los elementos constitutivos de la THA

Línea	Turno	Ilustración	Tipo de acción
129	Anderson	“(…) ¿qué características se deben de cumplir para que dos figuras sean	Pregunta para reconocer significados del estudiante.

		semejantes? ya lo hemos hablado en	
		términos generales, no solo de las	
		ilustraciones, sino de cualquier tipo de	
		figuras, ¿qué características se deben	
		de cumplir?	
130	E1	Que sean paralelas.	Reconoce el paralelismo entre
			segmentos que se
			corresponden como condición
			para ser semejante.
131	Anderson	Que sean paralelas.	Afirma respuesta del
			estudiante.
132	E2	Que tengan la misma forma.	Reconoce la conservación de la
			forma como condición para ser
			semejante.
133	Anderson	Que tengan la misma forma.	Afirma respuesta del
			estudiante.
134	E3	Que tenga la misma orientación.	Reconoce la conservación de la
			orientación como condición
			para ser semejante.
135	Anderson	La misma orientación. Falta lo del	Afirma respuesta y plantea
		tamaño, ¿qué pasa con el tamaño?	nuevo interrogante.

136	E1	Puede variar.	Reconoce el cambio en el tamaño como característica de figuras semejantes.
137	Anderson	Puede variar, ¿no? Ahí tenemos cuatro características matemáticas que podemos ir escribiendo.	Afirma respuesta y provee instrucción.

Fuente. Elaboración propia

En relación con el proceso de aprendizaje hipotético se proyectó que los estudiantes: (a) observen el rastro que deja la figura inicial al ser arrastrada para superponerla con la figura final, y (b) determinen propiedades de la semejanza como la colinealidad entre puntos correspondientes, el cambio de tamaño y la conservación de la forma entre figura planas.

De esto se tiene que, Anderson a partir de los interrogantes posibilitó que los estudiantes a partir de la visualización que privilegia el AGD determinaran características centrales de la transformación de homotecia, es decir, el proceso de aprendizaje hipotético se consideró en el desarrollo de las tareas y se evidenció a partir de las acciones privilegiadas por el FP de preguntar y afirmar.

Las decisiones de acción del FP al utilizar la THA para la enseñanza de la semejanza

Las decisiones de acción están asociadas a las transformaciones de la acción del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante. Es un proceso vinculado a la habilidad de decidir de la mirada profesional del profesor que se basa en su razonamiento para responder a la comprensión del estudiante cuando se enfrenta a una situación problema (Jacobs *et al.*, 2011).

Este apartado tiene por objetivo describir el estado de las decisiones de acción del FP al responder a la expresión matemática del estudiante en relación con la semejanza a partir de los elementos didácticos, curriculares y matemáticos que subyacen a los niveles del proceso de aprendizaje hipotético, la naturaleza de las tareas y su secuenciación.

Las acciones dominantes del FP que limitan la respuesta a la expresión matemática del estudiante

Katherine es quien interviene en el segmento de enseñanza número once correspondiente a la segunda intervención de clase (S11-I2). Katherine en el intercambio con los estudiantes E3 y E7 aborda la tarea 3A del nivel general que tuvo como propósitos: (a) aplicar las ideas aprendidas en las actividades previas para justificar respuestas, (b) justificar la semejanza de figuras planas, y (c) reconocer y utilizar condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas.

En el segmento de enseñanza el contenido tratado comprende reconocer que entre figuras relacionadas mediante una transformación de homotecia con razón de semejanza $k > 1$ y $0 < k < 1$, varían en tamaño (aumenta o disminuye), se establecen relaciones entre elementos correspondientes (colinealidad entre «puntos», es decir, vértices que se corresponden y congruencia entre la amplitud de los ángulos homólogos) y la proyección de puntos correspondientes de figuras relacionadas convergen en el centro de homotecia.

Se privilegia un razonamiento figurativo al reconocer y utilizar de las representaciones gráficas la colinealidad entre puntos y el centro de homotecia para establecer entre figuras relacionadas la semejanza. La tabla 10 presenta una ilustración de un segmento de enseñanza que da cuenta de las acciones dominantes del FP que limitan la respuesta a la expresión matemática del estudiante.

Tabla 10

Acciones dominantes del FP que limitan la respuesta a la expresión matemática del estudiante

Línea	Turno	Ilustración	Tipo de acción
287	Katherine	¿Cuál de las ilustraciones la figura inicial y la figura final se encuentran relacionadas a través de una transformación de homotecia?	Pregunta para que el estudiante clasifique.
288	E3	¡Ah! o sea, que pase por el centro.	Reconoce el centro de homotecia como característica de la transformación de homotecia.
289	Katherine	Entonces, eso se responde al mover el deslizador de izquierda a derecha, ¿qué pasa cuando muevo el deslizador? ¿qué van saliendo?	Provee instrucciones y formula interrogante.
290	E3	Puntos.	Responde la colinealidad entre figuras relacionada mediante una transformación de homotecia.
291	Katherine	Y esos puntos que ustedes dicen, ¿en dónde se encuentran?	Pregunta para dirigir la atención en el centro de homotecia.

292	E7	En el punto final, en el centro.	Reconoce el centro de homotecia.
293	Katherine	¿En un qué?... Entonces ustedes ahí están dando unas características de lo que puede ser una homotecia.	Reitera pregunta para dirigir la atención en el centro de homotecia.
294	E3	¿Y en esa [señala la ilustración 3 proyectada en el tablero] por qué no hay centro?	Pregunta para reconocer significados.
295	Katherine	Entonces, ¿qué significa?... Porque usted me está diciendo que la homotecia es el punto que se encuentra en el centro, y ¿si la tres no tiene?	Pregunta y recopila información para que el estudiante precise su idea matemática.
296	E3	Entonces, no es homotecia.	Determina si en figuras que se relacionan hay una transformación de homotecia.

Fuente. Elaboración propia

Katherine en la línea 287 formuló interrogantes con el fin de que el estudiante clasificará las ilustraciones a partir de reconocer el centro de homotecia. En esta línea se reconoce la acción del FP de preguntar para que el estudiante manifieste sus matemáticas a partir de clasificar ilustraciones que cumplen la condición de tener centro de homotecia. Posterior a la manifestación del estudiante, Katherine provee instrucciones de uso del recurso digital para reconocer la colinealidad entre puntos que se corresponden. Aquí se reconoce la acción del FP de proveer

instrucciones relacionadas con la interacción estudiante-recurso (reconocer el centro de homotecia como la convergencia de la proyección de los puntos que se corresponden en relación con el arrastre guiado) y reconocer a partir de la visualización una característica de la transformación de homotecia: «Entonces, eso se responde moviendo el deslizador de izquierda a derecha, ¿qué pasa cuando muevo el deslizador? ¿qué van saliendo?» (línea 289).

Luego, Katherine en las líneas 291 y 293 formula interrogantes con el fin de reconocer el centro de homotecia «y esos puntos que ustedes dicen, ¿en dónde se encuentran?» «¿en un qué?... Entonces, ustedes ahí están dando características de lo que puede ser una homotecia». Se reconoce la acción del FP de preguntar con el fin de que los estudiantes recopilen y amplíen su idea matemática. Finalmente, se reconoce la acción de Katherine de plantear interrogantes con el fin de que el estudiante establezca la semejanza entre figuras relacionadas «entonces, ¿qué significa?... Porque usted me está diciendo que la homotecia es el punto que se encuentra en el centro, y ¿si la tres no tiene?» (línea 295).

En el segmento de enseñanza ilustrado, las acciones del FP se destacan porque privilegian acciones dominantes de preguntar con distintos fines y proveer instrucciones. En el segmento no fue posible reconocer una transformación en las acciones del FP que incentivara la expansión de las discusiones matemáticas de clase.

Figura 4

Acción dominante del FP de proveer instrucciones para el uso del recurso.



Transformación de las acciones del FP como respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante

En este apartado se presentan dos segmentos de enseñanza reconocidos acorde con la conceptualización de las decisiones de acción y que cumplen con las características relacionadas con las transformaciones de las acciones del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante.

El primer segmento de enseñanza seleccionado corresponde al número cinco de la primera intervención de clase de Anderson (G01 – S5 – I1).

Anderson en el intercambio con los estudiantes de la clase, en particular con E1, abordó la tarea 2A del nivel referencial. Esta tuvo como propósito reconocer e identificar figuras planas que tienen la misma forma, e inferir las condiciones suficientes y necesarias en la determinación de figuras semejantes.

Los contenidos matemáticos tratados se inscriben en la transformación de homotecia, en particular, en la determinación de figuras semejantes. Se privilegia un razonamiento figurativo al determinar a partir de variantes de orden visual condiciones necesarias para que el par de figuras relacionadas sean semejantes. La transformación de las acciones de Anderson se ilustra en las siguientes líneas. La tabla 11 presenta una ilustración de un segmento de enseñanza que da cuenta de la transformación de las acciones dominantes del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante.

Tabla 11

Transformación de las acciones del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante

Línea	Turno	Ilustración	Tipo de acción
216	Anderson	¿Cuál figura cambió la orientación?	Pregunta para que el estudiante clasifique.
217	E1	La número dos.	Reconoce el cambio de la orientación en figuras relacionadas.
218	Anderson	¿La número dos? ¿por qué?	Pregunta para reconocer significados del estudiante.
219	E1	Vea que acá [señala con el dedo índice de la mano derecha la figura inicial de la ilustración 2 tarea 2A proyectada en el computador] comienza un triángulo y acá [señala con el dedo índice de la mano	Uso del recurso para ilustrar el cambio de orientación en figuras relacionadas.

		derecha la figura final de la ilustración 2 tarea 2A proyectada en el computador] termina lo mismo, pero en punta, ¿si me entiende? cambia. Acá [señala con el dedo índice de la mano derecha la ilustración 1 tarea 2A proyectada en el computador] es igual, acá [señala con el dedo índice de la mano derecha la ilustración 3 tarea 2A proyectada en el computador] es igual y acá [señala con el dedo índice de la mano derecha la ilustración 4 tarea 2A proyectada en el computador] es igual.	
220	Anderson	Bien, excelente. Entonces, ¿cuál figura no conserva la orientación?	Afirma y formula interrogante.
221	Es	La dos.	Clasifica figuras a partir de reconocer propiedades.
222	Anderson	¿Por qué la dos?	Pregunta para reconocer significados del estudiante.
223	Es	Porque cambia.	Reconoce el cambio en la orientación.
224	Anderson	Lo podemos ver con los puntos, miren los puntos, vea que aquí [señala con el dedo índice de la mano derecha la figura final	Explica y formula interrogante.

		de la ilustración 2 tarea 2A proyectada en el computador] está el verde, el rojo y el naranja ¿dónde termina este al otro lado?	
225	E1	Abajo.	Reconoce el cambio en la orientación.
226	Anderson	¿Dónde termina este [señala con el dedo índice de la mano derecha el vértice de color rojo de la figura inicial de la ilustración 2 tarea 2A proyectada en el computador]? ¿y este? [señala con el dedo índice de la mano derecha el vértice de color naranja de la figura inicial de la ilustración 2 tarea 2A proyectada en el computador]. Ahí, podemos ver que están cambiando la orientación de los puntos, a partir de allí es que podemos relacionar lo de la orientación, si cambia el sentido de la orientación.	Pregunta para aclarar.

Fuente. Elaboración propia

Anderson, en la línea 216, preguntó si alguna de las figuras relacionadas cambió de orientación. Aquí se reconoce la acción del FP de preguntar para que los estudiantes manifiesten sus ideas matemáticas. Posteriormente, retoma la respuesta del estudiante para plantear una pregunta con el fin de provocar una expansión en las discusiones matemáticas: «la número dos,

¿por qué?» (línea 218). Luego, reformula la pregunta relacionada con la orientación para que el estudiante, reafirme su idea matemática: «¿cuál figura no conserva la orientación?» (línea 220). Seguidamente, pregunta para que el estudiante amplíe su respuesta: «¿por qué la dos?» (línea 222). Después, explica (aclara) y formula interrogante para reconocer significados del estudiante: «¿dónde termina este [señala con el dedo índice de la mano derecha el vértice de color rojo de la figura inicial de la ilustración 2 tarea 2A proyectada en el computador] al otro lado?» (línea 224). Finalmente, formula interrogantes y explica (aclara): «podemos ver que están cambiando la orientación de los puntos, a partir de allí es que podemos relacionar lo de la orientación, si cambia el sentido de la orientación» (línea 226).

Las acciones del FP que en el segmento de enseñanza cinco se destacan posterior a la expansión de las discusiones matemáticas son: afirmar, formular interrogantes, preguntar y explicar (aclarar). La transformación de las acciones del FP en su dinámica se caracteriza porque se desplaza de afirmar a preguntar y de preguntar a explicar (aclarar).

Figura 5

Transformación de las acciones del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante



El siguiente segmento de enseñanza, corresponde al número diecisiete de la segunda intervención de clase de Anderson (G01 – S17 – I2).

Anderson en la interacción con los estudiantes E3, E4 y E5 abordó la tarea 3A del nivel general que tuvo como propósitos. (a) aplicar las ideas aprendidas en las actividades previas para justificar respuestas, (b) justificar la semejanza de figuras planas, y (c) reconocer y utilizar condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas.

Los contenidos matemáticos se inscriben en la transformación de homotecia, en particular, en términos de la congruencia de los ángulos homólogos, la proporcionalidad de la

longitud de los segmentos correspondientes, la colinealidad entre puntos correspondientes y determinar el centro de homotecia. Se privilegia un razonamiento inductivo al reconocer y utilizar condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas. La tabla 12 presenta un segmento de enseñanza que ilustra la transformación de en las acciones del FP Anderson en respuesta al pensamiento matemático del estudiante.

Tabla 12

Transformación de las acciones del FP en respuesta al PM del estudiante

Línea	Turno	Ilustración	Tipo de acción
281	Anderson	(...) la forma ¿qué ocurre con la forma?	Pregunta para reconocer significados del estudiante.
282	E3	Disminuye.	Manifiesta idea relacionada con el cambio en el tamaño de figuras que se relacionan.
283	Anderson	Pero eso ya vendría siendo el tamaño, estoy hablando de la forma.	Corrige y reitera interrogante.
284	E4	«La forma no cambia».	Reconoce la conservación de la forma en figuras relacionadas.

285	Anderson	La forma no cambia, esa es una característica. El tamaño, el tamaño sí puede cambiar, puede aumentar o disminuir, y ¿cuál sería la tercera?	Afirma, explica y formula interrogante.
286	E3	La orientación no cambia.	Reconoce la conservación de la orientación en figuras relacionadas.
287	Anderson	La orientación no cambia, muy bien, y ¿la cuarta?	Afirma y formula interrogante con el fin de reconocer significados del estudiante.
288	E5	Todos se juntan en uno solo, en el centro de la homotecia.	Reconoce el centro de homotecia en figuras relacionadas.
289	Anderson	¡Exacto! que se unan en un centro de homotecia. Cuatro características que debe tener la homotecia, entonces, a partir de allí podemos ir las escribiendo, recuerden ¿cuál era la primera?	Afirma respuesta, provee instrucción y formula interrogante.
290	E3	El tamaño puede cambiar.	Reconoce el cambio en el tamaño en figuras relacionadas.

291	Anderson	El tamaño puede cambiar, esa es una. Con la forma, ¿qué ocurre con la forma?	Afirma y formula interrogante con el fin de reconocer significados del estudiante.
292	E4	Igual.	Reconoce la conservación de la forma en figuras relacionadas.
293	Anderson	Igual, ¿cierto? no cambia, ¿qué ocurre con la orientación?	Afirma y formula interrogante con el fin de reconocer significados del estudiante.
	E4	Igual.	Reconoce la conservación de la orientación en figuras relacionadas.
295	Anderson	Igual, igual, no cambia y ¿qué tienen que tener?... El centro, centro de la homotecia donde se unan todos los puntos de la figura.	Afirma, formula interrogante y responde.

Anderson, en la línea 281 preguntó por la forma de las figuras relacionadas para discutir condición necesaria en la determinación de semejanza. Se reconoce la acción del FP de preguntar para que los estudiantes expliciten sus matemáticas. Luego, corrige respuesta del estudiante y reitera interrogante para centrar la atención en la forma de las figuras que se están relacionando. Posteriormente, Anderson afirma respuesta del estudiante, suministra explicación relacionada con el tamaño y fórmula interrogante. Se reconocen acciones del FP relacionadas con afirmar manifestaciones del estudiante, aclarar condición necesaria relacionada con la variación del tamaño en figuras relacionadas y formular interrogante para que los estudiantes manifiesten sus ideas matemáticas.

Anderson en la siguiente intervención afirma respuesta de E3 vinculada con la conservación en la orientación de las figuras relacionadas y formula interrogante con el fin de provocar una expansión de las discusiones matemáticas «la orientación no cambia, muy bien, y ¿la cuarta?» (línea 287). Luego, afirma respuesta de E5 relacionada con reconocer el centro de homotecia, provee instrucción para registrar la respuesta suministrada y formula interrogante para recopilar las condiciones necesarias para determinar la semejanza de figuras planas: «¡Exacto! que se unan en un centro de homotecia. Cuatro características de la homotecia, entonces, a partir de allí podemos ir las escribiendo, ¿cuál era la primera?» (línea 289), «¿qué ocurre con la forma?» (línea 291), «¿qué ocurre con la orientación?» (línea 293).

Finalmente, Anderson afirma respuesta de E4 vinculada con la conservación en la orientación de figuras relacionadas, formula interrogante para reconocer el centro de homotecia y aclara el significado de centro de homotecia; «igual, no cambia y ¿qué tienen que tener?... El centro, centro de la homotecia, donde se unan todos los puntos de la figura» (línea 295).

Las acciones del FP que en el segmento de enseñanza diecisiete se destacan posterior a la expansión de las discusiones matemáticas son: afirmar, proveer instrucción, preguntar y afirmar. La transformación de las acciones del FP se caracteriza porque se desplaza de afirmar a proveer instrucción y de preguntar a afirmar.

Estado de las acciones del FP al intervenir con la THA para la enseñanza de la semejanza en el aula

Para establecer el estado de las decisiones de acción del FP al utilizar la THA para la enseñanza de la semejanza, se recurrió al análisis de la entrevista semiestructurada, triangulándola con los datos obtenidos y analizados de la intervención de los FP en el aula de clases. Dado que los FP ofrecieron un nivel de detalle distinto en sus respuestas, el estado de las decisiones de acción se presenta en términos de:

- *Falta de evidencia de decidir del FP con base en la respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante:* el FP privilegia acciones dominantes centradas en sus representaciones de cómo los estudiantes comprenden la semejanza de figuras planas y no en función de las respuestas a la expresión matemática del estudiante.

- *Evidencia limitada de las decisiones de acción del FP en la intervención de aula:* el FP decide en respuesta a la expresión matemática del estudiante; sin embargo, las respuestas suministradas para justificar sus decisiones carecen de detalles de orden didáctico, curricular o matemático relacionados con la semejanza.

Falta de evidencia de decidir del FP con base en la respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante

En el segmento de enseñanza número once de la segunda intervención de clase Katherine se destacó por privilegiar acciones centradas en sus representaciones respecto a la comprensión

de los estudiantes. Es decir, las respuestas brindadas en relación con la comprensión de los estudiantes se ubicaron en comentarios generales y representaciones dominantes de cómo los estudiantes comprenden la semejanza de figuras planas.

Para ilustrar lo anterior, Katherine mencionó: «ellos ya iban reconociendo que eran figuras semejantes, pero no solamente el concepto como tal, sino esas características que debe tener una figura para ser semejante con otra, por ejemplo, los puntos colineales, ¿qué pasa si las rectas son paralelas?, ¿realmente habría semejanza o no? o ¿de qué se estaría hablando? si ese punto correspondería al centro de homotecia, es decir, ya estaban dándole forma al concepto, ya estaban reconociendo sus características, ya miraban que sí había rectas paralelas ¿qué pasaba?, ¿realmente había o no había? o ¿qué pasaba si no había un centro de homotecia?» (EF – G02, línea 30).

En primer lugar, se evidenció que Katherine en el desarrollo de la tarea consideró de manera parcial los propósitos proyectados de la tarea 3A del nivel general, los cuales consistían en: (a) aplicar las ideas aprendidas en las actividades previas para justificar respuestas, (b) justificar la semejanza de figuras planas, y (c) reconocer y utilizar condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas.

Se reconoció que el segundo propósito se abordó a partir de analizar y clasificar las ilustraciones con base en características de la transformación de homotecia (conservación de la forma, tamaño, colinealidad entre puntos); sin embargo, la formulación de preguntas se limitó a mencionar y no justificar las características reconocidas en las figuras relacionadas.

En segundo lugar, en cuanto al proceso hipotético de aprendizaje se evidenció que Katherine lo consideró de manera parcial para el desarrollo de la tarea. Se estableció que los estudiantes: (a) observan en las ilustraciones 1, 2 y 3 la figura inicial y su respectiva imagen, (b) al

mover el deslizador de la ilustración 1 y 2 observa el rastro que dejan los puntos correspondientes al deslizarse en línea recta desde la figura final hasta la inicial y reconoce el punto llamado centro donde convergen los puntos proyectados, (c) reconoce que en la ilustración 3 los puntos proyectados se deslizan en línea recta y está ausente la convergencia de los puntos, y (d) reconoce propiedades de la semejanza como consecuencia de una transformación de homotecia como la colinealidad entre puntos correspondientes, convergencia de puntos correspondientes proyectados en un punto llamado centro de homotecia, el cambio en el tamaño y la conservación de la forma entre figuras planas.

Katherine en su manifestación reconoce a partir de formulación de preguntas condiciones suficientes y necesarias para establecer la semejanza entre figuras relacionadas; no obstante, tales manifestaciones carecen de explicaciones relacionadas con tales características, por ejemplo, en relación con la variación de tamaño con la proporcionalidad en la longitud de los segmentos correspondientes, la conservación de la forma con la congruencia en la amplitud de los ángulos homólogos.

Finalmente, respecto al uso del recurso digital Katherine mencionó: «(...) la persona que utiliza un programa o bueno la herramienta es porque quiere ir más allá, quiere ir más a fondo, quiere mirar que a partir de GeoGebra el estudiante puede mirar qué pasaba cuando movía el deslizador, qué pasaba cuando movía un punto, qué pasaba si se hacía presente lo que era los conceptos de homotecia, o sea, eso el estudiante lo puede ver ahí perfectamente» (EF – G02, línea 23).

Se evidencia que Katherine destaca, de manera limitada, el potencial del ambiente de geometría dinámica para reconocer, a partir de herramientas como el arrastre y la selección de

objetos, patrones e invariantes, y favorecer procesos de visualización (representación de familia de imágenes de un mismo objeto).

En síntesis, no suministrar detalles en sus respuestas respecto a la comprensión matemática de los estudiantes, formular interrogantes como descriptores de la comprensión de condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas y reconocer de manera limitada el potencial del uso del ambiente de geometría dinámica en el reconocimiento de propiedades e invariantes, caracterizó las respuestas de Katherine en comentarios generales y por ende como falta de evidencia de decidir con base en la respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante.

Evidencia limitada de las decisiones de acción del FP en su gestión de aula

En el primer segmento de enseñanza correspondiente al número cinco de la primera intervención, Anderson se caracterizó por tomar decisiones centradas en las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante E1 acerca de la conservación y cambio en la orientación de figuras relacionadas. No obstante, Anderson en las respuestas suministradas en la entrevista semiestructurada no profundizó en tales decisiones, evidenciándose en sus acciones limitación respecto a cómo responder basándose en las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante.

Para ilustrar lo anterior, Anderson mencionó: «nos dimos cuenta de que el estudiante debe tener claro que, tiene que tener la misma forma, que puede ser diferente tamaño, pero que la orientación o la trayectoria que describe debe ser lineal (...) y a partir de allí los estudiantes afianzaron esas características y ese concepto de homotecia» (EF – G01, Línea. 23).

En primer lugar, se evidenció que Anderson consideró la sugerencia didáctica relacionada con el cambio en el uso de la palabra «semejante» por la expresión «tener la misma forma» como

alternativa para enfrentar la tendencia que conduce al error de los estudiantes de asociar el término semejante a lo establecido en contextos no matemáticos y entendido como «parecido» (Gualdrón, 2011).

En segundo lugar, se reconoció que Anderson contempló el propósito que se proyectó para el desarrollo de la tarea 2A del nivel referencial que consistía en inferir condiciones suficientes y necesarias en la determinación de figuras semejantes (conservación de la forma, cambio en el tamaño, colinealidad de los puntos correspondientes). No obstante, aspectos relacionados con la proporcionalidad de la longitud de los lados correspondientes, la congruencia en la amplitud de los ángulos homólogos y la colinealidad entre puntos correspondientes, se mencionan sin suministrar detalles de cómo estos aspectos posibilitan determinar la conservación de la forma, cambio en el tamaño y la descripción de trayectoria rectilínea que describen figuras semejantes relacionadas mediante una transformación de homotecia cuyo factor de homotecia corresponde a $k > 1$ y $0 < k < 1$.

En tercer lugar, en cuanto al proceso hipotético de aprendizaje, se observó que Anderson lo consideró de manera parcial en el desarrollo de la tarea. En este se establecía que el estudiante observaba el movimiento y el rastro que dejaban los vértices al ir desde la figura inicial hasta la figura final, e infería a partir del movimiento, el cambio en el tamaño, la conservación de la forma y la trayectoria que describen de los vértices (puntos correspondientes). Sin embargo, Anderson centró la atención en la orientación de la figura final respecto a la inicial, restando importancia al reconocimiento del rastro que dejan los vértices en el movimiento y, con ello, la colinealidad entre los puntos correspondientes de figuras semejantes relacionadas mediante una transformación de homotecia.

Respecto al segundo segmento de enseñanza ilustrado correspondiente al número diecisiete de la segunda intervención, Anderson se caracterizó por tomar decisiones centradas en

responder a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante E5 acerca del reconocimiento de condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas. Sin embargo, Anderson en las respuestas suministradas en la entrevista semiestructurada no profundizó en tales decisiones, reafirmando en sus acciones limitación respecto a responder en función de la comprensión de los estudiantes.

Para ilustrar lo anterior, Anderson mencionó: «qué ocurría si una figura tiene mismo tamaño y misma forma, pero la trayectoria no es lineal, o qué ocurre si una figura es mismo tamaño pero diferente forma, pero trayectoria lineal, entonces, vimos cómo todo ese tipo de cambios y a partir de allí fue que los estudiantes reconocieron las características propias» (EF – G01, línea 26).

En primer lugar, se evidenció que Anderson consideró los propósitos que se proyectaron para el desarrollo de la tarea 3A del nivel general, los cuales consistían en: (a) aplicar las ideas aprendidas en las actividades previas para justificar respuestas, (b) justificar la semejanza de figuras planas, y (c) reconocer y utilizar condiciones suficientes y necesarias para determinar la semejanza de figuras planas.

Anderson en su intervención de clase privilegió acciones de formular interrogantes con el fin de que el estudiante manifestara condiciones suficientes y necesarias para establecer la semejanza (cambio en el tamaño, conservación de la forma, colinealidad entre puntos correspondientes), es decir, apeló a evocar ideas aprendidas en tareas previas. Sin embargo, aspectos como la convergencia en la proyección de los puntos correspondientes en el centro de homotecia, el deslizamiento en línea recta las figuras relacionadas mediante una transformación isométrica (traslación) no se destacaron en sus manifestaciones.

En segundo lugar, respecto al proceso de aprendizaje se evidenció que Anderson lo consideró de manera parcial en el desarrollo de la tarea. En este se establecía que los estudiantes: (a) observan en las ilustraciones 1, 2 y 3 la figura inicial y su respectiva imagen, (b) al mover el deslizador de la ilustración 1 y 2 observa el rastro que dejan los puntos correspondientes al deslizarse en línea recta desde la figura final hasta la inicial y reconoce el punto llamado centro donde convergen los puntos proyectados, (c) reconoce que en la ilustración 3 los puntos proyectados se deslizan en línea recta y está ausente la convergencia de puntos, y (d) reconoce propiedades de la semejanza como consecuencia de una transformación de homotecia como la colinealidad entre puntos correspondientes, convergencia de puntos correspondientes proyectados en el centro de homotecia, el cambio en el tamaño (proporcionalidad entre la longitud de los lados correspondientes) y la conservación de la forma (congruencia en la amplitud de los ángulos homólogos).

Sin embargo, Anderson en las explicaciones suministradas descartó aludir al reconocimiento del centro de homotecia como el punto de convergencia de los puntos que se corresponden al ser proyectados desde la figura final hasta la inicial, como condición necesaria para determinar la semejanza entre figuras planas relacionadas mediante una transformación de homotecia.

Finalmente, respecto al uso del ambiente de geometría dinámica Anderson destacó el recurso como medio para reconocer propiedades al manifestar: «allí fue donde empezamos a esclarecer esa diferencia entre forma y tamaño, entonces, para ello nos hicimos cuenta del recurso, entonces, yo les mostré chicos qué ocurre cuando movemos la figura, cómo es su forma, cuál sería el tamaño, y empezamos a partir de la misma visualización del recurso esa diferencia, y a

partir de allí los estudiantes ya pudieron identificar esa diferencia entre forma y tamaño» (EF – G01, línea 22).

Se evidencia que Anderson reconoce el potencial del ambiente de geometría dinámica para reconocer propiedades e invariantes entre las figuras relacionadas. Destaca que a partir de herramientas como el arrastre favorece el movimiento de figuras (el deslizamiento en línea recta de la figura inicial para obtener la figura final, la colinealidad de puntos que se corresponden y que describen una trayectoria rectilínea cuya proyección convergen en el centro de homotecia) y la representación de familias de imágenes de un mismo objeto.

5. Conclusiones y discusiones

Este estudio tuvo como objetivo general caracterizar las decisiones de acción de los futuros profesores al aplicar una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales. Para dar respuesta al objetivo, se plantearon dos objetivos específicos. La explicación del primer objetivo correspondiente a *aplicar* una THA que se utiliza para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales se realiza en el apartado 5.1; la del segundo objetivo *reconocer* las decisiones de acción de los futuros profesores de matemáticas al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza se realiza en el apartado 5.2.

Por último, en el apartado 5.3 se presentan las limitaciones del estudio y se brindan algunas recomendaciones.

Una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales

Para dar respuesta al primer objetivo específico se diseñó una THA para la enseñanza de la semejanza en la que se integran recursos curriculares digitales (ver Tabla 1). Dado que en la revisión de literatura son escasos los trabajos de carácter empírico relacionados con la formación de futuros profesores en los que se hace uso de una THA para la enseñanza de la semejanza, el diseño se considera una contribución del estudio.

El diseño de la THA tuvo como referencia los componentes descritos por Simon (1995): meta de aprendizaje, tareas de aprendizaje y proceso de aprendizaje hipotético. Además, se consideraron los niveles de la heurística de los modelos emergentes (nivel situacional, nivel referencial, nivel general y nivel formal) para estructurar la secuencia de las tareas de aprendizaje (Gravemeijer, 1999).

El uso de la THA se consideró útil para los FP en la enseñanza de la semejanza, ya que proporcionó una secuencia de tareas (orden y tipo de tareas), propósitos y proceso de aprendizaje

hipotético que posibilitó a los FP atender el pensamiento matemático del estudiante. Este resultado es acorde con los estudios de Clark-Wilson *et al.* (2020) e Ivars (2019) que han afirmado que las THA ayudan a guiar la instrucción a partir de centrar la atención en las heurísticas empleadas por los estudiantes en la resolución de las tareas de aprendizaje, y a su vez posibilitan analizar el pensamiento matemático del estudiante relacionado con un concepto ayudando a tomar decisiones.

Asimismo, la integración de recursos curriculares digitales en la THA mostró ser pertinente para guiar las discusiones en el aula, plantear preguntas para expandir las discusiones matemáticas en el aula y ofrecer respuestas en función de las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante. Esto concuerda con la investigación realizada por Lee (2020) en la que afirma que el uso de instrumentos tecnológicos ayuda a los futuros profesores a centrarse en cómo hacer preguntas, predecir las posibles respuestas de los estudiantes y responder para apoyar el aprendizaje de los estudiantes como potencialidad para contribuir al desarrollo de la mirada profesional del pensamiento matemático del estudiante.

Las decisiones de acción de los FP al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza

En este estudio se caracterizaron las decisiones de acción de los FP al utilizar una THA para la enseñanza de la semejanza. Las decisiones de acción están asociadas a las transformaciones de la acción del FP en respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante. Es un proceso vinculado a la habilidad de decidir de la competencia mirada profesional del profesor de matemáticas que se basa en el razonamiento del profesor para responder a la comprensión del estudiante cuando se enfrenta a una situación problema (Jacobs *et al.*, 2011).

En coherencia con el segundo propósito de la investigación, se logró reconocer que las acciones de los FP se pueden describir en términos de falta de evidencia de decidir del FP con base en la respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante y evidencia limitada de las decisiones de acción del FP en la intervención de aula.

En cuanto a la falta de evidencia de decidir del FP con base en la respuesta a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante se observó que estas acciones tienen por rasgo común privilegiar acciones dominantes del FP de proveer instrucciones, como por ejemplo, dirigir la atención del estudiante a reconocer en figuras relacionadas propiedades de la semejanza, destacándose la ausencia de razones de orden didáctico, curricular o matemático que justificaran la toma de decisiones reconocidas en los segmentos de enseñanza (ver Tabla 5 y Tabla 6). Lo anterior, converge con el estudio realizado por Jacobs *et al.* (2011) donde afirman que la falta de pruebas de que se decidiera responder con base en la comprensión del estudiante, corresponde a las respuestas del profesor en las que no se evidenciaba haber decidido en función de la comprensión del estudiante, y en contraste tales respuestas se basaban en comentarios generales o en observaciones dominantes del pensamiento de los profesores.

Respecto a la evidencia limitada de las decisiones de acción del FP refiere aquellas decisiones que tienen como base responder a las manifestaciones de la expresión matemática del estudiante, es decir, aquellas acciones realizadas por el FP que posibilitaron la expansión de las discusiones matemáticas (por ejemplo, formular interrogantes para reconocer características de las figuras relacionadas), sin embargo, tales acciones se justifican de manera somera en las manifestaciones realizadas por el FP en la entrevista semiestructurada (ver Tabla 6). Esto es coherente con lo expuesto Jacobs *et al.* (2011) al afirmar que las pruebas limitadas de decidir con base en la comprensión del pensamiento matemático del estudiante, refiere a las respuestas que

tienen como base apoyar el pensamiento matemático del estudiante a partir de razonar en función del pensamiento matemático del estudiante; sin embargo, tales respuestas carecen de detalles o no se realizan a profundidad.

Las decisiones de acción del FP se caracterizaron por realizar acciones como preguntar para que el estudiante hiciera manifiesto sus matemáticas, por ejemplo, Anderson formuló interrogantes para que el estudiante clasificara figuras que cumplen característica relacionada con la conservación de la orientación (S5 – I1, línea 220). Posterior a la expansión de las discusiones matemáticas, el futuro profesor realizó acciones de afirmar respuesta, preguntar y explicar (S5 – I2, líneas 220, 222 y 224). De la misma manera, se caracterizó por brindar razones en sus manifestaciones realizadas en la entrevista del porqué de sus acciones que, si bien no son exhaustivas, se conciben como eje central reconocer propiedades de la semejanza en el proceso de conceptualización (EF – G01, Línea. 23). Lo anterior converge con el trabajo de Rhodes (2007) en el que afirma que si en el intercambio profesor-estudiante se prioriza la formulación de preguntas para guiar las matemáticas del estudiante y posterior a respuesta del estudiante, se actuará en consecuencia, son acciones que se destacan por posibilitar que los estudiantes formulen conjeturas respecto a las propiedades del concepto que se está movilizando y por ende transitar hacía los objetivos propuestos.

Limitaciones y recomendaciones

En primer lugar, sobre la caracterización de los participantes del estudio se trata de futuros profesores de matemáticas de una misma universidad y de ámbitos académicos similares, por tanto, los resultados de la investigación están delimitados a un contexto muy particular.

En segundo lugar, como estudio exploratorio la investigación respondió al interés de caracterizar las decisiones de acción de los FP; no obstante, se concibe que el registro de vídeo y

análisis de seis sesiones de clase son limitadas para proporcionar datos concluyentes de la complejidad de estudiar las decisiones de acción de los FP. En ese sentido, este trabajo ha de entenderse que corresponde a una «foto» que intenta dar cuenta de la formación profesional del profesor, es decir, al uso por parte del FP de sus conocimientos profesionales en situaciones de enseñanza para responder al pensamiento matemático del estudiante.

Contribuciones al campo de investigación

A partir del estudio realizado fue posible profundizar respecto a las decisiones de acción de los FP en el contexto de la enseñanza del razonamiento y la construcción de sentido geométrico. Se concibe necesario realizar futuros estudios con diseños de investigación experimental y con un número mayor de participantes. A pesar de las limitaciones, esta investigación (a) contribuye al creciente conjunto de investigaciones que reflexionan respecto al uso de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como lente teórico que posibilita a los profesores comprender el pensamiento matemático del estudiante y planificar respuestas con base en dicha comprensión, y (b) suministra evidencia relacionada con los usos que hace el FP de su conocimiento profesional para identificar, interpretar y decidir una respuesta de instrucción con base en el pensamiento matemático del estudiante.

Futuras líneas de investigación

A partir de los resultados obtenidos en este estudio es posible vislumbrar futuras líneas de investigación relacionadas con la reflexión respecto a la construcción de dispositivos y configuración de escenarios que posibiliten a los futuros profesores cualificar su conocimiento profesional y auspiciar el desarrollo de las habilidades de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante.

Este estudio mostró ser útil en la exploración de la trayectoria hipotética de aprendizaje por parte de futuros profesores como lente para estructurar la atención hacia el pensamiento matemático del estudiante. No obstante, se requiere de más estudios que reflexionen respecto al uso de la THA para desarrollar la competencia mirada profesional del pensamiento matemático del estudiante.

Asimismo, se considera necesario realizar estudios que continúen indagando respecto a potencialidades y limitaciones del uso de tecnologías digitales para contribuir al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático del estudiante, en particular, a las decisiones de acción.

6. Referencias

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 205-224.
- Amador, J. (2019). Noticing as a tool to analyze mathematics instruction and learning. *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2*, 311-336.
- Amador, J. (2022). Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(2), 163-189.
- Amador, J., Bragelman, J. y Superfine, A. (2021). Prospective teachers' noticing: a literature review of methodological approaches to support and analyze noticing. *Teaching and Teacher Education*, 99, 103256.
- Amador, J., Estapa, A., Kosko, K. y Weston, T. (2021). Prospective teachers' noticing and mathematical decisions to respond: using technology to approximate practice. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 52(1), 3-22.
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A practical guide for early career researchers*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>
- Clark-Wilson, A., Robutti, O. y Thomas, M. (2020). Teaching with digital technology. *ZDM-Mathematics Education*, 52(7), 1223-1242. <https://doi.org/10.1007/S11858-020-01196-0/TABLES/1>
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly., R. A. Lesh y J. Y. Baek (eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Routledge.
- Coxeter, H. S. M. (1971). *Fundamentos de geometría*. Limusa-Wiley S. A.

- Cumbal, L. C. (2020). Caracterización de las prácticas de profesores nóveles en la integración de recursos digitales con una trayectoria hipotética de aprendizaje para la enseñanza de la traslación [Tesis de Maestría, Universidad del Valle].
- Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM—Mathematics Education*, 53(1), 1-16.
- Drijvers, P. (2004). Learning algebra in a computer algebra environment. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 11, 77-90.
- Dündar, S. y Gündüz, N. (2017). Justification for the subject of congruence and similarity in the context of daily life and conceptual knowledge. *Journal on Mathematics Education*, 8(1), 35-54.
- Edgington, C., Wilson, P. H., Sztajn, P. y Webb, J. (2016). Translating learning trajectories into useable tools for teachers. *Mathematics Teacher Educator*, 5(1), 65-80.
- Escudero, I. (2003). La relación entre conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica: La semejanza como objetivo de enseñanza-aprendizaje. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=263459&info=resumen&idioma=SPA>
- Fernández, C. y Choy, B. H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. En *International handbook of mathematics teacher education: Volume 2* (pp. 337-360). https://doi.org/10.1163/9789004418967_013
- Gonzáles-Forte, J. M., Zorrilla, C., Ivars, P. y Fernández, C. (2020). Caracterización de trayectorias hipotéticas de aprendizaje para el diseño de viñetas en la formación de maestros de primaria. En R. Roig-Vila (ed.), *La docencia en la enseñanza superior: Nuevas aportaciones desde la investigación e innovación educativas* (Vol. 134, pp. 1399-1409). Ediciones Octaedro.

González, R., Sánchez Pesquero, C., Casas García, L. M., Márquez Zurita, L., Blanco Nieto, L. J. y

Mendoza García, M. (1990). Proporcionalidad geométrica y semejanza. Síntesis.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics.

Mathematical Thinking and Learning, 1(2), 155-177.

https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform

mathematics education. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 105-128.

https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0602_3

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En F.

Leung, J-L. Dorier, J. Adler y A. Arcavi (eds.), New ICMI Study Series (Vol. 10, pp. 137–144).

Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_12

Gravemeijer, K. van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base

for teachers and teaching in mathematics education. Elementary School Journal, 109(5), 510-

524. <https://doi.org/10.1086/596999>

Gualdrón, É. (2011). Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de

figuras planas [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Valencia.

Gualdrón, É. (2014). Descriptores específicos de los niveles de van Hiele en el aprendizaje de la

semejanza de polígonos. Revista Científica, 20(3), 26-36.

Gualdrón, É. y Gutiérrez, Á. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la

semejanza. Revista Memoria del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en

Educación Matemática, 63-82

- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2022). Informe nacional de resultados de las pruebas Saber 3o, 5o, 7o y 9o. Aplicación 2022.
<https://www.icfes.gov.co/web/guest/informe-nacional-2022>
- Ivars, P. (2019). Trayectoria hipotética de aprendizaje para evaluar la comprensión de fracción como parte-todo. Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, (86), 32-37.
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. Enseñanza de las Ciencias, 38(3), 105-124.
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(11), em1599.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/93421>
- Ivars Santacreu, P. y Fernández Verdú, C. (2015). Aprendiendo a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de las prácticas de enseñanza: el papel de las narrativas. ENSAYOS, Revista de La Facultad de Educación de Albacete, 30(1), 45-54. <https://revista.uclm.es/index.php/ensayos/article/view/699/636>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. Journal for Research in Mathematics Education, 41(2), 169-202.
<https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.2.0169>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (2011). Deciding how to respond on the basis of children's understandings. Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes, 97-116.
- Konic, P., Godino, J. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 74, 57-74.

- Krupa, E. E., Huey, M., Lesseig, K., Casey, S. y Monson, D. (2017). Investigating secondary preservice teacher noticing of students' mathematical thinking. En E. Schack, M. Fisher y J. Wilhelm (eds.), *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 49-72). https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5_4
- Kuncoro, K. S., Juandi, D., Hidayat, R. y Prabowo, A. (2023). Prospective analysis on the topic of similarity: designing a hypothetical learning trajectory to overcome learning obstacles. *Journal of Didactic Studies*, 1(1), 47-63.
- Kvale, S. (2012). *Las entrevistas en investigación cualitativa* (Vol. 2). Ediciones Morata.
- Lee, M. Y. (2020). Using a technology tool to help pre-service teachers notice students' reasoning and errors on a mathematics problem. *ZDM-Mathematics Education*, 53, 135-149. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01189-z>
- Lemonidis, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur].
- Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3), 296-324.
- Machado, N. J. (2000). *Semelhança não é mera coincidência*. Scipione.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- Mason, J. (2011) *Noticing: Roots and branches*. In M. G. Sherin, V.R. Jacobs, & R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35-50). New York: Routledge.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. MEN.