

LA WAVELET SHANNON APLICADA AL CANTO DE LAS BALLENAS JOROBADAS

ROCIO CASTILLO PONCE



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
25 DE JUNIO DE 2012

LA WAVELET SHANNON APLICADA AL CANTO DE LAS BALLENAS JOROBADAS

ROCIO CASTILLO PONCE

Trabajo de investigación presentado al Departamento de Matemáticas
como requisito parcial para optar al Título Magíster en Ciencias
Matamáticas.

DIRECTORA

Dra. Doris Hinestroza Gutierrez

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
25 DE JUNIO DE 2012

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	8
INTRODUCCIÓN	9
1. Análisis de Fourier	11
1.1. Series de Fourier	11
1.2. Transformada de Fourier	16
1.3. Transformada de Fourier con ventana	24
1.4. Transformada discreta de Fourier (TDF)	29
1.5. Transformada rápida de Fourier (FFT)	34
1.5.1. Algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT)	35
1.6. Teorema del muestreo	39
1.6.1. Teorema del muestreo de Shannon	40
1.6.2. Criterio de Nyquist	42
1.6.3. El Fenómeno de aliasing	43
2. Teoría de wavelets	45
2.1. Antecedentes históricos	45
2.2. Aspectos básicos de la transformada wavelet	47
2.3. Transformadas de wavelet	49
2.3.1. Transformada wavelet continua (TWC)	49
2.3.2. Transformada wavelet discreta (TWD)	56
2.3.3. Análisis multirresolución	58
2.3.4. Construcción de una wavelet a partir de un AMR	67
2.3.5. Teorema de Mallat-Meyer	70
2.4. La wavelet Shannon	78
3. Aplicación de la wavelet Shannon al Canto de las Ballenas Jorobadas	87
3.1. Adquisición de las señales	89
3.2. Análisis del canto de las ballenas	90
3.3. Wavelet Shannon y Matlab	92
3.4. Búsqueda y Definición de patrones	94

3.4.1. Separación de patrones por cantos	95
3.4.2. Búsqueda de patrones entre cantos de la misma fecha	97
3.4.3. Búsqueda de patrones entre cantos de diferentes fechas	101
CONCLUSIONES	108
BIBLIOGRAFÍA	110

LISTA DE FIGURAS

1.1.	Las figuras	13
1.2.	Expansión en series de Fourier de la función $f(t) = t^2$ para los cinco primeros términos	15
1.3.	Señal exponencial $f(t) = e^{-\pi t }$ del ejemplo 1.2	21
1.4.	Transformada de Fourier de señal exponencial del ejemplo 1.2	21
1.5.	Función de suma de cosenos a diferentes frecuencias y su Transformada de Fourier	22
1.6.	a) Señal por partes y su transformada de Fourier b) Señal suma de senos y su transformada de Fourier	23
1.7.	a) señal original, b) TF, c) TFV(espectrograma), d) mapa de contornos de la TFV	26
1.8.	TFV de una señal con diferentes anchos de ventana	27
1.9.	Ventana de Gauss	28
1.10.	a) Función $f(t) = \sin(t)$ discretizada b) TDF	33
1.11.	Señal original $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(4t)$ en la parte superior y su componente de mayor frecuencia $\sin(4t)$ en la parte inferior muestreadas a $F_m = \frac{20}{\pi}$ Hz	42
1.12.	Señal $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(4t)$ (en rojo) muestreada a diferentes frecuencias (en azul)	43
1.13.	Fenómeno de aliasing	44
2.1.	Diferentes clases de wavelets a) Meyer b) Morlet c) Daubechies	48
2.2.	Variación de los parámetros de escala a y traslación b	50
2.3.	funcion $f(t)$ y su transformada wavelet Shannon Continua en 2D y 3D	52
2.4.	funcion $f(t)$ y su transformada wavelet Shannon Continua en 2D y 3D	53
2.5.	Transformada de Fourier de la funcion $f(t)$	54
2.6.	subespacios del AMR	58
2.7.	Descomposición de la señal $y = 2\sin(0,07t) + 0,5\sin(t + 0,001)$ usando la TWD Shannon.	66
2.8.	Descomposición de una señal proveniente del canto de una ballena jorobada usando la TWD Shannon.	67
2.9.	Ortogonalidad entre subespacios.	68

2.10. Función sinc(πt)	78
2.11. wavelet Shannon	86
3.1. Fotos de cantores 15 y 128, Fundación Yubarta.	90
3.2. Transformada de Fourier aplicada a un trozo de canto de la ballena Jorobada o Yubartas.	91
3.3. Ejemplo de señal proveniente del canto de una ballena Jorobada a) original y b)después de filtrada.	91
3.4. Señal sinc en la parte inferior y su respectiva transformada Shannon en la parte superior. a) Señal sinc con amplitud 0.5 b) señal sinc con amplitud 2. .	94
3.5. Transformada wavelet Shannon Compleja con $Fc = 0,75$ y $Fb = 0,5$	96
3.6. Patrón 10 cantor 15 del 13/08/91 de la mitad.	97
3.7. Patrón 11 del cantor 128 de la fecha 09/08/91 de la mitad.	98
3.8. Patron1 del cantor 15 de la fecha 13/08/91 del inicio.	99
3.9. Patron 3 del cantor 15 de la fecha 13-08-91 del inicio.	101
3.10. Patron 4 del cantor 15 de la fecha 13-08-91 del inicio.	101
3.11. Patron 5 del cantor 15 de la fecha 13-08-91 del inicio.	102
3.12. Patron 5 del cantor 128 de la fecha 09/08/91 del inicio.	102
3.13. Cantor 15: Patrones semejantes, patrón 20(superior), 21(medio) y 24(inferior)	104
3.14. Cantor 15 a) El patrón 19 de la fecha 24/09/93 inicial y b) El patrón 23 de la fecha 24/09/93 mitad	105
3.15. Cantor 15: Un patrón dentro de otro a) patrón 4 del 13/08/91 inicial b) patrón 9 del 13/08/91 mitad c) muestra ampliada del recuadro azul	105
3.16. Partición de una señal en trozos cada vez más pequeños para una búsqueda exhaustiva de patrones.	106

RESUMEN

La transformada de Fourier se ha usado durante mucho tiempo para el análisis de señales permitiendo obtener el espectro de frecuencias de éstas. Esta transformada es apropiada para el análisis de funciones estacionarias debido a que usa funciones senoidales para representar la señal, pero la mayoría de señales para analizar son de carácter no estacionario lo cual implica una considerable desventaja para esta clase de análisis ya que de esta manera no nos proporciona ninguna información acerca del instante en que ocurre un evento o sea a que tiempo definido. Una primera solución a este inconveniente es la transformada de Fourier con ventana la cual nos proporciona una función bidimensional que nos da información de cómo evoluciona una señal tanto en tiempo como en frecuencia, aun así se presenta otro inconveniente que es la rigidez de la ventana la cual debe ser fijada en un principio dándonos de esta manera una resolución frecuencial y temporal también fija.

Como solución final aparece la transformada wavelet la cual en vez de usar sinusoides para representar las señales usa otras funciones especiales que se denominan wavelets madre la cual hace referencia a una única ventana de longitud finita, de carácter oscilatorio y valor medio cero que genera mediante cambios de escala y traslación una familia de funciones wavelets, estas funciones madre son moduladas pero de dimensión variable ajustada a la frecuencia de oscilación. Esto soluciona el problema de corte de la señal aplicándose a señales no estacionarias, nos ofrece entonces una resolución en frecuencia inversamente proporcional a la resolución temporal. Debido a las características de la transformada wavelet es usada en muchas aplicaciones, entre ellas se encuentran el análisis de señales cardiográficas, reconocimiento de patrones y compresión de imágenes entre las más importantes.

Las transformadas wavelet que hay en la teoría wavelet son la transformada wavelet continua (TWC) y la transformada wavelet discreta (TWD). Para la TWC el cálculo de los coeficientes wavelet requiere la solución de una integral en un intervalo infinito para cada uno de ellos; aun así su solución por medio de computadoras es lo suficientemente rápido para su utilización.

En la TWD intervienen dos filtros, el filtro h_k que se define como filtro pasa bajo del cual se obtiene una aproximación de la señal y el filtro g_k que se define como filtro pasa alto recoge los detalles de la señal los cuales representan los coeficientes wavelet. Estos filtros se calculan a partir de la ecuación de escala y son la base del procesamiento digital de señales

con la TWD. El teorema de Shannon establece que para reconstruir una señal muestreada sin pérdida de información sólo es necesario cumplir con el criterio de Nyquist, el cual dice que la frecuencia de muestreo debe ser al menos dos veces la frecuencia máxima implícita en la señal.

Es claro entonces que no se puede usar cualquier función como una wavelet madre, existe una cantidad limitada de funciones wavelet que han sido estudiadas, de este teorema aparece la función $\text{sinc}(t)$ la cuál es el punto de partida para la construcción de la wavelet Shannon, el cuál hay que considerarla con muchos detalles para ser aplicada en nuestro estudio de señales. Se demostró mediante el análisis multirresolución (*AMR*) que $\varphi(t) = \text{sinc}(t)$ es la función de escala de la wavelet Shannon, y a su vez que la wavelet Shannon es una wavelet. Mediante la ecuación de escala se calcularon los coeficientes de la wavelet Shannon para su uso en el tratamiento digital de señales.

En este trabajo de investigación se presenta una aplicación de la transformada wavelet Shannon Real en la búsqueda y definición de patrones en señales de audio generadas por los sonidos repetitivos que varían en amplitud y frecuencia, conocidos como el canto de la ballena jorobada o Yubartas (*Megaptera novaeangliae*). Para la búsqueda de estos patrones inicialmente se aplica diferentes técnicas a las señales originales para eliminar silencios largos y ciertas componentes de frecuencias que no son necesarios para el análisis, obteniendo como resultado una señal más clara, la cual se procedió a segmentarla en trozos y aplicar la wavelet Shannon Real a cada uno de los trozos obtenidos, esto se hizo haciendo uso del software Matlab y su Toolbox wavelet, obteniendo como resultado gráficas representativas de la parte real y parte imaginaria de la transformada wavelet Shannon.

Como las herramientas de Matlab no posee la wavelet Shannon Real se realizó un cálculo matemático y el desarrollo de una corta aplicación para determinar los coeficientes y su gráfica. Para ciertos valores de los parámetros real F_c e imaginario F_b , se considera entonces la parte real como la gráfica de la wavelet Shannon Real. Se observó cada una de las gráficas junto a otras dentro del mismo canto de las ballenas en la misma fecha y en diferentes fechas buscando similitudes entre ellas, en este análisis visual la repetición de estas graficas representan un patrón, todas las gráficas pertenecientes a un patrón se recogieron en una misma imagen para comparar mejor su semejanza. Se encontró que los las ballenas jorobada o Yubartas repiten trozos de su canto en diferentes instantes de tiempo.

INTRODUCCIÓN

El hombre siempre se ha interesado por entender los fenómenos que ocurren a su alrededor, muchos de estos fenómenos son medibles y esas medidas son señales que deben ser procesadas para obtener información útil y detallada. A lo largo de la historia se ha tratado de crear herramientas para obtener estas mediciones, almacenarlas y procesarlas. Con la llegada de los sistemas computacionales se ha incrementado la velocidad de procesamiento de estas señales pero aun así se siguen buscando herramientas más rápidas y eficaces para extraer dicha información; muchas de las señales objeto de estudio presentan variaciones bruscas o son discontinuas, como las señales de audio las cuales requieren de herramientas capaces de caracterizar fenómenos transitorios y la presencia de altas frecuencias. Entre las herramientas tradicionales de análisis de señales se encuentra la transformada de Fourier con ventana donde el grado de resolución tanto del tiempo como de frecuencia, queda reducido al tamaño de la ventana elegida, si la ventana es ancha entonces tendremos buena resolución en el dominio de frecuencia pero mala resolución en el dominio del tiempo. Esta transformada hace uso de sinusoides para representar la señal lo cual la hace apropiada para el análisis de señales estacionarias. En el mundo real la mayoría de señales estudiadas son de carácter no estacionario por lo que la transformada de Fourier a pesar de ser utilizada en muchas aplicaciones se queda corta en otras ya que el grado de resolución de tiempo y frecuencia depende completamente del tamaño de la ventana el cuál puede ser escogida arbitrariamente o dependiente de la experiencia del investigador o en caso contrario por ensayo o error. Para solucionar estos problemas surge la transformada wavelet (TW) como alternativa al análisis de Fourier para el procesamiento de señales con características no estacionarias ya que permite obtener una representación de frecuencia-tiempo simultáneamente al analizar la señal a diferentes frecuencias, con distintas resoluciones utilizando ventanas de diferentes tamaños. Además del análisis de señales la TW es una herramienta muy útil en la compresión de datos, procesamiento de imágenes y en el reconocimiento patrones. En la práctica hay un número limitado de TW como la wavelet Haar, Daubechies, Morley, Meyer y Shannon que son las más utilizadas ya que sus características, eficacia e implementación son bien conocidas.

CAPITULO 1

Análisis de Fourier

El punto de partida, de los estudios y tratados en el tratamiento digital de señales se debe al matemático francés Joseph Fourier, quien desarrolló su teoría cuando estudiaba los fenómenos de propagación y difusión del calor en 1822[14]. Las series y la transformada de Fourier han dado nombre a una de las áreas más importantes del análisis matemático, como es el análisis de Fourier también conocido como análisis armónico. Fourier estableció que una función o señal periódica de período T , podía ser representada como una serie de funciones senoidales y además obtuvo una representación para señales no periódicas, no como suma de funciones senoidales relacionadas armónicamente, sino como integrales de funciones senoidales las cuales no todas están relacionadas armónicamente[1]. Centraremos el trabajo en el espacio $L^2 [0, 2\pi]$ que se define como la clase de todas las funciones de valor complejo y variable real medibles en el intervalo $[0, 2\pi]$ y que satisfacen la condición[19]

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$$

donde el producto interno y la norma para funciones f y g que pertenecen a $L^2 [0, 2\pi]$ se definen de la siguiente manera:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \quad y \quad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

1.1. Series de Fourier

El conjunto de funciones $\{W_n(t) = e^{-int} : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de $L^2 [0, 2\pi]$ donde sus elementos son dilataciones de la función sinusoidal

$$W(t) = e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$

Por lo tanto, usando la identidad de Euler para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt),$$

se puede escribir toda función periódica con período 2π , $f(t) = f(t + 2\pi)$, en series de Fourier como una combinación de funciones exponenciales complejas de la forma [1]

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}. \quad (1.1)$$

donde C_n son llamados los coeficientes de Fourier de f relativos a la base

$$\{W_n(t) = e^{int} : n \in \mathbb{N}\},$$

que contienen la información frecuencial de la señal [15] y pueden expresarse como

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \quad (1.2)$$

De forma equivalente, f puede ser expresada como una suma trigonométrica de senos y cosenos del mismo período 2π , haciendo uso de la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta).$$

Así

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] \quad (1.3)$$

siendo $a_0, a_1, a_2, \dots$ y $b_1, b_2, b_3, \dots$ los coeficientes de Fourier que indican la energía que aporta cada componente de frecuencia a la señal y se determinan de la siguiente manera [15]:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt. \quad (1.4)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

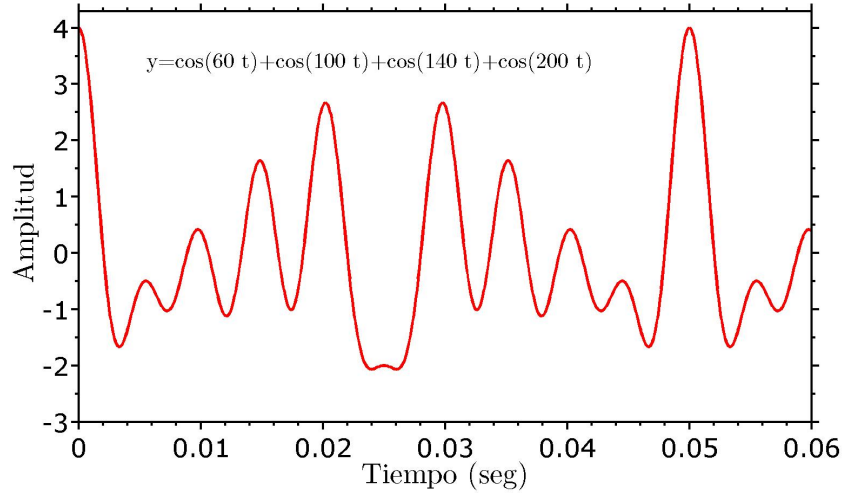
La Figura 1.1 muestra la suma de las funciones cosenos.

Observación 1.1. Algunas preguntas interesantes que se puede considerar aquí son las siguientes: ¿Qué ocurre si la función f está definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$? ¿Cómo se determinan los coeficientes de Fourier de f en $L^2[-\pi, \pi]$? Para responder a esto, debemos considerar que para $a > 0$ y $p > 0$, el conjunto

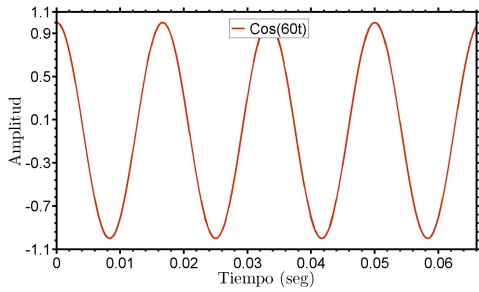
$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{\pi}{p}t\right), \sin\left(\frac{\pi}{p}t\right), \cos\left(\frac{2\pi}{p}t\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}t\right), \dots \right\}$$

es una base ortogonal del espacio $L^2[a, a + 2p]$ que se define como la clase de todas las funciones de valor complejo y variable real medibles en el intervalo $[a, a + 2p]$ y que satisfacen la condición

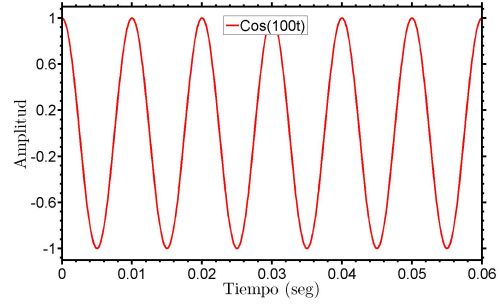
$$\int_a^{a+2p} |f(t)|^2 dt < \infty$$



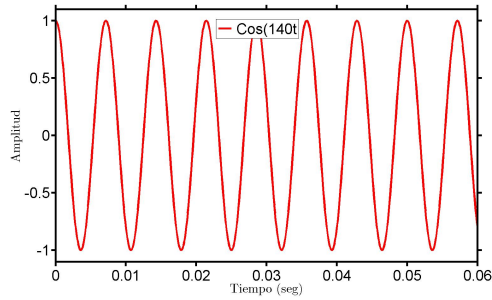
(a) Suma de cosenos



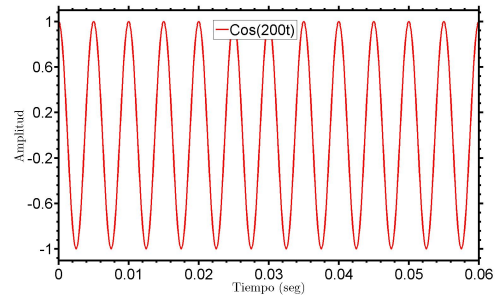
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 1.1: La figura a) representa la suma de las funciones coseno en b), c), d) y e).

donde el producto interno y la norma para funciones f y g que pertenecen a $L^2[a, a + 2p]$ se definen de la siguiente manera:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2p} \int_a^{a+2p} f(t) \overline{g(t)} dt \quad y \quad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2p} \int_a^{a+2p} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

De esta manera, si f es una función periódica de período $2p$ entonces

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) \right] \quad (1.7)$$

siendo $a_0, a_1, a_2, \dots$ y $b_1, b_2, b_3, \dots$ los coeficientes de Fourier dados por

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_a^{a+2p} f(t) dt. \quad (1.8)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_a^{a+2p} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_a^{a+2p} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.10)$$

En particular, si $a = -p$ entonces $f \in L^2[-p, p]$ se representa a través de la serie (1.7) y las fórmulas para los coeficientes (1.8), (1.9) y (1.10) se reducen a las siguientes:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) dt. \quad (1.11)$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.12)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.13)$$

Ahora bien, si $a = 0$ y $L = 2p$ entonces $f \in L^2[0, L]$ se representa mediante la serie (1.7) y las fórmulas para los coeficientes (1.8), (1.9) y (1.10) se reducen ahora a las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt. \quad (1.14)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{L}t\right) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.15)$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{L}t\right) dt. \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.16)$$

Lo anterior nos muestra cómo expresar una función en $L^2[-p, p]$ ó en $L^2[0, L]$ y cómo determinar sus coeficientes de Fourier, en particular, cómo hacerlo para funciones en $L^2[-\pi, \pi]$ (tomando aquí $a = -p$ y $p = \pi$) ó en $L^2[0, 2\pi]$ (aquí $a = 0$ y $p = \pi$). En este último caso, fórmulas para los coeficientes (1.14), (1.15) y (1.16) se reducen a las expresiones (1.4), (1.5) y (1.6)[6].

Ejemplo 1.1. Aproximar la función $f(t) = t^2$, con $t \in [-\pi, \pi]$, utilizando los coeficientes de Fourier.

Solución: Primero observemos que la función $f(t) = t^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$, es una función par. Luego su serie de Fourier dada por la ecuación (1.7) contendrá sólo los términos con los cosenos, de donde se tiene que $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Utilizando la ecuación (1.11) con $p = \pi$, tenemos

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right] = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Además, tomando $p = \pi$ en (1.12) y usando la integración por partes, conseguimos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} t^2 \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt \right] \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{t}{n} \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2} \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{\pi}{n} (-1)^n - \frac{\pi}{n} (-1)^n \right] \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\pi}{n} (-1)^n + \frac{\pi}{n} (-1)^n \right] \\
 &= \frac{2}{n\pi} \left[2 \frac{\pi}{n} (-1)^n \right] \\
 &= \frac{4}{n^2} (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt)$$

es la expansión en series de Fourier de $f(t) = t^2$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ como se observa en la figura 1.2.

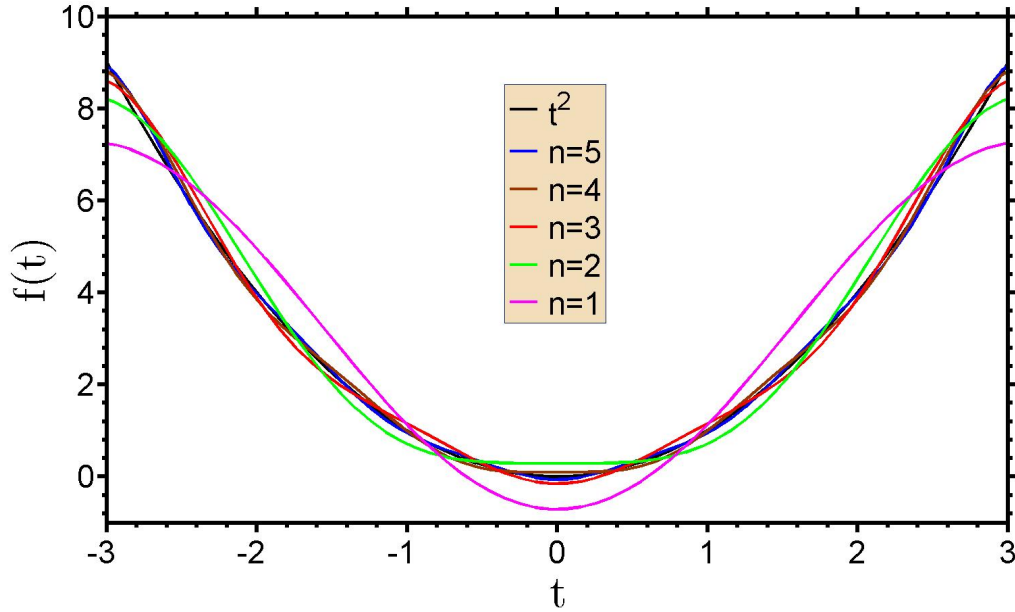


Figura 1.2: Expansión en series de Fourier de la función $f(t) = t^2$ para los cinco primeros términos

Tradicionalmente para funciones no periódicas $f(t)$ definidas en $\mathbb{R}$, la transformada de Fourier ha sido empleada en el análisis de señales porque permite descomponer una señal en una suma de señales senoidales de diferentes frecuencias w .

1.2. Transformada de Fourier

Definición 1.1. La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$\widehat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt, \quad w \in \mathbb{R} \quad (1.17)$$

donde la información que proporciona 1.17 indica que no importa el instante de tiempo en que aparece la componente de frecuencia, porque no afectará el resultado de la integral. A partir de la señal descompuesta, se puede volver a reconstruir la señal original utilizando la expresión:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw \quad (1.18)$$

La transformada de Fourier puede ser vista como un operador lineal F tal que

$$\begin{array}{ccc} F: L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & F(f) = \widehat{f} \end{array}$$

De esta manera, se tiene $\|F(f)\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$. La norma del operador F es

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_2 \neq 0} \frac{\|F(f)\|_2}{\|f\|_2} = \sqrt{2\pi}.$$

Puesto que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es un conjunto denso en $L^2(\mathbb{R})$, F se puede extender en $L^2(\mathbb{R})$ por ser un operador lineal que esencialmente preserva la norma. En efecto, la transformada de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se define seleccionando por la densidad de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ una sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_k \rightarrow f$ en la norma de $L^2(\mathbb{R})$.

Por la identidad de Plancherel se tiene que

$$\|\widehat{f_k} - \widehat{f_j}\|_2 = \|\widehat{f_k - f_j}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f_k - f_j\|_2$$

y con ello que $\{\widehat{f_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Como este espacio es completo entonces la sucesión debe converger a un límite en este espacio. Luego definimos como $\widehat{f}$ a tal límite:

$$\widehat{f_k} \rightarrow \widehat{f} \quad \text{en la norma de } L^2(\mathbb{R}).$$

Tengamos en cuenta que la definición de $\widehat{f}$ no depende de la escogencia de la sucesión $\{\widehat{f_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Por tal razón, en adelante, siempre hablaremos de la transformada de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$ [1].

A continuación veamos las principales propiedades de la transformada de Fourier.

Proposición 1.1 (Propiedades de la Transformada de Fourier). Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces se cumplen:

1) **Linealidad.** Para $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\widehat{\alpha f_1 + \beta f_2} = \alpha \hat{f}_1 + \beta \hat{f}_2.$$

2) **Dilatación en el tiempo.** Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y definamos $g(t) = f(at)$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Se tiene que

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right).$$

3) **Desplazamiento en el tiempo.** Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y definamos la función $g(t) = f(t - \lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\hat{g}(w) = e^{-i\lambda w} \hat{f}(w).$$

4) **Desplazamiento en frecuencia (Modulación).** Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y la función $g(t) = e^{i\lambda t} f(t)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\hat{g}(w) = \hat{f}(w - \lambda).$$

5) **Convolución en el dominio del tiempo.** Sean $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$. La convolución de las funciones f y g está dada por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La transformada de Fourier de la convolución está dada por

$$\widehat{(f * g)}(w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w).$$

6) **Diferenciación en el dominio del tiempo.** Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ una función continua tal que $f' \in L^2(\mathbb{R})$. Se cumple que

$$\widehat{f'}(w) = iw\hat{f}(w).$$

En el caso en que $f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$, se cumple

$$\widehat{f^{(k)}}(w) = (iw)^k \hat{f}(w).$$

7) **Teorema de Parseval.** Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw.$$

Es decir,

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_2^2.$$

Esto es, que la energía de una señal en el dominio del tiempo es proporcional a la energía calculada en el dominio de la frecuencia.

Demostración

1) Por la linealidad de la integral, tenemos

$$\begin{aligned} (\alpha \widehat{f_1} + \beta \widehat{f_2})(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f_1 + \beta f_2)(t) e^{-iwt} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-iwt} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-iwt} dt \\ &= \alpha \widehat{f_1}(w) + \beta \widehat{f_2}(w) \\ &= (\alpha \widehat{f_1} + \beta \widehat{f_2})(w). \end{aligned}$$

2) Si $g(t) = f(at)$ y $a \neq 0$, tenemos

$$\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-iwt} dt.$$

Consideremos el cambio de variable $\mu = at$. Así, $t = \frac{\mu}{a}$.

Si $a > 0$ entonces

$$\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-i w \frac{\mu}{a}} \frac{1}{a} d\mu = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-i \frac{w}{a} \mu} d\mu = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{w}{a}\right).$$

Si $a < 0$ entonces

$$\hat{g}(w) = \int_{\infty}^{-\infty} f(\mu) e^{-i w \frac{\mu}{a}} \frac{1}{a} d\mu = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-i \frac{w}{a} \mu} d\mu = \frac{1}{-a} \widehat{f}\left(\frac{w}{a}\right).$$

Así tenemos que

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{w}{a}\right).$$

3) Si $g(t) = f(t - \lambda)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \lambda) e^{-iwt} dt.$$

Consideremos el cambio de variable $\mu = t - \lambda$. Así, $t = \mu + \lambda$. De esta manera

$$\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-i w (\mu + \lambda)} d\mu = e^{-i \lambda w} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-i w \mu} d\mu = e^{-i \lambda w} \widehat{f}(w).$$

4) Si $g(t) = e^{i\lambda t} f(t)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}\hat{g}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(t) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(w-\lambda)t} dt = \hat{f}(w - \lambda).\end{aligned}$$

5) A partir de la definición de la convolución y tomando $\mu = t - \tau$, obtenemos

$$\begin{aligned}(\widehat{f * g})(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right] e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-iwt} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\mu) e^{-iw(\mu + \tau)} d\mu \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\mu) e^{-iw\mu} e^{-iw\tau} d\mu \right] d\tau \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-iw\tau} d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\mu) e^{-iw\mu} d\mu \right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\widehat{f * g})(w) = \hat{f}(w) \hat{g}(w).$$

6) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $f' \in L^2(\mathbb{R})$. Demostremos que $\widehat{f'}(w) = iw \hat{f}(w)$. En efecto, usando la definición de la transformada de Fourier tenemos

$$\widehat{f'}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-iwt} dt.$$

Aplicando la integración por partes y recordando que si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$, obtenemos

$$\widehat{f'}(w) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-iw e^{-iwt}) dt = iw \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = iw \hat{f}(w).$$

Ahora bien, mostremos utilizando un argumento inductivo que si $f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f^{(k)}}(w) = (iw)^k \hat{f}(w)$, para cada $k \in \mathbb{Z}^+$. Para $k = 1$ el enunciado ya lo hemos demostrado. Supongamos entonces que la proposición es válida para algún entero positivo n , es decir, si $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$ entonces

$$\widehat{f^{(n)}}(w) = (iw)^n \hat{f}(w) \iff \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t) e^{-iwt} dt = (iw)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

y probemos que para $n + 1$ también se tiene la validez.

Mediante la integración por partes, el hecho de que si $f^{(n)} \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ y la hipótesis de inducción, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\widehat{f^{(n+1)}}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+1)}(t) e^{-iwt} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(-iw e^{-iwt}) dt \\ &= iw \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)} e^{-iwt} dt = iw(iw)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \\ &= (iw)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt = (iw)^{n+1} \hat{f}(w).\end{aligned}$$

7) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Usando la ecuación (1.18) tenemos

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{f(t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(w)} e^{-iwt} dw \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(w)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(w)} \hat{f}(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2.\end{aligned}$$

Esta última igualdad nos permite concluir la prueba del teorema[16, 20].

Ejemplo 1.2. Calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-\pi|t|}$, donde $t \in \mathbb{R}$. (Ver Figuras 1.3 y 1.4.)

Remplazando la función en la ecuación 1.17 tenemos:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

Reemplazando la función,

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|t|} e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi|t|-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(-\pi-iw)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(\pi+iw)t} dt \\ &= \frac{e^{(-\pi-iw)t}}{(-\pi-iw)} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-(\pi+iw)t}}{(-\pi-iw)} \Big|_0^{\infty}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(-\pi - iw)} + \frac{1}{(-\pi + iw)}$$

Luego,

$$\hat{f}(w) = \frac{2\pi}{\pi^2 + w^2}.$$

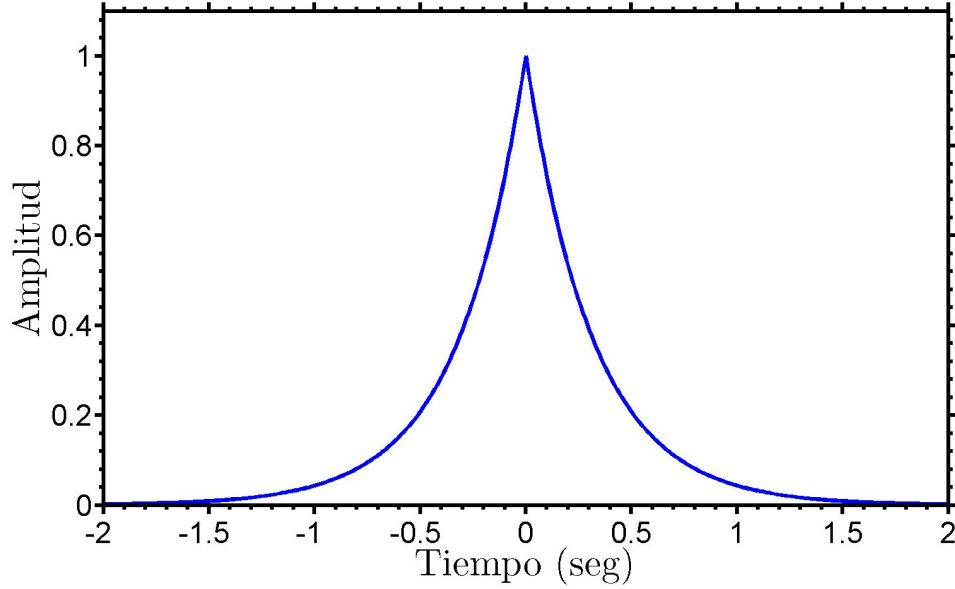


Figura 1.3: Señal exponencial $f(t) = e^{-\pi|t|}$ del ejemplo 1.2

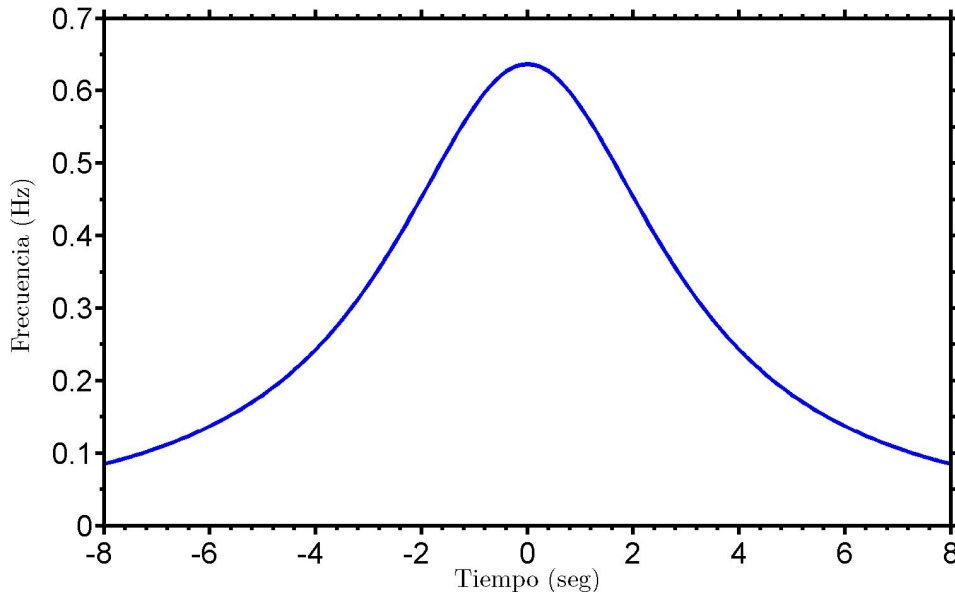


Figura 1.4: Transformada de Fourier de señal exponencial del ejemplo 1.2

Un aspecto importante en la TF es que cada pico que se muestra en ella corresponde a una señal senoidal implícita dentro de la función original, a estas se les puede denominar

componentes frecuenciales ya que cada una tiene diferente frecuencia, en la Figura 1.5 se ilustra una señal compuesta de una suma de cosenos a diferentes frecuencias por lo cual en su TF se aprecian cada una de sus componentes ilustradas en forma de picos (Figura 1.5 al lado derecho). En este caso cada componente o cada seno de la señal se manifiesta en todo el intervalo. Ahora, dado el caso en el que las componentes no existan en todo el intervalo

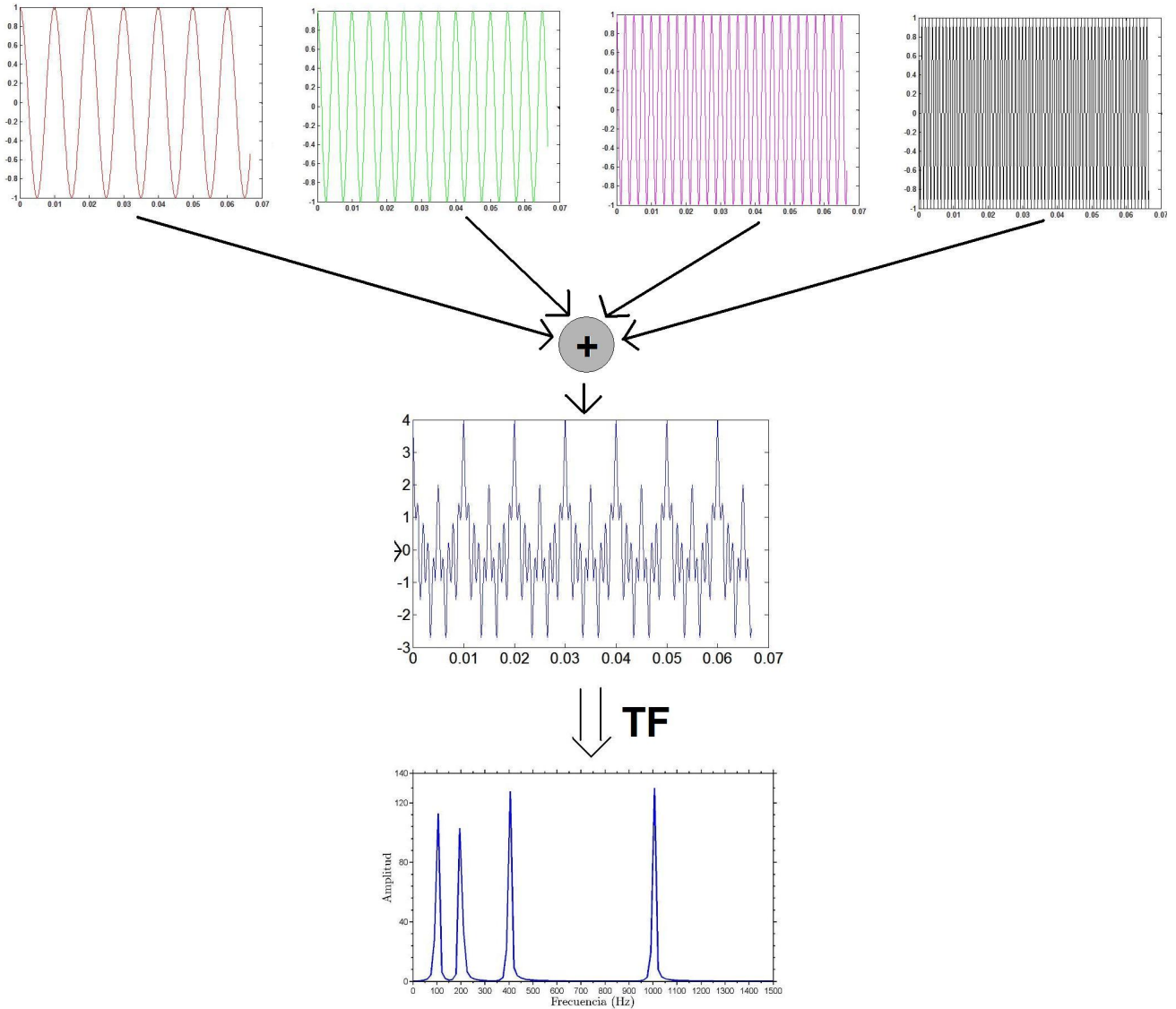


Figura 1.5: Función de suma de cosenos a diferentes frecuencias y su Transformada de Fourier

de análisis aún así es posible encontrarlas con la TF, un ejemplo de ello se puede observar en la Figura 1.6a en la que se tiene una función por partes:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi 200t) & 0 \leq t < 0,05 \\ \sin(2\pi 500t) & 0,05 \leq t < 0,1 \end{cases}$$

esta contiene 2 componentes frecuenciales pero que no existen en todo el intervalo, su

TF nos muestra las componentes de 200Hz y 500Hz como 2 picos. Esto conlleva a un problema: ¿Dónde ocurre el cambio en la frecuencia?, es más esta TF podría ser confundida con otra a simple vista, observando la Figura 1.6b que consta de una función:

$$f(t) = \sin(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$$

vemos que su TF también muestra 2 picos, uno en 200 Hz y otro en 500 Hz, debido a esto es necesario conocer en qué momento suceden estos cambios abruptos en la frecuencia.

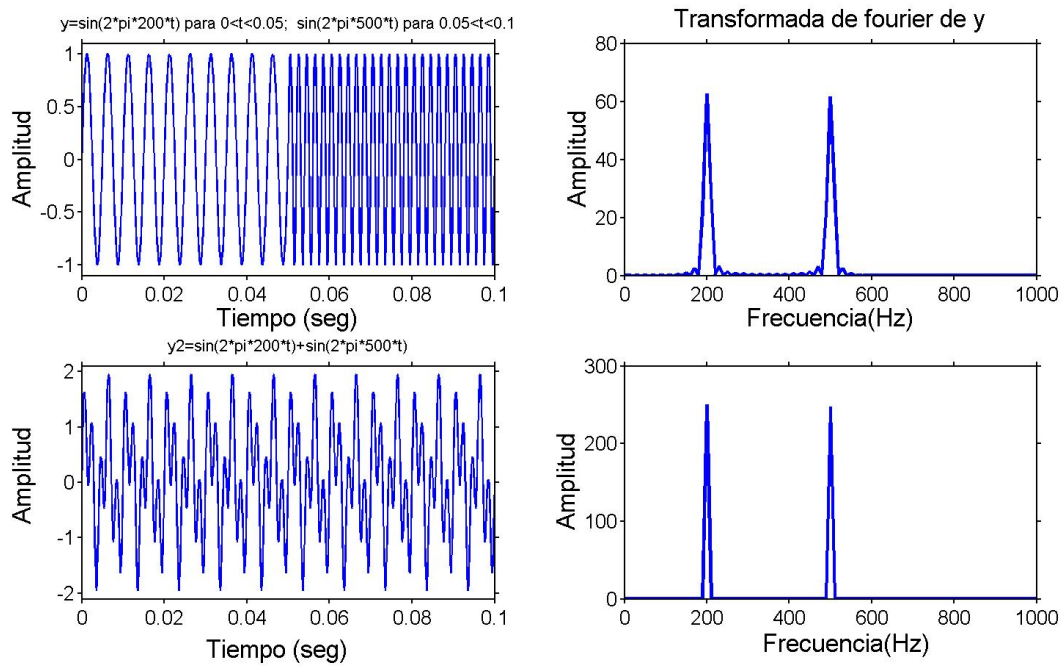


Figura 1.6: a) Señal por partes y su transformada de Fourier b) Señal suma de senos y su transformada de Fourier

De las Figuras 1.5 y 1.6 se puede concluir que esta transformada nos ofrece perfecta resolución en frecuencia pero no tiene resolución en el tiempo, siendo la transformada de Fourier una herramienta muy útil en el análisis de señales estacionarias, es decir señales de duración infinita y cuyo contenido espectral no cambia con el tiempo, por lo cual no se necesita saber en qué tiempo la señal cambia de frecuencia, ya que las frecuencias están presentes en todos los instantes de tiempo.

Dado que las señales acústicas objeto de nuestro estudio no son de duración infinita ni de carácter estacionario, entonces los resultados que se obtengan de su espectro no son suficientes para un buen análisis de la señal; estas clases de señales llamadas no estacionarias, cuya forma varía a lo largo del tiempo, no podemos analizarlas con estas transformadas, sino que se necesita tener en forma conjunta información de la evolución temporal y frecuencial de la señal, siendo necesario el empleo de otra técnica como la transformada de Fourier con ventana (TFV).

1.3. Transformada de Fourier con ventana

Dennis Gabor (1946) mostró la deficiencia de la transformada de Fourier e introdujo la transformada de Fourier con ventana (TFV) usando una función $g(t)$ que denominó “ventana”, donde dicha ventana de ancho fijo deberá deslizarse sobre el eje x mediante un factor de translación[15].

El procedimiento consiste en dividir la señal f en pequeños segmentos a través del tiempo de tal manera que podamos asumir que en cada segmento la señal es estacionaria y así aplicar la transformada de Fourier para cada segmento local de la señal, trasladando la función ventana hasta que sea cubierta totalmente la señal.

Se define la transformada de Fourier con ventana de una función continua $f \in L^2(\mathbb{R})$ y $g \in L^2(\mathbb{R})$ una función con ventana como:

$$T_g(w, b) = \widehat{f}_g(b, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t-b) e^{-iwb} dt; \quad b, w \in \mathbb{R} \quad (1.19)$$

donde $g(\cdot - b)$ mediante un factor de traslación b restringe la función f a una porción de la señal donde la TF establece un espectro local, representado en cada instante de tiempo las componentes frecuenciales[10, 15, 7]. Se puede reconstruir la función original mediante la transformada de Fourier con ventana a través de una integral doble. Más concretamente,

Proposición 1.2. Sean f y g funciones en $L^2(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}$. Se cumple que:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_g(b, w) \widehat{g}(t-b) e^{iwt} db dw. \quad (1.20)$$

Demostración Sea $\widetilde{f}(t) = f(t) g(t-b)$, $t \in \mathbb{R}$. Como $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$, usando la función de inversión tenemos:

$$f(t) g(t-b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_g(w) e^{iwt} dw$$

si multiplicamos por $g(t-b)$ con $t \in \mathbb{R}$, e integramos en ambos lados con respecto a b se tiene,

$$\begin{aligned} f(t) g(t-b) g(t-b) &= g(t-b) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_g(w) e^{iwt} dw \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t-b) g(t-b) db &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t-b) db \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_g(w) e^{iwt} dw \\ f(t) \|g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_g(w) g(t-b) e^{iwt} db dw \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi \|g\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}_g(w) \widehat{g}(t-b) e^{iwt} db dw. \end{aligned}$$

Las características de la función ventana son fundamentales en las señales no estacionarias en el análisis tiempo-frecuencia [21, 9]. Veamos ahora las principales propiedades de la TFV [21].

Proposición 1.3 (Propiedades de la transformada de Fourier con ventana). Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ y g la función ventana, entonces

- 1) Traslación: si $f_0(t) = f(t - t_0)$ entonces $\widehat{f_0}(t, w) = e^{-iw_0 t} \widehat{f}(t - t_0, w)$.
- 2) Si $f_{w_0}(t) = e^{iw_0 t} f(t)$ entonces $\widehat{f_{w_0}}(t) = \widehat{f}(t, w - w_0)$.

[Demostración]

Verifiquemos cada una de estas propiedades:

- 1) Haciendo $\mu = t - t_0$ tenemos,

$$\begin{aligned} \widehat{f_0}(t, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) g(t - t_0) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) g(t - \mu - t_0) e^{-iw(\mu + t_0)} d\mu \\ &= e^{-iw t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) \widehat{f}((t - t_0) - \mu) e^{-iw\mu} d\mu \\ &= e^{-iw t_0} \widehat{f}(t - t_0, w) \end{aligned}$$

- 2) Ahora

$$\begin{aligned} \widehat{f_{w_0}}(t, w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{w_0}(t) g(t - b) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw_0 t} f(t) g(t - b) e^{-iwt} dt \\ &= e^{-iw_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - b) e^{-it(w - w_0)} dt. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\widehat{f_{w_0}}(t, w) = \widehat{f}(t, w - w_0)$$

A continuación se muestran algunos ejemplos de señales en el dominio frecuencial y temporal de la TFFV, la Figura 1.7a muestra la señal original del canto de una ballena Jorobada o Yubartas en el tiempo, la Figura 1.7b muestra la TF, la Figura 1.7c muestra la TFFV, mostrando como la TFFV sí nos puede dar información temporal a diferencia de la TF que únicamente nos da información frecuencial. Por ultimo en la figura 1.7 tenemos el mapa de contornos de la TFFV el cual nos muestra los mayores picos con colores fuertes.

El problema que presenta la TFFV es que el grado de resolución tanto del tiempo como de frecuencia, queda reducido a la correcta elección de la ventana a utilizar. Si se usa una ventana de longitud infinita se obtiene la transformada de Fourier clásica, si la ventana es muy angosta entonces se analizará una pequeña porción de la señal permitiendo obtener una buena resolución en tiempo pero mala resolución frecuencial, si la ventana es muy ancha entonces tendremos buena resolución en el dominio de frecuencia pero pobre resolución

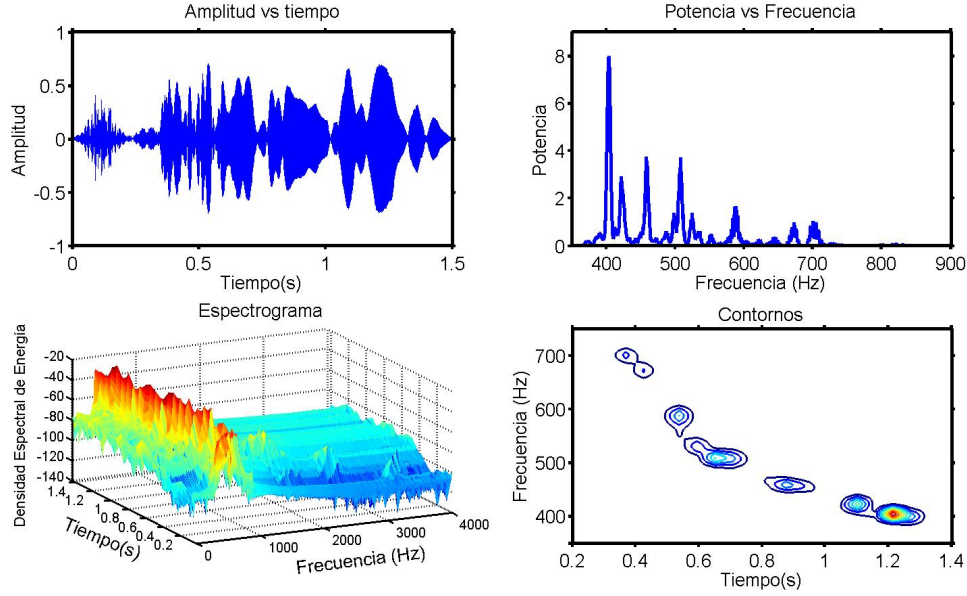


Figura 1.7: a) señal original, b) TF, c) TFV(espectrograma), d) mapa de contornos de la TFV

temporal [10, 4], esto lo podemos apreciar en la Figura 1.8 la cual ilustra como al aumentar el ancho de la ventana se obtiene mejor información frecuencial pero se pierde la información temporal.

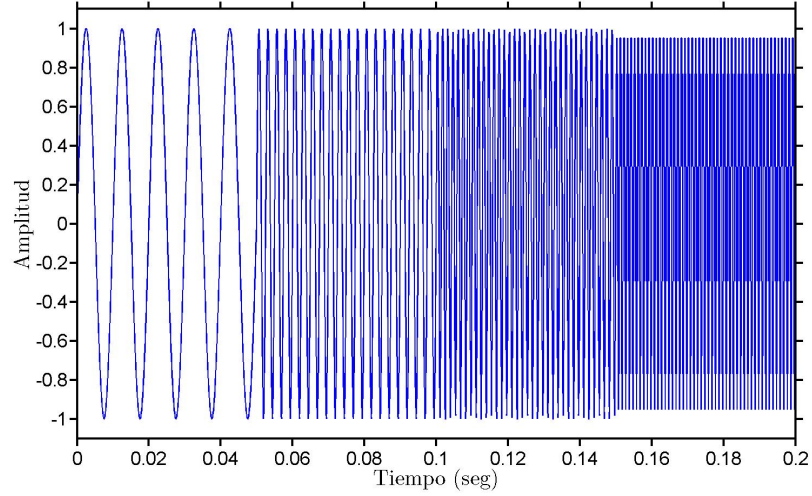
Con lo anterior parecería que el problema de representación tiempo-frecuencia de una señal estaría resuelto, pero el principio que nos da explicación a este fenómeno, es el principio de incertidumbre de Heisenber en la forma

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{E_x}{4\pi}$$

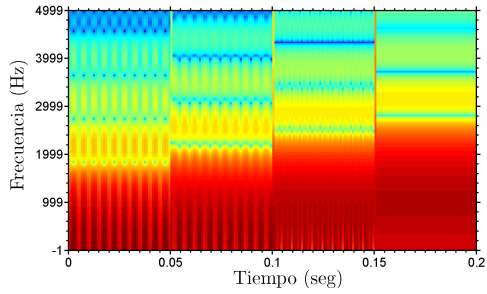
el cual establece que no es posible conocer exactamente la representación tiempo-frecuencia de una señal, es decir, no es posible conocer que componentes de frecuencia existen en ciertos instantes de tiempo, lo que si podemos conocer son las componentes de frecuencia existentes en un intervalo de tiempo determinado [9]. Consecuentemente el problema consiste en la correcta elección de la ventana que depende de las diferentes aplicaciones que le demos a la señal a utilizar, para establecer si necesitamos más resolución en tiempo y menos resolución en frecuencia o viceversa.

Para el proceso y análisis de señales se han diseñado numerosas funciones ventana en diferentes campos de la ciencias tales como: ventana de Hamming, ventana rectangular, ventana de Hanning y ventana Gaussiana.

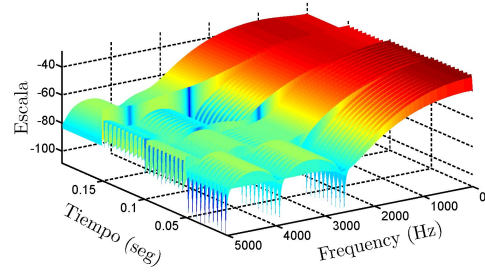
Gabor utilizó una ventana de ancho fijo, propuso a la función Gaussiana como la ventana óptima $g(t)$ (ver Figura 1.9) para localización tanto en el dominio temporal como en el frecuencial.



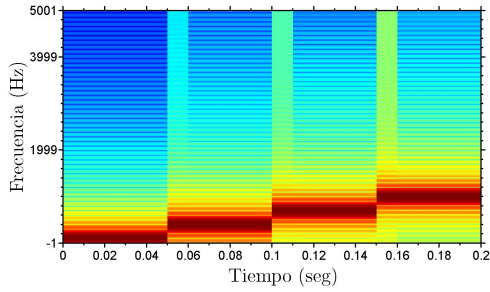
(a) Función por partes con senos de 100, 400, 700 y 1000 Hz



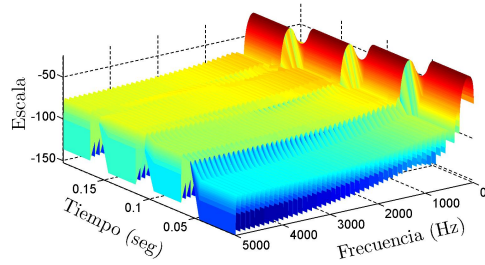
(b) Ventana de 0.001 seg en 2D



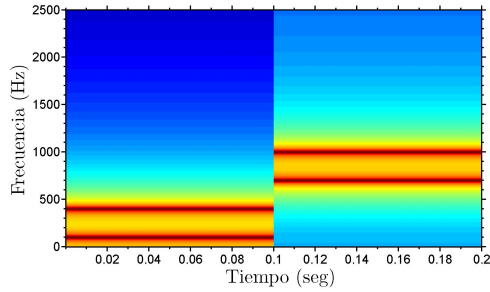
(c) Ventana de 0.001 seg en 3D



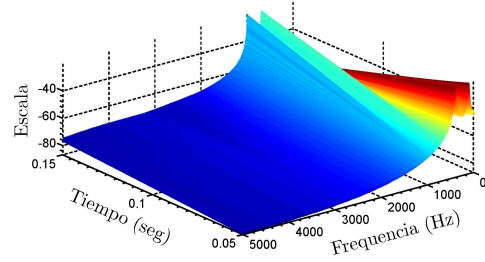
(d) Ventana de 0.01 seg en 2D



(e) Ventana de 0.01 seg en 3D



(f) Ventana de 0.1 seg en 2D



(g) Ventana de 0.1 seg 3D

Figura 1.8: TFV de una señal con diferentes anchos de ventana

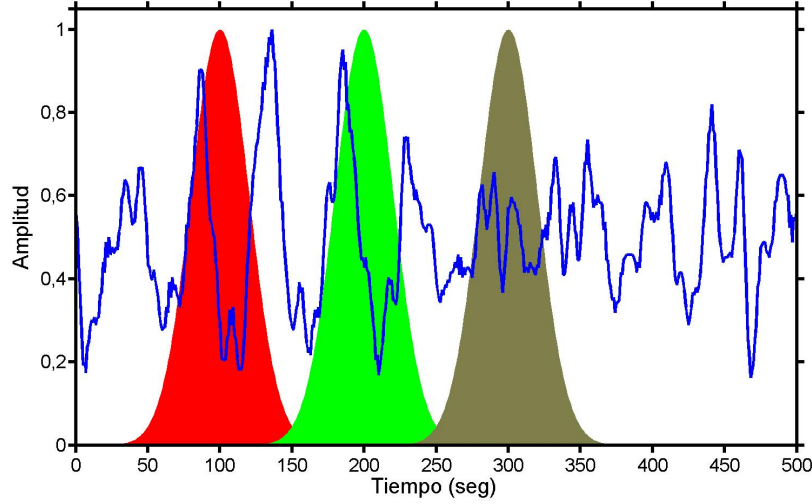


Figura 1.9: Ventana de Gauss

La función Gaussiana definida como:

$$g_{\alpha}(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}},$$

donde $\alpha > 0$ se mantiene fijo y determina el ancho de la ventana. La transformada de Gabor de $f \in L^2$ está definida como:

$$(G_b^{\alpha} f)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_{\alpha}(t - b) e^{-iwt} dt,$$

donde esta transformada localizó la transformada de Fourier de f alrededor de $t = b$. Integrando esta transformada se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (G_b^{\alpha} f)(w) db &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_{\alpha}(t - b) e^{-iwt} dt \right) db \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}(t - b) db \right) \end{aligned}$$

como

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}(t - b) db = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}(x) dx = 1$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} (G_b^{\alpha} f)(w) db = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

De aquí,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (G_b^{\alpha} f)(w) db = \hat{f}(w).$$

Luego la señal original se transforma en una función de tiempo y frecuencia, la cual da información de las frecuencias en un cierto tiempo. Esta transformada también se conoce como la transformada de Fourier en tiempo corto (STFT) [11].

Para el procesamiento digital de una señal discreta finita usamos la transformada discreta de Fourier (TDF) lo cual implica que las frecuencias están discretizadas y el intervalo de posibles frecuencias es acotado.

1.4. Transformada discreta de Fourier (TDF)

Definamos el conjunto

$$Z_n = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

y definamos el conjunto

$$C^N = l^2(\mathbb{Z}_N) = \{f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) : f_n \in C, 0 \leq n \leq N-1\}.$$

Con la suma y multiplicación escalar usual de números complejos componente a componente C^N es un espacio vectorial de dimensión N sobre C . Definimos en este espacio el producto interno. Para cualesquier $f, g \in C^N$ definimos

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \overline{g_n}$$

y la norma de f está dada por

$$\|f\| = \left(\sum_{n=0}^{N-1} |f_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Podemos extender los vectores de $C^N = l^2(\mathbb{Z}_N)$ periódicamente para todos los enteros requiriendo que tenga período N de la siguiente manera:

$$f_{n+N} = f_n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Así para encontrar f_n para $n \notin \{0, 1, \dots, N-1\}$, aplicamos el algoritmo de la división dividiendo por N y tenemos que $n = kN + r$ donde $r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Así $n = r \pmod{N}$ y por lo tanto $f_n = f_r$. Por ejemplo si $N = 16$, entonces para hallar f_{-25} , observemos que $-25 = 7 \pmod{16}$. Así $f_{-25} = f_7$.

Observemos que los vectores $\{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}$ donde $e_n(k) = 1$ si $n = k$ y $e_n(k) = 0$ si $n \neq k$, es la base usual de C^N . Definamos el conjunto $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ donde

$$u_m(k) = e^{2\pi i m k / N} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Observemos que

$$\langle u_m, u_j \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} u_m(k) \overline{u_j(k)} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i m k / N} e^{-2\pi i j k / N} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k (m-j) / N}.$$

Si $m = j$ el término dentro de la suma es 1; así $\langle u_m, u_j \rangle = N$. Si $m \neq j$, $e^{2\pi i(m-j)/N} \neq 1$ para $m, j = 0, 1, \dots, N-1$. La suma es una suma parcial geométrica, por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k(m-j)/N} = \frac{1 - (e^{2\pi i(m-j)/N})^N}{1 - e^{2\pi i(m-j)/N}} = \frac{1 - 1}{e^{2\pi i(m-j)/N}} = 0.$$

Esto implica que $\langle u_m, u_j \rangle = 0$, esto es $u_m \perp u_j$. Así $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$ es un conjunto ortogonal en C^N y por lo tanto son linealmente independientes y así el conjunto es una base para C^N . Observemos que dado que $\langle u_m, u_m \rangle = N$ entonces $\|u_m\|^2 = N$ o sea que $\|u_m\| = \sqrt{N}$. Es decir que el conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ donde

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{N}} u_m$$

es una base ortonormal para C^N .

Definición 1.2. Dada $f \in C^N = l^2(\mathbb{Z}_N)$ definimos la transformada discreta de Fourier (TDF) como:

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{kn}{N}}, \quad n \in \mathbb{Z}_N$$

Si denotamos $W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ entonces

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{nk}.$$

Observemos que

$$\hat{f}_n = \langle f, u_n \rangle \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Denotemos

$$\hat{f} = (\hat{f}_0, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{N-1}).$$

Así

Observemos que $\hat{f}$ es un vector en C^N . Por lo tanto la transformada discreta de Fourier es un operador definido por

$$\begin{aligned} TDF : l^2(\mathbb{Z}_N) &\rightarrow l^2(\mathbb{Z}_N) \\ f &\rightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

La transformada discreta de Fourier satisface ciertas propiedades de gran importancia, enunciaremos las más importantes sin detenernos en sus demostraciones que relativamente se hacen directamente.

1. **Linealidad** Sean $f, g \in \mathbb{C}^N$, funciones con respectivas TDF.

Si $h_k = af_k + bg_k$ para $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$TDF(h) = aTDF(f) + bTDF(g)$$

2. Periodicidad

Si f es una función periódica de período N , entonces su TDF , también es N -periódica. Es decir, si $f_{k+N} = f_k$, entonces $\widehat{f}_{n+N} = \widehat{f}_n$

3. Desplazamiento en el tiempo

Sea $f \in \mathbb{C}^N$ una función N -periódica con $n, r \in \mathbb{Z}$; y $g \in \mathbb{C}^N$ tal que $g_n = f_{n+p}$, entonces

$$\widehat{g}_n = W_N^{-np} \widehat{f}_n$$

Demostración. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{g}_n &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_N^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{k+p} W_N^{nk} = \sum_{l=p}^{N+p-1} f_l W_N^{n(l-p)} = W_N^{-np} \sum_{l=p}^{N+p-1} f_l W_N^{nl} \\ &= W_N^{-np} \left(\sum_{l=p}^{N-1} f_l W_N^{nl} + \sum_{l=N}^{N+p-1} f_l W_N^{nl} \right) = W_N^{-np} \left(\sum_{l=p}^{N-1} f_l W_N^{nl} + \sum_{l=N}^{N+p-1} f_{l+N} W_N^{nl} \right) \\ &= W_N^{-np} \left(\sum_{l=p}^{N-1} f_l W_N^{nl} + \sum_{j=0}^{p-1} f_j W_N^{n(j-N)} \right) = W_N^{-np} \left(\sum_{l=p}^{N-1} f_l W_N^{nl} + \sum_{j=0}^{p-1} f_j W_N^{nj} \right) \\ &= W_N^{-np} \left(\sum_{j=0}^{p-1} f_j W_N^{nj} + \sum_{l=p}^{N-1} f_l W_N^{nl} \right) = W_N^{-np} \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j W_N^{nj} \right) = W_N^{-np} \widehat{f}_n \end{aligned}$$

Observemos que si definimos para $f \in l^2(Z_N)$ y $k \in Z$

$$(R_k f)_n = f_{n-k} \text{ para } n \in Z$$

entonces por el resultado anterior

$$\widehat{R_k f}_n = W_N^{nk} \widehat{f}_n = e^{-2\pi i n k} \widehat{f}_n.$$

Luego $|\widehat{R_k f}_n| = |\widehat{f}_n|$. El operador $R_k : l^2(Z_N) \rightarrow l^2(Z_N)$ es llamado **operador de traslación**.

4. Desplazamiento en la frecuencia

Si $g_n = f_n W_N^{-np}$, entonces

$$\widehat{g}_n = \widehat{f}(n-p)$$

Demostración.

$$\widehat{g}_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k W_N^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{-kp} W_N^{nk} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{k(n-p)} = \widehat{f}_{n-p}.$$

5. Invertibilidad del operador TDF

El operador TDF es invertible.

Demostración. Sea $TDF(f) = 0$, entonces $\hat{f}_n = \langle f, u_m \rangle = 0$ para todo $m = 0, 1, \dots, N-1$. Por lo tanto $f = 0$, es decir el núcleo del operador, $Ker(TDF) = \{0\}$ y por lo tanto TDF es un operador invertible.

Puesto que TDF es lineal, la matriz de Fourier M_N asociada a este operador es dada por

$$\begin{aligned}
 Mn &= [TDF(e_0) \ TDF(e_1) \ TDF(e_2) \cdots TDF(e_{N-1})] \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{e}_0 & \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \cdots & \hat{e}_{N-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{W}_N & \overline{W}_N^2 & \cdots & \overline{W}_N^{N-1} \\ 1 & \overline{W}_N^2 & \overline{W}_N^4 & \cdots & \overline{W}_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{W}_N^{N-1} & \overline{W}_N^{2(N-1)} & \cdots & \overline{W}_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \overline{W}_N & \overline{W}_N^2 & \cdots & \overline{W}_N^{N-1} \\ 1 & \overline{W}_N^2 & \overline{W}_N^4 & \cdots & \overline{W}_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \overline{W}_N^{N-1} & \overline{W}_N^{2(N-1)} & \cdots & \overline{W}_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

donde $W_n = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$

Observemos que M_N es una matriz simétrica y puesto que TDF es invertible entonces M_N es invertible. De esta manera, representando f y $\hat{f}$, como vectores de longitud N

$$f = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \quad y \quad \hat{f} = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{N-1} \end{bmatrix}$$

Entonces, podemos escribir la transformada discreta de Fourier TDF como :

$$\hat{f} = M_N f. \tag{1.21}$$

Siendo M_N invertible tenemos que

$$f = M_N^{-1} \hat{f}. \tag{1.22}$$

Dado que el conjunto $\{v_i, i = 0, 1, 2, \dots, N-1\}$ forma una base ortonormal de C^N , entonces tenemos que:

$$M_N M_N^* = N I_N \Rightarrow \frac{1}{N} M_N^* = M_N^{-1}. \tag{1.23}$$

Donde M_N^* representa la matriz compleja conjugada de M_N e I_N es la matriz identidad $N \times N$.

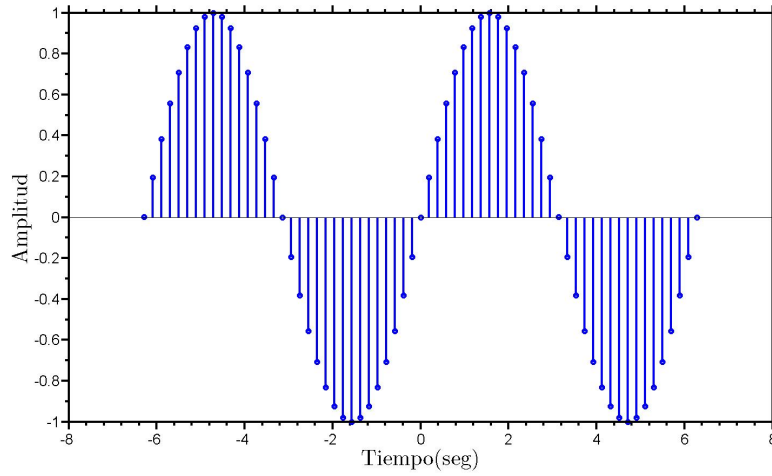
Así tenemos que

$$f = M_N^{-1} \hat{f} = \frac{1}{N} M_N^* \hat{f}$$

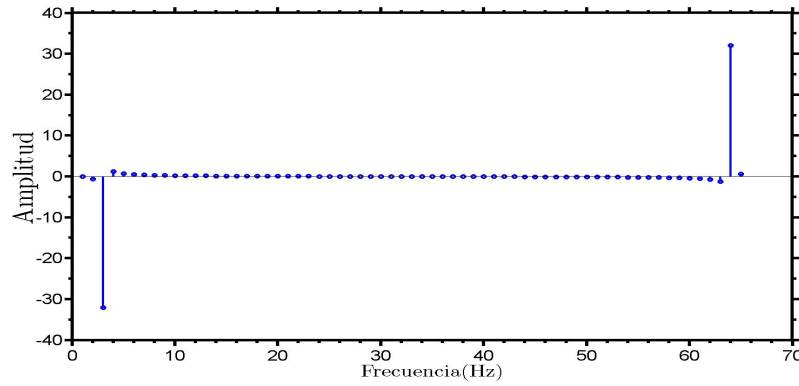
es la expresión que representa una versión matricial del teorema de inversión de la transformada discreta de Fourier[2][16][21][20]. O sea

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k W_N^{-nk}.$$

Ahora veamos un ejemplo alusivo a la TDF, la Figura 1.10 representa la función $f(t) = \sin(t)$ entre $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ discretizada con frecuencia de muestreo $f_s = 5Hz$ con un total de 64 datos y su respectiva TDF.



(a) $f(t) = \sin(t)$



(b) TDF

Figura 1.10: a) Función $f(t) = \sin(t)$ discretizada b) TDF

1.5. Transformada rápida de Fourier (FFT)

A lo largo del estudio sobre la teoría de Fourier, nos podemos dar cuenta que el cálculo de la transformada discreta de Fourier es una herramienta muy útil y de gran importancia al momento de procesar señales. Pero también es cierto, que para obtener la sucesión con los valores de la transformada de Fourier se necesitan muchos cálculos numéricos y esto puede resultar muy complejo.

Uno de las grandes ventajas que presenta la transformada discreta de Fourier (TDF), como herramienta para el análisis espectral de señales, es que permite definir un método de cálculo de una manera rápida y eficiente mediante un algoritmo desarrollado en 1946 por Cooley y Tuckey, conocido hoy en día como transformada rápida de Fourier (FFT) y es un algoritmo muy utilizado en programas computacionales donde se aplica la TDF.

Dada una sucesión de N valores $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$, debemos calcular la sucesión $\{\widehat{f}_n\}_{n=0}^{N-1}$ de N números complejos, según la expresión:

$$\widehat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{nk}, \text{ para } 0 \leq k \leq N-1. \quad (1.24)$$

El cálculo directo de la TDF mediante la expresión dada en (3.6) requiere de N multiplicaciones complejas ($4N$ multiplicaciones reales), y de $N-1$ sumas complejas ($4N-2$ sumas reales) para cada valor de k .

Así, para calcular los N valores de la TDF se necesitan N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas en total.

De esta manera, si queremos calcular la sucesión de valores de la TDF para un valor de N muy grande, podríamos pensar que el calculo es imposible. Afortunadamente con el uso de la FFT, es posible realizar el calculo en tiempo real[7].

La rapidez del cálculo de la TDF, mediante el algoritmo de la FFT, se debe en gran manera a que este explota las propiedades de simetría y periodicidad del conjunto

$$W_N^k = e^{-i2\pi k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

1. Propiedad de Simetría : $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$, $W_N^2 = W_{N/2}$
2. Propiedad de periodicidad: $W_N^{k+N} = W_N^k$

A continuación describiremos algunos métodos eficientes para el cálculo de la TDF, que corresponden al diezmado en tiempo y frecuencia, cuando el número de datos es una potencia de 2.

1.5.1. Algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT)

Considerando el valor de N como una potencia entera de 2, es decir $N = 2^v$, $v \in \mathbb{N}$. La idea es considerar el cálculo de TDF separando la sucesión $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$, en dos sucesiones de $\frac{N}{2}$ puntos, formadas por los puntos pares e impares de f_k .

Así la TDF de N puntos puede expresarse en términos de las TDF de las respectivas funciones pares e impares

Así para $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{nk} = \sum_{k \text{ par}} f_k W_N^{nk} + \sum_{k \text{ impar}} f_k W_N^{nk}$$

Si hacemos $k = 2m$ y $k = 2m + 1$ y además definimos $f_{1m} = f(2m)$ y $f_{2m} = f(2m + 1)$ para f par e impar respectivamente, entonces:

$$\hat{f}_n = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_{1m} W_N^{2mn} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_{2m} W_N^{(2m+1)n}$$

Dado que $W_N^2 = W_{N/2}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \hat{f}_n &= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_{1m} W_{N/2}^{mn} + W_N^n \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_{2m} W_{N/2}^{mn} \\ &= \hat{f}_{1n} + W_N^n \hat{f}_{2n} \quad \text{para } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

Donde $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son las TDFs de $N/2$ puntos de las funciones discretas f_1 y f_2 respectivamente.

Además dado que $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son periódicas de período $N/2$, es decir

$$\hat{f}_1(n + N/2) = \hat{f}_{1n} \quad \text{y} \quad \hat{f}_2(n + N/2) = \hat{f}_{2n} \quad \text{y} \quad W_N^{n+N/2} = -W_N^n$$

Así (3.6) puede escribirse finalmente como:

$$\hat{f}_n = \hat{f}_{1n} + W_N^n \hat{f}_{2n}, \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \quad (1.25)$$

$$\hat{f}(n + N/2) = \hat{f}_{1n} - W_N^n \hat{f}_{2n} \quad (1.26)$$

y de esta manera hallando $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ discretas, las combinamos junto con W_N^n para obtener la TDF de N puntos

Dado que N es una potencia de 2, $N/2$ es par, luego se puede descomponer nuevamente la sucesión de $N/2$ puntos en otras dos sucesiones de $N/4$ puntos, realizado así una nueva etapa la cual, consiste en diezmar las funciones f_1 y f_2 obtenidas en la etapa anterior.

De esta manera, describimos este paso de la siguiente forma:

Para f_1 se obtienen las correspondientes funciones pares e impares, denotadas como:

$$\begin{aligned} f_{11k} &= f_1(2k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \\ f_{12k} &= f_1(2k+1) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \end{aligned}$$

y de f_2 también se obtienen:

$$\begin{aligned} f_{21k} &= f_2(2k) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \\ f_{22k} &= f_2(2k+1) & 0 \leq k \leq \frac{N}{4} - 1 \end{aligned}$$

Calculando las TDFs de $N/4$ puntos obtendremos las TDFS de $N/2$ puntos $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ a partir de las relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1n} &= \hat{f}_{11n} + W_{N/2}^n \hat{f}_{12n} & 0 \leq n \leq \frac{N}{4} - 1 \\ \hat{f}_1(n + N/4) &= \hat{f}_{11n} - W_{N/2}^n \hat{f}_{12n} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{2n} &= \hat{f}_{21n} + W_{N/2}^n \hat{f}_{22n} & 0 \leq n \leq \frac{N}{4} - 1 \\ \hat{f}_2(n + N/4) &= \hat{f}_{21n} - W_{N/2}^n \hat{f}_{22n} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Donde los $\{\hat{f}_{ijn}\}$ para $i, j = 1, 2, 3$ son las TDF de $N/4$ puntos de las funciones discretas $\{f_{ijn}\}$.

Ganancia en el cómputo

Para la primera etapa podemos observar que el cálculo directo de $\hat{f}_1$ requiere $(\frac{N}{2})^2$ multiplicaciones complejas, lo mismo sucede para el cálculo de $\hat{f}_2$.

Además, se requieren $\frac{N}{2}$ multiplicaciones complejas más para calcular $W_N^n \hat{f}_2$.

Así para calcular la TDF $\hat{f}$ con N puntos se requieren $2(\frac{N}{2})^2 + \frac{N}{2}$ multiplicaciones complejas. Denotaremos estas multiplicaciones por

$$m(N) = 2 \left(\frac{N}{2} \right)^2 + \frac{N}{2}. \quad (1.29)$$

En este primer procedimiento se da lugar a una reducción en el número de multiplicaciones de N^2 a $\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$, que equivale aproximadamente a dividir por 2 el número de multiplicaciones cuando el valor de N es grande.

Para la segunda etapa, podemos observar que el cálculo de $\{\hat{f}_{ijn}\}$ requiere de $4\left(\frac{N}{4}\right)^2$ multiplicaciones, y por lo tanto el cálculo de $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ puede realizarse con $\frac{N^2}{4} + \frac{N}{2}$ multiplicaciones complejas.

Se necesitan así $\frac{N}{2}$ multiplicaciones complejas mas para calcular $\hat{f}$ a partir de $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$. Consecuentemente, el número total de multiplicaciones necesarias es $\frac{N^2}{4} + N$, es decir, se reduce otra vez por aproximadamente 2.

Este procedimiento de diezmando se puede realizar una y otra vez hasta que las sucesiones resultantes sean sucesiones de un solo punto, de aquí la importancia de esta herramienta matemática para el cálculo de la TDF.

El cálculo básico que se realiza en cada etapa, consiste en tomar dos números complejos, por ejemplo (x, y) , multiplicar y por W_N^r y sumar y restar el producto obtenido de x para obtener los dos nuevos números complejos (X, Y) . Este cálculo básico, se denomina “mariposa”, dado que el diagrama de flujo recuerda una mariposa.

En general, cada mariposa implica una multiplicación y dos sumas complejas. Para cada $N = 2^v$, tenemos $N/2$ mariposas por dada etapa del proceso del cálculo y $\log_2 N$ etapas. Por lo tanto, como indicamos anteriormente, el número total de multiplicaciones complejas es $\frac{N}{2} \log_2 N$ y el de sumas complejas es $N \log_2 N$.

Lema 1.1. Para $N = 2^k$ y $f \in \mathbb{C}^N$, el número de multiplicaciones $m(N)$, requerido para calcular la TDF es $m(N) = \frac{N}{2} \log_2 N$

Demostración La demostración de este resultado se hará por inducción sobre k . Para $k = 1$, claramente el número de operaciones es 2, o sea $m(2) = 2 \log_2 2$. Supongamos es cierto para k , o sea para $N = 2^k$. De acuerdo a (3.1.5),

$$\begin{aligned} m(2N) &= 2m(N) + N \\ &= 2N \log_2 N + N \\ &= 2 \left(\frac{N}{2} \right) \log_2 N + N \log_2 2 \\ &= N(\log_2 N + \log_2 2) \\ &= N \log(2N) \end{aligned}$$

Observemos que mientras la TDF requiere N^2 multiplicaciones complejas, utilizando el algoritmo de FFT requerimos $\frac{N}{2} \log_2 N$. Por ejemplo una señal de televisión requiere aproximadamente 10,000,000 de valores de pixeles por segundo para preservar toda la información relevante. Una imagen de una huella es escaneada y digitalizada, cada cuadrado de 1 pulgada de la imagen de una huella es particionada en una cuadrícula de 500 por 500 valores de pixeles en los colores de escala de grises. Estas son las componentes de un vector de longitud grande. Para una imagen de video uno puede tener entre 20 y 30 vectores de un

tamaño comparable. Realizar un proceso de análisis con TDF es casi imposible y esto hace que sea necesario definir algoritmos rápidos.

A continuación otra forma de mostrar como es el conteo de las multiplicaciones complejas para el *FFT*. Vamos a suponer que $N = 2^p$. Vamos a expresar $n, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ en base binaria así

$$\begin{aligned} n &= 2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0 \\ k &= 2^{p-1}k_{p-1} + 2^{p-2}k_{p-2} + \dots + 2k_1 + k_0 \end{aligned}$$

donde $n_j, k_j \in \{0, 1\}$ $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Utilizaremos la siguiente notación

$$f_k = f(k_{p-1}, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \widehat{f}_n &= \sum_{k=0}^{N-1} f_k W_N^{nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k_{p-1}, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0) \times \\ &\quad W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(2^{p-1}k_{p-1} + 2^{p-2}k_{p-2} + \dots + 2k_1 + k_0)} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} &W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(2^{p-1}k_{p-1} + 2^{p-2}k_{p-2} + \dots + 2k_1 + k_0)} \\ &= W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(2^{p-1}k_{p-1})} \\ &\quad \times W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(2^{p-2}k_{p-2})} \\ &\quad \times W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(2^{p-3}k_{p-3})} \times \dots \\ &\quad \times W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(2k_1)} \\ &\quad \times W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(k_0)} \end{aligned}$$

Vamos a eliminar todos los factores cuyos exponentes sean múltiplos de 2^p . Así

$$\begin{aligned} &W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)(2^{p-1}k_{p-1} + 2^{p-2}k_{p-2} + \dots + 2k_1 + k_0)} \\ &= W_{2^p}^{n_0 2^{p-1}k_{p-1}} \times W_{2^p}^{(n_0 + 2k_1)2^{p-2}k_{p-2}} \times W_{2^p}^{(n_0 + 2k_1 + 2^2k_2)2^{p-3}k_{p-3}} \times \dots \\ &\quad \times W_{2^p}^{(2^{p-1}n_{p-1} + 2^{p-2}n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0)k_0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\widehat{f}_n &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \cdots \sum_{k_{p-2}=0}^1 \sum_{k_{p-1}=0}^1 f(k_{p-1}, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0) W_{2^p}^{n_0 2^{p-1} k_{p-1}} \\ &\quad \times W_{2^p}^{(n_0+2n_1)2^{p-2} k_{p-2}} \times W_{2^p}^{(n_0+2n_1+2^2 n_2)2^{p-3} k_{p-3}} \times \dots \\ &\quad \times W_{2^p}^{(2^{p-1} n_{p-1} + 2^{p-2} n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0) k_0}.\end{aligned}$$

Observemos que la suma interna depende de $k_{p-2}, k_{p-3}, \dots, k_1, k_0$ y n_0 pero no de $n_{p-1}, n_{p-2}, n_{p-3}, \dots, n_1$. Así definamos

$$\begin{aligned}f^{(1)}(n_0, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{p-1}=0}^1 f(k_{p-1}, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0) W_{2^p}^{n_0 2^{p-1} k_{p-1}} \\ &= f(0, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0) \\ &\quad + f(1, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0) W_{2^p}^{n_0 2^{p-1}}.\end{aligned}$$

Al calcular $f^{(1)}(n_0, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0)$ se requiere una multiplicación compleja para cada 2^p escogencia de $n_0, k_{p-2}, \dots, k_1 \in \{0, 1\}$. Así para calcular $f^{(1)}$ requerimos 2^p multiplicaciones complejas.

Ahora definimos

$$f^{(2)}(n_0, n_1, k_{p-3}, \dots, k_1) = \sum_{k_{p-2}=0}^1 f^{(1)}(n_0, k_{p-2}, \dots, k_1, k_0) W_{2^p}^{(n_0+2k_1)2^{p-2} k_{p-2}}$$

y $f^{(2)}$ requiere 2^p multiplicaciones complejas. Continuando en la misma forma tenemos

$$\begin{aligned}&f^{(p)}(n_0, n_1, n_2, \dots, n_{p-1}) \\ &= \sum_{k_0=0}^1 f^{(p-1)}(n_0, n_1, n_2, \dots, k_0) W_{2^p}^{(2^{p-1} n_{p-1} + 2^{p-2} n_{p-2} + \dots + 2n_1 + n_0) k_0}\end{aligned}$$

y

$$\widehat{f} = f^{(p)}.$$

Así en el cálculo de $\widehat{f}$ se requieren $p2^p$ multiplicaciones complejas [10] o sea $N \log_2 N$.

1.6. Teorema del muestreo

El teorema del muestreo es de gran importancia en la teoría de la información y de especial interés en diversas aplicaciones de las telecomunicaciones. Fue formulado como una conjetura por Harry Nyquist en 1928 y demostrado formalmente en 1949 por el ingeniero estadounidense Claude Shannon (1916 - 2001) el cual nos da condiciones de como reconstruir una señal que ha sido previamente muestreada[22].

Se define como señal el flujo de información proveniente de una fuente de cualquier naturaleza ya sea mecánica, eléctrica, óptica o acústica y desde el punto de vista matemático las modelamos como funciones de una o varias variables cuyo dominio de definición puede ser continuo o discontinuo, periódico o no periódico, constante o no constante.

Entre las muchas clasificaciones de señales diferenciaremos entre señal analógica (donde las variables tiempo y amplitud son continuas) como son las señales de audio, temperatura, presión, etc, y señal discreta (donde las variables tiempo y amplitud son discretas) como en el caso de las señales digitales, el número de caracteres en un archivo y las luces de un semáforo.

El muestreo o discretización de una señal consiste en el proceso de conversión de señales analógicas a señales digitales, obteniendo una secuencia de muestras en intervalos discretos de tiempo facilitando la reconstrucción de la señal [4][9].

Definición 1.3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ entonces definimos el **soporte** de f como $\text{sop}(f) = \text{adh}(A)$. La función f es de **soporte compacto** si existe $T_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0$ para $|t| > T_0$.

Observación 1.2. Una función es de soporte compacto si el conjunto donde no es nulo conforma un conjunto cerrado y acotado.

Definición 1.4. Se dice que f es de **banda limitada** si existe $\Omega \in \mathbb{R}$ tal que la transformada de Fourier $\hat{f}(w) = 0$ para $|w| > \Omega$. Al número Ω es entonces la frecuencia máxima contenida en la señal f . De esta manera el conjunto de funciones de banda limitada está dado por

$$B_{\Omega}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sop}(\hat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega] \right\}.$$

1.6.1. Teorema del muestreo de Shannon

Teorema 1.1 (Muestreo de Shannon). *Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ una función continua con transformada de Fourier $\hat{f}$ de soporte compacto, $\text{sop} \hat{f} = [-\Omega, \Omega]$, entonces la función f está completamente determinada por sus valores muestreados $f(nt)$, $n \in \mathbb{Z}$ mediante la fórmula de reconstrucción:*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nt) \text{sinc}[\Omega(t - nT)], \quad (1.30)$$

donde $\text{sinc}(0) = 1$ y $\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t}$ para $t \neq 0$ y $T = \frac{\pi}{\Omega}$ representa el período de muestreo.

Demostración Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$ una función continua con transformada de Fourier $\hat{f}$ de soporte compacto, es decir existe $\Omega > 0$ tal que $\hat{f}(w) = 0$ para todo $|w| \geq \Omega$.

Dado que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} dw \quad (1.31)$$

entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(w) e^{iwt} dw,$$

puesto que $\hat{f}(w)$ se anula por fuera de $[-\Omega, \Omega]$. La serie de Fourier de $\hat{f}$ está dada por

$$\hat{f}(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{-i \frac{n\pi w}{\Omega}} \quad (1.32)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(w) e^{-i \frac{n\pi w}{\Omega}} dw. \quad (1.33)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.31) y haciendo $t = nT = n \frac{\pi}{\Omega}$ tenemos:

$$f(nT) = f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(w) e^{-i \frac{n\pi w}{\Omega}} dw. \quad (1.34)$$

Multiplicando la ecuación (1.34) por $\frac{\pi}{\Omega}$ obtenemos;

$$\frac{\pi}{\Omega} f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(w) e^{-i \frac{n\pi w}{\Omega}} dw$$

y teniendo en cuenta la ecuación (1.33) tenemos

$$\frac{\pi}{\Omega} f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) = C_n. \quad (1.35)$$

Reemplazando la ecuación (1.35) en la ecuación (1.32) se tiene que

$$\hat{f}(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{\Omega} f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) e^{-i \frac{n\pi w}{\Omega}} dw. \quad (1.36)$$

Sustituyendo la ecuación (1.36) en la ecuación (1.31) y definiendo $\text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t}$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{\Omega} f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) e^{-i \frac{n\pi w}{\Omega}} \right] e^{iwt} dw = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{\Omega} f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) \int_{-\Omega}^{\Omega} \left[e^{i(t - \frac{n\pi}{\Omega})w} \right] dw \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(n \frac{\pi}{\Omega}\right) \frac{1}{2i(t\Omega - n\pi)} \left[e^{i\Omega(\frac{\Omega t - n\pi}{\Omega})} - e^{-i\Omega(\frac{\Omega t - n\pi}{\Omega})} \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{1}{(t\Omega - n\pi)} \left[\frac{e^{i(\Omega t - n\pi)} - e^{-i(\Omega t - n\pi)}}{2i} \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{1}{(t\Omega - n\pi)} [\text{sen}(\Omega t - n\pi)] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \left[\frac{\text{sen}(\Omega t - n\pi)}{t\Omega - n\pi} \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \text{sinc}(\Omega t - n\pi) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \text{sinc} \left[\Omega \left(t - \frac{n\pi}{\Omega} \right) \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \text{sinc}[\Omega(t - nT)]. \end{aligned}$$

Obteniendo así la fórmula de reconstrucción (1.30) o interpolación [10, 11, 28, 24] usada para reconstruir la señal original f a partir de las muestras $f(nT)$, en donde la función $\text{sinc}[\Omega(t - nT)]$ representa la *función muestreadora* o *interpoladora*. En consecuencia, el teorema de muestreo de Shannon establece que para reconstruir una señal sin pérdida de información que ha sido previamente muestreada, la frecuencia de muestreo F_s debe satisfacer el siguiente criterio denominado *criterio de Nyquist*.

1.6.2. Criterio de Nyquist

Este criterio asegura que cuando se muestrea una señal, la frecuencia de muestreo F_s necesaria para evitar distorsiones (**aliasing**) debe ser mayor que el doble de la frecuencia máxima (Ω) de la señal para poder reconstruir la señal original, esto es:

$$F_s > 2\Omega \quad (1.37)$$

Para ilustrar el teorema de Nyquist observemos la Figura 1.11, en donde la señal $f(t)$ contiene una componente senoidal con una frecuencia máxima $\omega_{max} = 4[\text{rad/seg}]$ equivalente a $f_{max} = (2/\pi)[\text{Hz}]$, por el teorema de Nyquist se afirma que si esta componente queda bien muestreada entonces la señal $f(t)$ queda también bien muestreada, dado que $f_m = 20/\pi > f_{max} = 2/\pi$ se cumple con el teorema, entonces se puede decir que todas sus componentes quedan bien muestreadas.

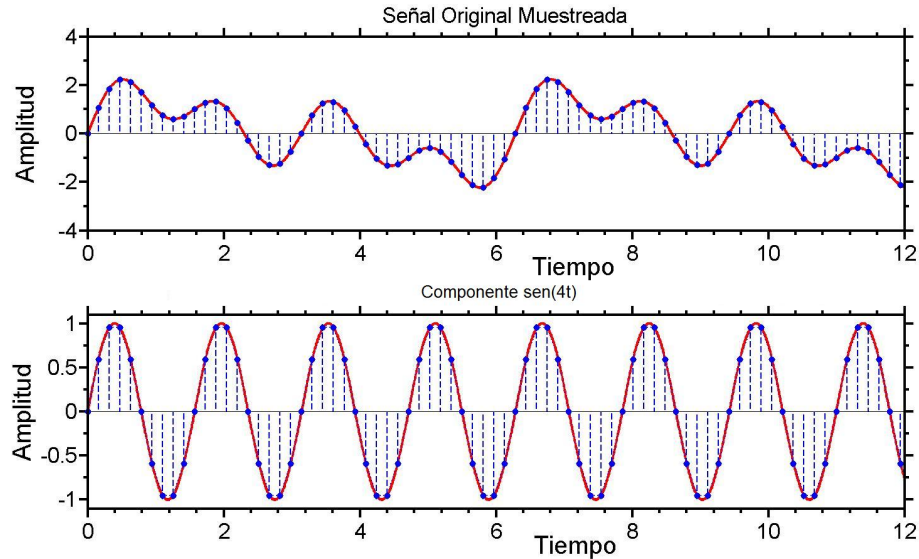


Figura 1.11: Señal original $f(t) = \sin(t) + \sin(2t) + \sin(4t)$ en la parte superior y su componente de mayor frecuencia $\sin(4t)$ en la parte inferior muestreadas a $F_m = \frac{20}{\pi}$ Hz

Entre mayor sea la frecuencia de muestreo la señal muestreada se aproximará más a la señal continua, un ejemplo de ello se aprecia en la Figura 1.12 donde se observa una señal muestreada a diferentes frecuencias, a medida que la frecuencia de muestreo va aumentando la señal muestreada se va aproximando cada vez más a la señal continua $f(t)$.

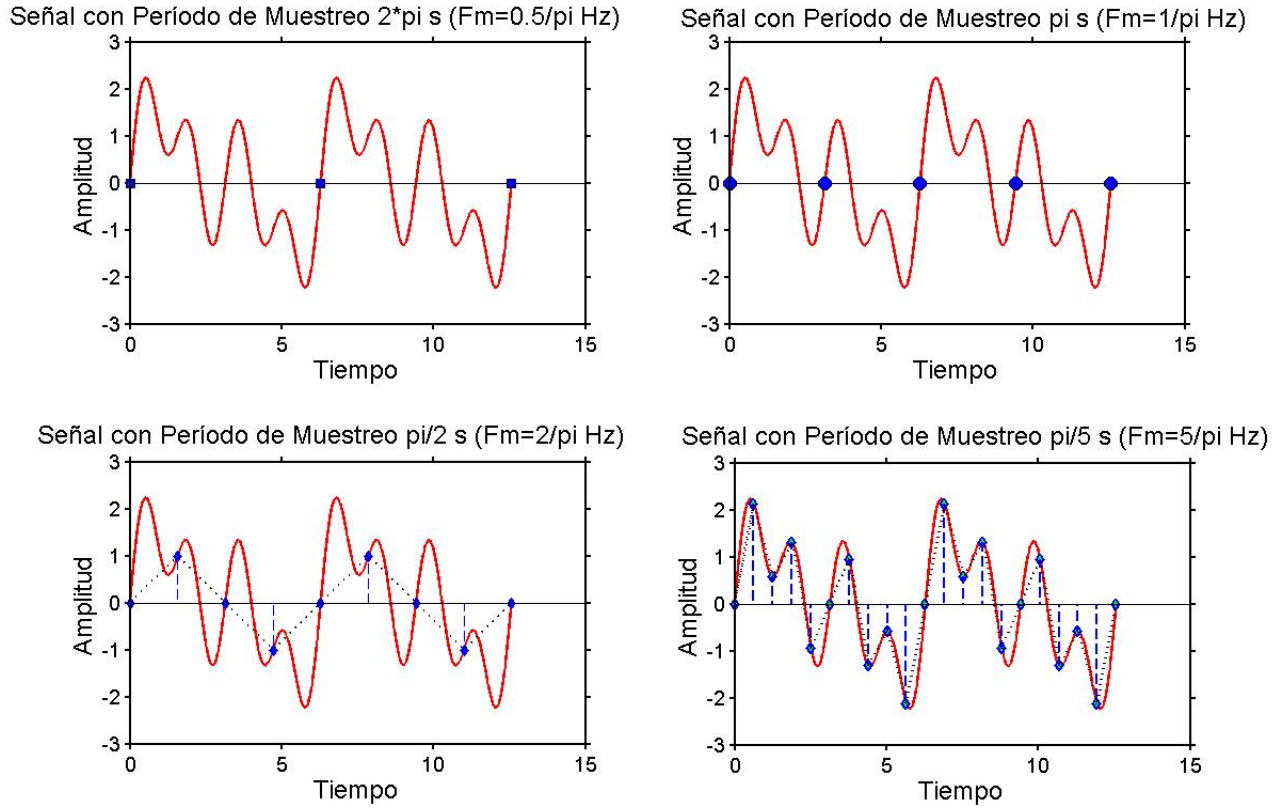


Figura 1.12: Señal $f(t) = \text{sen}(t) + \text{sen}(2t) + \text{sen}(4t)$ (en rojo) muestreada a diferentes frecuencias (en azul)

1.6.3. El Fenómeno de aliasing

El fenómeno de aliasing se produce cuando se muestrea una señal sin tener en cuenta las condiciones del teorema de Shannon, esto es, cuando se muestrea una señal a una frecuencia menor que el doble de la frecuencia máxima contenida en la señal. Al tratar de reconstruir la señal se obtienen frecuencias que no contenía la señal original.

En la Figura 1.13 muestra este concepto, se tienen dos señales senoidales una con frecuencia de 1 Hz (señal en color rojo) y otra de 9 Hz (señal de color negro), las dos se muestrean a la misma frecuencia de 10 Hz, la primera queda bien muestreada ya que cumple el criterio de Nyquist:

$$10\text{Hz} > 2(1\text{Hz})$$

$$10\text{Hz} > 2\text{Hz}$$

por el contrario de la segunda:

$$10\text{Hz} < 2(9\text{Hz})$$

$$10\text{Hz} < 18\text{Hz}$$

que al ser muestreada se confunde con la primera dando así una interpretación errónea [11, 22, 23].

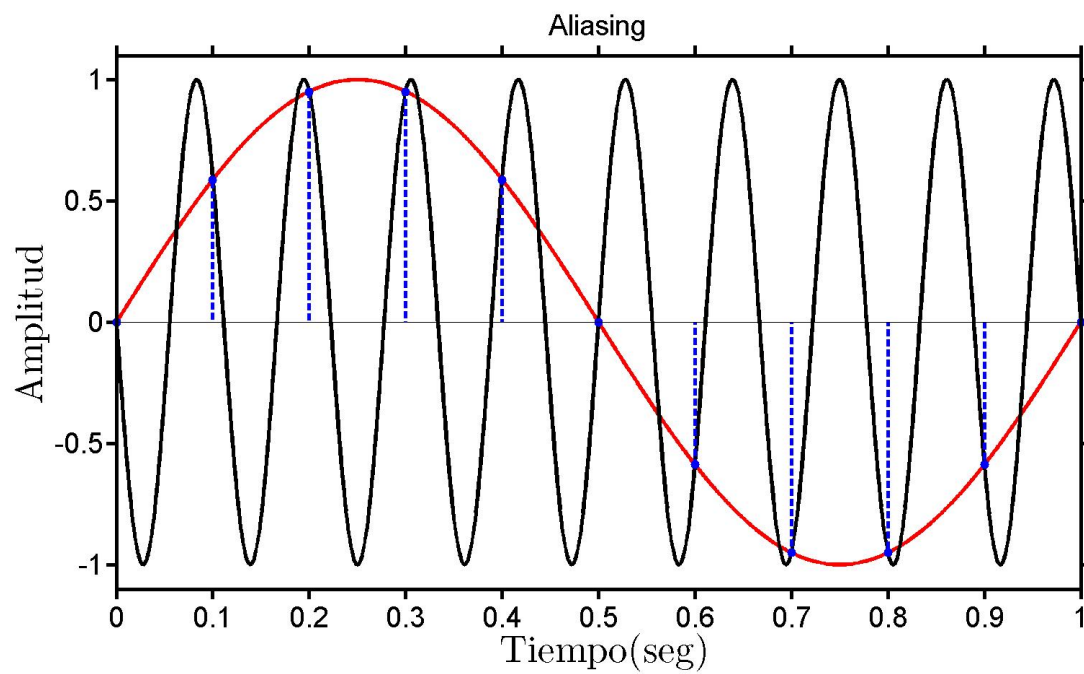


Figura 1.13: Fenómeno de aliasing

CAPITULO 2

Teoría de wavelets

Tradicionalmente la teoría de Fourier ha sido utilizada para representar funciones mediante una suma de funciones seno a diferentes frecuencias de manera aproximada. Pero tiene el inconveniente que al transformar una señal al dominio frecuencial se pierde la información temporal. Este inconveniente es de vital importancia en aquellas señales de características no estacionarias o señales de duración finita, como las señales de emisión acústica, donde el contenido frecuencial cambia con el tiempo. Una primera solución a este inconveniente es la aplicación de la transformada de Fourier con ventana, obteniendo como resultado una función bidimensional tiempo-frecuencia, donde una vez fijado el tamaño de la ventana la resolución en el tiempo y la frecuencia es fija, la cual nos lleva a perder información frecuencial a resoluciones de bajas frecuencias e información temporal en resoluciones de altas frecuencias. En consecuencia existe un compromiso entre buena resolución en el tiempo o buena resolución en frecuencia, problemas de este tipo son los que han motivado la búsqueda de otras formas de análisis de señales. La transformada wavelet se sitúa en el intento de superar estos problemas; se acomoda mejor a estas clases de señales con discontinuidades o cambios abruptos ya que provee una representación de tiempo-frecuencia simultáneamente, al analizar la señal a diferentes frecuencias con diferentes resoluciones, utilizando ventanas de diferente tamaño, aplica ventanas de mayor tamaño donde requiera extraer información de baja frecuencia y ventanas temporales de menor tamaño donde se requiera extraer información de alta frecuencia [3, 7].

2.1. Antecedentes históricos

Las wavelets han tomado una enorme popularidad recientemente. Sin embargo, sus raíces están asociadas con los trabajos de Joseph Fourier en 1807, probado rigurosamente años después por Dirichlet acerca de que toda función periódica puede ser representada como una suma infinita de senos y cosenos, lo que da origen a los series de Fourier [7, 11, 18].

La primera mención de una wavelet fue hecha en 1909 por el matemático húngaro Alfred Haar, construyó un sistema ortonormal de funciones con soporte compacto, ahora llama-

do wavelet Haar, proporcionando la wavelet más sencilla que consistía en un conjunto de funciones base rectangulares. Pero el uso de esta wavelet estaba limitado por su discontinuidad (con saltos). En 1946, el físico Dennis Gabor describió una base no-ortonormal conocida como la wavelet con soporte no acotado o wavelet Gabor, basado en funciones gaussianas trasladadas. La idea principal de la wavelet Gabor era cortar la señal en segmentos donde cada segmento tuviera bien definido su banda de frecuencias y su posición en el tiempo, originando un gran avance para descomponer señales continuas, pero presentaba inconvenientes en señales discretas.

En 1960 el matemático argentino Alberto Calderón descubre una fórmula que permite recuperar una señal a partir de la expansión de sus wavelets.

En 1976 los físicos de IBM Claude Goland y Daniel Esteban descubren una forma de codificar transmisiones digitales para el teléfono (codificación subbanda).

En 1982, el ingeniero Jean Morlet mostró el modo de descomponer una señal sísmica en cierta clase de wavelet.

En el mismo año Edward Adelson del MIT y Peter Burt de la corporación Sarnoff desarrollan el algoritmo piramidal para la compresión de imágenes.

En 1984, el ingeniero Jean Morlet y el físico cuántico Alex Grossman introduce por primera vez el término *wavelet* en el lenguaje matemático. Utilizaron las wavelet para modelar señales no estacionarias analizando temblores y modelando las ondas del sonido viajando a través de la corteza terrestre.

En 1985, Ives Meyer de la universidad de París descubre las primeras wavelet ortogonales no triviales, las cuales son diferenciables y no decaen rápidamente a cero, lo que es necesario para la convergencia de las series que se forman a partir de ellas.

En 1986 Stephane Mallat, de la universidad de Pensilvania, demuestra que la base Haar, las frecuencias de Gabor y los algoritmos piramidales, están todos relacionados con algoritmos basados en wavelets.

En 1987 Ingrid Daubechies descubrió una clase completamente nueva de wavelet, que eran ortogonales como las de Meyer y sencillas, sin saltos y fáciles de programar como las de Haar. Luego con las wavelet Daubechies los procesadores de señales disponían de una manera de descomponer datos digitales en contribuciones de diversas escalas.

En 1989 Mallat mostró como la teoría wavelet se puede utilizar en el análisis de señales y en el procesamiento de imágenes.

En 1990 David Donoho y Iain Johnstone, de la universidad de Stanford, usan las wavelet para eliminar el ruido de una señal.

A partir del año 2004 las wavelets pasan a ser una herramienta práctica de cálculo y análisis.

2.2. Aspectos básicos de la transformada wavelet

En los años 80 el geofísico Jean Morlet y el físico cuántico Alex Grossman propusieron las wavelets (TW) como una alternativa al análisis de Fourier con ventana; para analizar señales con características no estacionarias haciendo uso de una ventana no rígida, completamente escalada que soluciona el problema del corte de la señal. La ventana se traslada a lo largo de la señal y para cada segmento de la señal en el dominio del tiempo se calcula la transformada. Este proceso se repite y el ancho (posición) de la ventana varia para cada nuevo ciclo generando un grupo de señales todas de tiempo-frecuencia a distintas escalas de resolución. Debido a que la transformada wavelet da información relacionada con el tiempo y la frecuencia, la representación gráfica de esta transformada se realiza en un plano tiempo-escala. Luego la transformada wavelet, ofrece una resolución alta en el dominio del tiempo y baja en el de la frecuencia para frecuencias altas y resolución alta en frecuencias y baja el dominio del tiempo para frecuencias bajas. Esta clase de análisis es muy útil para señales que tiene componentes de alta frecuencia de corta duración y componentes de baja frecuencia de larga duración, como en el caso de las señales de emisión acústica. Además del análisis local de señales no estacionarias, la transformada wavelet se usa en el análisis de señales electrocardiográficas, sísmicas, de sonido, de radar, así como también es utilizada para la compresión de procesamiento de imágenes y el reconocimiento de patrones [8, 9, 15, 17].

Entre algunas aplicaciones importantes tenemos una que da lugar en 1992, donde el FBI elige un método de wavelet desarrollado por Tom Hopper, de la división de servicios de información criminal del FBI, Jhonathan Bradley y Cris Brislow del laboratorio nacional de los Álamos, para comprimir la base de datos de las huellas dactilares. En 1995 Pixar Studios presenta la primera película de dibujos animados Toy Story realizada completamente en computador. Para la película Toy Story 2, algunas formas se realizan mediante superficies de subdivisión que es una técnica relacionada matemáticamente con wavelet. En 1999 la organización internacional de estándares aprueba un nuevo sistema de codificación denominado JPEG-2000 basado en wavelet. Este tipo de codificación permite comprimir imágenes en una proporción 1:200, sin pérdidas apreciables en la calidad de imágenes [7, 14, 11].

El elemento básico de la TW es una función conocida como la *wavelet madre* y denotada ψ haciendo referencia a una única ventana cuya longitud es finita (localizada en el tiempo) de carácter oscilatorio y con valor medio cero, que genera mediante cambios de escala y traslación una familia de funciones wavelets $\psi_{a,b}$ definida por:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

donde a es llamado el parámetro de escalamiento que permite hacer dilataciones y contracciones de la señal, es decir está relacionado con el estrechamiento o estiramiento de la función madre en el eje temporal, las altas escalas (señales dilatadas en el tiempo) tienen una correspondencia con las bajas frecuencias en Fourier, mientras las bajas escalas (señales comprimidas en el tiempo) tienen una correspondencia con las altas frecuencias en Fourier. El parámetro b es el parámetro de traslación el cuál está relacionado con la posición de

la ventana, a medida que b cambia la función madre se desplaza determinando la posición en el tiempo. Estos parámetros son números reales y para una escala de cero la función se indetermina.

La parte de “wave” (onda) se refiere al carácter oscilatorio de la función, pero al estar acotada en el tiempo queda reducida a una onda pequeña “wavelet” (ondoleta). La función madre $\psi(t)$ debe verificar ciertas condiciones como son la condición de admisibilidad y la de soporte compacto. La condición de admisibilidad requiere que la función $\psi(t)$ debe oscilar en el tiempo y estar bien localizada en el dominio temporal. El concepto de localización temporal esta relacionado con el rápido decaimiento hacia cero cuando la variable independiente t tiende al infinito, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \psi(t) = 0.$$

La condición de oscilación de la función (o número de momentos nulos) se refiere a que podemos escoger una función finita con valores tanto positivos como negativos que oscilen alrededor del eje x , esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

La condición de soporte compacto de las wavelet corresponde a la propiedad de que las wavelet sean de duración finita, permitiendo una mayor facilidad en los cálculos y mejor resolución temporal. Además una wavelet madre exige también cumplir con la condición de ortogonalidad. Existen muchas alternativas en la literatura de señales conocidas que pueden ser candidatas a utilizarse como wavelet, sin embargo la mayoría de estas alternativas implican mucho esfuerzo computacional cuya aplicación, interpretación u organización de la información proporcionada puede ser muy compleja. En la práctica hay un número limitado de wavelet como lo son las wavelets Haar, Daubechies, Sombrero Mexicano, Morlet, Meyer, etc, (ver Figura 2.1) que son más utilizadas ya que sus características, eficacia e implementación son bien conocidas.

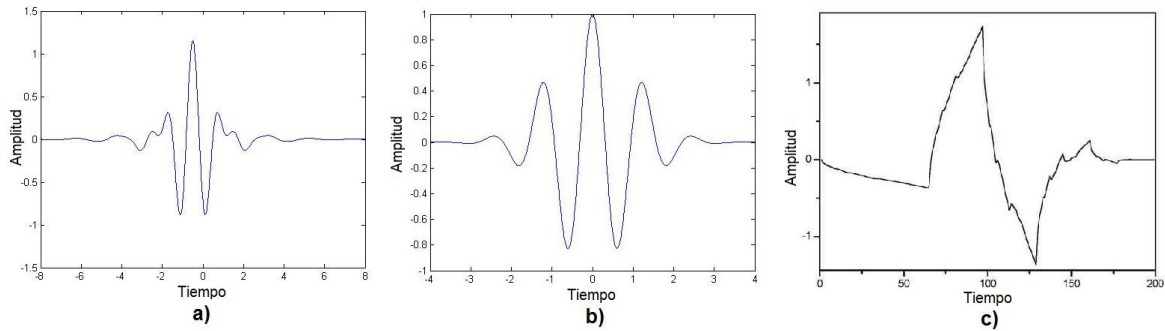


Figura 2.1: Diferentes clases de wavelets a)Meyer b)Morlet c)Daubechies

En conclusión la transformada wavelet provee una representación de frecuencia-tiempo simultáneamente, corta la señal de interés en varias partes y analiza cada una de ellas por separado, es decir, que (TW) tiene un tamaño de ventana adaptado a las frecuencias. Las

frecuencias altas o contraídas pueden ser mejor localizadas en el tiempo y las frecuencias bajas o dilatadas en la frecuencia. Mientras que la (TFV) resulta eficiente cuando se trata de localizar y caracterizar señales con patrones de frecuencia bien definido, no superpuestos y relativamente largos, respecto de la ventana de análisis pues una vez que el tamaño de la ventana es elegido, todas las frecuencias son analizadas con las mismas resoluciones de tiempo y frecuencia [8, 7, 11, 12, 13, 17].

2.3. Transformadas de wavelet

Las transformadas wavelet comprenden la transformada wavelet continua (TWC) y la transformada wavelet discreta (TWD). Estas transformadas son herramientas que permiten el análisis de señales de manera muy similar a como lo hace la transformada de Fourier dando información en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. La selección de la mejor función base conocida como la wavelet madre y la transformada depende de la señal por analizar y de sus características. Si la propiedad relevante del problema es su invariancia respecto de las traslaciones o cambios de escala de la señal, entonces es preferible el empleo de la TWC donde la elección efectiva de la wavelet y de los parámetros de a y b de escala y traslación, posibilitan la eficiente aproximación numérica de la TWC, sin embargo para las señales de emisión acústica como es nuestro caso el proceso de interpretar la información contenida en los valores de la TWC se hace mediante la apropiada formulación de un algoritmo donde el tiempo de procesamiento se hace muy largo y la información obtenida es redundante, por lo tanto para quitar dicha información redundante la wavelet madre puede ser dilatada y trasladada de manera discreta ofreciendo suficiente información para analizar y sintetizar la señal mientras reduce la cantidad de operaciones a realizar [15, 14, 8, 7, 17, 12].

2.3.1. Transformada wavelet continua (TWC)

Definición 2.1. La Transformada wavelet Continua W_ψ de una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ con respecto a la wavelet ψ se define como:

$$W_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad a, b, \in \mathbb{R} \quad a > 0,$$

donde el parámetro a es el factor de escala de la wavelet y lleva en sí la información de la dilatación y contracción de la señal. El parámetro b es el factor de traslación de la wavelet que tiene la información del tiempo, pues nos indica en que lugar del eje del tiempo se encuentra la wavelet y $f(t)$ es la función a analizar o descomponer. La $W_\psi f(a, b)$ representa un número de coeficientes, que se obtienen para cada integral que resolvamos y nos dan la correlación entre la señal y el modelo de wavelet que estemos usando. Gráficamente los coeficientes representan puntos en el plano traslación-escala, que es equivalente a tener información en el plano tiempo-frecuencia conocido como escalograma. La amplitud de estos coeficientes se puede representar en una tercera dimensión o en una escala de colores. Si se

quiere obtener una representación completa del plano traslación-escala (tiempo-frecuencia) se debe realizar un barrido desde el inicio de la señal hasta el final de la señal, esto es que la TWC analiza la señal a diferentes bandas de frecuencia con diferentes resoluciones mediante un escalograma (mapa espectro-temporal), que proporciona la distribución de energía de la señal a determinados niveles de escala y a la vez observa el comportamiento de la señal en el tiempo, originando una caracterización completa de la señal, mediante el uso de un conjunto de wavelet.

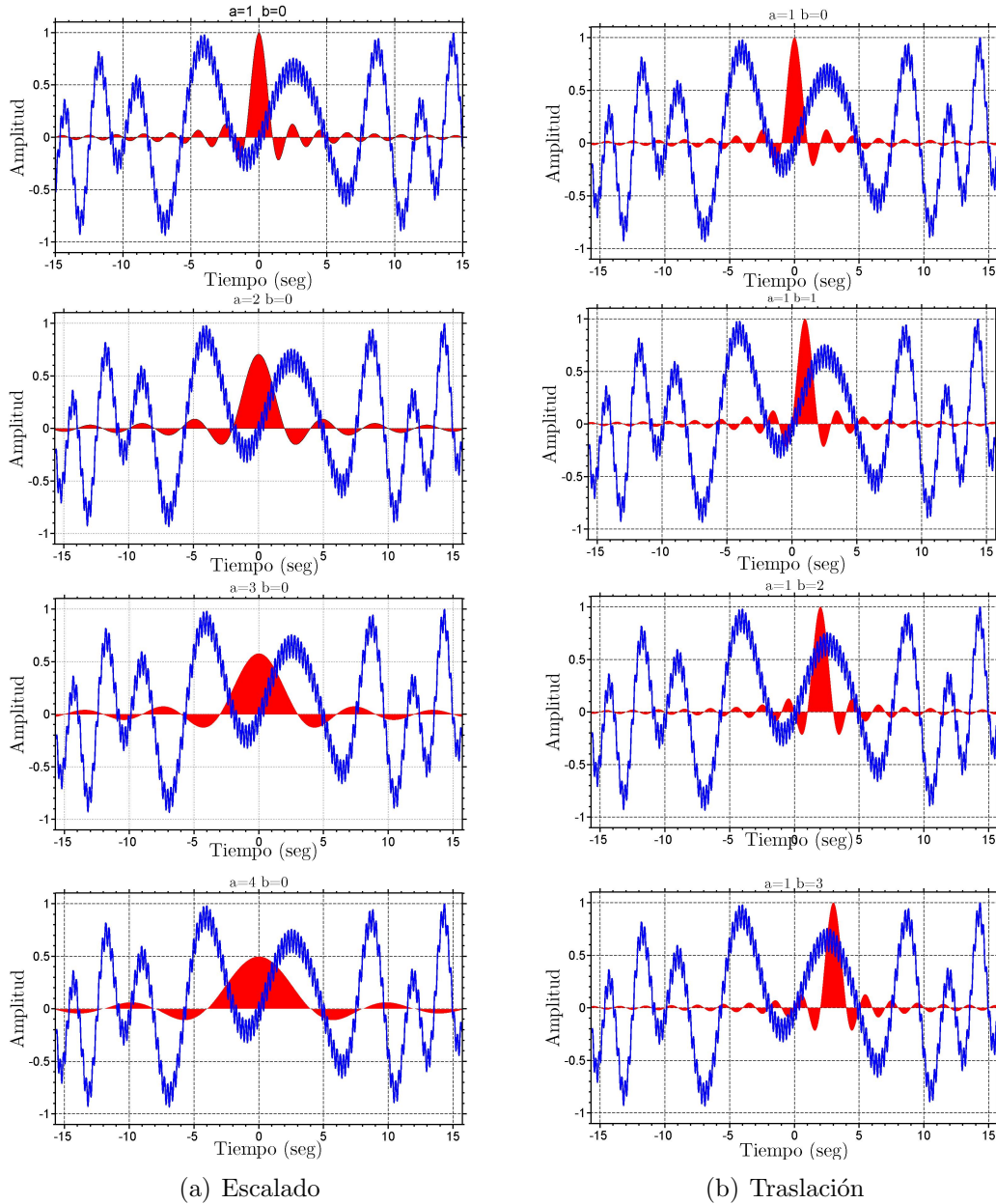


Figura 2.2: Variación de los parámetros de escala a y traslación b

En la Figura 2.2a podemos observar el comportamiento de la variable de escala a , a medida que la variable escala va en aumento la wavelet sufre un ensanchamiento y su amplitud

disminuye, mientras que en la Figura 2.2b se muestra el comportamiento de la variable de traslación b , la wavelet sufre un corrimiento hacia la derecha a medida que esta aumenta.

Es importante tener en cuenta que la función original $f(t)$ se puede reconstruir a partir de la (TWC) utilizando la fórmula de reconstrucción dada por

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W_\psi f(b, a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_{b,a} \left(\frac{t-b}{a} \right) db \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \langle f(t), \psi_{(b,a)}(t) \rangle \psi_{b,a}(t) \frac{db da}{a^2} \end{aligned}$$

donde C_ψ se conoce como la constante de admisibilidad y es determinada por la wavelet que se ha utilizado en la transformación y esta definida por:

$$C_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty,$$

donde $\hat{\psi}(w)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$ que es la wavelet madre utilizada en la transformación inicial. Además se tiene que la condición de admisibilidad asegura que la función wavelet madre $\psi(t)$ no tenga contenido de frecuencia nulo y que las versiones dilatadas resultantes estén todas centradas a diferentes frecuencias. La TWC nos da la libertad de elegir la wavelet, pero la función wavelet madre $\psi(t)$ debe cumplir con la propiedad de oscilación:

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(t) dt = 0,$$

esto es que solo podremos tener valores finitos si su transformada $\hat{\psi}(w)$ decae rápidamente a cero alrededor de $w = 0$.

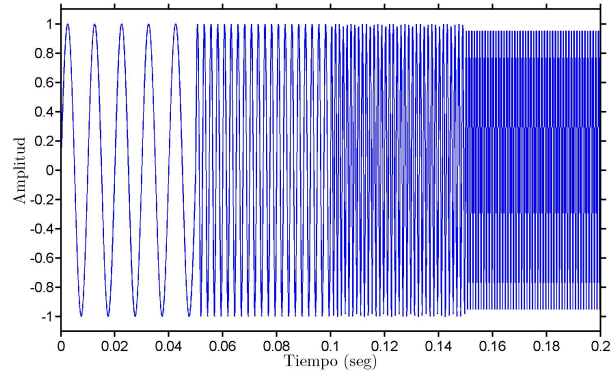
Por lo tanto en la TWC lo que se hace es calcular un índice de semejanza entre la señal que esta siendo utilizada y la wavelet.

En la Figura 2.3 se observa una función por partes correspondiente a:

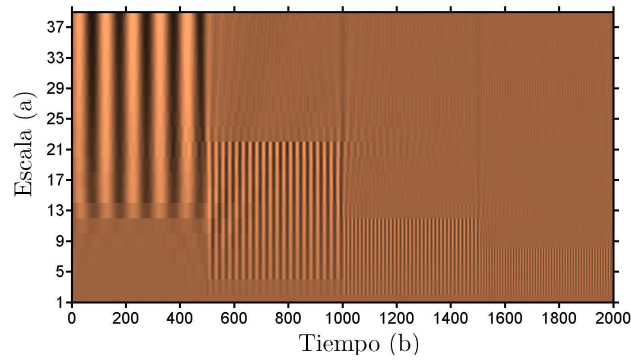
$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi 100t) & 0 \leq t < 0,05 \\ \text{sen}(2\pi 400t) & 0,05 \leq t < 0,1 \\ \text{sen}(2\pi 700t) & 0,1 \leq t < 0,15 \\ \text{sen}(2\pi 1000t) & 0,15 \leq t < 0,2 \end{cases}$$

y su respectiva transformada wavelet continua en 2D y 3D, en ellas podemos ver el instante preciso en que la frecuencia cambia abruptamente, nótese que la gráfica en 2D y 3D son realmente una misma representación, su diferencia radica que en la 2D la intensidad del color es quien indica la magnitud de los coeficientes mientras que en la de 3D se puede ver tanto en color como en la amplitud. La wavelet usada es la Shannon que se definirá más adelante. En la Figura 2.4 sucede lo mismo para la función:

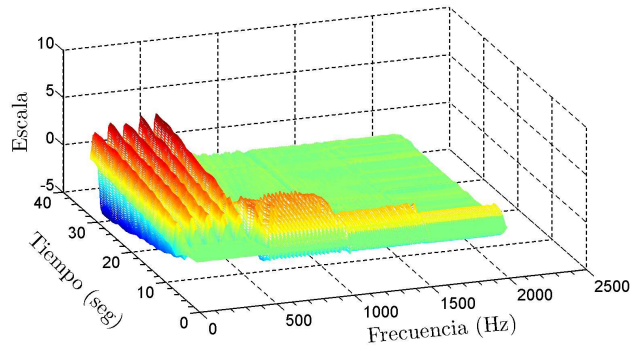
$$g(t) = \text{sen}(2000\pi t^2).$$



(a) Función $f(t)$



(b) TWC Shannon de $f(t)$ en 2D

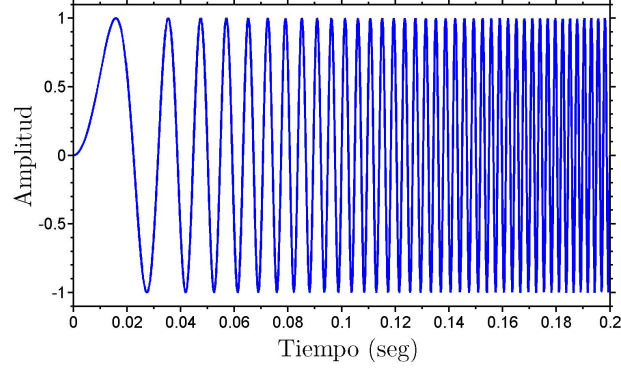


(c) TWC Shannon de $f(t)$ en 3D

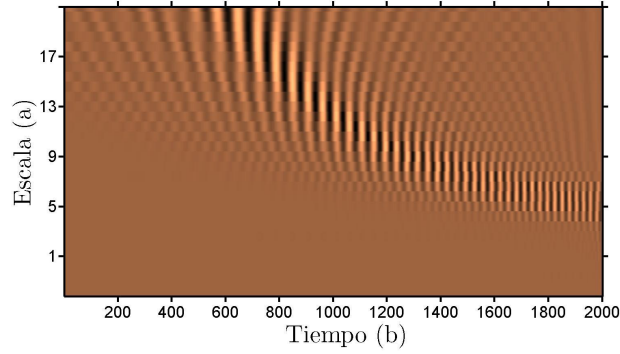
Figura 2.3: función $f(t)$ y su transformada wavelet Shannon Continua en 2D y 3D

Esta función tiene un cambio constante en su frecuencia, por ello se puede decir que las componentes frecuenciales cambian en cada instante. En estas TW se puede apreciar tanto cambios en la frecuencia continuos en $g(t)$ como los abruptos en $f(t)$.

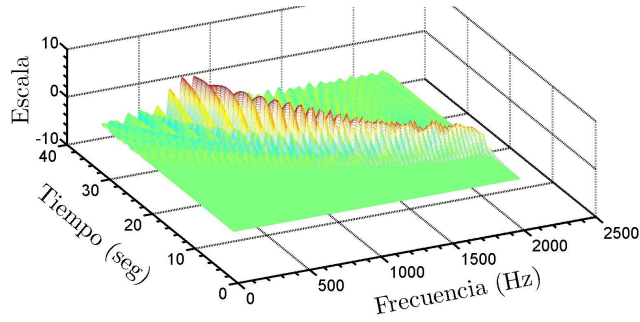
En la Figura 2.5 se muestra la TF de $f(t)$, ahora si comparamos las Figuras 2.5, 1.8 y 2.4 podemos apreciar que para la misma función los cambios no son apreciados en la TF, en la TFV se tendría que escoger un ancho de ventana óptimo para poder verlos, mientras en la TWC no es necesario añadir ningún otro proceso ya que sí los muestra de manera evidente.



(a) Función $g(t)$



(b) TWC Shannon de $g(t)$ en 2D



(c) TWC Shannon de $g(t)$ en 3D

Figura 2.4: función $f(t)$ y su transformada wavelet Shannon Continua en 2D y 3D

Proposición 2.1 (Propiedades de la transformada wavelet continua). *A continuación presentamos algunas de las propiedades básicas de la TWC considerando funciones de variable y valor real.*

1. **Linealidad:** Sean $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ y sean α, β escalares, entonces

$$W_\psi(\alpha f + \beta g)(a, b) = \alpha W_\psi f(a, b) + \beta W_\psi g(a, b).$$

2. **Traslación invariante:** Sea $f(t)$ y su transformada wavelet $W_\psi f(a, b)$, entonces,

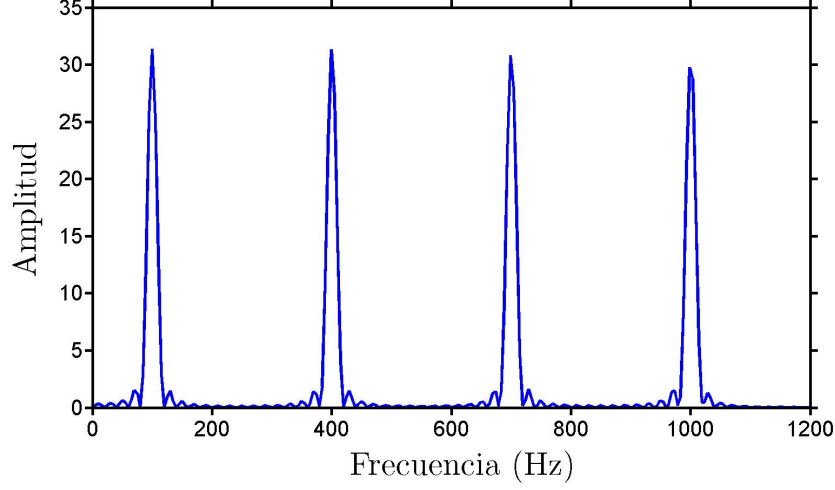


Figura 2.5: Transformada de Fourier de la función $f(t)$

si trasladamos en el tiempo, la función original $f_{t_0}(t) = f(t - t_0)$ obtendremos

$$W_\psi f_{t_0}(a, b) = W_\psi f(a, b - t_0).$$

3. **Dilatación invariante:** Al cambiar la escala de una función $f(t)$ entonces su transformada también se escala. Si $D_{\sigma_0}f(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}}f\left(\frac{t}{\sigma_0}\right)$ entonces su transformada está dada por:

$$W_\psi D_{\sigma_0}f(a, b) = W_\psi f\left(\frac{a}{\sigma_0}, \frac{b}{\sigma_0}\right),$$

suponiendo que $\sigma_0 > 1$.

4. **Convolución:** La transformada wavelet 1D de una función, puede escribirse como una convolución de la siguiente manera:

$$W_\psi f(a, b) = f * \bar{\psi}_a(b),$$

donde

$$\bar{\psi}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{-t}{a}\right). \quad (3)$$

5. **Isometría:** Dada la wavelet ψ , tal que $C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty$ entonces

$$\|W_\psi f\|_{L^2(\mathbb{R})} = C_\psi \|f\|.$$

donde $\|W_\psi f\|$ es la medida respecto a $db \frac{da}{a^2}$.

Demostración: Ahora se demostrará cada una de las propiedades.

1)

$$\begin{aligned}
W_\psi(\alpha f + \beta g)(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha f + \beta g)(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta g(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
&= \alpha \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt + \beta \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
&= \alpha W_\psi(f)(a, b) + \beta W_\psi(g)(a, b).
\end{aligned}$$

2) Usando la definición de transformada wavelet obtenemos

$$W_\psi f_{t_0}(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

haciendo el cambio de variable $s = t - t_0$ donde $dt = ds$ y $t = s + t_0$, reemplazando estos valores en la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
W_\psi f_{t_0}(a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left\{\frac{s+t_0-b}{\sqrt{a}}\right\} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \psi\left(\frac{s-(b-t_0)}{\sqrt{a}}\right) ds \\
&= W_\psi f(a, b - t_0).
\end{aligned}$$

3) Usando la definición de la transformada wavelet obtenemos

$$W_\psi D_{\sigma_0} f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} f\left(\frac{t}{\sigma_0}\right) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

haciendo el cambio de variable $r = \frac{t}{\sigma_0}$ y derivando con respecto a t tenemos que $dr = \frac{dt}{\sigma_0}$, donde $t - b = r\sigma_0 - b$, luego

$$\begin{aligned}
W_\psi D_{\sigma_0} f(a, b) &= \frac{\sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(r) \psi\left(\frac{r\sigma_0 - b}{a}\right) dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{\sigma_0}}} \int_{\mathbb{R}} f(r) \psi\left(\frac{r - \frac{b}{\sigma_0}}{\frac{a}{\sigma_0}}\right) dr \\
&= W_\psi f\left(\frac{a}{\sigma_0}, \frac{b}{\sigma_0}\right).
\end{aligned}$$

4) Por definición de la transformada wavelet se tiene

$$W_\psi f(a, b) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

utilizando (3) se tiene

$$\begin{aligned} f * \bar{\psi}_a(b) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= W_{\psi} f(a, b). \end{aligned}$$

5) Para esta demostración se tienen en cuenta algunas propiedades de la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi} f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |f * \widehat{\psi}_a(b)|^2 db \right) \frac{da}{a^2} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(w)|^2 |\widehat{\psi}_a(w)|^2 dw \frac{da}{a^2}, \end{aligned}$$

y como

$$\widehat{\psi}_{a,b}(w) = \sqrt{a} \widehat{\psi}(aw) e^{-i(aw)b}$$

tenemos entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |W_{\psi} f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(w)|^2 |\widehat{\psi}(aw)|^2 dw \frac{da}{a} \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(w)|^2 |\widehat{\psi}(aw)|^2 dw \right) \frac{da}{a} \end{aligned}$$

usando el cambio de variable $s = aw$, $ds = wda$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(w)|^2 \left(\int_0^{\infty} a |\widehat{\psi}(aw)|^2 \frac{da}{a^2} \right) dw &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(w)|^2 \int_0^{\infty} |\widehat{\psi}(s)|^2 \left(\frac{ds}{w} \right) \left(\frac{w}{s} \right) dw \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(w)|^2 dw \right) \left(\int_0^{\infty} \left| \frac{\widehat{\psi}}{s} \right|^2 ds \right) \\ &= C_{\psi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|W_{\psi} f\|^2 = C_{\psi} \|f\|^2.$$

Ahora veamos la otra herramienta matemática que nos permite analizar aquellas señales donde los parámetros de dilatación y traslación que definen la wavelet madre cambian en forma discreta.

La TWD es muy similar a la TDF, pero en lugar de usar funciones seno y coseno como ésta última, utiliza otra clase de funciones denominadas funciones de escala y funciones wavelet [11, 18, 15, 13, 14, 17].

2.3.2. Transformada wavelet discreta (TWD)

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función wavelet y consideremos la familia $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ de escalas y traslaciones de ψ dadas por

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se puede probar que esta familia es una base del sistema $L^2(\mathbb{R})$, donde los parámetros de dilatación y traslación están asociados a la red diádica: $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$, donde $j, k \in \mathbb{Z}$.

Si consideramos una señal de energía finita f entonces la transformada wavelet discreta (TWD) de esta señal se define como

$$DW_\psi f(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

para todos los valores enteros de j y k . Luego cada función discreta $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \psi_{j,k}(t) \\ &\approx \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(t) \end{aligned}$$

donde $C_{j,k}$ representan los coeficientes wavelet discretos.

Si ψ genera una base ortonormal de wavelet para señales de energía finita entonces los valores de la transformada $DW_\psi f(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$, coinciden con los valores de los coeficientes wavelet $C_{j,k}$ de la reconstrucción. Luego los coeficientes wavelet dan información estructural de la señal, de igual manera que en el caso continuo, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_{j,k} &= \langle f, \psi_{j,k} \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{j/2} \psi(2^j t - k) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{j/2} \psi \left[2^j \left(t - \frac{k}{2^j} \right) \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left(\frac{t - \frac{k}{2^j}}{1/2^j} \right) dt. \end{aligned}$$

A partir de la definición de la TWC, se tiene

$$W_\psi(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

donde $a, b \in H = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a > 0\}$, por consiguiente se tiene que

$$C_{j,k} = W_\psi f \left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right).$$

En consecuencia, podemos considerar que los valores de la transformada o los coeficientes wavelet resumen la información de la señal en forma análoga al caso continuo [11, 9, 8].

2.3.3. Análisis multiresolución

Ahora bien la TWD está fundamentada en el concepto de análisis multiresolución (AMR) introducido por Mallat y Meyer en 1986, como un método para encontrar bases ortogonales de wavelet el cual analiza la señal de tal modo que cada componente de frecuencia es analizado con una resolución diferente.

Definición 2.2. Un *análisis multiresolución* (AMR) es una secuencia de subespacios lineales cerrados $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ en $L^2(\mathbb{R})$ que satisfacen las siguientes propiedades [8, 3, 6, 11, 17]:

1. (AMR1) $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.
2. (AMR2) $f \in V_j$ si, y sólo si, $f(2(\cdot)) \in V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.
3. (AMR3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
4. (AMR4) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
5. (AMR5) Existe una función $\varphi \in V_0$, tal que $\{\varphi((\cdot) - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0 . La función φ se conoce como la *función de escala*.

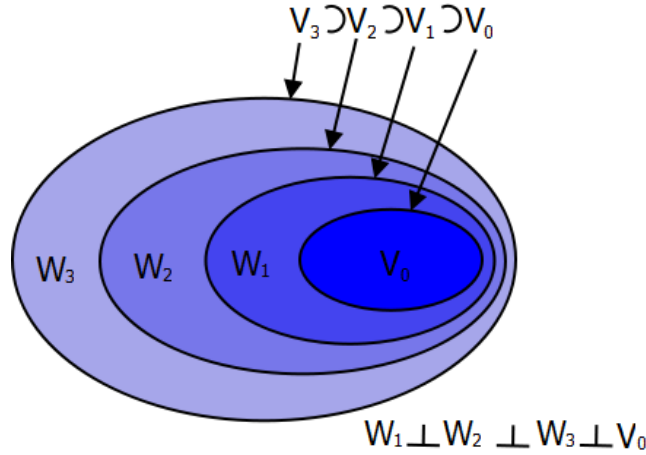


Figura 2.6: subespacios del AMR

La Figura 2.6 representa el análisis multiresolución (AMR). La idea del AMR es obtener una secuencia de aproximaciones sucesivas de la señal a través de proyecciones reiteradas de la misma sobre subespacios V_j de $L^2(\mathbb{R})$, donde $j \in \mathbb{Z}$. Estos subespacios V_j son generados mediante sucesivas traslaciones de la función escala $\varphi(t)$ y se definen como:

$$V_j = \text{Gen}\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \varphi_{j,k} : C_{j,k} \in \mathbb{R} \right\}.$$

De esta manera, para cada $j \in \mathbb{Z}$, la familia de funciones

$$\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} = \{2^{j/2} \varphi(2^j(\cdot) - k) : k \in \mathbb{Z}\}$$

que se genera mediante traslaciones y dilataciones de la función escala $\varphi(t)$ forma una base ortonormal para cada V_j . Luego, para $f \in L^2(\mathbb{Z})$ en V_j , con $j \in \mathbb{Z}$, existen escalares $C_{j,k} \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \varphi_{j,k}(t), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}$$

con

$$C_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_{j,k}(t) dt, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Características de la Función de Escala

Definición 2.3. Una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ es una *función de escala* apropiada para un análisis multirresolución de señales discretas si cumple las siguientes condiciones:

1. Para cada $j \in \mathbb{Z}$, la familia de funciones $\{\varphi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ forma una base ortogonal para cada subespacio V_j .
2. Los subespacios V_j están encajados, es decir $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.
3. $\varphi(t)$ tiene soporte compacto.

La normalidad de $\{\varphi_{j,k}\}$ permite asegurar que $\|\varphi_{j,k}\| = \|\varphi\|$. Veámoslo,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{j,k}\|^2 &= \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j,k}^2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (2^{j/2})^2 \varphi^2(2^j t - k) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2^j \varphi^2(2^j t - k) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(u) du = \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

Esta última expresión se obtiene sustituyendo $u = 2^j t - k$.

Además, la condición de ortonormalidad de $\{\varphi_{j,k}\}$ facilita la descomposición de las señales y requiere que para cada $j \in \mathbb{Z}$ tengamos:

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = \delta(k - l) = \begin{cases} 1, & k = l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

La segunda condición indica que los subespacios V_j a medida que j crece, incluyen más funciones de L^2 y puede mostrarse que los espacios están encajados si y solo si la función de escala φ está en V_j . Debemos tener en cuenta la posición de los índices en los subespacios, según Daubechies tiene la forma:

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

y según Mallat:

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

en este trabajo se utiliza la forma de Mallat.

Veamos la primera implicación:

$$\forall j \in \mathbb{Z} : V_j \subset V_{j+1} \Rightarrow \varphi \in V_j$$

que es equivalente a $f \in V_j$ entonces:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \forall t \in \mathbb{R}$$

Dado que $V_0 \subset V_1$ y la función $\varphi(t) \in V_0$, donde

$$V_0 = \{f \in L^2(\mathbb{R}) / f(x) = \sum C_k \varphi(t - k)\}$$

entonces

$$\varphi(t) \in V_1$$

y $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_1 por propiedad (AM5).

Ahora veamos la segunda implicación:

$$\forall j \in \mathbb{Z} : \varphi \in V_j \Rightarrow V_j \subset V_{j+1}$$

Teniendo en cuenta la primera implicación se tiene que la familia de funciones $\{\varphi_{j,k}\}$ asegura que si $\varphi \in V_j$, o lo que es lo mismo $f \in V_j$ entonces

$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \varphi_{j,k}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En efecto estos espacios cumplen con la condición de escalamiento es decir que los elementos de un espacio son versiones escaladas del siguiente espacio así:

$$f \in V_j \Rightarrow f(2(\cdot)) \in V_{j+1}, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} f(2t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \varphi_{j,k}(2t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} 2^{j/2} \varphi(2^j(2t) - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} 2^{j/2} \varphi(2^{j+1}t - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}t - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_{j,k} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{j+1,k}(t). \end{aligned}$$

Es decir, $f(2(\cdot)) \in V_{j+1}$. Puesto que $V_0 \subset V_1$ y la función $\varphi(t) \in V_0$ entonces $\{\varphi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_1 , luego existen coeficientes h_k de tal manera que $\varphi(t)$ puede ser

expresada como combinación lineal de las funciones base del subespacio V_1 así:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(t), k \in \mathbb{Z} \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)\end{aligned}\tag{2.1}$$

con

$$\begin{aligned}h_k &= \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \\ &= \sqrt{2} \langle \varphi(t), \varphi(2t - k) \rangle \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \overline{\varphi(2t - k)} dt\end{aligned}$$

La ecuación 2.1 es conocida como la ecuación de escala o ecuación de refinamiento o dilatación y es fundamental en la construcción y análisis de la transformada wavelet donde $\varphi(t)$ tiene soporte compacto. Por otro lado asociado con la función de escala φ se tiene h_k , llamado coeficiente de escala y también se lo asocia a un filtro discreto que puede estar representado por una secuencia de números reales o complejos, de gran importancia ya que relaciona el AMR a la teoría de señales en un determinado proceso.

Entonces a partir de la ecuación de escala (2.1) veamos algunas propiedades de los coeficientes de escala $\{h_k; k \in \mathbb{Z}\}$ asociados al AMR.

1) **propiedad:** Si $\varphi(t) \in L^2$ es solución de la ecuación de escala

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1$$

entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k = \sqrt{2}.$$

Demostración

La ecuación de escala está dada por

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$$

integrando la ecuación de escala tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) dt \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - k) dt.\end{aligned}$$

Sustituyendo $u = 2t - k$,

$$\begin{aligned} &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \frac{du}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du. \end{aligned}$$

Suponiendo que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \neq 0$ y asumiendo la igualdad a uno se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \\ \sqrt{2} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k. \end{aligned}$$

- 2) **propiedad:** Si $\varphi(t) \in L^2 \cap L^1$ es solución de la ecuación escala y las traslaciones enteras de $\varphi(t)$ son ortogonales si para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t - k) dt = \delta(k)$$

entonces para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_n h_n h_{n-2k} = \delta(k).$$

En particular, si $k = 0$, se tiene que $\sum_n h_n^2 = 1$.

Demostración

Sea

$$\begin{aligned} \delta(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \varphi(t - k) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2} \sum_n h_n \varphi(2t - n) \right) \left(\sqrt{2} \sum_m h_m \varphi(2(t - k) - m) \right) \\ &= 2 \sum_n \left[\sum_m h_n h_m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - n) \varphi(2t - 2k - m) dt \right] \end{aligned}$$

Como por hipótesis $\varphi(t)$ tiene soporte compacto, podemos intercambiar la sumatoria con la integral porque un número finito de sus coeficientes no son nulos. Sustituyendo $u = 2t - n$

$$\begin{aligned} \delta(k) &= \sum_n \left[\sum_m h_n h_m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) \varphi(u + n - 2k - m) du \right] \\ &= \sum_n \sum_m h_n h_m \delta(m + 2k - n) \\ &= \sum_n h_n h_{n-2k} \end{aligned}$$

Esta última expresión se obtiene tomando $m = 2k - n$.

Particularmente, si $k = 0$ entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\sum_n h_n^2 = 1$$

quedando demostrada esta proposición.

Ahora usando la definición de la transformada de Fourier en la ecuación de escala 2.1 se tiene

$$\widehat{\varphi}(w) = H\left(\frac{w}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad (2.2)$$

En efecto

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) e^{-iwt} dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_k e^{-ik\frac{w}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ik\frac{w}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ &= H\left(\frac{w}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde

$$\sqrt{2}H(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ikw} \quad (2.4)$$

representa una función de período 2π en $L^2 \in \mathbb{R}$.

El hecho de que el conjunto $\{\varphi(t-k)\}$ es una base ortonormal para V_0 nos permite expresarla en términos de la transformada de Fourier o en términos de la función $H(w)$ que es una función de período 2π más concretamente, mediante el siguiente lema.

Lema 2.1. *El conjunto $\{\varphi(t-k)\}$ es un conjunto ortonormal en $L^2 \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w + 2\pi k)|^2 = 1$ para casi todo $w \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi(t-k) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikw} |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikw} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w + 2\pi k)|^2 dw = \delta_k \end{aligned}$$

puesto que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w + 2\pi k)|^2 = 1$, por la ecuación $\widehat{\varphi}(w) = H(\frac{w}{2}) \widehat{\varphi}(\frac{w}{2})$ equivalente a

$$\widehat{\varphi}(2w) = H(w) \widehat{\varphi}(w)$$

Entonces $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |2w + 2\pi k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(w + \pi k)|^2 |\widehat{\varphi}(w + \pi k)|^2 = 1$.

Como $H(w)$ es de período 2π y dividiendo esta suma en dos partes, una con índices pares y la otra con índices impares, se tiene:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(w + 2\pi k)|^2 |\widehat{\varphi}(w + 2\pi k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(w + (2k+1)\pi)|^2 |\widehat{\varphi}(w + (2k+1)\pi)|^2 = 1$$

$$|H(w)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w + 2\pi k)|^2 + |H(w + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w + \pi + 2\pi k)|^2 = 1$$

$$|H(w)|^2 + |H(w + \pi)|^2 = 1$$

casi en todas partes.

En la ecuación (2.4) $\{h_k; k \in \mathbb{Z}\}$ representan los coeficientes de Fourier. Así

$$\sqrt{2}H(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k.$$

Por la propiedad de normalización de los coeficientes h_k , se tiene:

$$\sqrt{2}H(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2} \Rightarrow H(0) = 1.$$

Por la ecuación (2.4) $H(\pi) = 0$, puesto que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}H(\pi) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\pi k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = 0. \end{aligned}$$

Observación:

Si

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(2k) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(2k+1) = 1 \text{ (a)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(2k) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(2k+1) = 0 \text{ (b)}$$

Sumando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = 1$$

luego

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando el anterior valor en la ecuación (a) o (b), tenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Entonces a partir de la ecuación de escala (2.1) se probaron las siguientes relaciones sobre $\{h_k; k \in \mathbb{Z}\}$;

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k &= \sqrt{2} \quad , \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1, \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n h_{n-2k} &= \delta_k \quad , \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ H(0) &= 1 \quad , \quad H(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Al realizar el mismo proceso anterior repetidas veces en la ecuación (3.3) y teniendo en cuenta la ecuación (3.4), podemos obtener otra representación de la ecuación (3.3) lo cual nos muestra que podemos construir la función $\varphi(t)$ a partir de los coeficientes h_k , es decir:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(w) &= H\left(\frac{w}{2^1}\right) H\left(\frac{w}{2^2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2^2}\right) \\ &= H\left(\frac{w}{2^1}\right) H\left(\frac{w}{2^2}\right) H\left(\frac{w}{2^3}\right) \dots H\left(\frac{w}{2^k}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2^k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^p H\left(\frac{w}{2^k}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2^p}\right) \end{aligned}$$

Si $\widehat{\varphi}(w)$ es continua en cero entonces

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2^p}\right) = \widehat{\varphi}(0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \widehat{\varphi}(0) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$$

Luego

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(w) &= \prod_{k=1}^p H\left(\frac{w}{2^k}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2^p}\right) \\ &= \prod_{k=1}^p H\left(\frac{w}{2^k}\right) \end{aligned}$$

Esto nos muestra que podemos construir la función $\varphi(t)$ a partir de los coeficientes h_k .

Dado que la función de escala recoge la información de la señal como una aproximación y la función wavelet recoge los detalles, al pasar la señal a través de estos filtros obtendríamos dos señales diferentes con la respectiva aproximación y los detalles. El filtro h_k se define también como un filtro pasabajo mientras g_k es un filtro pasoalto.

A continuación se tiene una señal discreta definida por:

$$y = 2\sin(0,07t) + 0,5\sin(t + 0,001) \quad (2.5)$$

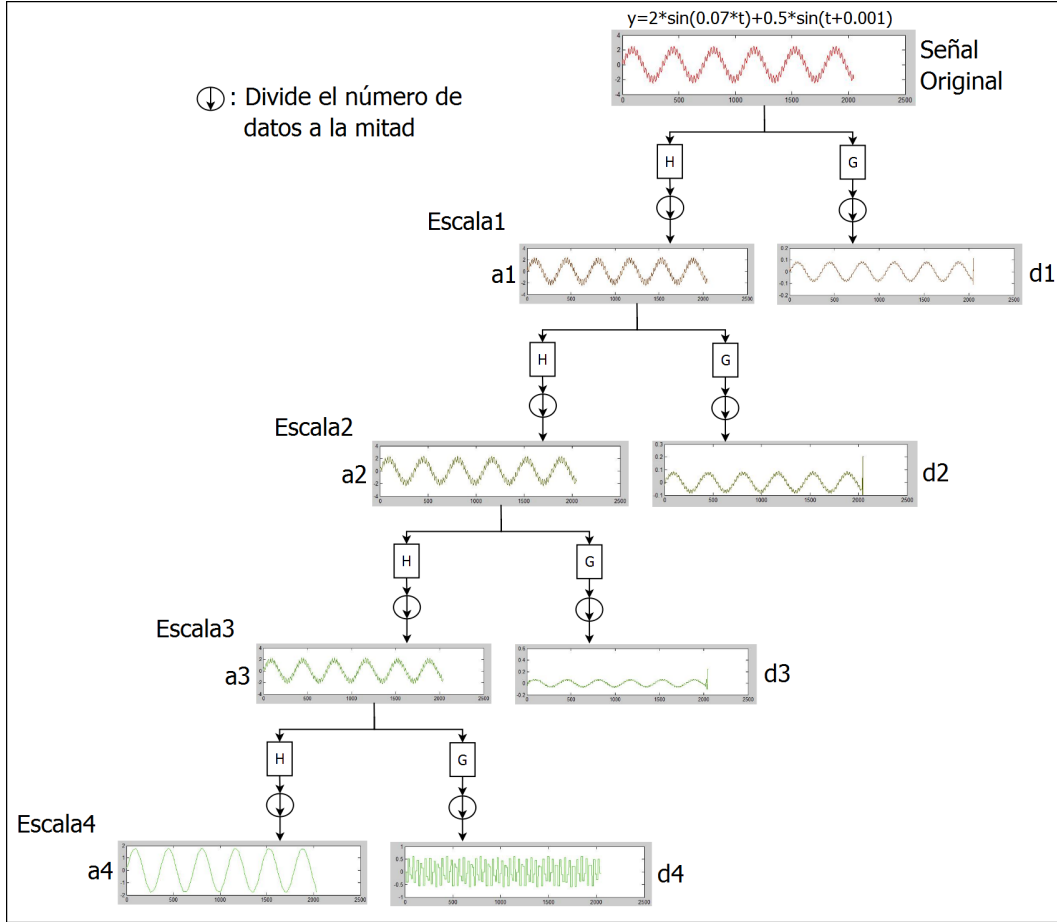


Figura 2.7: Descomposición de la señal $y = 2\sin(0,07t) + 0,5\sin(t + 0,001)$ usando la TWD Shannon.

Como se observa es la suma de dos señales tipo seno, nótese que la primera es de mayor amplitud y menor frecuencia que la segunda. El aplicar la transformada wavelet discreta consiste entonces en pasar la señal a través de los filtros h_k y g_k (para este ejemplo se utilizan los filtros pertenecientes a la wavelet Shannon la cual se verá más adelante) como lo muestra la gráfica 2.7.

Cuando la señal pasa a través de los filtros es diezmada, razón por la cual la señal debe cumplir que:

$$N = 2^M \quad (2.6)$$

donde N es el número de datos de la señal y M es un entero positivo que corresponde a la máxima escala a la que se puede llegar. Luego de los filtros se obtiene entonces dos señales. La primera que sale del filtro h_k es la aproximación de la señal original a_1 , esta contiene las frecuencias bajas inmersas en la señal. La segunda que sale del filtro g_k representa los detalles d_1 , esta contiene las frecuencias altas de la señal. Estas dos señales son entonces el resultado en la primera escala, el proceso se repite el número de veces que se quiera con la única restricción que debe cumplir:

$$i \leq M \quad (2.7)$$

En nuestro ejemplo se escogieron 32768 datos para la señal inicial, por lo cual la escala máxima sería:

$$M = \log_2(N) = \log_2(32768) = 15 \quad (2.8)$$

En la gráfica se muestra hasta la escala 4, entonces el número total de datos tanto en la aproximación como en los detalles es:

$$N = 32768/2^4 = 2048 \quad (2.9)$$

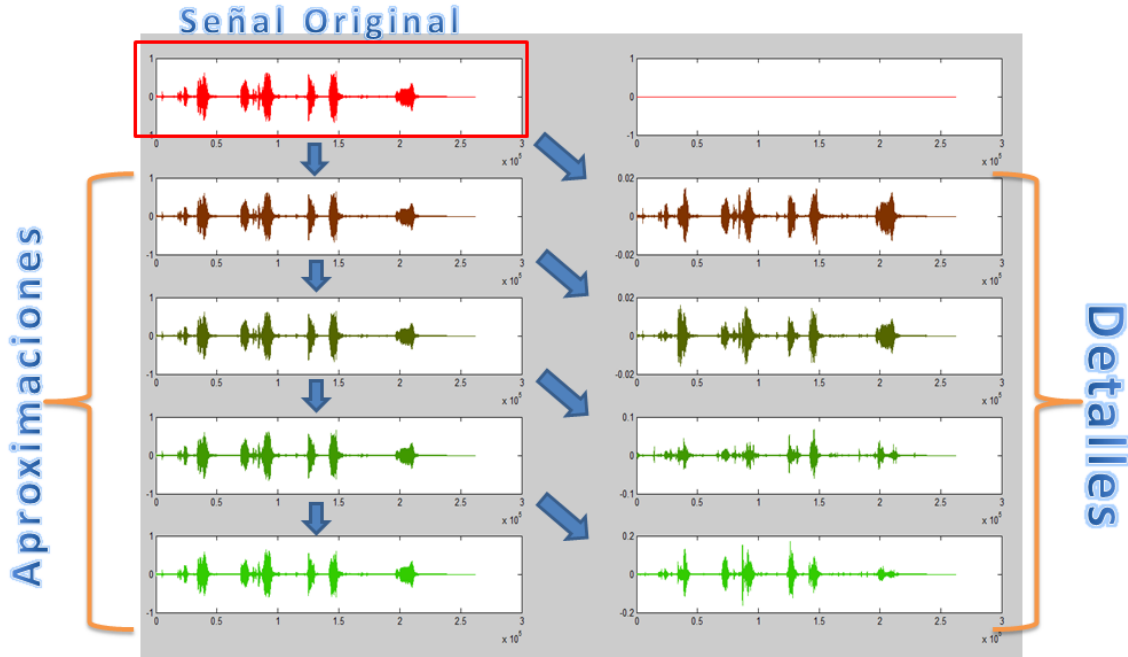


Figura 2.8: Descomposición de una señal proveniente del canto de una ballena jorobada usando la TWD Shannon.

Otro ejemplo aplicado a una señal real perteneciente al canto de las ballenas se ilustra en la figura 2.8, en ella observamos como la señal es descompuesta en su respectivas aproximaciones y detalles mediante la wavelet shannon discreta. [11, 7, 15, 17]

2.3.4. Construcción de una wavelet a partir de un AMR

Para este desarrollo, seguiremos los lineamientos mostrados en [?].

Sea $\{V_j: j \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(\mathbb{R})$ un AMR con función de escala φ .

En la función de escala al aumentar j se mejora la resolución de la representación de la función $f(t)$; pero una mejor representación de $f(t)$ se puede obtener definiendo un nuevo espacio W_j llamado espacio wavelet que entregaran información mas detallada a medida que j crece así:

Para cada $j \in \mathbb{Z}$, se define W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} , donde el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el que usualmente está definido en $L^2(\mathbb{R})$. Es decir

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j.$$

Esto es posible porque, para cada $j \in \mathbb{Z}$, tenemos que V_j es subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$ y también de V_{j+1} . Además $V_j \subset V_{j+1}$ según la propiedad (AMR1). Así existe la descomposición ortogonal de V_{j+1} de la siguiente manera:

$$V_{j+1} = V_j \oplus (V_j)^\perp, \quad \text{donde} \quad (V_j)^\perp \equiv W_j.$$

En otros términos, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces las aproximaciones de la función en las escalas 2^j y 2^{j+1} representan las proyecciones sobre los subespacios V_j y V_{j+1} respectivamente. Luego $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$ nos da información más precisa de los cambios de la señal a medida que la resolución j crece (ver Figura 2.9).

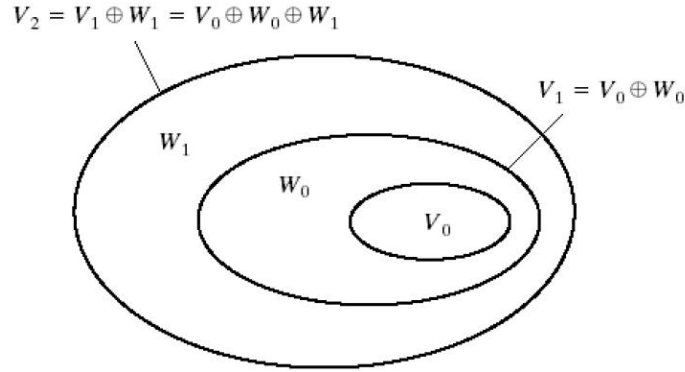


Figura 2.9: Ortogonalidad entre subespacios.

Debido a que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, para cada $j \in \mathbb{Z}$, todo vector en V_{j+1} se puede escribir como la suma directa entre un vector en V_j y un vector en W_j . En consecuencia, si denotamos la proyección de $L^2(\mathbb{R})$ sobre V_j por P_{V_j} y la proyección de V_{j+1} sobre W_j por P_{W_j} entonces para $f \in L^2(\mathbb{R})$ tenemos que

$$P_{V_{j+1}}f = P_{V_j}f + P_{W_j}f.$$

En otras palabras, $P_{W_j}f$ representan las diferentes “variaciones de detalle” de la función f a la escala 2^j y las señales $P_{V_{j+1}}f$ representan las aproximaciones que se forman de cada aproximación anterior añadiendo un nuevo nivel de detalle $P_{W_j}f$. De esta manera, la suma de estos niveles de detalle aproximan progresivamente la función f hasta su reconstrucción. Esto es

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

Es claro que $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \subseteq L^2(\mathbb{R})$ ya que si $f \in \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ entonces f se puede expresar de manera única así:

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j$$

donde $f_j \in W_j \subset L^2(\mathbb{R})$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Luego $f \in L^2(\mathbb{R})$. Ahora demostremos que $L^2(\mathbb{R}) \subseteq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$. Para ello, consideremos $f \in L^2(\mathbb{R})$ y tengamos en cuenta la propiedad (AMR4):

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

Luego existe un elemento en $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ que aproxima a f en la norma de $L^2(\mathbb{R})$. Denotemos a tal aproximación con f por simplicidad. De esta manera, $f \in V_{j+1}$ para algún $j \in \mathbb{Z}$. Por lo cual,

$$\begin{aligned} f &= P_{V_j} f + P_{W_j} f \\ &= P_{V_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_j} f \\ &= P_{V_{j-2}} P_{V_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_{j-2}} P_{V_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_j} f \\ &\vdots \\ &= P_{V_{j-k}} \cdots P_{V_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_{j-k}} \cdots P_{V_{j-1}} P_{V_j} f + \cdots + P_{W_{j-2}} P_{V_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_{j-1}} P_{V_j} f + P_{W_j} f. \end{aligned}$$

Ahora bien, observemos que para $k \geq 0$ tenemos

$$\begin{aligned} w_j &:= P_{W_j} f \in W_j \\ w_{j-1} &:= P_{W_{j-1}} P_{V_j} f \in W_{j-1} \\ w_{j-2} &:= P_{W_{j-2}} P_{V_{j-1}} P_{V_j} f \in W_{j-2} \\ &\vdots \\ w_{j-k} &:= P_{W_{j-k}} P_{V_{j-(k-1)}} \cdots P_{V_{j-1}} P_{V_j} f \in W_{j-k} \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} w_{j-k} = \sum_{i=-\infty}^j w_i \in \bigoplus_{i=-\infty}^j W_i \subset \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

En consecuencia el espacio L^2 se puede representar solo con espacios wavelet es decir que, $L^2(\mathbb{R}) \subseteq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$. Luego $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$.

Dado que $W_0 \subset V_1$ y como el conjunto de funciones $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ expande el espacio wavelet W_j , entonces para calcular la proyección sobre W_0 se necesita tener una base ortonormal a W_0 . Esta base se construye a partir de una función wavelet $\psi(t)$ que se puede representar como una suma de funciones escala $\varphi(t)$, escaladas y trasladadas de la forma:

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) \sqrt{2} \varphi(2t - k), k \in \mathbb{Z}$$

donde $\psi(t)$ se llama ecuación de refinamiento para las funciones wavelet y $g(k)$ representa los coeficientes de escala que resultan al comparar la dilatación y el desplazamiento de ψ .

Debido a la ortogonalidad entre los subespacios V_0 y W_0 , existe una relación entre los coeficientes g_k y h_k de la forma:

$$\begin{aligned} g(k) &= \langle \sqrt{2}\psi(t), \psi(2t - k) \rangle \\ &= (-1)^k h(1 - k) \end{aligned}$$

Luego la función $\psi \in V_1$ genera la familia $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ que es una base ortonormal de W_j para cualquier escala 2^j (por AM2). Además

$\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2 \in \mathbb{R}$. Así para encontrar una función wavelet de manera que la familia generada $\{\varphi_{j,k}(t)\} = \{2^{j/2}\varphi(2^j t - k) : j \in \mathbb{Z}\}$ sea una base ortogonal de $L^2 \in \mathbb{R}$, es suficiente encontrar una función ψ de W_0 tal que $\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sea una base ortonormal de $W_0 = V_1 \ominus V_0$, ya que por la propiedad AM2 y la definición de W_j muestra que $2^{j/2}\psi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}$ es una base ortonormal de W_j para toda $j \in \mathbb{Z}$ de $L^2 \in \mathbb{R}$, y así ψ es una wavelet.

El siguiente teorema conocido como el Teorema de Mallat-Meyer permite construir una base ortonormal de W_j por traslación y escalado de la función wavelet ψ [3, 9, 8, 15].

2.3.5. Teorema de Mallat-Meyer

Teorema 2.1. (Mallat, Meyer.) Sean $\varphi(t)$ la función de escala, $H(\omega)$ la función

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega},$$

y ψ la función cuya transformada de Fourier [10][11] es

$$\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.10)$$

donde

$$\widehat{g}(\omega) = e^{-i(\omega+\pi)} \overline{H(\omega + \pi)}.$$

si se tiene

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

entonces $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Para mostrar que $\{\psi_{j,k}(t)\}$ es una base ortonormal y probar que ψ es una wavelet realizamos los siguientes pasos:

(I) Inicialmente se debe mostrar que $\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de ω_0 así:

- Probar que ψ es un elemento de V_1 . Para ello basta encontrar coeficientes $g_k \in L^2(\mathbb{R})$ de manera que $\psi \in V_1$ si

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{1,n}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2t - k)\end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier a cada lado de la igualdad anterior se tiene:

$$\widehat{\psi}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ik\frac{\omega}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.11)$$

En 2.10 reemplazamos $H(\frac{\omega}{2} + \pi)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(\omega) &= e^{-i(\omega+\pi)} \overline{H(\omega+\pi)} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= e^{-i(\omega+\pi)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n e^{-in(\omega+\pi)}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= e^{-i(\omega+\pi)} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} e^{in(\omega+\pi)} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} e^{i(n-1)(\omega+\pi)} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} e^{i(n-1)\omega} e^{-i(n-1)\pi} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} e^{i(n-1)\omega} (-1)^{n-1} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} (-1)^{n-1} e^{-i(1-n)\omega} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{h_{1-k}} e^{ik\omega} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

tomando

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}} \quad (2.12)$$

siendo $k = 1 - n$, obtenemos entonces

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{ik\omega} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.13)$$

Luego $\psi \in V_1$.

(II) Ahora se debe mostrar que ψ es ortogonal a $V_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

Basta probar que los productos escalares de ψ con todos los elementos de la colección $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son nulos así:

El espacio $W_0 \perp V_0 \Leftrightarrow \{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ son vectores ortogonales, esto es

$$\langle \psi(t), \varphi(t-k) \rangle = \psi * \bar{\varphi}(k) = 0.$$

Utilizando el Teorema de Plancherel, para la transformada de Fourier se tiene:

$$\begin{aligned} \psi * \bar{\varphi}(k) &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\varphi(t-k)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\omega) e^{-ik\omega} \overline{\hat{\varphi}(\omega)} d\omega \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(2\omega) e^{2ik\omega} \overline{\hat{\varphi}(2\omega)} d\omega \end{aligned}$$

Sustituyendo $\hat{\varphi}(2\omega)$ por la ecuación 2.10 y usando la ecuación 2.2 en la última integral se obtiene:

$$2 \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \hat{\varphi}(\omega) e^{2ik\omega} \overline{H(\omega)} \hat{\varphi}(\omega) d\omega.$$

Dividiendo la recta real en los intervalos $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$ y puesto que $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 si, y sólo si,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

para casi todo $\omega \in \mathbb{R}$, se obtiene

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\varphi(t-k)} dt &= 2 \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \hat{\varphi}(\omega) e^{2ik\omega} \overline{H(\omega)} \hat{\varphi}(\omega) d\omega \\ &= 2 \int_0^{2\pi} e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} e^{2ik\omega} \overline{H(\omega)} d\omega \end{aligned}$$

El intervalo de integración $[0, 2\pi]$ se divide en los intervalos de $[0, \pi]$ y $(\pi, 2\pi]$ y en este último se hace el cambio de variable de ω a $\omega - \pi$ para obtener:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\varphi(t-k)} dt &= 2 \int_0^{\pi} e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} e^{2ik\omega} \overline{H(\omega)} d\omega \\ &\quad + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i(\omega-\pi)} \overline{H(\omega)} e^{2ik(\omega-\pi)} \overline{H(\omega-\pi)} d\omega \\ &= 2 \int_0^{\pi} e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \overline{H(\omega)} (1 + e^{-i\pi}) e^{2ik\omega} d\omega \\ &= 2 \int_0^{\pi} e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \overline{H(\omega)} (1 + (-1)) e^{2ik\omega} d\omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego ψ es ortonormal a V_0 en $L^2(\mathbb{R})$.

(III) Ahora se debe demostrar que $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en W_0 .

Para probar la ortonormalidad de la base $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, utilizamos la proposición siguiente.

Proposición 2.2. Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal si, y sólo si,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1,$$

casi en todo $\omega \in \mathbb{R}$.

Mostremos que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$.

Puesto que

$$\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

donde $g(\omega)$ representa una función 2π periódica.

A continuación separamos la suma en pares e impares y utilizando la 2π periodicidad de H se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{g}\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega + 2k\pi}{2}\right) \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \\ &= \left| \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2k\pi\right) \right|^2 + \left| \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \\ &= \left| \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2, 1 + \left| \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2, 1 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \langle \psi(t-k), \psi(t-p) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-k) \overline{\psi}(t-p) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\psi}(t-(p-k)) dt \\ &= \psi * \overline{\psi}(p-k). \end{aligned}$$

Así $\{\psi(t-n)\}$ es ortonormal $\Leftrightarrow \psi * \overline{\psi}(k) = \delta_k$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\psi}(t-k) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \overline{\psi}(t-k) dt = \delta_k \Leftrightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1.$$

Luego $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal.

(IV) Ahora se debe mostrar que $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

Como $\{\sqrt{2}\varphi(2t-k)\}$ es una base de V_1 , se debe probar que para cualquier sucesión $\{a_n\} \in l^2(\mathbb{R})$ existen sucesiones $\{b_n\}, \{c_n\} \in l^2(\mathbb{R})$ tales que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_n \sqrt{2}\varphi(2t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_n \sqrt{2}\varphi(2t-k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n \sqrt{2}\varphi(2t-k)$$

aplicando transformada de Fourier a ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \widehat{b}(\omega) \widehat{\varphi}(\omega) + \widehat{c}(\omega) \widehat{\varphi}(\omega) \\ &= \left(\widehat{b}(\omega) H\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \widehat{c}(\omega) \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\widehat{a}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \widehat{b}(\omega) H\left(\frac{\omega}{2}\right) + \widehat{c}(\omega) \widehat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\widehat{a}(\omega) = \widehat{b}(2\omega) H(\omega) + \widehat{c}(2\omega) \widehat{g}(\omega)$$

Sea

$$\widehat{a}(\omega + \pi) = \widehat{b}(2\omega) H(\omega + \pi) + \widehat{c}(2\omega) \widehat{g}(\omega + \pi)$$

y

$$\widehat{a}(\omega) \overline{H}(\omega) = \widehat{b}(2\omega) |H(\omega)|^2 + \widehat{c}(2\omega) \widehat{g}(\omega) \overline{H}(\omega)$$

entonces

$$\widehat{a}(\omega + \pi) \overline{H}(\omega + \pi) = \widehat{b}(2\omega) |H(\omega + \pi)|^2 + \widehat{c}(2\omega) \widehat{g}(\omega + \pi) \overline{H}(\omega + \pi).$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores tenemos

$$\begin{pmatrix} \widehat{b}(2\omega) \\ \widehat{c}(2\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{H}(\omega) & \overline{H}(\omega + \pi) \\ \overline{g}(\omega) & \overline{g}(\omega + \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a}(\omega) \\ \widehat{a}(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

Como $\widehat{b}(\omega)$ y $\widehat{c}(\omega)$ son de período 2π , entonces representan las series de Fourier de dos sucesiones $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, respectivamente.

(V) Ahora probamos que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}^2}$ es una base ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$.

- Probaremos primero que los subespacios V_j son ortogonales.

Como

$$W_{l-1} \subset V_l \subset V_j \quad \text{si } l < j$$

así W_j y W_{l-1} son ortogonales para todo $l < j$.

Como el complemento W_j no da la información necesaria para ir desde una aproximación con resolución j a una aproximación con resolución $j+1$, en general tenemos:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$$

Las aproximaciones de la función f sobre los subespacios V_j y W_j están dadas respectivamente como $P_{V_j}f$ y $P_{W_j}f$ donde

$$P_{V_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{j,k}(f) \varphi_{j,k}$$

y

$$P_{W_j}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(f) \psi_{j,k}$$

donde

$$b_{j,k}(f) = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \quad \text{y} \quad c_{j,k}(f) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

Si $f \in V_{j+1}$ entonces

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}(t)$$

donde

$$\begin{aligned} b_{j+1,k} &= \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle = \langle P_{V_j}f + P_{W_j}f, \varphi_{j+1,k} \rangle \\ &= \langle P_{V_j}f, \varphi_{j+1,k} \rangle + \langle P_{W_j}f, \varphi_{j+1,k} \rangle \\ &= \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{l,j} \varphi_{l,j}, \varphi_{j+1,k} \right\rangle + \left\langle \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{l,j} \psi_{l,j}, \varphi_{j+1,k} \right\rangle \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{l,j} \langle \varphi_{l,j}, \varphi_{j+1,k} \rangle + \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{l,j} \langle \psi_{l,j}, \varphi_{j+1,k} \rangle \end{aligned}$$

Luego

$$b_{j+1,k} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{k-2l} b_{l,j} + \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{k-2l} c_{l,j}$$

y como

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \sqrt{2} \varphi(2t - n)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(2^j t - k) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \sqrt{2} \varphi(2(2^j t - k) - n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} t - 2k - n) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} t - (2k + n)) \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} t - m)
\end{aligned}$$

Esta última expresión se obtiene tomando $m = 2k + n$, y

$$2^{j/2} \varphi(2^j t - k) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1} t - m)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\varphi_{j,k}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi_{j+1,m}(t) \\
\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,m} \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j,k}(t) \varphi_{j+1,m}(t) dt \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \langle \varphi_{j+1,l}, \varphi_{j+1,m} \rangle
\end{aligned}$$

Similarmente

$$\langle \psi_{j,k}, \varphi_{j+1,m} \rangle = g_{m-2k}$$

También se puede expresar $b_{j,k}$ y $c_{j,k}$ en términos de $b_{j+1,k}$ así

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{j,k} \varphi_{j,k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}$$

pero

$$\begin{aligned}
b_{j,k} &= \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \text{ y} \\
c_{j,k} &= \langle f, \psi_{j,k} \rangle
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
b_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle &= \left\langle f, \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi_{j+1,m} \right\rangle \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_{m-2k}} \langle f, \varphi_{j+1,m} \rangle \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_{m-2k}} b_{j+1,m}
\end{aligned}$$

Similarmente

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{g_{m-2k}} b_{j+1,m}$$

Definamos los operadores lineales así:

$$\begin{aligned} H : L^2 &\longrightarrow L^2 & \text{como } (H_a)_k &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_{m-2k}} a_m \\ G : L^2 &\longrightarrow L^2 & \text{como } (G_a)_k &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{g_{m-2k}} a_m \end{aligned}$$

Sean

$$b_j = Hb_{j+1} \quad \text{y} \quad c_j = Gb_{j+1}$$

Esto significa que en la nueva base $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_j se puede hallar los coeficientes b_j y c_j teniendo en cuenta los coeficientes b_{j+1} en la base $\{\varphi_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_{j+1} .
De aquí que

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j+1,m} \rangle &= h_{k-2l} \\ \langle \psi_{n,l}, \varphi_{n+1,k} \rangle &= g_{k-2l} \end{aligned}$$

Los operadores adjuntos de H y G estan dados por

$$(H_a^*)_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{k-2l} a_l \quad (2.14)$$

$$(G_a^*)_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{k-2l} a_l \quad (2.15)$$

lo cual estos operadores satisfacen que

$$\langle H_a, b \rangle = \langle a, H_b^* \rangle$$

y

$$\langle G_a, b \rangle = \langle a, G_b^* \rangle$$

Observemos que

$$\begin{aligned} b_{j+1} &= H^* b_j + G^* c_j \\ &= H^* H b_{j+1} + G G^* b_{j+1} \\ &= (H^* H + G G^*) b_{j+1} \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$H H^* + G G^* = I$$

donde

$$H^* H = I, \quad G G^* = I, \quad H G^* + G H^* = 0$$

2.4. La wavelet Shannon

La función $\varphi(t) = \text{sinc}(t)$ que aparece en el Teorema del muestreo de Shannon (ecuación 1.1) es el punto de partida para la construcción de la wavelet Shannon. Recordemos aquí que φ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\varphi(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} = \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2\pi i t}, \quad t \neq 0; \quad \varphi(0) = 1 \quad (2.16)$$

Esta función la denominaremos la función de escala, que gráficamente se representa como se muestra en la figura a continuación.

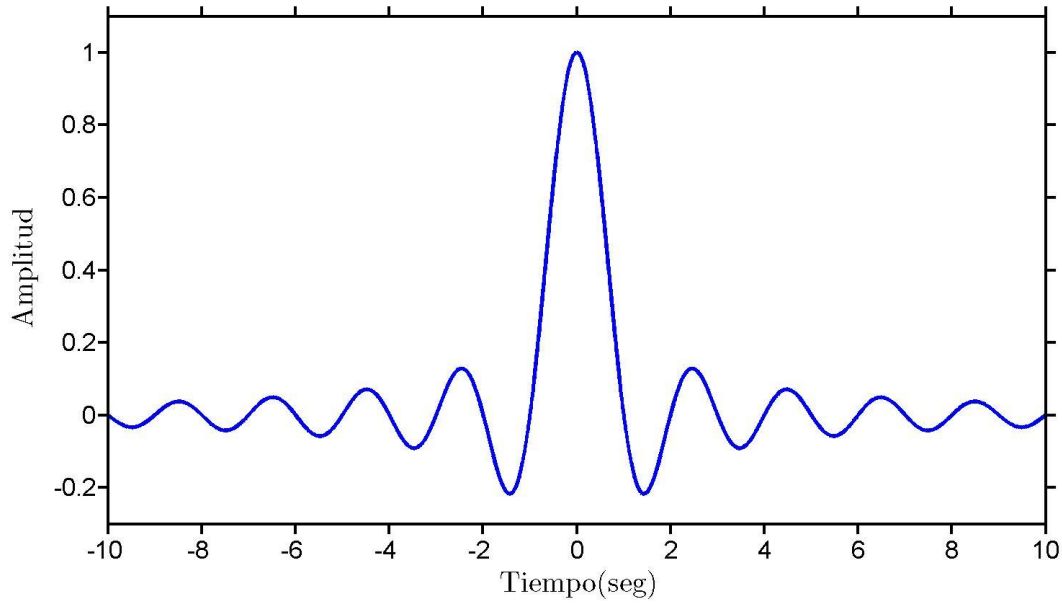


Figura 2.10: Función $\text{sinc}(\pi t)$

Para mostrar que

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \chi_{(-\pi, \pi)}(\omega) \quad (2.17)$$

es la transformada de Fourier de $\varphi(t) = \text{sinc}(t)$, calcularemos φ a partir de $\widehat{\varphi}$, con la relación

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.18)$$

Si $t = 0$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = \frac{1}{2\pi} (\omega) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1$$

Si $t \neq 0$

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{it} (e^{i\omega t}) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2i\pi t} [\cos(\pi t) + i \sin(\pi t) - (\cos(\pi t) - i \sin(\pi t))] = \frac{1}{2i\pi t} (2i \sin \pi t) \\
&= \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = \text{sinc}(\pi t) = \varphi(t)
\end{aligned}$$

De este modo $\chi_{(-\pi, \pi)}(\omega)$ es la transformada de fourier de $\varphi(t) = \text{sinc}(t)$.

Ahora mostremos que el conjunto de subespacios $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ y la función de escala $\varphi(t)$ forman una AMR. Consideremos

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sop}(\widehat{f}) \subseteq [-2^j \pi, 2^j \pi] \right\}.$$

Para trabajar con el AMR se debe satisfacer que

$$V_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{sop}(\widehat{f}) \subseteq [-\pi, \pi] \right\}. \quad (2.19)$$

donde $\varphi(t - k)$ es base ortonormal de V_0 .

Para demostrarlo definimos un conjunto de funciones $\{\varphi_k\}$, en términos de traslaciones enteras de la función de escala $\varphi(t)$:

$$\{\varphi_k\} = \varphi_k(t) = \varphi(t - k) \quad (2.20)$$

Veamos que $\varphi_k(t) \in V_0$.

Ya que $\varphi_k(t) = \varphi(t - k)$, entonces la transformada de Fourier de $\varphi_k(t)$ esta dada por:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_k(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - k) e^{-i\omega t} dt \text{ sea } u = t - k \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-i\omega(u+k)} du = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-i\omega u} e^{-i\omega k} du \\
&= e^{-i\omega k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) e^{-i\omega u} du = e^{-i\omega k} \widehat{\varphi}(\omega) \\
&= e^{-i\omega k} \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\text{sop } \widehat{\varphi}_k(\omega) = [-\pi, \pi] \implies \varphi_k(t) \in V_0$$

Ahora probaremos que el conjunto $\{\varphi_k\}$ es ortonormal. Puesto que

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \chi_{(-\pi, \pi)}(\omega) \quad (2.21)$$

y como $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi$, entonces φ es de banda limitada π .

Veamos que $\|\varphi\| = 1$. Por la identidad de Parseval, tenemos:

Para $k = 0$

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\omega = \frac{1}{2\pi} (\omega) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (2\pi) = 1\end{aligned}$$

Para $k \neq 0$

Como $\varphi_k(t) = \varphi(t - k)$ y $\|\varphi_k\| = \|\varphi\| = 1$, entonces cada φ_k es normal. Por otro lado $\{\varphi_k\}$ es ortogonal si $\{\widehat{\varphi}_k\}$ es ortogonal, esto es $\langle \varphi, \varphi_k \rangle = 0$. Entonces por la identidad de Parseval

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \varphi_k \rangle &= \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\varphi}_k \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) \widehat{\varphi}_k(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{-i\omega k} \widehat{\varphi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega k} [\widehat{\varphi}(\omega)]^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega k} [\chi_{[-\pi, \pi]}(\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega k} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{ik} e^{-i\omega k} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-1}{ik} \right) (e^{-i\pi k} - e^{i\pi k}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{ik} \right) (e^{i\pi k} - e^{-i\pi k}) = \frac{\sin \pi k}{\pi k} = 0\end{aligned}$$

Luego $\{\varphi_k\}$ es ortonormal; por lo tanto $\varphi_k(t) = \varphi(t - k)$ forma una base ortonormal de V_0 .

El subespacio V_0 de $L^2(\mathbb{R})$ generado por $\{\varphi_k\}$ esta definido como $\text{Gen}\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ y como $\{\varphi_k\}$ forma una base ortonormal para cada V_k entonces para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ en V_0 , existen escalares $\mathbb{C}_k \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k \varphi_k(t) \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.22)$$

como f es de banda limitada con soporte compacto $[-\pi, \pi]$, entonces por teorema de Shannon se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \text{sinc}[\Omega(t - nT)]; \quad (2.23)$$

con $T = \frac{\pi}{\Omega}$, en este caso $\Omega = \pi$, por lo tanto $T = 1$, así que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \text{sinc}[\pi(t - n)]$$

pero

$$\varphi_n(t) = \varphi(t - n) = \text{sinc}[\pi(t - n)]$$

asi que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\varphi_n(t) \quad (2.24)$$

por 2.22 y 2.24 se tiene que $C_k = f(n)$, y por la identidad de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C(k)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2$$

Teniendo en cuenta la ecuación 2.1 conocida como la ecuación de escala o ecuación de refinamiento

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \sqrt{2} \varphi(2t - k).$$

hallaremos los coeficientes de escala h_k :

Para $t = 0$

Dado que

$$\text{sinc}(n) = 0; n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \quad y \quad \text{sinc}(0) = 1$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \sqrt{2} \varphi(-k) \\ \text{sinc}(0) &= \dots h_{-1} \sqrt{2} \text{sinc}(1) + h_0 \sqrt{2} \text{sinc}(0) + h_1 \sqrt{2} \text{sinc}(-1) + \dots \\ 1 &= h_0 \sqrt{2} \text{sinc}(0) \\ 1 &= \sqrt{2} h_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto al despejar h_0

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.25)$$

Para $t = j$

Dado que $j \in \mathbb{Z}$ y $j \neq 0$

Tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(j) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2j - k) \\ \text{sinc}(j) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \text{sinc}(2j - k) \\ 0 &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \text{sinc}(2j - k) \end{aligned}$$

En la expresión anterior para que

$$\text{sinc}(2j - k) \neq 0 \implies 2j = k \quad \text{si} \quad 2j = k$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \dots h_{2j-1} \text{sinc}(2j - [2j - 1]) + h_{2j} \text{sinc}(2j - 2j) + h_{2j+1} \text{sinc}(2j - [2j + 1]) + \dots \\ &= \dots h_{2j-1} \text{sinc}(+1) + h_{2j} \text{sinc}(0) + h_{2j+1} \text{sinc}(-1) + \dots \\ &= h_{2j} \text{sinc}(0) \\ 0 &= h_{2j} \end{aligned} \tag{2.26}$$

lo cual significa que los coeficientes pares son cero, y conlleva a que solo existen coeficientes impares de la forma h_{2j+1} para $j \in \mathbb{Z}$; remplazando en la ecuación de escala $\varphi(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(2j + 1) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - (2j + 1)) \\ \text{sinc}(2j + 2) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \text{sinc}(2t - (2j + 1)) \end{aligned} \tag{2.27}$$

la única forma de que: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \text{sinc}(2t - (2j + 1)) \neq 0$, es cuando $\text{sinc}(2t - (2j + 1)) \neq 0$, esto es si

$$(2t - (2j + 1)) = 0 \implies t = j + \frac{1}{2}$$

Volviendo a la ecuación 2.27 tenemos:

$$\begin{aligned} \text{sinc}(j + \frac{1}{2}) &= h_{2j+1} \sqrt{2} \text{sinc}(0) = h_{2j+1} \sqrt{2} \\ \frac{\text{sinc}(j + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}} &= \frac{\text{sen } \pi(j + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}\pi(j + \frac{1}{2})} = h_{2j+1} \\ \frac{(-1)^j}{\sqrt{2}\pi(j + \frac{1}{2})} &= \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{2\pi(j + \frac{1}{2})} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{\pi(2j + 1)} = h_{2j+1} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Luego la función de escala $\varphi(t)$ puede expresarse como una combinación lineal de la forma

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \sqrt{2} h_{2k} \varphi(2t - 2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_{2k+1} \varphi(2t - (2k + 1)) + \sqrt{2} h_0 \varphi(2t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} h_{2k+1} \varphi(2t - (2k + 1)) + \sqrt{2} h_0 \varphi(2t) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(2k + 1)} \varphi(2t - (2k + 1)) + \sqrt{2} h_0 \varphi(2t) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(2k + 1)} \varphi(2t - (2k + 1)) + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2t) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(2k + 1)} \varphi(2t - (2k + 1)) + \varphi(2t) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por el teorema de Mallat se tiene que:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi_{1,n}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2t - k)\end{aligned}\tag{2.30}$$

donde g_k representa los coeficientes de escala y se representan por la ecuacion 2.13. Trayendo de nuevo las ecuaciones 2.25, 2.26 y 2.28:

$$\begin{aligned}h_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ h_{2k} &= 0 \\ h_{2k+1} &= \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{\pi(2j+1)}\end{aligned}$$

entonces podemos hallar los valores de g_k de la siguiente manera.

Para $k = 1$ en 2.13

$$g_1 = (-1)^1 \overline{h_0} = -h_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tag{2.31}$$

Sea $k = 1 - n$, en 2.13 se tiene

$$g_{1-n} = (-1)^{1-n} h_{1-(1-n)} = (-1)^{1-n} h_n$$

Entonces para $n = 2j$ obtenemos

$$g_{1-2j} = (-1)^{1-2j} h_{2j} = (-1)^{1-2j} \cdot 0 = 0$$

como $1 - 2j$ son impares entonces lo podemos reescribir como

$$g_{2j+1} = 0\tag{2.32}$$

Ahora para $n = 2j + 1$

$$g_{1-2j-1} = (-1)^{1-2j-1} h_{2j+1} = (-1)^{-2j} h_{2j+1} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{\pi(2j+1)} = \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{\pi(2j+1)}$$

reemplazando $-j$ por $+j$ se tiene:

$$\begin{aligned}g_{2j} &= \frac{\sqrt{2}(-1)^{-j}}{\pi(2(-j)+1)} = \frac{\sqrt{2} \frac{1}{(-1)^j}}{\pi(1-2j)} = \frac{\sqrt{2}(\frac{1}{-1})^j}{\pi(1-2j)} \\ g_{2j} &= \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{\pi(1-2j)}\end{aligned}\tag{2.33}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k) \\
&= \sqrt{2} \left[\sum_{k \text{ par}} g_k \varphi(2t - k) + \sum_{k \text{ impar}, k \neq 1} g_k \varphi(2t - k) + g_1 \varphi(2t - 1) \right] \\
&= \sqrt{2} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} g_{2j} \varphi(2t - 2j) + g_1 \varphi(2t - 1) \right] \\
&= \sqrt{2} \left[\sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{\pi(1 - 2j)} \varphi(2t - 2j) - \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2t - 1) \right] \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable t por $-t$ en 2.29 se tiene:

$$\varphi(-t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(2k + 1)} \varphi(-2t - 2k - 1) + \varphi(-2t)$$

como k es para todos los enteros, podemos hacer el cambio de k a $-k$ así:

$$\varphi(-t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^{-k}}{\pi(-2k + 1)} \varphi(-2t + 2k - 1) + \varphi(-2t)$$

y dado que $(-1)^{-k} = (-1)^k$ tenemos que

$$\varphi(-t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(1 - 2k)} \varphi(-2t + 2k - 1) + \varphi(-2t)$$

Ahora hacemos el corrimiento de t a $t - \frac{1}{2}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\varphi(-(t - \frac{1}{2})) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(1 - 2k)} \varphi(-2(t - \frac{1}{2}) + 2k - 1) + \varphi(-2(t - \frac{1}{2})) \\
\varphi(-t + \frac{1}{2}) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(1 - 2k)} \varphi(-2t + 2k) + \varphi(-2t + 1)
\end{aligned}$$

dado que $\varphi(t) = \varphi(-t)$ por ser función par tenemos:

$$\varphi(-t + \frac{1}{2}) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(1 - 2k)} \varphi(2t - 2k) + \varphi(2t - 1) \tag{2.35}$$

Observando esta nueva ecuación 2.35 y la ecuación 2.34 vemos que las sumatorias son iguales. Despejando las sumatorias en ambas ecuaciones e igualando, obtenemos de 2.34

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(2t - 1) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^j}{\pi(1 - 2j)} \tag{2.36}$$

y de 2.35

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\varphi\left(-t + \frac{1}{2}\right) - \varphi(2t - 1) \right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2}(-1)^k}{\pi(1 - 2k)} \quad (2.37)$$

igualando 2.36 y 2.37

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t - 1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\varphi\left(-t + \frac{1}{2}\right) - \varphi(2t - 1) \right] \\ \psi(t) + \varphi(2t - 1) &= \varphi\left(-t + \frac{1}{2}\right) - \varphi(2t - 1) \\ \psi(t) &= \varphi\left(-t + \frac{1}{2}\right) - \varphi(2t - 1) - \varphi(2t - 1) \\ &= \varphi\left(-t + \frac{1}{2}\right) - 2\varphi(2t - 1) \text{ como } \varphi(t) = \text{sinc}(t) \text{ es par} \\ &= \varphi\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2\varphi(2t - 1) \end{aligned}$$

Remplazando la ecuación de escala se tiene:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{\text{sen } \pi\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t - \frac{1}{2}\right)} - 2 \frac{\text{sen } \pi(2t - 1)}{\pi(2t - 1)} \\ &= \frac{\text{sen } \pi\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\pi(2t - 1)} - 2 \frac{\text{sen } \pi(2t - 1)}{\pi(2t - 1)} \\ &= \frac{2 \text{sen}\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)}{\pi(2t - 1)} - 2 \frac{\text{sen}(2\pi t - \pi)}{\pi(2t - 1)} \end{aligned}$$

pero $\text{sen}(\theta - \pi) = -\text{sen } \theta$ y $\text{sen}\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\pi t)$. Luego

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi(2t - 1)} (-\cos \pi t + \text{sen } 2\pi t) \quad (2.38)$$

expresión que se conoce como la wavelet Shannon [3, 11, 15, 23, 14, 29] y cuya gráfica se muestra en la Figura 2.11.

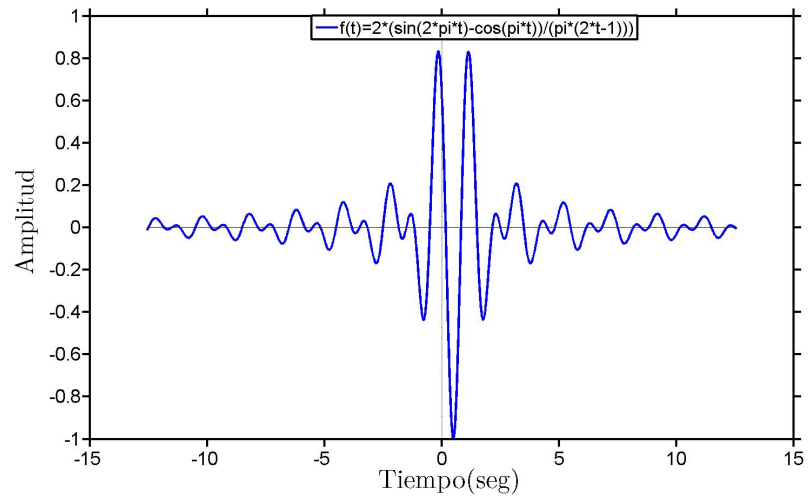


Figura 2.11: wavelet Shannon

CAPITULO 3

Aplicación de la wavelet Shannon al Canto de las Ballenas Jorobadas

Como una aplicación de la teoría de la wavelet Shannon se realizará el análisis de las señales de audio generadas por los sonidos repetitivos que varían en amplitud y frecuencia conocidos como *“el canto de la ballena Jorobada o Yubartas”* (Megaptera novaeangliae).

La ballena Yubartas conocida como ballena Jorobada por arquear su dorso antes de sumergirse y por la presencia del montículo en su dorso es un mamífero marino de gran tamaño, mide al nacer 4.5 metros y pesa 1.5 toneladas. Los adultos machos alcanzan una longitud de 15 metros y hasta las hembras hasta 19 metros, con un peso promedio de hasta 40 toneladas. El color de su cuerpo va desde el gris oscuro hasta negro y su vientre por lo general es blanco. Puede permanecer bajo el agua entre 3 a 30 minutos para luego salir a la superficie donde permanecen de 1 a 3 minutos donde su respiración se da en intervalos entre 10 a 30 segundos. El soplo que se produce por su respiración alcanza hasta 3 metros de altura. Pertenecen al grupo de los misticetos o ballenas con barbas ya que en lugar de dientes tienen barbas. Morfológicamente destaca su cuerpo corto y grueso que se estrecha hacia la aleta caudal la cual presenta bordes aserrados y manchas blancas que son distintas en cada individuo lo que facilita su identificación. Posee grandes aletas pectorales equivalentes a un tercio del largo del ejemplar y de ahí su nombre genérico: mega=grande; ptera=alas y una aleta dorsal de 20 a 30 cm de alto, de forma variable, generalmente triangular de borde posterior concavo, ubicada después de la joroba.

Su cabeza es amplia y redondeada, presenta entre 270 y 400 pares de barbas de color negro o café de 70 cm de largo y 15 cm de ancho que se desprenden de la mandíbula superior la cuál le permiten filtrar el alimento, el cual consiste en pequeños peces como el krill que son capturados en inmersiones hasta de 50 metros o mediante la red de burbujas, la cuál la ballena nadando en círculos aproximadamente a 5 metros de profundidad, exhalan aire y forman una red de burbujas mediante la cuál agrupan el cardumen cada vez más, obligándolo a subir a la superficie para capturarlo.

Las Yubartas alcanzan la pubertad a los 2 y los 4 años cuando su tamaño esta entre los 10 y 12 metros. La madurez sexual llega entre los 3 y 6 años, cuando su tamaño esta entre 13 y 15

metros, y la madurez total entre los 10 y 12 años. Su vida promedio es hasta los 60 años. Las ballenas se encuentran distribuidas en grupos de familias, en todos los océanos y cada familia esta formada por varias especies que en la época de verano permanecen en las altas latitudes donde exclusivamente se alimentan. Las Yubartas están en la familia Balaenopteridae o los comúnmente llamados rorcuales. En el invierno realizan largas migraciones alcanzando velocidades que oscilan entre 4.8 km/h a 14.3 km/h en períodos cortos de tiempo, desde las frías aguas de La Antártida, pasan el verano en la península del océano antártico en el sur del Cabo de Hornos, cruzan las costas del Ecuador y entre los meses de junio y noviembre llegan al pacífico colombiano a las regiones de Bahía Solano, Gorgona y Utria para pasar su época de reproducción y nacimiento de los ballenatos, donde los machos entonan cantos que son sonidos individuales con duración de pocos segundos que abarcan únicamente la época de celo, su frecuencia sonora varia entre los 20 Hz y los 10 KHz (rango de la audición humana 20 Hz a los 20 KHz) cuyo sonido puede subir o bajar o mantenerse igual durante todo el canto (frecuencia modulada) o puede aumentar o disminuir de volumen (amplitud modulada)[25, 26].

El mecanismo de vocalización de la ballena jorobada ha sido un misterio y están relacionados con una variedad de comportamientos que incluyen la comunicación intraespecífica, atraer a una pareja, la agresión, la angustia y la alimentación. Se pensaba que las cuerdas vocales presentes en los mamíferos terrestres eran ausentes en las ballenas, pero los resultados de estudios hechos a muestras laringes en 37 ballenas barbadas (suborden misticetos) pertenecientes a 6 especies de ballenas como son la ballena franca, la ballena jorobada, la ballena minke, el rorcual boreal, el rorcual común y la ballena azul en el laboratorio de la escuela de medicina Mount Sinai, en la institución Oceanográfica Woods Hole y el laboratorio de Osteopreparatory del museo nacional de historia natural, indican la presencia de un pliegue formando un continuo en forma de U que se conoce como “U veces” en el lumen de la laringe que parece ser homólogo a las cuerdas vocales de los mamíferos terrestres. El “U veces” con el apoyo de los cartílagos aritenoides, controlado por los músculos esqueléticos inervados por el nervio laríngeo recurrente, se encuentra junto a un divertículo (saco de la laringe) cubierto por mucosa inervada por el nervio laríngeo superior, y contiene ligamentos que también definen las cuerdas vocales de los mamíferos terrestres.

Las cuerdas vocales en los mamíferos terrestres son perpendiculares al flujo de aire, mientras que en los misticetos el pliegue U veces se orienta paralelamente al flujo de aire, pero no obstante puede controlar el flujo de aire y la vibración de sus bordes puede generar sonidos. Estos hallazgos sugieren que el mecanismo de producción de sonido de baja frecuencia en las ballenas misticetos implica la generación de las frecuencias fundamentales mediante la doble vibración del U veces, modificando la calidad del sonido mediante las contracciones y expansiones de las paredes de la bolsa de la laringe, ya que sirve como un espacio de resonancia y propaga las vibraciones generadas por los movimientos de los cartílagos, incluyendo los aritenoides. La musculatura que rodea la amplia bolsa de laringe puede permitir la expulsión rápida y poderosa del aire de la bolsa a otros espacios de las vías respiratorias, o mantener un volumen constante de salida a pesar de los efectos de la presión ambiental como los cambios durante el buceo o el ascenso. El tamaño y la complejidad de la laringe en los misticetos indica un órgano con múltiples funciones, incluyendo la protección durante la respiración, al tragar, la regulación del flujo de aire y las presiones en los espacios de las

vías respiratorias y la generación de sonido [27, 26].

3.1. Adquisición de las señales

Para la realización de este trabajo de investigación la Fundación Yubarta de la ciudad de Cali bajo la dirección de la doctora Lilian Flórez nos proporcionó los registros de las señales grabadas, en la isla Gorgona y bahía Málaga, en cintas magnetofónicas con duración de 40-45 minutos de cuatro individuos cantores en diferentes fechas (terminología utilizada por la fundación Yubarta). De estos cuatro cantores se utilizó las grabaciones de dos de ellos. El primer cantor identificado IG 128 llamado “Principito” observado en la isla Gorgona en los años de 1986, 1991 y 1992, también fue fotografiado por otros investigadores en la Antártida. El segundo Cantor identificado como IG 015 se llama “Mutilus” identificado en la isla Gorgona en los años 1986, 1990, 1991, 1992, 1993 y 1994. Los individuos son identificados utilizando fotografías del dorso y de la región ventral de la cola porque estas presentan formas, pigmentaciones naturales y cicatrices, que permanecen invariables a través del tiempo (ver Figura 3.1).

La fundación Yubarta es una organización no gubernamental de carácter ambiental cuya misión es promover la conservación de las especies de fauna y flora, y su ambiente, con énfasis en los mamíferos acuáticos. Entendiendo la conservación como la suma de esfuerzos dirigidos a conocer, educar para valorar y usar sosteniblemente los recursos renovables. Está conformada por profesionales que desarrollan actividades en dos áreas principales: la investigación científica y la educación. Este trabajo se inicio en 1986 y se mantiene hasta la actualidad, con una perspectiva ampliada tanto en lo temático como en lo geográfico. La contribución a la conservación de los mamíferos acuáticos se ha logrado por medio de la generación de conocimiento científico sobre su biología y ecología (investigaciones y publicaciones), la educación y sensibilización de la comunidad (capacitación para el avistamiento recreativo, documentales, productos impresos, charlas y programa de adopción de ballenas) y propuestas de reglamentación y manejo (normas de observación turística de ballenas, bases de manejo de parques nacionales).

Para la adquisición de las señales se realizan los recorridos por las zonas de estudio, en una embarcación taxi de 23 pies de largo con motor fuera de borda de 40 Hp. Los recorridos se adelantan generalmente desde las 9 o 10 am hasta las 6 pm, cuando las condiciones ambientales lo permiten. Las ballenas no tienen hora particular para emitir cantos y pueden cantar día y noche. Para la obtención de las grabaciones se detectan los individuos cuando salen a la superficie, sea por el sople producto de la respiración, por el dorso, por la cola o cuando realizan actividades acrobáticas. Mediante la utilización de un hidrófono se confirma si se trata o no de un cantor. En ocasiones se pueden hacer grabaciones de más de tres horas sin parar y en ocasiones de menos de cinco minutos. También es variable la distancia en que es posible aproximarse al individuo cantor. La grabación de los cantos se hace mediante una grabadora de casete, con velocidad de grabación constante, SONY TC-D5M y un hidrófono unidireccional de 6 Km de alcance, con respuesta a frecuencias entre 50 y 10000 Hz.



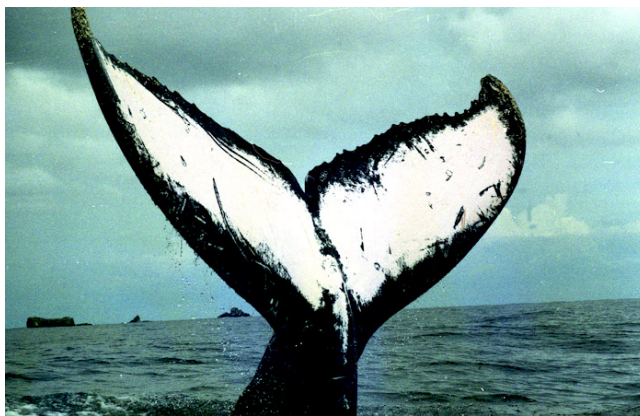
(a) Cola del cantor 15



(b) Dorso de cantor 15



(c) Cola de cantor 128



(d) Cola de cantor 128

Figura 3.1: Fotos de cantores 15 y 128, Fundación Yubarta.

3.2. Análisis del canto de las ballenas

Las señales de los cantos de las ballenas grabadas en casetes es necesario tenerlas de manera digital, para ello se transfirieron al computador en relación uno a uno, sin utilizar ninguna

clase de filtro, en archivos de extensión “wav” utilizando el programa Audacity 1.3 Beta. Estos archivos finales están grabados bajo el estándar del CD-Audio por lo que tienen una tasa de muestreo de 44100 Hz, lo que permite que se almacene todas las componentes frecuenciales menores a 22050 Hz según el teorema de Nyquist (ver sección 1.6.2).

Estos archivos generados contienen una gran cantidad de datos de los cuales se pueden eliminar ciertas componentes frecuenciales que no sean necesarias para el análisis y así acortar el número de datos que resulta siendo enorme ya que a esta frecuencia de muestreo se tienen más de dos millones y medio de datos por minuto. Para la eliminación de las componentes se hizo primero un análisis de Fourier a varios fragmentos muy claros de las señales obtenidas lo cual hizo concluir que ellas solo tenían componentes de frecuencia inferiores a 11 KHz, por lo cual según el teorema de Shannon solo es necesario una frecuencia de muestreo de 22 KHz para su completa reconstrucción esto reduce el número de datos a la mitad. Un ejemplo de ello se aprecia en la Figura 3.2 donde se muestra la TF de un trozo de canto de una ballena jorobada con frecuencias inferiores a 750 Hz. Al escuchar los sonidos originales

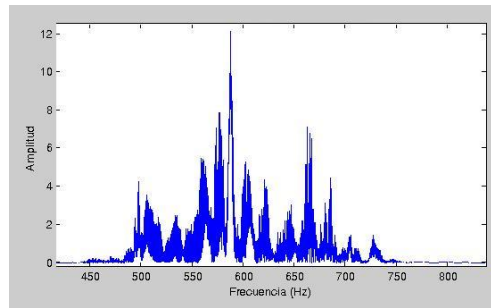


Figura 3.2: Transformada de Fourier aplicada a un trozo de canto de la ballena Jorobada o Yubartas.

del canto de las ballenas se escuchan otros ruidos tales como el oleaje del mar, el burbujeo del agua causado por el motor de la lancha y demás sonidos de otros animales; para eliminar los sonidos que no son del canto de las ballenas se identificaron las frecuencias y se procedió a eliminarlos utilizando el programa Adobe Audacity versión V1.5 que se utiliza usualmente en las emisoras de radio y TV. El resultado esperado es ahora una señal más clara(ver Figura 3.3). También se utilizó este programa para eliminar silencios largos.

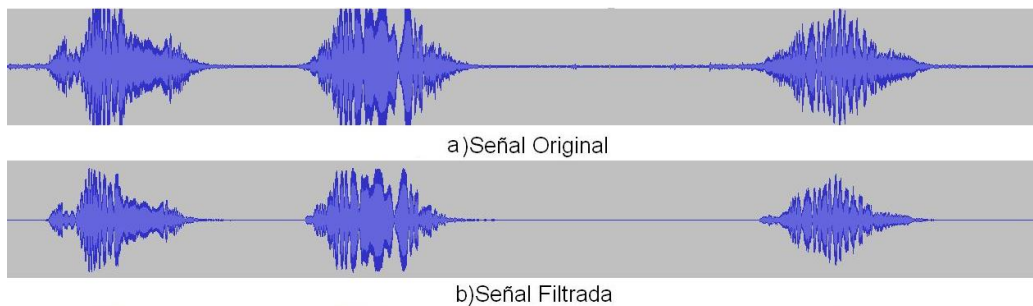


Figura 3.3: Ejemplo de señal proveniente del canto de una ballena Jorobada a) original y b)después de filtrada.

3.3. Wavelet Shannon y Matlab

Matlab en su versión R2009a ofrece herramientas (Toolbox) para trabajar con diferentes clases de wavelets entre ellas la wavelet Haar, la wavelet Daubechies y la wavelet sombrero mexicano, incluso contiene wavelets complejas como la Morlet compleja y la Shannon compleja. Aunque este software contiene gran cantidad de wavelets no posee la wavelet Shannon real que es la que se requiere para este trabajo, por lo cual se hizo necesario un cálculo matemático y el desarrollo de una corta aplicación para determinar los coeficientes continuos y su gráfica. La ecuación de la wavelet Shannon compleja ($\psi_{sh}^{\mathbb{C}}(t)$):

$$\psi_{sh}^{\mathbb{C}}(t) = \sqrt{F_b} \text{sinc}(F_b t) e^{2i\pi F_c t} \quad (3.1)$$

(la cual tiene dos parámetros F_b , conocido como ancho de banda, y F_c , llamada frecuencia central) y la wavelet Shannon real:

$$\psi_{sh}^{\mathbb{R}}(t) = 2 \text{sinc}(2t) - \text{sinc}(t) \quad (3.2)$$

son muy parecidas. Cuando la wavelet Shannon compleja toma como parámetros 0.5 y 0.75 para sus F_b y F_c respectivamente (como se demostrará mas adelante), la parte real de sus coeficientes es igual a los coeficientes de la wavelet Shannon real multiplicada por un factor de $-2/\sqrt{2}$ y desplazada $-1/2$ como se puede apreciar a continuación.

Debemos usar la ecuación de la wavelet Shannon compleja $\psi_{sh}^{\mathbb{C}}$ dada por

$$\psi_{sh}^{\mathbb{C}}(t) = \sqrt{F_b} \text{sinc}(F_b t) e^{2i\pi F_c t} \quad (3.3)$$

e imponer condiciones sobre los parámetros F_b y F_c para obtener una relación con la wavelet Shannon real $\psi_{sh}^{\mathbb{R}}$.

Usando la fórmula de Euler en la previa expresión, tenemos que

$$\begin{aligned} \psi_{sh}^{\mathbb{C}}(t) &= \sqrt{F_b} \text{sinc}(F_b t) [\cos(2\pi F_c t) + i \text{sen}(2\pi F_c t)] \\ &= \sqrt{F_b} \text{sinc}(F_b t) \cos(2\pi F_c t) + i \sqrt{F_b} \text{sinc}(F_b t) \text{sen}(2\pi F_c t) \end{aligned}$$

Considerando solo la parte real de $\psi_{sh}^{\mathbb{C}}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\psi_{sh}^{\mathbb{C}})(t) &= \sqrt{F_b} \text{sinc}(F_b t) \cos(2\pi F_c t) \\ &= \sqrt{F_b} \frac{\text{sen}(\pi F_b t)}{\pi F_b t} \cos(2\pi F_c t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Al hacer uso de la igualdad

$$\text{sen}(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\text{sen}((m-n)x) + \text{sen}((m+n)x)]$$

obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}(\psi_{sh}^{\mathbb{C}})(t) &= \frac{\sqrt{F_b}}{2\pi F_b t} \left(\text{sen}((\pi F_b - 2\pi F_c)t) + \text{sen}((\pi F_b + 2\pi F_c)t) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{F_b}} \left(\frac{\text{sen}((F_b - 2F_c)\pi t) + \text{sen}((F_b + 2F_c)\pi t)}{\pi t} \right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

Y despejando el numerador

$$2\pi t \sqrt{F_b} \mathbb{R}(\psi_{sh}^{\mathbb{C}})(t) = \text{sen}((F_b - 2F_c)\pi t) + \text{sen}((F_b + 2F_c)\pi t) \quad (3.6)$$

Por otra parte, la wavelet Shannon real $\psi_{sh}^{\mathbb{R}}$ está dada por

$$\begin{aligned}\psi_{sh}^{\mathbb{R}}(t) &= 2 \text{sinc}(2t) - \text{sinc}(t) \\ &= 2 \frac{\text{sen}(2\pi t)}{2\pi t} - \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t} \\ &= \frac{\text{sen}(2\pi t) - \text{sen}(\pi t)}{\pi t} \\ &= \frac{\text{sen}(2\pi t) + \text{sen}(-\pi t)}{\pi t}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Y despejando el numerador

$$\pi t \psi_{sh}^{\mathbb{R}}(t) = \text{sen}(2\pi t) + \text{sen}(-\pi t) \quad (3.8)$$

Ahora bien, igualando las partes derecha de las ecuaciones 3.6 y 3.8

$$\text{sen}((F_b - 2F_c)\pi t) + \text{sen}((F_b + 2F_c)\pi t) = \text{sen}(2\pi t) + \text{sen}(-\pi t)$$

Ésta se cumple si F_b y F_c satisfacen las ecuaciones

$$F_b - 2F_c = 2 \quad \text{y} \quad F_b + 2F_c = -1$$

Es decir, si $F_b = \frac{1}{2}$ y $F_c = \frac{3}{4}$. Con estos valores podemos igualar las partes izquierda de las ecuaciones 3.6 y 3.8

$$2\pi t \sqrt{F_b} \mathbb{R}(\psi_{sh}^{\mathbb{C}}) = \pi t \psi_{sh}^{\mathbb{R}} \quad (3.9)$$

entonces

$$\mathbb{R}(\psi_{sh}^{\mathbb{C}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_{sh}^{\mathbb{R}} \quad (3.10)$$

Debido al hecho de que Matlab cuando grafica hace un escalado de los coeficientes para que concuerden con los respectivos colores, no influye el tener un factor como se puede apreciar en la Figura 3.4, en ella son dos señales sinc (parte inferior) con diferentes amplitudes y sus respectivas transformadas wavelets Shannon (en la parte superior) las cuales tienen señalado un punto donde sus coordenadas escala y tiempo (x, y) son iguales mientras la coordenada coeficiente (z) difieren en un factor de 4, pese a ello las gráficas se ven exactamente iguales. En ocasiones cuando hay ruido ciertos coeficientes resultan más altos que otros por lo cual las coloraciones cambian pero las formas más relevantes se mantienen casi sin modificación.

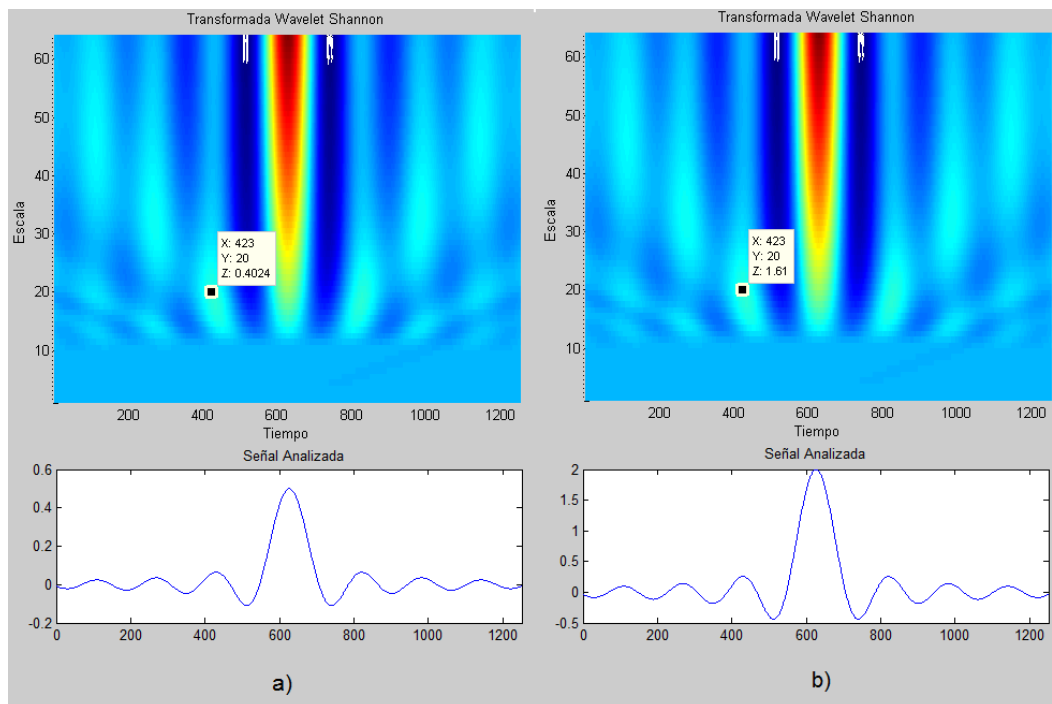


Figura 3.4: Señal sinc en la parte inferior y su respectiva transformada Shannon en la parte superior. a) Señal sinc con amplitud 0.5 b) señal sinc con amplitud 2.

3.4. Búsqueda y Definición de patrones

Al trabajar con la transformada wavelets las señales se descomponen en coeficientes de tal manera que se pueden mostrar en una gráfica, esta gráfica es una representación de la señal. Cuando dos señales presentan similitudes esto se puede ver directamente en la gráfica de los coeficientes wavelets, por ello entre más parecidas las gráficas entonces más parecidas las señales.

Cuando un fragmento de señal es repetitivo decimos que sigue un patrón, estos patrones deben reflejarse en la gráfica de los coeficientes wavelets, en las señales de audio debemos tener en cuenta a la hora de definir la similitud entre sonidos la duración de éstos y sus componentes frecuenciales, en este caso un fragmento del canto de las ballenas es un patrón si su gráfica de la representación de los coeficientes wavelets se repite a lo largo de todo el canto. Debido a que las señales no están exentas de ruido ni sus amplitudes son las mismas las gráficas no serán totalmente iguales, pero sí deben tener las formas más notorias muy parecidas, estas formas también difieren un poco en la coloración esto debido al escalado de colores que hace el software y a los coeficientes introducidos por el ruido. Una de las ventajas de las wavelets es el poder ver la señal durante todo el tiempo por lo cual es posible comparar también las señales en duración lo cual nos determina otra de las características que deben tener dos señales similares, obviamente las señales no serán tampoco exactamente coincidentes en tiempo debido a que son producidas por un ser vivo.

Para buscar patrones en los cantos obtenidos se hizo en diferentes pasos:

1. Separación de patrones por cantos.
2. Búsqueda de patrones entre cantos de la misma fecha.
3. Búsqueda de patrones entre cantos de diferentes fechas.

3.4.1. Separación de patrones por cantos

Al momento de procesar las señales obtenidas nos enfrentamos a ciertos problemas que limitan el trabajo, uno de ellos es el número de datos presentes, en 45 minutos de la señal muestreada a 22050 Hz hay alrededor de 60 millones de datos lo cual hace extenso el tiempo de procesamiento para la máquina empleada, un computador HP TouchSmart con 4 Gigabytes de memoria RAM y un procesador Intel Corel 2 Duo que trabaja a 2.16 GHz. Para tratar de dar solución a este inconveniente se hace un recorte de la señal a oído y se selecciona partes de la señal con tiempo de 10 minutos de la parte inicial, intermedia y final que contienen la mayor parte del canto, subdividiendo cada una de estas señales para eliminar trozos extensos de silencios.

Inicialmente tenemos 2 cintas completas del cantor 15 (47 min cada una) y 2 del 128 (20 min y 15 min) todas en diferentes épocas, al segmentarlas y habiendo eliminado silencios obtenemos 4 porciones de canto relevantes como muestra en la tabla 3.1 que fueron los realmente analizados.

Patrón	Fecha	Total duración	Tiempo analizado
Cantor 15	13/08/1991	47 min	20 min relevantes
Cantor 15	24/09/1993	47 min	30 min relevantes
Cantor 128	09/08/1991	20 min	10 min relevantes
Cantor 128	13/08/1991	15 min	10 min relevantes

Tabla 3.1: Porciones relevantes de los cantos

Luego de obtener estos cantos se procedió a segmentarlo aún más ya que siguen siendo muy extensos tanto para el procesamiento como para una búsqueda exitosa de patrones. Esta última segmentación se hizo separando fragmentos limitados por silencios y trozos por escucha de la señal aparentemente repetitivos. Al aplicar la segmentación al cantor 15 se obtuvieron en total 75 trozos y del cantor 128 se obtuvieron 61 trozos, los cuales son de diferente duración ya que pertenecen a patrones distintos o pueden no pertenecer a ningún patrón, para su identificación cada trozo fue enumerado.

En este paso se procedió también a aplicar la transformada wavelet Shannon a cada uno de los trozos obtenidos, esto se hizo haciendo uso de el software Matlab y su Toolbox Wavelets obteniendo como resultado gráficas representativas de la parte real y parte imaginaria de la transformada.

Los colores usados pertenecen a la gama de colores llamada “Jet” en Matlab, se modificó el brillo para obtener una imagen más clara, las gráficas obtenidas se guardaron en formato

“fig” de Matlab para poder analizar en profundidad, ya que este formato permite el acercamiento de las imágenes sin perder resolución. Observemos la Figura 3.5a, ella contiene 3 ilustraciones. Una inferior que muestra un trozo de señal proveniente del canto de una ballena jorobada, en el eje horizontal se muestra el número de datos (no el tiempo) y el eje vertical la amplitud, la cual está escalada y se mantiene entre 0 y 1. Las dos ilustraciones superiores muestran la representación gráfica de la parte real (a la izquierda) y de la parte imaginaria (a la derecha) de la TW Shannon Compleja, esto haciendo uso de los parámetros $F_c = 0,75$. y $F_b = 0,5$. Como se dijo anteriormente con estos valores se toma entonces la parte real como la gráfica de la wavelet Shannon Real. La Figura 3.5b tiene la misma representación pero para un trozo de señal diferente.

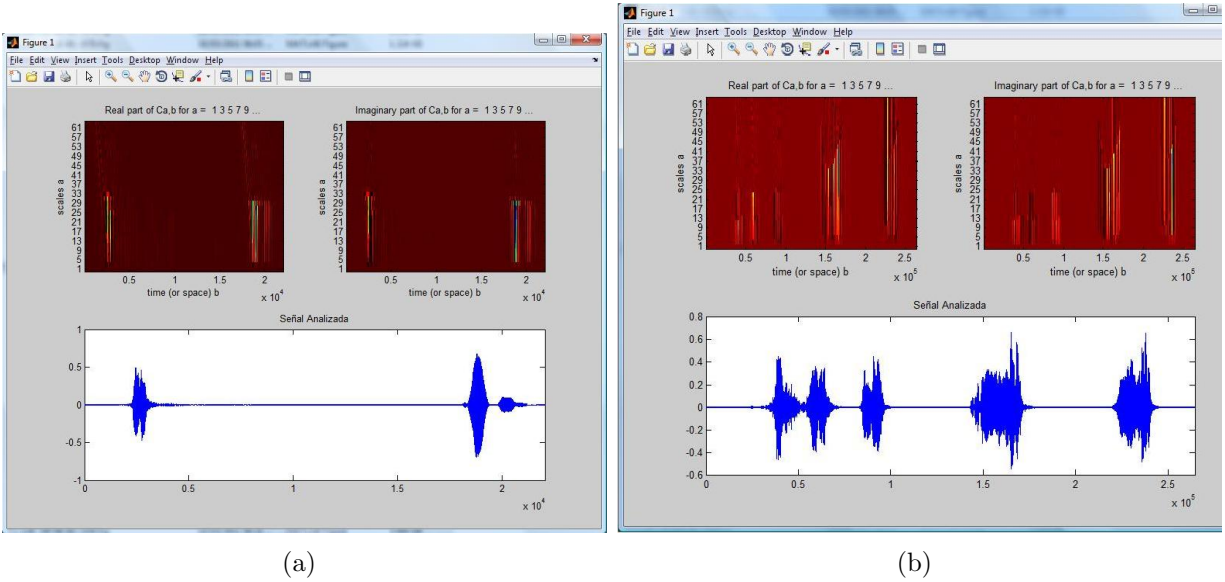


Figura 3.5: Transformada wavelet Shannon Compleja con $F_c = 0,75$ y $F_b = 0,5$.

3.4.2. Búsqueda de patrones entre cantos de la misma fecha

Se agruparon las gráficas teniendo en cuenta el cantor y la fecha, luego se observó cada una de las gráficas junto a otras dentro del mismo grupo buscando similitudes entre ellas, en este análisis visual la repetición de estas gráficas representan un patrón, todas las gráficas pertenecientes a un patrón se recogieron en una misma imagen para comparar mejor su parecido (ver Figura 3.6). Las gráficas están representadas en un sistema datos *vs.* escala, los números que se muestran en el eje horizontal se refieren al número de datos, por lo cual para sacar su valor en tiempo real es necesario usar la siguiente expresión:

$$t = \frac{n}{F_s} \quad (3.11)$$

Donde t es el instante de tiempo, n es el número de datos y F_s es la frecuencia de muestreo que en este caso equivale a 22050 Hz. Como ejemplo tenemos el dato 4×10^5 en la Figura 3.6 que al introducirlo en la ecuación 3.11 tenemos que el dato equivale al instante de tiempo 18,1406 seg, después de hecho esto se podría hablar de una gráfica Tiempo-Escala.

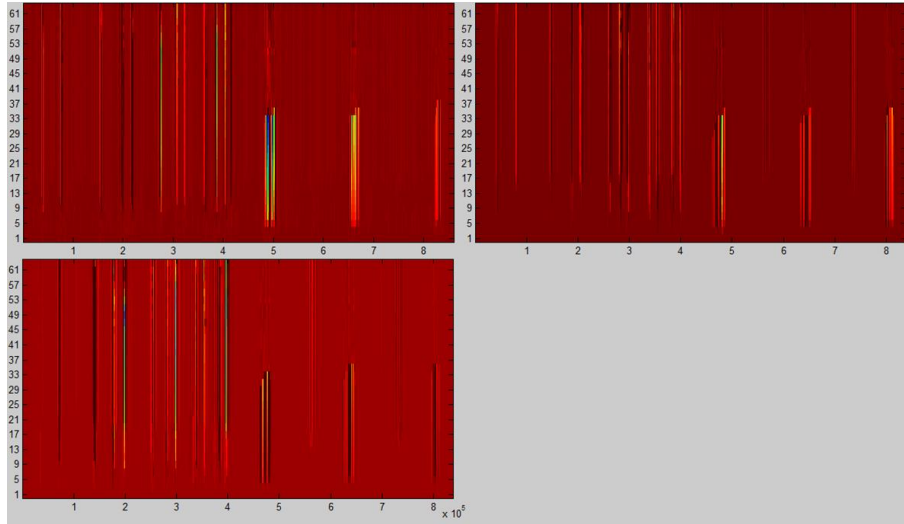


Figura 3.6: Patrón 10 cantor 15 del 13/08/91 de la mitad.

En la Figura 3.6 se muestran tres de los trozos declarados similares, cada uno perteneciente al cantor 15 de la parte de la mitad de uno de los casetes, se observa cómo entre el dato 1 y el dato 4×10^5 hay 12 líneas de colores fuertes las cuales tienen espaciados irregulares y que podemos agrupar en pequeños grupos de 2, 3, 3 y 4 líneas, si comparamos estos espaciados entre las tres gráficas podemos observar que coinciden en el eje horizontal. En la otra parte de la gráfica la señal contiene 3 bloques prominentes, los cuales ocupan escalas entre la 5 y la 37, los espacios entre ellos y la duración de cada uno son las mismas en todas las gráficas, los dos primeros ocupan alrededor de 2×10^4 datos mientras que el último es un poco más corto de 1×10^4 . En estas imágenes se aprecia como las formas generadas se asemejan aunque los colores no sean los mismos. Otras muestras se pueden ver en la Figura 3.7 y la Figura 3.8.

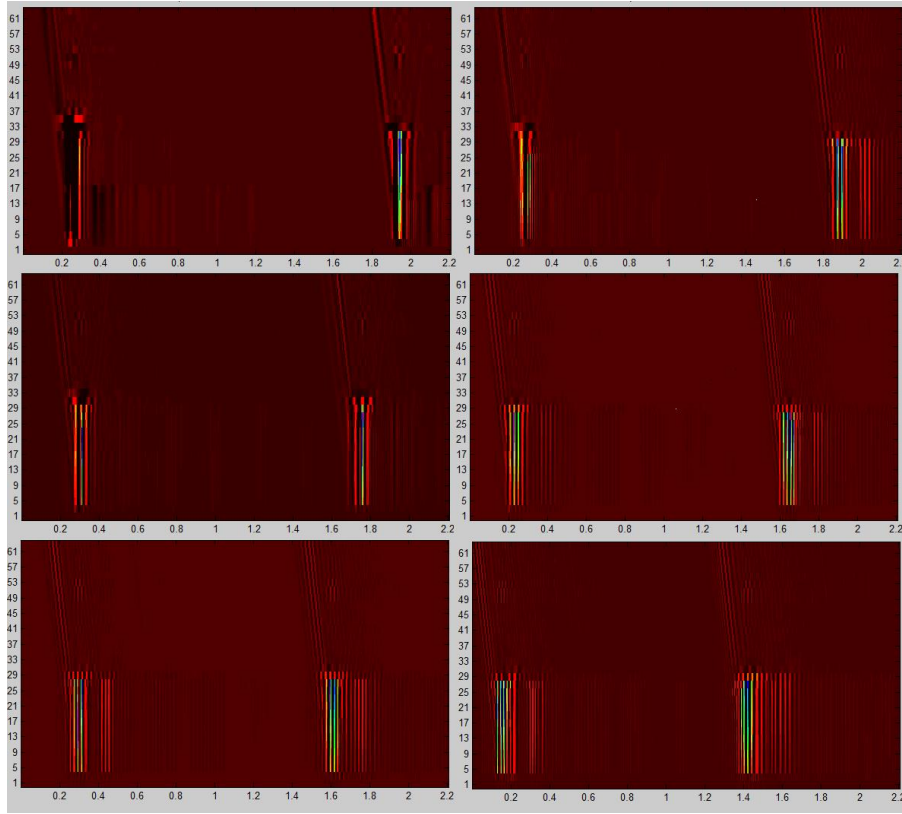


Figura 3.7: Patrón 11 del cantor 128 de la fecha 09/08/91 de la mitad.

Para el cantor 15 se obtuvieron en total 25 patrones y para el cantor 128 se obtuvieron 23 organizados de la manera que se muestra en la tabla 3.2, cabe decir que algunos de los trozos se eliminaron debido a la imposibilidad de extraer información relevante por efectos del ruido de la señal. En la tabla 3.3 se describe el número total de patrones por fecha y el número de identificación de los trozos involucrados, la fecha contiene además un identificador que nos dice a qué parte de la cinta pertenece (inicio, mitad o final).

Cantor	Fecha	Parte de la cinta	Número de patrones encontrados
15	13/08/1991	Inicio	6
15	13/08/1991	Mitad	7
15	24/09/1993	Final	5
15	24/09/1993	Inicio	4
15	24/09/1993	Mitad	3
128	09/08/1991	Mitad	15
128	13/08/1991	Final	8

Tabla 3.2: Totales de patrones encontrados por cantor, fecha y parte de la cinta

Luego de hacer la clasificación se encontró que había trozos que no se repiten, por lo tanto no deben ser declarados como un patrón realmente, pero se dejan para posterior observación

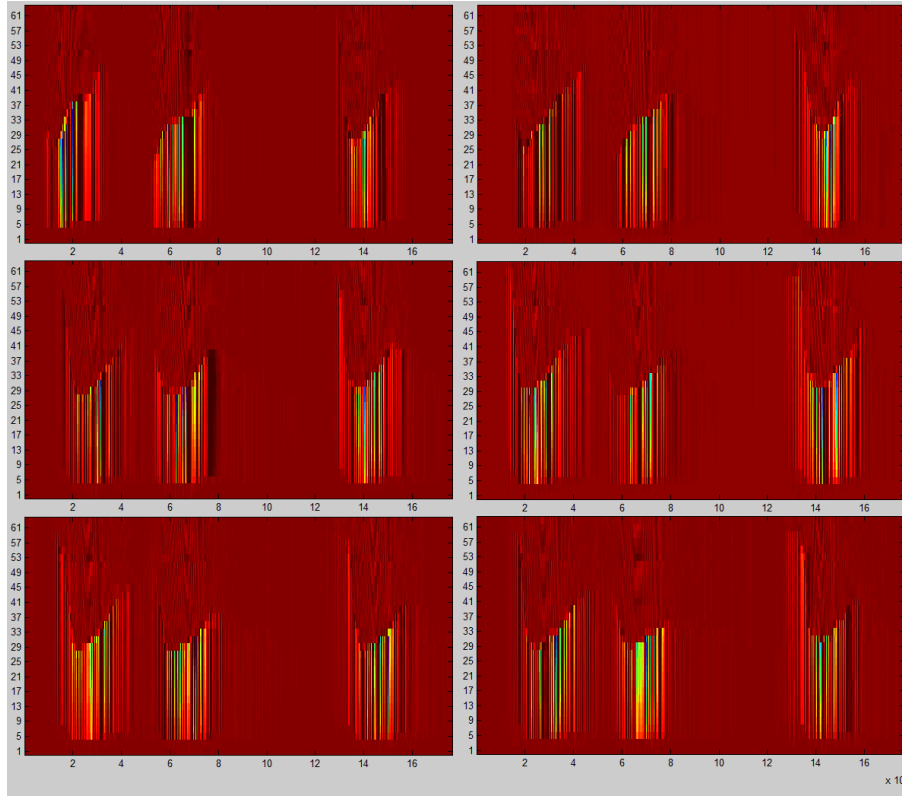


Figura 3.8: Patron1 del cantor 15 de la fecha 13/08/91 del inicio.

de patrones con otros cantos. Al observar detalladamente el tabla 3.3 se ve como los trozos se repiten algunas veces de manera seguida (por ejemplo patrón 3 del 13/08/91 del cantor 15 Figura 3.9), otros con alguna secuencia ordenada (por ejemplo patrones 4 y 5 del 13/08/91 del cantor 15 se repiten intercaladamente Figuras 3.10 y 3.11) y otros no (por ejemplo patrón 5 del 09/08/91 del cantor 128 Figura 3.12).

Cantor	Fecha	Trozos	Número de patrón
15	13/08/91 inicio	1,2,3,4,5,6	1
		7	2
		8,9,10,11,12,13,14	3
		15,17	4
		16,18	5
		19,20,21,22,23,24	6
	13/08/91 mitad	1,2	7
		3	8
		4,5	9
		6,7,8	10
		9	11
		10,11,12,13,14	12
	24/09/93 final	15,17,19	13
		2,5,6,7	14
		12,13,14	15
		15,16	16
		17,18	17
	24/09/93 inicio	21,22	18
		2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	19
		12,13,14	20
		15	21
	24/09/93 mitad	19,20,21	22
		2,3,4,5	23
		6,7,8	24
		11,12	25
128	09/08/91 mitad	2a,2d,2e,2h	1
		2b,2f	2
		2c,2g	3
		3a,3b,3c	4
		3d	5
		4a,4b,4c	6
		5a,5b,5c	7
		7a,7b	8
		8a,8b	9
		9a,9b,9c,9d,9e,9f	10
		11a,11b,11c,11d,11e,11f	11
		12,13,14,15,16	12
		18,20,23	13
		19,21,22,24	14
		25a,25c	15
	13/08/91 final	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	16
		12,13	17
		14	18
		15	19
		16	20
		17	21
		18	22
		19,20,21,22	23

Tabla 3.3: Patrones encontrados entre cantos del mismo cantor en la misma época

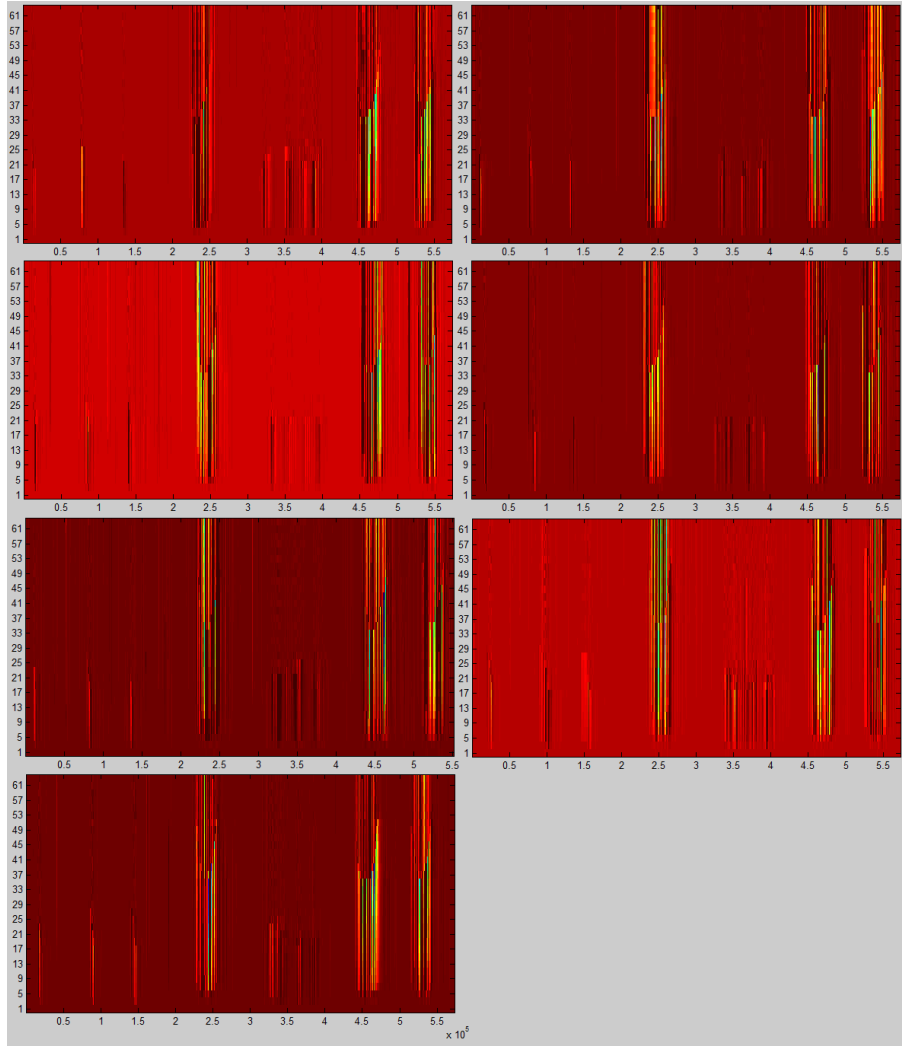


Figura 3.9: Patron 3 del cantor 15 de la fecha 13-08-91 del inicio.

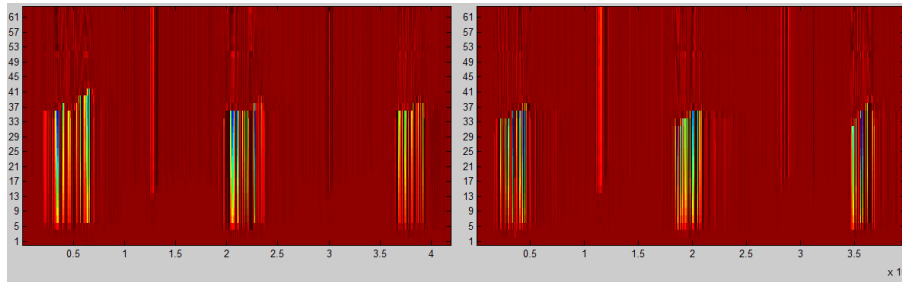


Figura 3.10: Patron 4 del cantor 15 de la fecha 13-08-91 del inicio.

3.4.3. Búsqueda de patrones entre cantos de diferentes fechas

Ya obtenidos los patrones para cada canto se sigue el mismo procedimiento anterior, o sea se agruparon los patrones por cantor y fecha, luego se hizo una comparación de cada uno

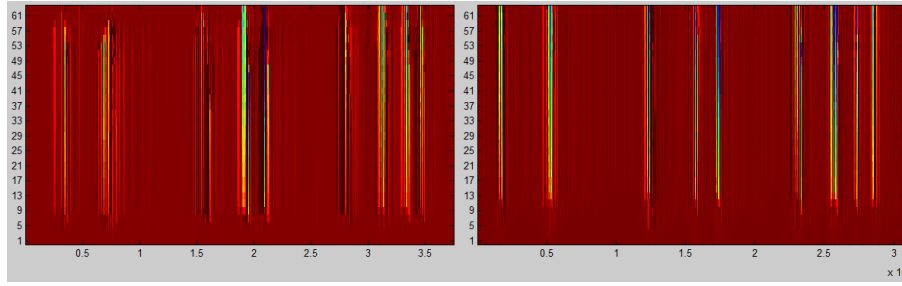


Figura 3.11: Patron 5 del cantor 15 de la fecha 13-08-91 del inicio.

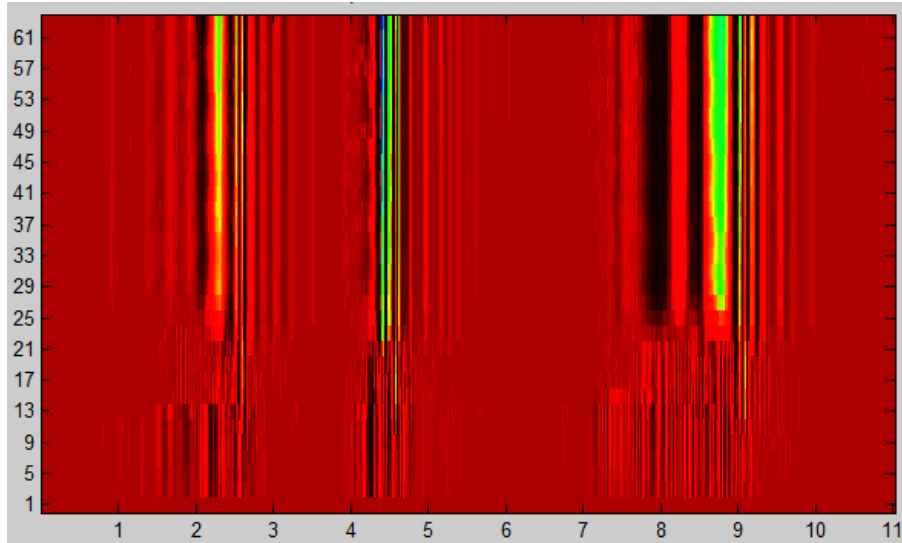


Figura 3.12: Patron 5 del cantor 128 de la fecha 09/08/91 del inicio.

de los patrones de un grupo con los patrones de los demás grupos que fueran del mismo cantor, obteniendo la tabla 3.4, en él se muestra si un patrón observado es semejante a otro patrón de la misma ballena en tiempo distinto (reflejado en la fecha y en la parte de la señal como inicio, mitad o final). Las 'X'significan que no hay semejanza con otro patrón. En ciertos casos se pudo encontrar que algunos patrones eran similares a otros dentro de la misma fecha solo en una parte como en el caso del patrón 8, 9 y 10 del cantor 15 del 13/08/91 mitad. También se dan los casos de un patrón inmerso en otro como se mostrará más adelante. Para el caso del cantor 128 no se encontraron semejanzas entre los patrones comparados, por ello en la tabla 3.4 aparecen solo 'X'para este cantor.

En algunos casos sucede que el patrón semejante está inmerso o que este pertenece a una parte del otro, como podemos observar en la Figura 3.15 el patrón mostrado en el numeral b, perteneciente al patrón 23 del cantor 15 del 24/09/93 mitad, se encuentra inmersa en el patrón del numeral a, perteneciente al patrón 19 del cantor 15 del 24/09/93 inicial, siendo por lo tanto una señal mas larga que la otra, mientras la Figura 3.14 muestra como el numeral a de la figura que corresponde al patrón 4 del 13/08/91 inicial está inmerso en la parte final del patrón 9 del 13/08/91 mitad, enmarcada en un recuadro azul, donde observamos que el número de datos (y por lo tanto el tiempo) en el numeral a y en el

Comparación entre patrones del mismo cantor y distinta fecha			
Cantor Observado-Fecha	Patron Observado	Canto Comparado-Fecha	Patron Semejante
15-13-08-91 ini	1	x	x
	2	x	x
	3	x	x
	4	15-13-08-91 mitad	9(inmerso)
	5	x	x
	6	x	x
15-13-08-91 mitad	7	x	x
	8	15-13-08-91 mitad	10(parte)
		15-13-08-91 mitad	9(parte)
	9	15-13-08-91 mitad	10(parte)
	10	x	x
	11	x	x
	12	15-13-08-91 mitad	13(parte)
15-24-09-93 final	13	x	x
	14	x	x
	15	15-24-09-93 inicio	19
		15-24-09-93 mitad	23
	16	x	x
15-24-09-93 inicio	17	x	x
	18	x	x
	19	15-24-09-93 mitad	23
	20	15-24-09-93 mitad	24
		15-24-09-93 inicio	21
15-24-09-93 mitad	21	15-24-09-93 mitad	24
	22	x	x
	23	x	x
128-09-08-91 mitad	24	x	x
	25	x	x
128-09-08-91 final	x	x	x

Tabla 3.4: Cantos

recuadro azul del numeral b (ampliada en el numeral c) son similares.

En la búsqueda de patrones se puede llegar a ser muy exhaustivo, una forma de serlo es escogiendo trozos cada vez más pequeños y compararlos entre sí pero esto implica dos cosas, la primera un coste de tiempo enorme debido a la gran cantidad de gráficas e información obtenida y la segunda es la probabilidad de encontrar falsos patrones ya que las ballenas emiten sonidos de ‘larga’ duración en comparación con el número de datos que se toman al momento de la grabación. Esto nos lo ilustra la figura 3.16, la cual muestra un trozo de un canto de ballena dividido cada vez más obteniendo finalmente trozos muy pequeños y parecidos entre sí.

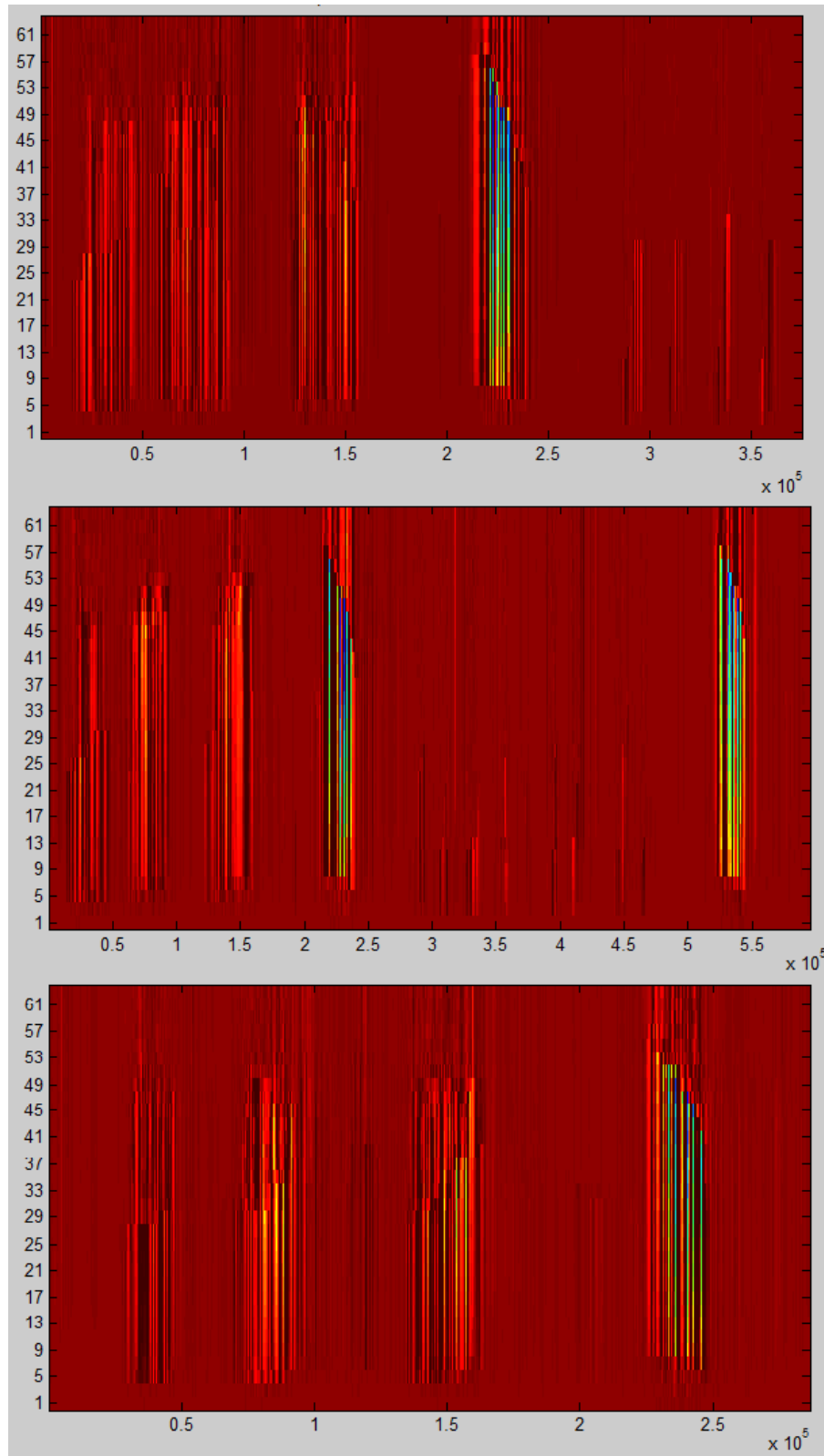


Figura 3.13: Cantor 15: Patrones semejantes, patrón 20(superior), 21(medio) y 24(inferior)

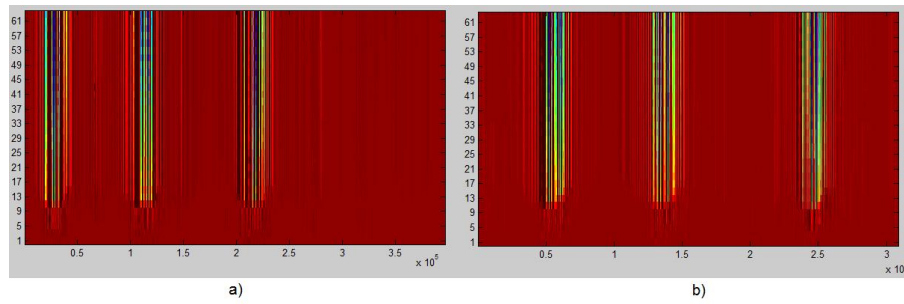


Figura 3.14: Cantor 15 a) El patrón 19 de la fecha 24/09/93 inicial y b) El patrón 23 de la fecha 24/09/93 mitad

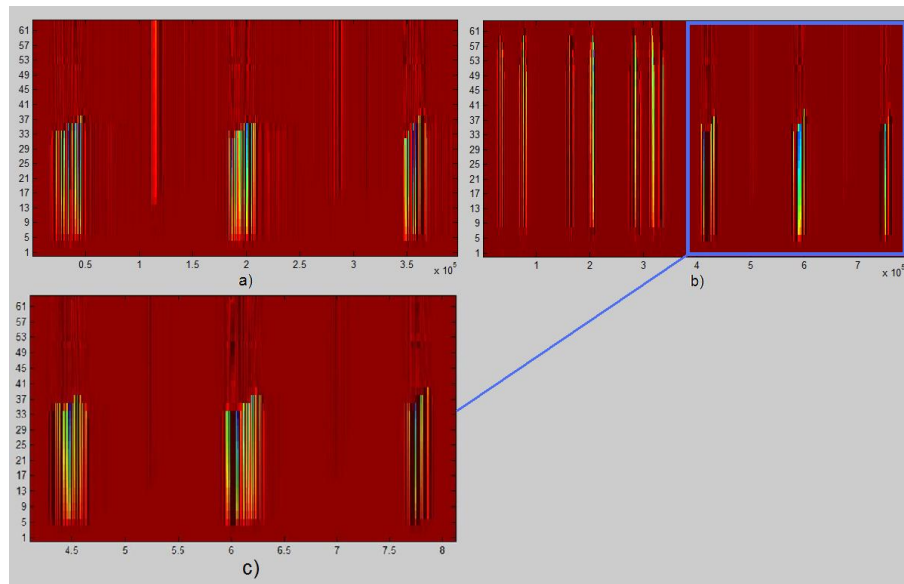


Figura 3.15: Cantor 15: Un patrón dentro de otro a) patrón 4 del 13/08/91 inicial b) patrón 9 del 13/08/91 mitad c) muestra ampliada del recuadro azul

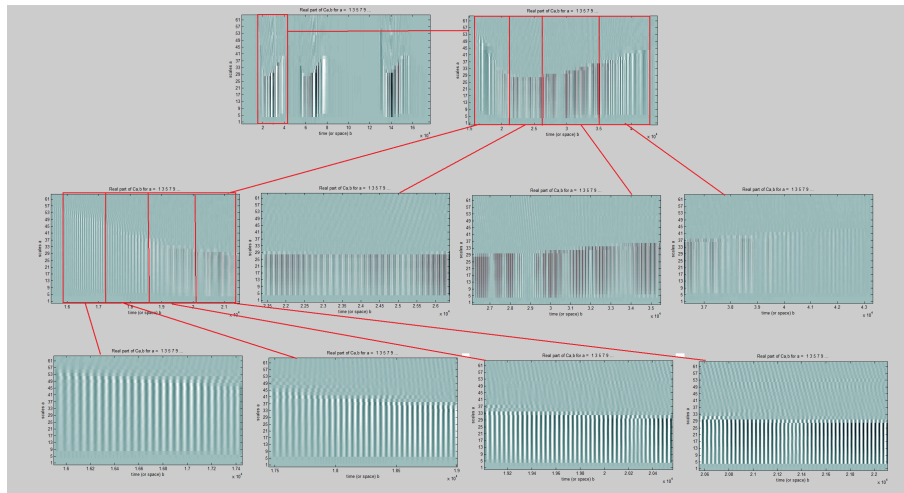


Figura 3.16: Partición de una señal en trozos cada vez más pequeños para una búsqueda exhaustiva de patrones.

CONCLUSIONES

1. En este trabajo se desarrolló la TW Shannon, lo cual llevó a que se encontrara la forma de calcular los coeficientes de los filtros asociados a ella, y con esto la definición de la función de la TW Shannon. Se encontró que la cantidad de coeficientes de estos filtros es infinita, aunque para el desarrollo práctico solo se usa una cantidad limitada de ellos. El cálculo de los coeficientes wavelet se hace pasando una señal a través de ellos y es en esta forma que la TW basa su rapidez.
2. Matlab emplea algoritmos rápidos para realizar tanto la TF como la TW, lo hace de manera transparente al usuario mostrando solamente los resultados del análisis en forma gráfica o numérica sin indicar ningún tipo de proceso, para nuestro caso se hizo necesario el desarrollo de nuevos scripts adecuados para calcular las frecuencias características de los cantos de las ballenas y realizar todos los demás scripts para el análisis y estudio de las señales con el propósito de encontrar patrones de repetición. Esto indica que aunque Matlab posee muchas herramientas para el análisis de señales es importante el conocimiento del desarrollo matemático para llegar a la correcta elaboración de nuevos scripts que nos ayuden en el proceso de llegar a una correcta interpretación de resultados.
3. Matlab posee una gran variedad de wavelets tanto continuas como discretas para procesar señales, aún así carece de la TW Shannon real, gracias al conocimiento de las funciones de las dos transformadas TW Shannon real y la TW Shannon compleja se pudo encontrar un parecido entre ellas y buscar un procedimiento matemático que nos ayudó a obtener una de la otra, encontramos entonces que los coeficientes de la TW Shannon real se pueden obtener a partir de la parte real de la TW Shannon compleja si consideramos los parámetros F_c (frecuencia central) y F_b (ancho de banda) como 0,75 y 0,5 respectivamente y multiplicando el resultado por $\frac{-2}{\sqrt{2}}$ y desplazada $-1/2$.
4. Existe cantidad de posibles transformadas wavelets para el desarrollo del análisis de señales, lo cual conlleva a preguntarse cuál de ellas usar para el tipo de señal que estudiamos, en este trabajo se mostró que la transformada wavelet Shannon real permite el análisis de señales de audio no estacionarias de manera que nos presenta una buena estimación de los instantes de transición en una señal de audio proveniente

del canto de las ballenas jorobadas, aunque se demuestra la posibilidad de trabajar con la wavelet Shannon real queda faltante su comparación con otras wavelets, lo cual se puede dejar como un futuro trabajo.

5. Al analizar las señales de audio generadas por los sonidos repetitivos, que varían en amplitud y frecuencia, conocidos en este trabajo de investigación como el canto de las ballenas Yubartas, mediante la transformada wavelet Shannon Real se puede afirmar que ellas dentro de su canto repiten varias veces algunos trozos en diferentes instantes de tiempo. Estas repeticiones se hacen en su mayoría de manera ordenada lo que quiere decir que siguen patrones de repetición haciendo presumir que no lo hacen de manera aleatoria ni inconsciente. Para una exhaustiva búsqueda de similitudes entre las señales obtenidas se hace necesario subdividir tantas veces como sea necesario la señal, lo cual es un proceso largo y tedioso, por lo tanto se hizo necesario solo hacer comparaciones entre trozos de tamaños escogidos de manera visual y auditiva.
6. El exceso de ruido dificulta la comparación entre señales debido a la distorsión provocada, más aún cuando las componentes espectrales del ruido contienen frecuencias en el mismo rango de la señal deseada. La forma como se obtuvieron las señales estudiadas involucran gran cantidad de ruidos provenientes de otros animales, el motor de la lancha, el burbujeo del agua, el golpear de las olas, etcétera, los cuales provocan que no se tengan señales listas para ser analizados, haciendo necesario realizar un filtrado de estos ruidos teniendo en cuenta las frecuencias en el respectivo rango de análisis, pero surge también el inconveniente que entre mayor sean sus niveles de ruido es más difícil después del filtrado obtener una buena señal para ser analizada satisfactoriamente.

REFERENCIAS

- [1] Doris Hinestroza: Series y transformada de Fourier. Notas de clase. Universidad del Valle, 2008.
- [2] Doris Hinestroza: Transformada discreta de Fourier. Notas de clase. Universidad del Valle, 2011.
- [3] Eugenio Hernández: Ondículas y tecnología. Bol. Soc. Esp. Mat., 2000.
- [4] Eugenio Hernández: Matemáticas de las señales. Bol. Soc. Esp. Mat., 2006.
- [5] Javier Duoandikoetxea: Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier. UNAM Managua, 2003.
- [6] Mark A. Pinsky: Introducción al análisis de Fourier y las ondoletas. ISBN 970-686-192-0. Thompson, 2002.
- [7] Isel del Carmen Rodríguez Hernández: Aplicación de técnicas de inteligencia artificial al diagnóstico, supervisión, control y protección de motores eléctricos. Monografía, Universidad de Camaguey, 2006.
- [8] Nohelia Rillo: Introducción a la teoría de wavelets. Departamento de matemática aplicada y análisis, Universidad de Barcelona, curso 2005/06.
- [9] Eduardo P. Serrano: Introducción a la transformada wavelet y sus aplicaciones al procesamiento de emisión acústica. Escuela de Ciencia y tecnología, Universidad Nacional de General San Martín.
- [10] Doris Hinestroza: Elementos importantes en estudio de señales. Notas de clase. Universidad del Valle, 2006.
- [11] Doris Hinestroza: Introducción a los wavelets. Notas de clase Universidad. Universidad del Valle, 2006.
- [12] Juliana Villa Bedoya, Juan Manuel María: La transformada wavelet y su aplicación en ingeniería biomédica.
- [13] Román Pérez Enríquez: Wavelet (Ondoletas). Centro de Geociencias, UNAM.

- [14] Léonard Janer García: Transformada wavelet aplicada a la extracción de información en señales de voz. Universitat Politècnica de Catalunya, Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions, 1998.
- [15] Pablo Faundez, Álvaro Fuentes: Procesamiento digital de señales acústicas utilizando wavelets. Instituto de Matemáticas, UACH.
- [16] Erica cruz: Aplicación de la transformada de Fourier y transformada wavelets a las señales musicales. Universidad del Valle, 2008.
- [17] Stéphane Mallat: A wavelet tour of signal processing. ISBN 0-12-466606-X, Academy press, 1998.
- [18] Rafael C. Gonzáles, Richard E. Woods: Tratamiento digital de imágenes. ISBN 0-201-62576-8, Addison-Wesley/Díaz de Santos, 1996.
- [19] Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson: Linear Functional Analysis. ISBN 1-85233-257-3, Springer, 2000.
- [20] Diana C Giraldo: Wavelets aplicados a la tomografía computarizada. Universidad del Valle, 2008.
- [21] Juan Carlos: Aplicación de la transformada de fourier con ventana en ECG. Universidad del Valle, 2008.
- [22] Wikipedia: Teorema del muestreo de Nyquist-Shannon, 2012.
URL http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_muestreo_de_Nyquist-Shannon.
- [23] Carlo Cattani: Shannon wavelet theory. Department of pharmaceutical sciences (Di-Farma), University of Salerno, 2008.
- [24] Michael Unser: Sampling 50 Year After Shannon; Proceedings of the IEEE.vol 88, 2000.
- [25] T.G. Leighton, S.D. Richards and P. R. White: Marine mammal signals in bubbly water. Institute of Acoustics Symposium on Bio-sonar and Bioacoustics Systems , Institute of Acoustics, 2004.
URL [http://eprints.soton.ac.uk/28259/1/Leighton et al IOA Bio sonar 2.pdf](http://eprints.soton.ac.uk/28259/1/Leighton_et_al_IOA_Bio_sonar_2.pdf)
- [26] Ryuji Suzuki, John R Buck, Peter L Tyack: Information entropy of humpback whale songs. J Acoust. Soc. Am. 119, 1849 (2006).
- [27] Lilian Flórez, Juan Capella A.: Las ballenas. Biblioteca Luis Ángel Arango,
URL <http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/faunayflora/pacific1/cap3.htm>.
- [28] Hubert Bray, Kent McCormick, Jr. R.O. Wells, Xiao-dong Zhou: Wavelet Variations on the Shannon sampling theorem, 1993.
- [29] Peter V Oñeil: Matemáticas avanzadas para ingeniería, sexta edición 2008.