



**ANALISIS DE SECUENCIAS DE SITUACIONES DIFUNDIDAS EN EL PORTAL
INTERGEO DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA
DE LA GEOMETRIA.**

JULIAN ANDRES QUEBRABA

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2012**



**ANALISIS DE SECUENCIAS DE SITUACIONES DIFUNDIDAS EN EL PORTAL
INTERGEO DESDE LA PERSPECTIVA DE LOS RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA
DE LA GEOMETRIA**

JULIAN ANDRES QUEBRABA

**Trabajo de grado presentado para optar por el título de Licenciado en
Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.**

Tutora: Maritza Pedreros Puente

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2012**

NOTA DE ACEPTACIÓN

Maritza Pedreros Puente
Tutora Trabajo de Grado

Diego Garzón Castro
Jurado

Marisol Santacruz Rodríguez
Jurado

Santiago de Cali, Febrero de 2012

DEDICATORIA

A Dios por darme la fuerza necesaria para seguir adelante y no desfallecer nunca.

A mi familia por su cariño y comprensión y que ha sido una de las más grandes bendiciones de Dios para mi vida, pues, han batallado hombro a hombro conmigo en este maravilloso logro, y siempre se han caracterizado por su amor, unidad y fe; a quienes amo con el amor que solo el Señor puede dar.

A mi novia Mayerlin, por su comprensión y paciencia.

A todos ellos dedico este trabajo que es fruto del amor.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Diego Garzón quien fue la fuente de inspiración para empezar este proyecto y por sus valiosas orientaciones en el desarrollo de este trabajo.

A mis profesores quienes me han forjado como profesional en esta etapa universitaria, tanto dentro como fuera de clases

A la profesora Maritza Pedreros Puente pues sin su dirección no hubiera sido imposible llevar a cabo esta investigación.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	12
INTRODUCCIÓN.....	13
CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA.....	15
1.1 Objetivo General.....	17
1.2 Objetivo Específico	17
CAPITULO 2. MARCO TEORICO	25
2.1 Recurso Pedagógico.....	25
2.2 Dimensión Didáctica.	29
2.2.1 Las Situaciones de Acción.	32
2.2.2 Situaciones de Formulación.	33
2.2.3 Situaciones de Validación.	33
2.2.5 La estructura del medio didáctico.....	36
2.3 Dimensión Instrumental.	39
2.3.1 Orquestación Instrumental.	39
2.4. Dimensión Matemática.....	43
2.4.1. Isometría.....	43
2.4.2. Simetría.	44
2.4.3. Rotación.....	45

2.4.4. Traslación	45
2.4.5. Reflexión en Deslizamiento.....	46
CAPITULO 3. METODOLOGIA	48
3.1 Fase uno: Reconocimiento y descripción de la estructura y/o organización del portal Intergeo.	49
3.1.1 Selección de las Situaciones	56
3.2. fase dos: realizar la explicación de los componentes y al final se realiza la rejilla como resumen de lo explicado.	65
3.2.1 Sistema de Aprovechamiento Didáctico.....	65
3. 2.3 Software Didáctico	72
3.3. Fase tres: Análisis de las Situaciones Seleccionadas.	75
3.3.1. Situación de Presentación.	76
3.3.2 Situaciones de Simetría de Traslación.	79
3.3.3 Situaciones de Simetría Axial.....	87
3.3.4 Situaciones de Simetría Rotacional.	101
3.3.5 Situaciones de Simetría con Deslizamiento.	113
3.3.6 situaciones de profundización.....	118
4. CONCLUSIONES	129
5. BIBLIOGRAFÍA.....	132

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Situación de Acción. Tomado de Brousseau, G. (2007).....	32
Figura 2. Situación de Formulación. Tomado de Brousseau, G. (2007).	33
Figura 3. Situación de Validación. Tomado de Brousseau, G. (2007).	34
Figura 4. Triángulo de la situación didáctica, Tomado de Brousseau, G. (2007).....	35
Figura 4. 1 .Triángulo de la Situación Didáctica más un Medio. Tomado de Brousseau, G. (2007).....	36
Figura 5. Medio.....	37
Figura 6. Simetría Bilateral. Tomado de H.S.M. Coxeter.....	44
Figura 7. Reflexión en un punto Tomado de H.S.M. Coxeter	44
Figura 8. Simetría Svástica. Tomado de H.S.M. Coxeter	44
Figura 9. Rotación. Tomado de H.S.M. Coxeter.....	45
Figura 10. Traslación. Tomado de H.S.M. Coxeter	46
Figura 11. Reflexión en Deslizamiento .Tomado de H.S.M. Coxeter.....	46
Figura 12. Imagen de la página de inicio de Intergeo. Tomado de (http://i2geo.net).	49
Figura 13. Búsqueda textual “transformaciones de isometrías”. Tomado de http://i2geo.net	50
Figura 14. Resultado de la búsqueda textual “transformaciones de isometrías”. Tomado de http://i2geo.net	51
Figura 15. Recurso Geogebra sobre “transformaciones de isometrías”. Tomado de http://i2geo.net	52
Figura 16. Catalogación de un Recurso según el plan de lección. Tomado de http://i2geo.net	53
Figura 17. Principales ítems de evaluación de recursos en Intergeo. Tomado de http://i2geo.net	54
Figura 18. Recursos de Geogebra integrados en páginas web. Tomado de http://i2geo.net	55
Figura 19. Situaciones de <i>animación/simulación</i> . Tomado de http://i2geo.net	57
Figura 20. Situaciones de animación/simulación. Tomado de http://i2geo.net	57

Figura 21. Situación de ejercicio. Tomado de http://i2geo.net	58
Figura 22 .Pantógrafo. Tomado de H.S.M. Coxeter.	59
Figura 23 Pantógrafo1. Tomado de http://i2geo.net	59
Figura 24.pantógrafo 2. Tomado de http://i2geo.net	60
Figura 25.Pantógrafo 3. Tomado de http://i2geo.net	60
Figura 26. Pantógrafo 4. Tomado de http://i2geo.net	61
Figura 27. Pantógrafo 6. Tomado de http://i2geo.net	62
Figura 28. Pantógrafo 6 .Tomado de http://i2geo.net	62
Figura 29.situación de plan de lección/currículo .Tomado de http://i2geo.net	63
Figura 30. Situaciones de las diferentes transformaciones de isometría.	64
Figura 31. Presentacion de los movimientos.....	76
Figura 32. Situación de traslación.....	77
Figura 33. Situaciones de simetría.....	77
Figura 34. Situación de rotación.	78
Figura 35. Situación de la simetría de deslizamiento.	78
Figuran 36. Situaciones de la sección 2.1.1.....	80
Figura 37. Situaciones de la sección 2.1.1.....	81
Figura 38. La situación 2.1.2.....	81
Figura 39. Diferentes fotografías de la situación 2.1.2.....	82
Figura 40. Situación 2.1.3	83
Figura 41. Situación 2.1.4	84
Figura 42. Situación 2.15.	85
Figura 43. Situación 2.15. Traslación con mosaicos.	86
Figura 44. Situación 2.2.	87
Figura 45. Situación 2.2.1.	88
Figura 46. Situación 2.2.1. Simetría de la máscara.....	89
Figura 47.Situacion 2.2.2	90
Figura 48. Situación 2.2.2. Simetría horizontal y vertical de letras.	91
Figura 49. Situación 2.2.3.	92
Figura 50. Situación 2.2.4.	93
Figura 51. Situacion 2.2.5.	94

Figura 52. Situación 2.2.6. Simetría de la mariposa 1.	95
Figura 53. . Situación 2.2.6.Simetría de la mariposa 2.	96
Figura 54. Situación 2.2.7.	97
Figura 55.Situación 2.2.8.	98
Figura 56.Situación 2.2.9.	99
Figura 57. Situación 2.2.10.	100
Figura 58. Situación 2.3.1	101
Figura 59. Simetría rotacional	102
Figura 60. Situación 2.3.2	103
Figura 61. Situación 2.3.3.	104
Figura 62. Situación 2.3.4.	105
Figura 63. Simetría central de una figura	106
Figura 64. Simetría central en figuras geométricas.	107
Figura 65 . Situación 2.3.5.	108
Figura 66. Simetría rotacional de un logotipo.	109
Figura 67. Simetría rotacional en mosaicos 1.	110
Figura 68. Simetría rotacional en mosaicos 2.	111
Figura 69. Simetría rotacional en mosaicos 3.	112
Figura 70. Situación 2.4.1.	114
Figura 71. Situación 2.4.2.	115
Figura 72. Situación 2.4.3.	116
Figura 73. Situación 2.4.4.	117
Figura 74. Situación 2.5.1.	119
Figura 75.situación 2.5.1.2.	120
Figura 76. La situación 2.5.1.3.	121
Figura 77. Situación 2.5.1.4.	122
Figura 78. La situación 2.5.1.5.	123
Figura 79. La situación 2.5.1.6.	124
Figura 80. La situación 2.5.1.7.	125
Figura 81. Situación 2.5.3.	126
Figura 82. Situación 2.5.4.	127

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Rejilla de análisis de las situaciones	74
---	----

RESUMEN

Este trabajo quiso analizar algunas situaciones relacionadas con las transformaciones de isometría difundidas en el portal Intergeo, el cual presenta recursos pedagógicos de geometría. Metodológicamente el trabajo se aborda desde el análisis didáctico y la noción de recurso pedagógico, al utilizar como software el Geogebra.

A partir del reconocimiento, descripción de la estructura y/o organización del portal Intergeo. Se realizó la selección y justificación de las situaciones que se analizaron, tomando en consideración el enfoque instrumental y didáctico el cual permitió estudiar y comprender las variables didácticas de las situaciones propuestas referente a las transformaciones de isometría.

Este trabajo permitió identificar el tipo de situaciones propuestas, las variables didácticas, consideradas, los instrumentos puestos en juego y soportes necesarios para adaptar o complementar los documentos dirigidos a los alumnos y profesores.

Palabras claves: Teoría de situaciones didácticas, recursos pedagógicos, transformaciones de isometría, variables didácticas.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, se inscribió en la línea de investigación de Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Educación Matemática (NTICEM) - del programa de la Licenciatura en Educación Básica, con énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle.

Para nadie es un secreto que las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) tienen un gran impacto hoy en día en la sociedad, por lo tanto la integración de éstas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es de gran importancia y los profesores deben mantenerse en continua actualización de los recursos pedagógicos disponibles, adaptándolos y construyendo nuevas propuestas de trabajo de acuerdo a sus necesidades.

El análisis de los recursos pedagógicos disponibles en el portal de Intergeo se realizó teniendo como referencia la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007) y la concepción de recursos pedagógicos (Guin y Trouche, 2007); el interés principal fue identificar los niveles de organización de los recursos pedagógicos disponibles en este portal, específicamente el análisis de algunas situaciones didácticas propuesta en Geogebra para abordar como tema central la transformación de isometrías.

Es importante aclarar que el portal Intergeo tiene la intervención de distintos organismos educativos de la Unión Europea: España , Alemania, Francia, Holanda, Luxemburgo y la República Checa, colaboran también los principales diseñadores de software y de recursos educativos de Geometría Dinámica, entre los que se destacan Geogebra, Cabri, Cinderella, Wiris, Tracenpoche, Geoplan-Geospace, Geonext, Openmath y Activemath, entre otros. El proyecto Intergeo tiene como propósito promover la utilización del variado material existente sobre Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) en las clases de matemáticas, está organizado por medio de un portal web (<http://i2geo.net>) que permite a los usuarios encontrar o contribuir con nuevos recursos pedagógicos, permitiendo su difusión y evaluación por parte de los profesores de

matemáticas. De ahí la importancia de analizar la forma como ha sido concebida la organización de los recursos pedagógicos en la plataforma.

A continuación se presenta una breve descripción de los cuatro capítulos que conforman el presente trabajo de investigación todo en virtud del objetivo general:

Identificar y caracterizar los recursos pedagógicos disponibles en Intergeo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el capítulo 1 se refiere específicamente al problema de investigación en este capítulo se presenta la descripción y contextualización del problema, su justificación y los objetivos de investigación.

El capítulo 2 atiende al marco teórico concebido por tres dimensiones: la dimensión didáctica, dimensión instrumental, dimensión matemática. La dimensión didáctica en la que se desarrolla la TSD de todas las categorías conceptuales que ella presenta, en este trabajo se centra en las nociones del tipo de situaciones que se pueden presentar como las situaciones de acción, formulación y validación. La dimensión instrumental en la que se hace explícita la diferencia entre artefacto e instrumento y la importancia de la orquestación instrumental y la concepción de recursos pedagógicos. La dimensión matemática en la que se caracterizan las transformaciones de isometrías en el plano.

El capítulo 3 comprende la metodología de investigación utilizada que está compuesta de tres fases: la fase uno en la que se plantea el reconocimiento y descripción de la estructura y organización del portal; la fase dos realiza la explicación de los componentes y la fase tres se realiza el análisis de las situaciones que se escogieron para este trabajo.

Y finalmente en el capítulo 4 presenta las conclusiones del trabajo. Estas conclusiones atienden principalmente al problema e hipótesis de la investigación, a partir de la reflexión teórica como de los resultados obtenidos conforme al referente metodológico utilizado en este trabajo.

CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA

En nuestro contexto circulan diferentes materiales dirigidos a profesores de la educación básica en los cuales se plantea la integración de TIC. Algunos de ellos se apoyan en el desarrollo de una dimensión didáctica que incorpora la reflexión respecto al conocimiento matemático. En este caso interesan los materiales que incluyan los objetos geométricos relacionados con la noción de la transformación de isometrías. Un ejemplo de ello es el trabajo realizado (Garzón, 2007) el cual caracteriza las concepciones que subyacen a la categoría de recursos pedagógicos vivientes a partir de los desarrollos teóricos de la didáctica de las matemáticas en el marco de la red de relaciones entre la triada recursos pedagógicos vivientes, conocimiento pedagógico y didáctico y ambiente de aprendizaje computacional.

La conceptualización de la noción de recursos pedagógicos fue esencial en este trabajo, por ser este un producto dirigido a profesores, en el momento de ser utilizado por ellos, no se puede reducir a una simple descripción de una situación de aprendizaje, ella debe integrar la descripción del ambiente tecnológico en el cual puede ser puesto en práctica, además de las proposiciones, en materia de organización del tiempo y el espacio, para facilitar la puesta en práctica. Pero también se debe tener en cuenta que un recurso pedagógico no puede ser concebido como una solución dada a los profesores; ella debe ser adaptada por cada profesor para su propio uso y esta adaptación es la fuente de un enriquecimiento potencial para otros usuarios; la actualización de esta potencialidad supone que los profesores puedan concebir y discutir estos recursos en el marco de reales comunidades de práctica.

Este trabajo además se relaciona con el marco del proyecto: *“caracterización de los vínculos entre los recursos pedagógicos y el conocimiento en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica”* y el cual tiene la participación de los profesores

Diego Garzón, Myriam Vega Restrepo, Gloria Castrillón, Jorge Arce Chaves y Octavio Pavón.

Debido a que es aún incipiente la noción de recurso pedagógico viviente entre los profesores en nuestro contexto y esta necesita una aproximación multidimensional según Guin y Trouche (2007) el interés fue analizar cómo estos desarrollos investigativos se plasman en la creación de un portal como Intergeo.

La reflexión entorno a la concepción de recurso pedagógico en Intergeo se realizó al considerar una dimensión didáctica en la que el conocimiento matemático es una construcción social según las situaciones didácticas que son propuestas; una dimensión instrumental en la cual se analizaron las condiciones que permiten desarrollar y construir un aprendizaje es decir identificar los elementos que lo condicionan, para ello se trabajó con la noción de ambientes de aprendizaje informáticos Dore y Basque (1998 c.p. Guin y Trouche 2007). Finalmente se dio cuenta de las orquestaciones instrumentales propuestas a partir del plan de acción, la manera en que se organizan las tareas, los tiempos, los objetivos y a quienes va dirigidas las situaciones didácticas propuestas.

Un ejemplo claro de esto se pudo evidenciar en las investigaciones internacionales del equipo de recursos en matemáticas instituto de Investigaciones sobre la Enseñanza de las Matemáticas (INRP) el cual basa sus investigaciones a partir de una serie de preguntas tales como: “¿cómo desarrollan los alumnos instrumentos de trabajo matemático, a partir de las herramientas disponibles?, ¿cómo hacer viables las TIC en la enseñanza?, ¿Qué instrumentos se construirán en las clases?, ¿Qué formación para los profesores?, y finalmente, ¿Qué recursos pedagógicos concebir y qué procesos de concepción? “ (Trouche, 2007). Estas preguntas se plantearon con el fin de confrontar los métodos y los resultados, despejar las dudas y problemáticas comunes, de la pregunta de integración de las TIC en la enseñanza escolar de las matemáticas a través de grupos de investigación.

Pues mediante estas interacciones se ha logrado en Europa llegar a conclusiones de cómo integrar software en una clase, algunos de estos trabajos son realizados por equipos como: Aplusix, emule, crome, e CoLab, SFoDEM, SESAMESmath los cuales

están asociados a la INRP y que se encuentran en constante comunicación por la página Educmath que les permite la interacción entre ellos por medio de foros.

Los avances teóricos de los grupos mencionados anteriormente se enmarcan en una reflexión del análisis de los recursos pedagógicos disponibles a través de la articulación de la dimensión didáctica e instrumental, en un marco teórico para la Ingeniería didáctica de los ambientes de aprendizaje informáticos y como producto de una aproximación multidimensional. Con el ánimo de contribuir a la consolidación de la noción de recurso pedagógico mencionado anteriormente la pregunta que guía este trabajo es:

¿Qué caracteriza la organización de los recursos pedagógicos disponibles en Intergeo y en particular el diseño de las situaciones didácticas, entorno a las transformaciones de isometría con Geogebra?

Para responder a este interrogante se plantearon los siguientes objetivos:

1.1 Objetivo General

Identificar y caracterizar los recursos pedagógicos disponibles en Intergeo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1.2 Objetivo Específico

- Caracterizar el tipo de situaciones didácticas difundidas en Intergeo referidas a las transformaciones de isometría con Geogebra.
- Dar cuenta de las limitaciones y alcances de los diseños propuestos en Intergeo para el estudio de las transformaciones de isometría con Geogebra.
- Describir las orquestaciones instrumentales propuestas en los diseños de una de las secuencias didácticas propuestas en Intergeo.

De esta manera, al considerar los enfoques teóricos que fundamentan este trabajo, se quiso corroborar que:

- Es posible utilizar los recursos pedagógicos disponibles en el portal Intergeo, en especial los relacionados a la transformación de isometrías de tal manera que los profesores adapten y construyan nuevas propuestas de trabajo.
- La teoría de situaciones didácticas y la orquestación instrumental son perspectivas teóricas propicias para el análisis de las situaciones propuestas en el portal Intergeo.

De acuerdo a la gran cantidad de materiales disponibles virtualmente y que se quiere instaurar a una nueva concepción de recurso pedagógico en la cual se tome en consideración la descripción del ambiente tecnológico, que pueda ser puesto en práctica y adaptado por cada profesor para su propio uso, así como analizar los contenidos curriculares en los que se pueden utilizar y demás información sobre su utilización en contextos educativos reales.

Con este análisis se quiso caracterizar situaciones didácticas que enfatizan en la transformación de isometrías y que integraron software de geometría dinámica, para ello se hizo uso del portal Intergeo, en el que se tiene acceso a una gran variedad de situaciones didácticas para la geometría utilizando diferentes tipos de software, sin embargo solo se consideraran las presentadas en Geogebra, ya que se facilita el ingreso gratuito a este potente recurso didáctico por ser un software libre escrito en Java y estar disponible en múltiples plataformas (Sistemas operativos), está diseñado para interactuar dinámicamente en un ámbito que reúnen la Geometría, el Álgebra y el Análisis o Cálculo. Además permite abordar problemas geométricos y de dibujo lineal en el plano, a través de la experimentación y la manipulación de diferentes objetos que intervienen en una construcción, por lo que se puede diseñar, construir, explorar y resolver problemas de manera interactiva.

Las situaciones analizadas en Geogebra fueron las diseñadas por José Antonio Mora de la comunidad valenciana, con el propósito de ayudar a la integración de las TIC en las clases a partir de un proceso de concepción colaborativo de recursos pedagógicos, pues su dinámica de comunidades de práctica se ha encaminado a realizar preguntas didácticas de fondo tales como: ¿cuáles son las variables didácticas sobre las cuales va a

jugar la flexibilidad de los escenarios? ¿Qué análisis de la actividad de los alumnos se pueden recuperar para transmitir a otros elementos de la historia de recursos?, se caracterizó de manera general los niveles de organización de los recursos pedagógicos en Intergeo a partir de los componentes materiales que lo conforman tales como: diferentes software, campos de conocimiento matemático, contenidos y los niveles educativos con los cuales se puede catalogar la organización curricular y fichas técnicas que han sido diseñadas para el portal.

El uso de un AGD involucra un proceso de génesis instrumental, esto es, el proceso en el cual el artefacto es convertido en un instrumento. El instrumento es, pues la construcción psicológica del artefacto junto con los esquemas mentales que el usuario desarrolla para resolver un tipo de tareas específicas. En estos sistemas, los conocimientos técnicos y el conocimiento de dominio específico, en nuestro caso de conocimiento matemático, se entrelazan. Otra categoría conceptual importante es la orquestación instrumental, esta ayuda a observar cómo el profesor puede afinar los instrumentos de los alumnos y componer conjuntos coherentes de instrumentos, que en algún momento pueden llegar a mejorar tanto la génesis instrumental individual como la colectiva.

El interés de éste trabajo fue analizar algunas situaciones didácticas, pues estas influyen en la construcción del conocimiento matemático que circula en el aula de clase, al desarrollar técnicas y teorías de acuerdo a la intención del profesor o en este caso de quienes diseñan las situaciones, es importante tener en cuenta los sistemas geométricos en que se hacen énfasis para el desarrollo del pensamiento espacial, así como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construye y se manipula las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

Igualmente se identificaron las *variables didácticas* que son consideradas en las situaciones didácticas propuestas en Geogebra para el estudio de la transformación de isometrías tales como el tipo de figuras (cóncavas y convexas), cuando el centro de rotación se encuentra dentro o fuera de la figura, cuando el eje de simetría hace parte de

la figura o se encuentra por fuera de ella, si la transformación es puntual o global, entre otras.

Para dar cuenta del sistema de aprovechamiento didáctico es importante considerar los diferentes tipos de arrastre que se pueden identificar en el desarrollo de una situación así como analizar las potencialidades y restricciones del software a utilizar (Geogebra), el tiempo de implementación, la gestión didáctica del profesor, las organizaciones posibles y los instrumentos necesarios.

Este trabajo es importante puesto que aporta a la documentación de recursos pedagógicos disponibles para los profesores, en los cuales integran AGD que se encuentra en el portal Intergeo tratando de anticipar el conocimiento que se puede generar con este tipo de situaciones en un ambiente escolar, las potencialidades, restricciones, tiempos y organización de espacios y del currículo, así como el tipo de situaciones que se proponen, las cuales se espera que no sean tareas rutinarias, sino centradas en la búsqueda de soluciones a problemas, donde se pongan a prueba conjeturas.

Antecedentes de trabajos de grado.

Puesto que no son muchas las experiencias sistematizadas que existen en nuestro ámbito escolar, para el desarrollo de éste trabajo se va a partir del contexto local, el de la Universidad del Valle a través de los trabajos de pregrado realizados en geometría entorno a las transformaciones geométricas, la revisión de estos antecedentes se hace necesaria para tener una aproximación a las posibilidades que brindan las tecnologías computacionales (computadores y calculadoras gráficas y algebraicas), como instrumentos mediadores en el aprendizaje de los alumnos, en la construcción de conocimientos y en la comprensión de lo que hacen, viene impulsando en el país una verdadera revolución educativa, una oportunidad para acceder a la información y al conocimiento universal y la transformación de las escuelas desde las particularidades de las diferentes regiones que integran el país.

Tales como “explorar la transformación de rotación en educación básica integrando Cabri” -Marisol Santacruz- y “la transformación de rotación en el espacio: una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D”-Zaira Vanesa Álvarez y Daniel Andrés Fernández - .dirigidas por el profesor Diego Garzón.

En un contexto nacional el trabajo “conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa Cabri geometry II” - Lilian Andrea Monroy blanco y Karol Lisette Rueda Gómez- dirigido por el profesor Martín Acosta quién es reconocido a nivel internacionalmente por su trabajo en geometría en ambientes informáticos.

Para la presentación de estos documentos se tendrán en cuenta primordialmente tres características: el tipo de situaciones diseñadas, los referentes teóricos y las conclusiones de dichos trabajos los cuales servirán para identificar algunas variables didácticas iniciales.

En el trabajo de Marisol Santacruz se plantea el diseño y la aplicación de una secuencia didáctica, en la cual se propone explorar la noción de transformación de rotación en quinto grado de primaria y que toma como referentes principales los desarrollos investigativos en educación matemática alrededor de la integración de tecnologías en el contexto escolar tales como la mediación de Cabri Géomètre y el enfoque de resolución de problemas, apoyada en los trabajos de Luis Moreno Armella.

Dicha secuencia está fundamentada desde varias dimensiones: la matemática, la didáctica, la cognitiva, la curricular y la tecnológica, con lo cual se pretende contextualizar y darle sentido a la situación para su aplicación en el aula. La secuencia propuesta se realizó a partir de cuatro sesiones de las cuales se pueden rescatar las siguientes conclusiones: el esfuerzo de su enfoque teórico por articular los desarrollos disciplinares con el proceso curricular en la escuela mediante una situación didáctica que propone una estructura de análisis que integra la resolución de problemas en el marco de uso de las nuevas tecnologías, utilizando el desarrollo de macro que facilitan procesos cognitivos relacionados con la identificación de variables en las transformaciones de isometría y fundamentada desde la didáctica de las matemáticas, otro punto fundamental de este trabajo es la relación entre la teoría y la metodología empleada , de acuerdo al enfoque

metodológico que facilitó la construcción de la propuesta de aula: y analizar qué ocurre en los espacios escolares cuando se integran tecnologías alrededor de una noción matemática particular además de mostrar un grado de desarrollo considerable haciendo de este la parte más innovadora del trabajo.

En esta propuesta el papel del profesor se da como gestor de la clase y no como subsidiario de la tecnología, indaga por un problema de índole curricular y por tanto apunta a la innovación en la educación y el mejoramiento de la calidad en la misma.

El segundo trabajo en ser abordado es ,el de Zaira Vanesa Álvarez y Daniel Andrés Fernández el cual tiene como propósito sistematizar una secuencia de actividades en la que se moviliza la transformación de rotación en el espacio mediada por los ambientes de geometría dinámica utilizando el software Cabri 3D.

Desde el enfoque la resolución de problemas además teniendo en cuenta los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y sustentándolos con algunos documentos que hablan de la renovación curricular de los autores nacionales como Alberto Campos y Carlos Eduardo Vasco, el enfoque metodológico de este trabajo toma como referencia a Brousseau y Margolinas para plantear su diseño didáctico el cual contemplan tres dimensiones de análisis que son, la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica. La implementación de la secuencia didáctica propuesta en esta actividad contó con 36 alumnos de noveno grado divididos en grupos de 4 alumnos. Se aplicaron tres actividades durante dos secciones de trabajo de dos horas clase.

El objetivo de esta secuencia didáctica es caracterizar los procesos de visualización de la transformación de rotación en el espacio cuando se integra ambientes de geometría dinámica como el Cabri 3D, con las actividades propuestas los alumnos lograron identificar si dos figuras en el espacio se relacionan por rotación, y prever el eje de rotación, el ángulo y sentido. Como conclusiones se puede resaltar que el uso de los ambientes de geometría dinámica y en este caso particular el Cabri 3D que permite a los alumnos comprender el problema de la transformación de rotación en el plano, para luego poder comprender la transformación de rotación en el espacio y dar cuenta de ella, además permite por medio del arrastre la manipulación de los objetos que hacían parte de

la construcción y a través de las restricciones puestas en escena, se privilegian procesos cognitivos como la visualización, el análisis y verbalización de los fenómenos visuales.

En el tercer trabajo escrito por Lilian Andrea Monroy blanco y Karol Lisette Rueda Gómez La metodología está fundamentada a partir de una ingeniería didáctica, a partir de la cual se analizan las situaciones didácticas que se plantean en este trabajo y que estuvieron mediadas por Cabri Géomètre, y que tiene como base la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau trabajando esencialmente situaciones de acción, pero considerando además momentos de formulación y de demostración, así mismo abordaron el punto de vista de la validación, como lo expone Margolinas teniéndolo como elemento determinante del aprendizaje en las situaciones a-didáctica, estas actividades se realizaron en grupos de 4 alumnos de cuarto grado. Con el objetivo de conceptualizar la simetría axial y la traslación.

El objetivo de las actividades es guiar al alumno de cuarto grado de primaria a acercarse paso a paso a la construcción de los conceptos y al afianzamiento de las propiedades de la simetría axial y la traslación. La secuencia propuesta consta de 13 actividades que se llevaron a cabo con cuatro niños de cuarto grado donde cada sesión tuvo una duración de dos horas y distribuidos en dos grupos, tratando de agrupar los alumnos con desempeños académicos similares. Donde cada grupo tiene a su disposición un computador con el programa Cabri.

Con estas actividades se planea llevar a los alumnos a identificar fenómenos visuales relacionados con las propiedades de la simetría axial y la traslación, que le permitirán también identificar en una construcción si dos figuras son simétricas, también a predecir la posición del eje de simetría, o si una figura es la imagen de otra por una traslación, y a predecir la magnitud, dirección y sentido del vector.

Con el fin de que observen las propiedades que están inmersas en las actividades y como una figura depende de la otra y cuando una figura se aleja del eje de simetría la otra también se aleja pero en dirección contraria y en el caso de dos figuras trasladadas con respecto a un vector, pueda observar que el movimiento de las dos figuras es en la misma dirección y que la distancia que separa las dos figuras es siempre constante.

Como conclusiones se puede ver que para el desarrollo de la actividades no es necesario que los alumnos maneje el programa Cabri Géomètre porque sólo se hace indispensable la herramienta arrastre, la cual se convirtió en un medio de reconocimiento y verificación de las propiedades geométricas de un dibujo dinámico, debido a que la dinámica del software permite una gran libertad para explorar, observar, conjeturar y verificar propiedades y resultados.

Además una de las características al momento de integrar un AGD para el aprendizaje de las transformaciones geométricas es que permite que los alumnos a partir de las exploraciones construyan su propio conocimiento y logren identificar a partir de las diferentes situaciones elementos constitutivos de las transformaciones.

Según lo presentado en los trabajos anteriores se puede identificar las siguientes características: en primer lugar las restricciones a cierto tipo de comandos de los software de geometría dinámica las cuales son establecidas por los diseñadores de las situación, con el fin de usar solo el arrastre, y la visualización en estas situaciones didácticas permitieron a los alumnos, interpretar, analizar y verbalizar fenómenos visuales, permitieron identificar el tipo de movimiento de cada situación. Así como la viabilidad de integrar un AGD en el aprendizaje de las transformaciones. Así los alumnos pudieron construir su propio conocimiento y lograron identificar a partir de las diferentes situaciones elementos constitutivos de las transformaciones.

Estos trabajos nos brindan unas primeras variables didácticas para el análisis de las situaciones difundidas en el portal Intergeo con el fin de caracterizar los recursos pedagógicos y la orquestación instrumental sugeridas.

CAPITULO 2. MARCO TEORICO

Este trabajo se centró principalmente en la noción de recurso pedagógico de Guin y Trouche (2007) y la orquestación instrumental Guin y Trouche (2002) y el análisis didáctico de las situaciones propuestas en el portal Intergeo, este análisis se sustentó desde la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), la dimensión instrumental, y la dimensión matemática donde se definen los conceptos involucrados en las situaciones analizadas.

En el análisis se logró identificar y caracterizar los niveles de organización que se movilizan en los recursos pedagógicos de este portal, que permiten caracterizar las variables didácticas que se privilegian en los diseños propuestos, entorno a la transformación de isometría. Además permitió caracterizar qué elementos y condiciones se deben tener en cuenta para la implementación del software Geogebra.

2.1 Recurso Pedagógico

En este trabajo se entenderán los recursos pedagógicos según la aproximación multidimensional de Trouche L, Guin D (2007) como un conjunto de documentos concebidos por un profesor o grupo de profesores, permitiendo disponer de una situación matemática y de elementos para el aprovechamiento en las clases.

Es importante resaltar que una misma situación matemática puede de otro lado ser aprovechada en diferentes contextos (lápiz/papel o en ambientes informáticos de aprendizaje), así mismo un recurso pedagógico puede en sí mismo, dar cuenta de los elementos que precisan el aprovechamiento posible de una situación en los diferentes contextos de uso.

En la práctica se considera una variedad de los objetos que los profesores y los alumnos usan su trabajo en el aula o fuera del aula es muy difícil decidir lo que pertenece a la familia de las tecnologías: ¿regla y compas? ¿Geogebra? ¿Internet? ¿Las simulaciones que se pueden activar en internet? ¿El mismo texto de los recursos en línea? Es indudable que el desarrollo de lo numérico impulsa una evolución del vocabulario, entonces de los conceptos: ha favorecido la emergencia del concepto de recursos pedagógicos, que tiende a sustituirse al concepto de tecnologías.

Por supuesto se debe cuestionar este concepto de recursos pedagógicos. Este cuestionamiento no es nuevo. Chevallard (1992 c.p. Trouche Luc, 2009) ya lo expresaba cuando planteaba el interrogante de la viabilidad de los objetos computacionales. Declarada que esta viabilidad supone, más allá del software y de las situaciones que permiten su puesta en marcha, *sistemas de aprovechamiento didáctico* de estas situaciones. Mas generalmente, esta perspectiva conduce a delimitar los recursos pedagógicos necesarios para la realización del proyecto de enseñar del profesor Gueudet y Trouche (2009 c.p. Trouche 2009) proponen una definición aun más amplia, al considerar como recurso todo lo que es disponible, lo que permite al profesor refundamentar su actividad, lo que abarca recursos materiales (libros de texto, software, preparaciones de cursos, recursos en línea, tablero interactivo) y no materiales, por ejemplo las interacciones con otros profesores o con alumnos. Los recursos pedagógicos aparecen entonces como un resorte y un producto de la actividad profesores, la cual se puede considerar como una labor de desarrollo de recursos pedagógicos en el aula, llamada labor de documentación.

Por la transición de la tecnología a los recursos pedagógicos se necesita ampliar la visión del desarrollo profesional de los profesores. Los problemas de integración tecnológica a los recursos pedagógicos obligan por ejemplo a cuestionar los resultados obtenidos con herramientas de cálculo. El control de las herramientas, de la calidad de los resultados que proporcionan, es algo esencial, que necesita el desarrollo de competencias complejas, tanto de los profesores como de los alumnos.

La perspectiva “*recursos pedagógicos*” conlleva un cuestionamiento más amplio que la pregunta sobre la exactitud de un resultado ¿Cómo asegurarse de su interés, de su

calidad (didáctica, matemática, etc.)? Y una vez que un profesor comprobó el interés de un recurso en circunstancias definidas, ¿Cómo compartirlo con colegas? Estas preguntas son esenciales en un momento de propagación de recursos pedagógicos sobre la web. Para contestarlas, varias aproximaciones se pueden considerar en particular:

- Una aproximación fundamentándose sobre el desarrollo de normas y estándares, es decir, un conjunto de criterios que los recursos pedagógicos deben verificar para poder apoyar la enseñanza y los aprendizajes.
- Una aproximación fundamentándose sobre el desarrollo de repertorios de recursos pedagógicos bien descritos y garantizados; por ejemplo lo que se hace en el portal Intergeo, en la que aparecen recursos pedagógicos propuestos por los profesores y filtrados y validados por los administradores de la página web.

Sin embargo, ninguna de estas dos aproximaciones es plenamente satisfactoria en la práctica:

No se puede concebir en abstracto normas y estándares, éstas solo pueden emerger en referencia a esperas y necesidades de los profesores, a procesos efectivos de desarrollo de recursos pedagógicos y usos.

A menudo, los repertorios bien descritos y garantizados no satisfacen a los usuarios potenciales, después de haber llenado cuidadosamente un formulario descriptivo del recurso deseado, en muchos casos se obtendrá una respuesta pero ningún recurso cumple con los criterios, y cuando por acaso se obtenga un recurso que cumpla con los criterios, este no necesariamente se integra en el sistema de recursos pedagógicos del profesor usuario del repertorio.

El desarrollo de comunidades en línea da una nueva dimensión a la labor colectiva de los profesores, es así que, desde 2003 en Francia, se manifiestan particularmente el desarrollo de comunidades de profesores, diseñadores y compartidores de recursos pedagógicos.

La asociación más numerosa se encuentra en matemáticas: Sesamath (<http://www.Sesamath.net/>), cuyo objetivo son las matemáticas para todos y la divisa es trabajar juntos, ayudar unos a otros, comunicar, agrupa una centena de miembros en la asociación y más de 5000 profesores de matemáticas en una federación de grupos de proyectos) .

El Intergeo pertenece a la comunidad europea y su objetivo principal es hacer más accesible, explotable y más utilizado el contenido digital geométrico en la enseñanza de las matemáticas se puede encontrar el contenido buscado y el usuarios puede escoger el recurso según el software de su preferencia, al especificar un formato común de ficheros basado en estándares abiertos, que podrá y será implementado por los desarrolladores comerciales y de software libre.

Como ya se mencionó los recursos pedagógicos no se puede reducir a una simple descripción de una situación de aprendizaje, ella debe integrar la descripción del ambiente tecnológico en la cual ella puede ser puesta en práctica, además de las proposiciones, en materia de organización del tiempo y el espacio, para facilitar la puesta en práctica. Pero también se debe tener en cuenta que un recurso pedagógico no puede ser concebido como una solución dada a los profesores; ella deben ser adaptada por cada profesor para su propio uso y esta adaptación es la fuente de un enriquecimiento potencial para otros usuarios; la actualización de esta potencialidad supone que los profesores puedan concebir y discutir estos recursos pedagógicos en el marco de reales comunidades de práctica.

Por tal razón se va analizar las situaciones de portal Intergeo, pues ellas muestran una figura inicial donde los alumnos a partir de la visualización y el arrastre puede observa una animación determinada de la cual puede elaborar conjeturas acerca de la noción geométrica trabajada. Como lo expresa (Laborde, 1998) los escenarios de uso son los recursos pedagógicos particulares concebidos por expertos con la intención de enseñar, estos recursos pedagógicos se deben situar en un ambiente específico, y proponen situaciones matemática adaptadas a ese ambiente.

A través de este análisis se contextualiza la investigación desde el dominio matemático que se va a trabajar, desde este enfoque se puede observar como el software Geogebra transforma el trabajo geométrico para inferir las potencialidades de su uso en el aprendizaje Laborde(1998) afirma que dentro de una situación didáctica se debe tener siempre en cuenta el momento de diseñar en un ambiente tecnológico o informático un análisis de los objetos matemáticos las operaciones y las retroalimentaciones didácticas implicadas en una situación.

Pues el aprendizaje no puede ser pensado independientemente del software y comandos que intervienen en una situación didáctica, igualmente se debe considerar las restricciones que pueden tener los ambientes informáticos de aprendizaje.

Estas restricciones pueden ser Internas o de comando, siendo de suma importancia distinguir, la sintaxis de los comandos, y al nivel de la técnica donde el usuario no está totalmente libre para usar la herramienta como él quiera, pues será necesario que el identifique los conceptos que intervienen en la resolución de la situación y en las estrategias de resolución que este permite.

Estos esquemas deben permitir la conceptualización del conocimiento matemático que está inmerso en la situación propuesta. Aunque los esquemas no son visibles a un observador, estos se pueden evidenciar a partir de los comportamientos y las evidencias de la actividad de los alumnos.

2.2 Dimensión Didáctica.

La didáctica de las matemáticas se considera como la ciencia que estudia los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, partiendo de un enfoque sociocultural en el cual la actividad matemática que se desarrolla depende del contexto y de la institución.

Desde esta dimensión didáctica se entiende que la situación como un contexto del alumno desafiado y manipulado por el profesor, que la considera como una herramienta.

La Teoría de las Situaciones Didácticas de (Brousseau, 2007) considera:

“Una situación como un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado. El recurso de que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable es una gama de decisiones que depende del uso de un conocimiento preciso. Consideramos el medio como un subsistema autónomo, antagonista al sujeto.

Al tomar como objeto de estudio las circunstancias que presiden la difusión y la adquisición de los conocimientos.” Pág. 17.

Partiendo del hecho que cada conocimiento matemático posee al menos una situación fundamental que lo caracteriza y lo diferencia de los demás. El conjunto de situaciones que caracterizan una misma noción está estructurado y puede ser generado a partir de un pequeño número de situaciones llamadas **fundamentales**.

Cuando una situación es elegida por el profesor con una intencionalidad, para provocar la interacción del alumno con su medio. Esta situación se denomina **situación didáctica**.

Las situaciones didácticas tienen su origen en una serie de preguntas encaminadas a originar un comportamiento activo de los alumnos que además influyen en la construcción del conocimiento matemático de acuerdo a la intención de la situación o en este caso de quienes diseñan las situaciones.

Así, el profesor se ve implicado junto con el alumno en un juego, en el que controla la información, las preguntas, los métodos de aprendizaje que le brinda al alumno para enfrentarse a los problemas planteados. Este juego o esta situación más amplia es la situación didáctica la cual tiene como característica principal una estrategia descubrible para el alumno, pero además es importante que el problema tenga varias estrategias.

El interés es ver como una situación didáctica que utiliza medios de geometría dinámica, transforma o influye en los objetos geométricos y en las posibles estrategias de resolución, como el tipo de análisis y de síntesis que brinda la situación, dentro de este análisis se debe tener en cuenta los aspectos de la utilización del software, el tipo de figuras de las actividades en geometría para determinado problema, el proceso

fuertemente acentuado dentro de estas situaciones es la visualización y el arrastre, pues mediante la visualización las figuras forman un importante soporte intuitivo para las actividades en geometría ya que éstas permiten ver más allá de lo que los enunciados dicen, abriendo así la posibilidad de explorar, conjeturar, indagar, anticipar, etc. Así, el profesor podrá plantear un límite sobre el tipo y la variedad de hipótesis de solución que debe considerar el alumno, en interacción con la figura, Y el arrastre que permite manipular en la pantalla directamente las figuras construidas en un entorno computacional. De hecho una vez elaborada una figura geométrica ella reconoce cuales son las partes (de dicha figura) que pueden ser arrastradas. Es fundamental señalar que esto ocurre, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura.

Situaciones A-didácticas.

Las situaciones a-didácticas son aquellas situaciones que el profesor ha diseñado con el propósito de provocar en sus alumnos la reformulación de sus conocimientos y la creación de nuevos conocimientos. La elección de estas situaciones por parte del profesor, deben permitir que el alumno reconozca por sí sólo que hay un conocimiento que debe construir en la búsqueda de la evolución de los conocimientos que ya tiene.

Entre el momento en el que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que se produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe que el problema fue elegido para hacer que adquiriera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presentes razones didácticas. No solo puede, sino que también debe, porque no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional.

En la teoría de las situaciones Didácticas se distinguen tres tipos de situaciones didácticas: Las situaciones de acción, de formulación y de validación las cuales (Brousseau, 2007) define así:

2.2.1 Las Situaciones de Acción.

La intención es ver si ocurre una interacción entre los alumnos y el medio físico, los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución a la situación planteada, es decir la situación requiere solamente la puesta en acto de conocimientos implícitos

“Para un sujeto, *actuar* consiste en elegir directamente los estados del medio antagonista en función de sus propias motivaciones. Si el medio reacciona con cierta regularidad, el sujeto puede llegar a relacionar algunas informaciones con sus decisiones (*retroalimentación*), a anticipar sus reacciones y a tenerlo en cuenta en sus propias acciones futuras. Los conocimientos permiten producir y cambiar estas *anticipaciones*. El aprendizaje es el proceso por el cual se modifican los conocimientos. Podemos representar estos conocimientos por medio de descripciones de tácticas o procedimientos que parece seguir el sujeto o por las declaraciones de lo qué parece tener en cuenta, pero solo se trata de proyecciones. La manifestación observable es un patrón de respuesta explicado por un modelo implícito de acción.” Pág. 24 Ver Figura 1.

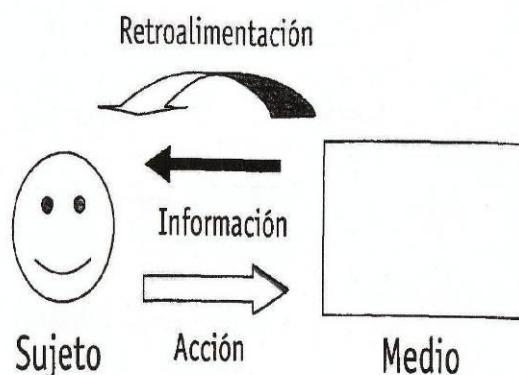


Figura 1. Situación de Acción. Tomado de Brousseau, G. (2007).

2.2.2 Situaciones de Formulación.

Aquí, un alumno (o grupo de alumnos) emisor debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno (o grupo de alumnos) receptor que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje.

“La formulación de un conocimiento corresponde a una capacidad del sujeto para retomarlo, reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico. El medio que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información.

Pero se quiere determinar el contenido de la comunicación, también es necesario que los dos interlocutores cooperen en el control de un medio externo, de modo que ni uno ni otro puedan hacerlo solos, y que la única manera de triunfar sea obteniendo del otro la formulación de los conocimientos en cuestión.” Pág. 25 ver Figura 2.

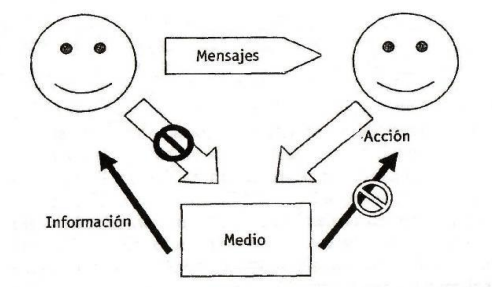


Figura 2. Situación de Formulación. Tomado de Brousseau, G. (2007).

2.2.3 Situaciones de Validación.

Aquí se tratan de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen, en este caso los alumnos deben elaborar procesos para

demostrar sus afirmaciones, no basta la comprobación empírica de que lo que se dice es cierto, hay que explicar que necesariamente debe ser así.

“Los esquemas de la acción y de la formulación lleva a procesos de corrección, ya sea experimental o apoyada en aspectos culturales, para asegurar la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los conocimientos movilizados.

Pero la modelización en términos de situación permite distinguir un nuevo tipo de formulación: el emisor ya no es un informante, sino un proponente, y el receptor, un oponente. Se supone que poseen las mismas informaciones necesarias para tratar una cuestión.

Cooperan en la búsqueda de la verdad, es decir, en vincular de forma segura un conocimiento a un campo de saberes ya establecidos, pero se enfrentan cuando hay dudas. Se ocupan juntos de las relaciones formuladas entre un medio y un conocimiento relativo a ese medio. Cada uno puede tomar posición con respecto a un enunciado y, si hay desacuerdo, pedir una demostración o exigir que el otro aplique sus declaraciones en la acción con el medio. “pág. 26 Ver Figura 3.

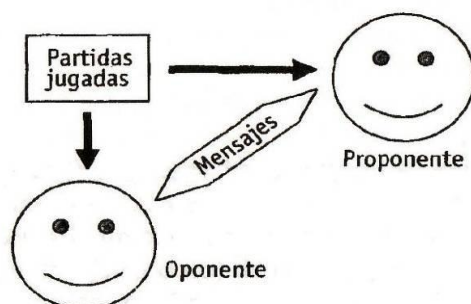


Figura 3. Situación de Validación. Tomado de Brousseau, G. (2007).

Igualmente es importante que la situación tenga diferentes **variables didácticas** tales como el valor de un parámetro o la formulación de preguntas que puedan modificar sensiblemente los comportamientos de los alumnos y provocar procedimientos diferentes o diferentes tipos de respuesta. Brousseau (2007) argumenta que no todo lo susceptible

de cambio se puede considerar una variable didáctica en una situación, sólo aquel elemento de la situación que al modificarlo, puede provocar adaptaciones y aprendizajes. Así las variables didácticas son aquellas que se modifican para provocar un cambio de estrategia en el alumno y que llegue al saber matemático deseado.

Una interacción se vuelve didáctica si y solo si uno de los sujetos exhibe la intención de modificar el sistema de conocimientos de otro (los medios de decisión, el vocabulario, los modos de argumentación, las referencias culturales).

Muchas obras esquematizan la situación de enseñanza por el triangulo representado en la Figura 4, que solamente toma en cuenta las relaciones del sistema profesor con el sistema alumno.

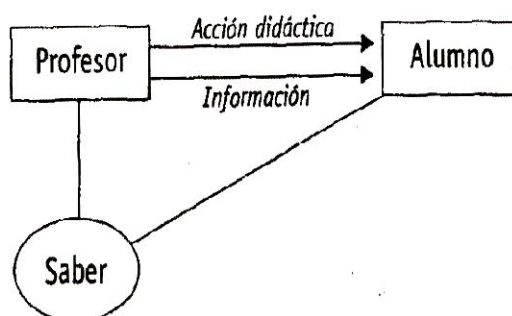


Figura 4. Triángulo de la situación didáctica, Tomado de Brousseau, G. (2007).

Este esquema tiene el inconveniente de reducir el entorno didáctico a la acción del profesor y oculta completamente las relaciones del sujeto con todo medio adidáctico. ¿A que nos referimos? .La intervención del profesor evoca necesariamente, para los conocimientos que enseña, un funcionamiento posible en otras circunstancias, no solamente en las situaciones de uso didáctico (ejercicios o problemas) que plantea.

Crea, entonces, ficticia o efectivamente, otro medio donde el alumno actúa de forma autónoma. Esto conduce entonces a un esquema como el que muestra la Figura 4.1.

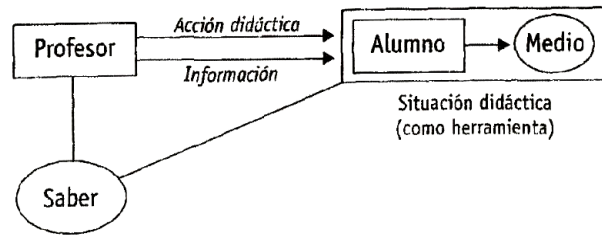


Figura 4. 1 .Triángulo de la Situación Didáctica más un Medio. Tomado de Brousseau, G. (2007).

2.2.4 La estructura del medio didáctico

El estudio de las situaciones como herramientas didácticas conduce a aceptar las siguientes proposiciones:

La comunicación didáctica que tiene por fin dar a su destinatario un instrumento de control de regulación sobre cierto medio. El cual se llama modelo implícito de acción a la capacidad mínima de control. La conciencia que puede tener el sujeto que aprende de su capacidad de control sobre una situación un medio dado es identificada como su conocimiento.

Tomar conciencia de sus conocimientos supone, por parte del que aprende, la práctica efectiva o ficticia de ciertos tipos de interacciones sociales (formulación, prueba) y, además, el uso de un repertorio cultural determinado. Este bagaje de conocimientos culturales (formulables o comunicables al menos a través de procedimientos no verbales) es objeto de un reconocimiento por medio de un sistema de saberes (que incluye la sintaxis) más o menos específico.

Los instrumentos culturales de reconocimiento y organización de los conocimientos son los saberes, objetos de una actividad específica de las instituciones o de una actividad de instituciones específicas.

La acción de un profesor comprende una fuerte componente de regulación de los procesos de adquisición del alumno. El alumno mismo aprende por regulaciones de sus

relaciones con su *medio*. Las regulaciones cognitivas conciernen un medio adidáctico donde una parte de la estructura está determinada por la organización que decide el profesor.

El sujeto profesor puede identificarse según dos posiciones (profesor que prepara su clase, profesor enseñando) y el alumno puede adoptar cinco posiciones diferentes, de modo que pueden distinguirse cinco medios con los que puede interactuar según diferentes modos. Las interacciones de un sujeto –sea profesor o alumno- en los diferentes niveles de un medio son distintas: toma decisiones (según reglas, estrategias, conocimientos), actúa en función de las informaciones que recibe e interpreta, etcétera.

La lectura de la Figura 5 comenzando por el interior permite distinguir que la situación de un nivel se convierte en el medio para un sujeto exterior. Así, el medio material y el actor objetivo constituyen la situación objetiva, la cual se convierte en medio objetivo para el sujeto que actúa (S4).

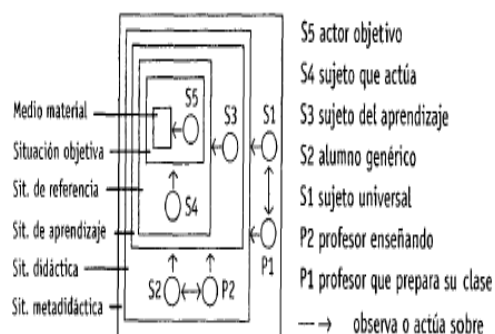


Figura 5. Medio

- Medio material: cuando el profesor prepara su clase, organiza un medio -que incluye las reglas que definen el éxito y el fracaso- llamado "medio material" (aun si no hay objetos concretos). Debe considerar también las interacciones de un sujeto

con este medio. A este sujeto simbólico lo llamamos *actor objetivo* (S5). Este par medio-actor constituye la *situación objetiva* que se propone efectivamente al alumno y con la que debe interactuar.

- Medio objetivo: el sujeto, posicionado como alumno ante la situación objetiva está en posición de sujeto que actúa (S4). Por supuesto, puede imaginarse y representarse a S5, y también identificarse con e1. Para un observador externo, no hay diferencia entre un sujeto S5 y un sujeto S4, pero si para el actor, ya que se distingue a sí mismo de los otros.

El medio objetivo es movilizado en una situación de acción donde este es o bien el medio efectivo sobre el cual se exige al alumno a actuar o bien un medio ficticio cuyo funcionamiento o transformaciones debe imaginar para responder a una pregunta. En los dos casos es un actor que opera en función de sus modelos implícitos de acción. En este nivel, las situaciones de formulación o de prueba son situaciones de acción.

- El sujeto aprende corrigiendo sus acciones y anticipando sus efectos. Las situaciones en las que está comprometido son, pues, para él, sujeto del aprendizaje (S3), los medios de referencia sobre las cuales ejerce sus capacidades de construcción de conocimientos y aprendizaje. Estas situaciones de aprendizaje, están en el corazón del dispositivo de construcción de los conocimientos y de su significación. Dichas situaciones con frecuencia se borran espontáneamente de la memoria de quien aprende. Para un alumno en la posición S3, la reflexión sobre la acción (realizada efectivamente o no en S4) es la que le da las posibilidades de aprender.
- Ser alumno es gestionar situaciones de aprendizaje (con ayuda del profesor). El profesor comienza a actuar, se convierte en actor, se ubica como profesor que enseña. El alumno se convierte en alumno genérico S2 y el medio con el cual interactúan ambos de manera conjunta es el de las situaciones de aprendizaje. Esas interacciones constituyen el momento de establecer relaciones entre conocimientos o de transformar conocimientos en saberes: son las situaciones didácticas.

El profesor reflexiona sobre las situaciones didácticas, que se convierten en los medios didácticos, y se posiciona como profesor que prepara su clase. En esta situación meta didáctica, el profesor revisa las decisiones tomadas, examina sus clases, estudia los comportamientos de los alumnos a través de acciones, conocimientos y saberes específicos.

La relación de un sujeto con un medio de nivel diferente exige conocimientos, conceptos, vocabulario, saberes diferentes. El profesor trata el conjunto de estas sujeciones.

Se pueden observar contradicciones flagrantes entre lo que el profesor dice, muestra y da a comprender a los alumnos y las reglas efectivas de las interacciones con cada medio. Por ejemplo, cuando el profesor enseña una demostración por repetición o analogía, hay una contradicción: la convicción se obtiene a través de un medio ilegítimo.

2.3 Dimensión Instrumental.

Esta dimensión se centra en la noción de instrumento, es decir cómo los sujetos construyen esquemas para resolver una tarea dada a partir de las potencialidades y restricciones que tiene un artefacto.

Para esto el profesor debe ser consciente que las decisiones didácticas acerca del tipo de situaciones, artefactos y configuración adoptada afecta la construcción del conocimiento por parte del alumno. Para comprender estos procesos se han creado dos conceptos claves el de orquestación instrumental y de recurso pedagógico los cuales se presentan a continuación:

2.3.1 Orquestación Instrumental.

Para dar cuenta de todos los elementos que intervienen en la configuración, organización y gestión que realiza el profesor en ambientes informáticos de aprendizaje se crea la noción de orquestación instrumental, la cual la define Guin y Trouche (2002) como un tipo de configuración experimental con cuatro componentes fundamentales:

Un conjunto de individuos.

Un conjunto de objetivos (relacionados con el comportamiento del tipo de tareas o la organización de un trabajo en el ambiente).

Una configuración didáctica (es decir una estructura general o el plan de acción)

Un conjunto de aprovechamiento de esta configuración.

De esta manera la orquestación instrumental se encuentra estructurada a través de una configuración didáctica, un modo de aprovechamiento y una actuación didáctica, las cuales son definidas por Trouche, (2004 c.p. Drijvers y Cols ,2009) así:

Una configuración didáctica es un arreglo de artefactos en el entorno, o, en otras palabras, una configuración de la enseñanza y los objetos que participan en ella. Estos artefactos pueden ser herramientas tecnológicas, pero el trabajo de los alumnos en las tareas puede verse como artefactos también.

Un modo de aprovechamiento de una configuración didáctica es la forma en que el profesor decide utilizarlo en beneficio de sus intenciones didácticas. Esto incluye decisiones sobre la forma en que se introdujo una tarea y se trabaja, sobre las posibles funciones de los objetos que han de desempeñar en los sistemas y técnicas para ser desarrollados y establecidos por los alumnos

Una actuación didáctica consiste en las decisiones adoptadas durante la enseñanza de anuncios sobre cómo realizar efectivamente la enseñanza aprobada en la configuración didáctica elegida y el modo de explotación:

¿Qué pregunta a plantear ahora?, ¿cómo formar igualdad a (o la anulación) cualquier pregunta de un alumno en particular, cómo abordar un aspecto inesperado de la tarea de matemáticas o la herramienta tecnológica?

Además afirma que puede actuar en varios niveles:

En el nivel de un artefacto.

En el nivel de un instrumento o un conjunto de instrumentos.

En el nivel de la relación de un sujeto con un instrumento o conjuntos de instrumentos.

Así los artefactos informáticos deben integrar explícitamente una intención didáctica, es decir el aprovechamiento de los artefactos por los profesores, como lo menciona Doré 1998 (2007, c.p. Guin D y Trouche Luc) éstos deben ser guiados por intenciones didácticas pues estos son ambientes, que posibilitan relaciones reales o virtuales entre los alumnos e interacciones entre los alumnos y los artefactos, donde los alumnos colaboran en una meta común de aprendizaje.

Se debe tomar en consideración, las interacciones didácticas, tomando en cuenta tres niveles propuestos por Chevallard (1992, c.p. Guin D y Trouche Luc, 2007):

El hardware didáctico que está formado por los recursos pedagógicos puestos a disposición en la plataforma de Intergeo y específicamente del diseño propuesto por José Antonio Mora que en este caso se encuentran realizadas en applets para un fácil acceso a este tipo de ambientes tecnológicos.

El software didáctico que estará constituido por las situaciones didácticas que se van analizar.

El sistema de aprovechamiento didáctico, este nivel será vital en el análisis de las situaciones pues el permitirá sacar a parte los recursos potenciales del ambiente y que además asegura la coordinación y la integración de los dos primeros niveles.

La capacidad de arrastre de las figuras construidas que ayudan a favorece la búsqueda de rasgos que permanecen activos durante la deformación. Según Mariotti (2006, c.p. Quintero, 2007) Las distintas modalidades de arrastre que entrañan una evolución cognitiva se orientan simultáneamente hacia su evolución en el proceso de internalización que se puede operar con la mediación de las herramientas de arrastre las cuales son:

- Arrastre errático: Moviendo los puntos básicos sobre la pantalla aleatoriamente, sin ningún plan, con el fin de descubrir regularidades en la figura.

- Arrastre test: Arrastre de puntos básicos de una figura con el fin de mantener una propiedad particular (intención de acción y de cognición).
- Arrastre sobre lugar geométrico: Moviendo un punto básico tal que la figura mantenga una propiedad siguiendo un patrón “oculto” (Lieu Muet).
- Arrastre bola de cristal: Moviendo un punto básico que active la traza tal que la figura mantenga una propiedad descubierta, siguiendo un patrón “oculto” (Olivero, 2002), aunque sin estar seguro de esto.

Mediante esta opción, es posible reconocer los invariantes de una construcción, según si el arrastre conserva las propiedades matemáticas de dicha construcción o no. Como las construcciones dentro del portal son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad, ya no son estáticas y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla.

Así, la capacidad de arrastre de los objetos de una construcción favorece la búsqueda de propiedades de la figura, que permanecen durante la deformación a la que sometemos la figura original. Estas son las propiedades geométricas genuinas.

Guin D y Trouche Luc (2007,c.p. Guin 2002) afirma que un esquema debe ser mediado por una organización compuesta de una o más metas, de reglas de acción y de invariantes operatorios que permiten a la vez tomar y tratar la información pertinente, en las posibles inferencias de la situación didáctica que se proponga. Caracterizar el diseño de las situaciones didácticas, entorno a la transformación de isometrías, analizar el tipo de situaciones didácticas difundidas en el portal de recursos pedagógicos y determinar las variables didácticas que se privilegian en los diseños propuestos aportando a la actualización profesional de los profesores.

Para este proyecto se tendrán en cuenta los dos primeros niveles, es decir las características del artefacto, el instrumento o conjunto de instrumentos que construye el sujeto, pues se pretende describir la organización del portal como medio material abstracto y/o concreto y los esquemas de uso y de acción instrumentados que se pueden

llegar a construir con su utilización, así como la descripción de la configuración didáctica y su modo de aprovechamiento.

2.4. Dimensión Matemática.

Los objetos matemáticos que interesan analizar son las transformaciones de isometrías, ya que en los trabajos pregrado se ha venido trabajando por cada una de estas transformaciones de por separado, además por que este tipo de transformaciones se integra con los AGD permitiendo explorar sus características y propiedades de manera interactiva.

Transformaciones Isométricas

Las cuales se definen según (H.S.M. Coxeter, 1971) a continuación:

2.4.1. Isometría

La palabra transformación en el sentido especial de una correspondencia uno a uno $P \rightarrow P'$ entre todos los puntos del plano (o del espacio), es decir, una regla que asocia pares de puntos, donde se entiende que cada par se compone de un primer miembro P y un segundo miembro P' , y que cada punto aparece como el primer miembro de un solo par y también como el segundo miembro de un solo par. Puede suceder que los miembros de un par coincidan, es decir, que P' coincidan con P , en este caso se llama punto de invariante o doble de la transformación. Una transformación es una correspondencia uno a uno de la totalidad del plano o el espacio consigo misma.

Una isometría es una transformación que preserva la longitud, de manera que si (P, P') y (Q, Q') son dos pares de puntos correspondientes, determinan los segmentos congruentes $PQ = P'Q'$: PQ Y $P'Q'$ son segmentos.

Una isometría es una clase especial de transformación, a saber, la que preserva la longitud. Una operación de simetría se aplica a una determinada figura y no tanto a todo el plano: es una isometría que transforma la figura en otra que es ella misma.

2.4.2. Simetría.

Se dice que una figura es simétrica, si al aplicar ciertas operaciones simétricas dejan la figura sin alteraciones mientras se permutan sus partes por ejemplo las letras mayúsculas E Y A (Figura 6) tienen simetría bilateral, y espejo horizontal en la primera y vertical en la segunda. la letra N (Figura 7) es simétrica por un semigiro o rotación de 180 grados reflexión en un punto o inversión central que se considera como el resultado de reflejar horizontal y verticalmente, o viceversa. La svástica (Figura 8) es simétrica por rotación de un ángulo recto.

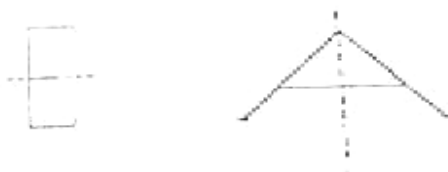


Figura 6. Simetría Bilateral. Tomado de H.S.M. Coxeter.



Figura 7. Reflexión en un punto Tomado de H.S.M. Coxeter

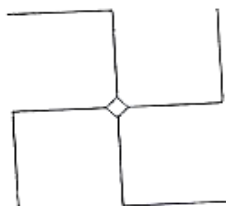


Figura 8. Simetría Svástica. Tomado de H.S.M. Coxeter.

2.4.3. Rotación

Una rotación es el producto de las reflexiones en dos rectas (o planos) que se interceptan y que recorre un ángulo de una magnitud dos veces mayor al que hay entre ellas. Si se tiene A, B, C, D, a los mismos espacios en una circunferencia cuyo centro es O podemos desinar R_1 y R_2 las reflexiones en OB y OC (figura 9) entonces, R_1 refleja el triángulo OAB en el OCB, que a su vez R_2 refleja en OCD, de esta manera R_1R_2 es la rotación que recorre el ángulo AOC, o LBD, es decir el doble de el ángulo BOC , y como una rotación se determina por completo a partir de su centro y sus ángulos $R_1 R_2$ es igual al producto de las reflexiones en dos rectas cualesquiera que pasen por O al mismo ángulo que forman OB y OC .En particular tenemos que el semigiro entorno a O es el producto de reflexiones en dos rectas perpendiculares cualquiera que pase por O.

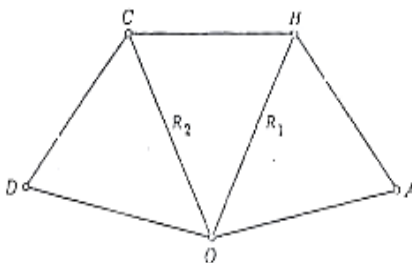


Figura 9. Rotación. Tomado de H.S.M. Coxeter

2.4.4. Traslación

Es una isometría que no deja ningún punto como invariante que se puede describir como el producto de dos semigiros alrededor de dos puntos distintos O, O' (Figura 10). El primer semigiro transforma a un punto arbitrario a un punto arbitrario P en $\bar{P}H$, y el segundo, a su vez, transforma a este en $\bar{P}T$, con el resultado final de que $\bar{P}T$ es paralelo a OO' y de doble de longitud. Así tenemos que la longitud y la dirección $\bar{P}T$ son constantes e independientes de la posición de P.

Puesto que su longitud y su dirección determinan por completo una traslación, el producto de semigiros alrededor de Q y de Q', donde QQ' es igual y paralelo a OO'

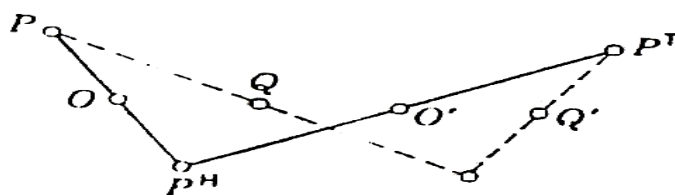


Figura 10. Traslación. Tomado de H.S.M. Coxeter

2.4.5. Reflexión en Deslizamiento

En reflexión en deslizamiento es el producto de la reflexión en una recta a y la traslación a lo largo de la misma recta. Si nos representamos la recta como un camino en la nieve tendremos huellas consecutivas que se relacionan entre sí por medio de un deslizamiento. Una isometría como esta queda determinada por su eje a y por la expresión de la traslación componente. Como una reflexión es opuesta mientras una traslación es directa, su producto será una isometría opuesta. Decimos entonces que la reflexión en deslizamiento es una isometría opuesta que carece de punto invariante.

Si una reflexión en deslizamiento G transforma un punto arbitrario P en P_G (Figura 9), P y P_G equidistan del eje a desde lados opuestos. En consecuencia, por el punto medio del segmento de recta PP_G pasa el eje, para toda posición de P .



Figura 11. Reflexión en Deslizamiento .Tomado de H.S.M. Coxeter.

Como conclusión en el plano, una isometría directa (que preserva el sentido) es una rotación o una traslación, pues el producto de dos reflexiones, tenga o no tenga un punto invariante, es decir, según que los espejos, se intercepten o sean paralelos. En este último caso, la longitud de la traslación es el doble de la distancia entre los espejos; en el primero, el ángulo de rotación es el doble del ángulo entre los espejos. En particular, el producto de las reflexiones en dos espejos rectos. Además, el producto de dos semigiro es una traslación.

Una isometría opuesta (que interviene el sentido) es, en general, una reflexión y una traslación. El caso especial en el que el producto de una reflexión y una traslación. El caso especial en el que la traslación es la identidad (es decir, una traslación que recorre una distancia de cero), la reflexión en deslizamiento se reduce a una sola reflexión con toda una recta de puntos invariantes, a saber los puntos de espejo.

En este capítulo se presentaron las categorías conceptuales y las definiciones de los términos que se utilizaran para el análisis de las situaciones seleccionadas del portal Intergeo desde las diferentes dimensiones.

CAPITULO 3. METODOLOGIA

Se analizaran algunas situaciones didácticas planteadas en el portal Intergeo se toma como referente la transformación de isometrías al utilizar un AGD, específicamente Geogebra, Guin y Trouche (1999) muestran el enfoque instrumental como un enfoque eficaz que permite estudiar y comprender los problemas puestos en la integración de los software en la enseñanza de las matemáticas, en este caso permite analizar el artefacto (Geogebra) y cuestionar los recursos pedagógicos puestos a disposición de los profesores con el fin de caracterizar e identificar el diseño de las situaciones del portal. A partir de una de las características fundamentales del software de geometría dinámica la cual es la capacidad de arrastre.

Desde la orquestación instrumental se define la organización intencional y sistemática en el uso de los artefactos disponibles en nuestro caso artefactos computarizados los cuales son entorno de aprendizaje determinados por el profesor en una situación matemática, a fin de orientar la génesis instrumental de los alumnos. Tomando tres elementos de la orquestación instrumental: una **configuración didáctica**, un **modo de explotación** y una **actuación didáctica**, el proceso se realizara mediante tres fases:

Fase uno: Reconocimiento y descripción de la estructura y/o organización del portal Intergeo. Selección y justificación de las situaciones que se van a analizar. Tomando en consideración los enfoques instrumental y didáctico el cual permite estudiar y comprender los problemas puestos en las situaciones didácticas que integran Geogebra.

Fase dos: Descripción del hardware y software didáctico puesto a disposición de los profesores y alumnos en la web de “La simetría” seleccionada y se definió la rejilla de análisis de acuerdo al enfoque didáctico e instrumental.

Fase tres: Realizar el análisis de las situaciones seleccionadas en el portal Intergeo de acuerdo a la rejilla definida en la fase 2.

3.1 Fase uno: Reconocimiento y descripción de la estructura y/o organización del portal Intergeo.

En el portal web Intergeo se gestiona la interactividad con los usuarios, permite tener a libre disposición de los profesores materiales aportados por los usuarios, donde su motor de búsqueda permite identificar recursos adaptados al currículo vigente en cada país de la comunidad europea según los planes de estudio y libros de texto tal como se muestra en la parte superior derecha en la Figura 12.

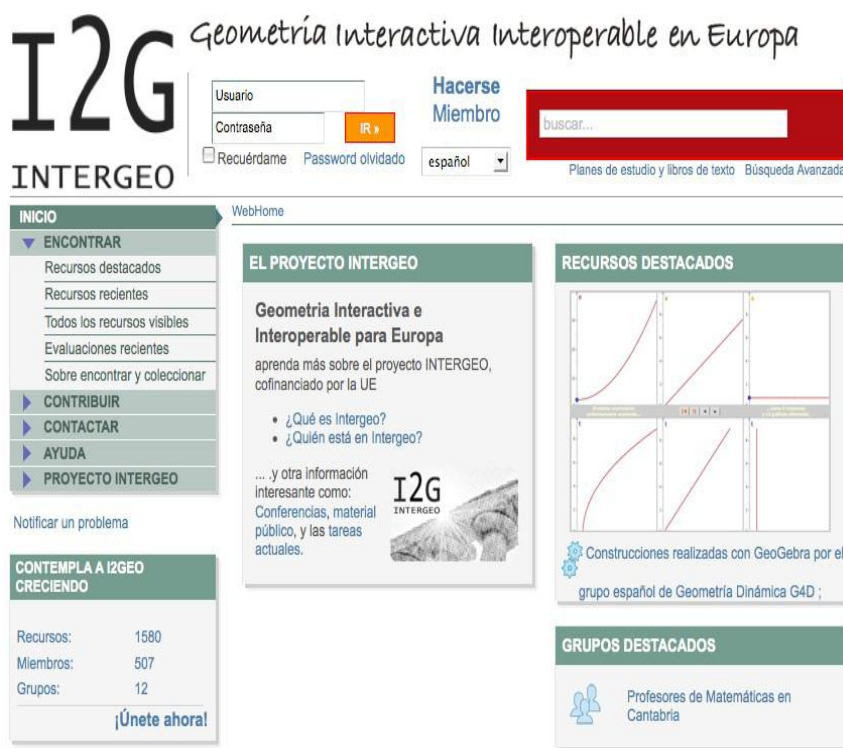


Figura 12. Imagen de la página de inicio de Intergeo. Tomado de (<http://i2geo.net>).

En el Intergeo se pueden buscar recursos de diferentes maneras: En el menú inicio en la parte superior izquierda del portal (ver Figura 12) que tiene un vínculo en el portal que permite buscar por temas como recursos destacados, recursos recientes, todos los recursos visibles, las evaluaciones recientes, sobre encontrar y coleccionar. Además, se encuentra en el portal web un vídeo en el que se explica cómo acceder a los recursos.

Al activar la opción de búsqueda avanzada, se puede investigar por las competencias o realizar textualmente la búsqueda. Si se elige buscar un recurso textualmente, se deberán introducir algunas palabras, relacionadas con el tema del recurso en el que se esté interesado, en la ventana "buscar" de arriba a la derecha, como aparece en la Figura 13.



Figura 13. Búsqueda textual "transformaciones de isometrías". Tomado de <http://i2geo.net>.

Una vez elegido el tema o competencia deseada de la lista anterior, aparecen los recursos relacionados con él (ver Figura 14), debajo del título del recurso se aprecia, de izquierda a derecha, un icono indicando el programa con el que el recurso ha sido creado, una breve descripción del mismo, el resultado de las evaluaciones realizadas sobre el

recurso, si las hubiere (de 1 a 5 estrellas), y un icono representando el tipo de instrucciones del recurso (ejercicio, experimento, animación, etc.).

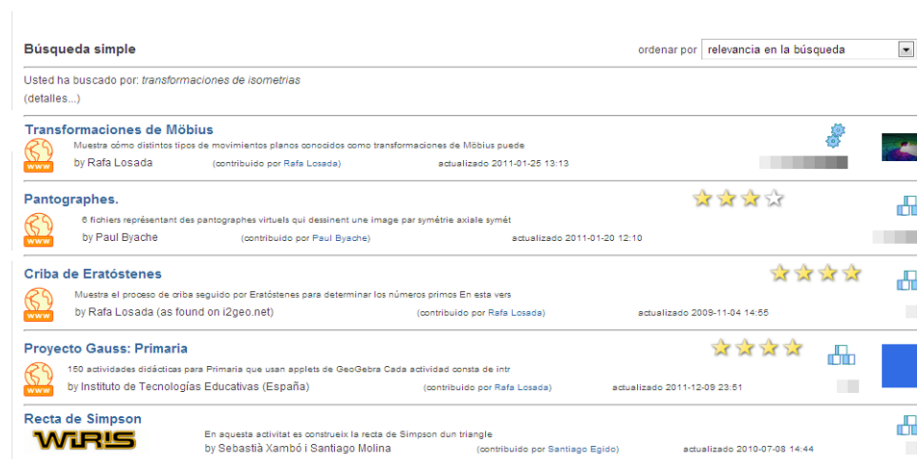


Figura 14. Resultado de la búsqueda textual “transformaciones de isometrías”. Tomado de <http://i2geo.net>

A continuación se muestra un ejemplo de recurso con Geogebra pues las situaciones que se van a analizar en transformación de isometrías utilizan este software, así los recursos que han sido realizados utilizando Geogebra pueden ser identificados en la lista gracias al icono característico que aparece en la parte izquierda, como se aprecia en la Figura 15. Otra opción para identificar los recursos Geogebra es realizar una búsqueda textual de la palabra “Geogebra” en el buscador, lo que nos proporciona un listado de recursos con este software en algún lugar de la catalogación.

Además aparece un vínculo al fichero Geogebra correspondiente (Ver Figura 15). Dando clic en dicho vínculo se abre automáticamente el programa Geogebra con la construcción correspondiente.



Figura 15. Recurso Geogebra sobre “transformaciones de isometrías”. Tomado de <http://i2geo.net>

Hasta la fecha se han catalogado unos 1500 recursos digitales que se encuentran disponibles para un uso libre. En la Figura 14 se muestra la catalogación de un recurso Geogebra llamado la simetría y que tiene como tema central las transformaciones de isometría, los niveles educativos, palabras clave, idioma y tipo de recurso. El contenido de estos ítems ha sido completado por la persona que aportó el recurso.

Así mismo una vez seleccionado el recurso deseado, se abre una ventana que nos informa la catalogación del recurso (ver Figura16) puede verse un ítem sobre la calidad del recurso y en este caso aparece una evaluación, en la que la calidad del recurso la definen los usuarios a partir de las evaluaciones que realizan del mismo.

Aquí debe pulsar en **añadir una evaluación**, con lo cual se inicia un proceso guiado en el que el sistema va solicitando datos: el título de la evaluación, los comentarios que se deseen, el nivel educativo para el que se ha probado el recurso, si es el caso y, finalmente, habrá de rellenar el cuestionario. Este cuestionario contiene varios apartados principales que se desglosan en su apartados que el evaluador podrá o no completar, en función del grado de especificidad que quiera dar a su valoración, y que se pueden puntuar de 1 a 5 estrellas. Este modelo de evaluación de recursos completo, orientado al profesor es claro y conciso. La elaboración de este modelo se baso en el documento sobre Estándares de Calidad de Evaluación de los recursos que se ha elaborado en el Proyecto Standards (2008 c.p. Polo I, 2008). Concretamente, se ha producido un cuestionario con ítems que evalúan distintos aspectos de la utilización del recurso, en el que se evalúa la pertinencia del contenido, lo accesible, adaptable y aplicable a un curso regular (ver Figura 17).

in/view/QR/Coll_byache_Pantographes2_2

Niveles educativos:
Actualizar los niveles educativos seleccionados para este recurso.
Niveles educativos:

Botones de selección: a la izquierda significa que no se está de acuerdo; cuanto más a la derecha, más de acuerdo.

▶	◆◆◆◆◆	He encontrado fácilmente el recurso, y la audiencia, competencias y temas son adecuados
▶	◆◆◆◆◆	La figura es técnicamente correcta y fácil de usar
▶	◆◆◆◆◆	El contenido es matemáticamente correcto y se puede usar en el aula
▶	◆◆◆◆◆	La conversión de la actividad matemática a la geometría interactiva es coherente
▶	◆◆◆◆◆	En este recurso, la geometría interactiva añade algo a la experiencia de aprendizaje
▶	◆◆◆◆◆	Esta actividad me ayuda a enseñar matemáticas
▶	◆◆◆◆◆	Sé cómo preparar mi clase para llevar a cabo esta actividad
▶	◆◆◆◆◆	He encontrado fácilmente una forma de usar esta actividad en de mi curso
▶	◆◆◆◆◆	El recurso es amistoso para el usuario y es adaptable

Figura 17. Principales ítems de evaluación de recursos en Intergeo. Tomado de <http://i2geo.net>

Esta evaluación permite a los usuarios retroalimentar los diferentes recursos puestos a disposición en el portal de tal manera que puedan ser clasificados según su pertinencia o presentar posibles modificaciones para su implementación.

En algunas ocasiones, el autor de un recurso Geogebra ha podido exportarlo como página web. En estos casos, el icono asociado es el correspondiente al de un fichero HTML y el recurso queda integrado en una página web que puede interpretar cualquier navegador. Es el caso del recurso que mostramos en la Figura 18.

Los recursos HTML tienen las siguientes características se puede trabajar con conexión a una red, pueden trabajarse en línea o pueden ser descargados únicamente las situaciones para usarse desde cualquier computador sin acceso a una red.

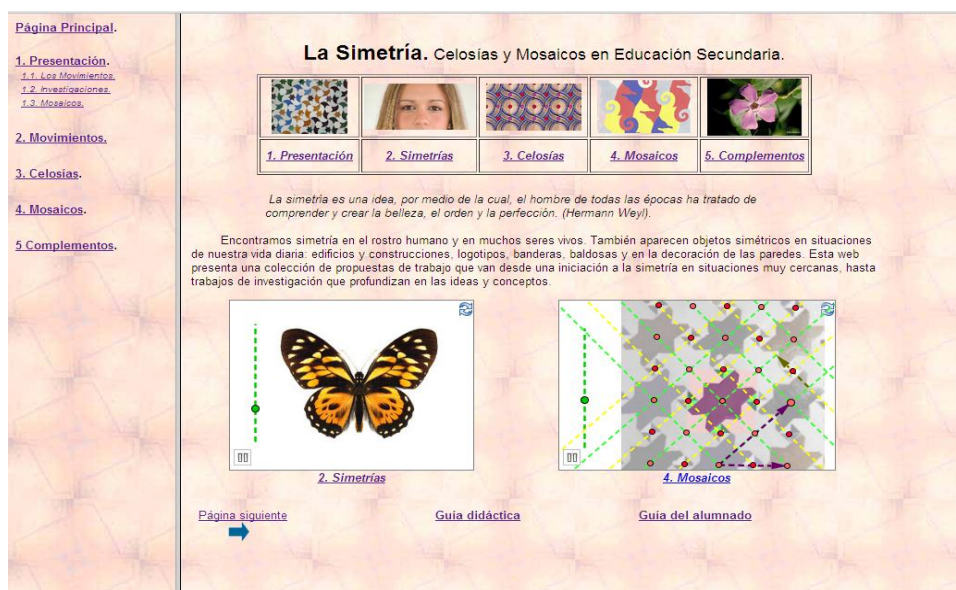


Figura 18. Recursos de Geogebra integrados en páginas web. Tomado de <http://i2geo.net>

Este portal está organizado para hacer más accesible, explotable y más utilizado el contenido digital geométrico en la enseñanza de las matemáticas en Europa. Al utilizar la geometría interactiva como una forma de mejorar la educación matemática con la ayuda de un ordenador. Con el uso de software, las construcciones y figuras cobran vida,

aunque hay muchos ejemplos de actividades interesantes, el software de geometría dinámica todavía no se usa de modo regular en las clases. Intergeo trata abordar tres barreras principales que previenen la utilización regular, a nivel de la unión Europea (UE), del material existente:

Falta de mecanismos de búsqueda

Falta de compatibilidad

Falta de información sobre la calidad

El portal de Intergeo se convierte en una alternativa en la búsqueda de situaciones para ser aplicadas en las clases de geometría.

A continuación se presentan los criterios que se tuvieron en cuenta para la selección de las situaciones que se analizaran.

3.1.1 Selección de las Situaciones

En el portal se clasifican las situaciones según las siguientes categorías: animación/simulación, ejercicio, experimento/laboratorio y plan de lección/currículo.

En las situaciones de *animación/simulación* este recurso integra imágenes y los problemas se integran con la vida cotidiana, tienen un enunciado para empezar a explorar con la figura dada que luego se complementa, el alumno debe responder de acuerdo a lo explorado. (Figura 19 y 20)

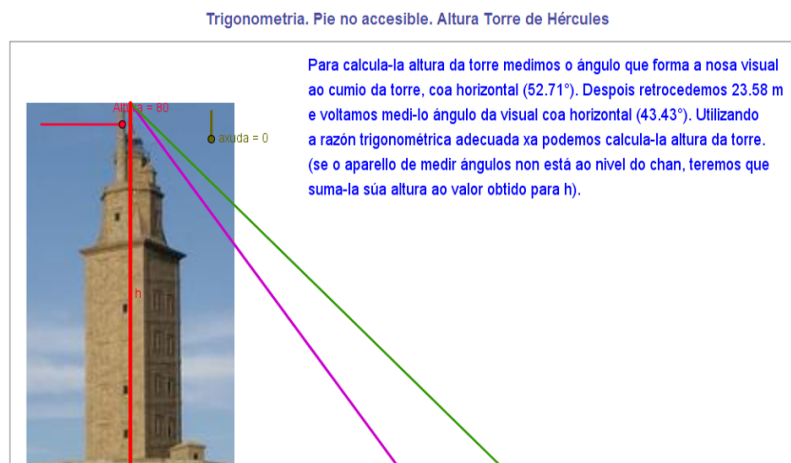


Figura 19. Situaciones de animación/simulación. Tomado de <http://i2geo.net>



Figura 20. Situaciones de animación/simulación. Tomado de <http://i2geo.net>

En la situación de *ejercicio* los recursos tienen un enunciado para empezar a explorar con la figura dada luego se complementa con una serie de preguntas que el alumno debe responder de acuerdo a lo explorado. (Figura 21)

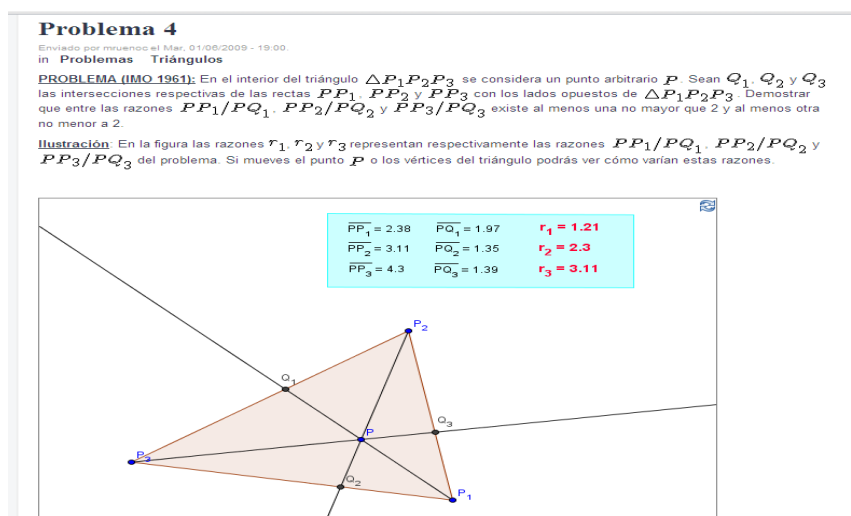


Figura 21. Situación de ejercicio. Tomado de <http://i2geo.net>

En las situaciones de *experimentación*, se da una instrucción que permite una interacción entre el alumno y el artefacto, de tal manera que con los conocimientos previos pueda explorar y conjeturar desde la actividad propuesta.

Un ejemplo de estas situaciones son los pantógrafos compuestos por 6 situaciones, los cuales están enfocados en las transformaciones de isometrías y van en la siguiente secuencia: simetría axial, simetría central, la rotación de 60° , la traslación, la dilatación (ampliación o reducción). Estas situaciones fueron creadas para servir como modelo virtual a los alumnos.

Según H.S.M. Coxeter, (1971) el funcionamiento del pantógrafo (Ver Figura 22), instrumento que invento Christoph Sheiner hacia 1630 con el propósito de hacer copias, reducidas o aumentadas de cualquier figura dada, se compone de cuatro varillas rectas con bisagras en los extremos que son vértices de un paralelogramo $AA'BC$, cuyos ángulos pueden variar.

Los tres puntos coloniales O , P , P' situados en las barras AA' , AC , $A'B$ respetivamente conservan su colinealidad cuando se altera la forma del paralelogramo.

El instrumento tiene un centro de rotación en O . al insertar la puntilla de un lapicero en P' y una de trazado en P (o viceversa), y recorre con la segunda la línea de una figura dada, la puntilla de lapicero dibuja la copia homotética. Las posiciones de O y P son ajustables en sus varillas correspondientes de manera que se puedan elegir distintas razones de las proporciones $OA:OA'$

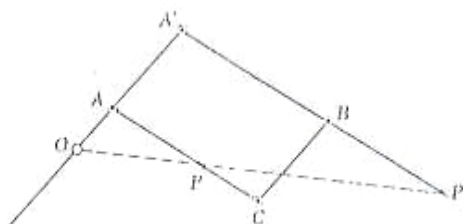


Figura 22 .Pantógrafo. Tomado de H.S.M. Coxeter.

Mediante el pantógrafo pantógrafo1 (Figura 23) se busca que el alumno explore las propiedades y características de la reflexión como el eje de simetría, y la imagen que se genere con el punto azul respecto a este eje tendrá una imagen simétrica pero con sentido contrario.

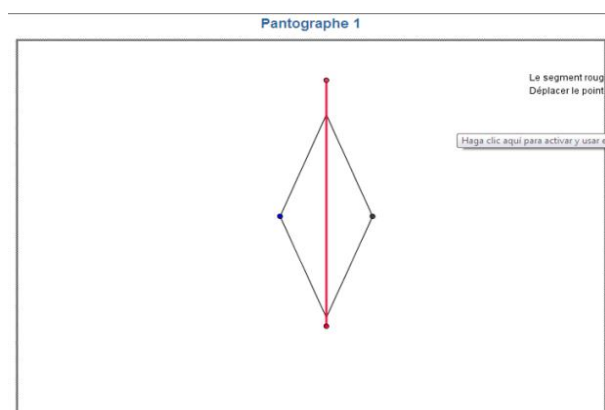


Figura 23 Pantógrafo1. Tomado de <http://i2geo.net>

Mediante el pantógrafo el pantógrafo 2 (Figura 24) se busca que el alumno explore las propiedades y características de la simetría central cuando realice una imagen mediante el punto azul tendrá una imagen simétrica a la misma distancia del punto central, pero en la dirección contraria es decir están relacionadas por un giro de 180° .

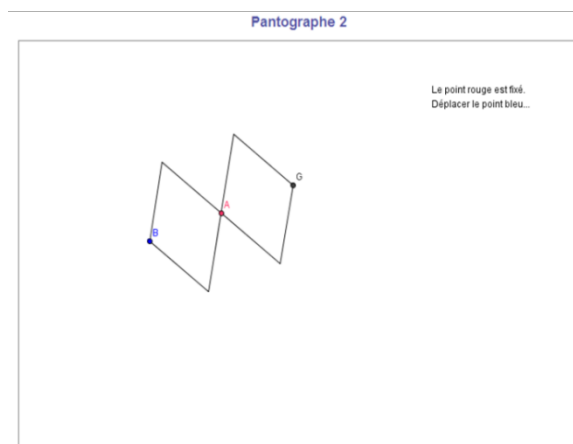


Figura 24.pantógrafo 2. Tomado de <http://i2geo.net>

Mediante el pantógrafo el pantógrafo 3 (Figura 25) se busca que el alumno explore las propiedades y características de la rotación como el ángulo y la dirección de la rotación, dependiendo del sentido en que el alumno lo realice (positivo o negativo).

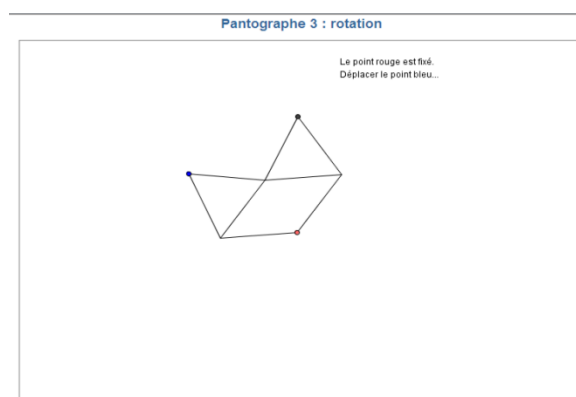


Figura 25.Pantógrafo 3. Tomado de <http://i2geo.net>

Mediante el pantógrafo 4 (Figura 26) se trata de que los alumnos analicen mediante la exploración las características y propiedades de una traslación, como la dirección, el sentido y la longitud del vector el cual está representado por el segmento del punto azul al negro.

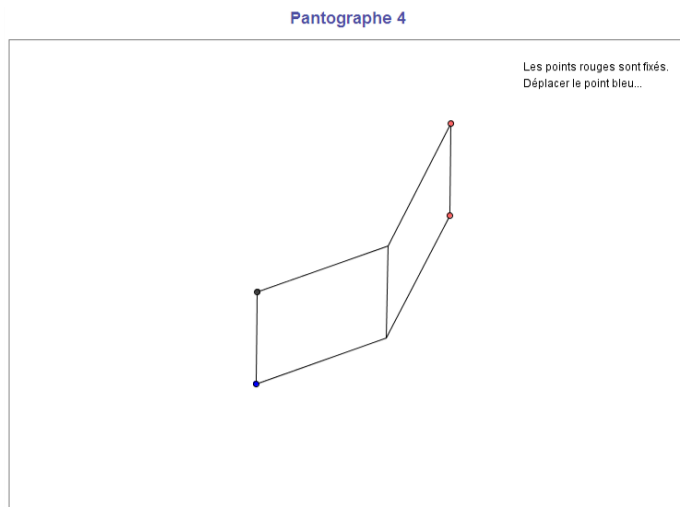


Figura 26. Pantógrafo 4. Tomado de <http://i2geo.net>

Mediante el pantógrafo 5 (Figura 27) se trata de que los alumnos analicen mediante la exploración las características y propiedades de la homotecia mas una rotación, y determine que el orden cuando se ejecutan los movimientos no importa, y la imagen que el alumno dibujen mediante el punto azul debe estar relacionada con la obtenida mediante un ángulo y una constante

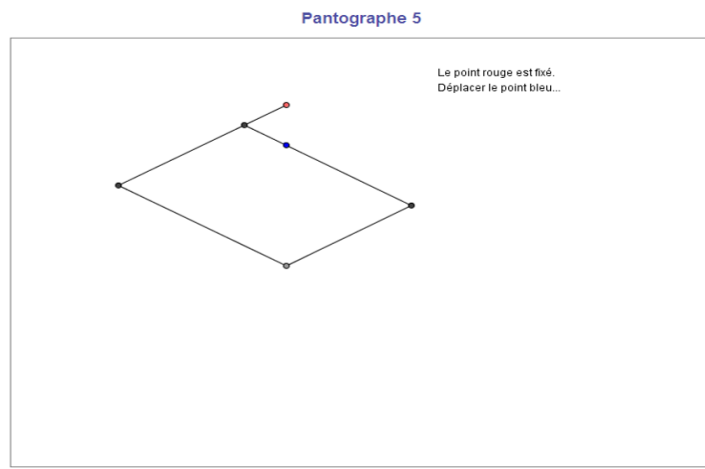


Figura 27. Pantógrafo 6. Tomado de <http://i2geo.net>

Mediante el pantógrafo 6 (Figura 28) se trata de que los alumnos analicen mediante la exploración las características y propiedades de la homotecia más la traslación, y que el orden cuando se ejecutan los movimientos no importa, y la imagen que el alumno dibujen mediante el punto azul debe permitirle ver que la suma de la homotecia y una traslación es una nueva homotecia.

Esta dos últimas situaciones se usan para demostrar que dos figuras son semejantes directas si se pueden hacer coincidir mediante una semejanza espiral o una traslación.

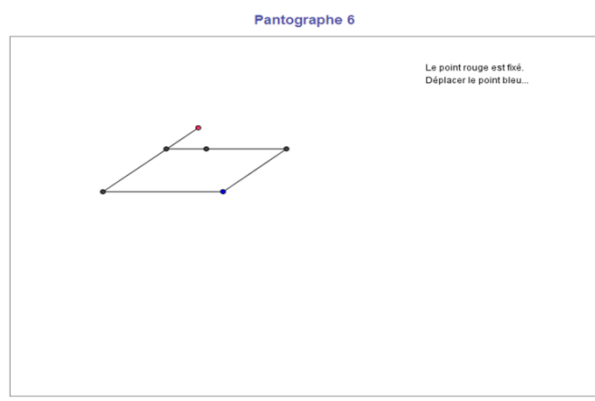


Figura 28. Pantógrafo 6 .Tomado de <http://i2geo.net>

En las situaciones del *plan de lección/currículo*; como su nombre lo indica se da información desde lo curricular al especificar el grado, el tema y toda una secuencia de situaciones desde diferentes contextos, por ejemplo para el estudio de la simetría, se realiza una presentación del concepto, los diferentes tipos de simetrías, construcciones de celosías y mosaicos, finalmente se presenta complementos para el profesor donde se brindan nuevas direcciones electrónicas de consulta, bibliográfica y tipo de evaluaciones que > puede aplicar a sus alumnos.

Para este trabajo se seleccionaron las situaciones de *plan de lección/currículo* por los diferentes elementos que brinda al profesor para la utilización e implementación de las situaciones que presenta. Específicamente para el tema de transformaciones de isometrías pues es un tema que se viene trabajando en la línea de investigación de NTICEM de la Universidad del Valle y este análisis aporta nuevas situaciones que favorecen la exploración e identificación de diferentes propiedades geométricas y de estrategias para el estudio de las transformaciones isométricas con un AGD. (Figura 29)

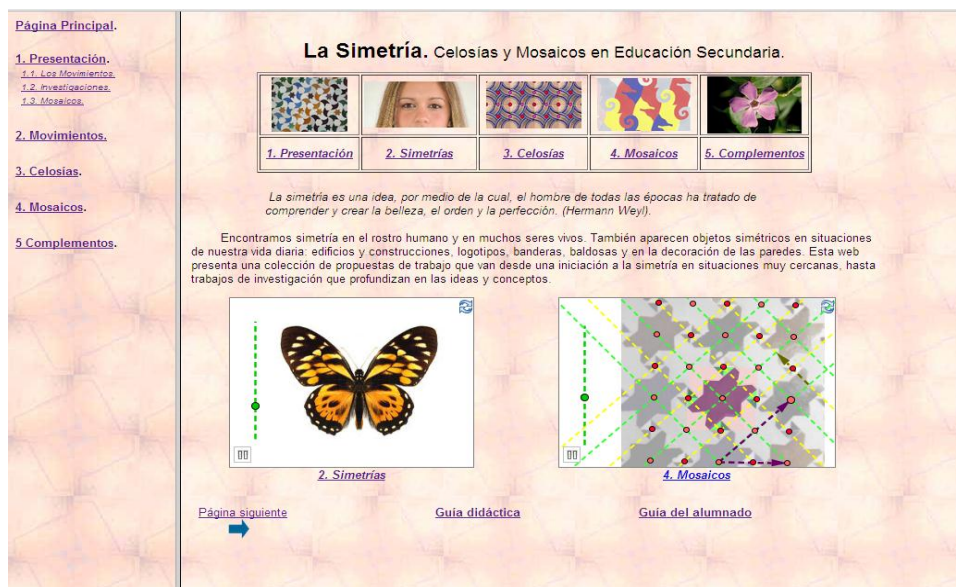


Figura 29.situación de plan de lección/currículo .Tomado de <http://i2geo.net>

Estas situaciones se escogieron ya que su diseño tiene la intencionalidad de provocar la interacción del alumno con un medio, además de que permite que los alumnos construyan sus propios esquemas para resolver las situaciones a partir de las potencialidades y restricciones que les brinda el artefacto (Geogebra).

Se inicia con una serie de cuatro páginas de presentación en las que se marcan los objetivos referidos a los conceptos y forma de trabajar, en esta sección se utilizan varias secuencias de actividades cortas que mantienen la misma estructura básica para cada uno de los movimientos, de esta forma se parte de situaciones de acción, en las que el alumno puede experimentar las ideas que se le proponen. (Figura 30).

	<u>2.1. Traslación.</u>
	<u>2.2. Simetría axial.</u>
	<u>2.3. Rotación y simetría central.</u>
	<u>2.4. Simetría con deslizamiento.</u>
	<u>2.5. Investigaciones: Análisis y composición de movimientos.</u>

Figura 30. Situaciones de las diferentes transformaciones de isometría.

Para cada movimiento se ha elegido como situación inicial que trabaja con una fotografía, en la que muestra un elemento cotidiano que posee ese tipo de simetría (traslación, axial, rotación o de simetría con deslizamiento). Una colección de situaciones que muestran varios temas, en los que podemos observar y utilizar la simetría, luego situaciones en las que se utiliza el movimiento para analizar algunos mosaicos y finalmente una sección dedicada a un análisis más profundo de los mosaicos.

En la fase 3 se ampliará el análisis de este recurso pedagógico puesto a disposición en el portal Intergeo.

3.2. Fase dos: realizar la explicación de los componentes y al final se realiza la rejilla como resumen de lo explicado.

Para el estudio de la simetría se eligió el recurso pedagógico de Intergeo proporcionado por el profesor José Antonio Mora Sánchez de la comunidad valenciana. El cual presenta una web con los siguientes recursos pedagógicos a tener en cuenta como la guía del profesor, la guía del alumno y documentos adicionales con bibliografía, direcciones de internet.

3.2.1 Sistema de Aprovechamiento Didáctico

El sistema de aprovechamiento didáctico es un nivel esencial, pues permite utilizar de la mejor manera posible los diferentes recursos de los que se dispone en el aula de clase, para llegar a producir nuevos y asegurar la coordinación e integración entre los diferentes artefactos y las situaciones didácticas. A continuación se describen las generalidades del hardware y software didáctico que se utilizan en el portal Intergeo.

3.2.2 Hardware Didáctico

Como ya se menciona el hardware didáctico son los componentes materiales de los que dispone el profesor, entre ellos se tiene la guía didáctica para el profesor y el alumno, las cuales son descritas a continuación:

En la guía didáctica para el profesor en el primer apartado se brindan elementos de los requisitos técnicos necesarios para ingresar al grupo de situaciones de simetría, en el segundo apartado se dan algunas consideraciones iniciales acerca de la interactiva de las construcciones a partir de los applets y la información que los complementa tales como: sugerencias para la manipulación, aclaraciones de las ideas, explicación de conceptos,

preguntas sobre la construcción y propuesta de trabajo para las clases; herramientas de presentación; instalación y uso del programa informático Geogebra y JAVA para el funcionamiento de los applets; características de las animaciones y forma de navegar por el grupo de situaciones de simetría. Finalmente se mencionan las convenciones de los textos que van incluidos en las situaciones ya que unas veces son expositivos, otros proporcionan aclaraciones sobre el uso de la situación y en otros casos plantean cuestiones y propuestas de trabajo para que los puedan distinguir se utiliza un código de colores que se ha mantenido a lo largo de las páginas así:

- Si el texto es de color **negro**, el párrafo suministra información.
- Cuando sea de color **rojo**, se dedica a proporcionar aclaraciones sobre la manipulación de los applets y las distintas alternativas que tenemos para sacar más partido de ellos.
- En color **verde** los párrafos plantean preguntas y problemas acerca de las ideas que surgen de los applets o proponen trabajos e investigaciones a realizar. En algunos casos se han planteado preguntas en exceso, para que sea el profesor el que las seleccione atendiendo al nivel e interés de los alumnos.

En el tercer apartado se presentan los antecedentes y la justificación de la utilización de los mosaicos, la relación de la geometría y el arte y la importancia de la simetría, es importante resaltar lo expresado por Weyl, H (1990 c.p. Mora, 2008): *La simetría es una idea, por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección*. De esta manera se habla de la simetría como producto cultural, que aporta no sólo a la construcción de mosaicos, sino a comprender por ejemplo porque las abejas prefieren el hexágono regular para sus celdas.

En el cuarto apartado se presenta la relación de la simetría con el currículo de matemáticas en este se afirma que estas situaciones tienen como objetivos los planteados para la etapa Secundaria Obligatoria en España tales como la mejora de la capacidad de razonamiento y las habilidades de resolución de problemas y que para conseguirlo se empieza por identificar los elementos geométricos de la realidad, y el mayor esfuerzo se dedica a cuantificar la belleza mediante la simetría.

Para lograr este objetivo se utilizan los elementos geométricos relacionándolos con imágenes, fotografías de animales y objetos que los alumnos ven cotidianamente y encontrar la relación con la simetría a partir de los dos objetivos específicos que van a ocupar el lugar central en el aprendizaje de los alumnos tales como:

- Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan, al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
- Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos, tanto para realizar cálculos, como para buscar, tratar y representar informaciones de diversa índole, como ayuda en el aprendizaje.

Igualmente se presentan las competencias en el currículo de Matemáticas de la Ley Orgánica de Educación (LOE), en cuanto a los criterios de funcionalidad y posibilidad de aplicar los contenidos matemáticos. Los conocimientos matemáticos incluidos a lo largo del currículo son detallados en esta guía desde 1º de Eso hasta la universidad.

Se presentan los objetivos de la Web, es decir, las razones de ser del material que se encuentra a disposición, aquí se plantea que el objetivo principal planteado para estas situaciones es el de facilitar la visualización de los conceptos asociados a la comprensión de los movimientos en el plano y ponerlos en conexiones con los hechos relevantes de la vida diaria en los que se manifiestan. Otros objetivos generales de estos materiales didácticos son:

- Fomentar la curiosidad y la experimentación de los alumnos para que sean ellos mismos constructores de su conocimiento.
- Potenciar los procesos inductivos y el razonamiento argumentado como parte esencial de la actividad matemática.
- Impulsar el gusto por unas matemáticas bellas, en las que el rigor científico vaya por una estética atractiva.

Estos objetivos permiten el estudio de las transformaciones de manera dinámica, ya que hace posible identificar los elementos y propiedades geométricas tales como los vectores de traslación, los ejes de simetría, ángulos y centros de giro en la rotación. Un aspecto que se puede resaltar son situaciones diseñadas bajo el principio del pantógrafo.

La búsqueda de la precisión y el rigor son habilidades importantes en la actividad matemática, pero los alumnos no las aprenden de un día para otro. Esto se logra después de un trabajo a largo plazo, al que hay que contribuir con la mayor cantidad de experiencias que podamos.

El tipo de situaciones que se abordaron pertenecen al estudio de la geometría vinculadas con el arte y la decoración, para ello se utilizan figuras interactivas construidas en el programa informático Geogebra a través del cual se puede explorar y analizar los diferentes movimientos, el que aporta a conseguir una actitud positiva hacia las matemáticas, para alcanzar la integración de los conocimientos matemáticos en redes más amplias y lograr que los alumnos valoren las matemáticas como parte integrante de la cultura.

En el currículo planteado en Colombia estas actividades responden a los siguientes estándares:

Para los grados sexto y séptimo:

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos

Para los grados octavo y noveno:

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Para los grados décimo y undécimo:

- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias

En la fase 3 al final de cada grupo de situaciones se hará referencian los estándares que pueden ser estudiados.

En el quinto apartado de la guía se presenta la importancia de la enseñanza con ordenadores pues son herramientas con grandes posibilidades para la visualización de conceptos matemáticos y en las últimas dos décadas, con la aparición de los programas de geometría dinámica (Cabri, Cinderella, Geogebra y otros), han ido transformándose unos programas de dibujo geométrico para convertirse en auténticos asistentes matemáticos que actualmente integran de forma natural geometría de coordenadas.

Las nuevas versiones del software de geometría dinámica son cada vez más fáciles de utilizar. Para la web de simetría se ha utilizado de forma exclusiva el programa Geogebra, que es de libre distribución, lo que supone una gran ventaja para el alumnado que puede disponer del tanto en el instituto, como en sus casas. Esta facilidad de uso ha ido paralela a una mayor integración del software con los navegadores con las herramientas para la creación de applets dinámicos que permiten mostrar los conceptos en movimiento.

El sexto apartado se presenta la metodología de cómo se debe utilizar los materiales en la clase para eso se ha elegido una combinación de varios tipos de actividades que se complementan unas a otras para que la clase sea tan dinámica como la geometría que se utiliza para aprender.

Los problemas y actividades cortas, cuestiones muy concretas que hay que responder aplicando la información que se posee y los conceptos y técnicas adquiridas con anterioridad.

Preguntas que tienen que ver con los procesos más generales de la actividad matemática.

Cuestiones más generales para indagar en ideas, técnicas y hechos de la vida cotidiana.

Para la diversidad del alumnado proponen el estudio de mosaicos pues no requiere una gran instrucción matemática previa, por lo que puede interesar a alumnos que en otro caso tendría más dificultades para seguir el ritmo de la clase. Además se pueden diseñar distintos niveles de profundización en el trabajo, de forma que todos puedan realizar aprendizajes a su nivel.

Los applets generados en Geogebra incluyen deslizadores, casillas que permiten activar y desactivar los movimientos de las isometrías, los ejes de simetría, los giros de las rotaciones, los vectores de la traslación un ejemplo de ello se presenta en la situación de los cisnes de la sección 2.1.2 es importante aclarar que para su funcionamiento se necesita del software Geogebra y java.

Para la organización de la clase en la guía para el profesor se afirma que es mejor el trabajo individual o en parejas, los alumnos deben seguir un plan trazado por el profesor, aunque en estos momentos no se puede proponer una situación como algo generalizable es posible que en algunos años, se planteen dos tipos de organización de la clase:

Los materiales los utiliza el profesor: presenta los contenidos matemáticos con la ayuda de un ordenador portátil y un proyector –si es con pizarra digital, mucho mejor-. En este caso, el profesor puede realizar preguntas y plantear actividades a la clase, para provocar el debate entre los alumnos que les acerque a las soluciones. La manipulación posterior la pueden hacer los propios alumnos o el profesor a partir de las indicaciones que le dan los alumnos.

El trabajo lo realizan directamente los alumnos, al interactuar con los applets en un aula de Informática, tanto si tienen acceso a Internet, como si el profesor ha insertado en los ordenadores la web completa de La Simetría. En este caso los alumnos toman nota de sus soluciones, después las discuten con toda la clase y se extraen conclusiones. Más adelante los alumnos más avanzados pueden abrir los archivos de Geogebra e intentar comprender cómo han sido contruidos e incluso modificarlos para introducir mejoras.

Este tipo de organizaciones desde el acercamiento instrumental se puede hacer uso del alumno sherpa, pues a partir del análisis que el alumno realice de la situación, puede presenta sus conjeturas, ponerlas a prueba y tratar de convencer a sus compañeros de la veracidad de ellas, éste alumno recibe una retroalimentación de sus compañeros que le ayuda a mantener o cambiar de opinión frente a las conjeturas propuestas. La organización de las clases no se presenta de manera tradicional. Las intervenciones del profesor se dan para orientar la discusión y realizar las aclaraciones que considere pertinentes para el desarrollo de las situaciones. Esta organización con el proyector contribuye a la construcción de esquemas sociales de uso.

El séptimo apartado que presenta la estructura y organización de las situaciones, ésta fue desarrollada en la Fase 1 del presente trabajo.

Además incluye un apartado de los complementos con información útil para el profesor: como enlaces a la guía didáctica y del alumno, algunos documentos adicionales con bibliografía, direcciones de internet o una relación de las personas que han colaborado en la elaboración y mejora de estas situaciones.

El octavo apartado se presenta la evaluación para la cual se han diseñado dos colecciones de actividades para poder comprobar el grado de adquisición de los conceptos y destrezas de la simetría axial y rotacional. El tipo de preguntas planteadas es muy parecido a la secuencia de actividades de aprendizaje y en algunos casos se ha utilizado el mismo contexto.

En el anexo 1 experimentación de la guía, se expone un informe detallado de las características de la experimentación y de los resultados obtenidos con estas pruebas de evaluación del alumnado.

En la guía para el alumno se presentan los mismos apartados e información brindada a los del profesor, excepto lo relacionado con el currículo de las matemáticas, la enseñanza con ordenadores, se mencionan los apartados de la evaluación pero no se especifican los contenidos y competencias matemáticas a evaluar y tampoco se presentan los resultados obtenidos de la experimentación realizada con los materiales.

3. 2.3 Software Didáctico

Está constituido desde la teoría de situaciones didácticas, Brousseau clasifica las situaciones de acuerdo con las acciones que manifiesta el alumno cuando intenta controlar su entorno en situaciones de acción, de formulación y validación pues una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio, manipulado por el profesor, que la considera como una herramienta.

El tipo de situaciones que se van analizar tienen fotografías en las que es posible visualizar o no los ejes de simetrías, los deslizadores permiten explorar diferentes movimientos generados por las transformaciones de isometría, la interacción del alumno con este tipo de características son las que permiten afirmar que se tratan de **situaciones de acción**, en ellas la pregunta que se hace no está completamente determinada en el enunciado, es decir, los alumnos pueden tomar decisiones sobre el camino a seguir y la forma de hacerlo, un ejemplo claro está en la sección 2.1.5 (ver fase 3) en la cual se debe practicar la traslación en un mosaico, el alumno debe explorar nuevos vectores y observar que pasa con cada traslación para que organice la solución de la situación planteada. Es importante resaltar que en la mayoría de las situaciones de acción apuntan a generar procesos de validación por parte de los alumnos.

Las **situaciones de formulación** tienen problemas o situaciones cortas, desde cuestiones muy concretas que hay que responder aplicando la información que posee y los conceptos y técnicas adquiridas con anterioridad con otras situaciones un ejemplo

claro es la situación de la sección 2.2.6 donde se estudia la simetría a partir de la fotografía de una mariposa en ella el alumno debe explorar mediante las preguntas propuesta algunas características y propiedades de la simetría axial además de escribir paso a paso los elementos a tener en cuenta para generar la posición del punto simétrico de un punto dado.

Las **situaciones de validación** tienen que ver con los procesos más generales de la actividad matemática un ejemplo es la situación de la sección 2.3.1 que trata de la simetría rotacional y tienen dos situaciones en las que los alumnos a través de la exploración deben recordar el concepto de rotación.

En la primera situación pueden mover el punto O que representa el centro de rotación y observar que movimiento del triángulo se genera y en la segunda se busca que alumnos comprueben la definición y la validez del concepto de la simetría rotacional, al aplicar un giro de 120° a la llamada figura *Celta* y observar que la figura coincide con la inicial.

También con cuestiones más generales para indagar en ideas y técnicas como la situación de la 2.3.2. Simetría rotacional en letras y símbolos. Este tipo de situaciones se analizarán en detalle en la fase tres.

De acuerdo a lo descrito anteriormente la rejilla de análisis que se utilizara para analizar las diferentes situaciones que se encuentra en la web de la simetría y que permitirá dar respuesta a las hipótesis del trabajo es la siguiente:

Enfoque Didáctico	Enfoque instrumental
TSD { - Tipo de situaciones: - Acción - Formulación - Validación Variables didácticas : - El tipo de figuras ,vector traslación, centro de rotación, eje de simetría - Tipos de arrastres: - Test - Errático - Lugar geométrico oculto - Bola de cristal	Medio Orquestación instrumental { - A quienes va dirigidas - Los Estándares a que corresponde - Restricciones del artefacto

Tabla 1. Rejilla de análisis de las situaciones

Para el análisis de las situaciones se realizará el ejercicio de ubicarlas en un grado del currículo colombiano y determinar los estándares que pueden ser abordados con ellas.

3.3. Fase tres: Análisis de las Situaciones Seleccionadas.

Las situaciones seleccionadas tienen una característica que es planteada en los Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para el estudio del pensamiento espacial, que son las relaciones entre los objetos involucrados en el plano, su ubicación y las relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio.

Esto implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial.

La web a estudiar se llama “La simetría” en la presentación la situación 1.1 referida a los movimientos se exploran diferentes situaciones de traslación, simetría axial, rotación y Simetría con deslizamiento, para luego profundizar el estudio de las características de los movimientos (ver Figura 31).

[Página Principal.](#)

[1. Presentación.](#)
[1.1. Los Movimientos.](#)
[1.2. Investigaciones.](#)
[1.3. Mosaicos.](#)

[2. Movimientos.](#)

[3. Celosías.](#)

[4. Mosaicos.](#)

[5. Complementos.](#)

1.1. Presentación. Movimientos.

Estudiaremos las figuras simétricas, aquellas que permanecen invariantes al someterlas a un determinado movimiento.

En el applet de la derecha tenemos una imagen del puente de Brooklyn, si "damos la vuelta a la imagen" - hacemos una simetría axial respecto de la recta azul-, la mayor parte de los elementos del puente coinciden con los del otro lado.

Puedes realizar la simetría con el deslizador verde o activar una animación automática pulsando sobre el icono que hay en la esquina inferior izquierda.

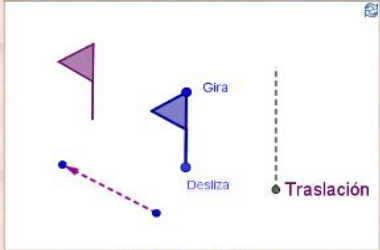


G4D, Creado con GeoGebra

La primera sección la dedicaremos a profundizar en el estudio de las características de los cuatro movimientos en el plano que no modifican las distancias: las isometrías.

En el applet de la derecha tienes un deslizador que, al desplazarlo hacia la parte superior, muestra una bandera y su transformación con cada uno de los movimientos. En todos ellos puedes cambiar la posición de la bandera (nunca su transformada). Además:

- En la [traslación](#) puedes mover el vector o desplazar los vértices.
- En la [simetría axial](#) cambiar el eje (por otro paralelo o modificar la inclinación).
- En la [rotación](#) desplazar el centro o cambiar el ángulo de giro.
- En la [simetría con deslizamiento](#) el eje o la magnitud del vector (no su dirección, que es siempre paralela al eje de simetría).



G4D, Creado con GeoGebra

Para cada uno de los movimientos se ha seleccionado una colección de applets interactivos que lo conectan con situaciones cotidianas cada vez más complejas, para acabar con la aplicación a los mosaicos. Se dedica una Sección a realizar [2.5 investigaciones con movimiento](#) a tratar el tema con mayor profundidad y establecer nuevas conexiones.

[Página anterior](#) [Volver al índice](#) [Página siguiente](#) [Mapa de la Web](#)

← ↑ →

Figura 31. Presentación de los movimientos.

A continuación se presentan las situaciones mencionadas en el orden en que aparecen en la Figura 30.

3.3.1. Situación de Presentación.

Los alumnos exploran las propiedades de cada transformación, la primera es la situación de traslación en ella se tienen como variables didácticas, el arrastre del vector de traslación, que permite explorar la dirección, aumentar y disminuir su longitud, determinar si la dirección y el sentido de la figura se conserva. (ver Figura 32).

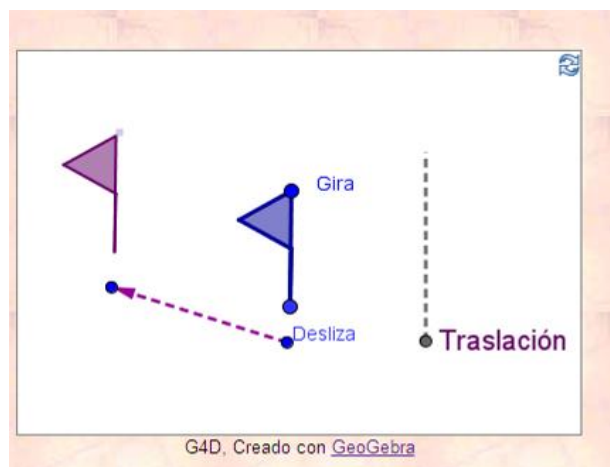


Figura 32. Situación de traslación

En la situación de simetría axial las variables didácticas son: el eje de simetría que no hace parte de la figura y el cual contiene dos puntos permiten desplazar el eje en cualquier sentido y la transformación de las banderas esta realizada de manera global lo que permite ver que la figuras son simetricas (Figura33).

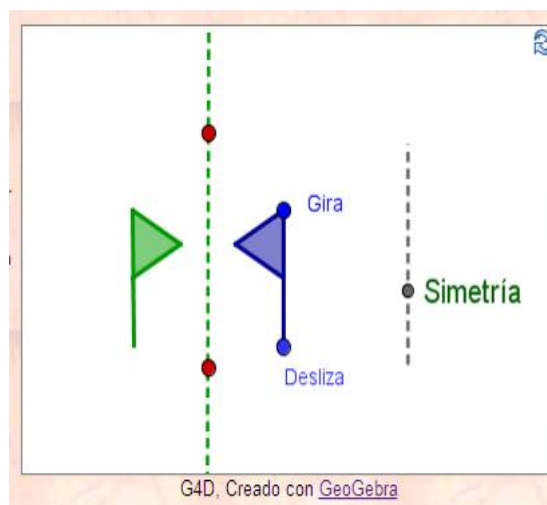


Figura 33. Situaciones de simetría

La situación de rotación tiene como variables didácticas; el centro de rotación externo a la figura y puede ser arrastrado en cualquier parte de la pantalla y la línea verde que

hace explícito el ángulo de rotación el cual va de 0° a 360° al conservar el tamaño y la forma de la figura. (Ver Figura 34)

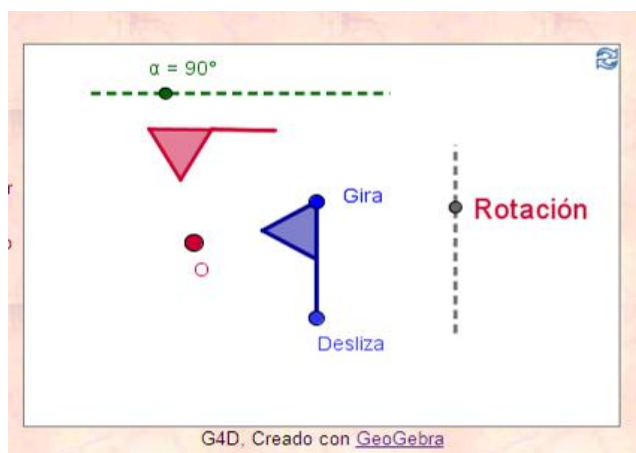


Figura 34. Situación de rotación.

En la situación de la simetría de deslizamiento las variables son: el vector de traslación el cual debe estar siempre paralelo al eje de simetría y que condiciona el sentido y dirección del vector al eje, se puede explorar con distintas magnitudes, al mover los dos puntos azules que determinan el eje de Simetría y que permiten desplazarlo en cualquier dirección. (Figura 35)

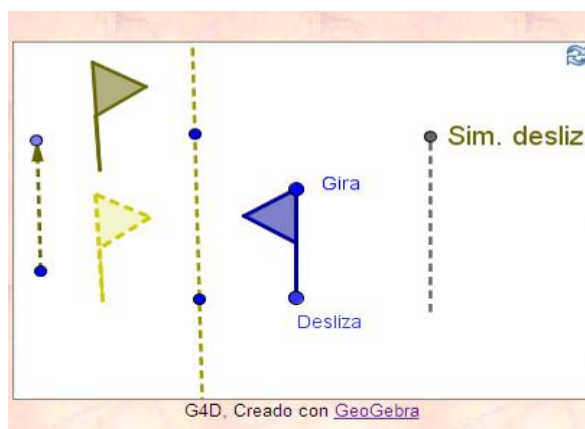


Figura 35. Situación de la simetría de deslizamiento.

Es de notar que la bandera azul es la figura inicial y que ella se puede ubicar en cualquier posición al desplazarla o rotarla.

Estas situaciones se podrían implementar en nuestro contexto para el pensamiento espacial y sistemas geométricos para los grados sexto a séptimo según los siguientes estándares:

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

Las situaciones de esta presentación son situaciones de acción puesto que depende de una interacción del alumno con el medio para la identificación de las propiedades.

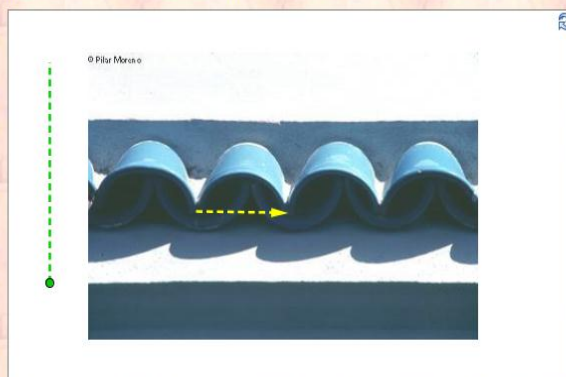
El tipo de arrastre que se usa es el errático, puesto que al mover los puntos básicos de forma aleatoria sobre la pantalla, el alumno puede descubrir regularidades en las transformaciones de isometría.

3.3.2 Situaciones de Simetría de Traslación.

Las situaciones de la sección 2.1.1 (ver Figura 36) son de acción; pues en ellas se busca representar la traslación por medio de fotografías que al superponerlas se pueden desplazar según el vector dado. Lo que brinda una retroalimentación al alumno de su acción, al identificar la trayectoria seguida según el vector por lo cual el tipo de arrastre utilizado es el Test.

2.1.1. Simetría de traslación.

Decimos que una figura tiene simetría de traslación cuando coincide consigo misma tras desplazarla según un determinado vector. Aquí tenemos dos fotografías: las tejas de la página anterior y una reja en las que podemos observar la repetición de un motivo. De cada una de ellas se han hecho dos copias, a las que se ha tamizado el color. Una de ellas permanece fija mientras la otra se desplaza según el vector marcado hasta que vuelven a coincidir los motivos fotografiados.



Figuran 36. Situaciones de la sección 2.1.1

En estas situaciones se trata de determinar los tres elementos de una traslación los cuales son; la longitud, la dirección, el sentido, que están representados por el vector que se obtiene al mover el punto de la línea verde. Entonces la longitud de la traslación la determina la distancia del vector, la dirección y el sentido la determina el vector el cual hace parte de la fotografía. El punto de la línea verde permite desplazar la fotografía permitiendo identificar estos elementos mediante el vector rojo que aparece después de desplazar este punto. (Ver Figura 37)

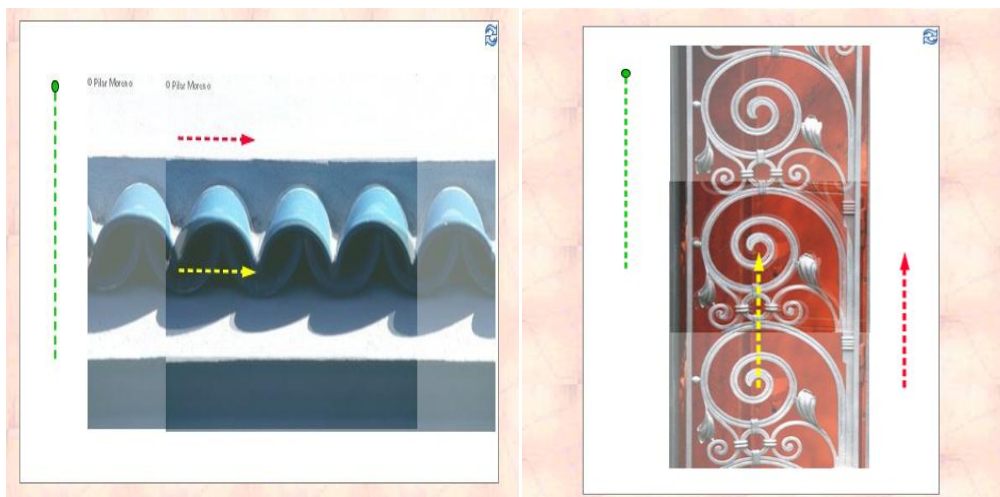


Figura 37. Situaciones de la sección 2.1.1

Al desplazar las fotografías se visualiza una traslación global, es decir de toda la imagen en su conjunto, en las situaciones 2.1.2 sin embargo se señala un punto en la figura para hacer más visible el desplazamiento de los cisnes y resaltar su carácter puntual y que ésta traslación se puede dar sin tener en cuenta el sentido y la dirección en que se encuentren los cisnes (Ver Figura 38).

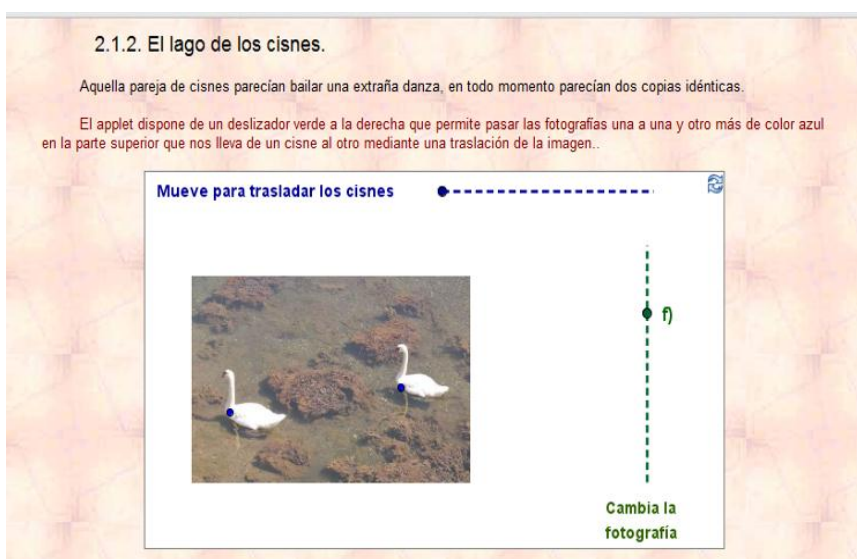


Figura 38. La situación 2.1.2

Estas situaciones buscan que los alumnos a través del cambio de las fotos y de la exploración con los puntos azules que generan los vectores al mover el punto azul de la línea de la parte superior de la pantalla visualicen que aunque los patos cambien de posición, lo importante es observar la longitud, la dirección y el sentido del vector de traslación. (Figura 34)

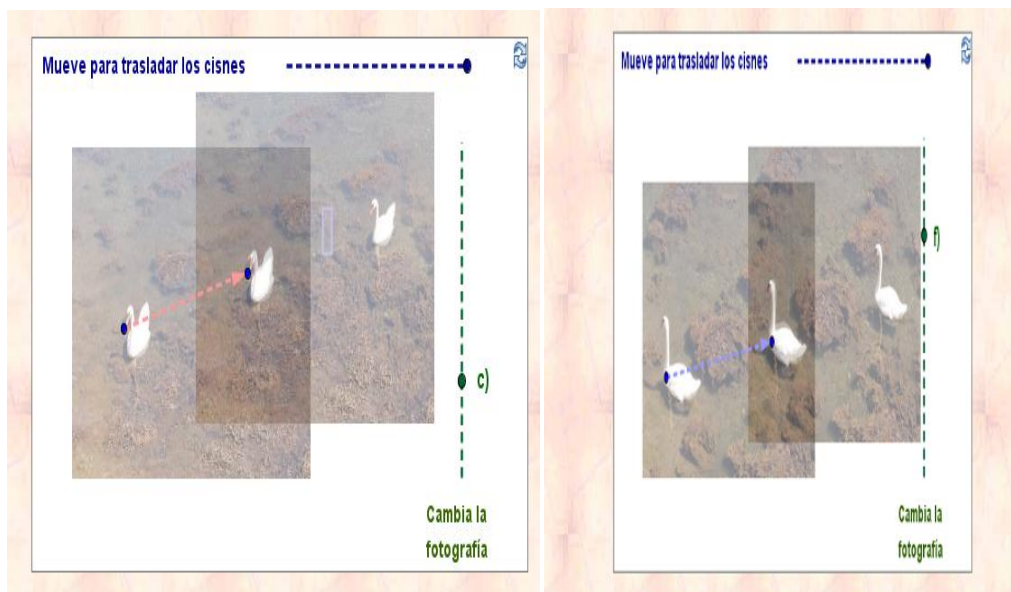


Figura 39. Diferentes fotografías de la situación 2.1.2

Al igual que las anteriores situaciones éstas son de acción pues la interacción entre el alumno y el medio debe ayudar al alumno para identificar las propiedades que se cumplen en la traslación.

Las situaciones de las secciones 2.1.1 y 2.1.2 el tipo de arrastre que usan es el test pues a través del arrastre de los puntos básicos de la situaciones se busca que los alumnos reconozcan las propiedades de la traslación, estas situaciones se podrían implementar en nuestro contexto para el pensamiento espacial y sistemas geométricos para los grados sexto a séptimo según el siguiente estándar:

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

En la situación “Trasladamos rejas” de la sección 2.1.3, aparecen dos puntos, el punto rojo depende del azul bajo el principio del pantógrafo, para determinar el movimiento de traslación al seguir la figura de la reja en la fotografía, el alumno puede corroborar la traslación al hacer coincidir el inicio del vector con el punto azul y verificar que su magnitud corresponde a la distancia del punto azul al rojo, en este caso se puede observar que el movimiento de las dos figuras trasladadas con respecto a un vector es en la misma dirección y que la distancia que las separa es siempre constante (ver Figura 40).



Figura 40. Situación 2.1.3

Es una situación de formulación puesto que el alumno debe describir el proceso de traslación de un punto. El tipo de arrastre es el de la bola de cristal, pues al mover el punto azul se deja descubierta la propiedad de dependencia del movimiento y la conservación de la distancia dada por el vector.

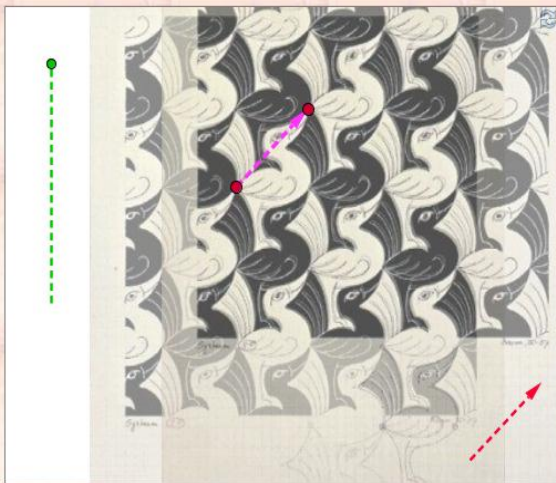
En la situación 2.1.4 se presenta un mosaico de Escher y se busca determinar diferentes vectores que dejan invariante el mosaico, un ejemplo es ubicar el vector en los ojos de los patos, cuando se realiza el movimiento aparece un vector rojo que determina el desplazamiento (ver Figura 41)

2.1.4. Simetría traslacional en un mosaico.

Un mosaico tiene simetría traslacional cuando todo él queda invariante, al ser desplazado según un determinado vector.

En el siguiente applet tenemos dos copias superpuestas de un mosaico de Escher. En el applet comprobamos que, al mover el deslizador verde de la izquierda, uno de los mosaicos se desliza sobre el otro en la dirección del vector marcado (en color rojo) que une dos picos del pájaro.

Durante el trayecto se ve aparecer un vector rojo en la parte inferior que indica el trayecto recorrido por uno de los dos mosaicos hasta llegar a su destino, lo que ocurre cuando el vector rojo es igual al morado inicial. En ese momento los mosaicos vuelven a coincidir.



G4D. Creado con [GeoGebra](#)

Puedes modificar los puntos de color rojo para encontrar nuevos vectores de otras magnitudes o con otras direcciones que también dejen invariante al mosaico.

Nota importante: diremos que el mosaico ha vuelto a coincidir, aunque los pájaros blancos caigan sobre los negros y al contrario. Sólo nos van a importar las formas, no los colores.

Figura 41. Situación 2.1.4

La situación de la sección 2.1.5 es de práctica y tiene como variable didáctica identificar la propiedad de la traslación mediante la visualización al activar la casilla “ver imagen trasladada”, esta opción permite ver o no el movimiento de traslación según el vector. Esta variable permite abordar la situación de dos formas:

La primera, que los alumnos realicen conjeturas acerca de los vectores que generan una traslación de tal forma que el mosaico permanezca invariante y la prueben al activar la casilla “ver imagen trasladada”.

La segunda, consiste en que los alumnos exploren con la casilla “ver imagen trasladada” activa los diferentes vectores de traslación y las distintas posiciones dentro de la figura para que el mosaico permanezca invariante y a partir de la exploración realizada los alumnos deduzcan cuáles son los sitios en los que se debe ubicar el vector para que el mosaico conserve sus propiedades. (Figura 42)

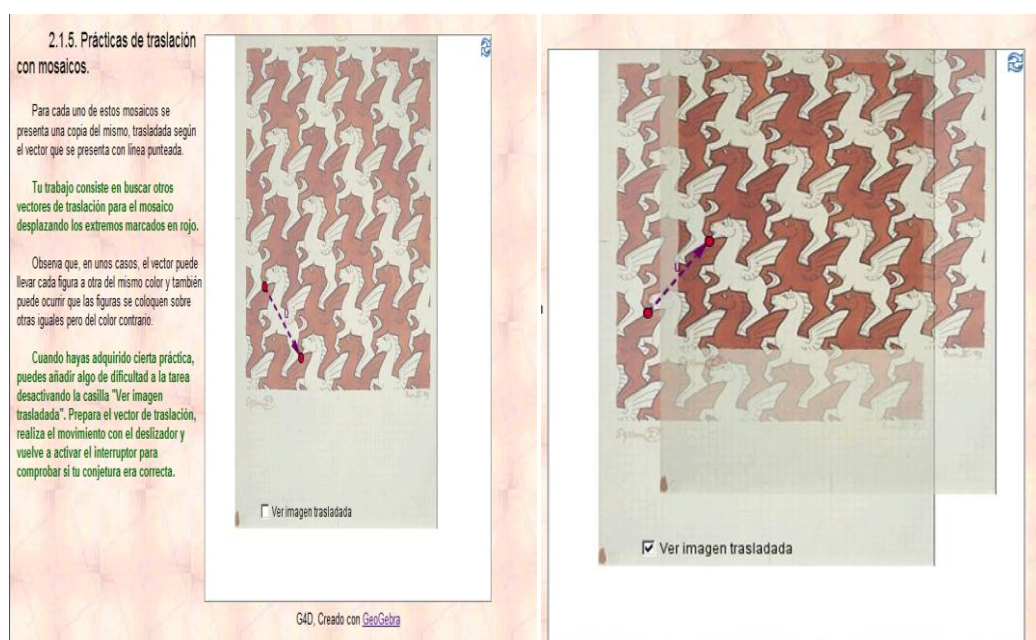


Figura 42. Situación 2.15.

Luego hay una segunda situación con las mismas características de la situación anterior que busca consolidar la noción de traslación mediante el movimiento de los vectores en el mosaico de la Figura 43.

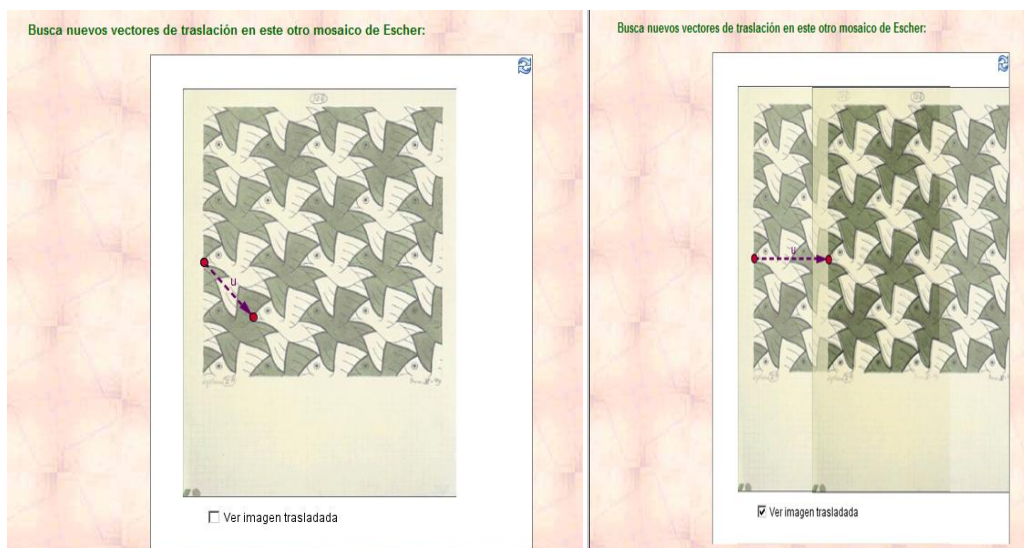


Figura 43. Situación 2.15. Traslación con mosaicos.

Las situaciones 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5 se pueden considerar de validación ya que se busca convencer a los interlocutores de la validez de las conjeturas que se formulan según sus acciones con el medio. El tipo de arrastre de las situaciones 2.1.4 y 2.1.5 es de test pues al arrastrar los puntos de los vectores permite explorar las propiedades que caracterizan una traslación las cuales son la magnitud, la dirección y el sentido.

Estas situaciones se podrían implementar en nuestro contexto para el pensamiento espacial y sistemas geométricos para los grados sexto a séptimo según los siguientes estándares:

- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

3.3.3 Situaciones de Simetría Axial.

En las situaciones de la sección 2.2 se aborda la simetría axial, estas situaciones son de formulación, pues busca que de la interacción entre los alumnos y el medio, apoyada en fotografías que logren movilizar una definición del concepto de simetría axial a partir de las preguntas que se formulan.

La situación de presentación de la simetría axial parte de una imagen de la naturaleza, una flor, a la que se le ha trazado el eje de simetría y a partir de la animación se observa que aunque parecerá simétrica hay algunas imperfecciones.

Entonces los alumnos con esta situación pueden analizar las dos características que se mencionan en la situación, esto es, cada una de las mitades es la imagen especular de la otra mitad y si al plegar el papel por el eje las dos partes coinciden. (Ver Figura 44)



Figura 44. Situación 2.2.

Las situaciones 2.2.1 son de formulación y están compuestas por dos applets con la imagen de un animal y un arco que tienen simetría axial. En ellos se puede mover el deslizador verde que hay a la izquierda para comprobar cómo da la vuelta la imagen para coincidir con la original. Tiene como variable didáctica la misma de la situación anterior, es decir, el eje de simetría. (Ver Figura 45).

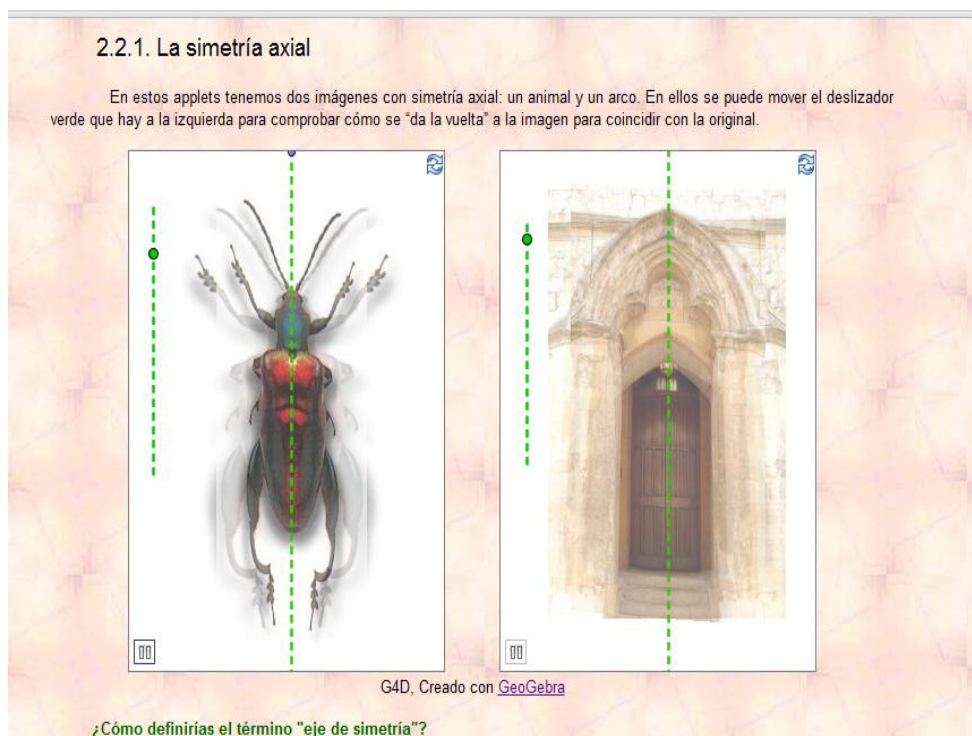


Figura 45. Situación 2.2.1.

El tipo de arrastre de las situaciones 2.2 y 2.2.1 descritas anteriormente es test porque permite la verificación de la coincidencia de las fotografías según el eje de simetría trazado.

En la situación de la sección 2.2.1 tiene como nombre "La máscara" es una situación de validación que tiene como objetivo que el alumno cree un diseño simétrico de una máscara al dibujar los trazos de una de las dos partes bajo el principio del pantógrafo.

Esta situación permite desplazar el punto de la izquierda y generar un punto simétrico a éste, respecto al eje que se encuentra en la pantalla. Esta transformación se realiza de manera puntual y debe formar una figura simétrica.

Esta situación tiene como variable didáctica la visualización del eje de simetría y una casilla “dejar rastro” en la parte superior, si se encuentra activa permite dejar una marca del trazo del punto a su paso y si no está activa no deja el rastro en la pantalla. (Ver Figura 46)

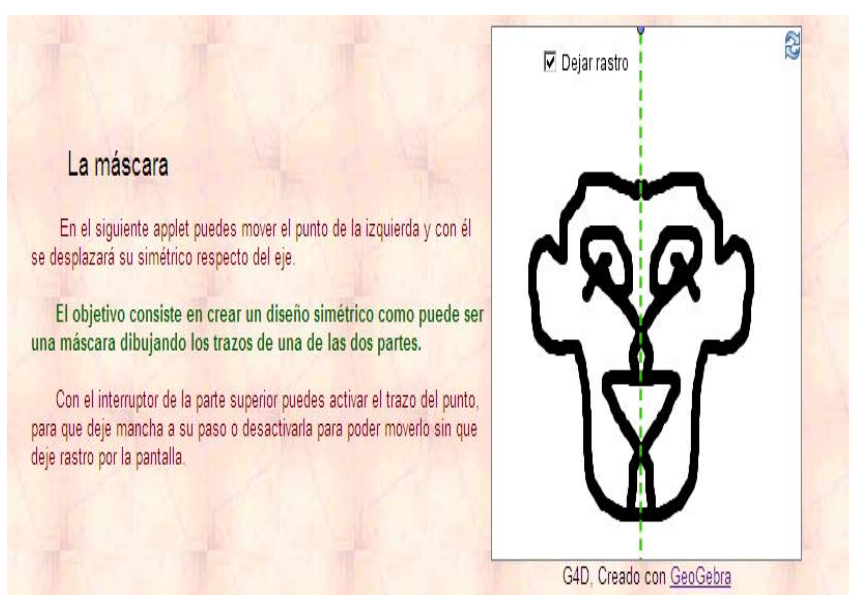


Figura 46. Situación 2.2.1. Simetría de la máscara.

En esta situación el tipo de arrastre bola de cristal puesto que la retroacción es hacer visible que al mover el punto de la izquierda se genera un trazo simétrico respecto del eje dado.

La situación de la sección 2.2.2 es una situación de acción que tiene por nombre simetría bilateral consta de dos applets construidos a partir de las dos mitades de la fotografía de una persona: la cual se ha recortado en dos partes la izquierda por un lado y la derecha por otro, el tipo de arrastre es test porque permite verificar mediante el deslizador verde que las fotografías no guarda una relación simétrica pues no se genera una fotografía idéntica (Ver Figura 47).

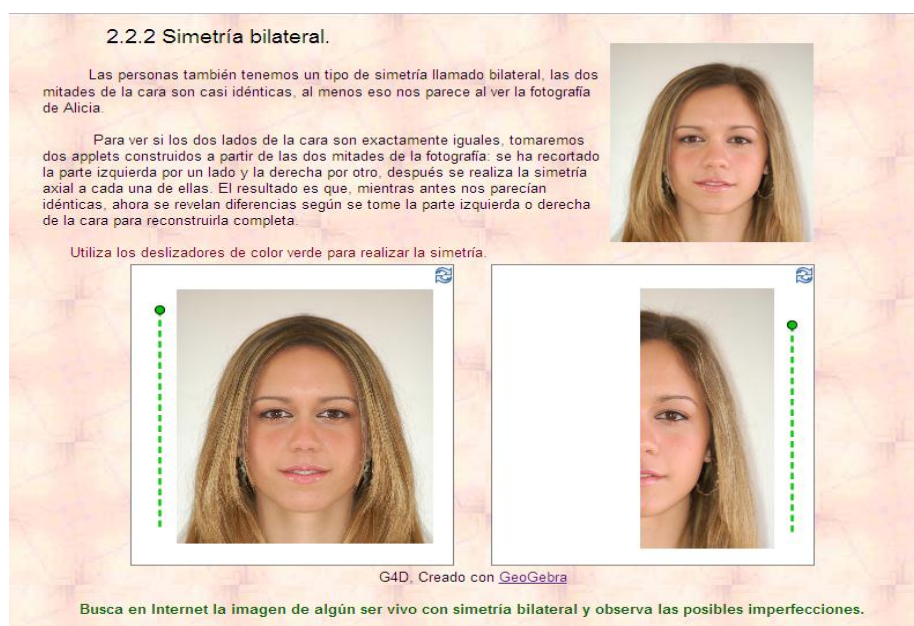


Figura 47.Situacion 2.2.2

La segunda situación de la sección 2.2.2 es de validación y tienen dos imágenes con la palabra SIMETRIA, a la cual se les ha realizado una simetría axial con eje horizontal y otra con eje vertical los cuales hacen parte de las imágenes, a simple vista se puede ver que hay una letra que se mantiene igual en los dos casos la I, otras que sólo en uno de ellos la A y M para el eje vertical, la E para el eje horizontal y otras que no tiene ningún eje de simetría como la R y S. (Ver figura 48)



Figura 48. Situación 2.2.2. Simetría horizontal y vertical de letras.

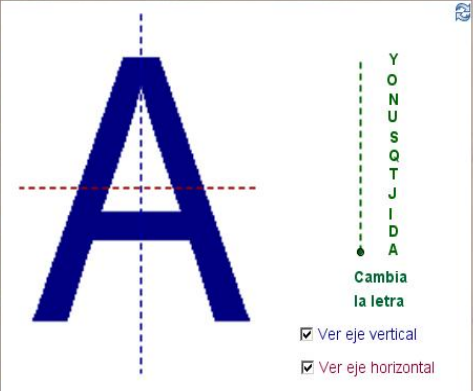
Con esta situación se busca que el alumno mediante la característica de la imagen especular identifique las letras que conservan su forma, esta característica es fundamental para entender el concepto de simetría axial que se quiere movilizar. Si se doblara la figura sobre el eje de simetría vertical u horizontal, se podría observar con toda claridad que los puntos de las partes opuestas coinciden, es decir, ambas partes son congruentes.

En la situación de la sección 2.2.3 se plantea estudiar los ejes de simetría a partir algunas letras con la ayuda de un applet que permite ver una a una cada letra. El deslizador verde de la derecha cambia la letra a estudiar. El alumno debe determinar cuántos ejes de simetría tiene cada letra, para ello puede hacer aparecer los posibles ejes de simetría el vertical y el horizontal de las letras, la activación de los ejes es considerado una variable didáctica puesto que su visualización afecta el nivel de razonamiento del alumno (Ver Figura 49).

2.2.3. Simetrías en las letras del abecedario.

Vamos a estudiar los ejes de simetría que tienen algunas letras con la ayuda de un applet, que permite verlas de una en una.

Con el deslizador verde de la derecha cambiamos la letra. Para cada una, podemos hacer aparecer los posibles ejes de simetría: el vertical y el horizontal.



G4D. Creado con [GeoGebra](#)

¿Qué letras tienen eje de simetría horizontal, eje de simetría vertical, ambos ejes o ninguno de ellos?

A la letra N le ocurre algo parecido a lo que se vio para la S en la página anterior, ¿cómo es posible cuando nos da una fuerte sensación de simetría?

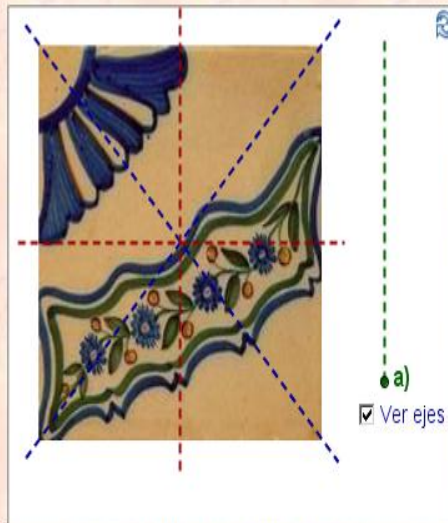
Figura 49. Situación 2.2.3.

El tipo de arrastre de 2.2.3 es tipo test porque al activar las casillas “ver eje vertical” y “ver eje horizontal” permite la verificación de los ejes de cada letra.

En la situación 2.2.4 se realiza la exploración a partir de baldosas de cerámica, hay ocho diseños diferentes de baldosas de cerámica del siglo XIX, la variable didáctica son los ejes de simetría de las baldosas y que se pueden explorar con la casilla “ver ejes”. Esta situación busca que el alumno identifique mediante fenómenos visuales el número de ejes de simetría de cada baldosa y máximo número de ejes que puede tener una baldosa cuadrada (Ver Figura 50).

2.2.4. Simetrías en las baldosas de cerámica.

En el siguiente applet aparecen ocho baldosas de cerámica del siglo XIX de la colección del Museo del Azulejo de Onda:



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Estudia cuántos ejes de simetría tiene cada una de las baldosas.

¿Cuál es el máximo número de simetrías que puede tener una baldosa cuadrada?

Figura 50. Situación 2.2.4.

El tipo de situación de 2.2.4 es de formulación pues los alumnos deben poder formular mediante la visualización el número de ejes de simetría de una baldosa y no se utiliza ningún tipo de arrastre, puesto que se pueden generar nuevas imágenes según el eje seleccionado, la restricción de esta situación está en que la figura permanece estática; solo se visualizan los diseños y no está activa la animación para corroborar las conjeturas realizadas.

En la situación 2.2.5 referente a la simetría en los cuadriláteros se busca que los alumnos exploren la cantidad de ejes de simetría que pueden tener los cuadriláteros y luego los clasifique según el número de ejes de simetría que tenga, cuando el número de

lados de un cuadrilátero coincide con el numero de ejes de simetrías se llama cuadrilátero regular de lo contrario el cuadrilátero es irregular (Figura 51).

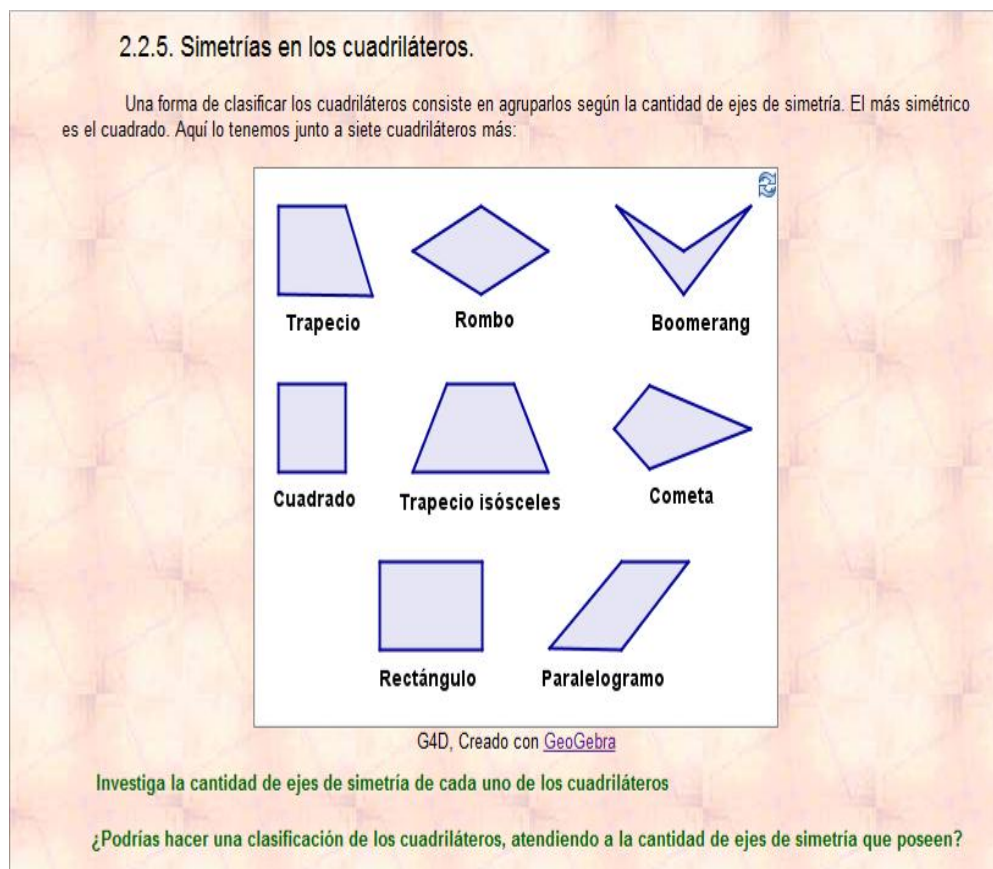


Figura 51. Situacion 2.2.5.

El tipo de situación es de formulación pues el alumno debe construir una clasificación de los cuadriláteros a partir de los ejes de Simetría que ellos mismos deben construir por tanto no hay ningún tipo de arrastre.

La situación 2.2.6 tiene por nombre “La Simetría de la mariposa” es un applet que simula el aleteo de la mariposa. En realidad lo que se ha hecho es tomar sólo una de las alas y representar en Geogebra la imagen simétrica para componer la mariposa completa,

este tipo de situaciones ya se habían realizado en la sección 2.2.2 Simetría bilaterales con un rostro humano. Esta situación busca que el alumno identifique la característica de plegar el papel por el eje de simetría y verificar que las dos partes coinciden, en este caso mediante la animación esta característica se puede validar cuando la mariposa tiene sus alas totalmente desplegadas, pues se puede observar que en la figura las pintas de color amarillo del lado de una de sus alas es simétrica respecto al otro (Ver Figura 52).



Figura 52. Situación 2.2.6. Simetría de la mariposa 1.

El tipo de arrastre en test porque permite la verificación de la coincidencia de las fotografías según el eje de simetría trazado.

La segunda situación de la sección 2.2.6, es otra de las situaciones que trabaja bajo el concepto del pantógrafo, el cual tiene como variables didacticas el eje de Simetría que hace parte de la fotografía, la transformación se realiza de manera puntual y permite identificar de manera visual si la construcción que realizan los puntos de la mariposa conservan la simetría. Además busca que los alumnos mediante la exploración logren dar instrucciones por escrito a alguien que las recibirá en un correo electrónico con el fin de

identificar y explicar los elementos a tener en cuenta para generar un punto simétrico de uno dado y determinar cuales permanecen invariantes (ver Figuras 53).

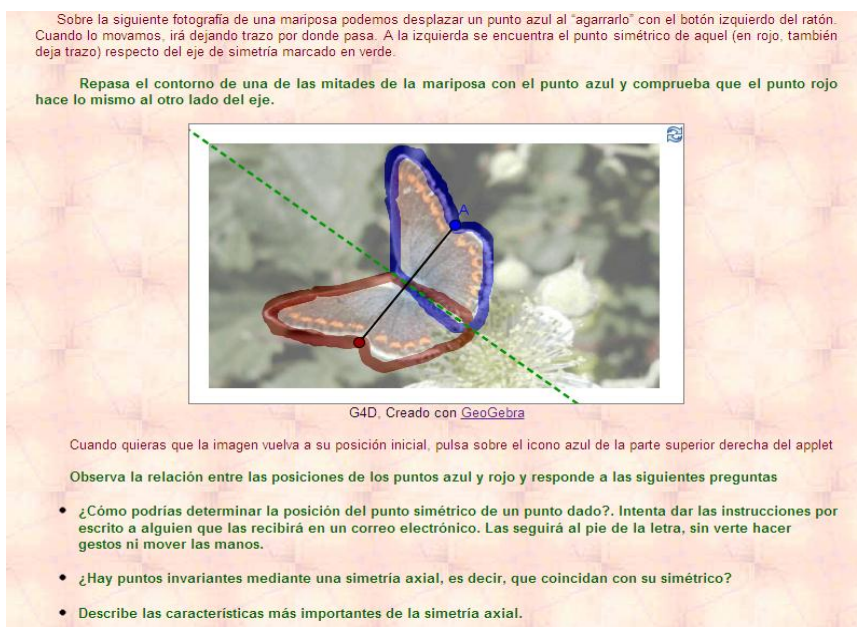


Figura 53. . Situación 2.2.6.Simetría de la mariposa 2.

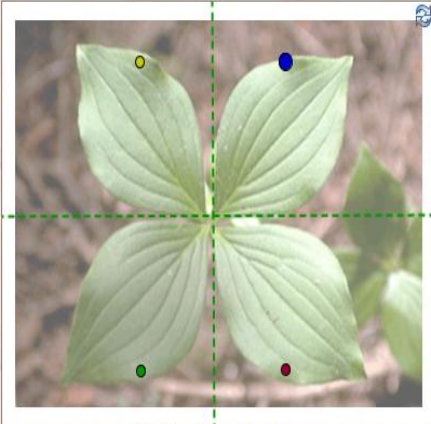
En esta situación el tipo de arrastre es bola de cristal puesto que la retroacción es visualizar que al mover el punto azul se genera un trazo simétrico respecto del eje dado.

La situación 2.2.7 estudia la composición de simetrías "Las hojas" está diseñada para que los alumnos a partir de dos ejes de simetría perpendiculares identifiquen lo que ocurre al mover el punto azul para obtener los puntos simétricos respecto de todos los ejes de simetría, de esta manera el punto amarillo se genera a partir del eje de simetría vertical, el rojo a partir del eje de simetría horizontal y la composición de simetría se realiza para generar el punto verde, al utilizar los dos ejes de simetría, esto se puede realizar de dos formas diferentes: la primera al utilizar el punto amarillo generado se aplica una nueva simetría utilizando el eje horizontal lo que genera el punto verde, la segunda forma se presenta al utilizar el punto rojo generado y aplicar una nueva simetría utilizando el eje vertical se genera el punto verde. (ver Figura 54)

2.2.7. Composición de simetrías. Las hojas.

Ahora estudiaremos la composición de dos ejes de simetría. Sólo será posible mover el punto azul oscuro para obtener los puntos simétricos respecto de todos los ejes de simetría como si fuera un caleidoscopio (<http://es.wikipedia.org/wiki/Caleidoscopio>).

Estos nuevos puntos también dejarán el trazo, cada uno en un color distinto. Se ha preparado un applet sobre una fotografía de unas hojas.



G4D, Creado con GeoGebra

Describe lo que ocurre cuando realizas dos simetrías consecutivas a una figura cuando los ejes son perpendiculares.

Figura 54. Situación 2.2.7.

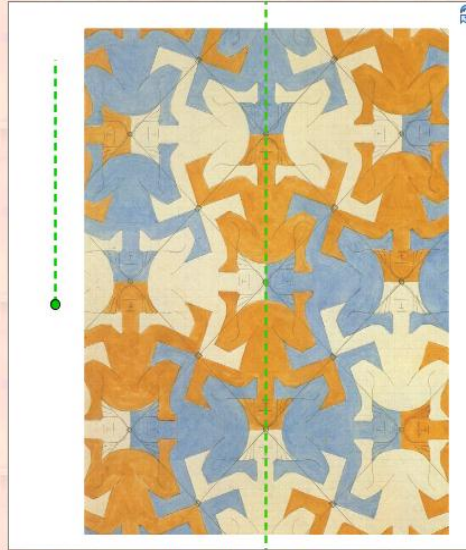
En esta situación el tipo de arrastre es bola de cristal puesto que la retroacción es mostrar que al mover el punto azul se genera un trazo simétrico respecto de los ejes dados.

La situación 2.2.8 simetría en los mosaicos es una situación de acción que tiene como tema la simetría axial aplicada al campo de las artes decorativas con el análisis geométrico de los mosaicos a partir del eje de simetría que hace parte del mosaico, en él no se tienen en cuenta los colores, sólo las formas de las figuras al hacerlas coincidir, este mosaico cumple con las dos características de la simetría, es decir, se puede ver como una figura espejular y al plegar el papel las dos partes forman la figura original. (Figura 55)

2.2.8. Simetrías en los Mosaicos.

Vamos a aplicar la simetría axial al campo de las artes decorativas con el análisis geométrico de los mosaicos.

Un mosaico es un diseño que recubre completamente el plano formado por una o varias baldosas, que se unen unas a otras sin dejar huecos y sin solapamientos. Para nuestro estudio, utilizaremos mosaicos con piezas que se repiten: los matemáticos han estudiado en profundidad los mosaicos de la Alhambra de Granada y los del diseñador holandés M.C. Escher, entre otros. De este artista holandés es el siguiente mosaico, en el que la baldosa tiene forma de hombre colocado en posición de cuclillas en tres colores y cuatro orientaciones distintas.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

La recta punteada es un eje de simetría del mosaico, es decir, si obtenemos el mosaico simétrico respecto de la recta (en el applet se da media vuelta en el espacio al mosaico alrededor del eje), todo él vuelve a coincidir con el original. Esa coincidencia no tiene en cuenta los colores, sólo las formas. No nos importa que una figura azul caiga sobre una naranja, sino que cada figura coincida exactamente sobre otra igual que ella.

Figura 55. Situación 2.2.8.

El tipo de arrastre que se usa es el test, puesto que la retroacción corresponde a la verificación de la conservación de las propiedades geométricas y de la dependencia de los movimientos.

En la situación 2.2.9 ejes de Simetría en los mosaicos 1 esta situación consta de un applet que permite ver una secuencia de cuatro mosaicos al modificar el deslizador verde de la derecha. En cada uno de ellos podemos activar la casilla “Ver imagen simétrica”, esto nos permitirá ver el mosaico simétrico respecto de la recta que actúa como eje de simetría, al utilizar eje de simetría dado los alumnos al activar la casilla

podrán corroborar que se genera una figura simétrica, la que coinciden en forma pero no necesariamente en color para las figuras a, b, y d.

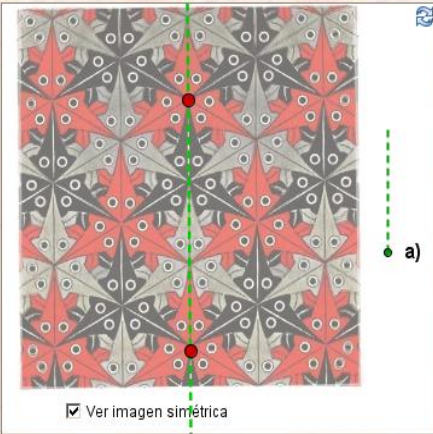
También el alumno puede encontrar nuevos ejes de simetría en cada mosaico al modificar la recta, al igual que en la anterior situación se puede activar o no la casilla “ver imagen simétrica”, ésta es considerada una variable didáctica puesto que el nivel de abstracción es diferente en los dos casos (ver Figura 56).

2.2.9. Ejes de simetría en los mosaicos (1)

El siguiente applet permite ver una secuencia de cuatro mosaicos al modificar el deslizador verde de la derecha. En cada uno de ellos podemos activar la casilla “Ver imagen simétrica”, esto nos permitirá ver el mosaico simétrico respecto de la recta.

Para encontrar los ejes de simetría de cada mosaico es posible modificar la recta de dos formas distintas: si la “agarras” con el ratón de alguno de los dos puntos marcados en rojo, cambia la inclinación (y con ella el mosaico simétrico). Si coges la recta de alguna de las zonas verdes, la desplazas “en una dirección paralela” y el mosaico simétrico parece deslizarse.

Cuando se estudia uno de los mosaicos, a veces es conveniente llevar la recta a un lado (sin que desaparezca completamente de la pantalla), observar bien el mosaico para encontrar un eje de simetría y después llevar la recta a ese lugar para comprobar la conjetura.



Obtén el número de direcciones diferentes (dos líneas paralelas son la misma dirección) sobre los que tienen ejes de simetría cada uno de los cuatro mosaicos que puedes ver en el applet moviendo el deslizador de la derecha.

Dibuja en tu cuaderno un boceto del entramado de ejes de simetría que se produce en cada mosaico e intenta introducir, dentro de la trama que se genera, un pequeño dibujo que se repita en todo el diseño.

Figura 56. Situación 2.2.9.

Tipo de situación es de formulación pues el alumno debe formular a partir de lo explorado con el applet un nuevo mosaico y tipo de arrastre es test porque permite

verificar la coincidencia de los mosaicos a partir de los ejes de simetría que se pueden explorar mediante el arrastre.

En la situación 2.2.10. Ejes de simetría en los mosaicos 2 el applet tiene el mismo diseño de la situación anterior pero esta situación tiene una restricción no brinda la posibilidad de proporcionar los ejes y la imagen simétrica. Esta situación es de formulación pues el alumno debe dar su respuesta a partir de la exploración realizada con la situación anterior al indicar el número de direcciones diferentes de los ejes de simetría de cada uno de los cuatro mosaicos (Figura 57).



Figura 57. Situación 2.2.10.

Las situaciones de la sección 2.2.1 ,2.2.3 a la 2.2.10 son situaciones de formulación con excepción de la situaciones 2.2.2 y 2.2.8 las cuales son de acción. Estas situaciones se podrían implementar en nuestro contexto para el estudio del pensamiento espacial y sistemas geométricos de los grados de octavo a noveno según los siguientes estándares:

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

3.3.4 Situaciones de Simetría Rotacional.

Las situaciones de la sección 2.3.1 tienen como tema la simetría rotacional, la situación inicial es de validación y se presenta para que los alumnos recuerden la definición de rotación para ello se usa un applet en el que hay que pensar y visualizar cuál es la rotación del triángulo azul que ha sido girado 90° con centro en un punto exterior O y cuál de los tres triángulos dados indica la rotación correcta, luego de este razonamiento se puede activar la casilla “Ver solución”, donde aparecerá una línea de puntos en la parte superior que indica el ángulo de la rotación α , que muestra la animación al desplazar el punto hacia la derecha (Figura 58).

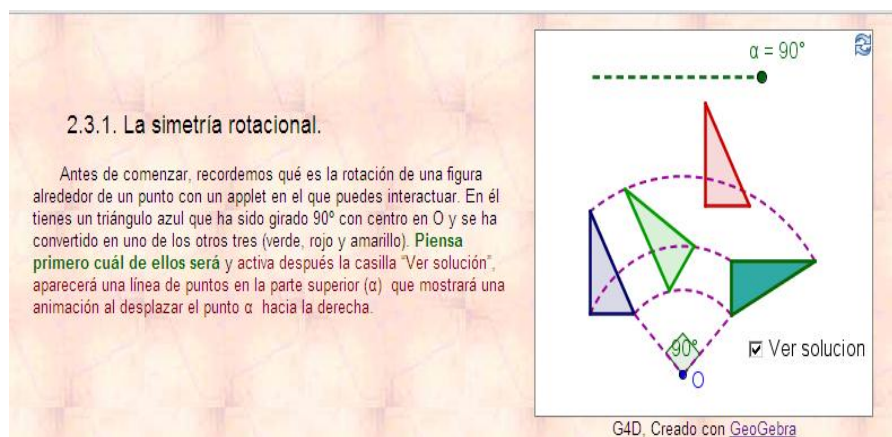


Figura 58. Situación 2.3.1

El tipo de arrastre que se usa es test, puesto que la retroacción corresponde a la verificación de la rotación del triángulo azul el cual se ha girado 90° y que permite ver las propiedades geométricas y la dependencia de los movimientos.

La segunda situación de presentación de la sección 2.3.1 se define centro de simetría, la simetría rotacional y el orden de una simetría rotacional, para ello los alumnos deben probar a partir de la exploración de la imagen que al realizar rotaciones de 120° alrededor del punto rojo el cual es el centro de la rotación y que hace parte de la imagen generada coincide con la original y eso ocurrirá cada vez que demos un nuevo giro como ese. En estos casos se dice que una figura tiene simetría rotacional. Esta Situación es de validación pues el alumno debe observar cuántas veces coincide la figura en su rotación y además debe anotar los ángulos de giro en que se produce para comprobar la definición y orden de la simetría rotacional todo este lo puede identificar gracias al arrastre y la visualización. (Figura 59)

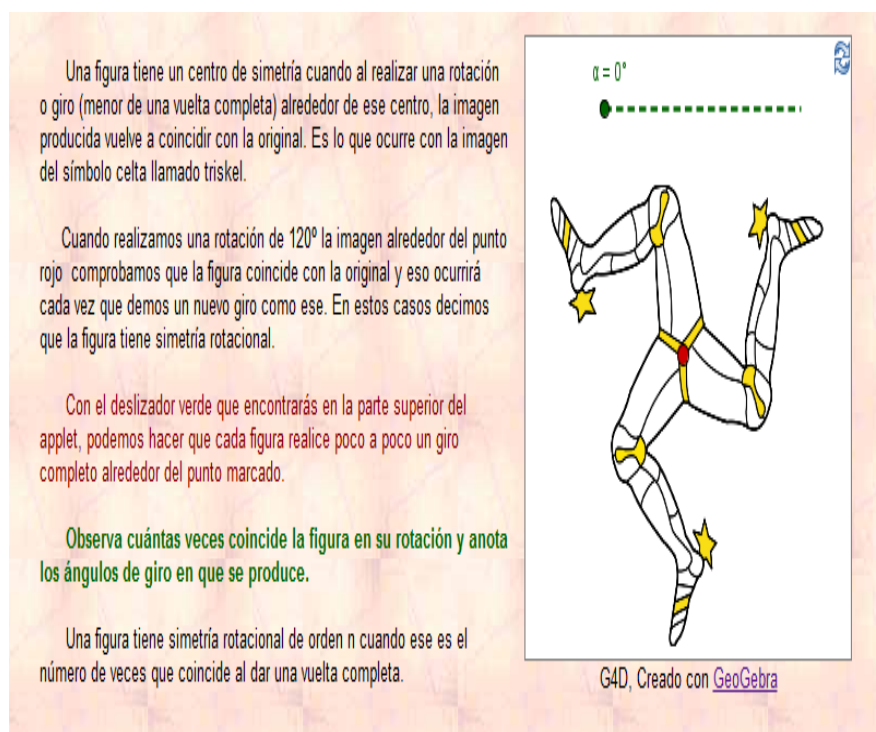


Figura 59. Simetría rotacional

La situación 2.3.2 se llama simetría rotacional en letras y símbolos, busca afianzar el concepto de simetría rotacional, aclarando que cuando una figura no tiene simetría rotacional puede ser llamada de orden 1 pues sólo coincide al dar una vuelta completa

Para esta situación se hace uso del estudio de la simetría que tienen algunas letras del abecedario con la ayuda de un applet donde el deslizador azul de la derecha cambiamos la letra y las variables didácticas representadas por el centro de la rotación que en el caso de la B, I, S T, H, Y, se encuentran sobre las letras, y para el caso de C, O, Q y V no, el deslizador verde muestra el ángulo de giro que permite realizar la rotación y ver cuando coinciden o no las letras rotadas. Esta situación tiene una casilla en la parte inferior derecha que permite mantener u ocultar la figura inicial mientras se realiza el giro. Esta situación es de acción pues mediante la interacción del alumno con el medio debe ser capaz de responder qué letras tienen simetría rotacional y el orden. (Figura60)

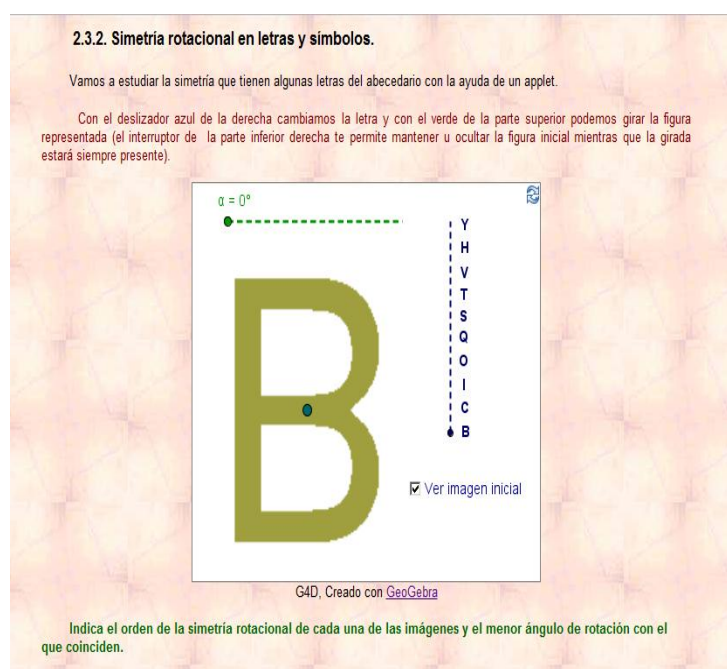


Figura 60. Situación 2.3.2

En las situaciones 2.31 del “celta” y 2.3.2 el tipo de arrastre es test pues se busca que a partir del arrastre del deslizador el alumno puede reconocer las propiedades de la simetría rotacional explícitas en las situaciones.

La situación 2.3.3 se llama las baldosas de cerámica en este applet aparecen ocho baldosas al mover el deslizador azul. Estas situaciones tienen restricciones ya que solo se puede visualizar los diseños, además no está activa la animación que permite visualizar los ángulos de rotación en donde las figuras coinciden para comprobar las conjeturas (ver Figura 56)



Figura 61. Situación 2.3.3.

El tipo de situación es de formulación pues el alumno debe responder a partir de lo explorado anteriormente el orden de la simetría rotacional de cada baldosa si tiene, además de diseñar una nueva baldosa con las características ya trabajadas. No tiene tipo de arrastre ya que no se puede mover ningún punto básico de la figura para comprobar las propiedades de la simetría rotacional en baldosas.

En la situación 2.3.4 se estudia la simetría central de una figura y consta de tres situaciones:

Esta situación está diseñada para que los alumnos reconozcan dos formas de realizar el mismo movimiento de un punto P, tomando como centro el punto O el cual es la variable didáctica de esta situación y que permite explorar esta situación a los alumnos a partir de la activación de la casilla “ver líneas auxiliares” luego activar la casilla “rotación

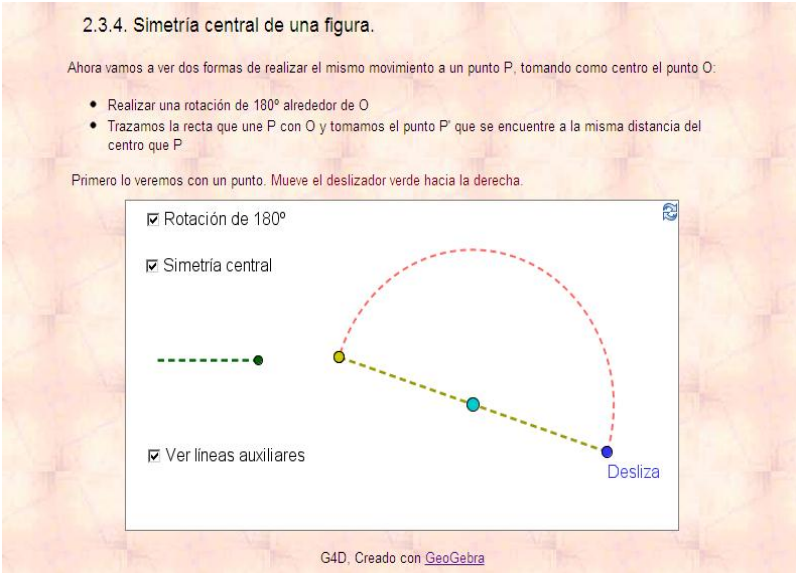


Figura 62. Situación 2.3.4.

En esta situación la simetría central se explica al emplear la transformación aplicada a una bandera; mediante la variable didáctica que en este caso es un punto verde que actúa como centro de giro el cual es un punto libre en la pantalla y el que permite realizar la simetría con respecto a un deslizador rojo que realiza la rotación de 180° , y al activar la casilla “ver líneas auxiliares” se puede ver como se realiza el movimiento en cada caso para obtener la misma figura pero en diferente posición (ver Figura 63).

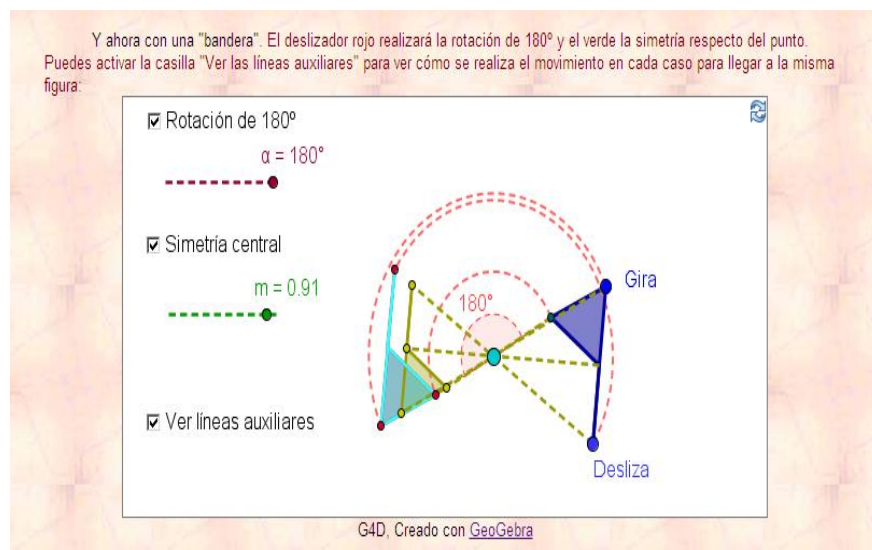


Figura 63. Simetría central de una figura

Esta dos primeras situaciones son de acción pues se busca que mediante la interacción del alumno con el medio comprenda la definición de Simetría central. El tipo de arrastre es test por que al activar las casillas de las situaciones se puede explorar las propiedades y carateristicas de la Simetría central.

La última situación tiene cinco apartados para cada uno de ellos aparece un punto rojo que recorre una figura geometrica, segmento, circulo, triangulo, cuadrado y hexagono, de tal forma que el punto verde se desplaza de manera simetrica respecto al punto O, se debe encontrar el punto O que permite que el punto verde genere la misma figura, en esta situación la variable didáctica es el el punto O el cual se puede explorar por fuera de las figuras o dentro de ellas como en el caso del segmento que se debe ubicar en el punto medio, para el cuadrado y el hexagono en la intersección de las diagonales, para el circulo en el centro y para el triangulo no se puede conseguir que el punto verde que lo recorra. (Figura 64).



Figura 64. Simetría central en figuras geométricas.

Esta situación es de formulación pues de la interacción del alumno con el medio puede explorar la ubicación del punto O el cual siempre debe estar en el punto medio de las figuras con excepción del triángulo, para que la simetría central quede invariante, el tipo de situación es de arrastre arratico ya que el alumno debe mover el punto O aleatoriamente con el fin de determinar las propiedades y características de la simetría central.

La situación 2.3.5 “la simetría de la puerta” se utiliza para la estudiar simetría central a partir de una fotografía, esta situación trabaja bajo la noción del pantógrafo, para poder explorar los alumnos deben mover el punto rojo para observar las marcas que dejan ese punto y su simétrico verde lo que permitirá al alumno observar las semejanzas y diferencias entre las direcciones de los movimiento de los puntos, para esto el alumno debe trazar una única recta entre los dos puntos para ello debe tomar el punto rojo y

arrástralo hasta el punto O para que se una con el verde y forme una línea recta, o para conseguir dos líneas paralelas debe arrastrar el punto rojo de manera vertical que al mismo tiempo mueve el punto verde los cuales dejan una traza que genera las líneas paralelas y para que sea perpendicular debe mover el punto de manera horizontal. Estas exploraciones sirven para establecer que las marcas que dejan los puntos están relacionadas por un giro de 180° . (Figura 65)



Figura 65 . Situación 2.3.5.

El tipo de situación es de acción pues de la interacción del el alumno con el medio debe poder identificar y argumentar las propiedades de la simetría que permita dar las respuestas a las preguntas planteadas en la situación a partir de lo que pudo visualizar mediante el arrastre del punto rojo. El tipo de arrastre bola de cristal puesto que la retracción es mostrar que al mover el punto rojo se genera un trazo simétrico respecto al punto verde.

La segunda situación de la sección 2.3.5 es un logotipo con una simetría rotacional en esta situación nos dan el orden de la simetría rotacional y el ángulo de rotación a partir del punto O el cual hace parte del logotipo, en este applet se desplaza el punto rojo A el cual mueve los otros dos A2, A3 que también dejan trazo a su paso y esta situación está diseñada para explorar el sentido de los giros (Figura 66).

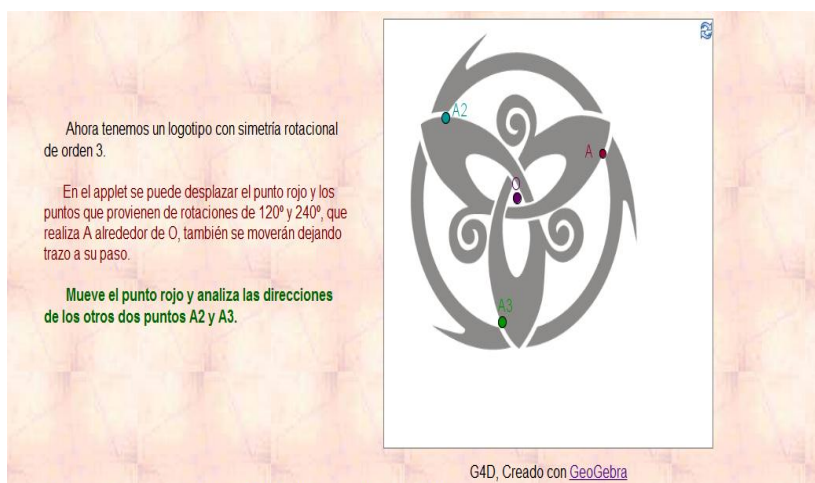


Figura 66. Simetría rotacional de un logotipo.

El tipo de situación es de validación pues se busca que el alumno a través de la interacción con el applet logre dar validez a las afirmaciones que se presenta en la situación, el tipo de arrastre es bola de cristal puesto que al mover el punto rojo, se deja descubierta la propiedad de dependencia del movimiento de los otros puntos que intervienen en la situación y que conservan los ángulos de giro que se realizan alrededor de O permitiendo descubrir una propiedad en cuanto al sentido de la rotación que no influye en la comprobación de la situación.

Las situaciones de la sección 2.3.6 se llaman simetría rotacional en los mosaicos y se proponen con el fin de ver si los alumnos tienen claro el concepto de simetría rotacional a partir de la exploración, al utilizar el deslizador de color azul el cual indica el ángulo de rotación del mosaico a partir del punto rojo el cual hace parte del mosaico, este giro

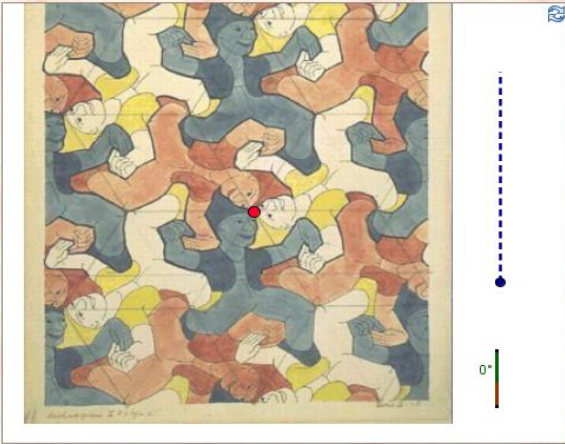
permite ver si el mosaico coincide cada vez que se da un giro de 120° y si la simetría rotacional de orden 3 en ese punto.

Otro punto de esta situación consiste en que los alumnos estudien e investiguen otros centros de rotación distintos a los que hay en las frentes de los hombres. Se tiene que llevar el punto rojo a otras posiciones y luego se gira el mosaico con el deslizador para que encuentre otras simetrías rotacionales y su orden. (Figura 67)

2.3.6. Simetría rotacional en los mosaicos.

Un mosaico es un diseño que recubre completamente el plano formado por una o varias baldosas que se unen unas a otras sin dejar huecos y sin que se solapen unas sobre otras. Utilizaremos mosaicos con piezas que se repiten: los matemáticos han estudiado en profundidad los mosaicos de la Alhambra de Granada y los del diseñador holandés M.C. Escher entre otros.

El siguiente mosaico es de M.C. Escher. La baldosa tiene forma de hombre corriendo en tres colores y orientaciones distintas: los grises van de izquierda a derecha, los amarillos suben y los marrones bajan.



A la derecha tenemos un deslizador. la recta punteada de color azul, cuando desplazas el punto hacia la parte superior, una de las copias del mosaico gira alrededor del punto rojo. Comprobaremos que cada vez que damos un giro de 120° el mosaico vuelve a coincidir consigo mismo (aunque los hombres de un color se superpongan sobre los de otro color, sólo nos importan las formas). El mosaico tiene una simetría rotacional de orden 3 en ese punto.

Investiga otros centros de rotación distintos a los que hay en las frentes de los hombres. Lleva el punto rojo a otras posiciones y haz girar el mosaico con el deslizador.

Figura 67. Simetría rotacional en mosaicos 1.

El tipo de situación es de acción pues mediante la interacción que tiene el alumno con el medio debe ser capaz en primera instancia de reconocer la simetría rotacional dada para luego encontrar nuevas simetrías y su orden. El tipo de arrastre es test, puesto que el arrastre del deslizador permite comprobar las nuevas posiciones del punto rojo, para evidenciar las propiedades de la simetría rotacional.

La otra situación de la sección 2.3.6 busca que el alumno a través del applet investigue posibles centros de rotación en otro mosaico de M. C. Escher, en él se han colocado seis puntos. Y un punto rojo el cual indica el centro de giro que además puede ser colocado sobre los otros puntos para hacer girar el mosaico y con el deslizador verde se marca el ángulo, esta situación permite estudiar los centros de simetría y el orden de la simetría rotacional del mosaico en cada uno de los puntos. (Figura 68)



Figura 68. Simetría rotacional en mosaicos 2.

El tipo de situación es de acción pues a partir de la exploración del alumno con el applet debe ser capaz de encontrar para cada punto si genera o no una simetría rotacional. El tipo de arrastre test pues se debe probar el punto rojo en cada uno de los otros puntos dados, para ver cuáles de ellos cumplen las propiedades de la simetría rotacional.

La sección 2.3.7 tiene por nombre “Mosaicos con Simetría rotacional 2” esta conformada por una situación contiene seis applets, con los cuales el alumno debe

averiguar mediante los conocimientos obtenidos en las otras situaciones si tienen simetría rotacional en los puntos marcados y su orden.

Y en la situación 2.3.8 presenta un applet con seis nuevos mosaicos que se pueden ver utilizando el deslizador azul de la derecha en estas situación también se debe indicar el orden de todas las simetrías rotacionales que se puedan encontrar a partir los conocimientos obtenidos en las otras situaciones. (Figura 69)

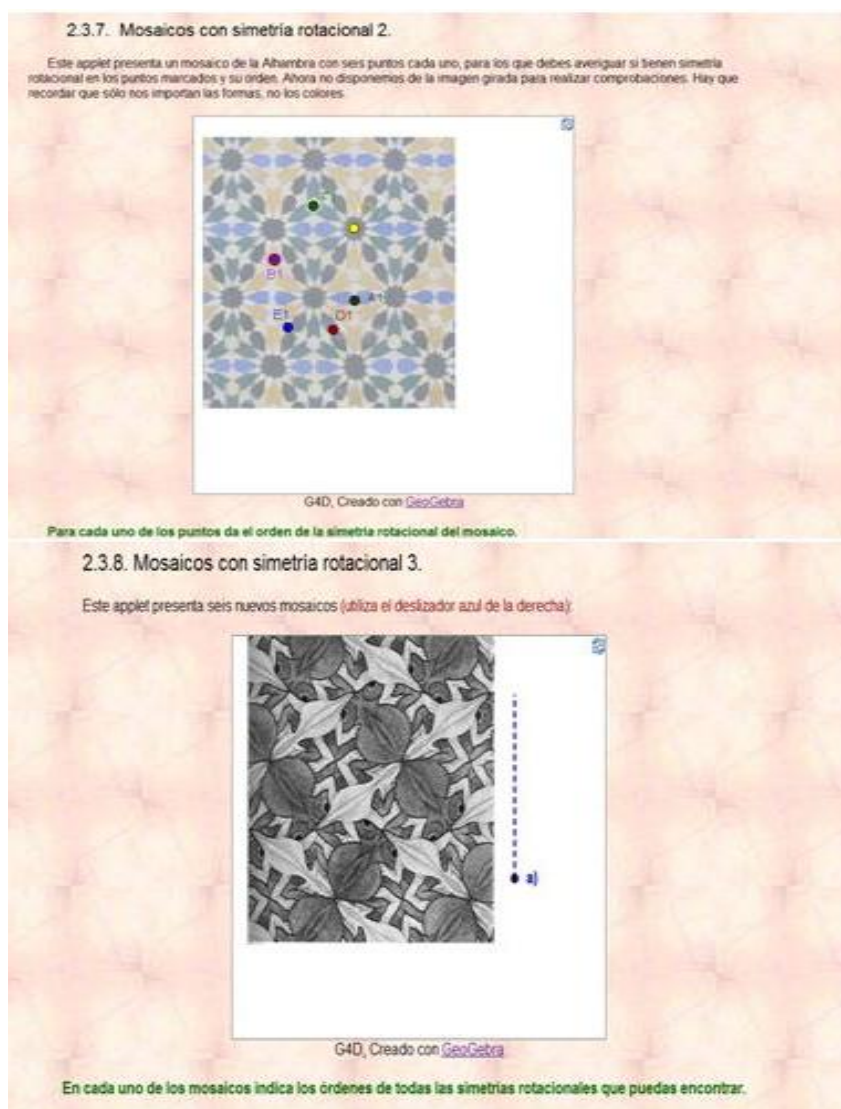


Figura 69. Simetría rotacional en mosaicos 3.

Las situaciones de la sección 2.3.7 a la 2.3.8 son situaciones de validación pues buscan que los alumnos elaboren conjeturas y establezcan la veracidad de sus afirmaciones desde las propiedades de la simetría rotacional. Estas situaciones no tiene tipo de arrastre debido a la restricción de las figuras las cuales permanecen estáticas y sólo se pueden visualizar los diseños y no tiene activa ninguna animación que permita comprobar las conjeturas que el alumno puede pensar de la situación.

Estas situaciones se podrían implementar en nuestro contexto para el pensamiento espacial y sistemas geométricos para los grados Décimo a undécimo según el siguiente estándar:

- Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

3.3.5 Situaciones de Simetría con Deslizamiento.

La situación 2.4.1 propone el tema de la simetría con deslizamiento y está diseñada para que los alumnos tenga un primer acercamiento a la simetría de deslizamiento; esta situación utiliza un deslizador para dar vuelta a la imagen de forma que los brotes de la flor cambian de lado y después se traslada la fotografía hacia la parte superior con un vector paralelo al eje, para que cada brote se sitúe sobre el siguiente (Figura 70).

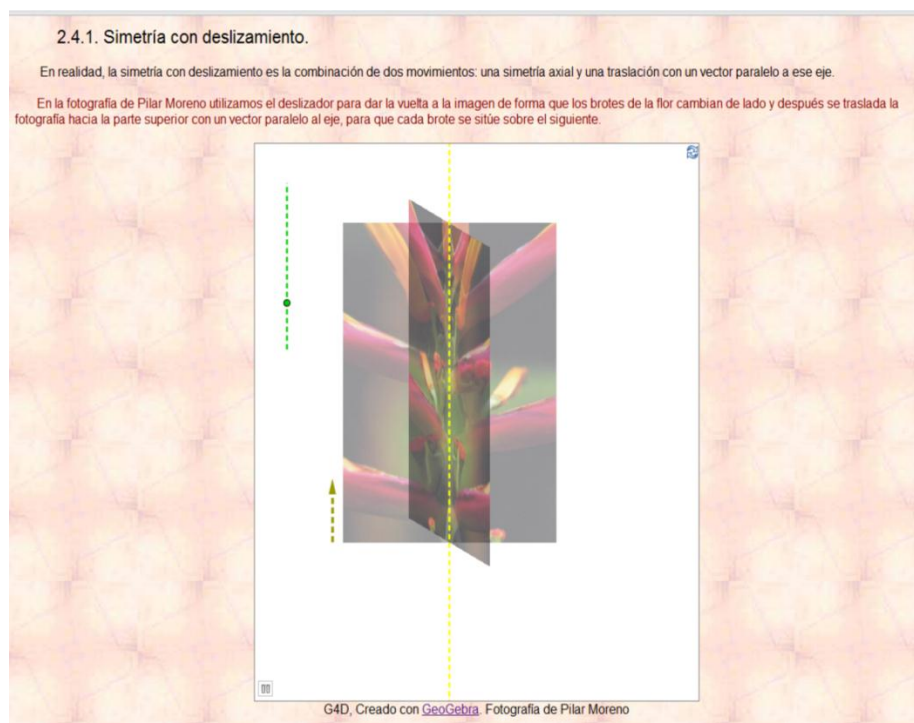


Figura 70. Situación 2.4.1.

El tipo de arrastre es test porque permite verificar la coincidencia de la fotografía según el eje de simetría y el vector trazado.

La sección 2.4.2 presenta la simetría con deslizamiento con un ejemplo de las huellas que dejan nuestros pies al caminar en la arena para que el alumno explore los movimientos de ésta transformación que en esta situación se obtiene por una combinación de la simetría axial y un desplazamiento hacia adelante con un vector paralelo al eje de simetría.

Esta situación trabaja con el principio del pantógrafo, pues se repasar la silueta de uno de los pies con el punto azul y al mismo tiempo se activa el rojo, el cual deja un rastro idéntico sobre las siguiente pisada del otro lado del eje. (Figura 71)



Figura 71. Situación 2.4.2.

El tipo de arrastre bola de cristal puesto que la retroacción es mostrar que al mover el punto azul se genera un trazo simétrico del punto rojo con respecto al eje de simetría y al vector dado.

La situación 2.4.3 trabaja con mosaicos esta situación representada por un applet que permite explorar los movimientos de la simetría con deslizamiento, el mosaico tiene un eje representado por una línea de puntos de color amarillo, un deslizador verde que el alumno debe mover para ver la simetría axial y la traslación según el vector representado a la derecha (Figura 72).

2.4.3. Simetría con deslizamiento en los mosaicos

A pesar de ser un movimiento en dos pasos, combinación de otros dos movimientos, es importante en el estudio de los mosaicos porque en algunos casos un mosaico puede tener ejes de simetría con deslizamiento sin que tenga ejes de simetría.

En el applet se ha realizado una secuencia de movimientos: en el primero, se realiza la simetría axial del mosaico respecto del eje representado por una línea de puntos de color amarillo. Acto seguido, se realiza una traslación según el vector representado a la derecha. Un nuevo vector (rojo) representa el deslizamiento realizado hasta ese momento.

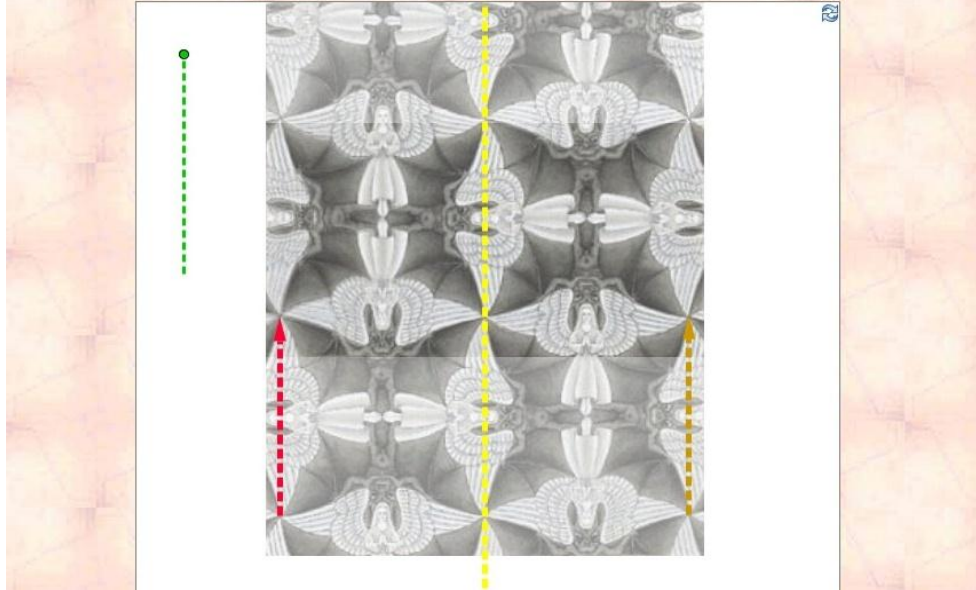


Figura 72. Situación 2.4.3.

El tipo de arrastre es el test pues a partir del deslizador verde se permite la verificación de las propiedades que caracterizan la simetría con deslizamiento.

La sección 2.4.4 prácticas de Simetría con Deslizamiento, presenta dos mosaicos de Escher para que los alumnos estudien los ejes de simetría con deslizamiento para esta exploración se puede cambiar el eje en otras direcciones. También se puede modificar también la longitud del vector de traslación para encontrar otras simetrías con deslizamiento en estos mosaicos. (Figura73)



Figura 73. Situación 2.4.4.

El tipo de arrastre es errático pues los ejes de simetría y los vectores se pueden mover aleatoriamente, sin ningún plan para descubrir las nuevas simetrías con deslizamiento en los mosaicos.

Las situaciones de las secciones 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 y 2.4.4 son situaciones de acción pues los alumnos deben interactuar con el medio para apropiarse del concepto de simetría de deslizamiento. Estas situaciones se podrían implementar en nuestro contexto para el pensamiento espacial y sistemas geométricos para los grados sexto a séptimo según el siguiente estándar:

Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

3.3.6 situaciones de profundización

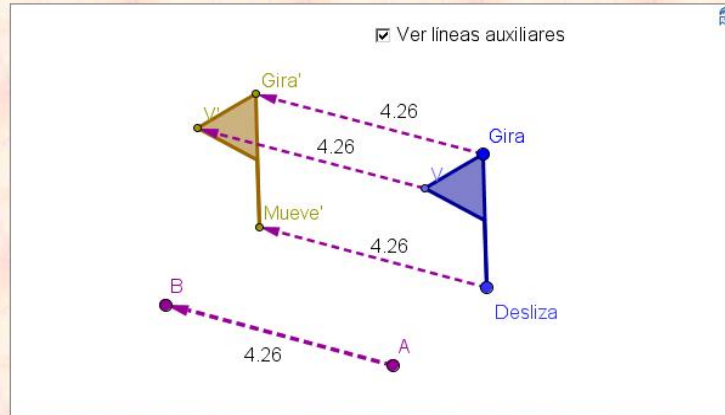
La situaciones sección 2.5 profundizar el estudio de las características de los cuatro movimientos que se trabajaron en las secciones anteriores retomando las situaciones de la presentación de los movimientos.

La situación 2.5.1 permite que los alumnos exploren detalladamente el movimiento de traslación esta situación presenta una bandera trasladada por un vector la cual se puede desplazar y girar, esta situación moviliza este conocimiento mediante las variables didáctica que son; el vector que se puede mover por el centro y los extremos para ver qué ocurre con la traslación. Y al activar la casilla “ver líneas auxiliares” permite ver cómo se realiza la traslación, como se puede observar en la Figura 74, de manera puntual y determinar si hay algún punto invariante.

2.5.1. Traslación.

Aquí tienes una bandera trasladada por un vector.

Se puede desplazar y girar la bandera azul. También se puede mover el vector por el centro y los extremos y ver qué ocurre con la bandera trasladada.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Dado un punto, describe la forma más sencilla de obtener el punto trasladado por un vector.

¿Hay algún punto invariante por una traslación, es decir, algún punto que al ser trasladado se quede en el mismo lugar que el original?

Figura 74. Situación 2.5.1.

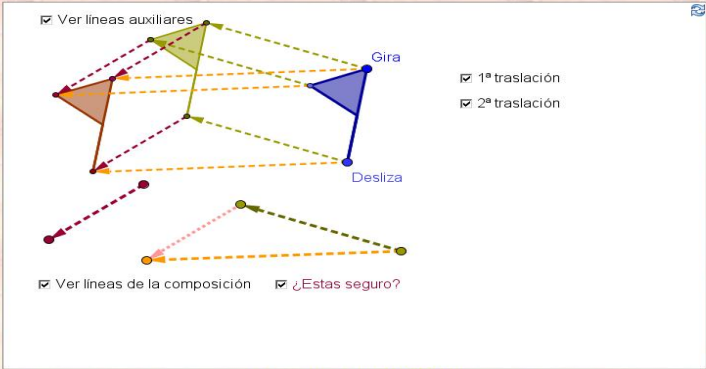
La situación 2.5.1.2 estudia la composición de traslaciones, mediante la exploración se busca que el alumno establezca el resultado de hacer dos traslaciones a una figura y si es posible pasar de una figura inicial a la final mediante un solo movimiento o viceversa es decir se busca que el alumno interprete que cualquier secuencia de dos traslaciones puede ser reemplazada por una única traslación (Figura 75).

2.5.1.2. Composición de traslaciones.

¿Cuál es el resultado de hacer dos traslaciones a una figura?, ¿se puede pasar desde la figura inicial a la final realizando un sólo movimiento?

El applet presenta inicialmente la primera de las dos traslaciones. Para ver la segunda traslación hay que activar el interruptor correspondiente. La casilla "Ver las líneas auxiliares" muestra con líneas de puntos cada uno de los dos movimientos individuales.

Cuando se pulsa sobre la casilla "Ver líneas de la composición" surge una nueva que pregunta "¿Estás seguro?". Tiene como finalidad que no se active hasta haber intentado dar la respuesta por uno mismo.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Investiga distintas posibilidades: mueve la figura, cambia los vectores de traslación y responde a las siguientes preguntas:

Describe de la forma más precisa posible con una frase el resultado de componer dos traslaciones. ¿Será siempre posible resumir la composición de dos traslaciones de esa forma?

¿Cómo podemos volver desde la figura trasladada a la figura inicial?

Figura 75.situación 2.5.1.2.

La situación 2.5.1.3 estudia la simetría axial mediante una bandera y su simétrica respecto a un eje, la figura se puede desplazar y girar, el eje de simetría también se puede desplazar en forma paralela o cambiar su inclinación.

Esta situación permite observar las características de la figura simetría de una dada, o desde un punto describir la forma más sencilla de obtener un punto simétrico respecto al eje o los puntos que permanecen invariantes en la simetría (Figura 76).

2.5.1.3. Simetría axial.

Ahora tenemos una bandera y su simétrica respecto de un eje. Podemos mover la figura (desplazarla y girarla) y también el eje de simetría (desplazarlo en paralelo y cambiar su inclinación)

Observa las características de la figura simétrica de una dada. Después de escribir la respuesta, activa la casilla "Ver líneas auxiliares", te proporcionará información para revisar tus ideas y realizar una nueva redacción de las conclusiones.



Dado un punto, describe la forma más sencilla de obtener el punto simétrico respecto de una recta.

¿Cuáles son los puntos que no varían cuando hacemos una simetría axial?

Figura 76. La situación 2.5.1.3.

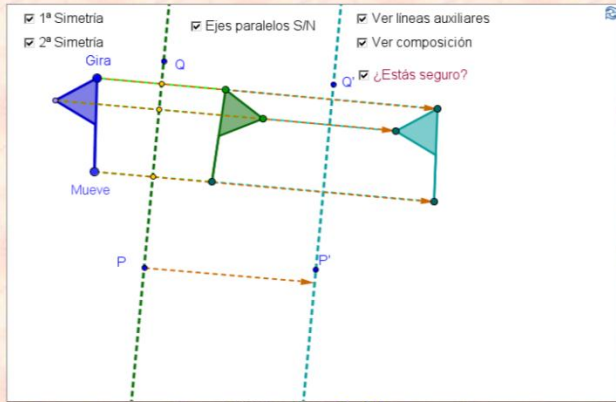
La situación 2.5.1.4 busca que el alumno conjeture cual es el resultado de componer dos simetrías axiales, teniendo en cuenta si los ejes son paralelos o se cortan en un punto. Para esta exploración se puede modificar los ejes de simetría ya sea que se desplacen paralelos o que se cambie su inclinación el objetivo de esta situación es que el alumno conjeture que la suma de dos simetrías axiales es una y la misma línea es la transformación idéntica (Figura 77).

2.5.1.4. Composición de simetrías.

En la composición de dos simetrías axiales podemos encontrarnos dos casos distintos: que los ejes sean paralelos o que se corten en un punto. En el siguiente applet tendremos en cuenta estas dos posibilidades. Antes de utilizarlo, intenta conjeturar cuál será el resultado de componer dos simetrías axiales en cada una de las dos opciones.

Se nos muestra la primera simetría y se puede activar la segunda. El primer eje de simetría se puede modificar actuando sobre los puntos P y Q. Para el segundo eje sólo puedes desplazar Q'.

Con "Ver las líneas auxiliares" aparecen las líneas punteadas de cada una de las simetrías. Al activar "Ver la composición", se nos abre una nueva casilla que pide la confirmación, obtendrás de forma gráfica muchas pistas sobre la solución. Intenta no activar esta casilla hasta que estés seguro de tus ideas.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Puedes modificar los ejes de simetría (desplazarlos en paralelo o cambiar su inclinación) para investigar el resultado de componer dos simetrías.

Explica con precisión las características de los movimientos que son el resultado de componer dos simetrías según que los ejes sean paralelos o se corten en un punto.

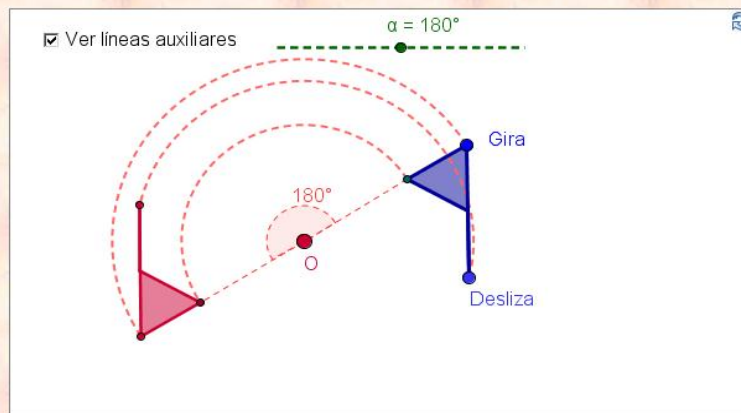
Figura 77. Situación 2.5.1.4.

La situación 2.5.1.5 estudia la rotación o giro alrededor de un punto, en esta situación tienes una bandera a la cual se le aplica un giro mediante un punto para obtener la imagen girada, entonces el alumno debe explorar dado el punto de rotación otra forma de obtener el punto que resulta al girarlo un determinado ángulo, además de los puntos que permanecen invariantes en la rotación (Figura 78).

2.5.1.5. Rotación o giro alrededor de un punto.

Ahora tenemos una bandera y su girada alrededor de un punto. Como en los casos anteriores, podemos mover la bandera y modificar los elementos que definen la rotación (desplazar el centro de giro o modificar el ángulo de giro con el deslizador verde de la parte superior).

Observa las características de la figura simétrica de una dada (responde primero a las preguntas). Deja para más adelante la activación de la casilla que hace aparecer las líneas auxiliares y mira cómo te ayuda para volver a redactar tus ideas.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Dado un punto, describe la forma más sencilla de obtener el punto que resulta al girarlo un determinado ángulo alrededor de un punto.

Como en los otros dos movimientos, busca los puntos invariantes por una rotación.

Figura 78. La situación 2.5.1.5.

La situación 2.5.1.6 estudia la composición de rotaciones, la situación muestra primero la figura azul y el centro de giro en cual se va hacer la primera rotación para esto se debe activar la casilla "1ª rotación" y mover el deslizador verde para explorar los ángulos de giro que puede tener la figura al rotarla sobre el su centro de giro, para ver el segundo giro debe activar la casilla "2ª rotación" luego la casilla "mismo centro" para ver la figura que se obtiene del segundo giro, pero hay otra casilla "distinto centro" que permite ver esta mismas figura desde otro centro de giro, para que los alumnos logren ver más fácilmente los giros esta la casilla "movim individuales" que cuando se activa genera unas línea que permiten visualizar cada uno de los giros realizados.(Figura 79)

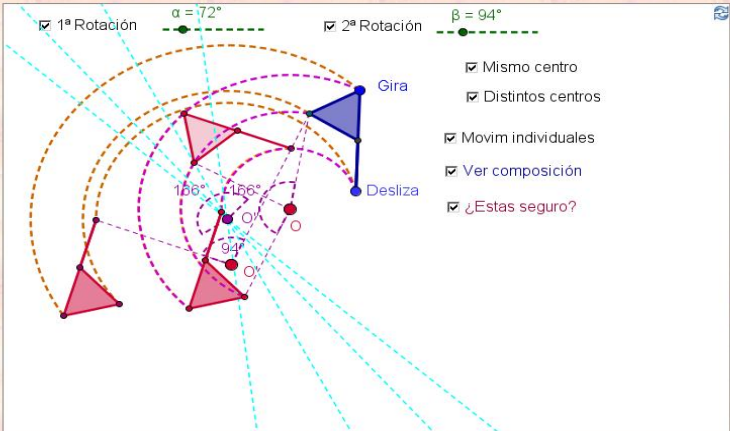
2.5.1.6. Composición de rotaciones.

El applet se ha preparado para que se puedan modificar la amplitud de los ángulos de giro con dos deslizadores de color verde que se han colocado en la parte superior.

Parece claro que la composición de dos rotaciones que tienen el mismo centro será otra rotación con ese centro y por amplitud

Si las rotaciones no tienen el mismo centro, resulta más complicado. Necesitarás experimentar con el applet.

Cuando se pregunta Mismo centro / Distintos centros, procura que sólo una de las dos casillas esté activada para no complicar excesivamente la explicación. No actives la casilla *Ver composición* hasta tener tus propias conclusiones.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Si manejas el programa GeoGebra intenta crear un archivo con dos rotaciones de centros distintos a una figura sencilla y estudia si es posible pasar de la figura original a la última mediante un solo giro. En caso afirmativo, ¿cómo obtendrás su centro? ¿cuál será la amplitud del ángulo de giro?

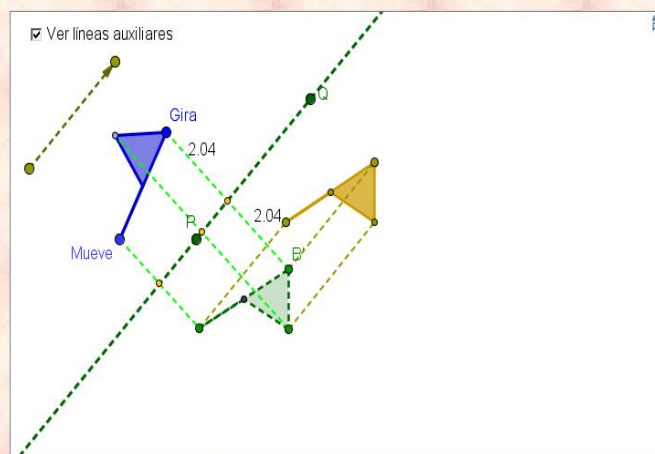
Figura 79. La situación 2.5.1.6.

La situación 2.5.1.7 estudia la simetría con deslizamiento, en esta situación parte de una bandera donde falta su simétrica respecto a un eje ya que solo esta la que se obtiene de la traslación, aquí los alumnos deben analizar las posible posición de la figura simétrica al eje, a partir de la exploración con el eje de simetría pues este se puede desplazar en paralelo o cambiar su inclinación. El vector puede variar su magnitud o dirigirlo en sentido contrario pues debe permanecer siempre paralelo al eje de simetría (Figura 80).

2.5.1.7. Simetría con deslizamiento.

Ahora tenemos una bandera y su simétrica respecto de un eje. También ahora podemos mover la figura (desplazarla y girarla)

Es posible modificar el eje de simetría (desplazarlo en paralelo y cambiar su inclinación). Para el vector sólo podemos variar su amplitud o dirigirlo en sentido contrario, ya que ha de mantenerse siempre paralelo al eje de simetría.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Dado un punto, describe la forma más sencilla de obtener el punto que resulta al aplicar una simetría con deslizamiento.

Figura 80. La situación 2.5.1.7.

Las situaciones de la sección 2.5.2 a la 2.5.1.7 son de acción ya que a través de la interacción del alumno con cada uno de los applets puede organizar la solución a cada una de las situaciones mediante los conocimientos implícitos. El tipo de arrastre de estas situaciones es test por que a partir de las casillas de cada una de las situaciones con el fin de mantener las propiedades particulares de las isometrías.

Estas situaciones se podrían implementar en nuestro contexto para el pensamiento espacial y sistemas geométricos para los grados sexto a séptimo según los siguientes estándares:

- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.

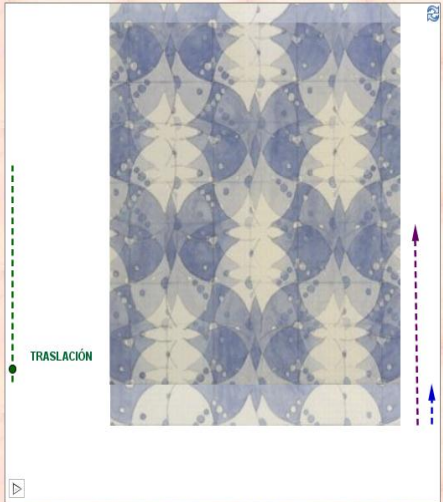
Las situaciones de la sección 2.5.2 no se analizarán pues trabaja con los movimientos en la geometría de coordenadas.

La sección 2.5.3 va a estudiar las cuatro isometrías a través de un mosaico Escher, esta situación busca que el alumno observe que al desplazar el deslizador verde las figuras coinciden con las originales al realizar los cuatro movimientos; traslación, rotación, Simetría axial, Simetría con deslizamiento (figura 81).

2.5.3. Las cuatro isometrías.

Una isometría es un movimiento que mantiene las distancias, también se les llama movimientos rígidos. Sólo hay cuatro movimientos en el plano que lo consiguen, los que se han analizado en los apartados anteriores: traslación, rotación, simetría axial y simetría con deslizamiento. Estas isometrías consiguen que un mosaico periódico vuelva a coincidir consigo mismo en determinadas condiciones.

Se ha preparado un applet que simula las cuatro isometrías sobre la imagen del mosaico número 60 de M.C. Escher que representa una colección de mariposas blancas y azules. Sobre él se realizan consecutivamente los cuatro movimientos al desplazar el deslizador verde de la izquierda hacia arriba. Comprobaremos que las mariposas vuelven a coincidir con las originales.



G4D, Creado con [GeoGebra](#)

Hay otros movimientos como la homotecia o dilatación (también disponible en GeoGebra), que mantiene la forma, pero no el tamaño. En la imagen tenemos una homotecia de razón $\frac{1}{2}$ en la que todas las medidas quedan reducidas a la mitad. Este tipo de movimientos que no mantienen las distancias quedan excluidos de nuestro estudio.

Figura 81. Situación 2.5.3.

La sección 2.5.4 es de práctica con los movimientos, el alumno debe explorar mediante el deslizador cada una de las cuatro isometrías (Figura 82)

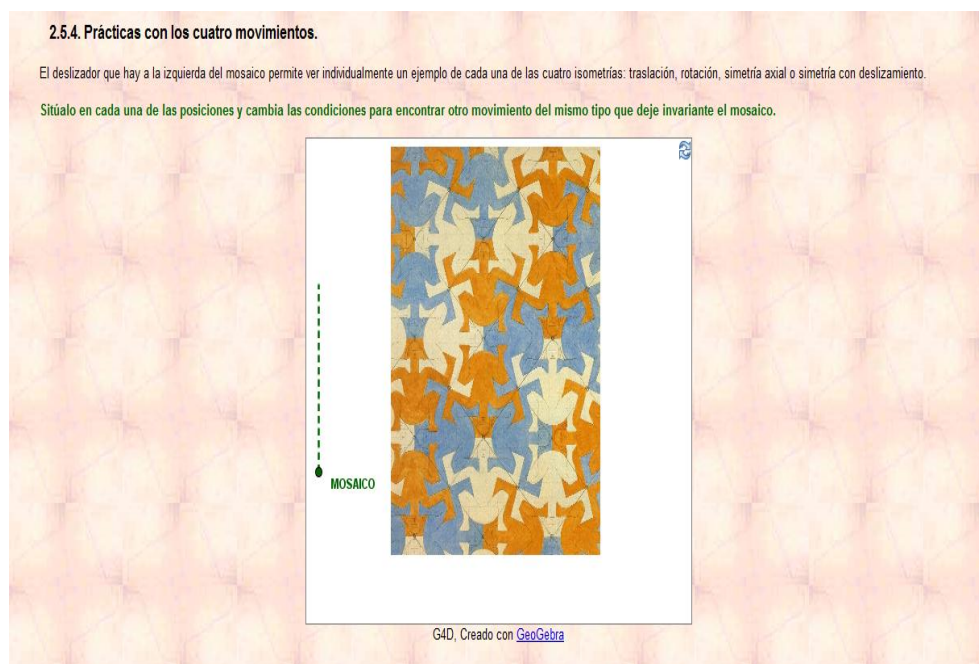


Figura 82. Situación 2.5.4.

Las situaciones 2.5.3 y 2.5.4 son situaciones de acción ya que a través de la interacción del alumno con el artefato toma sus decisiones para encontrar cada uno de los cuatro movimientos de las isometrías. El tipo de arrastre es test porque permite la verificación de la coincidencia de las fotografías según las características de cada uno de los cuatros movimientos que presentan.

Lo que caracteriza esta organización de recurso y en particular el diseño de las situaciones entorno a las transformaciones es todo el contexto que se maneja de la geometría con el arte ,con la naturaleza y de la interacción de las figuras con los movimientos que se pueden generar.

esta clasificación parte del eje central de la Simetrías y apartir de esta clasificación se trabaja la traslación, la Simetría central, rotación, Simetría central y Simetría con deslizamiento.

Las limitaciones de estas situaciones se pueden observar en las situaciones 2.2.10, 2.3.3, 2.3.7, 2.3.8, pues no permiten explorar lo que piden las situaciones pues no poseen las animaciones de las otras actividades, ni los deslizadores, que permiten obsevar las características y propiedades de las Simetrías, esta limitación es tanto para los alumnos como para los profesores.

4. CONCLUSIONES

Los recursos pedagógicos disponibles en Intergeo se caracterizan porque está organizado por temas o por el tipo de software lo cual facilita la búsqueda dependiendo del tema que un profesor quiera enseñar y del software que disponga para su implementación. Específicamente para las transformaciones de isometría se pueden utilizar los recursos pedagógicos diseñados con Geogebra. Una de las características de las situaciones analizadas es que no es necesario que los alumnos conozcan comandos ni el manejo del Geogebra, porque para su desarrollo sólo es indispensable la herramienta arrastre, lo cual se convierte en un medio de reconocimiento y verificación de las propiedades geométricas de un dibujo o imagen, debido a que el software tiene como característica la libertad de explorar, observar, conjeturar y verificar propiedades y resultados, lo que asegura la coordinación e integración entre los artefactos y las situaciones didácticas.

En la web “La simetría” se pueden encontrar diferentes tipos de situaciones según la clasificación realizada por Brousseau (2007), es decir, situaciones de acción, de formulación y de validación, sin embargo el medio favorece en mayor proporción las situaciones de acción, éstas situaciones sirven de base para que los alumnos identifiquen las propiedades de las transformaciones de isometría y validen sus conjeturas a partir del arrastre. En el conjunto de situaciones analizadas se presentan algunas que son estáticas y no permiten ningún tipo de exploración, por ejemplo las presentadas en las secciones 2.2.10, 2.3.3, 2.3.7, 2.3.8, así mismo el hecho que sólo se utilice el arrastre limita la acción del alumno al no poder utilizar los comandos que posee Geogebra, se puede afirmar que las situaciones se encuentra preestructuradas.

En los recursos pedagógicos disponibles para los profesores, se encuentra una guía didáctica en la que presentan los contenidos matemáticos por grados, en los que se pueden implementar las situaciones a lo largo de la Educación Secundaria en la comunidad valenciana, así mismo se especifican las competencias básicas que se desarrollan y los diferentes recursos pedagógicos con los que cuentan los profesores,

éstos son referenciados en la sección 5 denominada “*complementos*”. Por otro lado los profesores pueden corroborar la calidad del recurso, al revisar la evaluación suministrada por otros usuarios del recurso pedagógico según los ítems de evaluación presentados en el portal, en los que se evalúa la pertinencia del contenido, lo accesible, adaptable y aplicable a un curso regular.

En el caso de la web “La simetría”, la guía didáctica, presenta una descripción de códigos y técnicas utilizadas para que los profesores puedan adaptar y/o construir sus propios applets. Aunque estas situaciones han sido diseñadas para ser implementadas en la comunidad europea, también se adaptan a las clases del currículo propuesto en Colombia las cuales contribuyen a la innovación en la educación y el mejoramiento de la calidad en la misma. Estas adaptaciones dependen del profesor que debe emprender este nuevo reto, ya que hay una gran cantidad de situaciones y el profesor debe seleccionar las de su interés dependiendo del grado y la complejidad que quiera implementar, no es necesario que las implemente todas.

En cuanto al enfoque metodológico utilizado para el desarrollo del trabajo, se propuso una estructura de análisis que articula la dimensión didáctica e instrumental en el marco de un proceso de desarrollo de la noción de recurso pedagógico. Dicho enfoque metodológico, facilitó el análisis de las situaciones y fue una metodología pertinente y coherente, al momento de analizar que ocurre cuando se integran tecnologías alrededor de una noción matemática particular, como lo es la de transformaciones de isometría.

Para mi uno de los aspectos importantes de este trabajo es dar a conocer una nueva forma en que los profesores pueden a partir de sus experiencias y prácticas reformular las situaciones y compartirlas en comunidades de práctica, al hacer uso de la conceptualización de recurso pedagógico. La formación de los profesores juega un papel muy importante pues este tipo de situaciones no tienen una fórmula para ser resueltos,

esto exige una organización y sistematización de los conocimientos matemáticos y profesionales.

Es importante resaltar una formación del profesorado de matemáticas de secundaria para incluir este tipo de recursos pedagógicos partiendo del sólido conocimiento matemático que poseen, para que se fundamente de una manera precisa y coherente a la necesidad de un conocimiento didáctico de los contenidos curriculares asociado al uso de recursos informáticos.

¿Qué otro tipo de recursos pedagógicos se pueden concebir y qué procesos de concepción?, ¿Qué preguntas a plantear para el funcionamiento en nuestro contexto?, ¿cómo formar igualdad a (o la anulación) cualquier pregunta de un alumno en particular, cómo abordar un aspecto inesperado de la tarea de matemáticas o la herramienta tecnológica?

5. BIBLIOGRAFÍA

Santacruz, Marisol, (2007). Explorar la transformación de rotación en Educación Básica integrando Cabri. Ponencia. Universidad del valle, Cali 2007.

Álvarez Zaira, Fernández Daniel, (2009).la transformación de rotación en el espacio: una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D.Universidad del valle, Cali 2009.

Monroy Lilian, Rueda Karol, (2009).Conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa Cabri geometry II universidad industrial de Santander facultad de ciencias escuela de matemáticas, Bucaramanga 2009.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de situaciones. . Buenos Aires Argentina: libros del zorril.

Guin D, Trouche Luc, (2007). A multidimensional approach for designing collaborative pedagogical resource. Adaptación al español, en versión libre por, profesor Diego Garzón del área de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del valle.

Garzón, D. (2007). *Diseño de materiales a la luz de un modelo que incorpora la concepción de recursos pedagógicos vivientes*. cali valle: universidad del valle

Trouche Luc, Guin Dominique (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestration. Revista Internacional de Profesores de Matemáticas. Vol. 34 (5), pp. 204-211.Montpellier France. Traducción Libre.

Drijvers Paul, Doorman Michiel, Boon Peter, Freudenthal Sjef van Gisbergen, (2009). Instrumental Orchestration: Theory and practice. Martes 28 de junio y sábado 1 febrero de 2009. www.inrp.fr/editions/cerme6. Traducción Libre.

Laborde C. (1998). Visual phenomena in the teaching - learning of geometry in a computer based environment. *Traducción libre, Edisson Fernández. Universidad del valle.*

H.S.M. Coxeter, F. (1971). *Fundamentos de geometría*. México: Limusa-Willey.SA.

Guin D, Trouche L, (1999). El complejo proceso de conversión de las herramientas en instrumentos matemáticos: el caso de las calculadoras. *Revista Internacional de ordenadores para el aprendizaje matemático.*

Quintero Basto, G. (2007). *Hacia un marco teórico acerca de la mediación semiótica de un ambiente de geometría dinámica*. Cali, Valle: Universidad del valle.

Polo Irene, Recio Tomás, González María José, (2008). Intergeo: contribución, búsqueda y evaluación de recursos Geogebra, universidad de Cantabria. www.ec.europa.eu/information_society/activities/econtentplus/projects/edu/intergeo/index_en.htm

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones*. Buenos Aires Argentina: libros del zorril.

Dominique Guin, L. T. (1999). *Dominación por el profesor de la génesis en ambientes CAS; necesidad de la orquestación instrumental*. Montpellier Francia .

Garzón, D. (2007). *Diseño de materiales a la luz de un modelo que incorpora*. cali valle: universidad del valle.

Matemáticas., E. b. (2006). Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Nacional.MEN, M. d. (2006). *Estandares básicos en competencias de matemáticas*. Santa fe de Bogotá.

Quintero Basto, G. (2007). *Hacia un marco teórico acerca de la mediación semiótica de un ambiente de geometría dinámica*. Cali, Valle: Universidad del valle.

Trouche Luc. (Noviembre de 2009). *Recursos para procesar, aprender enseñar el calculo: nuevos modos de concepcion y difusion*. Obtenido de http://educmath.inrp.fr/Edumcmath/recherche/approche_documentaire

Trouche, D. G. (1999). *Dominación por el profesor de la génesis en ambientes CAS; necesidad de la orquestación instrumental*. Montpellier (France).

Trouche Luc, (2007). Instrumentos de trabajo matemático y dispositivos de enseñanza en ambientes informáticos. Universidad de Lyon. <http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/mathinrp/educmath/>.

Brousseau, G. (2007). *Iniciacion al estudio de la teoria de situaciones*. Buenos Aires Argentina: libros del zorril.

Dominique Guin, L. T. (1999). *Dominación por el profesor de la génesis en ambientes CAS; necesidad de la orquestación instrumental*. Montpellier Francia .

Garzón, D. (2007). *Diseño de materiales a la luz de un modelo que incorpora*. cali valle: universidad del valle.

Matemáticas., E. b. (2006). Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Nacional.MEN, M. d. (2006). *Estandares basicos en competencias de matematicas*. Santafe de Bogota.

Quintero Basto, G. (2007). *Hacia un marco teórico acerca de la mediación semiótica de un ambiente de geometría dinámica*. Cali, Valle: Universidad del valle.

Trouche Luc. (Noviembre de 2009). *Recursos para procesar, aprender enseñar el calculo: nuevos modos de concepcion y difusion*. Obtenido de http://educmath.inrp.fr/Edumcmath/recherche/approche_documentaire

Trouche, D. G. (1999). *Dominación por el profesor de la génesis en ambientes CAS; necesidad de la orquestación instrumental*. Montpellier (France).

Mora José, (2008) .La simetría. Guía didáctica. Valencia España [http://jmora7.com/Mosaicos /index11.htm](http://jmora7.com/Mosaicos/index11.htm)