

La caja de polinomios

Fernando Soto Saulo Mosquera Claudia Gómez

Recibido Oct. 20, 2003 Aceptado Abr. 19, 2005

Resumen

En este artículo se ilustra la utilización de una herramienta didáctica para la educación básica denominada La Caja de Polinomios la cual permite el desarrollo del álgebra de polinomios. Esta herramienta fue construida a partir de la idea de homogeneización de polinomios cuadráticos introducida por el matemático árabe Tabit ibn Qurra al-Harrani en el siglo IX.

Abstract

This article shows the use of a didactic tool called polynomial box (Caja de Polinomios) to introduce algebraic operations in polynomials. This tool was built having in mind the idea of quadratic polynomials homogenization which was presented by the Arabian mathematician Tabit ben Qurra al-Harrani in the IX century.

Keywords: Polynomial box, homogenization, polynomial and minimal framing.

AMSC(2000): Primary: 97A20, Secondary: 97D40, 97D50.

1 Introducción

La historia de la matemática brinda importantes herramientas a los educadores. El propósito de este artículo es el de animar al docente a buscar soportes históricos que contribuyan al desarrollo de nuevas alternativas y estrategias didácticas basadas en lo lúdico. Es importante destacar que el objetivo primordial de la enseñanza básica no consiste en embutir en la mente del niño un amasijo de información que podría serle útil como ciudadano. Más bien, el objetivo consiste en ayudarlo a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas y físicas de modo armonioso. Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen actividades y actitudes comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados. La elección de los juegos tiene incluso ventajas de tipo psicológico y motivacional, ver por ejemplo [3].

La Caja de Polinomios ilustra la relación entre el desarrollo histórico de los conceptos y la lúdica como una actividad que posibilita el paso de lo tangible a lo simbólico y a lo abstracto en el conocimiento algebraico. Desde el punto de vista histórico la Caja de Polinomios rescata el pensamiento algebraico de Al-Sabi Tabit ibn Qurra al-Harrani, quien nació en el año 826, Mesopotamia y murió en 901 en Bagdad (ahora Irak). Perteneció a la secta Sabian, la cual inducía a sus adeptos al estudio de la astronomía y de las matemáticas. Así mismo, al estudio del griego, lo cual le permitió estudiar los Elementos de Euclides. Muhammad ibn Musa ibn Shakir impresionado

por el conocimiento de Tabit en los idiomas lo persuadió de viajar a Bagdad a estudiar matemáticas. En este campo realizó importantes descubrimientos como la extensión del concepto de número a números reales positivos y en álgebra, en particular, en la solución de ecuaciones cuadráticas.

En este artículo, se extenderá la idea de homogeneización propuesta por Tabit al observar que una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + px + q = 0$, no adquiere una representación geométrica adecuada por la imposibilidad de sumar áreas con longitudes y con puntos. Tabit propone utilizar una unidad de medida μ para expresar la ecuación anterior como $x^2 + p\mu x + q\mu^2 = 0$, con lo cual ésta puede interpretarse geométricamente como suma de áreas.

En este orden de ideas se construyen los primeros rectángulos básicos fundamentales representados en la Figura 1. Los mismos se denotan con x^2 , x y 1, respectivamente.

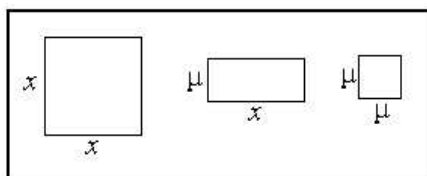


Figura 1

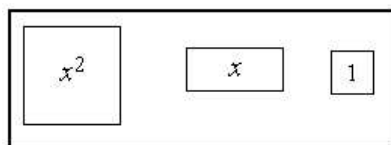


Figura 2

Con estos rectángulos básicos es posible representar geométricamente un polinomio cuadrático con coeficientes enteros, como se ilustrará más adelante, sin embargo no es factible representar geométricamente polinomios de grado superior. Esta dificultad se abordó en el desarrollo de la Especialización en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Nariño, en el año 1997, y su solución condujo a la construcción del material didáctico denominado la Caja de Polinomios que permite tratar el álgebra de polinomios hasta de cuarto grado y en dos variables. La operatoria algebraica que se realiza con esta herramienta consiste esencialmente en armar un rompecabezas, construyendo rectángulos con la única regla de que fichas contiguas coincidan en la dimensión de sus bordes vecinos.

2 Polinomios de Grado 2

La idea de Tabit se usa en la enseñanza media al tratar el binomio de Newton. Por ejemplo el desarrollo de $(x + y)^2$ se representa en la figura 3

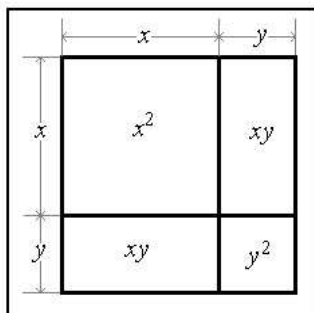


Figura 3

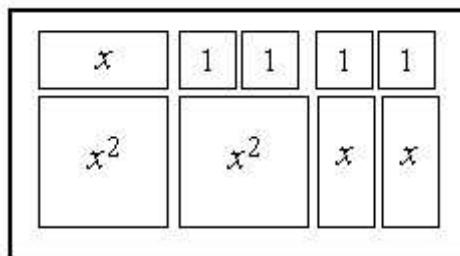


Figura 4

Los rectángulos básicos de dimensión 2 se utilizan en el ambiente escolar para representar polinomios de grado 2 con coeficientes enteros positivos. Así, la Figura 4 muestra una representación del polinomio $2x^2 + 3x + 4$.

Sin embargo, surge la inquietud de cómo representar polinomios con coeficientes enteros negativos. La generalización de la idea de Tabit para resolver este interrogante requiere del uso del plano cartesiano. En él, los rectángulos básicos de dimensión 2, los cuales se denominarán fichas, que se ubiquen en el primer o tercer cuadrante se consideran con coeficientes positivos y los ubicados en el segundo o cuarto cuadrante tendrán coeficientes negativos. Así la gráfica de la figura 5a representa el polinomio $2x^2 + 3x + 4$ y la de la figura 5b el polinomio $-3x^2 - 2$, ya que $-3x^2 - 2$ es igual a $-3x^2 - 3 + x + 1 - x$.

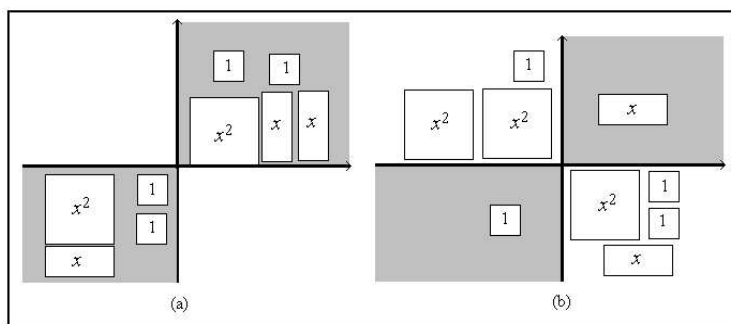


Figura 5

Para realizar la operatoria algebraica es necesario tener en cuenta las dimensiones, la ubicación y el valor algebraico de las fichas, el cual corresponde al producto de las longitudes de sus lados, de acuerdo con la disposición de ésta en el plano. La gráfica 6 explica estos hechos

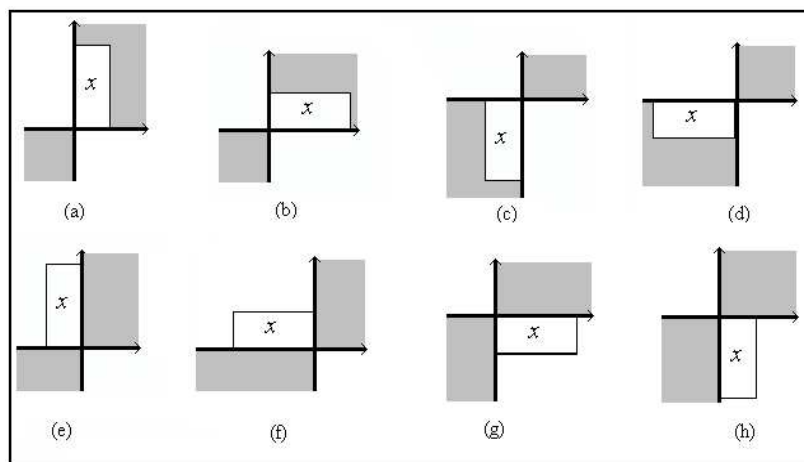


Figura 6

En la lectura de las dimensiones de una ficha se conviene en tomar la dimensión de la base en el eje x y luego la dimensión de su altura por el eje y . Así, las figuras 6(a), (b), (c) y (d) corresponden a fichas de valor algebraico x la cuales se han dispuesto con dimensiones 1 y x , x y 1, -1 y $-x$, $-x$ y -1 , respectivamente. Las figuras 6(e), (f), (g) y (h) corresponden a fichas de valor algebraico $-x$ la cuales se han dispuesto con dimensiones -1 y x , $-x$ y 1, x y -1 , 1 y $-x$, respectivamente.

2.7 Operaciones

(a) Adición Para calcular $p(x) + q(x)$ se recomienda utilizar los cuadrantes segundo y tercero para escribir sobre ellos el sumando $p(x)$ mientras que el sumando $q(x)$ se escribe en los cuadrantes primero y cuarto; con el fin de facilitar la lectura de la suma es conveniente retirar, a continuación, las fichas que producen ceros. De acuerdo con lo anterior, la disposición en el plano cartesiano para realizar la suma de $p(x) = 2x^2 - 3x + 2$ con $q(x) = -x^2 + 2x - 3$, se muestra en la figura 7.

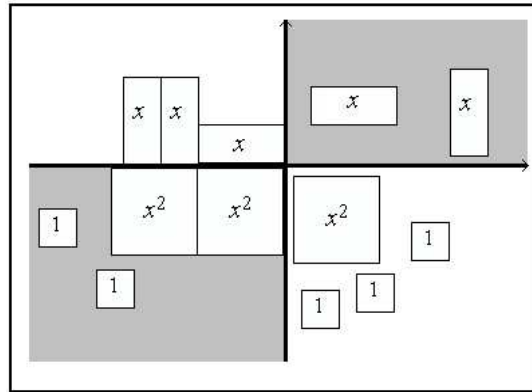


Figura 7

Una vez retiradas las parejas de fichas que equivalen a cero, resulta:

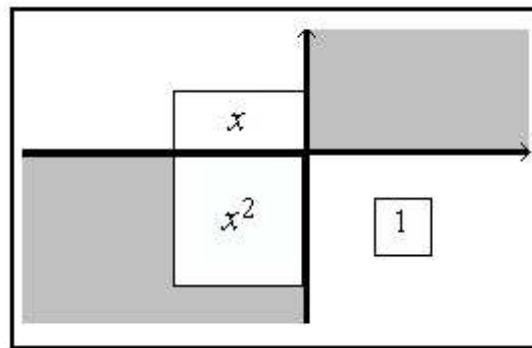


Figura 8

el cual corresponde al polinomio $x^2 - x - 1$, es decir, $(2x^2 - 3x + 2) + (-x^2 + 2x - 3) = x^2 - x - 1$.

(b) Substracción La diferencia $p(x) - q(x)$ se obtiene de manera análoga a la adición. Las fichas correspondientes al sustraendo que se ubican en los cuadrantes primero y cuarto se trasladan a los cuadrantes segundo y tercero, respectivamente. La lectura del resultado se obtiene eliminando las parejas de ceros. Las figuras 9, 10 y 11 corresponden a $(x^2 + 2x - 3) - (x^2 + 3x - 2)$. De modo que $p(x) - q(x)$ es $2x^2 - x - 1$.

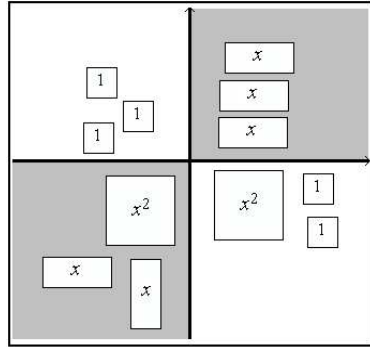


Figura 9

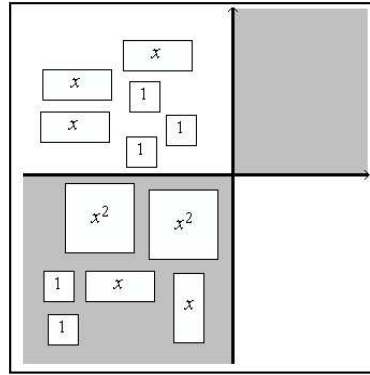


Figura 10

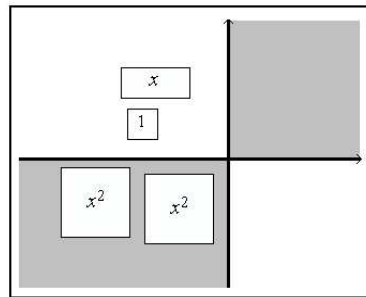


Figura 11

(c) Multiplicación Con los rectángulos básicos de dimensión 2 sólo es factible obtener productos de dos factores lineales $p(x) = ax + b$ y $q(x) = cx + d$. Cada producto se obtiene construyendo un rectángulo cuya base es uno de los factores lineales y la altura el otro, seleccionando fichas que encajen perfectamente como ocurre en todo rompecabezas, observando como regla única que *fichas adyacentes deben tener la misma dimensión en su frontera común*. Para completar el rectángulo, en general, es necesario añadir tantas fichas como se requieran.

Las figuras 12 y 13 representan los pasos sucesivos para hallar el producto

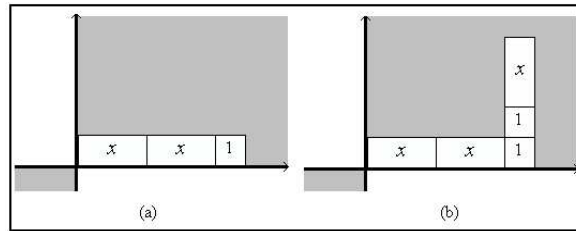


Figura 12

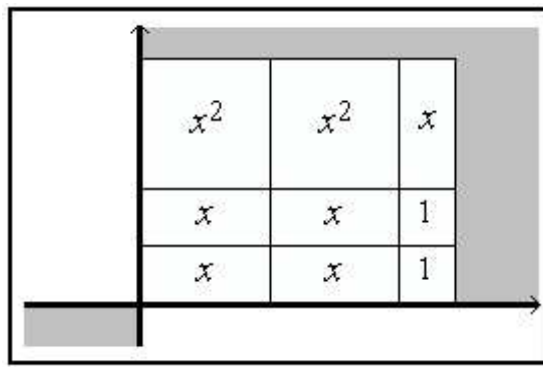


Figura 13

$(2x + 1) \cdot (x + 2)$. Así $(2x + 1) \cdot (x + 2) = 2x^2 + 5x + 2$.

Tal como las operaciones anteriores, para leer el producto, es conveniente, decuentan las parejas de fichas que producen ceros; una ilustración de ésta observación se muestra al calcular $(-x + 2) \cdot (2x + 3)$.

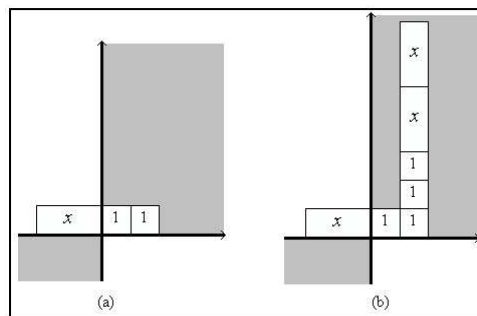


Figura 14

En el plano de la izquierda se ha dispuesto el primer factor $-x + 2$, en el de la derecha se muestra el bosquejo del rectángulo a formar, donde la altura es

el segundo factor $2x + 3$.

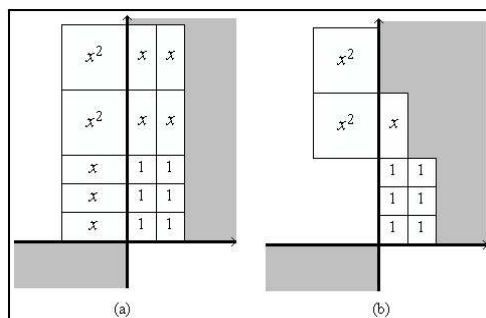


Figura 15

La figura 15(a) indica cómo se completó el rectángulo y la figura 15(b) muestra el producto $-2x^2 + x + 6$, una vez retiradas las fichas equivalentes a cero. Obsérvese que:

- El número total de fichas que se requiere para representar el producto $(ax + b) \cdot (cx + d)$ en un rectángulo es $(|a| + |b|) \cdot (|c| + |d|)$; de esta forma el cálculo de $(2x - 3) \cdot (3x + 5)$ se obtiene con 40 fichas, mientras que $(x - 3) \cdot (-2x + 3)$ requiere de 20.
- Si la base del rectángulo es el factor $ax + b$ con $a > 0$ su ubicación se realiza en la parte positiva del eje x , es decir, en el primer o cuarto cuadrante en dependencia de la altura del rectángulo $(cx + d)$. Así mismo, se ubica en la parte negativa del eje x cuando $a < 0$, es decir, en el segundo o tercer cuadrante; de manera análoga se posiciona el valor de b .
- Obsérvese que de esta forma las fichas de la figura 2 que corresponden a los rectángulos básicos, representan los productos x por x ; x por 1 y 1 por 1 respectivamente.
- El plano cartesiano se traduce en un contexto que posibilita la operatoria algebraica con polinomios de coeficientes enteros y por ello se necesita de su correcta utilización, así, un rectángulo conformado con las mismas fichas corresponde a diferentes productos en concordancia con su ubicación, como se ilustra en la figura 16.

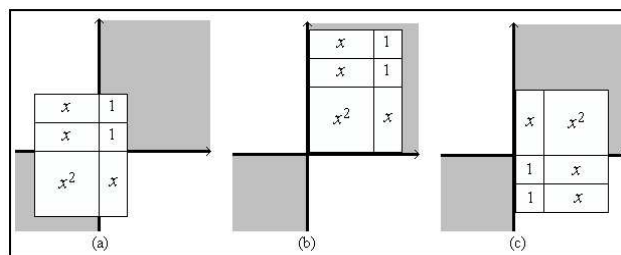


Figura 16

La lectura que debe realizarse en cada uno de los gráficos anteriores es: la figura 16(a) representa el rectángulo de base $-x + 1$ y de altura $-x + 2$ que corresponde al producto de $(-x + 1) \cdot (-x + 2) = x^2 - 3x + 2$; la figura 16(b) presenta el rectángulo de dimensiones $x + 1$ y $x + 2$, es decir el producto $(x + 1) \cdot (x + 2) = x^2 + 3x + 2$ y la figura 16(c) al producto $(x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 - x - 2$.

Nótese que en los productos anteriores tanto la base como la altura de cada uno de los rectángulos se corresponde con el concepto de longitud, es decir, su lectura se realiza por las dimensiones sobre los ejes y de acuerdo con la orientación sin tener en cuenta el cuadrante en que se ubica la ficha.

(d) Factorización Un *encuadre minimal* para un polinomio de segundo grado $p(x)$ es aquella representación del polinomio en el plano cartesiano, a partir de la cual es posible completar un rectángulo por agregación del mínimo número de parejas de fichas que algebraicamente sumen cero. Así, factorizar $p(x)$, en la Caja de Polinomios, consiste en construir dicho rectángulo a partir de su encuadre minimal.

La figura 17a presenta el encuadre minimal para el polinomio $x^2 + x - 2$ y la figura 17b para el polinomio $x^2 - x - 2$.

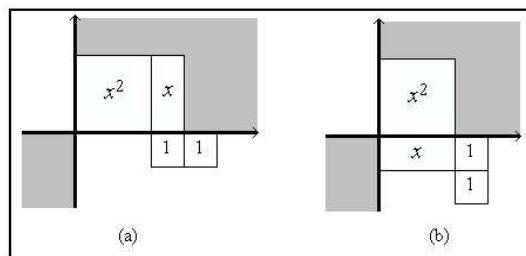


Figura 17

el rectángulo completo se obtendría añadiendo siete fichas 1 en el segundo cuadrante, las cuales se deben compensar en el primer o tercer cuadrante como se observa en la figura 19(c). De ello se deduce que el cociente es $x + 3$ y el residuo es 7.

Nota: Para polinomios de grado 2 en dos variables *La Caja de Polinomios* contiene adicionalmente, las fichas de valor algebraico y , y^2 y $x \cdot y$ que posibilitan realizar su operatoria algebraica, de manera análoga a los de grado 2 en una variable.

3 Polinomios de Grado Superior a 2

Como es natural, la operatoria con polinomios de grado superior a 2 requiere de fichas que representen a x^3 , x^4 ,...; con el fin de facilitar el trabajo escolar estas fichas deben representarse en el plano. Para ello, obsérvese, en primer lugar, que la ficha correspondiente a x^2 puede reemplazarse algebraicamente por una ficha rectangular de lados x^2 y 1. Así mismo, la representación geométrica de x^3 que corresponde a un cubo de arista x puede transformarse, a partir de la aplicación inversa de la idea de Tabit, en un rectángulo cuyos lados son x^2 y x . En este sentido, el proceso de homogeneización se puede generalizar a grados superiores.

La figura 20 muestra la clases de fichas fundamentales, para polinomios de grado 4.

Dimensión	1	x	x^2	x^3
1	1	x	x^2	x^3
x		x^2	x^3	x^4
x^2			x^4	

Figura 20

El número de tipos de fichas para representar un polinomio $p(x)$ de grado n está dado por la expresión

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^2+4n-1}{4} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n^2+4n}{4} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}.$$

Así, para fabricar una caja que permita la operatoria con polinomios de cuarto grado en una variable se requiere de 8 clases diferentes de fichas, mientras que para los de grado once se necesita de 41 clases. A continuación se proponen algunos ejemplos que ilustran la utilización de las fichas anteriormente construidas.

El primer ejemplo ilustra el cálculo de $(x-1)^3$. Obsérvese que el desarrollo de $(x-1)^3$ equivale geométricamente a construir un rectángulo de esta área; por la definición de potenciación $(x-1)^3 = (x-1)^2 \cdot (x-1)$ y por tanto debe formarse un rectángulo de base $(x-1)^2$ y altura $(x-1)$; pero $(x-1)^2$ equivale a un cuadrado de lado $(x-1)$ el cual debe disponerse como el lado del rectángulo que se debe armar para $(x-1)^3$, como se representa en la figura 21.

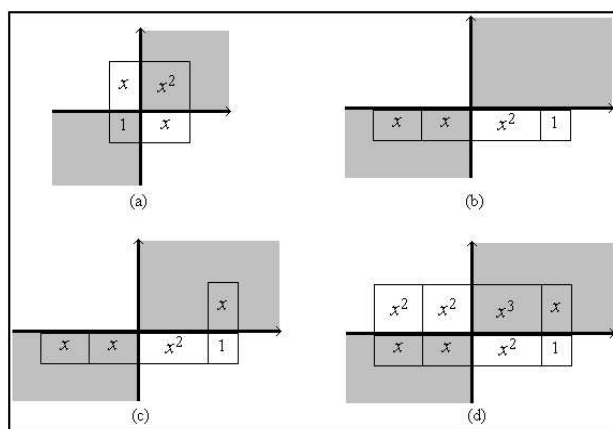


Figura 21

La figura 21(a) presenta el cálculo de $(x-1)^2$ que debe ubicarse longitudinalmente, al sustituir el cuadrado x^2 por el rectángulo de igual área y de lados x^2 y 1, como se muestra en 21(b). En 21(c) se dispone la altura $x-1$ del rectángulo a completar y por último, en 21(d), se presenta la multiplicación, cuyo resultado es $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

La figura 22 muestra el cálculo de $(x^2 - x + 1)^2 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

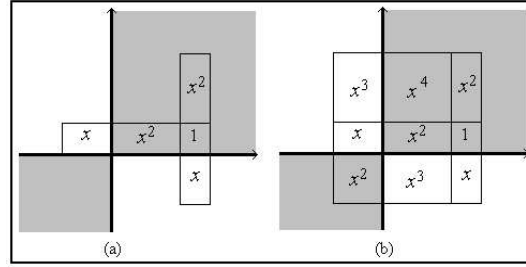


Figura 22

A continuación se presenta la factorización de $x^3 + 4x^2 + x - 6$, en primer lugar se muestra geométicamente el polinomio a factorizar, la figura a la derecha de él nos afirma que éste polinomio se factoriza en primera instancia como $(x^2 + 2x - 3) \cdot (x + 2)$, el gráfico inferior muestra que $(x^2 + 2x - 3) = (x + 3) \cdot (x - 1)$; de donde $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$.

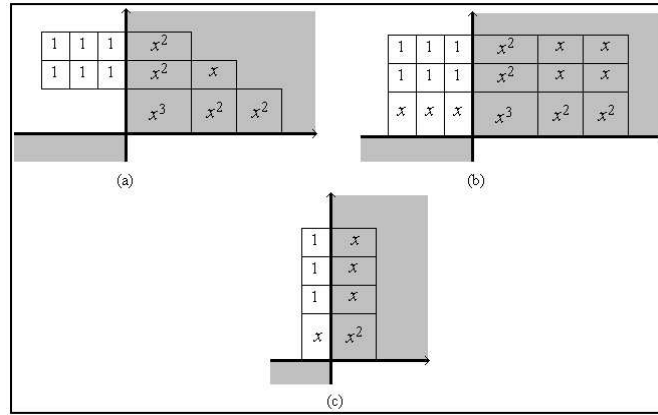


Figura 23

Nótese que en el ejemplo anterior el número total de fichas utilizadas es de 18, y que la suma de los valores absolutos de los coeficientes es 12.

En general, para factorizar un polinomio con coeficientes enteros, de la forma $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, con el uso de *La Caja de Polinomios*, es importante tener en cuenta que el número total de fichas que se deben utilizar es igual a $\sum_{i=0}^n |a_i| + \rho$, donde ρ es un número par, ya que la representación de un polinomio $p(x)$ en la *Caja de Polinomios* no cambia por la agrupación de parejas de fichas equivalentes algebraicamente a cero.

Para culminar esta sección se ilustra la división. La figura 24 presenta el cálculo de $(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x^2 - 1)$.

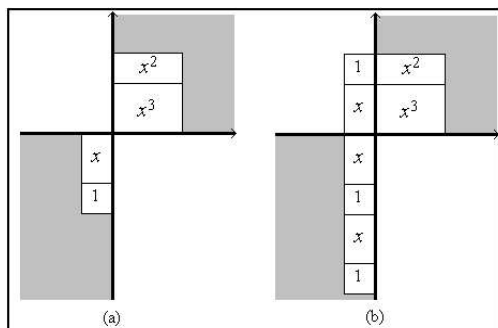


Figura 24

La figura 24(a) representa la disposición inicial del dividendo $x^3 + x^2 + x + 1$ en una franja de longitud algebraica $x^2 - 1$ que corresponde al divisor, en la figura 24(b) se ha armado el rectángulo equivalente de base $x^2 - 1$ y de altura $x + 1$, la cual es el cociente y las fichas sobrantes corresponden al residuo $2x + 2$.

En la siguiente representación gráfica se muestra el cálculo de $(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x^2 + 2)$, cuyo cociente es $x + 1$ y de residuo $-x - 1$.

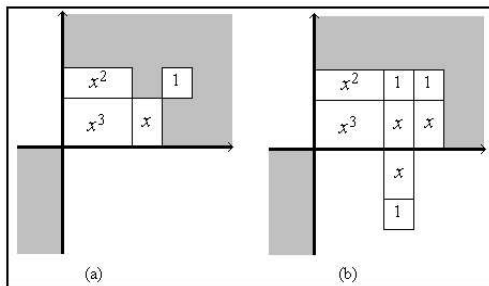


Figura 25

4 Conclusiones

La Caja de Polinomios, como todo instrumento didáctico tiene sus limitaciones: en primer lugar, las dimensiones del área que simulan el plano cartesiano y la cantidad de fichas de cada clase de las que puede disponerse, no permiten representar cualquier polinomio de coeficientes enteros. Sin embargo y por ejemplo al disponer de 15 fichas de cada clase es posible representar

más de un millón y medio de polinomios de cuarto grado en una variable y con ello la posibilidad de realizar millones de operaciones.

Otra limitación que se puede señalar a la Caja de Polinomios es que no permite desarrollar satisfactoriamente el concepto de variable que es fundamental para el desarrollo del pensamiento algebraico por cuanto su principal utilidad está referida a permitir el juego operatorio simbólico.

Como señala Piaget al tratar el desarrollo de la inteligencia, la etapa que corresponde al período de las operaciones concretas coincide con el momento escolar en el cual los estudiantes tienen que aproximarse al conocimiento algebraico y en esta etapa, la inteligencia sólo puede perfeccionarse sobre lo concreto o lo inmediatamente representado y esto es, precisamente, lo que permite hacer de manera amplia la Caja de Polinomios.

La operatoria algebraica que se ejecuta de manera tangible con la Caja de Polinomios se centra en un rompecabezas que consiste en configurar rectángulos con la única regla de que fichas contiguas coincidan en la dimensión de sus bordes vecinos. El rompecabezas se arma recurriendo a sumar ceros conformados por parejas de fichas equivalentes colocadas en escaques de diferente signo y a sustituir unas fichas por otras equivalentes en área, ardides que suelen parecer demasiado truculentos cuando se desarrolla la operatoria en la pizarra.

Finalmente, los polinomios pueden representarse de diversas maneras, a través de una expresión algebraica, por medio de una curva en el plano bidimensional o mediante una tabulación numérica; la Caja de Polinomios agrega una forma geométrica que utiliza figuras poligonales.

Referencias

- [1] Acevedo de M., Myriam y Folk de L., Mary. *Redescubriendo el Algebra: De la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Universidad Nacional de Colombia - Colciencias. Colombia, 1997.
- [2] Boyer, Carl. *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial. Madrid, 1996.
- [3] Guzmán, Miguel de. *Juegos Matemáticos en la Enseñanza*. En: <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat.htm>

Dirección de los autores: Fernando Soto A., Univ. de Nariño — Saulo Mosquera L., Univ. de Nariño — Claudia P. Gómez, Univ. de Nariño, gescas@udenar.edu.co