



**La posible incidencia dentro del razonamiento argumentativo de los futuros Licenciados
en Física utilizando un análisis epistemológico e histórico.**

Juan Sebastian Luna Corredor

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas
2025



**La posible incidencia dentro del razonamiento argumentativo de los futuros Licenciados
en Física utilizando un análisis epistemológico e histórico.**

Juan Sebastian Luna Corredor

**Proyecto de Trabajo de grado para aplicar para el título de Licenciado en
Matemáticas.**

Director:

Mg. May Vergara Rivera

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas

2025

El saber no es opcional, es una forma en cómo conocemos más de nuestro mundo. La humanidad es una sola, igual que el conocimiento.

A todo quien haya apoyado este trabajo, a mis padres y familia cercana, a mis estudiantes, a mis amigos, a mis compañeros, cada experiencia es única y universal, y ahora esto es el resultado de todas mis decisiones.

Agradecimientos

Agradezco a mi madre Silvia Loren Corredor y a mi padre Juan Eduardo Luna, por su constante apoyo a mi formación profesional, este éxito también les pertenece. A mis hermanas Luisa Fernanda Luna y Diana Marcela Luna, las cuales me han acompañado en momentos de vida y me han servido como guía. A mis sobrinos David Hernández y Valéry Hernández, los cuales con su inocencia me han demostrado lo que representa ser un docente, además de acompañarme en mi vida. A mi abuela Leonilde Ramírez, una persona que se ha preocupado por mí y ha estado en diversos momentos de mi vida.

Agradezco a mi tutor May Vergara Rivera por ser un faro en el mar de conocimiento, por guiarme y apoyarme en todas mis dificultades presentadas. Además, agradezco a todos los profesores que me han apoyado y dado una guía a la preparación de este trabajo, por sus palabras en clase y fuera de ella, por mencionar algunos: Miryam Vega, Katherine Pozo, Diego Días, Edwin Cadena, Samantha Culma, Maribel Anacona, Jimmy Uribe, Lizbeth Alvarado, Sergio Valencia, Nelson Hoyos y Henry Giovanni.

Agradezco a mis dos mejores amigos, Felipe Montenegro y Alejandro López. El primero es mi faro en la oscuridad, un rayo de luz que me ha iluminado en mis momentos más oscuros, una persona incondicional en mi vida. Y el segundo, un hermano que no es de sangre, diez años de amistad, me ha impulsado constantemente, siempre que lo he necesitado ha estado a mi lado.

Agradezco a Angela Garcés, Isabel Martos, Jaime Caicedo, Nahomi Ocampo, Andres Gutierrez y Nicol Ortiz, amigos incondicionales que han estado constantemente conmigo en las buenas y en las malas, apoyándome constantemente en mi desarrollo como persona y en algunos proyectos académicos. Y a todos mis amigos que me han acompañado en el viaje.

Resumen

La argumentación es un razonamiento que estructura las formas de pensar de un individuo, organizando y conectando ideas; la demostración matemática está ligada a este proceso argumentativo desde diversas perspectivas. La historia de la ciencia y de las matemáticas presenta hechos significativos en los que se han empleado la demostración matemática, como la medición de circunferencia de la Tierra hecha por Eratóstenes, la segunda ley de Kepler y la reflexión de la luz utilizando el principio de Fermat. En relación con el conocimiento disciplinar del profesor, resulta necesario observar cómo los elementos de la demostración matemática inciden en los procesos argumentativos de los futuros Licenciados en Física, utilizando el contexto de la Universidad del Valle. Para ello, se propone elaborar una secuencia didáctica que contenga preguntas esenciales, deseables e indeterminadas.

Con este propósito, se realizará un análisis histórico y epistemológico de las demostraciones mencionadas, utilizando la creación de grafos como herramienta para el análisis del razonamiento. Se destaca cómo los argumentos empleados en física (argumentos Físicos) dentro de una demostración matemática resultan fundamentales para la modelación y abstracción de un fenómeno físico, generando demostraciones cuya naturaleza no es estrictamente matemática. Esto permite vislumbrar una estructura interna general en este tipo de demostraciones, que facilita el reconocimiento y la toma de conciencia de la estructura que debe emplearse al realizarlas; además de permitir observar el papel específico de cada tipo de argumento (matemático y físico) y la estrecha relación entre estos dos campos del conocimiento.

Palabras Clave: Demostración matemática, Demostración, Argumento, Razonamiento, Argumento Físico.

Abstract

Argumentation is a reasoning process that structures an individual's thinking, organizing and connecting ideas; mathematical proof is linked to this argumentative process from various perspectives. The history of science and mathematics presents significant events in which mathematical proof has been employed, such as Eratosthenes' measurement of the Earth's circumference, Kepler's second law, and the reflection of light using Fermat's principle. In relation to the teacher's disciplinary knowledge, it is necessary to observe how the elements of mathematical proof influence the argumentative processes of future Physics graduates, using the context of the University of Valle. To this end, a didactic sequence is proposed that includes essential, desirable, and indeterminate questions.

For this purpose, a historical and epistemological analysis of the aforementioned proofs will be carried out, using graph creation as a tool for analyzing reasoning. It is highlighted how the arguments used in physics (physical arguments) within a mathematical proof are fundamental for modeling and abstracting a physical phenomenon, generating proofs whose nature is not strictly mathematical. This allows us to glimpse a general internal structure in this type of proof, which facilitates the recognition and awareness of the structure that must be used when carrying them out; in addition to allowing us to observe the specific role of each type of argument (mathematical and physical) and the close relationship between these two fields of knowledge.

Keywords: Mathematical proof, Argument, Reasoning, Physical argument. .

TABLA DE CONTENIDO

Problema de investigación	1
Antecedentes	5
Justificación	7
Objetivo general	9
Objetivo específico	10
Marco teórico	10
Razonamiento en la formación docente.	10
Noción del concepto de demostración.	12
Razonamiento.	13
Representaciones semióticas.	15
Demostraciones que demuestran y explican.	15
Procesos argumentativos.	16
Preguntas esenciales, deseables e indeterminadas.	17
Algunos hechos históricos de la Física que contienen demostración matemática en su resolución	22
La medición de Eratóstenes de la circunferencia de la Tierra.	24
La demostración geométrica de la segunda ley de Kepler.	27
El principio de Fermat.	31
Análisis cualitativo de las formas de razonamiento	36
Pensamiento griego.	37
Razonamiento de las órbitas de la segunda ley de Kepler utilizando a Newton.	41
Propiedades de la reflexión de la luz.	47
Análisis general.	51
Planteamiento de la secuencia didáctica	55
Introducción – Análisis físico	58
Desarrollo – Demostración matemática	60
Cierre – Reflexión	62
Pasos de análisis sugeridos	63
Conclusión	64
Referencias	68
Anexos	72

ÍNDICE DE TABLAS Y FIGURAS

Cuadro 1: Rejilla de análisis de los grafos.	19
Cuadro 2: Línea de tiempo de algunos hechos relevantes de la Física que utilizan demostración matemática.	23
Imagen 1: Representación del método de medición de Eratóstenes.	25
Grafo 1: Razonamiento utilizado por Eratóstenes para medir la Tierra y demostrar que es redonda.	26
Imagen 2: Construcción geométrica 1.	28
Imagen 3: Construcción geométrica 2.	28
Imagen 4: Construcción geométrica 3.	29
Imagen 5: Construcción geométrica 4.	30
Grafo 2: Razonamiento utilizado por Newton para la demostración de la segunda ley de Kepler.	31
Imagen 6: Construcción geométrica de la reflexión de la Luz.	32
Grafo 3: Razonamiento de la reflexión de la luz utilizando el principio de Fermat.	35
Cuadro 3: Organización y análisis de premisas del grafo 1.	37
Cuadro 4: Análisis del razonamiento de Eratóstenes.	40
Cuadro 5: Organización y análisis de premisas del grafo 2.	42
Cuadro 6: Análisis del razonamiento de la demostración de la segunda ley de Kepler.	46
Cuadro 7: Organización y análisis de premisas del grafo 3.	48
Cuadro 8: Análisis del razonamiento de la demostración de la reflexión de la luz.	50
Cuadro 9: Análisis de las demostraciones.	51
Grafo 4: Estructura general con base a la extrapolación de los datos.	54
Cuadro 10: Ficha de la secuencia didáctica.	56
Cuadro 11: Análisis de la estructura de los argumentos de los y las estudiantes.	63
Cuadro 12: Análisis de fragmentos específicos de la argumentación de los y las estudiantes.	63
Cuadro 13: Contraste en las respuestas de los estudiantes.	64

Problema de investigación

Para comprender la incidencia en la formación de los profesores de física en relación con sus formas de argumentar con base en la demostración matemática, se considera necesario analizarlo desde una perspectiva curricular, disciplinaria e histórica¹. El documento se contextualiza en los futuros Licenciados en Física de la Universidad del Valle, carrera vigente desde el 2023; la estructura curricular vigente para el año 2025 contempla seis cursos disciplinares de matemáticas: Matemática Fundamental, Cálculo 1, 2 y 3, Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales.

La Resolución No. 060 del 8 de abril de 2021 (Resolución del Consejo Académico) de la Licenciatura en Física, menciona varios elementos curriculares y disciplinares, en este caso se intentará vislumbrar cómo un proceso de análisis matemático claro, incluyendo la demostración matemática, está relacionado a las formas de razonamiento argumentativo de las y los estudiantes. A diferencia de otras mallas curriculares que se enfocan en estas dos disciplinas, que permite un desarrollo óptimo de la matematización para la enseñanza de la física, Rodríguez y Serra (2015) señalan que la carrera de Licenciatura en Matemáticas y Física (refiriéndose a las universidades en general, siendo un ideal educativo) tiene el objetivo de “identificar, formular y resolver problemas, incluidos los de demostración o refutación de proposiciones y los que modelen situaciones problemáticas del ámbito social y práctico que requieran en especial de contenidos físicos” (Rodríguez y Serra, 2015, p. 67-68) mostrando su relevancia al momento de poder hacer un análisis físico con matemáticas.

Desde esta perspectiva, la cuestión sobre qué tanto debe conocer un profesor sobre su propia disciplina se vuelve relevante para plantear la relación entre demostración matemática

¹Es necesario estos elementos, ya que reconocer qué tipo de conocimientos debe de poseer un profesor de Física para enseñar y estructurar su clase (curricular – profesor) los contenidos en específico (disciplinario – conocimiento) y las representaciones que se ha tenido en el transcurso del tiempo para comprender su significación (histórico – interacciones entre la humanidad y el conocimiento) forman parte de la concepción de la clase y sus diversas interacciones. Además, estos elementos corresponden al triángulo didáctico que comentaron autores como Joshua y Dupin (2005).

y Física, por la complejidad de los contenidos disciplinarios que requiere la comprensión de una demostración; según autores como Machín y Trigo (2015) en su investigación de la resolución de problemas, abordan el tema del conocimiento del profesor, en este caso particular, de matemáticas (aunque no se debería considerar excluyente a otras disciplinas) mencionando la importancia del contenido matemático y la forma en cómo el profesor aborda esos temas desde su formación para la enseñanza, comentando que “entendemos que el conocimiento matemático que se necesita para la enseñanza (e investigación) no es una versión ligera ni reducida de la matemática formal” (p. 118) por ende, la comprensión de la disciplina tiene que ir más allá de un mero formalismo.

En esta línea de ideas, Hanna y Jahnke (2002) proponen el concepto de *physics argument* (argumento físico)² para ilustrar cómo los argumentos propios de la Física pueden relacionarse con demostraciones matemáticas. Desde esta perspectiva, ambas disciplinas no son excluyentes, lo que permite una colaboración más efectiva entre conceptos físicos y matemáticos. En consecuencia, el profesor de Física, no es ajeno al puente disciplinario que se forma entre la interacción de los contenidos físicos (presentados como argumentos físicos) y la relación con los contenidos matemáticos.

Por este motivo, es fundamental que el profesor de Física pueda visualizar, comprender y abstraer la información. Arévalo (2016) identifica cuatro aspectos clave en la relación de matematización en los libros didácticos de Física universitaria:

- “El eje que orienta el proceso de enseñanza de la física es la comprensión de la modelización matemática ya desarrollada por la ciencia.” (Arévalo, 2016, p. 912).

Esta afirmación resalta la importancia de una adecuada formación matemática, donde los procesos de demostración no solo permiten validar teóricamente los conceptos y

² A partir de este punto se escribirá “argumento Físico” con el motivo de brindar énfasis en la escritura y el significado del mismo, ya que estará relacionado directamente a la carga argumentativa que se emplea al momento de usar la teoría de la Física para validar procesos de la demostración matemática. Retomando la significación de la autora, pero añadiendo un significado más a lo esperado, ya que argumento Físico se entenderá desde la carga teórica y de la estructura argumentativa que se emplea en la disciplina.

deducciones realizadas por la física, sino que también fomentan un razonamiento crítico que es esencial para la argumentación.

- “La relación con lo cotidiano se establece a partir de situaciones que podrían ser parte de la vida común, pero consideradas de forma idealizada. Esto implica un nivel de abstracción que se da al utilizar el formalismo matemático, ya que tales formalismos exigen considerar objetos como partículas o trayectorias rectilíneas.” (Arévalo, 2016, p. 912). Esta idealización es crucial en la enseñanza de la Física, ya que facilita la modelización de fenómenos reales, permitiendo a los futuros docentes desarrollar su capacidad de argumentación y razonamiento crítico.
- “El lenguaje para comunicarse se introduce a medida que se presentan los formalismos.” (Arévalo, 2016, p. 913). Esto sugiere que el dominio del lenguaje técnico y simbólico está intrínsecamente ligado a la comprensión de los formalismos matemáticos utilizados en la física.
- “Se requiere del lector un conocimiento básico o técnico de algunos formalismos matemáticos.” (Arévalo, 2016, p. 913). Este requisito es fundamental, ya que el dominio de estas herramientas es vital para que los futuros docentes puedan interpretar, aplicar y comunicar conceptos físicos de manera asertiva.

En este orden de ideas, se puede retomar la importancia de la forma en cómo un futuro profesor de Física mantiene la consistencia en las estructuras de sus argumentos, el cual según Duval (2017) conforma un tipo de razonamiento. La argumentación “Es la forma más familiar de razonamiento, la que se efectúa espontáneamente cuando se trata de convencer a alguien de la aceptabilidad de nuestra declaración o del carácter insostenible de la suya” (Duval, 2017, p. 274) por ende, toma la intención de convencer a un individuo sobre su idea, esto debe permitir la comparación de dos visiones de un contenido, en una red³ de creencias,

³ Duval (2017) menciona el concepto de “red” en la página 278, para dar a entender un entretelado de varios pensamientos de un individuo, además “Esta red, como todas las redes semánticas, permiten engendrar nuevas proposiciones, en cantidad mayor que la de las proposiciones explícitamente formuladas o aceptadas por los interlocutores” (p.278).

perspectivas e información que se confrontan en la argumentación; Duval menciona que “Toda la argumentación consiste en jugar con las compatibilidades y las incompatibilidades entre todas las proposiciones que la red permite generar” (Duval, 2017, p.278).

Estos aspectos evidencian la necesidad de un proceso didáctico adecuado en la formación de profesores de Física. En este sentido, “el matemático Salomon Bochner, en *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia* (1991), caracteriza la Matemática como un lenguaje de la ciencia, pero según él, un lenguaje en el sentido amplio de la palabra, como aquel medio que permite la comunicación.” (Vizcaino Arévalo, D. F., Terrazzan, p. 102). Así, no solo se requiere una comprensión profunda del fenómeno, sino también la capacidad de abstraer este contenido a un lenguaje que valide el razonamiento que se emplea. Como señala Duval (2017, p. 232): “únicamente los razonamientos válidos tienen fuerza y valor objetivo de demostración”.

Un ejemplo de ello es “la conferencia perdida de Feynman” (Goodstein, D. L., & Goodstein, J. R. & Feynman, R. P., 1999) donde se recrea la demostración de Newton sobre cómo los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales, utilizando únicamente geometría euclidiana para fundamentar un fenómeno físico, se trata de una demostración que válida una ley fundamental en la Física, por ende un profesor de física debe estar en la capacidad de comprender la estructura de los argumentos utilizados para la demostración.

Desde esta perspectiva, surge la pregunta de investigación: ***¿Qué elementos históricos y epistemológicos de la demostración matemática relacionados con los argumentos de la física inciden en los procesos argumentativos de los profesores de Física?***

Antecedentes

Alfaro-Carvajal, Flores-Martínez y Valverde-Soto (2019) realizan un análisis de la demostración desde diferentes enfoques para el conocimiento de un profesor de matemáticas. Sin embargo, resaltan el concepto de “demostración clásica”, utilizado en la filosofía de las ciencias, donde las demostraciones son llamadas pruebas para enfatizar su papel de validación. Los autores destacan que “las demostraciones clásicas tienen características que permiten observar su relevancia en el discurso, la cognición y la argumentación” (p. 60). Además, mencionan cómo el razonamiento deductivo está ligado a la demostración matemática y cómo el avance de la ciencia ha dependido de este tipo de razonamiento.

La construcción de la relación entre las Matemáticas y la Física ha sido un tema de especial interés, tanto desde una perspectiva histórica como disciplinar. Trabajos de grado como el de Aguilar, M. y Ricardo, M. (2013) abordan esta conexión al explorar la relación entre la demostración matemática y la Física. Este trabajo resulta particularmente interesante, ya que adopta una perspectiva contraria a la propuesta en el presente estudio. Mientras aquí se busca analizar la transición desde la demostración matemática hacia los argumentos Físicos (y su incidencia en las formas de argumentación de los futuros profesores de Física), los autores exploran el camino inverso: cómo los argumentos Físicos pueden conducir a una demostración matemática en el contexto del aula de clase de bachillerato.

Por ello, se centra en el proceso de enseñanza-aprendizaje. A pesar de esta diferencia, ambos trabajos comparten un enfoque en la relación entre la demostración matemática y la Física. En este sentido, se destaca que el estudio refleja la construcción histórica que ha vinculado ambas disciplinas, concluyendo que “fue el poder de abstracción de la matemática lo que realmente le dio el estatus que tiene ahora” (p. 71). Además, describe la demostración “como una actividad que desarrollará en el estudiante diferentes habilidades del pensamiento

lógico deductivo y, por consecuencia, del pensamiento matemático” (p. 2), lo que la conecta con los procesos argumentativos que los estudiantes construyen.

Autores como Milanesio, B. y Burgos, M. (2024) mencionan que, a pesar de la presencia de prácticas demostrativas en la educación secundaria, los estudiantes enfrentan dificultades significativas al desarrollar demostraciones con el nivel de formalidad requerido en la educación superior, mostrando una tendencia a utilizar argumentaciones no deductivas y careciendo de una estructura formal. Sin embargo, se observa que la discusión y colaboración entre pares en el aula favorece el avance hacia una mejor comprensión y desarrollo de demostraciones formalizadas, destacando la importancia de crear espacios de diálogo en el aprendizaje. Este trabajo sugiere la necesidad de investigar más sobre las estrategias argumentativas de los estudiantes universitarios y cómo evolucionan a medida que avanzan en su formación, lo cual es crucial para implementar enfoques didácticos más efectivos.

Pérez-Castellanos, E. T. (2022) menciona como la física se vuelve un pilar en la construcción social para las competencias de un individuo, lo cual se relaciona con las matemáticas, retomando las ideas de “Harari (2016) que la física es un pilar básico que toda persona debe adquirir como parte de las competencias necesarias para el desarrollo en la vida diaria, la cual se encuentra íntimamente relacionada con las matemáticas.” (p. 1522) Por ende, la creación y diseño de un proceso didáctico requiere que los y las futuras profesoras de Matemáticas y Física desarrollen un conocimiento didáctico sólido que favorezca el aprendizaje significativo. Es fundamental que comprendan que no basta con dominar los contenidos teóricos de sus disciplinas; también deben adquirir habilidades pedagógicas que les permitan enseñar de manera efectiva, articulando el saber disciplinar con estrategias metodológicas adecuadas a los contextos escolares.

En complemento, Morón Conde (2019) señala que la idea de que un buen desempeño en Matemáticas garantiza un buen rendimiento en Física es un error común, “lo que viene a

decir es que las matemáticas son una herramienta necesaria para entender la física” (p. 5) Desde esta perspectiva, subraya la necesidad de que el profesorado comprenda las diferencias y relaciones entre ambas disciplinas, reconociendo que la conexión entre ellas no es automática, sino que debe ser construida intencionalmente en el aula.

La autora también enfatiza el papel del docente como mediador del conocimiento en propuestas interdisciplinarias, particularmente al aplicar metodologías como el aprendizaje basado en proyectos. Indica que este enfoque promueve una mayor autonomía en los estudiantes, pero exige una participación más activa del docente, sobre todo en cursos iniciales donde la complejidad disciplinar puede generar confusión. Señala que “nuestra labor como docentes es enseñar y educar” (p. 33) y que es necesario disponer de recursos pedagógicos adecuados para facilitar la integración disciplinar y promover un aprendizaje significativo. Se recalca que este trabajo se centra en la educación secundaria, que tiene implicaciones didácticas directas con la formación docente.

Estos antecedentes denotan la importancia de la conceptualización de la demostración en diversos campos del conocimiento, permitiendo observar como el rol de la demostración matemática en el campo de la Física no es algo ingenuo, pues permite obtener más información al respecto de este proceso cognitivo tan particular.

Justificación

Plantear una relación profunda que justifique el estudio de la demostración matemática en relación con las prácticas argumentativas de los futuros Licenciados en Física, requiere una reflexión tanto histórica como didáctica, que permita evidenciar la conexión entre la demostración matemática y las construcciones físicas formuladas desde épocas antiguas.

Según Vizcaino y Terrazzan (2015, p. 99), “para la época de Arquímedes no era necesario asociar sentido físico a una expresión matemática, dado que la demostración por medio de métodos matemáticos era suficiente para ser considerado como verdad”. Esta afirmación evidencia que históricamente una gran parte del desarrollo disciplinar de la Física —especialmente en áreas como la dinámica— ha estado estrechamente ligada a la demostración matemática. Los autores mencionan, por ejemplo, la demostración de la ley de Kepler sobre las órbitas elípticas, donde fue necesaria una formalización matemática rigurosa para resolver un problema no perceptible a simple vista. Como destacan los mismos autores:

“Se resalta la diferencia entre la concepción sobre la relación física-matemática en la época antigua —en la cual los fenómenos de la naturaleza eran estudiados a partir de la filosofía y demostrados desde la geometría—, y la perspectiva actual —cuando el estudio de los fenómenos físicos implica la definición de nuevos conceptos, creados teniendo en cuenta la observación metódica de sistemas, que a su vez son idealizados a fin de obtener la mayor cantidad de generalizaciones y aplicaciones posibles—.” (Vizcaino y Terrazzan, 2015, p. 100).

Desde esta perspectiva, se resalta la importancia del razonamiento matemático como medio para interpretar y construir las bases de la ciencia física. Esta relación no solo se encuentra en el pensamiento griego en la geometría, sino que también se evidencia en obras como “El Almagesto” de Claudio Ptolomeo (c. 100–170 d.C.), escrito hacia el año 150 d.C., en el cual se describen movimientos planetarios con una estructura argumentativa sustentada en modelos matemáticos (geométricos). En esta obra, la matemática no solo cumple un rol de representación, sino también de validación y predicción de fenómenos astronómicos, lo cual refuerza la idea de que las demostraciones formales han sido esenciales en la constitución histórica de la Física.

La Matemática, desde la institucionalidad, ha sido un componente fundamental en los programas curriculares de ciencias, y su enseñanza no puede reducirse a fines instrumentales. En la formación de Licenciados en Física, es indispensable asumirla como un medio para comprender, representar y justificar fenómenos físicos. En esta línea, Gallardo (2009) propone el concepto de “matemáticas en el contexto de la ciencia”, destacando que “desde esta perspectiva, la desarticulación entre los cursos de matemática y los de las demás asignaturas se convierte en un cotidiano conflicto para los alumnos” (Gallardo, 2009, p. 16). Por tanto, integrar las matemáticas de manera significativa en la formación docente es una necesidad, especialmente en programas como la Licenciatura en Física, donde las herramientas matemáticas cumplen una función epistémica y didáctica.

En esta misma dirección, propuestas como la educación STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas) refuerzan la idea de una enseñanza interdisciplinaria que permita abordar los saberes de manera integrada, favoreciendo la comprensión profunda de los fenómenos desde diversas perspectivas.

Finalmente, desde una mirada formativa y crítica, Vergara (2019, p. 8) señala que “reconocer los errores y aciertos históricos es de vital importancia para los docentes, pues, esto le permite reconocer peculiaridades que de otra forma no podría”. Por ello, comprender los procesos demostrativos que han marcado el desarrollo de la Física no solo permite entender su contenido con mayor profundidad, sino también formar docentes capaces de construir argumentos válidos, fundamentar explicaciones y enseñar ciencia con un conocimiento profundo del tema.

Objetivo general

- Establecer los elementos clave del razonamiento argumentativo presentes en la relación entre la demostración matemática y los argumentos en física, a partir de un

análisis histórico y epistemológico, con el fin de fundamentar el diseño de una secuencia didáctica orientada al análisis del razonamiento argumentativo en la formación de profesores de Física.

Objetivo específico

- Examinar momentos clave en la historia de la Física en los que la demostración matemática desempeñó un papel fundamental, con el propósito de comprender su incidencia en la construcción del conocimiento científico y en los procesos argumentativos empleados.
- Analizar la articulación entre historia de la Física y demostración matemática, enfocándose en cómo esta relación configura formas específicas de estructurar el razonamiento argumentativo.
- Caracterizar los elementos del razonamiento argumentativo presentes en procesos de demostración matemática en contextos de la Física, con el fin de construir los modelos de razonamiento necesarios para desarrollar una secuencia didáctica.

Marco teórico

Razonamiento en la formación docente.

Duval (2019) pone de manifiesto las implicaciones didácticas que poseen ciertos análisis en el aprendizaje de la demostración, el autor recalca que comprender el concepto de “demostración” no solamente toma un rol en los contenidos matemáticos, sino, *está relacionado con las formas de razonamiento, que de igual forma están ligadas a la construcción del conocimiento científico*. “El acceso a la actividad de demostración constituye un umbral decisivo que, hasta el presente, parece que los profesores no han logrado que la mayoría de sus alumnos sobrepasen” (Duval, 2017, p. 312). El autor logra

deducir esto gracias a los análisis funcional, estructural, lógico y epistemológico⁴, del razonamiento, los cuales muestran una estructura cognitiva compleja.

Duval (2017) comenta que es necesario no centrarse de manera superficial en los aspectos heurísticos del razonamiento deductivo, ya que esto quita la complejidad de lo que es un razonamiento, y deduce de la demostración (la cual no es un aprendizaje innato) que “lo que finalmente parece simple e inmediato se forma a través del aprendizaje en paralelo de los tratamientos específicos de los diferentes registros de representación y en su progresiva coordinación” (p. 312)

Duval (2017) menciona algunos aspectos relacionados con la incomprensión de la validez de un razonamiento y, por ende, de lo que constituye una demostración, “se basan en una triple indiferenciación respecto a las proposiciones y a su organización en pasos de razonamiento.” (p. 313) La primera es “indiferenciación entre el valor epistémico teórico y el valor semántico de una proposición”⁵ (p. 313) la segunda a “la indiferenciación entre las dos utilizaciones posibles de un tercer enunciado” (p. 313) la tercera “se refiere a la existencia de dos niveles de organización en el razonamiento”⁶. Duval (2017) finaliza mencionando la importancia de esta indiferenciación para la comprensión de un razonamiento válido.

Duval (2017) expresa que “las tareas que por lo general se proponen para preparar la actividad de demostración, son tareas de construcción geométrica” (Duval, 2017, p.318) y “el punto decisivo en el aprendizaje de la demostración es *el descubrimiento de un paso de*

⁴ El análisis funcional explora las expansiones discursivas en el transcurso del tiempo; el análisis estructural observa la organización particular de cada uno de los razonamiento, desde la “complejidad cognitiva” (Duval, 2017, p. 235) se resalta que “estos dos tipos de análisis son los que permiten descubrir el funcionamiento cognitivo del razonamiento subyacente a la codificación de sus formas lógicas y a las variaciones posibles de su expresiones lingüísticas.” (Duval, 2017, p. 235); el análisis epistemológico hace referencia a la definición y significación de cada uno de los conceptos empleados; y “el análisis lógico de un razonamiento se basa en sus condiciones de validez.” (Duval, 2017, p. 281).

⁵ El estatus teórico el cual cumple con el rol conceptual que se está empleando en el desarrollo del razonamiento, el estatus teórico define al estatus operativo (premisa, tercer enunciado, conclusión) en este caso, se añadirá en el estatus operatorio el argumento Físico, por ser un elemento constante en la estructura de la demostración.

⁶ Duval (2017) menciona que no se debe de destruir esta indiferenciación de los dos niveles, ya que el primero consta de diferenciar las proposiciones de un paso con los pasos de un razonamiento, y la segunda sobre la utilización de las conclusiones intermedias.

razonamiento válido, del cual el alumno mismo y sin recurrir a ningún control externo [...] pueda probar su validez.” (p. 320) Por ende, esto recurre a un proceso cognitivo complejo. Es necesario que los docentes tomen un rol activo en el conocimiento de la demostración, como lo comenta Arce (2024):

“Como lo reporta Hanna (2000), los docentes tienden a preferir procesos heurísticos o exploratorios frente a procesos de prueba, pues mientras los primeros les suponen un camino evidente de aportaciones didácticas para la comprensión matemática de los estudiantes, se cree que los procesos de prueba requieren un nivel de abstracción y rigurosidad asociados al papel puramente científico de la demostración, y por lo tanto, no es competencia del aula.”
(Arce Becerra, I. 2024, p. 9)

La autora menciona sobre cómo el papel de la “prueba” toma un rol de verificación, dejando relegado otras actividades cognitivas importantes para el aprendizaje; sin embargo, resalta que “poder dar razones del *porqué* en matemáticas, constituye un camino para la comprensión de los estudiantes, lo que puede legitimar el uso de la demostración en el aula con fines didácticos.” (Arce Becerra, I. 2024, p. 9).

Noción del concepto de demostración.

La demostración constituye una dificultad relevante para muchos estudiantes, y al hablar de las imágenes (semiótica) se complejiza los procesos que se deben de realizar, como señalan Perales y Jiménez (2002, p. 371), “la imagen se caracteriza además por su polisemia, de modo que resulta muy difícil predecir cuál va a ser la interpretación que sobre una ilustración va a realizar una persona”. Según Luna Corredor (2023) para que un o una estudiante pueda realizar una prueba se tiene que presentar la doble conciencia⁷, que parte de la sensación de la prueba y de las prácticas discursivas, por ende “Esto debe constar de tres

⁷ El autor retoma este contenido desde la teoría de Duval (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016)

momentos específicos: la exploración, la construcción de grafos y la redacción en lenguaje natural (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016)” (p. 12) implicando que toda demostración debe estructurarse a partir de terceros enunciados, proposiciones y conjeturas⁸. Todo esto parte desde la teoría de Duval (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016) que estudia la comprensión de los razonamientos dentro de la demostración.

Como lo expone Duval (2017), el proceso de semiosis es el que permite tratar la información contenida en un signo, otorgándole un valor objetivo o significante. Este proceso no debe entenderse como un mero soporte de las representaciones mentales⁹, sino que se encuentra estrechamente vinculado con el concepto de noesis, es decir, con el acto mismo de comprender a través del signo. Desde la perspectiva del lenguaje se abordará los temas de razonamiento y representaciones semióticas, las cuales están estrechamente ligadas a los procesos de demostración matemática.

Razonamiento.

Con el concepto de “razonamiento” Duval (2017) marca dos diferencias, por una parte, las inferencias explícitas, las cuales son expansiones discursivas de una premisa y por otro, el acto exploratorio, que se relacionan al movimiento y traslación de un cuerpo. No se tomará en cuenta el razonamiento inductivo¹⁰ al no estar estrechamente ligado a un lenguaje. El autor también menciona algunas formas de razonamiento vinculadas con el lenguaje, por ejemplo: el silogismo aristotélico, el razonamiento por el absurdo, las inferencias semánticas y la *argumentación* (esta tiene la intención de convencer al otro, por ende es toda

⁸ Duval (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016) menciona que el razonamiento deductivo usualmente es el que se aplica a las pruebas, particularmente geométricas, y que diferencia dos niveles diferenciados, esto de una organización discursiva “en el nivel de un paso de deducción, cada proposición toma una de las siguientes tres categorías del estatus operativo: premisa, conclusión, tercer enunciado.” (p. 100)

⁹ Duval (2017) menciona que este concepto va más allá que simples “imágenes mentales” (p. 69) sino desde una significación más completa, en este caso no solo es lo perceptivo de la imagen, sino que se asocia creencias y fantasías en torno a la función de representación. “Las representaciones mentales son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de significado perceptible” (p. 69).

¹⁰ Duval (2017) categoriza al razonamiento inductivo como un razonamiento no ligado al lenguaje. “La inducción es una forma de razonamiento estrechamente dependiente del dominio de objetos a los cuales apunta” (Duval, 2017, p. 231).

justificación o refutación de un debate). “La característica principal de todas estas formas de razonamiento es la de movilizar explícitamente proposiciones” (p. 231) entendido el concepto de “proposición” como un enunciado que puede tomar el valor de verdad: “verdadero” ó “falso”; por ejemplo –Afuera está lloviendo– esto puede ser verdadero o falso.

Duval (2017) menciona como un razonamiento vinculado al lenguaje no tiene que ser confirmado por la experiencia, ya que “es, por sí mismo, válido o no válido” (p. 232) diferencia contraria al razonamiento deductivo; según Duval y Sáenz-Ludlow (2017) para una “prueba” se requiere un razonamiento válido, y en la secuenciación de pasos no debe haber baches, “es este tipo de razonamiento, a menudo denominado “deductivo”” (p. 100) y estos poseen dos niveles de organización discursiva, “el nivel de organización de varias proposiciones en un paso de deducción y el nivel de organización de varios pasos en una prueba” (p. 100) el primer nivel de un paso los elementos toman la categoría de premisa, conjetura y conclusión; el segundo nivel las proposiciones se superponen. Otra característica es que “únicamente los razonamientos válidos tienen fuerza y valor objetivo de demostración” (Duval, 2017, p. 232)

Duval (2017) menciona que más allá de las mismas premisas, es necesario observar la estructura que se le está brindado, por ende, un razonamiento no válido puede llegar a convencer, y en su contraparte, un razonamiento válido puede llegar a no convencer a un individuo. Sin embargo, es interesante observar su estructura, ya que desde la lógica proposicional, si partimos desde algo que es falso y llegamos a algo verdadero, la implicación será verdadera¹¹. Para comprender el proceso de razonamiento es necesario realizar un análisis funcional, estructural, lógico y epistemológico, esto lo realiza Duval (2017) describiendo las diversas aproximaciones del razonamiento.

¹¹ Este ejemplo está relacionado a la intencionalidad de la argumentación, que su objetivo es convencer, sin importar si es válido o no.

Representaciones semióticas.

Perales y Jiménez (2002) comentan que la relación entre el contenido escrito y la figura no cumple una función decorativa o de simple acompañamiento, sino que constituye un recurso esencial en la modelación del problema, reforzando la importancia de su análisis riguroso. Duval (2017) señala la importancia de las representaciones semióticas dentro del proceso de aprendizaje de las matemáticas; y hace la diferencia y perspectiva del concepto de “semiosis” el cual cumple el funcionamiento del tratamiento de la información que se le brinda a un signo, objetivando o significándole; éstas no son un soporte a lo que denominamos representaciones mentales (p. 60) y está estrechamente ligada con el concepto de “noesis”.

Duval (2017) explicita dos acciones, la primera es el tratamiento de información, el cual consiste en hacer un cambio en el mismo registro y una conversión el cual cambió de registro, “se comprueba que la operación de conversión no es trivial ni cognitivamente neutra.” (p. 61). “Los sistemas semióticos deben, en efecto, permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación” (Duval, 2017, p. 62) los cuales son: construir una marca, transformar y construir representaciones en ventaja del conocimiento y convertir representaciones a otro sistema.

Demostraciones que demuestran y explican.

Hanna y Jahnke (2014) retoman el concepto de "explicaciones intra-matemáticas", que abarca tanto la construcción matemática como las ideas subyacentes que permiten que una afirmación sea considerada verdadera en el razonamiento matemático. En su análisis, distinguen entre las demostraciones en el contexto de un grupo de matemáticos y las que se realizan en un aula de clase. Mientras que las primeras tienden a enfocarse en evidenciar el valor de verdad de un resultado mediante fundamentos lógicos, las segundas buscan, además,

promover una comprensión más profunda y una aprehensión de la estructura y los principios subyacentes que sustentan la construcción de la demostración, favoreciendo así el aprendizaje y la internalización de los conceptos por parte de los estudiantes.

Procesos argumentativos.

Duval (2017) trata la “argumentación” como un proceso de razonamiento, comentando que es la forma de razonamiento más familiar en el momento de expresar ideas para convencer a otro individuo; sin embargo, no solamente basta con los valores epistémicos que posee la proposición, sino, los valores del receptor “el funcionamiento de la argumentación parece, pues, radicalmente diferente a las formas anteriores de razonamiento, ya que en ninguna de estas es un elemento motor la oposición entre dos valores epistémicos para una misma proposición” (p. 274).

El autor menciona un rasgo particular del proceso de argumentación, el cual llamó “continuidad temática” (p. 276) lo que permite realizar cierta correspondencia entre los contenidos de las premisas; sin embargo, este tipo de razonamiento no posee la misma estructura de un razonamiento deductivo. La argumentación debe de conceder una confrontación de ideas que permitan el contraste entre los puntos de vista de un mismo tema. “Entonces, toda la argumentación consiste en jugar con las compatibilidades y las incompatibilidades entre todas las proposiciones que la red permite generar” (p. 278) por ende, la red de opiniones y creencias y las oposiciones toman un rol fundamental en la argumentación “En tanto utiliza una red de oposiciones y respeta la continuidad temática, la argumentación es entonces una forma de razonamiento que solo puede funcionar por acumulación y no por sustitución.” (p. 280) esto implica que la argumentación no tiene una estructura determinada, sino que va encadenando con las múltiples relaciones del contenido,

cambiando su valor epistémico¹² gracias al contexto que se le está brindando¹³. Duval (2017) finaliza el apartado de la argumentación concluyendo que “Es en este sentido que el razonamiento por el absurdo aparece como la forma común a la demostración y a la argumentación.” (p. 280).

Preguntas esenciales, deseables e indeterminadas.

Dentro de la construcción didáctica y la estructuración de las preguntas para los y las estudiantes, autores como Stylianides y Stylianides (2018) mencionan tres elementos de las características de una intervención: esencial, deseable e indeterminado. Las actividades propuestas deberán cumplir:

- **Esencial:** Consiste en que la intervención cuente con un marco teórico que explique cómo y por qué la intervención funciona para mejorar el aprendizaje. Esto implica tener un modelo o teoría que describa los procesos de razonamiento y aprendizaje que se desean favorecer, así como los mecanismos específicos mediante los cuales la intervención logra apoyar esos procesos. Es importante porque permite entender y justificar qué elementos de la intervención son responsables de su éxito y facilitar su adaptación en otros contextos.
- **Deseable:** Se refiere a que la intervención se enfoque en unos pocos objetivos claros y específicos, abordando un conjunto limitado de conceptos o dificultades en el aprendizaje. Esto permite que la intervención sea relativamente corta y manejable, facilitando su implementación y evaluación. La importancia radica en que, al tener un alcance reducido, se puede diseñar y aplicar de manera más concreta y eficaz en un período breve de tiempo.

¹² Se puede clasificar en posible, necesario, apodíctico, absurdo, convención, auténtico, etc. (Duval, 2017)

¹³ Esto de igual manera recae en una renovación del conocimiento científico, permitiendo tener diferentes perspectivas en cuanto se adquiriera nuevas premisas que validen o evidencian la falencia de ciertos contenidos, como ejemplo es la perspectiva de Newton de la gravedad a comparación de la de Einstein.

- **Indeterminado:** Implica que la intervención incluya estrategias o actividades específicas que ayuden a los estudiantes a modificar ideas erróneas o concepciones incorrectas que ya tienen. Es decir, debe tener una forma sistemática de activar conflictos cognitivos o momentos de reflexión que propicien una transformación profunda en su comprensión, logrando que las ideas previas sean reemplazadas por conceptualizaciones correctas y duraderas.

Metodología

El trabajo es con base en un análisis cualitativo, puesto que al tratar de la argumentación, como ha indicado Duval (2017) no se tiene una estructura rígida. Se espera realizar un análisis histórico y epistemológico, con base en esto crear un documento que corresponda a una secuencia didáctica, a través de un análisis epistemológico e histórico de momentos idóneos¹⁴ que permitan evidenciar esta relación. Díaz-Barriga (2013) menciona como la secuencia didáctica se vuelve un instrumento que “constituye una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo.” (p. 1) por ende, no puede ser una simple entrevista o un documento para llenar espacios vacíos; desde esta mirada, la secuencia didáctica debe estar estructurada de tal manera que permita la confrontación de ideas antiguas con los nuevos conocimientos que se irán construyendo.

Se emplea para el análisis histórico y epistemológico el uso de grafos, los cuales son una herramienta que permite “a way to study complexity of propositional proofs and to provide more efficient theorem provers, concerning size of propositional proofs.” (Quispe-Cruz, M., Haeusler, E. H. y Gordeev, L., 2014, p. 16) esto brinda un tratamiento de información del razonamiento de manera gráfica y secuencial; por lo tanto, se plantea realizar

¹⁴ Se escogen momentos en específico ya que sería imposible pensarse abordar gran parte de la historia, seleccionando momentos que se consideren notablemente relacionados a la problemática.

para cada una de las demostraciones su propio grafo, que conste de¹⁵: hipótesis, terceros enunciados, proposiciones, conjeturas, argumentos Físicos y tesis. Discriminados por colores para permitir su fácil reconocimiento.

Los grafos se utilizarán como herramienta de análisis de la demostración, ya que el grafo en este trabajo funge como una representación intermedia para interpretar la “demostración” por lo tanto, se explicara la aproximación del razonamiento empleado por los pensadores, completando así el siguiente cuadro:

Cuadro 1

Rejilla de análisis de los grafos.

<i>Relación en la estructura interna de la demostración.</i>	<i>Argumentación Matemática en contexto Físico.</i>	<i>Argumentos Físicos en la modelación Matemática.</i>	<i>Razonamientos en la articulación de ideas.</i>
<i>¿La concatenación de ideas permite evidenciar la estructura del razonamiento?</i>			
<i>¿La modelación matemática permite la interpretación del fenómeno físico?</i>			
<i>¿La interpretación matemática brinda una secuenciación clara de ideas?</i>			

Nota: Se realizan tres preguntas que se pretenden contestar desde tres focos distintos; desde la argumentación de las matemáticas a la Física, desde la argumentación física a la modelación matemática y la articulación de las dos anteriores enfocadas en el razonamiento. Esto posee una estructura clara, ya que como lo ha comentado Duval (2017) más allá de las premisas, resulta interesante en el razonamiento argumentativo observar su correspondencia entre ellas, logrando una articulación clara en su red de ideas. Elaborado en septiembre del 2025.

¹⁵ Se emplean estas categorías ya que Duval (2017) ha comentado que esto representa la estructura básica de la demostración, sin embargo, se añade el argumento Físico.

El *cuadro 2* pretende evidenciar la relación entre las demostraciones y el razonamiento empleado:

- *¿La concatenación de ideas permite evidenciar la estructura del razonamiento?:* Se indaga sobre la relación y concatenación entre la estructura de las ideas y la forma en cómo se procede, además de evidenciar cómo es la estructura en este caso particular del razonamiento argumentativo.
- *¿La modelación matemática permite la interpretación del fenómeno físico?:* Se indaga respecto a cómo la modelación matemática logra representar los fenómenos físicos a través de la observación.
- *¿La interpretación matemática brinda una secuenciación clara de ideas?:* Se indica cómo las ideas matemáticas logran dar un sentido estructurado a los argumentos que se emplean.

Este análisis brinda herramientas que se emplean para la construcción de la secuencia didáctica, utilizando las formas de razonamiento que se observaron para realizar preguntas con base a la información obtenida. La secuencia didáctica estará basada en el modelo que plantea Díaz-Barriga (2013), ya que brinda una estructura general, clara y concreta; que se puede modificar para adaptar a las necesidades de cada trabajo. Estos son los cambios de manera general:

- Se dejará igual:
 - Estructura general.
 - Contenidos y apartados (con diferente nombre).
- Se cambiará:
 - El diseño de la guía didáctica.
 - Se añadirán elementos específicos como: objetivos de investigación, materiales, momentos didácticos y conocimientos previos.

Se realizará una ficha general que muestre las características principales del documento propuesto, seguido del análisis de cada una de las preguntas planteadas; esto con el objetivo de detallar la intención de cada una, para validar los rasgos esenciales, deseables e indeterminados. Por lo tanto, se deberá de cumplir los siguientes apartados:

1. Contenido:

- a. Conjeturas claras y precisas.
- b. Estructura de tiempo y orden en los temas.
- c. Actividades de apertura, desarrollo y cierre.
- d. Análisis retrospectivo.

2. De manera general se deberá cumplir que sea: Esencial, Deseable e indeterminado.

Ya que las preguntas tendrán como base los grafos analizados, permitirá una articulación entre la construcción histórica y epistemológica que se realizará para fortalecer los aspectos disciplinarios del documento resultante; se modificará los grafos para brindar diferentes intenciones.

“La secuencia didáctica es el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí” (Díaz-Barriga, 2013, p. 4) por ende, al hablar de una demostración matemática, es necesario realizar una introducción primeramente a los contenidos físicos de los que se van a tratar, para luego trabajar en su aducción y “recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho” (p. 4) para obtener un aprendizaje significativo. Díaz-Barriga comenta como la secuencia didáctica debe de consistir en una construcción de actividades diferentes a las rutinarias, por ende, debe de permitir la articulación entre conocimientos previos y formativos en el transcurso de la secuencia.

Por lo tanto, en la construcción de las preguntas (sin olvidar el sentido investigativo) se busca recolectar información de cómo algunos elementos de la demostración matemática

en el contexto de la Física inciden en los procesos argumentativos de los futuros Licenciados en Física (Se especifica que no se va a aplicar el documento, únicamente será la propuesta). La forma en cómo se plantea el análisis es una aproximación hermenéutica, “según esta no se trata de valorar el efecto de una intervención contrastando contra un referente ideal, sino de capturar los significados que las personas dan a diversos aspectos de las dinámicas propias generadas.” (p. 67). Uno de los propósitos principales de esta metodología es identificar “patrones discursivos” (Camargo, 2021, p. 67).

Dentro de la secuencia didáctica se propone realizar una implementación que permita dar cuenta de las formas de razonamiento argumentativo previas y posteriores de los y las estudiantes de la Licenciatura en Física. La hipótesis inicial que se tiene en el trabajo es referente a que la demostración matemática permite mejorar los procesos argumentativos de los estudiantes.

En la primera parte, se buscará recolectar las formas de argumentación previas de los estudiantes. Posteriormente, se presentarán las demostraciones matemáticas como “actividades de desarrollo” (Díaz-Barriga, 2013, p. 9) acompañada de su respectiva socialización. Finalizando con preguntas que busquen una reflexión profunda de los conocimientos anteriores. Se distinguen dos tipos de preguntas: De “mapeo” o de conocimientos anteriores y posteriores y “estructuradas” que permitan una guía clara en la interpretación de las demostraciones matemáticas.

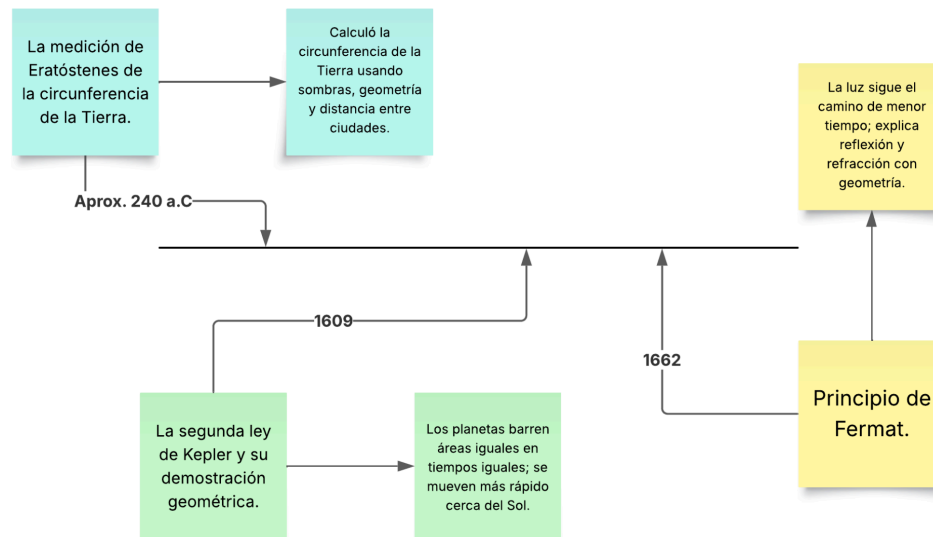
Algunos hechos históricos de la Física que contienen demostración matemática en su resolución

En este apartado se pretende indagar sobre la incidencia que ha tenido la demostración matemática en algunos hechos históricos de la Física, su concepción teórica y su estructura lógica. Para tal efecto se realizará una línea de tiempo para denotar los momentos elegidos.

Se resalta que no se abordará toda la historia, sino algunos momentos particulares que se consideren relevantes.

Cuadro 2

Línea de tiempo de algunos hechos relevantes de la Física que utilizan demostración matemática.



Nota: Elaborado en junio del 2025.

De manera general, se realizará el planteamiento de los pensadores seleccionados para luego realizar un grafo en cada uno, evidenciando la estructura del razonamiento que se emplea, destacando los terceros enunciados, proposiciones y conjeturas. Se denota que:

- Color azul – argumentos Físicos.
- Color morado – proposiciones matemáticas.
- Color naranja – conjeturas.
- Color verde – elementos relacionados con la hipótesis y tesis.

La medición de Eratóstenes de la circunferencia de la Tierra.

Eratóstenes de Cirene (c. 276-195 a.C.) era un filósofo griego que aportó a la ciencia el experimento de la medición de la Tierra, según Pereira (2006, p. 20) “A determinação da circunferência da Terra por Eratóstenes é considerada por muitos historiadores de ciência como um dos dez mais importantes experimentos científicos.” Entrelazando un hecho astronómico relacionado con la Física y la Geometría. Lanciano (1989, p. 176) comenta que “un problema importante, tanto en la enseñanza de las matemáticas, como en la enseñanza de la astronomía, es el que está ligado a la visión espacial, a la capacidad mental de ver en tres dimensiones” mostrando un enlace entre el pensamiento espacial y la forma de los movimientos planetarios. Por ende, Eratóstenes en esta demostración (relacionado a hechos empíricos) tuvo que emplear una progresión discursiva para el desarrollo de tal razonamiento, por ende debió construir argumentos sólidos con base en la teoría de la Física.

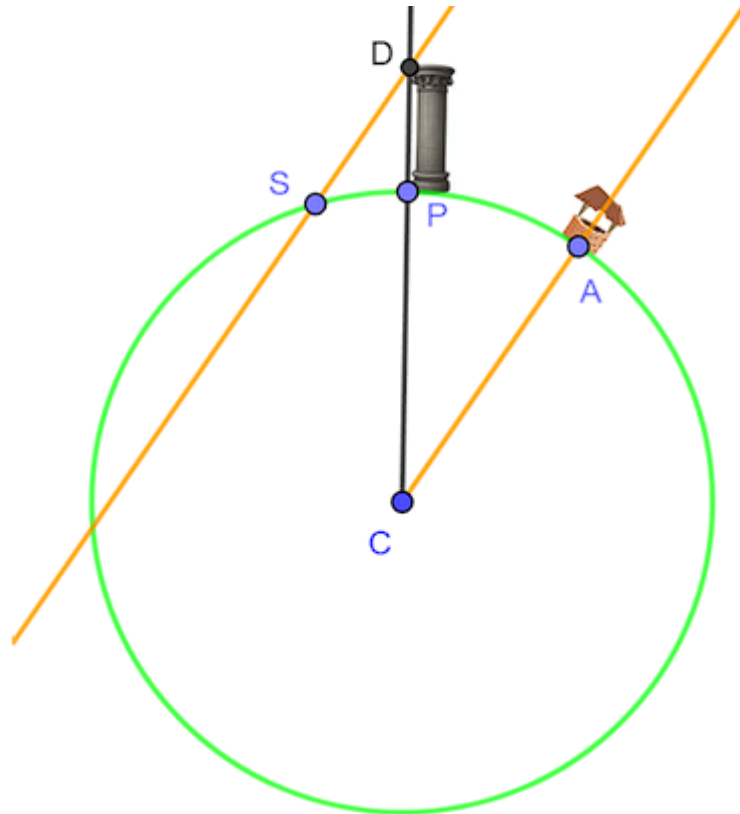
Eratóstenes tuvo una precisión bastante aproximada en sus cálculos, “en razón a que se cree que este sabio habría calculado el tamaño de un círculo mayor terrestre en 39.690 kilómetros, lo que es increíblemente cercano al resultado actual, igual a 40.120 Km, lo que arroja un error de un 1,07%” (Salinas, A., 2002, p. 143). Esto con medidas estimadas en pies entre dos ciudades, específicamente entre Alejandría y Siena, Según Salinas (2002) el filósofo nota ciertas características del solsticio de verano, en la ciudad de Siena; los rayos de sol iluminaban los edificios impidiendo generar sombras (al mediodía, específicamente se fijó en un pozo) y en Alejandría se fijó en un pilar, el cual en ese mismo instante generaba una sombra. Lanciano y Berardo (2016) mencionan que Eratóstenes usó un “cuenco hemisférico” para medir la sombra del pilar, lo cual con ello pudo determinar el ángulo.

Eratóstenes propuso la hipótesis por observación que todos los rayos del sol caían en línea recta (por ende, serán paralelos), como se muestra en la *imagen 1* (Luna Corredor J. S., 2023, p. 5); por el principio de Fermat sabemos que esto es cierto, ya que “en un medio

homogéneo (con el mismo índice de reflexión), la luz se propaga en línea recta. En esta condición es válido afirmar que la distancia más corta entre dos puntos, es la recta que los une.” (Argáez-Mendoza, S., & Oliva, A. I., 2011, p. 48) por ende, Eratóstenes estaba en lo correcto.

Imagen 1

Representación del método de medición de Eratóstenes.



Nota: Sacado de Luna Corredor J. S. 2023.

El segmento CP se definirá como un radio (suponiendo que la Tierra es redonda en su completitud) y el segmento PD en una extensión del mismo. Los segmentos SD y CA son paralelos por Hipótesis (Proposición 1). Por ángulos internos alternos, $\angle DCA$ y $\angle SDC$ son iguales, por estar en paralelas (Proposición 2). Eratóstenes ya conocía el ángulo SDC, y así pudo calcular la circunferencia de la Tierra, demostrando que la circunferencia de la Tierra se puede deducir a través de observaciones y así mismo demostrando la validez de su hipótesis (*Tesis*). Sin embargo, el filósofo tuvo algunas dificultades, como por ejemplo que “Siena y

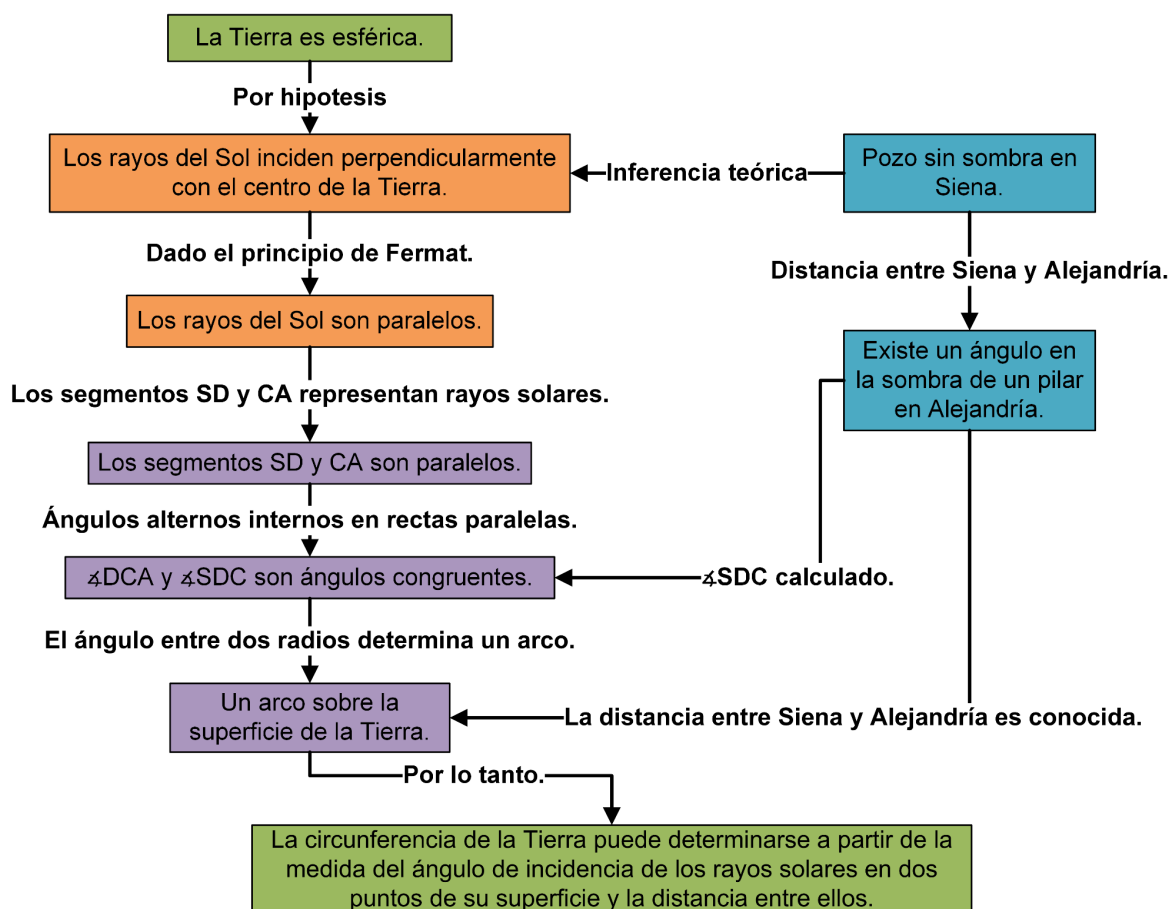
Aleandría no están exactamente en el mismo meridiano” (Lanciano y Berardo, 2016, p. 17).

Este razonamiento se describe en su completitud en el *Grafo 1*.

Se debe de tener en cuenta que esta demostración no es en su totalidad abstracta, a pesar de ello, se observa que en su estructura interna refleja una secuencia de pasos que logra aproximarse a un razonamiento deductivo.

Grafo 1.

Razonamiento utilizado por Eratóstenes para medir la Tierra y demostrar que es redonda.



Nota: En este razonamiento se puede observar terceros enunciados, proposiciones y conjeturas, cumpliendo con lo que Duval (2017) usualmente denomina razonamiento deductivo. Además de una inferencia teórica que Eratóstenes utiliza para poder darle sentido a una secuencia de pasos. Elaborado en junio del 2025.

La demostración geométrica de la segunda ley de Kepler.

Johannes Kepler (1571-1630) realizó un aporte a la ciencia con las observaciones y construcciones teóricas de los movimientos planetarios, surgiendo una necesidad de validarlas con una demostración matemática (Vizcaino Arévalo, D. F., & Terrazzan, E. A., 2015). La segunda ley resulta muy interesante por el hecho de la demostración geométrica que se emplea en algunos libros, y la estructura lógica que relaciona proposiciones matemáticas con argumentos Físicos.

Se utilizará como documento guía el libro la conferencia perdida de Feynman (Feynman, R. P., Goodstein, D. L., & Goodstein, J. R., 1999) y se usarán imágenes creadas en GeoGebra que permitan la visualización de la demostración¹⁶. La segunda ley enuncia que: El radio vector que une a un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Como hipótesis se tendrá que el planeta recorre la misma distancia en el mismo tiempo (H) y como tesis que el área de ese espacio recorrido unido con el vector será la misma (T). Por ende, será una demostración directa $H \rightarrow T$, se partirá de la hipótesis para llegar a la tesis.

Cómo se observa en la *imagen 2*, existe un segmento ST (S representa el sol y T la Tierra) que cumple una función de radio, y los segmentos TT_1 y T_1T_2 son iguales por (H), el movimiento orbital de la Tierra no es rectilíneo uniforme, sino acelerado, ya que la fuerza de atracción gravitatoria del Sol (punto S) provoca una aceleración centrípeta que cambia continuamente la dirección de su velocidad, que cambiará su movimiento (argumento Físico 1) por ende, existirá un vector que atrae a T_1 hacia el punto S, siendo T_3 su verdadera dirección.

¹⁶ Las imágenes están inspiradas principalmente en “La conferencia perdida de Feynman” de Goodstein y Goodstein (1999) y de manera secundaria en el artículo de Luna (2023).

Imagen 2

Construcción geométrica.

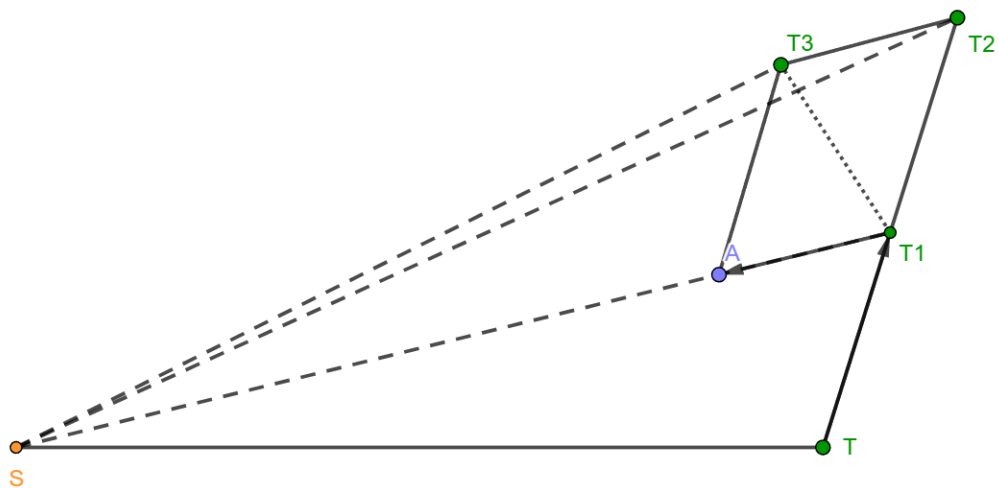


Nota: Elaborado en junio del 2025.

Se crea un paralelogramo $AT_1T_2T_3$ (dos pares de lados paralelos y dos pares de ángulos opuestos paralelos) entre el segmento ST_1 y T_3T_2 ya que “A body by two forces conjoined will describe the diagonal of a parallelogram, in the same time that it would describe the sides, by those forces apart.” (Motte, A., & Cajori, 1729. p. 84) Uniendo los puntos T_3 , T_2 y T_1 forman tres triángulos, STT_1 , ST_1T_2 y ST_1T_3 .

Imagen 3.

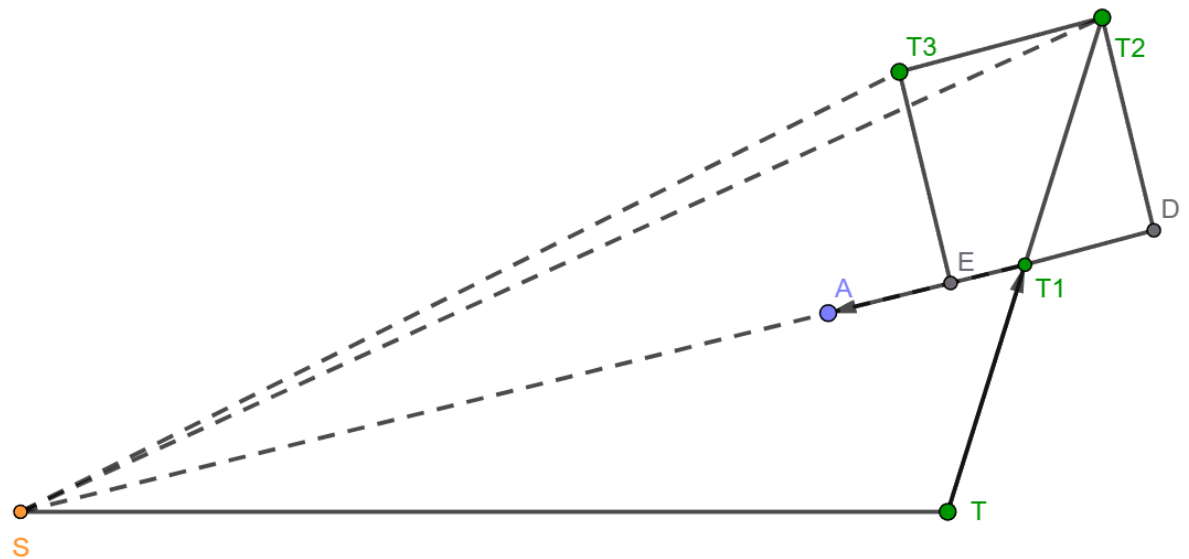
Construcción geométrica.



Por lo tanto, los triángulos STT_1 y ST_1T_2 tienen la misma área (Proposición 1) y los triángulos ST_1T_2 y ST_1T_3 tienen la misma área (Proposición 2) por transitividad los triángulos STT_1 y ST_1T_3 tendrán la misma área. Q.E.D.

Imagen 5

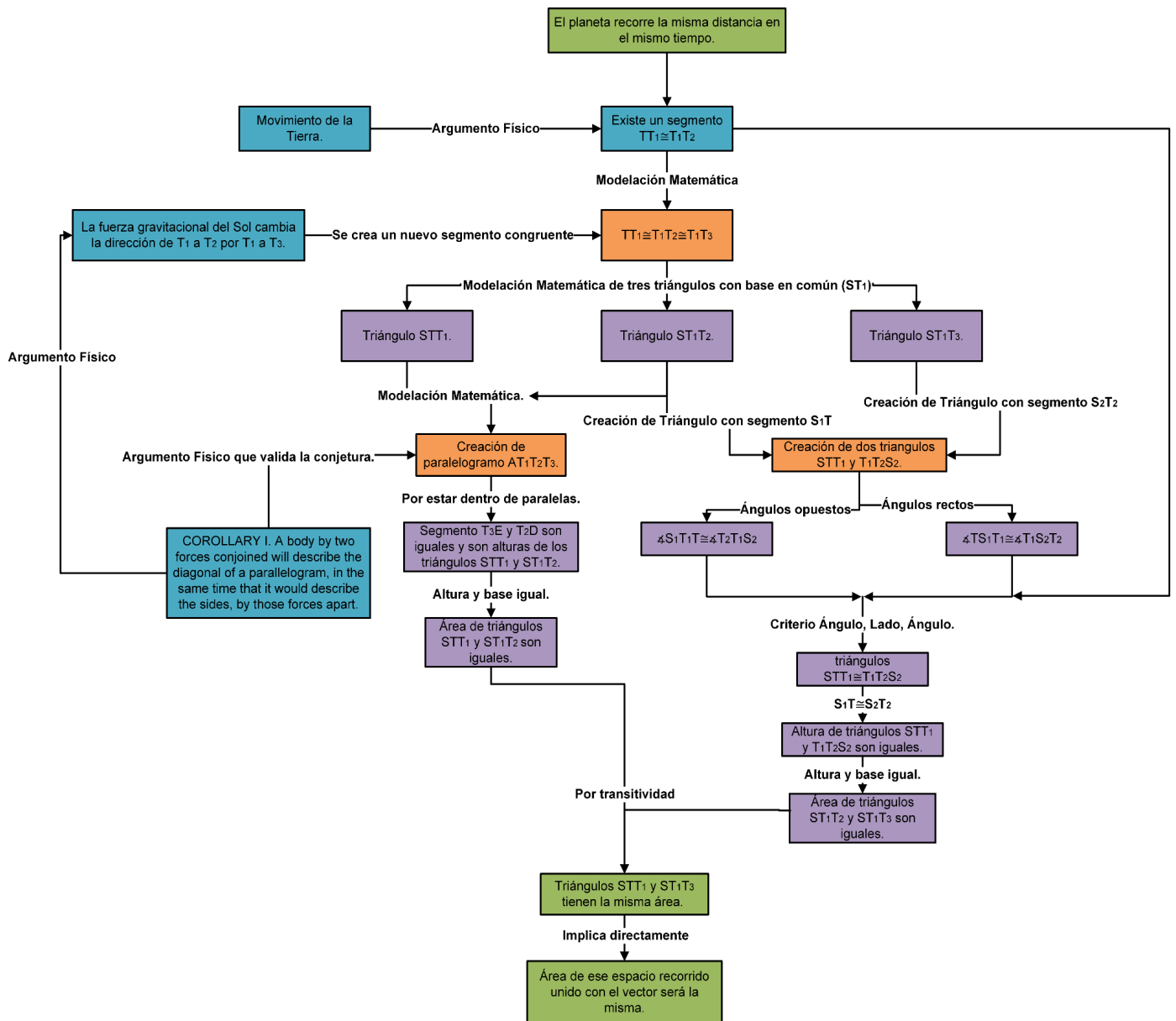
Construcción geométrica.



Se observa en el grafo 2 la construcción del razonamiento de Kepler, el cual muestra una articulación entre argumentos Físicos y expresiones matemáticas.

Grafo 2.

Razonamiento utilizado por Newton para la demostración de la segunda ley de Kepler.



Nota: Elaborado en junio del 2025.

El principio de Fermat.

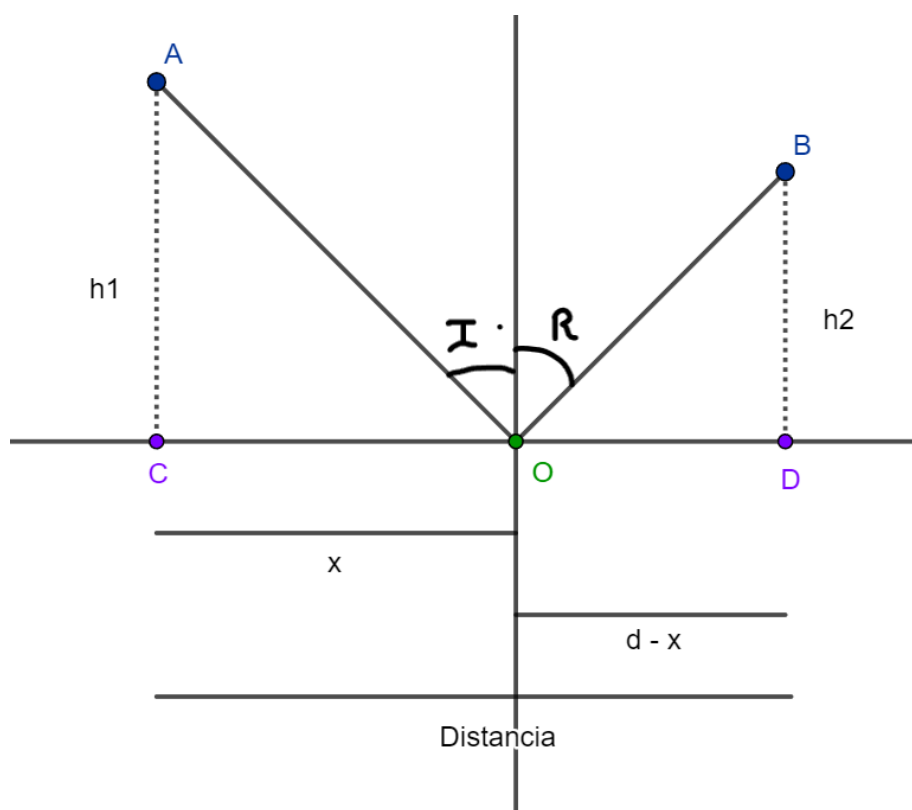
En óptica se utiliza el principio de Fermat para hacer ciertas interpretaciones del comportamiento de la luz, en este caso particular se hará la siguiente demostración que se relaciona con la reflexión de la luz. “Veamos, a partir del cálculo diferencial, que la condición de que el tiempo empleado por el rayo de luz sea mínimo, implica que, cuando el rayo de luz

se refleja en un espejo, los ángulos de incidencia (i) y de reflexión (r) son congruentes” (Ballén, M. B., p. 1).

Como hipótesis tendremos el principio de Fermat: La trayectoria seguida por la luz entre dos puntos es aquella que requiere el menor tiempo posible (o un tiempo estacionario) para recorrerla. La tesis será: en la reflexión de la luz, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Imagen 6

Construcción geométrica.



Nota: Construcción geométrica de la reflexión de la luz. Elaborado en junio del 2025.

El camino más corto del punto A al B es el camino $AO + OB$, según el principio de Fermat (hipótesis). Existe un ángulo de incidencia formado en el punto O, ya que este se considera algún cuerpo que cambie la dirección de la luz (ahí mismo será el origen de un plano cartesiano). Se saca la altura de ambos puntos, h_1 y h_2 formándose los triángulos ACO y

ODB. Como los $\angle CAO$, $\angle DOB$ son perpendiculares al eje x , estos serán paralelos al eje y ; por ende, $\angle CAO \cong \angle$ Incidencia (I) y el $\angle DBO \cong \angle$ Reflexión (R).

Se parte de que la velocidad es la distancia por el tiempo recorrido, utilizando el teorema de Pitágoras para conocer las distancias de AO y OB.

$$t = \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}}$$

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v} \text{ para el segmento AO } t = \frac{\sqrt{h^2 + (d-x)^2}}{v} \text{ para el segmento OB}$$

$$2t = \frac{AO}{\text{velocidad}} + \frac{OB}{\text{Velocidad}} \text{ el camino más corto (hipótesis)}$$

$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{2v} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{2v} \text{ (Se dividió todo por dos)}$$

Se procede a derivar t , ya que esto acerca a las condiciones óptimas en las que la luz sigue su camino natural:

$$dt = \frac{1}{2v} \left(\frac{2x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} + \frac{2(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \right) \text{ como el tiempo es mínimo, por concebir la}$$

velocidad de la luz, entonces:

$$\frac{1}{2v} \left(\frac{2x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \right) = 0$$

Por ende,

$$\frac{2x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} \text{ Fórmula 1.}$$

Conocemos que:

$$\text{Sen}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Y tenemos que:

$$\text{Sen}(CAO) = \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \text{Sen}(I)$$

$$\text{Sen}(OBD) = \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \text{Sen}(R)$$

Por lo tanto,

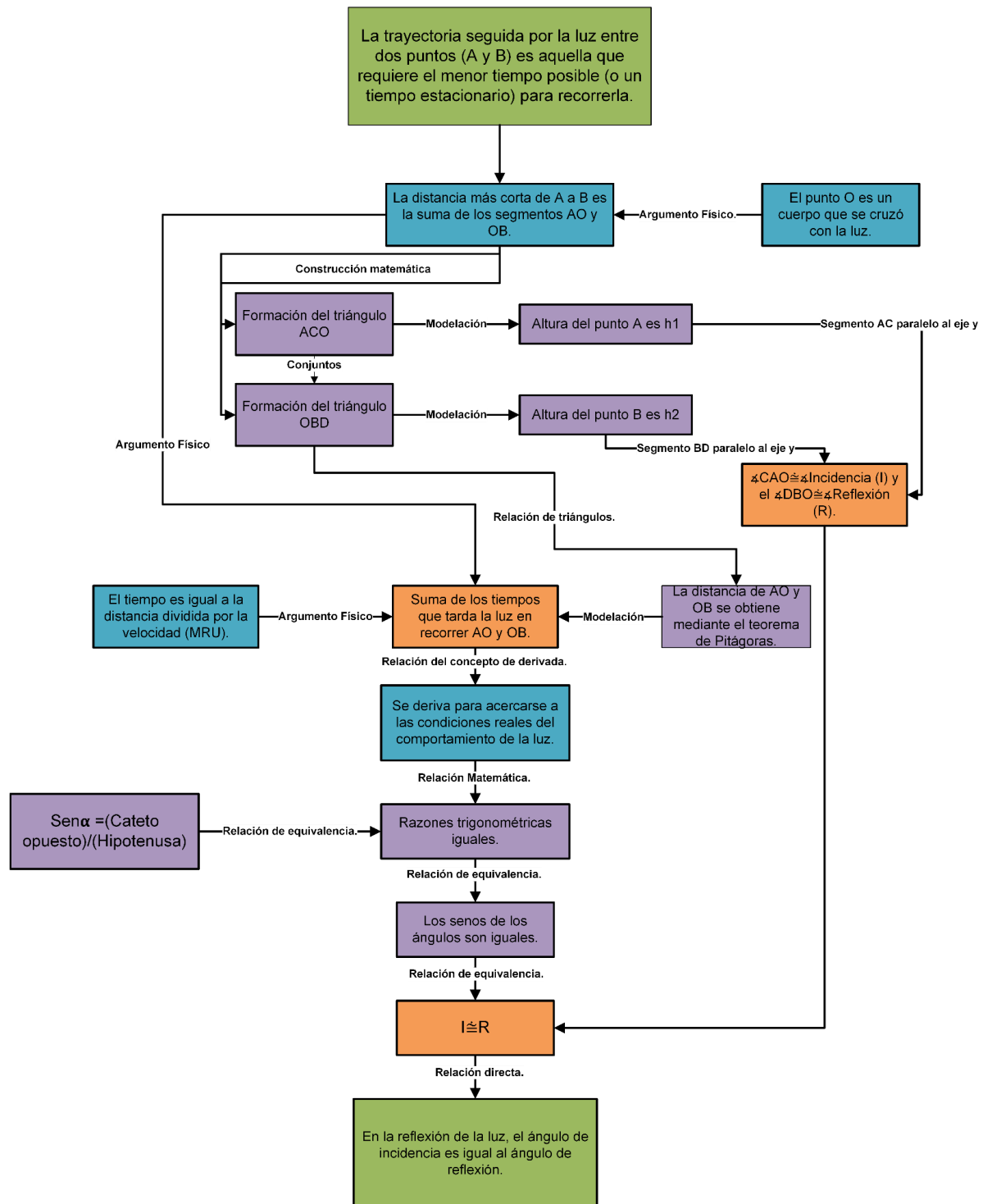
$$\text{Sen}(I) = \text{Sen}(R) \rightarrow I \cong R \quad \text{Q.E.D}$$

La igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión refleja una simetría fundamental en la propagación de la luz, garantizando que la trayectoria siga el camino de tiempo mínimo.

El razonamiento se muestra en el *grafo 3*.

Grafo 3

Razonamiento de la reflexión de la luz utilizando el principio de Fermat.



Nota: Elaborado en junio del 2025.

Análisis cualitativo de las formas de razonamiento

El análisis del razonamiento que se emplea en cada una de las demostraciones estará directamente relacionada con el análisis de los grafos propuestos, enfocándose en:

- Estructura argumentativa: Se observa la continuidad temática de los argumentos empleados en el desarrollo de la demostración matemática, esto enfocado en cómo los pensadores decidieron tomar ciertas interpretaciones matemáticas y físicas en su razonamiento.
- Estructura y secuencia lógica del razonamiento: Los razonamientos deben de vislumbrar una estructura interna, que se pueda relacionar al momento de tratar un mismo tipo de conocimiento, esto se enfocará en cómo se estructura las ideas y permiten su concatenación entre las mismas.
- Relevancia de los argumentos Físicos: Los argumentos Físicos toman un rol central en el desarrollo de la demostración, ya que al estar en un contexto físico, es necesario analizar de qué manera estas ideas permiten validar procesos matemáticos en el contexto de la Física.

Como lo ha señalado Duval (2017), más allá de las propias premisas, es necesario analizar la estructura interna que se le otorga al razonamiento. En este caso, resulta fundamental extrapolar la demostración hacia una estructura que permita contrastar las diferentes formas de razonamiento presentadas. Se examinarán el estatus teórico y el estatus operativo, definido a partir del primero, con el propósito de clasificar la función y el contenido de las diversas premisas y, a su vez, comprender su papel dentro de la estructura general del razonamiento.

Se destaca que estas demostraciones no son únicamente una abstracción matemática, sino que parte de una base empírica¹⁷; por ende, resulta interesante observar *el rol que cumple*

¹⁷ Esto se refiere a las observaciones de los fenómenos naturales, como ejemplo están las leyes de Kepler que parte de las observaciones de Tycho Brahe.

un argumento Físico dentro de la estructura del razonamiento y la continuidad temática (la secuencia de ideas y argumentos estructurados). Esto con la intención de identificar cómo esta relación configura formas específicas de estructurar el razonamiento argumentativo.

Pensamiento griego.

En el antiguo pensamiento de los griegos, en las demostraciones geométricas, solo se podía usar regla y compás, “es posible que la exigencia de la utilización exclusiva de la regla y el compás no se considerara desde el principio y suele atribuirse a Platón la imposición de este requisito” (Ayerbe Toledano, J. M., p. 25, 2025) esto limitaba ciertamente la forma en como se concibió la matemática y las formas de abstracción. Por contraparte, el razonamiento de Eratóstenes no correspondía exactamente a una demostración como lo planteaban los griegos, esto se asocia a que su razonamiento se emplea un contexto físico; sin embargo, esta concatenación de ideas apela a la estructura de una demostración.

La demostración de Eratóstenes cuenta con: dos argumentos Físicos, dos conjeturas y tres proposiciones. Esto implica que su razonamiento fue bastante corto y preciso. Se denota que esto parte de una observación del mundo real, por ende, el filósofo ya conocía la distancia de las dos ciudades y el ángulo de incidencia.

Cuadro 3

Organización y análisis de premisas del grafo 1

#	<i>PREMISA</i>	<i>Estatus Operatorio¹⁸</i>	<i>Relación en la estructura del razonamiento. (Estatus Teórico¹⁹)</i>
1	La Tierra es esférica.	Hipótesis.	Esta información es una observación empírica, el filósofo no era el único que observaba este hecho, sino que por ejemplo “la primera referencia a la longitud de la circunferencia

¹⁸ Se elige el estatus operativo en esta columna por el hecho de que determina la función de cada una de las premisas.

¹⁹ Se elige el estatus teórico en esta columna y se relaciona a la estructura del razonamiento, por el hecho de que este estatus brinda una claridad de cómo el contenido disciplinario funciona y cómo esto afecta al razonamiento en la estructura y secuencia de pasos, definiendo así mismo al estatus operativo.

			terrestre se encuentra en la obra de Aristóteles Acerca del cielo [Aristóteles, 2015, Libro II, 298 a 16-17, p. 89], en la que se recoge para este parámetro” (Ayerbe Toledano, J. M., p. 50, 2025).
2	Pozo sin sombra en Siena.	Arg. fis. ²⁰	Eratóstenes observó cómo en dos ciudades el comportamiento de las sombras era diferente, por ende, este dato es una observación relacionada con la argumentación Física, brindándole un estatus operatorio de argumento Físico, que se requiere para entender este fenómeno.
3	Los rayos del Sol inciden perpendicularmente con el centro de la Tierra.	Conjetura.	Esta conjetura se valida en (1) y (2), en esta época moderna conocemos que este comportamiento se relaciona con el principio de Fermat, pero el filósofo a través de la observación logró articular una conjetura en el campo de la Física para validar procesos matemáticos.
4	Los rayos del Sol son paralelos.	Conjetura.	Esta conjetura se valida por (1), (2) y (3), es necesario esta estructura por el hecho de que no se logra sustentar solo con la conjetura (3), por el hecho de la interpretación Física.
5	Los segmentos SD y CA son paralelos.	Proposición.	Esto es una proposición, que se plantea a través del análisis de las conjeturas, por ende, esta premisa es de naturaleza matemática que describe una característica de los rayos de luz.
6	Existe un ángulo en la sombra de un pilar en Alejandría.	Arg. fis.	Este argumento Físico partió de la observación de Eratóstenes a través de la interacción con (3), esto no es una relación de una sola secuencia, al contrario, es una interpretación de los datos; sin embargo, en la secuencia de argumentos sí seguiría cierto orden.
7	$\angle DCA$ y $\angle SDC$ son ángulos congruentes.	Proposición.	Esta proposición se construye a través de los razonamientos que se emplean

²⁰ Se emplea “Arg. fis.” para referirse a “argumento Físico” por cuestiones estéticas y de espacio se ha elegido de esta manera para representarlo.

			al observar el mundo tangible. Esto se soporta en (6).
8	Un arco sobre la superficie de la Tierra.	Tesis.	Esta proposición es el argumento matemático que intuitivamente lleva a la tesis de la demostración, esto requiere haber hecho una secuenciación que permite el modelamiento.

Es interesante poder observar como la construcción de esta demostración no corresponde exactamente a un razonamiento deductivo²¹, pero en su estructura interna representa efectivamente una demostración matemática, esto corresponde a un razonamiento que se observa que moviliza las proposiciones, a través de la concatenación de ideas. Esto se asocia al antiguo pensamiento griego que en ocasiones no se consideraba una demostración en el sentido estricto de la palabra si no se usaban las herramientas de compás y regla. Sin embargo, se considera dentro de este trabajo una demostración, ya que la secuencia lógica de pasos que posee representa un tipo de razonamiento argumentativo validado por la experiencia sensible, se destaca que la estructura del razonamiento argumentativo radica en la confrontación de ideas.

La siguiente pregunta da pie a esta validación como demostración matemática: ¿Es necesario los cálculos para validar el razonamiento de Eratóstenes? Esto resulta muy interesante, por el hecho de que pensar en esta pregunta resalta que, a pesar de la ausencia de la toma de medidas, la estructura del razonamiento no cambia, ya que la observación y la modelación toman un rol característico en el razonamiento del pensador.

²¹ Por lo que se comentó anteriormente del pensamiento griego, los cuales tenían una concepción de demostración limitada a sus herramientas.

Cuadro 4

Análisis del razonamiento de Eratóstenes.

<i>Característica.</i>	<i>Argumentación Matemática en contexto Físico.</i>	<i>Argumentos Físicos en la modelación Matemática.</i>	<i>Razonamientos en la articulación de ideas.</i>
<i>¿La concatenación de ideas permite evidenciar la estructura del razonamiento?</i>	Las ideas matemáticas surgen para validar e interpretar la información sensible. Esto en la abstracción de información que permite validar lo observado.	La observación de Eratóstenes combinado con la teoría se vuelve su argumento Físico, por el hecho de que dedujo a través de la observación un fenómeno que ocurre periódicamente.	La articulación de las ideas físicas con las matemáticas no logran corresponder a un contenido netamente abstracto, sin embargo, en su estructura interna se refleja un razonamiento deductivo.
<i>¿La modelación matemática permite la interpretación del fenómeno físico?</i>	Las ideas matemáticas sirven para calcular y reconocer un conjunto de datos que posteriormente se aplicaron a un razonamiento geométrico. En épocas actuales, esa representación semiótica solo es una abstracción de lo que se observaba.	Los argumentos Físicos sirven para modelar el contexto en que se plantea, dejando la modelación matemática relegada a la representación de estos.	Los argumentos Físicos son la base de la construcción e interpretación de Eratóstenes; sin embargo, el pensamiento espacial que usó corresponde a la modelación matemática analizando el mundo sensible.
<i>¿La interpretación matemática brinda una secuenciación clara de ideas?</i>	Las ideas matemáticas, en este caso, sirven para validar la transición de una idea a otra.	Las ideas matemáticas sirven para simplificar la modelación que se emplea con los argumentos Físicos.	Las ideas matemáticas brindan una estructura sólida al razonamiento que está empleando el pensador al momento de realizar la interpretación física.

Nota: Razonamiento de Eratóstenes usando el grafo, elaborado en septiembre del 2025.

En este caso particular, los dos argumentos Físicos que le acompañan no son leyes físicas, sino, observaciones empíricas de su entorno, las cuales sin esta base no se podría

seguir una continuidad temática, por el hecho de estar relacionadas con la construcción matemática que se está realizando. Las proposiciones que se emplean son del campo de la geometría euclidiana, que se sustentan en estas observaciones. Las dos conjeturas que se presentan parten de la hipótesis y de las observaciones tomadas por Eratóstenes. El *grafo 1*, por ende, muestra un razonamiento más cercano al argumentativo y al cálculo de medidas, más que a una demostración abstracta, sin embargo, en su estructura se presenta un razonamiento que apela a una demostración matemática; cabe resaltar que esto seguramente es debido al pensamiento griego y la forma en cómo concebían la articulación de estas ideas.

Razonamiento de las órbitas de la segunda ley de Kepler utilizando a Newton.

Según Luna Corredor (2023) Johannes Kepler junto a los estudios de Tycho Brahe lo llevó a estudiar el movimiento de los planetas, más particularmente el de Marte. Esto, por ende, es una demostración matemática que tiene una abstracción de información de los datos tomados, esta en particular fue un modelo que realizó Newton (Feynman, R. P., Goodstein, D. L., & Goodstein, J. R., 1999) y su razonamiento se expresa en el *grafo 2* el cual posee: cuatro argumentos Físicos, diez proposiciones, y tres conjeturas.

Los dos primeros argumentos Físicos (sin contar con la hipótesis, la cual se podría considerar como tal) son la base de la construcción matemática que se realiza, ya que no parte de una abstracción de un objeto matemático, sino que se crea un *modelo* (entendido como una construcción mental) a partir de la interpretación Física. Esto permite realizar “puntos” los cuales representan planetas y segmentos los cuales son distancias.

El tercer argumento Físico es sustentado por el corolario I (cuarto argumento Físico) de los principios de Newton, que valida la construcción del paralelogramo (conjetura) y el movimiento de la Tierra. Este resulta muy particular, pues sin este argumento Físico una de las conjeturas estaría incompleta por el hecho de no tener un sustento teórico fuerte, ya que la

secuencia estructurada de argumentos no es propiamente de las matemáticas, sino de la Física²².

Nótese que el primer argumento Físico se vuelve a presentar en una de las proposiciones finales, ya que se utilizó para validar el criterio ALA (Ángulo, Lado, Ángulo) lo que implicaría que están presentes en toda la demostración y en la construcción de los argumentos.

Cuadro 5

Organización y análisis de premisas del grafo 2.

#	<i>PREMISA</i>	<i>Estatus Operatorio</i>	<i>Relación en la estructura del razonamiento. (Estatus Teórico)</i>
1	El planeta recorre la misma distancia en el mismo tiempo.	Hipótesis.	Las interpretaciones fueron realizadas con base en las observaciones de Tycho Brahe. Esta interpretación y observación detallada del movimiento de los astros, es de suma importancia para la modelación. Esto en su estatus teórico funge el rol de un movimiento rectilíneo uniforme, es interesante observar como la hipótesis se está sustentando desde la teoría de la Física.
2	Movimiento de la Tierra.	Arg. fis.	Este argumento Físico resultante no es ingenuo, pues se refiere al movimiento natural de la Tierra (estatus teórico) lo cual históricamente nos centra en un pensamiento heliocentrista.
3	Existe un segmento $TT_1 \cong T_1T_2$	Arg. fis.	Este argumento Físico define primeramente el espacio en donde se va a desarrollar la demostración matemática, permitiendo vislumbrar un primer comportamiento fenomenológico de lo observado, realizando una modelación matemática (estatus teórico). Esta modelación matemática no surge de lo abstracto, sino de una

²² Resulta interesante observar si ¿el argumento Físico funciona como un tercer enunciado o propiamente cumple el rol de una premisa que impulsa la construcción mental de un objeto matemático?

			simplificación del mundo real; por ende, el estatus operatorio no es uno de los elementos de las categorías usuales, ya que a pesar de que esto podría resultar en una conjetura o proposición, no se vincula por el motivo de que su contexto teórico está directamente relacionado con la observación física.
4	$TT_1 \cong T_1T_2 \cong T_1T_3$	Conjetura.	El valor teórico está sujeto a la intersección que ocurre con tres argumentos Físicos (3, 5, 6) formando la conjetura de congruencia entre tres distancias representadas por segmentos. Resulta interesante observar cómo la modelación matemática está siendo sustentada por la teoría de la Física, esta conjetura nace de la interpretación de tres argumentos Físicos y no de proposiciones, demostrando la naturaleza distintiva de este tipo de demostraciones, esto se relaciona a lo comenta Duval (2017) los razonamientos argumentativos no presentan una estructura clara, estos tres juegan con las compatibilidades que pueden presentar, con la intención de convencer a su público de la validez de esta conjetura, respetando así mismo su continuidad temática.
5	La fuerza gravitacional del Sol cambia la dirección de T_1 a T_2 por T_1 a T_3 .	Arg. fis.	Este argumento Físico se sustenta en el Corolario I de los Principios de Newton (6), debido a la relación entre los cuerpos y su movimiento original. Su estatus teórico se ubica en el campo de la física, ya que está relacionado con la observación de las interacciones entre cuerpos.
6	COROLLARY I. A body by two forces conjoined will describe the diagonal of a parallelogram, in the same time that it would describe the sides, by those forces apart.	Arg. fis.	Esta premisa se fundamenta en los Principios de Newton y, por tanto, en la teoría física que describe la interpretación del movimiento de los planetas. Este apartado valida directamente la premisa (10), ya que en la estructura del razonamiento argumentativo cumple una función

			epistémica de condición necesaria: desde la teoría, debe ser verdadera. Dentro de los pasos del razonamiento, esta premisa resulta fundamental para estructurar adecuadamente el argumento.
7	Triángulo STT_1 .	Proposición.	Se realiza una modelación matemática sustentada en la premisa (4), ya que es posible unir los puntos mediante una línea que representa distancias. Se resalta que esta es una construcción geométrica y, por ende, posee una naturaleza matemática (estatus teórico). En la secuenciación de los pasos, esto aporta a la continuidad temática una estructura que permite la comparación.
8	Triángulo ST_1T_2 .	Proposición.	
9	Triángulo ST_1T_3 .	Proposición.	
10	Creación de paralelogramo $AT_1T_2T_3$.	Conjetura.	Esta construcción es de naturaleza geométrica (estatus teórico) y se sustenta en la premisa (6), la cual brinda un estatus epistémico necesario para que la secuenciación de pasos no incurra en ignorar los dos niveles de organización del razonamiento. En este segundo nivel se otorga una estructura válida al argumento desde la perspectiva teórica. Además, la construcción antecede a las premisas (7) y (8), que constituyen la base para continuar con la articulación de ideas. Obsérvese que, al estar claro el objetivo, se evidencia una comprensión profunda de la utilidad de las conclusiones intermedias.
11	Creación de dos triángulos STT_1 y $T_1T_2S_2$.	Conjetura.	Esta premisa es una construcción geométrica (estatus teórico) que se sustenta a partir de las premisas (8), (9) y (4). Nótese que se fundamenta únicamente en proposiciones y conjeturas, ya que, dentro de los pasos del razonamiento, representa un elemento abstracto.
12	Segmento T_3E y T_2D son iguales y son alturas de los triángulos	Proposición.	Esta construcción es de naturaleza netamente geométrica y parte de la

	STT ₁ y ST ₁ T ₂ .		premisa (10), la cual, en la secuenciación de ideas, aporta una base sólida para introducir dos aspectos geométricos completamente relevantes: la definición de altura y de base, los cuales se relacionan con la fórmula del área de un triángulo. Por ende, esto constituye una premisa dentro del razonamiento. Asimismo, se retoma la premisa (6), dado que es el movimiento el que se está representando.
13	Área de triángulos STT ₁ y ST ₁ T ₂ son iguales.	Proposición.	Se asume lo establecido en la premisa (12); por ende, las áreas serán iguales. El tercer enunciado le otorga un estatus operativo, ya que emplea la fórmula del área de un triángulo para definir dicha igualdad, utilizando la premisa (12) como sustento para validarla dentro de la concatenación de ideas.
14	$\angle S_1T_1T \cong \angle T_2T_1S_2$	Proposición.	Se realiza un reconocimiento de las propiedades de la congruencia a partir de la premisa (4), además de retomar otros elementos previos para poder avanzar. Resulta interesante observar cómo la continuidad temática permite vincular todas las premisas de forma ordenada y presente en todo momento; no se deja de lado lo anterior, sino que se emplea en el momento necesario.
15	$\angle TS_1T_1 \cong \angle T_1S_2T_2$	Proposición.	
16	Triángulos STT ₁ $\cong$ T ₁ T ₂ S ₂	Proposición.	
17	Altura de triángulos STT ₁ y T ₁ T ₂ S ₂ son iguales.	Proposición.	A partir de la construcción anterior, se puede deducir que, al tener alturas iguales y una base compartida, el área de los dos triángulos correspondientes a las premisas (8) y (9) será igual.
18	Área de triángulos ST ₁ T ₂ y ST ₁ T ₃ son iguales.	Proposición.	
19	Triángulos STT ₁ y ST ₁ T ₃ tienen la misma área.	Tesis.	A partir de las premisas (18) y (13) se establece un orden adecuado que permite aplicar la transitividad entre las áreas de los triángulos. Esto aporta validez a la argumentación, ya que se encuentra sustentada en un conjunto de premisas que logran concatenar coherentemente estos elementos.

20	Área de ese espacio recorrido unido con el vector será la misma.	Tesis.	No es suficiente la conclusión establecida en la premisa (19); es necesario también expresarla en un lenguaje físico, relacionado con el fenómeno que se está demostrando.
----	--	--------	--

Nota: El cuadro a través de su estructuración de las ideas, pone de manifiesto una posible utilidad de los argumentos Físicos. Elaborado en octubre del 2025.

A través de este análisis se puede destacar como el razonamiento de Kepler representa un razonamiento deductivo, esta demostración es de naturaleza geométrica y permite validar una experiencia sensible (se recalca que estas observaciones requieren demasiado tiempo) a través de una abstracción matemática.

Cuadro 6

Análisis del razonamiento de la demostración de la segunda ley de Kepler.

<i>Relación en la estructura interna de la demostración.</i>	<i>Argumentación Matemática en contexto Físico.</i>	<i>Argumentos Físicos en la modelación Matemática.</i>	<i>Razonamientos en la articulación de ideas.</i>
<i>¿La concatenación de ideas permite evidenciar la estructura del razonamiento?</i>	Las ideas matemáticas funcionan para estructurar la secuencia lógica de pasos, que es necesario para la estructuración del razonamiento.	Los argumentos Físicos son esenciales en el desarrollo de la modelación matemática, que justifica y adquiere un nivel mayor que una simple justificación ²³ . Por ejemplo, en la premisa (6) funge como argumentos que permite la construcción de un paralelogramo en el movimiento planetario.	Al articular las ideas matemáticas con los argumentos Físicos, se crea un razonamiento que permite la simplificación de elementos físicos a un modelo matemático que valida ciertas propiedades del movimiento planetario.
<i>¿La modelación matemática permite la interpretación del fenómeno físico?</i>	Las ideas matemáticas simplifican el	La modelación matemática funciona como un mediador	La modelación matemática funge como un modelo de

²³ Otra opción, es que cumpla el rol de un tercer enunciado, ya que se desprenden los contenidos y funciona como puente teórico entre premisas.

	movimiento de los planetas a una construcción mental en figuras básicas. Como señalan Perales y Jiménez (2002) la imagen, en este caso representada en construcciones geométricas, se vuelve una condición necesaria para el avance progresivo de la demostración.	semiótico de las ideas físicas a la construcción matemática, y en su contraparte, el contexto físico permite un sustento teórico que da pie a la demostración matemática, sin estos dos elementos interactuando es poco problema que se logre realizar la demostración en el contexto de la Física.	abstracción, que permite concatenar las ideas en un razonamiento deductivo. Combinando la estructura matemática con las ideas físicas que se logran observar.
<i>¿La interpretación matemática brinda una secuenciación clara de ideas?</i>	La matemática permite llevar una estructura clara en la secuencia de ideas en la demostración.	La matemática brinda una estructura de validación en la argumentación en los contenidos físicos.	Las ideas matemáticas dejan en visto la estructura lógica del razonamiento, permitiendo estructurar una demostración matemática.

Nota: Elaborado en octubre del 2025.

Propiedades de la reflexión de la luz.

A comparación de las otras dos demostraciones, que se desarrollaban netamente en la geometría, esta en particular utiliza el cálculo diferencial. El *grafo 3* posee: cuatro argumentos Físicos, ocho proposiciones y tres conjeturas. La estructura de esta demostración utiliza primordialmente un lenguaje formal, la continuidad temática se centra en la formación de pasos válidos dentro del cálculo, utilizando como justificación teórica el principio de Fermat (argumentos Físicos). Además, se destaca que la derivada se ha usado dentro de la disciplina para justificar el cambio de una variable respecto a otra, usualmente en la física, es respecto al tiempo.

Esta demostración es relativamente bastante corta, pero utiliza elementos como el teorema de Pitágoras y definiciones de la geometría. Los argumentos Físicos también están presentes en toda la demostración, siendo uno de estos un camino transitorio para poder continuar con la secuencia de pasos. La demostración, por ende, es una abstracción de un fenómeno natural, el cual utiliza el principio de Fermat para poder validar la construcción matemática que se está realizando.

Cuadro 7

Organización y análisis de premisas del grafo 3.

#	<i>PREMISA</i>	<i>Estatus Operativo.</i>	<i>Relación en la estructura del razonamiento. (Estatus Teórico)</i>
1	La trayectoria seguida por la luz entre dos puntos (A y B) es aquella que requiere el menor tiempo posible (o un tiempo estacionario) para recorrerla.	Hipótesis.	La hipótesis es con base al principio de Fermat, que describe el comportamiento de la luz; su contenido representa un aspecto teórico de la Física.
2	El punto O es un cuerpo que se cruzó con la luz.	Arg. fis.	El punto O se refiere a una descripción física de qué es lo que sucede cuando un objeto es atravesado por la luz; entre más denso cambia su longitud de onda, similar a como pasa con el agua.
3	La distancia más corta de A a B es la suma de los segmentos AO y OB.	Arg. fis.	Su contenido se basa en la Física, brindando un estatus teórico propiamente de dicha teoría, y un estatus operatorio de argumento Físico. Este argumento Físico se sustenta en (1) y (2).
4	Formación del triángulo ACO	Proposición.	A través de la premisa (3) se logra realizar la construcción matemática que se predispone por la interpretación física que se le brinda.
5	Formación del triángulo OBD	Proposición.	
6	Altura del punto A es h1	Proposición.	Se utiliza una construcción geométrica para definir esto, siendo de una naturaleza matemática.
7	Altura del punto B es h2	Proposición.	
8	$\angle CAO \cong \angle$ Incidencia (I) y el $\angle DBO \cong \angle$ Reflexión (R).	Conjetura.	Esta conjetura se logra a través del análisis de la premisa (4) y (5). Esta relación no es ingenua, pues se está

			realizando una modelación desde un hecho fáctico.
9	Suma de los tiempos que tarda la luz en recorrer AO y OB.	Conjetura.	Esta conjetura tiene un tratamiento diferente, pues a primera vista parecería ser un argumento Físico, sin embargo, es una conjetura desde la secuencia de ideas matemáticas y el sustento físico.
10	El tiempo es igual a la distancia dividida por la velocidad (MRU).	Arg. fis.	Un argumento Físico que emplea una fórmula matemática construida desde la observación.
11	La distancia de AO y OB se obtiene mediante el teorema de Pitágoras.	Proposición.	A través del análisis de los triángulos de la premisa (4) y (5) se logra definir un proceso matemático que ayuda a la resolución del problema planteado.
12	Se deriva para acercarse a las condiciones reales del comportamiento de la luz.	Arg. fis.	Esto pareciera ser una idea matemática, sin embargo, a pesar de usar el concepto de derivada, esta es aplicada desde un concepto físico, claramente se está usando un pensamiento variacional para proponer esta premisa.
13	$\text{Sen} \alpha = (\text{Cateto opuesto}) / (\text{Hipotenusa})$	Proposición.	Se trae a colación un argumento matemático para construir el razonamiento.
14	Razones trigonométricas iguales.	Proposición.	Si las razones trigonométricas son iguales implica la premisa (15) esto por relaciones de equivalencia.
15	Los senos de los ángulos son iguales.	Proposición.	Se llega a este resultado gracias a la premisa (14).
16	$I \cong R$	Conjetura.	Ya construida la premisa (15) se logra definir a través de un análisis en los elementos de la ecuación que los ángulos de los senos deben de ser congruentes.
17	En la reflexión de la luz, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.	Tesis.	Con ello, se define la tesis, el cual es un hecho físico.

Nota: Elaborado en octubre del 2025.

Se destaca que el *grafo 3* es el intento intelectual de reconocer el tipo de razonamiento que se está empleando, sin limitarse únicamente a replicar la fórmula, ya que la secuencia de pasos que se brinda es clara; sin embargo, se intentó observar la estructura interna que posee el razonamiento.

Cuadro 8

Análisis del razonamiento de la demostración de la reflexión de la luz.

<i>Relación en la estructura interna de la demostración.</i>	<i>Argumentación Matemática en contexto Físico.</i>	<i>Argumentos Físicos en la modelación Matemática.</i>	<i>Razonamientos en la articulación de ideas.</i>
<i>¿La concatenación de ideas permite evidenciar la estructura del razonamiento?</i>	Las ideas matemáticas son la principal forma de redacción y comunicación en esta demostración.	Los argumentos Físicos representan el contexto donde se desarrolla la demostración, por ende, base de la estructura que se brinda.	La combinación de ideas matemáticas y argumentos Físicos permiten visualizar la estructura del razonamiento.
<i>¿La modelación matemática permite la interpretación del fenómeno físico?</i>	La modelación matemática en esta demostración representa el paso principal, ya que es necesario realizar un modelo del contexto presentado.	Los argumentos Físicos sirven para lograr modelar el fenómeno físico a través de las ideas matemáticas. Esto observado en la <i>imagen 6</i> .	Las ideas matemáticas permiten una simplificación en el contexto, logrando interpretar la observación física de una manera más simplificada.
<i>¿La interpretación matemática brinda una secuenciación clara de ideas?</i>	Las ideas matemáticas logran establecer una secuenciación clara de las premisas empleadas.	Los argumentos Físicos sirven para modelar y estructurar la demostración matemática de manera contextualizada.	Las ideas matemáticas permiten construir una estructura clara en la secuencia del razonamiento, permitiendo validar a través de los argumentos Físicos la demostración.

Nota: Elaborado en octubre del 2025.

Análisis general.

Se realizará un cuadro comparativo entre las demostraciones, utilizando los análisis previos. Este cuadro tendrá en cuenta los tres ítems antes mencionados, que den claridad a una forma de organizar el conocimiento presentado. Esto se presenta en la *tabla 1*.

Cuadro 9

Análisis de las demostraciones.

<i>Característica observada.</i>	Demostración de Eratóstenes.	Demostración Kepler.	Demostración Fermat.
Intención de los argumentos Físicos.	Cumplen una función de puente entre los conocimientos matemáticos y los contenidos teóricos de la Física, siendo validados fundamentalmente a través de la experiencia y toma de medidas de ángulos y distancias.	Constituyen el sustento de la modelación geométrica desarrollada, estando presentes a lo largo de toda la demostración. Su función es otorgar validez a construcciones que, si se aborda únicamente desde una perspectiva matemática, carecería de sentido o pertinencia.	Los argumentos Físicos representan la base del contexto que se está empleando.
Construcción argumentativa .	En el marco de la lógica clásica, cumplen una función de puente entre los conocimientos matemáticos y los contenidos teóricos de la Física. Su validez se sustenta principalmente en la experiencia empírica y en la aplicación de cálculos rigurosos, manteniendo un estrecho vínculo con el lenguaje natural como medio de articulación y expresión del razonamiento.	La estructura de los argumentos y las construcciones matemáticas se encuentra estrechamente entrelazada con los argumentos Físicos presentes. Esta articulación da lugar a una construcción discursiva que posibilita la validación matemática.	En contraposición de las otras dos demostraciones que se emplea el lenguaje natural para validar ciertos procesos del razonamiento por la naturaleza del conocimiento, en este caso de la geometría Euclidiana; esta demostración utiliza en su mayoría un lenguaje formal, por ende, el grafo tuvo que ser centrada en la forma de razonar.
Estructura del razonamiento.	Su estructura corresponde a la forma de un silogismo	La demostración se fundamenta predominantemente en un	Emplea un razonamiento de carácter deductivo, basado principalmente en

	aristotélico. No obstante, al estar vinculados con la argumentación, no presentan una configuración rígida o invariable; más bien, se caracterizan por un contenido que, aunque flexible en su disposición, se orienta hacia la construcción de una demostración.	razonamiento deductivo, desarrollado principalmente en el ámbito de la geometría.	el cálculo diferencial. En consecuencia, la construcción del razonamiento se apoya en fórmulas matemáticas que conducen a enunciados derivados menos evidentes que aquellos propios de la geometría.
--	---	---	--

Nota: Elaborada en agosto del 2025.

A partir del análisis preliminar realizado, se evidencia que la construcción de grafos constituye una herramienta esencial para representar las formas de razonamiento empleadas por los autores de las demostraciones, así como para identificar sus diferencias y cambios estructurales; por ello, adquiere un carácter fundamental para la comprensión de la secuencia de la estructura. En la construcción propuesta, el grafo permite reconocer el número de proposiciones, argumentos Físicos y conjeturas. Cabe señalar que se trata de un modelo no lineal, susceptible de distintas interpretaciones según la perspectiva adoptada. En este sentido, la construcción particular de estos grafos busca resaltar la intersección entre la Física y la demostración matemática, junto con su estructura argumentativa.

Para Godino y Regio (2001) la demostración tiene varias interpretaciones respecto al campo de conocimiento que se está empleando, así mismo en las ciencias naturales la palabra demostración “se basa principalmente en prácticas argumentativas de tipo sustancial” (p. 409) respecto a esto, tiene sus bases en la observación y en la construcción empírica del conocimiento. Respecto a los procesos de validación matemática, los autores comentan “La argumentación matemática presenta, en los dominios científicos, connotaciones de prueba empírica.” (p. 409) por ende, el tratamiento de información que se debe de realizar a una demostración matemática es diferente cuando se emplean argumentos Físicos.

Los argumentos Físicos desempeñan un papel fundamental en la construcción de estas demostraciones. Si bien no son de carácter estrictamente matemático, pues no corresponden a un objeto matemático abstracto específico²⁴, el tratamiento de la información que se realiza con esto sí responde a un razonamiento deductivo a simple vista —con algunas excepciones en los argumentos Físicos muy específicas, como se puede presentar en el caso de Eratóstenes—, a pesar de que su construcción teórica se basa en la observación de fenómenos naturales.

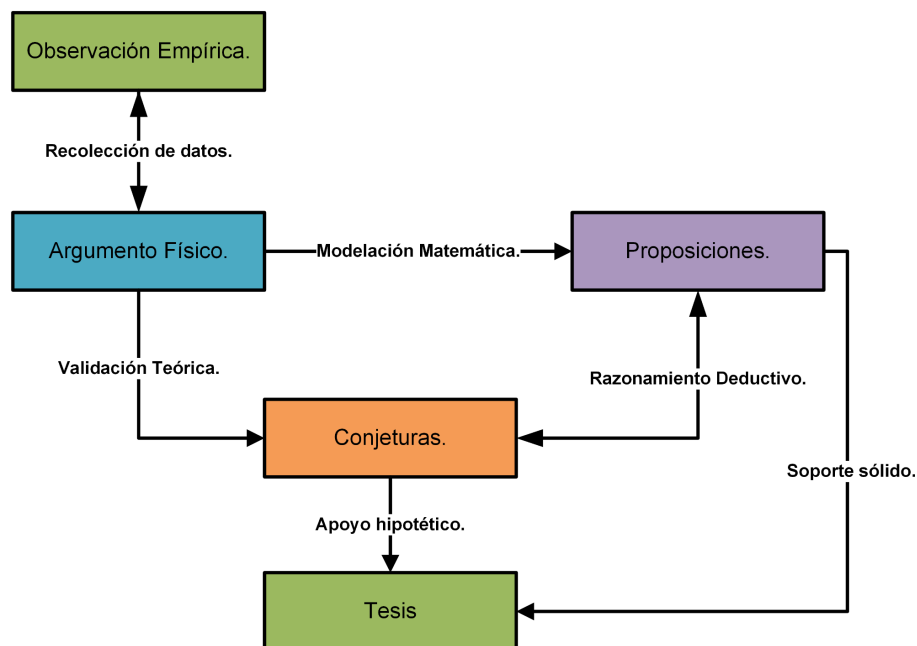
En este sentido, resulta particularmente relevante destacar su importancia dentro de la construcción matemática que aquí se desarrolla. A diferencia de otras demostraciones que parten de una concepción cognitiva y abstracta, estos argumentos se encuentran estrechamente vinculados a una interpretación del mundo real, lo que legitima determinadas acciones matemáticas dentro del proceso lógico del razonamiento. Esto no es un hecho trivial, ya que, al referirnos a una ciencia, se parte de una base fáctica. Asimismo, la manera en que se argumenta para persuadir a un interlocutor depende directamente de la estructura lógica del razonamiento empleado.

Así, el argumento Físico constituye la base interpretativa que sustenta la organización de las premisas necesarias para demostrar la tesis; sin su presencia, el proceso carecería de solidez al momento de comprender una demostración matemática en el contexto de la Física, y los argumentos propuestos no seguirán la secuencia propia del razonamiento. Es necesario subrayar que, como forma de estructuración del pensamiento, la validez de estos argumentos radica en la intersección de dos procesos cognitivos: la interpretación física y la resolución matemática. A partir de este análisis se destaca en el *grafo 4* la cual brinda una estructura general de los razonamientos dentro de las demostraciones matemáticas en el contexto de la Física.

²⁴ Por el hecho de que las demostraciones están representando un fenómeno natural.

Grafo 4

Estructura general con base a la extrapolación de los datos.



Nota: Se ha elaborado este cuadro a partir de las observaciones que se realizan por cada demostración, y realizando un contraste entre estas mismas. Resulta interesante, poder extrapolar las diversas formas de tratamiento que se le brinda a las demostraciones. Se resalta que añadir al estatus operatorio el valor de “Argumento Físico” representa un elemento clave en el desarrollo del cuadro, esto debido a la naturaleza de las mismas premisas. Elaborado en junio del 2025.

La construcción que se presenta explicita los pasos generales que se puede deducir a partir del análisis:

- La *observación empírica* está relacionada con la hipótesis, la cual en las demostraciones estudiadas parte desde las observaciones que se realizan al entorno. Está, al mismo tiempo, se conecta con un bicondicional con los *argumentos Físicos*²⁵, ya que esta representa la interacción con el conocimiento teórico y su interpretación.

²⁵ Se emplea el uso de cursiva para distinguir cuando se habla de argumento Físico como elemento teórico y *argumento Físico* como parte de la estructura interna de las demostraciones, haciendo referencia al recuadro en el *grafo 4* con el mismo nombre.

- Los *argumentos Físicos* se relacionan de manera directa con las *proposiciones* y *conjeturas*. La primera cumple la función de modelación matemática dentro del contenido disciplinario, lo que permite construir elementos clave con validación lógica; y la segunda permite una validación teórica a las estructuras matemáticas creadas.
- Las *proposiciones* están conectadas con las *conjeturas* que representan la forma estructurada del razonamiento deductivo. Al mismo tiempo, se entrelaza con la *tesis*, el cual brinda un soporte sólido para la estructura del razonamiento.
- Las *conjeturas* soportan la *tesis* como un apoyo hipotético construido a partir de los argumentos empleados.

Nótese que la construcción permite evidenciar la estructura de las demostraciones, mostrando cómo dicha estructura incorpora la argumentación dentro del proceso de resolución del problema, por el hecho de emplear la explicación en la demostración, relacionándola con una demostración que también explica. Sin la secuencia adoptada, este tipo de razonamiento carecería de justificación, y la articulación de todos los elementos perdería su sentido.

Planteamiento de la secuencia didáctica

El documento pretende evidenciar cómo la demostración matemática permite estructurar formas de argumentar más refinadas dentro del campo de la Física, esto usando como base las demostraciones realizadas y el análisis cualitativo de las mismas. Se resalta que la intención de este documento es una propuesta, por ende, no se aplicará.

Se pretenden plantear preguntas que cumplan con la característica de: esenciales, deseables e indeterminadas. La estructura de esta secuencia será inspirada en el modelo que plantea Díaz-Barriga, Á. (2013) sin embargo, se modificará para que sea más cercano al

contexto universitario y al contenido con que se está trabajando. Se realizará una ficha representada en el *cuadro 9*, donde se describen las generalidades que se observan en la secuencia didáctica.

Cuadro 10

Ficha de la secuencia didáctica.

<i>FICHA DE SECUENCIA DIDÁCTICA</i>	
<i>Característica</i>	<i>Descripción</i>
<i>Contenidos.</i>	Se abordarán tres procesos físicos: la medición de la Tierra, el movimiento planetario y la reflexión de la luz, cada uno mediado por la demostración matemática que le corresponde. El análisis se centrará en la argumentación que cada individuo puede elaborar a partir del contexto y de los conocimientos teóricos involucrados. ● La medición de la Tierra: Se enfocará en el razonamiento y la observación que realiza Eratóstenes para poder cuantificar la circunferencia de la Tierra. Luego se generaliza con la demostración matemática. ● Movimiento planetario: Se analizará la construcción matemática y el fenómeno físico. ● Reflexión de la luz: Se analizará y evaluará los procesos experimentales con la abstracción y modelación matemática.
<i>Grado académico.</i>	Se plantea que el grado académico sean estudiantes universitarios, particularmente Licenciados en Física, sin embargo se puede aplicar a carreras que estudien contenidos Físicos. Se puede extrapolar a otros grados académicos con las debidas adaptaciones.
<i>Unidad Temática.</i>	Razonamiento argumentativo dentro de las interpretaciones de una demostración matemática en el campó de la Física.
<i>Finalidad.²⁶</i>	● Construir estructuras de argumentación que permitan a los individuos desarrollar un razonamiento sólido y generar expansiones discursivas coherentes. ● Desarrollar y refinar la abstracción matemática integrándose en el análisis de fenómenos del mundo real, utilizando como razonamiento la estructura de una demostración matemática.

²⁶ La finalidad se tomará como la intencionalidad dentro de las actividades de manera global.

<i>Objetivo de investigación.</i> ²⁷	● Reconocer la incidencia de la demostración matemática en los procesos argumentativos de los futuros profesores y profesoras de Física.
<i>Objetivo de aprendizaje.</i> ²⁸	● Estructura argumentos para validar razonamientos matemáticos en demostraciones matemáticas construidas en el campo de la Física.
<i>Tiempo</i>	Aproximadamente siete horas.
<i>Materiales.</i>	● Video proyector: Para las actividades que requieran una mejor visualización en el contexto matemático. ● Guía impresa de la secuencia didáctica. ● Tablero y marcadores. ● Espacio físico adecuado (salón de clase). ● Láser y espejo (demostración empírica). ● Hojas de bloc y grapadora.
<i>Momentos didácticos.</i>	Se plantea tres momentos didácticos no lineales que serán guiados por el docente: ● Generar un espacio de discusión en el que los participantes puedan expresar ideas y argumentos que respalden y validen sus observaciones. ● Analizar demostraciones matemáticas aplicadas a fenómenos físicos, precedidas por el estudio y comprensión del contexto físico de la situación. ● Elaborar textos que reflejan creencias, ideas y estructuras propias del razonamiento argumentativo.
<i>Conocimientos previos.</i>	Para la realización de la guía es recomendable que los y las estudiantes hayan visto los cursos de: ● Física I. ● Cálculo I – Cálculo diferencial. ● Dos cursos relacionados con la interpretación de fenómenos físicos, sin importar si es en la línea didáctica o disciplinaria.

Nota: Elaborado en junio del 2025.

El *cuadro 9* presenta todos los elementos básicos de la secuencia didáctica que se propone, seleccionando algunos elementos principales que se consideran en la estructura interna del contenido. Se plantea diferenciar tres tipos de preguntas:

²⁷ El “objetivo de investigación” consiste, desde una perspectiva académica, en definir qué se quiere observar y qué se espera encontrar. Dentro de una investigación es necesario tener claro qué se desea analizar, así como la manera en que el proceso se va estructurando en el aula de clase.

²⁸ El “objetivo de aprendizaje” se relaciona directamente con las habilidades que se espera que el o la estudiante logren construir al momento de desarrollar la secuencia didáctica.

- *Preguntas de mapeo (PM)*: Este tipo de preguntas están relacionadas con el conocimiento que el individuo posea y la forma en cómo estructura sus argumentos en una etapa inicial y posterior.
- *Preguntas estructuradas (PE)*: Este tipo de preguntas son para reforzar y guiar al individuo a la interpretación de las demostraciones matemáticas.

Se propone una evaluación de carácter cualitativo que permita contrastar los conocimientos adquiridos tras la implementación de la nueva forma de análisis presentada. Esta evaluación se llevará a cabo durante la resolución de las preguntas planteadas. Para ello, se establecerá una etapa inicial en la que el o la estudiante exponga su conocimiento actual y su forma de razonamiento. Posteriormente, se presentarán preguntas que fomenten la reflexión y el análisis crítico. Se dividirá la secuencia en tres partes: Introducción, Desarrollo y Cierre.

Introducción – Análisis físico

La introducción es el espacio principal de mapeo y exploración de los contenidos disciplinarios, esto permitirá explorar los conocimientos previos y las estructuras argumentativas que los y las estudiantes poseen posteriormente al estudio de las demostraciones.

- ***Primer acto***: Conversatorio sobre los contenidos temáticos que se presentarán, esto no será exactamente una pregunta, sino que se explicará la dinámica y la ficha de la secuencia didáctica.

Es necesario explicar cómo se va a proceder, ya que se tomarán datos, esto representa una ética dentro de la investigación, por ende, será necesario (si se realizara un trabajo de investigación respecto a esto) realizar una autorización directamente de los y las estudiantes para realizar el análisis posterior con los datos obtenidos. Luego de ello, se deberá explicar la

metodología y la intención del estudio, esto no son simples actos protocolarios, sino una estructura institucional que permita un debido proceso.

- *¿Qué se entiende por demostración matemática en el campo de Física?*²⁹ (PM): Se deberá escribir la idea previa en la guía didáctica, luego de ello se realizará un conversatorio sobre la concepción respecto a la pregunta.

Definir el objeto de estudio es un elemento necesario para continuar en una secuencia de ideas coherentes, no podremos avanzar si no tenemos claro la intencionalidad de esta estructura de los dos campos disciplinarios, por ende, resulta necesario poder realizar un conversatorio donde las ideas previas formen una estructura argumentativa que se socializa entre todos.

- *¿Quién era Eratóstenes y su importancia en el pensamiento griego? (PM) ¿Describe el razonamiento utilizado por él en el momento de medir la circunferencia de la Tierra? Intenta hacer una explicación clara y concreta (PE)* (haciendo referencia a las demostraciones que demuestran y explican): Se realizará una pregunta de mapeo, seguida de una pregunta estructurada, para reconocer el conocimiento que los y las estudiantes tienen del Filósofo y sus logros, seguidos del razonamiento que se emplea. Luego de ello se realizará un conversatorio, para aclarar ideas y luego se procederá nuevamente a escribir (en tal caso que no conozcan este evento) cómo es el razonamiento que empleó Eratóstenes.
- *¿Explicar cómo consideras que Kepler definió la segunda ley? Esta dice: “el radio vector que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.” (PM):* Esta pregunta será exploratoria, la cual permitirá detallar y expresar el razonamiento que uno propiamente realiza al momento de observar un fenómeno físico. Esta

²⁹ Esta pregunta consiste en una pregunta esencial, deseable e indeterminada. Si se requiere saber si lo cumple, su característica principal y general es que no pueda ser respondida por un “sí” o “no” principalmente.

pregunta no es ingenua, pues a pesar de que pareciera difícil, es un reto intelectual que pone en juego varios elementos vistos en clase pasadas.

- Pregunta con base en actividad empírica: *¿Cómo explicarías el fenómeno de la reflexión de la luz en el espejo y la congruencia de sus ángulos? (PM)*: Se basará en el análisis de una actividad experimental, por la importancia que posee la construcción de experimentos dentro de las ciencias naturales. Esto puede llegar a ser una actividad cognitivamente compleja, ya que se deberá articular todos los conocimientos para analizar un fenómeno físico.

Obsérvese que no es algo ingenuo las preguntas de mapeo, las cuales en cierto modo presentan las observaciones empíricas y la construcción e interpretación de algunos argumentos Físicos.

Desarrollo – Demostración matemática

En el “desarrollo” se analizarán algunas demostraciones matemáticas, utilizando las herramientas antes construidas como los grafos; esto permitirá realizar una integración reflexiva y crítica al tema. Se emplearán los tres grafos y cada uno cumplirá una función diferente.

- *Describe cómo Eratóstenes concluyó que el $\angle DCA$ es congruente al $\angle SDC$ ³⁰ (PE)*: El objetivo de esta pregunta es realizar una construcción matemática a través de una abstracción física.

Se utilizará la *imagen 1* como medio de abstracción matemática, por ende, ya la modelación estaría realizada, solo se debe de estructurar los argumentos que validen dicha interpretación.

- *Utilizando como ejemplo la demostración anterior, colorea la siguiente imagen empleando estos colores: azul para los argumentos Físicos, naranja para las*

³⁰ Se tiene que observar la imagen de Luna (2023) para comprender el procedimiento.

conjeturas y morado para las proposiciones. (PE): El objetivo de esta pregunta es realizar una reflexión sobre la estructura del razonamiento en un grafo.

Se utilizará el *grafo 1* como estructura de razonamiento, el objetivo de este será clasificar los elementos de la demostración, desde la comprensión matemática. Esto será dividido en lo que ya se ha planteado: hipótesis, tesis, proposiciones, conjeturas y argumentos Físicos.

- *Completado la imagen, describa el razonamiento que empleó Eratóstenes para la medición de la Tierra (PM):* La pregunta corresponde a un mapeo de información en la construcción de argumentos del razonamiento de Eratóstenes. Se espera, que luego de poder articular ideas y tener un acercamiento a los contenidos, tenga la capacidad de realizar la actividad de describir un fenómeno físico.
- *Con base en la imagen, realice la demostración siguiendo el razonamiento. (PM) – Describa la segunda ley de Newton de tal manera que quede explícito la forma del razonamiento de Kepler (PE):* Son dos preguntas en la guía didáctica, pero se contará como una porque están concatenadas.

Se utilizará el *grafo 2* con la función de estructura de razonamiento guiado, por ende, será un proceso inverso: Como se brinda el razonamiento, las y los estudiantes deberán comprender e interpretarlo de tal manera que les permita construir argumentos sólidos para validar la construcción matemática que realizarán a partir del grafo.

- *Describa los elementos de la imagen relacionados con el principio de Fermat (PM):* Luego del experimento empírico con un láser y un espejo se hará un análisis, y se deberá relacionar la modelación matemática que se aplica a la reflexión de la luz.
- *Observando la imagen, demuestre que los ángulos I y R son congruentes (PE):* Se realizará la demostración del principio de Fermat en la reflexión utilizando como base la modelación de la pregunta anterior y lo observado en el experimento.

- *Complete el siguiente grafo usando como base la demostración anterior. El objetivo es que debe de estructurar diversos argumentos que encajen con los propuestos, permitiendo así llegar a la conclusión (PE):* Con los conocimientos obtenidos al tratar los grafos, se deberá poder a través de la demostración identificar la estructura del razonamiento, completando el grafo 3.

Cierre – Reflexión

La parte de “cierre” se realizará una reflexión sobre el proceso de aprendizaje y las formas de argumentación que las y los estudiantes han logrado realizar, formando un contraste y un análisis cualitativo de la experiencia de cada individuo.

- *Describa desde su perspectiva la diferencia de comprender un fenómeno físico solo desde la teoría y desde la comprensión matemática (PM):* Esta pregunta analiza los aspectos esenciales que representan la abstracción de la matemática y la interpretación física, intentando recalcar sus diferencias y semejanzas.
- *Describa los tres fenómenos físicos anteriormente presentados (PE):* Una pregunta que apela a las tres demostraciones estudiadas, que funge como pregunta intermediadora entre conocimientos posteriores.
- *¿Por qué consideras que los pensadores tomaron la decisión de realizar una abstracción matemática y no simplemente una comprensión de la física teórica? (PE):* Se pretende que se pueda reflexionar en cómo los contenidos matemáticos seleccionados no fueron al azar, sino que fueron elegidos por un criterio claro y correspondiente a una necesidad.

Pasos de análisis sugeridos

Se propone (no es absoluto, se pueden crear diversos instrumentos de análisis de esta guía, modificando al contexto del aula de clase) una serie de pasos para poder analizar el razonamiento argumentativo empleado por los estudiantes al momento de su resolución:

1. Clasificar las estructuras argumentativas de los y las estudiantes de manera general, se propone para esta actividad el *cuadro 11*.

Cuadro 11

Análisis de la estructura de los argumentos de los y las estudiantes.

<i>Estructura sugerida.</i>	<i>Estructura de los argumentos.</i>	<i>Cohesión de ideas.</i>	<i>Reconocimiento del fenómeno físico utilizando ideas matemáticas.</i>
<i>Estudiantes 1.</i>	Se describe la forma en como la/él estudiante expresa sus ideas en el lenguaje escrito.	Se describe la forma en cómo se conectan las ideas, y si tiene una secuencia lógica detrás del mismo.	Se observa cómo la/él estudiante logra interpretar la estructura matemática que se emplea en la comprensión del fenómeno físico.

Nota: Elaborado en octubre del 2025.

2. Analizar fragmentos específicos que sean llamativos, se propone para esta actividad el *cuadro 12*.

Cuadro 12

Análisis de fragmentos específicos de la argumentación de los y las estudiantes.

<i>Estudiante 1.</i>	<i>Descripción de la pregunta.</i>	<i>Estructura argumentativa.</i>	<i>Secuencia de ideas en los contenidos disciplinares.</i>
<i>Fragmento 1.</i>	Se describe la pregunta y por qué este fragmento resulta llamativo con base a la pregunta y lo observado en la clase.	Se describe la estructura que la/él estudiante está realizando para expresar su idea.	Se describe cómo la articulación de ideas permite visualizar la construcción matemática y física con base al contexto del fenómeno físico.

Nota: Elaborado en octubre del 2025.

3. Realizar un grafo por estudiante que describa la estructura de las demostraciones que realizó.
4. Comparar las preguntas que se sugieren dentro de la guía con un contraste, para esta actividad se propone el *cuadro 12*.

Cuadro 13

Contraste en las respuestas de los estudiantes.

<i>Estudiante 1</i>	<i>¿Qué elementos retoma el o la estudiante al momento de responder la pregunta?</i>	<i>¿Qué elementos de la clase soportan este razonamiento?</i>	<i>¿Qué argumentos de la demostración matemática están presentes en la descripción del fenómeno físico?</i>
<i>Pregunta 1.</i>			
<i>Pregunta 2.</i>			

Nota: Elaborado en octubre del 2025.

Si se requiere profundizar en las respuestas de los y las estudiantes, es recomendable realizar entrevistas semiestructuradas para fortalecer la comprensión de la forma en cómo estructuraron sus respuestas.

Conclusión

Se ha observado, a lo largo de este trabajo, cómo la demostración matemática está intrínsecamente relacionada con una forma de tratamiento de información que responde a un tipo de razonamiento específico, el cual, en el campo de la Física, implica el uso de argumentos Físicos. Esta no es una relación ingenua o superficial, ya que los modelos matemáticos creados por los tres pensadores analizados permitieron identificar una estructura de razonamiento común entre la interpretación de los tres fenómenos físicos. Esto facilita la

formulación de argumentos más sólidos y, como señala Duval (2017), más convincentes en su continuidad temática.

La importancia de esta relación se vincula con el modelo discursivo propuesto por Luna Corredor (2023), en el que se establece un puente entre ciertos hechos de la Física en contextos astronómicos y las estructuras geométricas que posibilitan una forma organizada de comunicar el conocimiento interdisciplinario. En consecuencia, este tipo de razonamiento, que usualmente se considera predominantemente deductivo (aunque es interesante poder extrapolar esto a otros tipos de razonamiento) representa una construcción teórica que permite el proceso cognitivo de abstracción a partir de la observación de un fenómeno físico y reorganizar dicha información para expresar el razonamiento de manera coherente y argumentada.

Se reconoce, no obstante, que situar este tipo de trabajo en el ámbito de la educación media puede ser complejo, aunque no imposible, debido a factores como la trayectoria individual de cada estudiante, el contexto institucional y la complejidad inherente al proceso de demostración matemática. Sin embargo, se considera esencial para la formación del futuro profesorado en Física (y posiblemente en otras ciencias³¹), dado que aporta una comprensión más estructurada de las formas de razonamiento implicadas en los contenidos físicos.

En este sentido, la guía didáctica desarrollada en este trabajo tiene como finalidad servir como herramienta para evaluar, de manera cualitativa³² el proceso a través del cual los y las estudiantes puedan interpretar, comunicar y redactar el tratamiento de la información relacionado con los contenidos físicos, y cómo relacionan los contenidos del estatus teórico con la definición y caracterización del estatus operativo, a partir de las demostraciones matemáticas. Esta guía permite visibilizar, un análisis para observar la incidencia de la

³¹ Esto debido a que no se debería considerar el razonamiento como exclusivo de una disciplina, sino que es transversal en el conocimiento, permitiendo realizar procedimiento lógicos; en este sentido, es interesante poder definir que tan evidente es este tipo de procesos dentro de la resolución de problemas de otros campos del conocimiento, como puede ser la Química o la Biología.

³² Por lo que comenta Duval (2017) que un razonamiento argumentativo no posee una estructura clara.

demostración matemática en los procesos argumentativos (también se destaca que se brinda una forma de poder analizarlo, validando los procesos) a pesar de que dichos razonamientos no siempre responden a una estructura deductiva plenamente explícita.

Por otra parte, desde una perspectiva histórica, se ha demostrado que la naturaleza de las ciencias no es exclusivamente matemática, pero tampoco es excluyente. Si bien los conocimientos físicos se validan a través de su propia lógica experimental, la demostración matemática aporta una estructura de razonamiento esencial para el desarrollo y la interpretación de dichos contenidos. Esta relación puede entenderse como una especie de bicondicional: la Física se sostiene en su propia lógica, pero requiere del razonamiento matemático para validar los procesos deductivos (Como la demostración de la reflexión de la Luz y la segunda de ley de Kepler) que se construyen en ella.

Los grafos en este caso fungieron como representación intermedia para el análisis de estas demostraciones, logrando evidenciar una estructura interna, analizando momentos históricos. La historia por ende, representa un legado que permite observar cómo las formas de tratamiento de información se estructuran, logrando comprender así ¿cómo un pensador realiza una organización y concatena las ideas de una demostración? logrando hallar tendencias y formas de concebir un conocimiento a través del lenguaje.

Resulta interesante pensar el rol que cumple el argumento Físico a través de la construcción de grafos antes mencionada, se pone en juego el rol del argumento Físico como tercer enunciado dentro de la estructura de la demostración, y desde aquí se desprenden los contenidos, ya que estos elementos surgen desde el estatus teórico con base a los contenidos de la Física para poder seguir con la demostración, surgiendo la pregunta ¿El argumento Físico es un tercer enunciado o un premisa dentro de la demostración? esto teniendo en cuenta los elementos antes descrito del argumento Físico³³.

³³ Como lo puede ser la base teórica que permite la modelación matemática en las demostraciones,

Por ende, la estructura del razonamiento de la demostración matemática se vuelve fundamental para ciertos aspectos del desarrollo de la Física, ya que proporciona una base sólida para la interpretación, modelación y abstracción de los fenómenos físicos hacia representaciones matemáticas que permitan la comunicación de forma clara y precisa de esas ideas.

Se destaca como los contenidos desarrollados permiten realizar construcciones dentro de otros campos del conocimiento, como ejemplo; poder visualizar la estructura del razonamiento en la Química o la Biología, ya que el razonamiento no es exclusivo de la Física o la Matemática. Otros contenidos que se observan es cómo la extrapolación de las estructuras de razonamiento permiten observar una estructura común, al emplear el mismo tratamiento de información, en el caso de la Física se denota que está al usar observaciones, su estructura interna tiene pequeñas diferencias a la usual en Matemática, si se valida esto en el campo de la Química y la Biología, se podrá hablar de una estructura de razonamiento dentro de una demostración matemática en el contexto de las ciencias naturales, surgiendo preguntas como: ¿Cómo los procesos de demostración matemática o razonamientos, afectan los procesos de argumentación, estructuración de ideas y modelación de los Licenciado en Ciencias Naturales y Educación Ambiental? y ¿Cómo se propondría esta estructura curricular dentro de las Licenciatura en Física, que permita llevar una secuencialidad en los contenidos?

Igualmente, desde una perspectiva curricular e institucional, resulta necesario reflexionar sobre cómo este análisis incide en dos líneas de investigación de la Licenciatura en Matemáticas: la línea de “Historia de las Matemáticas” y la de “Razonamiento, lenguaje y comunicación de saberes y conocimientos matemáticos”. Se vislumbra así una construcción articulada de un análisis que integra los razonamientos desde aspectos históricos y epistemológicos, lo que plantea la pregunta: ¿Qué implicaciones en la estructura curricular de la Licenciatura en Matemática, específicamente en las dos líneas antes mencionadas, podría

provocar el reconocimiento de cuestiones complejas del lenguaje en la resolución de problemas matemáticos a través de un análisis histórico y epistemológico? Esto no es una cuestión ingenua, pues entender la forma y estructura de los razonamientos (como se hace en este trabajo) retoma cuestiones complejas del tratamiento histórico de las matemáticas³⁴.

Referencias

1. Aguilar González, Á., Carreño, E., Carrillo Yáñez, J., Climent Rodríguez, N., Contreras González, L. C., Escudero-Ávila, D. I., ... & Rojas, N. (2013). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK*.
2. Aguilar, M., & Ricardo, M. (2013). *La demostración matemática: Una reflexión para su reconceptualización en el aula* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa].
3. Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., & Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: Significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, 33(2), 55–75. <https://doi.org/10.15359/ru.33-2.4>
4. Arce Becerra, I. (2024). *La función explicativa de la demostración: Un análisis contextual en el marco de la práctica matemática* [Trabajo de grado, Universidad del Valle].
5. Arévalo, D. F. V. (2016). Significados de matematización en la enseñanza de la física presentes en libros didácticos de física universitaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*.
6. Argáez-Mendoza, S., & Oliva, A. I. (2011). El principio de Fermat, la braquistócrona y ¿la curvatura de la luz? *Ingeniería*, 15(1), 47–55.
7. Ayerbe Toledano, J. M. (2025). *Eratóstenes de Cirene, geómetra y geodesta*.
8. Ballén, M. B. *El principio de Fermat en óptica geométrica*.
9. Camargo Uribe, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Universidad Pedagógica Nacional / Editorial Universidad de Antioquia.

³⁴ Una reflexión respecto a estas cuestiones, es de naturaleza epistemológica; se resalta que no solamente afecta a la educación, sino que es un proceso matemático complejo que no es menos válido que otros trabajos referentes al progreso científico. Sin embargo, este trabajo refleja la necesidad de comprender el conocimiento como un todo y no por partes, sin excluir contenidos que en ocasiones resultan necesarios; ya que, aunque resulten complejos, no significa que no sean importantes.

10. Díaz-Barriga, Á. (2013a). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. UNAM. <https://www.academia.edu/38692374/>
11. Díaz-Barriga, Á. (2013b). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. UNAM.
12. Díaz-Bravo, L., Torruco-García, U., Martínez-Hernández, M., & Varela-Ruiz, M. (2013). La entrevista, recurso flexible y dinámico. *Investigación en Educación Médica*, 2(7), 162–167.
13. Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2.^a ed.). Programa Editorial Universidad del Valle.
14. Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 1–264). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
15. Feynman, R. P., Goodstein, D. L., & Goodstein, J. R. (1999). *La conferencia perdida de Feynman: El movimiento de los planetas alrededor del Sol*. Tusquets.
16. Gallardo, P. C. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa*, 9(46), 15–25.
17. Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración: Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405–414.
18. Goodstein, D. L., Goodstein, J. R., & Feynman, R. P. (1999). *La conferencia perdida de Feynman: El movimiento de los planetas alrededor del Sol* (1.^a ed.). Tusquets Editores.
19. Hanna, G., & Barbeau, E. (2014). Proofs as bearers of mathematical knowledge. En G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Explanation and proof in mathematics* (pp. 85–100). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4191-8_6
20. Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002). Arguments from physics in mathematical proofs: An educational perspective. *For the Learning of Mathematics*, 22(3), 38–45.
21. Joshua, S., & Dupin, J. J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Ediciones Colihue SRL.
22. Lanciano, N. (1989). Ver y hablar como Tolomeo y pensar como Copérnico. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(2), 173–182.
23. Lanciano, N., & Berardo, M. (2016). Eratóstenes: Um exemplo de trabalho com estudantes universitários em didática e história da astronomia. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia*, 22, 7–19.

24. Leal, J. E. F., Uribe, L. C., & Rodríguez, Á. G. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Integración: Temas de Matemáticas*, 31(2), 181–205.
25. Luna Corredor, J. S. (2023). Aproximación a la interdisciplinariedad entre astronomía y geometría en la educación matemática. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (12), e40213348. https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i12.13348
26. Machín, M. C., & Trigo, L. M. S. (2015). Aportes sobre resolución de problemas, tecnología y formación de profesores de matemáticas. En M. Trigo et al. (Eds.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp. 113–132). Graó.
27. Milanesio, B., & Burgos, M. (2024). Significados personales sobre la demostración matemática de estudiantes al inicio de la educación superior. *Educación Matemática*, 36(3), 206–241.
28. Morón Conde, L. (2019). *Matemáticas y física, un planteamiento interdisciplinario en la educación secundaria* [Tesis de maestría, Universidad de Alcalá].
29. Motte, A., & Cajori, F. (1729). *The mathematical principles of natural philosophy* (Vol. 2). (Original: Isaac Newton).
30. Perales, F. J., & Jiménez, J. D. (2002). Las ilustraciones en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias: Análisis de libros de texto. *Enseñanza de las Ciencias*, 20(3), 369–386.
31. Pereira, P. C. R. (2006). Revivendo Eratóstenes. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia*, (3), 19–38.
32. Pérez-Castellanos, E. T. (2022). Competencias para la práctica docente de la Didáctica Especial en Matemática y Física: Escenario formativo. *Polo del Conocimiento*, 7(4), 1518–1540.
33. Quispe-Cruz, M., Haeusler, E. H., & Gordeev, L. (2014). Proof-graphs for minimal implicational logic. *arXiv preprint arXiv:1404.0082*.
34. Rodríguez, Á. A. P., & Serra, R. C. S. (2015). La enseñanza de la Física General I para la formación de profesores de matemática-física: Un enfoque interdisciplinario. *Atenas*, 2(30), 65–77.
35. Salinas, A. (2002). Eratóstenes y el tamaño de la Tierra (s. III a. C.). *Revista de Geografía Norte Grande*, (29), 143–148.
36. Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2018). Addressing key and persistent problems of students' learning: The case of proof. En A. J. Stylianides & G. J. Stylianides (Eds.), *Advances in mathematics education research on proof and proving: An*

international perspective (pp. 99–113). Springer.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-75677-6_7

37. Vergara, M. (2019). *Los límites y la continuidad en los espacios de convergencia: Un acercamiento histórico-epistemológico en la perspectiva de la formación de profesores* [Trabajo de grado, Universidad del Valle].
38. Vizcaíno Arévalo, D. F., & Terrazzan, E. A. (2015). Diferencias trascendentales entre matematización de la física y matematización para la enseñanza de la física. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (38), 95–111.
39. Wittmann, E. C. (2021). When is a proof a proof? En *Connecting mathematics and mathematics education: Collected papers on mathematics education as a design science* (pp. 61–76).

Anexos

Anexo 1

Control de tiempo de la resolución de la clase.

<i>FICHA DE TIEMPO ESTIMADO – DEMOSTRANDO Y ARGUMENTANDO.</i>	
Número de la pregunta designada en orden de abajo para arriba en la guía didáctica.	Tiempo sugerido para cada pregunta. Se añade igualmente el tiempo de la resolución y el conversatorio.
INTRODUCCIÓN	
Actividad – Pregunta 1	Se recomienda tener máximo 10 minutos para el desarrollo de esta actividad explicativa. Total – 10 min
Pregunta 2	Respuesta inicial – 5 min Conversatorio – 10 min Respuesta final – 5 min Total – 20 min
Pregunta 3	Respuesta inicial – 5 min Conversatorio – 10 min Video – 7 min Conversatorio – 15 min Respuesta final - 8 min Total – 45 min
Pregunta 4	Respuesta inicial – 8 min Conversatorio – 8 min Video – 2 min Conversatorio – 10 min Respuesta final – 5 min Total – 33 min
Experimento – Pregunta 5	Experimento - 10 min Respuesta inicial – 5 min Conversatorio – 8 min Respuesta final – 5 min Total –28 min
<i>Tiempo total.</i>	<i>136 min</i>
ACTIVIDADES DE CONSTRUCCIÓN MATEMÁTICA	
Pregunta 6	Demostración – 10 min Conversatorio – 10 min Total - 20 min

Pregunta 7	Completación del grafo – 20 min Conversatorio – 10 min Total – 30 min
Pregunta 8	Descripción de razonamiento – 20 min Conversatorio – 8 min Total – 28 min
Pregunta 9	Construcción de la demostración – 25 min Descripción del razonamiento – 15 min Conversatorio – 5 min Total – 45 min
Pregunta 10	Descripción de la imagen – 15 min Conversatorio – 10 min Total – 25 min
Pregunta 11	Demostración de los ángulos I y R congruentes – 15 min Conversatorio – 10 min Total – 25 min
Pregunta 12	Completar el grafo – 20 min Conversatorio 10 – min Total – 30 min
<i>Tiempo total.</i>	<i>203 min</i>
REFLEXIÓN	
Pregunta 13	Respuesta – 20 min Total - 20 min
Pregunta 14	Respuesta – 20 min Total – 20 min
Pregunta 15	Respuesta – 20 min Conversatorio final – 20 min Total – 40 min
<i>Tiempo total.</i>	<i>80 min</i>
<i>TIEMPO TOTAL DE TODA LA ACTIVIDAD.</i>	<i>409 min</i> <i>6 horas y 59 minutos.</i>

DEMOSTRANDO Y ARGUMENTANDO

Profesor: _____

Universidad: _____

Estudiante: _____

Carrera: _____ Código: _____

Objetivo de aprendizaje: Estructura argumentos para validar razonamientos matemáticos en demostraciones matemáticas construidas en el campo de la Física.

Esta secuencia didáctica corresponde a un trabajo de investigación del estudiante Juan Sebastian Luna Corredor, de la Universidad del Valle, que se centra en la incidencia de la demostración matemática en los procesos argumentativos de los y las estudiantes de Licenciatura en Física (se puede estudiar igualmente otras carreras que estudien Física).

Se abordarán tres procesos físicos: la medición de la Tierra, el movimiento planetario y la reflexión de la luz, cada uno mediado por la demostración matemática que le corresponde. El análisis se centrará en la argumentación que cada individuo puede elaborar a partir del contexto y de los conocimientos teóricos involucrados. **SE PUEDE PEDIR UNA HOJA EXTRA SI ES NECESARIO, SERÁ ADJUNTADA A LA GUÍA.**

INTRODUCCIÓN

Como primera actividad se realizará un conversatorio grupal donde el docente explicará los siguientes puntos:

- ★ Finalidad: Construir estructuras de argumentación que permitan a los individuos desarrollar un razonamiento sólido y generar expansiones discursivas coherentes. – Desarrollar y refinar la abstracción matemática, integrándose en el análisis de fenómenos del mundo real, utilizando como razonamiento la estructura de una demostración matemática.
- ★ Tiempo: La resolución de la guía dura aproximadamente siete horas.
- ★ Objetivo de investigación: Reconocer la incidencia de la demostración matemática en los procesos argumentativos de los profesores y profesoras de Física.
- ★ Momentos didácticos: Discusión grupal, análisis de las demostraciones y redacción de interpretaciones.
- ★ Conocimientos previos: Para realizar esta guía la o el estudiante deberán haber cursado y aprobado: Física I, cálculo I (Cálculo diferencial) dos cursos relacionados con la interpretación de fenómenos Físicos, sin importar si es en la línea de didáctica o disciplinaria.

1. *¿Qué se entiende por demostración matemática en el campo de Física?*

Respuesta:

Respuesta luego del conversatorio:

2. *¿Quién era Eratóstenes y su importancia en el pensamiento griego? ¿Describe el razonamiento utilizado por él en el momento de medir la circunferencia de la Tierra? Luego se observara el siguiente video – <https://www.youtube.com/watch?v=JiwFpDuQtFE>*

Respuesta:

Respuesta luego del conversatorio:

3. *¿Explicar cómo consideras que Kepler definió la segunda ley? Esta dice: “el radio vector que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.” Luego se observara:*
<https://www.youtube.com/watch?v=lln0C2--xHk>.

Respuesta:

Respuesta luego del conversatorio:

En esta pregunta se realizará el experimento con un láser y un espejo; luego de observar el experimento de la reflexión de la luz con el principio de Fermat, se responderá lo siguiente:

4. *¿Cómo explicarías el fenómeno de la reflexión de la luz en el espejo y la congruencia de sus ángulos?*

Respuesta:

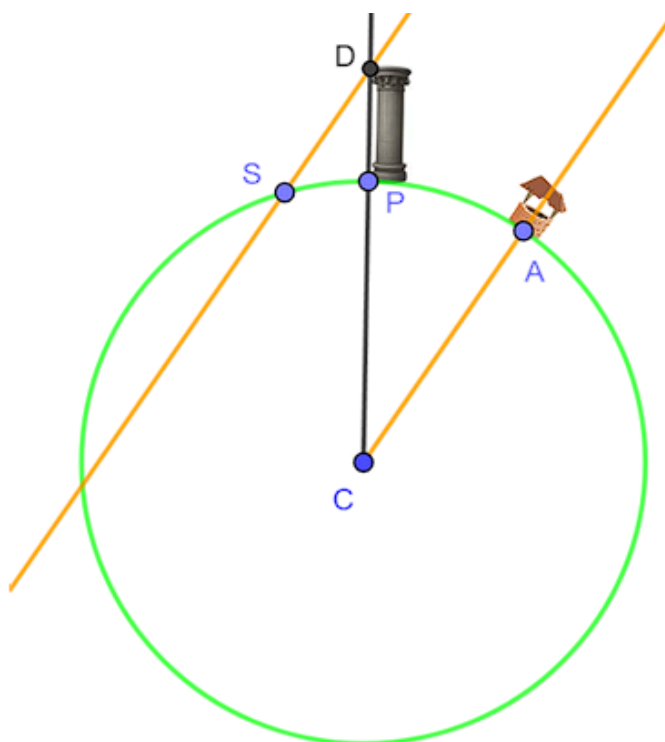
Respuesta luego del conversatorio:

ACTIVIDADES DE CONSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

En este apartado se estudiará las formas de demostrar matemáticamente que plantearon los filósofos, con preguntas guiadas que validen el razonamiento propuesto.

Observe lo siguiente:

Imagen 1: Representación del método de medición de Eratóstenes.



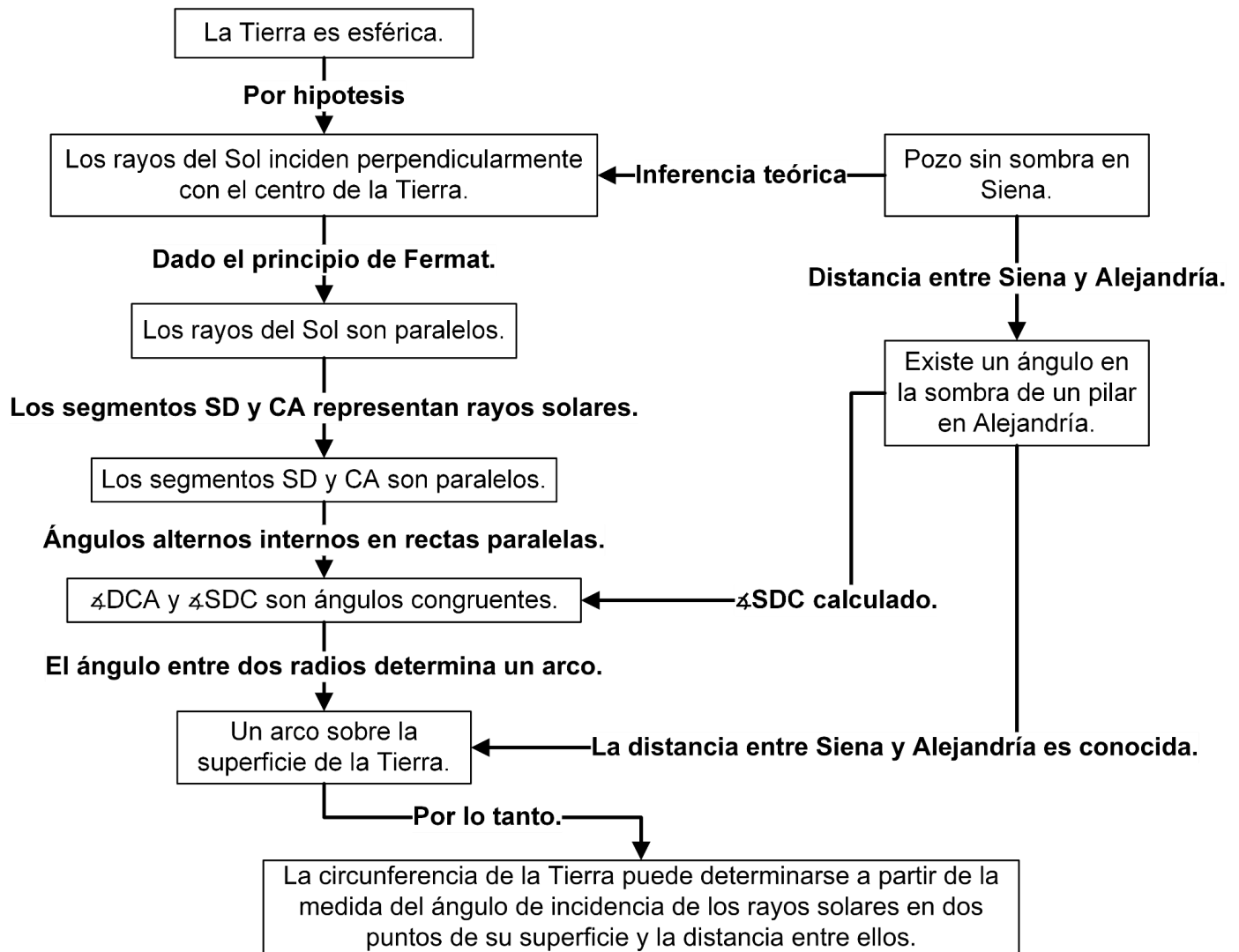
Nota: Sacado de Luna Corredor J. S. 2023.

Esta es una representación moderna de la abstracción que hizo Eratóstenes en la medición de la Tierra, el objetivo será:

- *Describa cómo Eratóstenes concluyó que el $\angle DCA$ es congruente al $\angle SDC$.*

Respuesta:

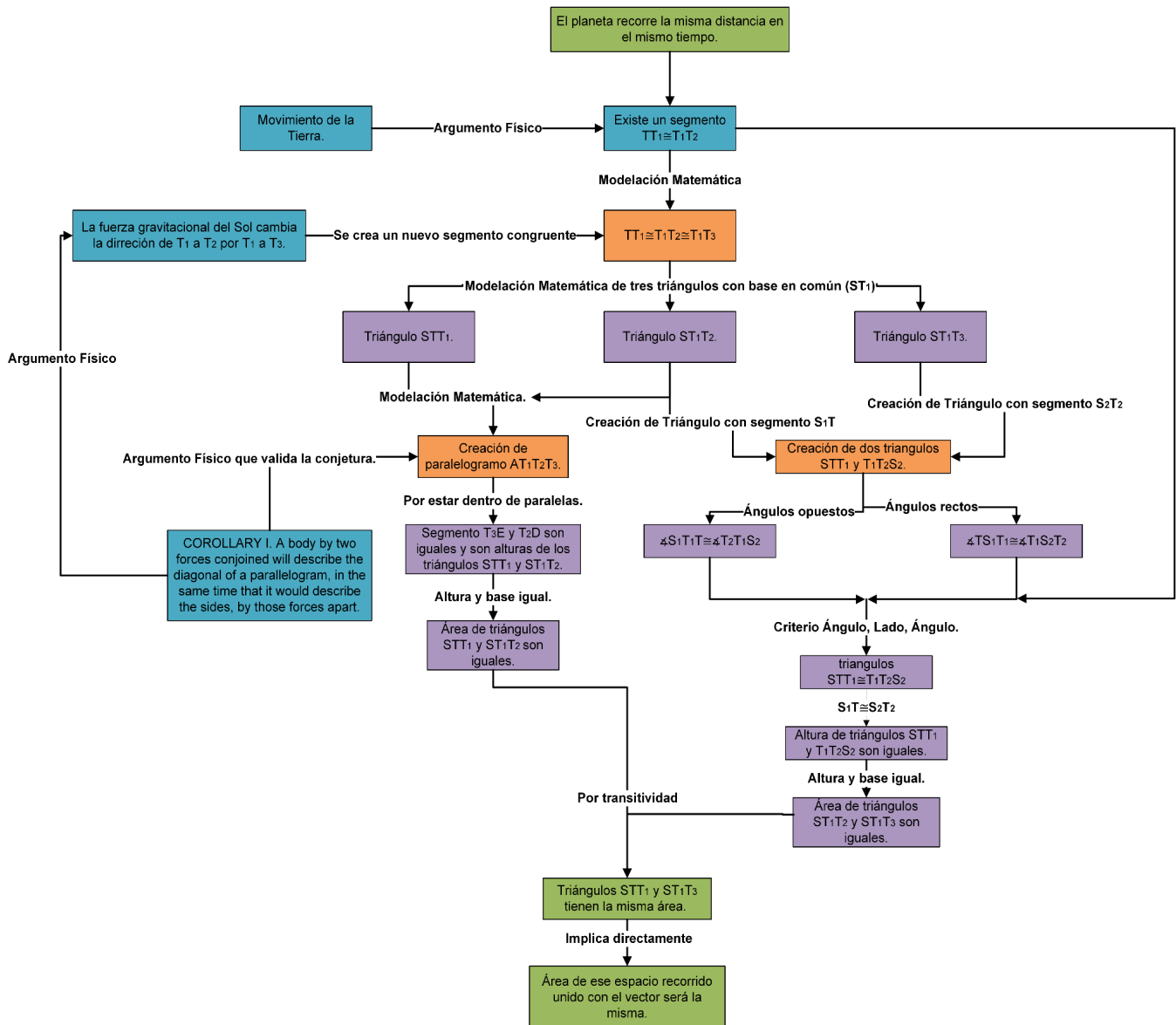
- Utilizando como ejemplo la demostración anterior, colorea la siguiente imagen empleando estos colores: azul para los argumentos Físicos, naranja para las conjeturas y morado para las proposiciones.



- Completado la imagen, describa el razonamiento que empleó Eratóstenes para la medición de la Tierra.

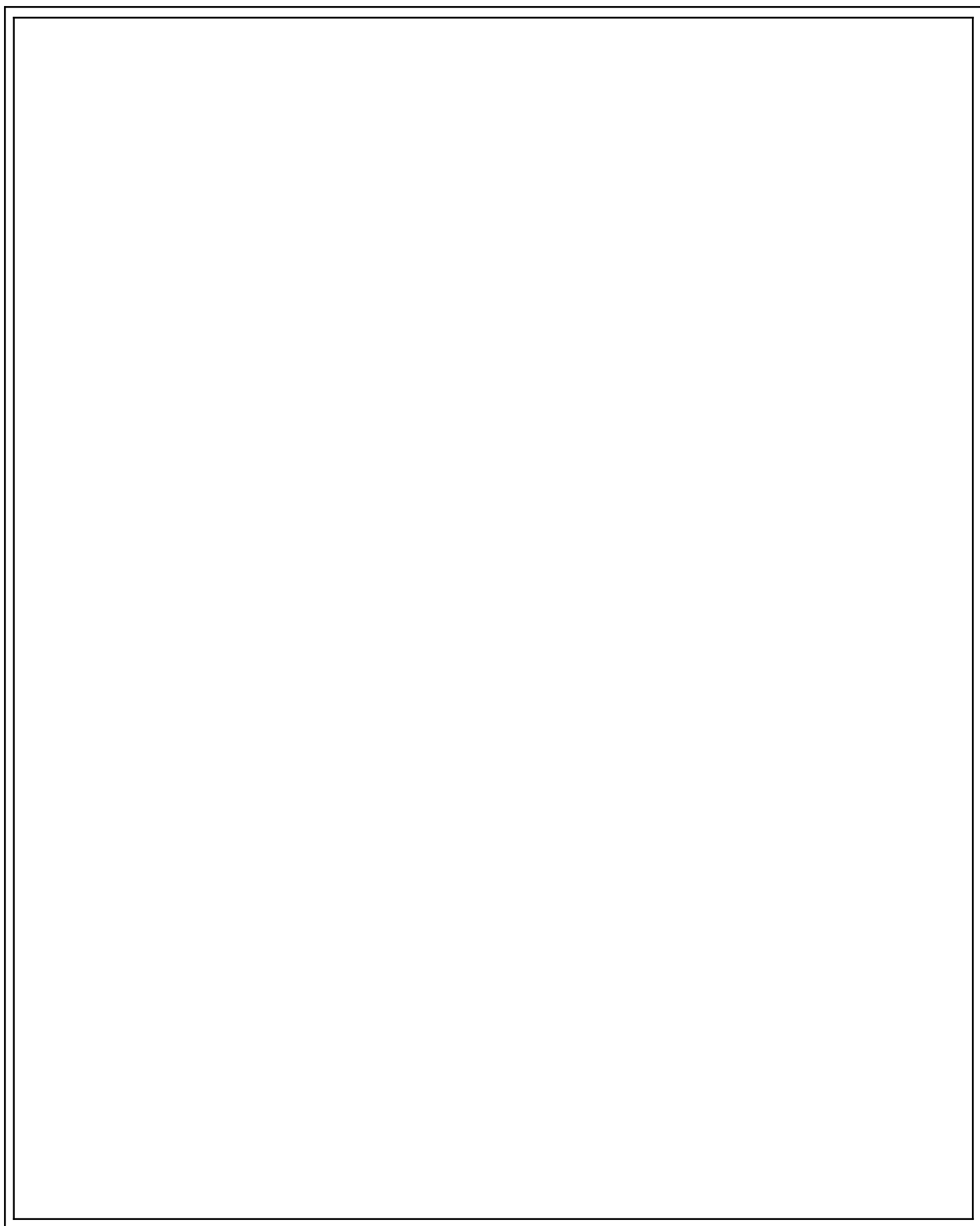
Respuesta:

Observemos la siguiente imagen, la cual muestra un modelo del razonamiento de Newton para validar la segunda ley de Kepler de manera matemática:

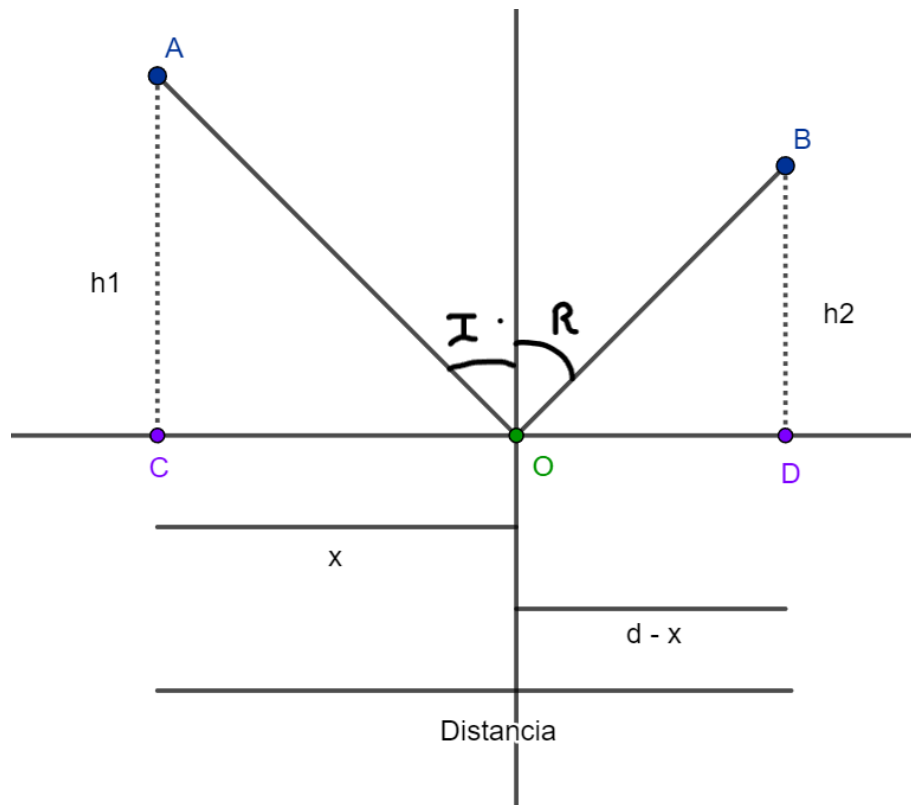


- Con base en la imagen, realice la demostración siguiendo el razonamiento.
- Describa la segunda ley de Newton de tal manera que quede explícito la forma del razonamiento de Kepler.

Respuesta:



- *Describe los elementos de la imagen relacionados con el principio de Fermat.*



Respuesta:

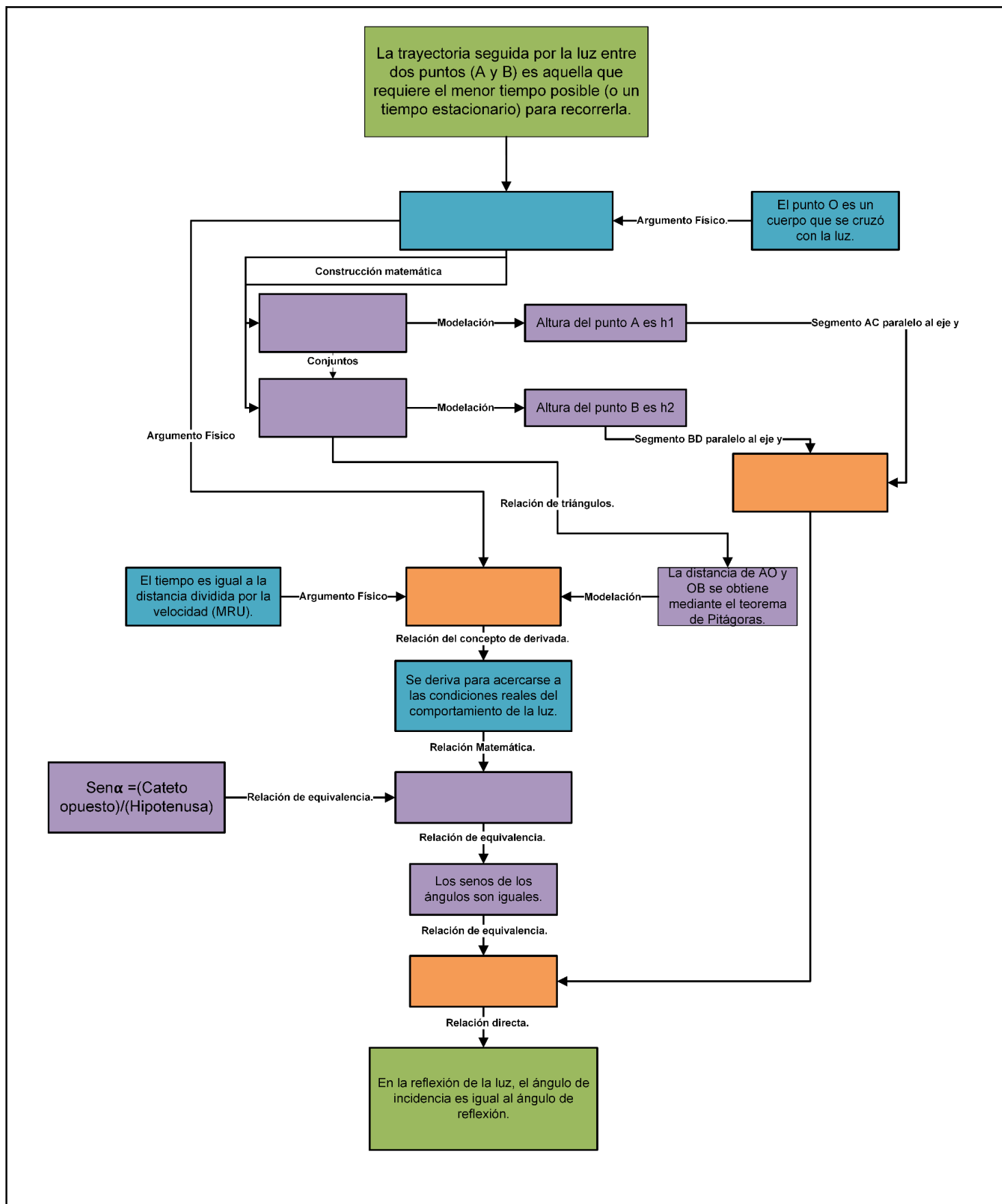
- *Observando la imagen, demuestre que los ángulos I y R son congruentes.*

Respuesta:

Con la demostración previamente realizada, responda la siguiente pregunta:

- *Complete el siguiente grafo usando como base la demostración anterior. El objetivo es que debe de estructurar diversos argumentos que encajen con los propuestos, permitiendo así llegar a la conclusión.*

Apuntes (espacio para escribir alguna nota):



REFLEXIONANDO

Las demostraciones anteriores fueron un acercamiento al estudio del razonamiento de cada uno de los filósofos. Por ende, resulta necesario reflexionar sobre cada uno de los elementos abordados.

- *Describa desde su perspectiva la diferencia de comprender un fenómeno físico solo desde la teoría y desde la comprensión matemática.*

Respuesta:

- *Describa los tres fenómenos físicos anteriormente presentados.*

Respuesta:

- *¿Por qué consideras que los pensadores tomaron la decisión de realizar una abstracción matemática y no simplemente una comprensión de la física teórica?*

Respuesta:

Guía didáctica – Ficha.

Juan Sebastian Luna Corredor – Trabajo de grado.

May Vergara Rivera – Tutor de trabajo de grado.

Título del trabajo: La posible incidencia dentro del razonamiento argumentativo de los futuros Licenciados en Física utilizando un análisis epistemológico e histórico.

Licenciatura en Matemáticas – 3492.

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas.

Facultad de Educación y Pedagogía.

Universidad del Valle.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

CIEM-ClimaGCE. (s. f.). *#CarlSagan nos explica como #Eratóstenes demostró que la ...* [Video]. YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=JiwFpDuQtFE>

Quantum Fracture. (s. f.). *Las Leyes de Kepler en 2 minutos* [Video]. YouTube.

<https://www.youtube.com/watch?v=lln0C2--xHk>.

Luna Corredor, J. S. (2023). Aproximación a la interdisciplinariedad entre astronomía y geometría en la educación matemática. *Praxis, Educación Y Pedagogía*, (12), e40213348.

https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i12.13348