



Relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en la
escuela. Potencialidades y dificultades

Andrés Eulises Téllez Mora

Alejandra Zapata Ocampo

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Agosto del 2023



Relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en la
escuela. Potencialidades y dificultades

Andrés Eulises Téllez Mora

Alejandra Zapata Ocampo

Magister Ligia Ampato Torres Rengifo

Directora Trabajo de Grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

Agosto del 2023

Dedicatoria

Al presente y la esperanza.

El primero, como regalo inesperado, y el segundo, como la fuerza para soportarlo.

*A mi abuelita, María Jafitza Lombana De Ocampo, por ser ejemplo de lucha, amor y
valentía. Te veo en el cielo.*

Agradecimientos

Sobre todo, gracias a Dios por darnos la oportunidad de realizar este trabajo de investigación, al proporcionarnos el camino para crecer personal, familiar, académica y espiritualmente.

A nuestras madres Elizabeth Mora Garzón y Luz Marina Ocampo Lombana, ejemplos de inspiración por su sacrificio, trabajo duro y amor incondicional. Gracias a su confianza en nosotros, este momento no hubiera sido posible sin su apoyo.

A nuestra estimada docente y directora de investigación Ligia Amparo Torres, por toda su dirección y apoyo nos convertimos en profesionales gracias al tiempo incondicional que nos brindó en toda nuestra formación.

Alejandra y Andrés

Resumen

En el presente trabajo se propuso abordar la comprensión de la relación entre ecuaciones y funciones a través de la modelación matemática para abordar desafíos educativos tradicionales, como las dificultades presentes en el aprendizaje de las funciones y ecuaciones. Para esto se plantean dos situaciones en contexto (cotidiano y matemático) en las que se establecen y desarrollan relaciones entre ecuaciones y funciones, con la intención de reconceptualizar el concepto de ecuación hacia un objeto matemático dinámico como es caracterizada la función.

Se realizó la implementación de dos situaciones en grado décimo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali en la que se consideran aspectos curriculares didácticos y disciplinares con el fin de realizar un análisis de la información obtenida desde un enfoque cualitativo que permitió estudiar fenómenos dentro de la enseñanza y el aprendizaje, descubrir patrones, identificar errores y dificultades, entre otros. La propuesta de aula que buscó relacionar los conceptos de ecuaciones y funciones, compuesta por dos situaciones que involucró procesos de modelación enmarcados en la Educación Matemática Realista (EMR) facilitó el acercamiento y comprensión de modelos funcionales para abordar problemáticas en contextos realistas o matemáticos. Se evidenció en los estudiantes acciones características del pensamiento variacional que permitieron establecer relaciones entre los conceptos de ecuación y función, un avance progresivo y tránsito por los niveles de matematización según la EMR.

Palabras clave: Modelación matemática, relación funciones y ecuaciones, Educación Matemática Realista.

Abstract

In the present work, the aim was to address the understanding of the relationship between equations and functions through mathematical modeling to tackle traditional educational challenges, such as the difficulties encountered in learning functions and equations. To achieve this, two contextual situations (every day and mathematical) were proposed in which relationships between equations and functions were established and developed, with the intention of reconceptualizing the concept of an equation into a dynamic mathematical object as characterized by a function. The implementation of these two situations was carried out in the tenth grade of the Escuela Normal Superior Farallones de Cali Educational Institution, taking into consideration didactic and disciplinary curricular aspects in order to analyze the information obtained from a qualitative approach that allowed the study of phenomena within teaching and learning, the discovery of patterns, identification of errors, and difficulties, among other things. The classroom proposal that aimed to relate the concepts of equations and functions, composed of two situations involving modeling processes framed within Realistic Mathematics Education (RME), facilitated the approach and comprehension of functional models to address issues in realistic or mathematical contexts. In the students, characteristic actions of variational thinking were observed, enabling the establishment of relationships between the concepts of equations and functions, along with progressive advancement and progression through the levels of mathematization according to RME.

Keywords: Mathematical modeling, relationship between functions and equations, Realistic Mathematics Education.

Contenido

Agradecimientos.....	4
Resumen.....	5
Abstract.....	7
Índice de tablas.....	10
Índice de figuras.....	13
Introducción	15
Capítulo I. Aspectos generales de la investigación.....	19
1.1. Planteamiento del problema	19
1.2. Objetivos	26
1.2.1. General.....	26
1.2.2. Específicos.....	26
1.3. Justificación.....	26
1.4. Antecedentes	29
1.4.1. Relacionados con el aprendizaje de las ecuaciones.....	30
1.4.2. Relacionados con el aprendizaje de las funciones.....	32
1.4.3. Relacionados con el aprendizaje de las funciones y las ecuaciones.....	34
Capítulo II. Marco de referencia conceptual	38
2.1. Perspectiva curricular	38
2.1.1. Lineamientos Curriculares de Matemáticas	39

2.1.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.....	43
2.1.3. Derechos Básicos de Aprendizaje	50
2.2. Perspectiva didáctica.....	52
2.2.1. Dificultades y errores en el aprendizaje de las ecuaciones y las funciones.....	53
2.2.2. La modelación desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista.....	59
2.2.3. Aspectos fundamentales de una secuencia didáctica.....	66
2.3. Perspectiva matemática.....	70
2.3.1. Aspectos relevantes de la historia de la ecuación y su definición	70
2.3.2. Aspectos relevantes de la historia de la función y su definición	75
2.3.3 Aproximación histórica de la relación entre ecuación y función	80
2.4. Algunos elementos fundamentales de las perspectivas curricular, didáctica y matemática para el diseño de la propuesta de aula	82
Capítulo III. Relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en la escuela ...	86
3.1. Diseño de la propuesta de aula.....	86
3.2. Contexto de desarrollo	93
3.3. Resultados y análisis de resultados	94
3.1.1. Análisis de resultados de la situación 1	95
3.3.2. Análisis de resultados de la situación 2	168

Capítulo IV. Conclusiones generales y reflexiones	207
4.1. Conclusiones generales	207
4.2. Algunas reflexiones.....	216
Referencias Bibliográficas.....	221
Anexos	227
A. Anexo: La propuesta de aula	227

Índice de tablas

Tabla 1 Dificultades y errores en el aprendizaje de las ecuaciones	55
Tabla 2 Dificultades y errores en el aprendizaje de las funciones	57
Tabla 3 Estructura de la secuencia didáctica	69
Tabla 4 Elementos teóricos para la secuencia didáctica	84
Tabla 5 Síntesis de la estructura de la situación 1.....	89
Tabla 6 Síntesis de la estructura de la situación 2.....	91
Tabla 7 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y pregunta 1 (S1T1P1)	96
Tabla 8 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y pregunta 2 (S1T1P2)	96
Tabla 9 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y preguntas 3a, 3b y 3c (S1T1P3abc).....	99
Tabla 10 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y preguntas 4a y 4b (S1T1P4ab)	101
Tabla 11 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P1)	104
Tabla 12 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 2a y 2b (S1T2P2ab)	105
Tabla 13 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 3a y 3c (S1T2P3ac).....	108
Tabla 14 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 3b y 3d (S1T2P3bd).....	109
Tabla 15 Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 4a y 4b (S1T2P4ab)	112

Tabla 16	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 5a (S1T2P5a).....	112
Tabla 17	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 5b (S1T2P5b)	117
Tabla 18	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 5c (S1T2P5c).....	117
Tabla 19	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 6a y 6b (S1T2P6ab)	121
Tabla 20	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7a (S1T2P7a).....	125
Tabla 21	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7b (S1T2P7b)	126
Tabla 22	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7c (S1T2P7c).....	129
Tabla 23	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7d (S1T2P7d)	130
Tabla 24	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1a (S1T3P1a).....	133
Tabla 25	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1b (S1T3P1b)	134
Tabla 26	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1c (S1T3P1c).....	135
Tabla 27	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1d (S1T3P1d)	136
Tabla 28	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y preguntas 2a y 2b (S1T3P2ab)	141
Tabla 29	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 2c (S1T3P2c).....	142
Tabla 30	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y preguntas 3a y 3b (S1T3P3ab)	144
Tabla 31	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 4 (S1T3P4)	147
Tabla 32	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 5 (S1T3P5)	148
Tabla 33	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6a (S1T3P6a).....	152
Tabla 34	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6b (S1T3P6b)	153
Tabla 35	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6c (S1T3P6c).....	154
Tabla 36	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6d (S1T3P6d)	155

Tabla 37	Porcentaje de acierto de las preguntas S1T2P7abcd y S1T3P6abcd	158
Tabla 38	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 7 (S1T3P7)	159
Tabla 39	Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8)	161
Tabla 40	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 1a y 1b (S2T1P1ab)	169
Tabla 41	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 2a, 2b y 2c (S2T1P2abc)...	170
Tabla 42	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 3 (S2T1P3)	171
Tabla 43	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 4a y 4b (S2T1P4ab)	174
Tabla 44	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 5a y 5b (S2T1P5ab)	175
Tabla 45	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 5c (S2T1P5c).....	176
Tabla 46	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 6 (S2T1P6)	180
Tabla 47	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 7 (S2T1P7)	181
Tabla 48	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 1a y 1b (S2T2P1ab)	185
Tabla 49	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 1c y 1d (S2T2P1cd)	186
Tabla 50	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 2 (S2T2P2)	187
Tabla 51	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 3a, 3b y 3c (S2T2P3abc)...	187
Tabla 52	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 4a y 4b (S2T2P4ab)	192
Tabla 53	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 4c y 4d (S2T2P4cd)	193
Tabla 54	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 5 (S2T2P5)	194
Tabla 55	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 6 (S2T2P6)	194
Tabla 56	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 7 (S2T2P7)	198
Tabla 57	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 8 (S2T2P8)	199
Tabla 58	Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 9 (S2T2P9)	200

Índice de figuras

Figura 1. Coherencia vertical y horizontal del estándar "Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas"	48
Figura 2. Coherencia vertical y horizontal del estándar “Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas”	50
Figura 3. Niveles de matematización.....	65
Figura 4. S1T1PIR1	97
Figura 5. S1R1P1R3	98
Figura 6. S1T1P3R1.....	100
Figura 7. S1T1P4R3.....	102
Figura 8. S1T2P1R2.....	106
Figura 9. S1T2P4abR2.....	116
Figura 10. S1T2P4abR3.....	116
Figura 11. S1T2P5bR3.....	119
Figura 12. S1T2P6abR3.....	123
Figura 13. S1T2P6abR4.....	124
Figura 14. S1T2P7abR1.....	127
Figura 15. S1T2P7bR2.....	129
Figura 16. S1T3P1aR2.....	137
Figura 17. S1T3P1bR3.....	137

Figura 18. S1T3P1cR1.....	138
Figura 19. S1T3P1dR2.....	139
Figura 20. S1T3P2cR1.....	145
Figura 21. S1T3P3abR3.....	145
Figura 22. S1T2P4R1.....	149
Figura 23. S1T3P5R2.....	149
Figura 24. S1T3P6bR2.....	156
Figura 25. S1T3P8R1.....	163
Figura 26. S2T1P1R1.....	172
Figura 27. S2T1P2abcR1	173
Figura 28. S2T1P3R1.....	174
Figura 29. Procedimiento que calcula el número de días para cualquier valor del ingreso total en ventas	177
Figura 30. S2T1P5cR2.....	178
Figura 31. S2T1P5abR1.....	180
Figura 32. S2T1P6R1.....	182
Figura 33. S2T2P2R2.....	189
Figura 34. S2T2P3abcR1	189
Figura 35. S2T2P1abR1 y S2T2P1cd R1	190
Figura 36. S2T2P4abR1 y S2T2P4cdR1	196
Figura 37. S2T2P7R1.....	200
Figura 38. S2T2P8R1.....	201

Introducción

A partir de las fuentes documentales consultadas para el desarrollo del presente trabajo de investigación alcanzó a examinarse que uno de los objetivos en la educación matemática es la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con sentido para el estudiante; considerando que un aspecto fundamental en pro de este objetivo, propuesto en los referentes curriculares en el marco del sistema de educación en Colombia, es el desarrollo del pensamiento matemático a través de la articulación de diferentes pensamientos, entre ellos, el *pensamiento variacional*, a partir del cual se sugiere abordar el estudio de las expresiones algebraicas, la variación y el cambio, las funciones y las ecuaciones, entre otros, de manera articulada, que permita relacionar dichos contenidos matemáticos.

En este sentido, muchos esfuerzos y desarrollos investigativos que conducen al desarrollo del pensamiento variacional reportan que un eje transversal a la formación matemática son los *procesos de modelación*, toda vez que permiten que el estudiante se desarrolle como un individuo activo, crítico y reflexivo en la elaboración de modelos funcionales, ecuaciones y la apropiación de contenido matemático que lo aproximen a la comprensión de su entorno social y cultural, y los profesores practiquen un enfoque sistemático para crear, analizar, dirigir y desarrollar situaciones problemáticas apropiadas en su práctica profesional.

En adición a lo anterior, también se propone el trabajo articulado entre los diferentes contenidos y conceptos matemáticos, en relación con la modelación, dos conceptos matemáticos estrechamente relacionados son; las funciones y las ecuaciones, a partir de los cuales se expresan

infinidad de situaciones de la vida cotidiana, las ciencias naturales y de la labor netamente matemática.

Estos y otros elementos dirigen el actual ejercicio de investigación y la formulación de una secuencia didáctica para estudiantes de noveno grado que permita el desarrollo del pensamiento variacional desde contextos realistas y la resolución de problemas que involucren el trabajo articulado entre los modelos funcionales y las ecuaciones, particularmente de primer grado, las relaciones de dependencia entre las cantidades existentes y en última instancia, abordar la pregunta de investigación, con el objetivo de responder, a saber: *¿Cómo a través de una propuesta de aula, que integra procesos de modelación matemática, se puede contribuir al establecimiento de relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en estudiantes de grado noveno en educación básica?*

Si bien, la propuesta de aula, de la cual habla la pregunta anterior, fue diseñada para el grado noveno de la educación básica, su implementación se realiza en grado décimo, esto debido fundamentalmente a las diferencias encontradas en lo documentado y propuesto a partir de los referentes curriculares en Colombia en comparación con la realidad de algunas de las instituciones públicas de la ciudad de Cali respecto al desfase de aproximadamente año y medio en términos de competencias y contenidos matemáticos abordados para los diferentes grados de escolaridad, es decir, aquello que se sugiere en los referentes curriculares para abordar, por ejemplo, en grado noveno en las instituciones públicas se dispone para el grado décimo.

El trabajo realizado se presenta distribuido en varios capítulos, de la siguiente manera:

En el primer capítulo se discuten los enfoques y problemáticas que surgen en este trabajo, luego los objetivos propuestos guiarán el desarrollo y lo que se espera alcanzar. A continuación,

se presentará el desarrollo documental relevante para estos aspectos relacionados con el trabajo que constituirán una fundamentación inicial para los temas que se abordarán y las observaciones para la investigación.

En el segundo capítulo se presenta el soporte curricular, didáctico, conceptual y contextual, a partir de tres partes: perspectiva curricular, perspectiva didáctica y perspectiva disciplinar. Desde estas tres perspectivas, la literatura menciona: el estudio de sistemas algebraicos y analíticos para desarrollar el pensamiento variacional en relación con las ecuaciones y funciones, el estudio de variaciones, los procesos de modelación y el estudio de la articulación de funciones y ecuaciones y la convergencia histórica entre ambos.

En el tercer capítulo se desarrollan los aspectos relevantes del diseño de la secuencia didáctica, el contexto y población participante en la implementación. Finalmente, el análisis de los resultados obtenidos en las situaciones a partir de la implementación de las dos situaciones que componen la secuencia didáctica, teniendo en cuenta los referentes teóricos presentados en el capítulo dos.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan las conclusiones extraídas de los resultados y análisis del estudio, seguidas de algunas recomendaciones didácticas, en línea con los objetivos generales y específicos planteados al inicio del presente trabajo de investigación.

Capítulo I. Aspectos generales de la investigación

1.1. Planteamiento del problema

En las últimas décadas, uno de los objetivos de la educación matemática en la escuela ha sido que el aprendizaje de las matemáticas cobre un sentido significativo en el alumno que le permita “la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde debe tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer sus opiniones y ser receptivo a las de los demás” (MEN, 1998, p. 18). Además, como lo sugiere Font, V. (2008), durante este tiempo una parte de la comunidad de educadores e investigadores se ha interesado por pensarse la enseñanza de las matemáticas desde el desarrollo de procesos matemáticos como; la resolución de problemas y la modelación, con el fin de aportar con dicho objetivo. (p. 30)

En relación con el objetivo de que el aprendizaje de las matemáticas cobre un sentido significativo en el alumno, De la fuente y Deulofeu (2022) mencionan que:

La construcción de un conocimiento matemático con significado por parte del alumno requiere del profesor un conocimiento que permita conectar conocimientos previos y futuros de los alumnos, que permita conectar conceptos o que le permita secuenciar actividades de forma coherente. (p. 392).

Respecto al desarrollo de procesos matemáticos, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), reconoce que los procesos de modelación permiten establecer una estrecha relación entre diferentes conceptos y procedimientos inscritos en las cinco expresiones del

pensamiento matemático y en situaciones de resolución de problemas, con lo cual, el docente puede propiciar y establecer espacios de desarrollo de conocimiento matemático que facultan al estudiante con herramientas metodológicas para formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. (pp. 55-65).

En este sentido, al abordar procesos de modelación en la escuela se favorece la construcción, entre otras cosas, de sentido matemático con significado, toda vez que el alumno se convierte en un individuo activo, crítico y reflexivo al tomar parte en la responsabilidad de su proceso de aprendizaje, en tanto que, el docente se ejercita en su práctica profesional desde un enfoque metodológico relacionado con la creación, análisis, orientación y desarrollo de situaciones problemas adecuadas que le permitan al alumno apropiarse de las competencias generales de la actividad matemática, la exposición de sus formas de pensar y el fortalecimiento de sus estructuras conceptuales.

A pesar de lo dicho anteriormente, Salett, M. y Hein, N. (2004) advierten sobre las muchas dificultades que se presentan al implementar la modelación como método de enseñanza e investigación, las cuales hacen referencia a la falta de formación docente y a la exposición parcial, o nula, que han tenido los alumnos con los procesos de modelación, siendo evidentes en la compleja tarea de elaborar y reflexionar sobre la construcción, uso, análisis e interpretación de modelos en situaciones problema. (pp. 120-123).

A este respecto, parece necesario que los docentes de matemáticas profundicen en la elaboración de situaciones problema en diferentes contextos que permitan al alumno estar en contacto cercano con procesos de modelación, una cuestión que tiene lugar en el estudio del

álgebra, según los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), pues en estos se considera que el álgebra es:

Una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional. (p. 17)

En consecuencia, el estudio del álgebra en la escuela cobra un alto valor conceptual y procedimental en la aproximación a la modelación como método de enseñanza y al desarrollo de modelos matemáticos, toda vez que se abordan objetos matemáticos, en especial las ecuaciones y funciones, en la matematización de fenómenos y situaciones en contextos de variación, útiles y comúnmente desarrolladas en ciertas disciplinas, por ejemplo, física, química, astronomía, economía, entre otras. Por eso, una consideración importante es indagar sobre cómo se están pensando estos conceptos en la educación y cómo esas formas pueden contribuir, o no, al desarrollo de conocimiento matemático con significado en contextos de modelación.

Sin embargo, tal cual como expone Castro, E. (2012) la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela se reduce a la manipulación de expresiones algebraicas y técnicas de cálculo, continuando con una cultura de enseñanza tradicional que restringe la construcción de conocimiento matemático significativo. (p. 77).

Ante esta situación, surge una necesidad de explorar nuevos diseños, propuestas y estrategias de enseñanza apoyados en la formulación de situaciones problemas que favorezcan el estudio de estos objetos matemáticos en procesos de modelación matemática. En consecuencia, diversas investigaciones realizadas sobre el estudio del álgebra dan cuenta; inicialmente, sobre los errores y dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las funciones y ecuaciones de primer grado, considerando estos objetos matemáticos por separado y, por otra parte; permiten dilucidar o rastrear algunas perspectivas desde las cuales se puede pensar el establecimiento de conexiones y relaciones entre ellos.

Respecto a las ecuaciones, algunas investigaciones (Novembre, 2005; Sánchez, 2014; Castro, 2012) reportan un grupo de dificultades y errores asociados al aprendizaje de las ecuaciones de primer grado, asociados principalmente con la parte operatoria, por ejemplo; el uso incorrecto de las propiedades de las operaciones básicas, los inversos aditivos y multiplicativos y el uso arbitrario de la propiedad simétrica en una igualdad, entre otros. Dicho de otra forma, los estudiantes no logran articular correctamente los aprendizajes provenientes de la aritmética a la solución de ecuaciones en contextos de resolución de problemas, a partir de los cuales se pueden favorecer los procesos de modelación de fenómenos de variación que apoyan el desarrollo del pensamiento variacional.

Por otro lado, con relación al concepto de función, ciertas investigaciones (Cuevas, Delgado y Martínez, 2018; López, Sosa, 2008; Novembre, 2005), reportan que, en la enseñanza y aprendizaje de las funciones de primer grado, algunas dificultades son de carácter cognitivo, como; distinguir entre variable e incógnita, epistemológico, como; la enseñanza en dirección contraria a la génesis del concepto, y didáctico, como; el desarrollo de ejercicios puramente rutinarios y algorítmicos con las funciones.

Estas dificultades se asocian con errores que cometen los estudiantes en la caracterización, trabajo y construcción de relaciones entre las diferentes representaciones de función, a saber; hacer corresponder o asociar equivocadamente rectas en el plano con las expresiones analíticas de funciones cuadráticas, concluir que la continuidad es una característica de todas las funciones, la inconsistencia o pérdida de información en la traducción de un registro a otro, y demás casos reportados.

Con relación a esto, las investigaciones de López, Sosa (2008), Novembre (2005) y Rodríguez (2018) establecen que los estudiantes no logran alcanzar una claridad parcial acerca de los conceptos de función y ecuación inscritos en una misma situación problema o de aplicación, incluso, las diferencias que consiguen establecer entre una y otra no son suficientes para su comprensión, uso y desarrollo como herramientas potentes para el análisis y resolución de situaciones problemas. Por ejemplo, dentro de la resolución de un problema que involucra la utilización de estos dos conceptos, los estudiantes no logran establecer en qué momento se está trabajando con una incógnita o con una variable, ni cuándo se puede hablar de conjunto solución

o de rango, según corresponda, lo cual dificulta la consecución de procedimientos adecuados que satisfagan el análisis e interpretación de los resultados acorde a la situación problema planteada.

Estas dificultades presentes en los estudiantes están asociadas a factores de naturaleza cognitiva, por ejemplo; por la semejanza en las diferentes representaciones de una y otra y la posibilidad de establecer relaciones entre ellas, epistemológicas; ya que las funciones y ecuaciones pueden ser tomadas como puentes entre la geometría y el álgebra, y didácticas; respecto a la forma en que los profesores disponen de la manipulación de estos conceptos como cualquier expresión algebraica basados únicamente en procedimientos algorítmicos.

En relación con lo anterior, Torres (2005) sugiere cómo pueden ser relacionados estos dos conceptos apropiadamente desde un enfoque funcional y dilucidar su importancia en contextos de modelación, retomando la idea expuesta por Heid 1997, el cual propone que "un enfoque funcional al álgebra no necesariamente significa el estudio de funciones. Este enfoque, sin embargo, plantea la posibilidad de usar letras como variables -como opuestas a incógnitas". (citado en Torres L., 2005, p. 105)

En el enfoque funcional se propone considerar que, dentro de los contextos de modelación y algebraicos, la actividad matemática del estudiante se gestiona a partir de la conciencia de las relaciones de dependencia, de ver las expresiones algebraicas a partir de cantidades cambiantes, incluso aquellas cantidades constantes, por ejemplo, 250.0000, la cual puede surgir de la noción de función constante debido a que el coeficiente asociado a la variable es cero. En este sentido, Expresiones más complejas como las ecuaciones de cualquier tipo, por ejemplo, $25x + 12 = 250.000$, en consecuencia, son vistas como la igualdad de dos funciones y la variable x pasa a ser una incógnita.

De lo anterior se concluye que, las ecuaciones y funciones pueden ser estudiadas desde un enfoque funcional asociadas a procesos de modelación matemática, que favorezcan el estudio de sus relaciones, transformación o variaciones implícitas en el trabajo en simultaneo con estos dos objetos matemáticos.

En consecuencia, desde aquello que se ha mencionado hasta ahora, se presenta la oportunidad de abordar el estudio de las ecuaciones y funciones en la escuela que permita su desarrollo conceptual en procesos de modelación y no solo su caracterización y distinción entre un concepto y otro, también, la construcción de relaciones bien definidas entre ecuaciones y funciones de primer grado desde un enfoque funcional que contribuyan al desarrollo de conocimiento matemático con sentido.

Por lo tanto, con base a las reflexiones presentadas y el interés investigativo de los proponentes de este trabajo, se establece la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo a través de una propuesta de aula, que integra procesos de modelación matemática, se puede contribuir al establecimiento de relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en estudiantes de grado noveno en educación básica?

1.2. Objetivos

1.2.1. General

Contribuir al establecimiento de relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en estudiantes de grado noveno en educación básica a través de una propuesta de aula que integra procesos de modelación.

1.2.2. Específicos

- Fundamentar desde una perspectiva curricular, didáctica y matemática el problema de investigación relacionado con el establecimiento de la relación entre ecuación y función de primero grado.
- Articular en una propuesta de aula los resultados de la fundamentación estudiados desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática.
- Caracterizar las relaciones que establecen los estudiantes de grado noveno de la educación básica entre ecuaciones y funciones de primer grado a través de una propuesta de aula.

1.3. Justificación

Entre los elementos que apoyan la necesidad de dilucidar la problemática planteada, se encuentra la posibilidad de contribuir a resarcir entre los estudiantes procesos de aprendizajes que conduzcan al desarrollo de conocimiento matemático con significado, pues mediante el estudio de las ecuaciones y las funciones en contextos de modelación, se pueden abordar los obstáculos didácticos creados a través de la hegemonía de una educación matemática tradicional, especialmente para el caso de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. (Castro, E., 2012, p. 77).

Es así, que el presente trabajo constituye una propuesta para atender dicha necesidad, apoyados en la producción de una propuesta de aula, la cual se nutre de los desarrollos investigativos y permite, entre otros elementos, establecer una compleja estrategia de trabajo para el docente. Esta propuesta, a su vez, aporta elementos necesarios para presentar los objetos matemáticos (ecuación y función) como estrechamente relacionados y conducir a los estudiantes a espacios de aprendizaje apropiados, toda vez que toma ambos objetos matemáticos y se atiende a las diferentes necesidades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela (Novembre, 2005, p. 47), esto implica, la reflexión sobre cómo y en qué contextos se relacionan estos objetos matemáticos, presentando la oportunidad para que los estudiantes encuentren sentido pragmático de dichos objetos.

Otro elemento que sustenta la importancia de este trabajo es el aporte a las prácticas profesionales de los docentes en matemáticas, que, al considerar este trabajo como una herramienta para pensarse la selección, diseño e implementación de situaciones problemas en contextos de modelación; que requieren de modelos como las ecuaciones y las funciones de primer grado, contribuye a que pueden ver significativamente potenciadas sus prácticas en respuesta a la implementación de procesos de modelación matemática, lo cual se interpreta en un mayor conocimiento de este proceso y su implementación, estimulando de manera coherente el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos. Referente a esta idea, los lineamientos curriculares de matemática indican que:

La modelación es un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir,

revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. En consecuencia, se considera que todos los alumnos necesitan experimentar procesos de matematización que conduzcan al descubrimiento, creación y utilización de modelos en todos los niveles. (MEN, 1998, p. 80).

Por lo tanto, parece necesario ampliar los trabajos y propuestas de aula realizados en el estudio del álgebra en la educación básica secundaria que propongan un cambio de paradigma educativo y se apoyen en desarrollos investigativos de la actualidad, tal cual como se propone en el presente trabajo.

Por otra parte, en los procesos de la modelación se pueden estudiar los conceptos de función y ecuación simultáneamente y de la mano a una aplicación práctica debido al uso como herramienta de modelación asociados a estos. En este caso se conduce a resolver un problema didáctico; enseñar los conceptos mucho antes de que puedan ser utilizados en contextos de aplicación o siquiera abordados en situaciones problemas, lo que genera una reducción significativa en las posibilidades para los alumnos de reconocer rápidamente el valor y la importancia que tienen estos y otros aprendizajes, no solo en la vida diaria, sino también en contextos o procesos de educación superior.

Adicionalmente, desde nuestra experiencia como estudiantes de educación media y de educación superior en licenciatura en matemáticas, es posible contrastar que, la constante en el aprendizaje de las matemáticas es la aversión e inconformidad asociada a los conceptos y procedimientos matemáticos. Por lo que una razón importante, que sustenta la necesidad de abordar esta problemática, es nuestro interés como profesores en formación de posibilitar y viabilizar el cambio perceptivo en la educación media, incluso en la básica, con un aporte documental, investigativo y pragmático para la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones y

las funciones, que logre articular la potencia de estos conceptos como herramientas de modelación y las reflexiones anteriormente mencionadas.

Además, presentar la posibilidad de transformar las ideas generales que puedan tener los estudiantes acerca de la ecuación y su conceptualización con el de un objeto matemático dinámico, es decir, que como resultado de las relaciones entre ecuaciones y funciones potencialmente verificables se logre heredar o transferir la característica dinámica de las funciones a las ecuaciones.

En consecuencia, estudiar relaciones entre las ecuaciones y las funciones de primer grado mediante contextos de modelación, constituye un importante aporte en el desarrollo de soluciones, enfoques y recursos para la educación matemática, para abordar las dificultades y errores en el aprendizaje de las funciones y las ecuaciones. Con lo cual, desde este aporte investigativo, se pretende vincular a estudiantes de grado noveno en un ejercicio de modelación de fenómenos de variación en contextos de la vida cotidiana y matemáticos que apoyen la construcción de conocimiento matemático significativo sobre las funciones y las ecuaciones de primer grado, que a la postre, permita la posibilidad de ser extendida a expresiones algebraicas con grado superior a uno, por ejemplo: funciones y ecuaciones de segundo grado.

1.4. Antecedentes

En las diversas investigaciones realizadas en Didáctica de las matemáticas se han presentado trabajos enfocados en el estudio de las funciones y ecuaciones separadas una de la otra. A nivel local, desarrolladas en la Universidad del Valle, se han encontrado muy pocas

investigaciones que se enfoquen en establecer o propiciar el establecimiento de relaciones entre estos dos conceptos matemáticos. A nivel nacional, en la Universidad Nacional de Colombia y la Universidad del Cauca, se identifican algunas investigaciones que se centran en los errores y dificultades que se presentan al resolver ecuaciones y funciones, pero en estos trabajos no se explicita la relación o no trabajan con base en ella, sino que son tratados de la forma tradicional, por separado. Estas investigaciones realizadas en el ámbito local y nacional se presentan de manera rápida en las siguientes tres secciones.

1.4.1. Relacionados con el aprendizaje de las ecuaciones

En investigaciones realizadas en el campo de la educación matemática, a nivel local, se destacan tres trabajos de grado desarrollados sobre el estudio de las dificultades que se presentan en el trabajo con las ecuaciones; como el de Galeano, O. y Váquiro, L. (2016), “Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la balanza”, Universidad del Valle, Cali, en el que aborda las dificultades que presentan los estudiantes en la transición del pensamiento aritmético al algebraico, enfocándose en la resolución de ecuaciones de primer grado. Para superar este tipo de errores se implementa un modelo virtual de la balanza, que es un programa dinámico basado en el modelo concreto de la balanza tradicional, en la Fundación Educativa Santa Isabel de Hungría sede compartir. Como resultado fundamental, se presenta la importancia de hacer énfasis en la relación de la equivalencia que guardan los miembros de la ecuación, inscrito en el trabajo en el aula en la resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

El trabajo de Echeverri, G. y Sombredero, N. (2014), “Dificultades en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno”,

Universidad del Valle, Cali, se enfoca en analizar las dificultades que presentan los estudiantes cuando utilizan los métodos de solución para resolver sistemas de ecuaciones lineales, para este análisis se aplicó un cuestionario a docentes del área de matemáticas que enseñan en grado noveno, para conocer la metodología utilizada y las dificultades que ellos detectan, y un examen diagnóstico a estudiantes de grado noveno. De esta implementación los autores destacan; abordar el concepto desde problemas contextualizados y cambios de registro y la importancia que tiene la metodología usada por los docentes para obtener resultados positivos o negativos. Además, enfatizan en la influencia que tiene las condiciones sociales y económicas de la institución en el estudiante.

Una tercera propuesta es el trabajo de López, H. y Messa, J. (2013) “Una aproximación al aprendizaje de la noción de ecuación lineal en grado noveno”, que propone enriquecer el aprendizaje de las ecuaciones a través de una situación problema en el contexto de las ventas. Está se enfoca en reconocer la relación que se establece entre dos cantidades que varían y su dependencia a través de la comprensión de los factores que condicionan el proceso de variabilidad. Se aplicó esta propuesta a estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Manuel Dolores Mondragón del Municipio de Bolívar y se pudo evidenciar que el diseño de situaciones problema favorece una visión del conocimiento matemático como proceso que admite pluralidad de procedimientos y permite la discusión y el desarrollo de la capacidad de justificar con argumentos claros mediados por las nociones o conceptualizaciones.

Los trabajos anteriores muestran que en el estudio de las ecuaciones sobresalen las siguientes dificultades: en la exposición de ejemplos propuestos a los estudiantes existe una tendencia a memorizar y repetir el ejemplo como una generalidad sin lograr asociar los conceptos, al pasar del lenguaje natural al lenguaje formal y en el marco de la resolución de problemas el estudiante descontextualiza la situación problema de la respuestas encontradas, esto último se entiende como la no interpretación de las soluciones de una ecuación con aquello que sugiere la situación problema, como soluciones negativas asociadas a contextos de tiempo, velocidad, volumen, etc.

1.4.2. Relacionados con el aprendizaje de las funciones

En los trabajos a nivel local con relación a la función, se destaca el trabajo de Posso, J. (2020) “Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática”, en el que se estudia la variación desde un enfoque covariacional asociada a la función cuadrática, implementando una secuencia didáctica en la Institución educativa el Hormiguero. El diseño propuesto, tiene la intención de desarrollar y potenciar el pensamiento variacional a partir del análisis de relaciones funcionales, como una relación de dependencia, centrando la atención en el estudio de la variación y el cambio presente en situaciones dinámicas, de acuerdo con el enfoque covariacional, siendo el proceso de modelación un factor fundamental. De la implementación el autor concluyó que potenciar el pensamiento variacional impulsa la comprensión de las propiedades de la función cuadrática como una dependencia entre variables, además, contribuye a desarrollar procesos de modelación que permitan una mejor conceptualización de la función.

El trabajo relacionado con la modelación de Henao, S. y Vanegas, J. (2012) “*La modelación matemática en la educación matemática realista: Un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos*”, propone estudiar los procesos de modelación matemática en el marco de la educación matemática realista, con el trabajo de modelos cuadráticos en estudiantes de últimos grados de educación media (10° y 11°). Para eso se hace una implementación en el Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle en la que se proponen varias tareas en las que el estudiante debe usar; procesos de generalización, relaciones cuadráticas, procesos de modelación, entre otros. Como resultados fundamentales: los estudiantes realizan procesos intuitivos, usan conceptos matemáticos y estrategias heurísticas para encontrar modelos que les permitan conectar las matemáticas con fenómenos cotidianos, ellos prefieren usar sus propios modelos que limitarse a la generación de un modelo general, aunque los estudiantes se dan cuenta de la necesidad de emplear herramientas matemáticas para analizar situaciones no matemáticas.

Finalmente, el trabajo en el que se perciben las relaciones funcionales, es el de Cuellar, A. (2014) “*Un acercamiento a través del lenguaje de programación TI-BASIC a la variable como relación funcional*”, el cual procura estudiar el tipo de acercamiento que tienen los estudiantes a la variable como relación funcional, para esto se realiza una implementación de una secuencia didáctica en el colegio San Pedro Claver, en la que se usa un sistema algebraico computacional (CAS) junto con elementos del lenguaje de programación TI-BASIC. El análisis de la implementación permite concluir que: las tareas ayudan a los estudiantes a establecer relaciones y correspondencia entre las variables dependientes e independientes, el lenguaje de

programación en una herramienta que ayuda a motivar a los estudiantes y está relacionada con su cultura informática, además que la programación exige al estudiante un pensamiento ordenado.

Estos trabajos de grados realizados en la Universidad del Valle contribuyeron al planteamiento del problema de esta investigación respecto a las dificultades que presentan los estudiantes en el trabajo con las funciones. También aportaron con aspectos teóricos para la realización de la propuesta con base a la modelación, en este sentido, se resalta la investigación de Posso, J. (2020) quien trabaja la función desde los procesos de covariación en la modelación, el cual permite identificar la importancia que tienen los procesos de modelación en el trabajo y tratamiento con la función cuadrática. Pero no se encontraron trabajos en los que se articulen las ecuaciones y funciones a través de procesos de modelación que, a su vez, contemple establecer y reconocer relaciones entre ellas, por ejemplo; cómo una noción conduce a la otras, los tratamientos que en un concepto tienen cabida y que en el otro no, en especial, la concepción de ecuación cómo la igualdad entre dos funciones, entre otras.

1.4.3. Relacionados con el aprendizaje de las funciones y las ecuaciones

En las investigaciones a nivel nacional, sobre las ecuaciones y funciones, se destacan dos trabajos. El trabajo de Muelas, J. (2014), “Estrategias de enseñanza de ecuaciones y funciones matemáticas mediante el texto conceptual y el uso de las Tics en estudiantes del grado noveno de la institución educativa el Palmar, Santander de Quilichao – Cauca”, Universidad Nacional de Colombia, Palmira, presenta el uso de la pedagogía conceptual¹ como una propuesta para superar algunas dificultades que exhiben los estudiantes cuando se introducen los conceptos de

¹La pedagogía conceptual busca desarrollar las operaciones intelectuales, donde se privilegia el aprendizaje de carácter general y abstracto sobre los particulares y específicos.

ecuación y función en el aula. Se realizó una implementación con 31 estudiantes pertenecientes a dos grupos de noveno grado de la Institución Educativa El Palmar, en el municipio de Santander de Quilichao -Cauca, en la que se pudo apreciar los beneficios de usar la pedagogía conceptual, como lo son: la claridad conceptual sobre la ecuación y función y la ampliación del conocimiento algebraico a partir de la lectura y la escritura integrada con el uso de videos, mapas de palabras, mapas conceptuales y redacción de textos.

Otro trabajo es el de Muelas, G. Velasco, S. (2018), “Errores que presentan los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt de Popayán, al desarrollar ejercicios sobre función y ecuación cuadráticas” Universidad del Cauca, Popayán, en el que se describen e identifican los errores que los estudiantes presentan al resolver ejercicios que utilizan la función cuadrática y ecuación cuadrática desde dos perspectivas, la perspectiva constructivista; a partir de los significados provistos por los participantes del estudio, y fenomenológica; abordando los elementos del error que se manifiestan en el aula de clase, además que el análisis de estos errores les permite concluir que son una clara evidencia de una o varias dificultades.

El trabajo de Muelas, G. Velasco, S. (2018) aporta al planteamiento del problema desde sus distintas perspectivas y permite reconocer algunos errores de los estudiantes al momento de enfrentarse con este contenido matemático ya que se enfocan en la caracterización de errores que se identifican al introducir y tratar el concepto de ecuación y función en el aula. A partir de la actividad diagnóstica y dos talleres sobre ecuaciones y funciones de segundo grado los

investigadores lograron reconocer tres tipos de errores, como; los errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, que se relaciona con los esquemas mentales que el estudiante ha construido para resolver ejercicios o problemas matemáticos para un concepto en específico pero estos esquemas mentales ya no son útiles en otros contenidos matemáticos y al ser usados produce errores en las operaciones y en la codificación de la información; los errores debidos a dificultades de lenguaje, relacionado con la resolución de problemas específicamente al momento de pasar del lenguaje natural a un lenguaje técnico-formal, esto genera dificultades en la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, la codificación de la información y el manejo de conceptos; los errores debidos a dificultades para obtener información espacial, asociado a la capacidad de pensar por medio de imágenes espaciales o visuales para interpretar representaciones icónicas de situaciones matemáticas que se puede caracterizar como errores en la percepción espacial y en la comprensión de información gráfica.

Se destaca el trabajo Muelas, J. (2014), que presenta la pedagogía conceptual como una oportunidad para abordar las dificultades en los estudiantes, esta propuesta se fundamenta en una pedagogía conceptual en la que se usan estrategias didácticas para que los estudiantes logren ordenar la información y esquematizarla para facilitar la comprensión, se usan métodos conceptuales como: el mapa conceptual, el mapa de la palabra, mentefacto y textos conceptuales. Esta propuesta es enriquecedora para el trabajo en el aula porque brinda herramientas para atender algunas dificultades que se presentan en los estudiantes.

Si bien, estos trabajos consideran ambos objetos matemáticos y aportan consideraciones relevantes referentes a los errores evidenciados en el trabajo con estos, no pretenden establecer relaciones o la forma como se pueden articular ambos conceptos, por lo tanto, como se observa,

no se destacan trabajos a nivel local y nacional que se propongan abordar el estudio y establecimiento de relaciones existentes entre la ecuación y la función, lo cual apoya el interés y la necesidad de avanzar en la presente propuesta de investigación.

Capítulo II. Marco de referencia conceptual

En este apartado se presenta el soporte curricular, didáctico, conceptual y contextual del problema de investigación. Para efectos de orden, se divide en tres partes: la perspectiva curricular, la perspectiva didáctica y la perspectiva disciplinar (matemática). Desde estas tres perspectivas se analiza la literatura relacionada con; el estudio de los sistemas algebraicos y analíticos para desarrollar el pensamiento variacional relacionado con las ecuaciones y las funciones, el estudio de la variación, la modelación y las investigaciones que articulen la función y la ecuación.

2.1. Perspectiva curricular

En el marco de los referentes curriculares en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) proporciona varios documentos que permiten abordar las orientaciones generales a nivel nacional. Desde este marco curricular se consideran tres documentos que sustentan el desarrollo de la presente investigación, los cuales son: Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016).

Estos referentes se articulan para brindar una mirada cohesionada entorno al desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pensamiento desde el cual se establece con claridad el lugar de los procesos de modelación matemática y los modelos algebraicos que favorecen la construcción de sentido matemático y, a su vez, sustentan una estructura organizacional, evaluativa y proposicional sugerida para pensarse los procesos de formación en las instituciones de educación básica y media.

2.1.1. Lineamientos Curriculares de Matemáticas

En la década de 1990 surgen algunos interrogantes respecto al sentido y la función de la pedagogía, sobre qué se debe enseñar y aprender en la escuela de siglo XXI, perspectiva que dio origen a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (LCM) del Ministerio de Educación Nacional (MEN), los cuales pretenden atender a estas necesidades, promoviendo y orientando los procesos curriculares de las instituciones.

Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) presentan como objetivo principal del currículo construir una educación matemática con sentido para el alumno, argumentando que:

Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no solo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica, sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella. (p. 18).

De acuerdo con esta visión, el MEN propone tres aspectos para organizar el currículo, los cuales son:

- Los *procesos generales* que están relacionados con el aprendizaje, así como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Estos procesos se perciben vitales para lograr cumplir con los objetivos de la educación, especialmente para el presente trabajo, los procesos de modelación apoyan contundentemente la elaboración de modelos y el uso significativo de los modelos asociados como; las ecuaciones y las funciones.

- Los *conocimientos básicos* que tienen que ver con procesos específicos relacionados con el desarrollo del pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, y con sistemas propios de las matemáticas; sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

En efecto, el desarrollo del pensamiento variacional, al igual que los demás pensamientos, sugiere la articulación de distintos conocimientos matemáticos en el ejercicio de una aproximación a conceptos y conocimientos característicos de este pensamiento, como lo son; las expresiones algebraicas, la variación y el cambio, variable, entre otras, lo cual permite una mejor articulación entre los diferentes contenidos matemáticos, apoyando la construcción de pensamiento matemático unificado.

- Los *contextos*, que guarda relación con los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a las matemáticas que aprende.

Al considerar situaciones de la vida diaria y matemática, se explora la posibilidad de producir modelos inicialmente cercanos al estudiante para transitar hacia modelos un poco más abstractos, respectivamente. Con esto, lo que se pretende es establecer no solo los contextos en los que se inscribe la producción de modelos, también, un orden que

facilite las formas de hacer matemáticas por parte de los alumnos de modo que, los conocimientos desarrollados, cobren sentido matemático y puedan ser apropiados como herramientas para el análisis y comprensión de su realidad.

Estos tres aspectos articulados permiten abordar eficazmente los objetivos que se tienen con la educación matemática en el desarrollo de los conocimientos básicos, sobre los cuales deben promoverse los procesos generales para acercar a los estudiantes a las matemáticas a través de las situaciones problema, la modelación de fenómenos, la comunicación de ideas, entre otros. Todo esto enfocado en la orientación conceptual por parte de los estudiantes y el desarrollo de competencias. Vasco (2003) señala que:

La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue pues un paso adelante muy significativo, pues pone el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su utilización socialmente más poderosa: La modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para “resolver problemas”, los cuales, más que problemas abiertos y retadores, son apenas ejercicios escolares, por necesarios que estos sean. (p. 4).

Este apartado señala la importancia que tiene la modelación de fenómenos dentro de los procesos matemáticos en los LCM, que permite favorecer el pensamiento variacional, en el que los procesos y conceptos deben estar vinculados para permitir procesos de análisis, orden y modelación dentro de las matemáticas de la vida cotidiana, matemáticas escolares y de punta.

- **Pensamiento variacional asociado a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.**

Teniendo en cuenta los conocimientos básicos, se discute la injerencia del pensamiento variacional y la función como elemento característico de este pensamiento. Primeramente, Vasco (2003) afirma que:

El pensamiento variacional es una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 6).

En este caso, Vasco (2003) define el pensamiento variacional desde una perspectiva dinámica, en la que el estudiante debe identificar qué está cambiando y cómo está cambiando, al igual que lo que se mantiene constante de los fenómenos que se estudian matemáticamente.

Además, el pensamiento variacional, al igual que el estudio de la función, se construye en contextos de dependencia entre variables, no obstante, como el estudio de la función se conduce de forma procedimental y algorítmica, cobra un valor práctico inscrita en el pensamiento variacional debido a que se transforma en una poderosa herramienta para modelar fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. Análogamente, la tabla es una herramienta importante dentro del pensamiento variacional, porque permite organizar datos para identificar patrones, graficar y comprender el concepto de variable, al igual que en el estudio de las funciones.

En consecuencia, los LCM exponen que:

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. (MEN, 1998, p. 51).

Así pues, la función cobra un alto significado como modelo en el desarrollo del pensamiento variacional y su uso transversal en los procesos de modelación matemática, en tanto sobre la ecuación, como objeto y modelo matemático, muy poco de su uso se detalla en este documento al inscribirse en las expresiones algebraicas.

2.1.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Al igual que los LCM, los Estándares Básicos de Competencias (EBC) surgen en el marco de un cambio de paradigma educativo, con el objetivo de reorganizar, redefinir y reestructurar cómo se piensa la educación matemática, ya que se reconocieron factores importantes en la educación básica y media que no se habían priorizado, como lo son: la educación de calidad para todos, la educación matemática como un factor social que ayuda al ciudadano a desempeñarse de forma activa y crítica socialmente y la educación matemática como fortalecedor de valores democráticos.

Una diferencia entre los LCM y los EBC es la evolución de la noción de competencia matemática. Por un lado, en los LCM se entendía como “una consideración pragmática e

instrumental del conocimiento matemático” (MEN, 2006, p. 48), en la que los conocimientos desarrollados dentro del aula de clases contribuían a la práctica institucional y no institucional como herramientas eficaces.

Por otro lado, en los EBC la noción de competencia se concibe como “conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz, y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.” (MEN, 2006, p. 49). En este sentido, el aprendizaje por competencias se enfoca en la construcción del conocimiento teniendo en cuenta los niveles de progreso de los individuos asociada a cada competencia, no como un acto de poseer o no, sino, cambiando la forma en que se evalúa a los estudiantes, considerando el aprendizaje amplio, significativo, práctico y reflexivo, y el desarrollo de un individuo matemáticamente competente.

Por lo tanto, la evolución del concepto de competencia conduce a la reflexión sobre cómo se piensa la educación matemática en la actualidad, los nuevos desafíos que suscita una educación desarrollada por competencias y la consolidación del aprendizaje asociada a desarrollos y logros de los estudiantes en función de un ser matemáticamente competente. Esto último, profundamente relacionado con la concepción sobre el desarrollo del conocimiento matemático en consideración a dos fases; práctica y formal, y dos tipos básicos; conceptual y procedimental, que permiten entender el desarrollo de un ser matemáticamente competente.

- **El pensamiento variacional en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas.**

La noción de competencia, anteriormente expuesta, asociada al desarrollo del pensamiento variacional en los EBC, parte de la premisa del establecimiento de relaciones extendidas en todos los ciclos de escolaridad entre los procesos y las competencias, que permita mejores aproximaciones a los contenidos matemáticos y al desarrollo del pensamiento matemático. En esta dirección, el pensamiento variacional está relacionado con “el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.” (MEN. 2006, p. 66).

Adicionalmente, uno de los objetivos del desarrollo de este pensamiento en los EBC es contribuir, desde los primeros años de escolaridad y en la educación básica, a proximidades significativas sobre el uso de las funciones por medio de actividades relacionadas con el estudio de regularidades e identificación de patrones, como: el análisis y estudio del cambio o la creación de conjeturas sobre los términos subsecuentes de una secuencia, entre otros, que conducen transversalmente a las matemáticas formales asociadas a los sistemas algebraicos y analíticos, pensadas para desarrollar en el último ciclo escolar, es decir, la educación media.

A su vez, en el desarrollo de este pensamiento se consideran indispensables los conocimientos relacionados con la variación; lo que cambia, la dependencia, lo que permanece

constante y la relación de las variables que intervienen, lo cual permite fomentar el desarrollo de los procesos de generalización con el uso de tablas y graficas asociadas al estudio de las ecuaciones, inecuaciones, desigualdades y funciones, además, presentan un gran contenido de elementos conceptuales comunes a los otros cuatro pensamientos (numérico, espacial, métrico y aleatorio) que posibilitan el desarrollo en conjunto del pensamiento matemático, lo cual sugiere tener claras las relaciones que se pueden establecer entre ellos. Así, se evidencia que los EBC asumen el establecimiento de una estructura cohesionada entre los diferentes pensamientos, competencias, procesos y procedimientos que se asocian a los contenidos matemáticos.

En relación con lo anterior, los EBC proponen pensar la relación entre los diferentes pensamientos y competencias a desarrollar bajo una articulación en dos sentidos; la coherencia vertical y horizontal, las cuales permiten contemplar rutas estratégicas de desarrollo del pensamiento matemático en todos los diferentes ciclos escolares, que no se consideran únicas o explícitas, dadas las muchas interpretaciones que puede desprenderse de las formas en cómo se abordan los contenidos matemáticos y sus aproximaciones.

Por un lado, la coherencia vertical se desarrolla estableciendo las relaciones que tienen los diferentes estándares de un mismo pensamiento durante todos los ciclos escolares, en tanto que, por el lado de la coherencia horizontal, se relacionan los estándares de un mismo pensamiento con otros estándares sugeridos en los demás pensamientos en un mismo ciclo escolar. Esta organización o selección de estándares que se relacionan en los dos sentidos, horizontal y vertical, constituyen una propuesta para interpretar cómo, a lo largo del proceso de formación y aprendizaje de los estudiantes, se puede pensar el desarrollo de uno o varios contenidos matemáticos.

En el presente trabajo se logran identificar dos estándares apropiados que permiten situar curricularmente nuestra investigación, los cuales se encuentran inscritos en el marco del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos del ciclo escolar octavo y noveno. A continuación, se presentan los dos estándares seleccionados, una interpretación sobre la coherencia vertical y horizontal y una breve descripción.

El primer estándar está relacionado con el contenido matemático; ecuaciones y las gráficas, caracterizado por el reconocimiento de sus propiedades: “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas”.

Para este estándar, la coherencia vertical y horizontal se representa en la *Figura 1*, en la cual se consideran diferentes estándares relacionados con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos. En la coherencia vertical, los contenidos matemáticos que se mantienen constantes son las ecuaciones, las gráficas y el ejercicio de establecer relaciones entre ellas, y aquello que cambia en los diferentes ciclos de escolaridad es la forma en cómo estos contenidos van apareciendo a partir de los primeros acercamientos en diferentes contextos de variación, hasta poder reconciliarlos mediante el establecimiento de sus relaciones vistas como herramientas de análisis de la información. Por el lado de la coherencia horizontal, la asociación está en cómo se articulan las diferentes herramientas procedentes de los otros pensamientos; procedimiento de cálculo (pensamiento métrico), propiedades y relaciones de los números reales (pensamiento numérico) y representaciones geométricas (pensamiento espacial), con relación al uso de la

información en sus diferentes representaciones, resaltando la importancia de la articulación entre los diferentes pensamientos.

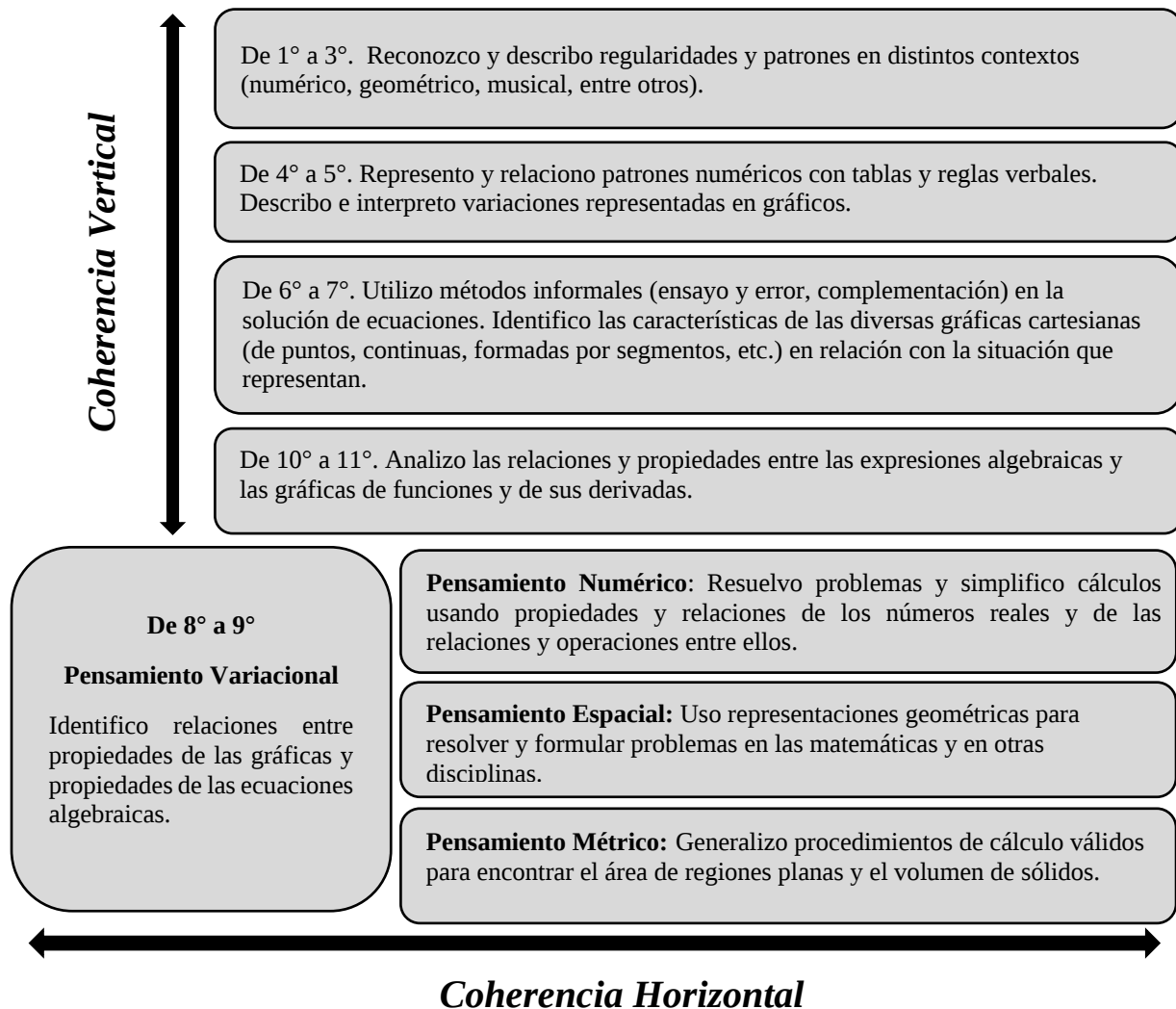


Figura 1. Coherencia vertical y horizontal del estándar "Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas"

El segundo estándar está relacionado con el contenido matemático; funciones polinómicas y la variación, caracterizado por el proceso de modelación: “Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas”.

Para este estándar, la coherencia vertical y horizontal se representa en la figura 2, en la cual se consideran diferentes estándares relacionados con el pensamiento variacional y sistemas algebraicos. Para el caso de la coherencia vertical, el contenido matemático es el mismo: la modelación, pero lo que varía entre un grupo de escolaridad a otro es la forma en cómo se describen situaciones de modelación y la complejidad de los modelos usados. La coherencia horizontal, en los procesos de modelación es necesario el uso de procedimientos de cálculo (pensamiento métrico) apoyados en las propiedades y relaciones de los números reales (pensamiento numérico) y en las representaciones geométricas (pensamiento espacial).

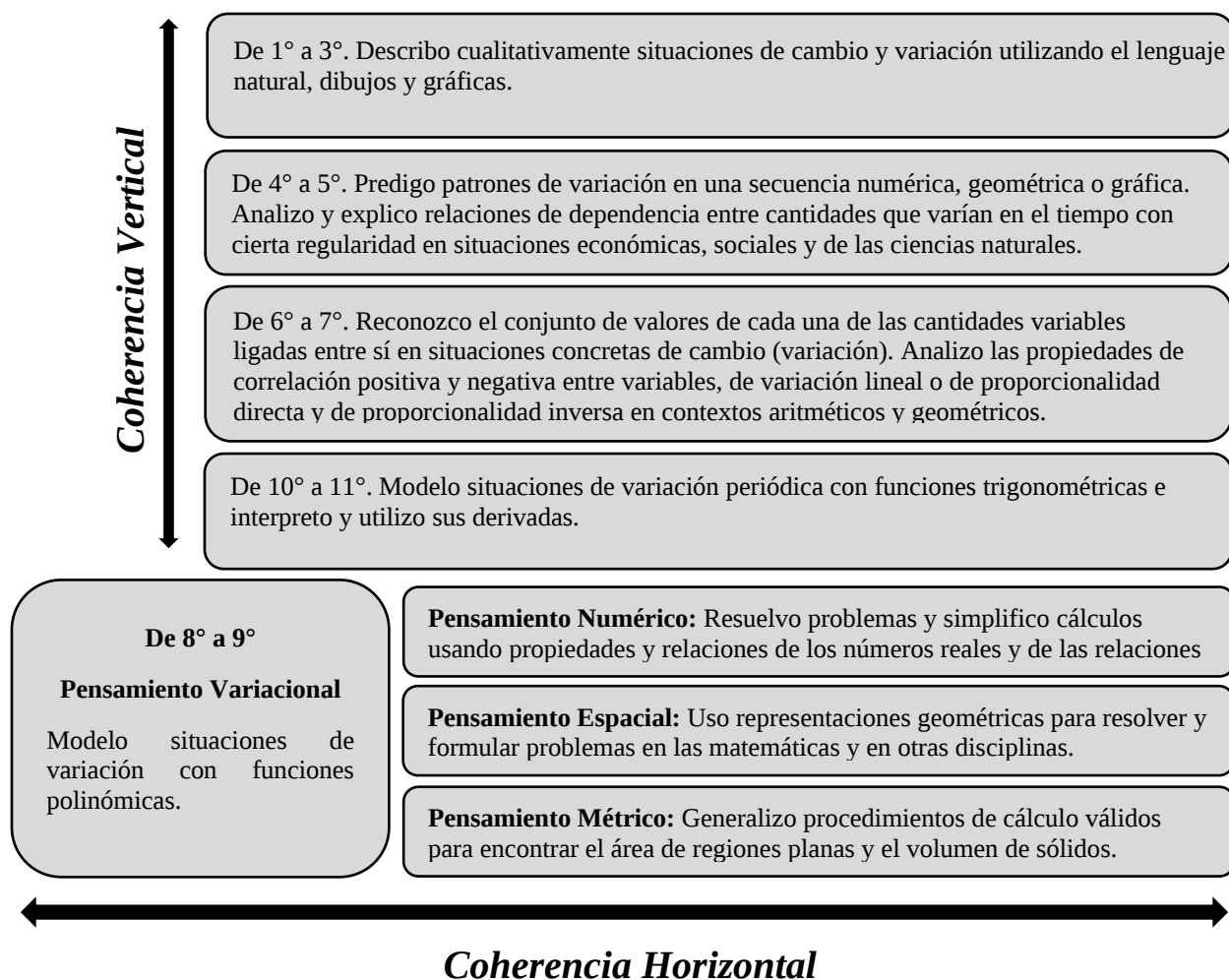


Figura 2. Coherencia vertical y horizontal del estándar "Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas"

2.1.3. Derechos Básicos de Aprendizaje

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) son un conjunto de conocimientos y habilidades que se espera los estudiantes puedan adelantar para precisar evidencias de aprendizaje y sustentar sus aproximaciones en el desarrollo de competencias en cada grado escolar. Los DBA se encuentran relacionados directamente con los LCM y EBC, brindando una

reinterpretación orientada a plantear rutas de aprendizaje por competencias sugeridas para el desarrollo del conocimiento matemático para cada año escolar.

A continuación, se presentan dos enunciados propuestos en los DBA con sus respectivas evidencias de aprendizaje; acciones de los estudiantes que indican una aproximación en cierto nivel a los aprendizajes propuestos en el enunciado, asociado al desarrollo del pensamiento variacional y el estudio de ecuaciones y funciones.

En el octavo DBA del grado octavo se propone lo siguiente: “Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y característicos de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación” (MEN,2016, p. 63). Este DBA presenta una forma de abordar las expresiones algebraicas desde la variación, covariación en situaciones de modelación a las que el estudiante se enfrenta.

Las evidencias de aprendizaje de este enunciado en los DBA (MEN, 2016), son:

Opera con formas simbólicas y las interpreta, relaciona un cambio en la variable independiente con el cambio correspondiente en la variable dependiente, encuentra valores desconocidos en ecuaciones algebraicas y reconoce y representa relaciones numéricas mediante expresiones algebraicas y encuentra el conjunto de variación de una variable en función del contexto. (p. 63).

Estas evidencias se apoyan en las competencias relacionadas con el pensamiento variacional.

En el décimo DBA del grado octavo enuncia lo siguiente: “Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).” (MEN, 2016, p. 64). Se aborda el concepto de función desde las relaciones funcionales y los procesos de covariación.

Las evidencias de aprendizaje relacionadas con el enunciado diez son: “toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados y relaciona características algebraicas de las funciones, sus gráficas y procesos de aproximación sucesiva” (MEN, 2016, p. 64).

Estos DBA indicados apoyan de manera directa los estándares presentados anteriormente, toda vez que articulan dichos estándares con algunos procesos generales que orientan una clara interpretación de los avances, en términos de competencias, de los individuos y permite identificar y justificar un horizonte de acompañamiento para cada estudiante.

2.2. Perspectiva didáctica

Los elementos que se circunscriben en la perspectiva didáctica brindan una aproximación a la fundamentación de las consideraciones necesarias para identificar cómo se entiende la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas actuales, puntualmente para el caso de las funciones y ecuaciones. Para esto, se consideran tres grandes aspectos: las dificultades y errores en el aprendizaje de las ecuaciones y las funciones: que responden y brindan contexto sobre las

situaciones problemáticas en el aprendizaje de estos conceptos, la teoría de la educación matemática realista EMR; la cual provee de elementos teóricos para interpretar y pensarse cómo abordar estas problemáticas de aprendizaje, y las consideraciones sobre las secuencias didácticas; que supone la posibilidad de organizar y explicitar la forma en que se puede intervenir en el aula.

A continuación, se presentan cada uno de estos tres grandes aspectos que fundamentan la perspectiva didáctica.

2.2.1. Dificultades y errores en el aprendizaje de las ecuaciones y las funciones

Las dificultades y los errores son un foco de estudio e investigación en el campo de la educación matemática, porque cuando se identifican las dificultades y se analizan sus causas se puede propiciar una enseñanza adecuada del álgebra y facilitar su aprendizaje creando alternativas efectivas para superar las dificultades y corregir los errores.

El aprendizaje del álgebra genera muchas dificultades que se exteriorizan en los estudiantes como errores, entendiendo error como “la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste” (Socas, 1997, p. 125). La caracterización de las dificultades y los errores en el aprendizaje de las ecuaciones y las funciones es relevante para el desarrollo de esta investigación, específicamente en el diseño de una propuesta de aula, ya que se deben tener en cuenta para crear estrategias que ayuden a preverlas y abordarlas.

A continuación, se presenta una propuesta de síntesis y agrupación a través de dos tablas, sobre ciertas dificultades y errores presentes en los estudiantes dentro del estudio de la variación asociado a la manipulación y comprensión de los conceptos de ecuación y función de primer grado, apoyados en la tipificación y caracterización que propone Martín Socas en su texto “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación Secundaria” (1997, p.125-154). Este ejercicio de síntesis guarda estrecha relación con los antecedentes consultados del *capítulo 1* y nuestra experiencia personal.

Para la construcción de la *Tabla 1* y *Tabla 2* se usaron los errores que se exponen en los textos presentes en el planteamiento del problema del Capítulo 1 (Castro, 2012; Cuevas, Delgado y Martínez, 2018; López, Sosa, 2008; Novembre, 2005; Sánchez, 2014) y algunos otros errores se identificaron de experiencias personales de los investigadores, y como se comentó anteriormente, la tipificación presentada por Socas (1997) cómo evidencia o presencia de una dificultad. La forma de agrupar y asociar las dificultades y errores presentados en las tablas conduce una revisión detenida de lo desarrollado por Socas y la interpretación de los proponentes del presente trabajo.

En la *Tabla 1* se explicitan algunas dificultades que están presentes en el aprendizaje de las ecuaciones y algunos errores. Estas se clasifican en dos grandes grupos: Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, que están relacionadas “con los diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos” (Socas, 1997, p. 127) y dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, las cuales se perciben en “la naturaleza de las matemáticas y en las rupturas que se dan necesariamente en relación con los modos de pensamiento matemático” (Socas, 1997, p. 130).

Tabla 1

Dificultades y errores en el aprendizaje de las ecuaciones

		<i>Errores</i>
<i>Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas</i>	Dificultades relacionadas con las operaciones	Operar expresiones que no son semejantes. No ubicar de manera correcta los términos semejantes en el mismo lado de la ecuación. Uso incorrecto de la ley de signos.
	Dificultades relacionadas con las propiedades básicas de los números	No usar correctamente la propiedad distributiva con respecto a la suma. Aplicar la propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la suma con un mal uso de los inversos aditivos. Aplicar la propiedad uniforme de la igualdad con respecto a la multiplicación con un mal uso de los inversos aditivos. Al transponer una cantidad, invertir las operaciones.
	Dificultades en la incomprensión de la simbología	No reconocer las letras como la representación de una cantidad desconocida. Designar diferentes cantidades para una letra. Expresar la misma cantidad usando diferentes letras.
<i>Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático</i>	Dificultades en la resolución de problemas	Establecer mal las relaciones entre las cantidades expuestas en el enunciado del problema. Usar diferentes variables para representar cantidades desconocidas relacionadas a un enunciado problema cuando es posible expresarlas con una sola variable. Reemplazar la solución encontrada en alguna de las variables y no en todas. Igualar dos expresiones que no representan la misma cantidad. No relacionar las posibles soluciones al contexto del problema.
	Dificultades relacionadas con el paso de un sistema de representación a otro	En el paso de lo discreto (representación tabular) a lo continuo (representación de la función lineal en GeoGebra) unir los puntos sin reflexionar sobre la imposibilidad de obtener una gráfica continua en el contexto de una situación discreta.

En la *Tabla 2* se realiza un ejercicio análogo al hecho anteriormente en la *Tabla 1*, clasificando las dificultades asociadas al concepto de función en dos grandes grupos:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, y los errores que se evidencian asociados a dichas dificultades.

Tabla 2

Dificultades y errores en el aprendizaje de las funciones

<i>Errores</i>		
<i>Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas</i>	Dificultades relacionadas con las operaciones	Mal uso de la ley de signos en la realización de operaciones básicas.
	Dificultades en la comprensión de la simbología	No relacionar el signo del punto intercepto con la intersección con el eje Y de la representación gráfica. No relacionar el signo de la pendiente con la monotonía de la función. No distinguir entre variable e incógnita. No distinguir entre variable dependiente e independiente. Asociar el concepto de función a la presencia de la notación $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc. No distinguir entre las abscisas y las ordenadas.
<i>Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático</i>	Dificultades en la resolución de problemas	Identificar las variables dependientes como independientes en un fenómeno o problema. Identificar las variables independientes como dependientes en un fenómeno o problema. No tener en cuenta el dominio de la situación problema para dar una respuesta. Mal uso de los algoritmos al resolver problemas. Aplicar incorrectamente la fórmula de la pendiente. No establece correctamente una expresión algebraica que modele el problema.
	Dificultades relacionadas con el paso de un sistema de representación a otro	Ubicar incorrectamente los pares ordenados de una tabla a un plano cartesiano al trazar la representación gráfica de la función. Determina de forma incorrecta los pares ordenados presentes en una gráfica.

Por otra parte, para algunas dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos de pensamiento matemático, hay algunos errores que se repiten en uno y otro concepto, lo que parece natural, ya que, tanto para ecuación como función, su estudio y manipulación se apoyan en conocimientos provenientes de la aritmética, la geometría, entre otros.

Lo anterior no sugiere causa y efecto, es decir, que la presencia de un error en uno u otro concepto inmediatamente implica estar en el otro, pero sí, la posibilidad de tratar dichos errores en simultaneo cuando se trabajan los conceptos de ecuación y función relacionados. Esto se torna trascendental en el proceso y consolidación de las diferentes propuestas de aula, ya que son materia de análisis fundamental en la elaboración de una tarea, por ejemplo, que considere establecer un modelo lineal de una situación problema.

Por otro lado, respecto a las dificultades en la relación entre ecuaciones y funciones no hay más información de la que ya se propuso en el *apartado 1* en la presentación del problema, pero se quiere resaltar el trabajo de López, J. y Sosa, L. (2007) que presentan en su texto “¿Funciones o ecuaciones? Dificultades conceptuales y procedimentales” las dificultades que los estudiantes enfrentan para discernir de manera práctica entre los conceptos de ecuación y función. Según los autores, estas dificultades se originan en la manera en cómo se enseña el concepto de función. Por un lado, la diversidad de las formas en que se presenta el concepto por medio de representaciones que dificultan la evidencia de una relación de dependencia entre dos variables y, por otro lado, el tratamiento superficial que se le da a lo conceptual para centrarse en lo algorítmico.

Las dificultades y errores que los autores que se encontraron fueron: identificar una función como una ecuación con gráfica, considerar que una función no podría ser representada por una gráfica segmentada, no poder discernir entre ecuación y función dadas las similitudes que tienen como: el uso de literales, tratamiento algebraico similar, entre otras. Además, plantean que no distinguir entre variable e incógnitas impide que los alumnos identifiquen cuando una situación problema debe ser abordada con ecuaciones o funciones, entre otros.

En conclusión, cuando las relaciones y rupturas que hay entre función y ecuación no son claras y explícitas en la clase, además de otras consideraciones, se empieza a construir una idea equivocada de estos conceptos, llevando a los estudiantes a presentar dificultades y cometer una cantidad de errores que pueden transitar a tal punto de volverse endémicos en su actividad matemática.

2.2.2. La modelación desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista

Gracias a las investigaciones y avances en la educación matemática se han construido diferentes enfoques o fundamentaciones teóricas; como resultado, entre otras cosas, del estudio y la complejidad de los objetos matemáticos, su enseñanza y aprendizaje, que han hecho posible abordar, desde la particularidad del enfoque, la comprensión y la tipificación de potencialidades y posibles obstáculos presentes en la enseñanza y aprendizaje de estos objetos matemáticos, para pensarse la formación matemática, a diferentes niveles, con un mayor grado de asertividad. Algunos de estos enfoques son: la educación matemática crítica, la educación matemática

realista, la etnomatemática, el socio-constructivismo, la socio-epistemología, el constructivismo, entre otros.

En este sentido y, con el ánimo de pensar el diseño de una propuesta de aula apoyada en un enfoque teórico acorde a los intereses de los proponentes del presente trabajo, se propone considerar el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), el cual permitirá actuar desde las implicaciones didácticas asociadas con los procesos de modelación matemática.

Al respecto del origen de la EMR, Freudenthal consideraba que la segmentación de los conocimientos formales e informales de la matemática necesitaba reestructurarse desde otra perspectiva, para él “La imagen de la matemática se enmarca en la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la del hombre y la imagen de la enseñanza de la matemática dentro de la de la sociedad.” (Freudenthal, 1991, p. 32, citado en Bressan y Gallego, 2011, p. 2). En este sentido, se plantea que las matemáticas deben tener una fuerte relación con las personas, que se construye a partir del contexto y las situaciones que lo rodean que son cercanas y conocidas para que cobren sentido y adquieran importancia para el estudiante.

La EMR busca favorecer el desarrollo de herramientas para resolver problemas matemáticos, construyendo modelos por medio de la matematización progresiva; homologa a los procesos de modelación, apoyándose en el uso de contextos realistas que tengan sentido para el estudiante. Para la EMR la modelación es un instrumento fundamental al momento de pensar y formular situaciones en contextos realistas.

En este sentido, en la EMR los procesos de matematización son, en correspondencia a los referentes curriculares, entendidos como los procesos de modelación que favorecen el desarrollo

del pensamiento variacional. A este respecto, es necesario precisar aquello que se entiende por matematizar y cómo esta matematización conduce, a través de unos principios, la caracterización, por un lado; de los desarrollos o alcances deseados que se espera evidenciar en los estudiantes y, por otro lado; de la propuesta de aula, mediante los niveles de matematización.

➤ Matematizar en la EMR

El aprendizaje de las matemáticas debe partir de lo real, lo tangible y lo práctico para que lo formal, lo general y abstracto tenga sentido para el estudiante, por esto es importante el contexto realista dentro de la EMR. Freudenthal expone que “Matematizar es organizar la realidad con medios matemáticos... incluida la matemática misma” (1973, citado en Bressan y Gallego, 2011, p. 2). Por lo tanto, los procesos de matematización involucran unos procesos particulares, como:

- reconocer características esenciales en situaciones, problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos;
- descubrir características comunes, similitudes, analogías e isomorfismos;
- ejemplificar ideas generales;
- encarar situaciones problemáticas de manera paradigmática;
- la irrupción repentina de nuevos objetos mentales y operaciones;
- buscar atajos y abreviar estrategias y simbolizaciones iniciales con miras a esquematizarlas, algoritmizarlas, simbolizarlas y formalizarlas; y

- reflexionar acerca de la actividad matematizadora considerando los fenómenos en cuestión desde diferentes perspectivas. (Freudenthal, 1991, p. 30-36, citado en Bressan y Gallego, 2011, p. 2).

Estos procesos particulares configuran también evidencias de la actividad matemática de los estudiantes y permiten al docente pensar mejor las estrategias e intervenciones de aula en tanto propicia espacios, genera preguntas y momentos que precisen la necesidad de dichos procesos particulares, apoyado en las herramientas para matematizar diferentes situaciones, las cuales son los contextos realistas que ayudan a que los estudiantes doten de sentido y significado los objetos matemáticos.

Para lograr esto, se proponen unos principios fundamentales, los cuales se presentan a continuación.

➤ Los principios de la EMR

Los principios son la base de la EMR, los cuales permiten gestar ideas que inciden en los procesos de matematización de una forma particular, es decir, la comprensión o interpretación de estos principios componen la forma en que el docente propone desarrollar procesos de matematización. Según Bressan y Gallego (2011) estos principios son:

1. Partir de contexto y situaciones problemáticas realistas (en el sentido de representables, razonables, imaginables para los alumnos) como generadores de la actividad matematizadora de los estudiantes.

2. Utilización de los modelos (materiales, lingüísticos, esquemas, diagramas y símbolos) que emergen de la propia actividad matemática de los alumnos como herramientas para representar y organizar estos contextos y situaciones.
3. Reconocer el papel clave del docente como guía y organizador de la interacción en las aulas.
4. El aprendizaje de la matemática es considerado como una actividad social donde la reflexión colectiva lleva a niveles de comprensión más altos.
5. La fuerte interrelación e integración de los ejes o unidades curriculares de la matemática.

Finalmente, como apoyo para el desarrollo de procesos de matematización, los niveles de comprensión en la EMR se articulan como una ruta característica de la actividad matemática del estudiante y los alcances de la propuesta de aula.

➤ Niveles de comprensión en la EMR

Freudenthal presenta unos niveles de comprensión de las matemáticas de los estudiantes partiendo de la EMR, en la que se estudian situaciones problemáticas con contextos realistas y procesos de modelación. El estudiante parte de unos conocimientos informales, que son las situaciones con contextos realistas para llegar a un conocimiento formal y comprensión de los objetos matemáticos. Los niveles de matematización pasan por distintos momentos de comprensión, caracterizados por actividades mentales y lingüísticas.

Nivel situacional: Asociado al uso de estrategias que usa el estudiante para resolver un problema con un contexto. Estas estrategias parten de los conocimientos informales, las experiencias y el sentido común para identificar las matemáticas inmersas en el contexto para esquematizar, buscar regularidades y reformularlas.

Nivel referencial: Se esquematiza el problema con representaciones, modelos gráficos o procedimientos personales. Estos modelos se consideran como *modelos de*, que sugiere la dependencia a la situación que le dio origen, es decir, no son modelos generales, depende de la situación.

Nivel general: En este nivel se procura superar los desarrollos propuestos en el nivel anterior, partiendo de la exploración, reflexión y generalización de los procesos de matematización previos, con el propósito de llegar a elementos generalizables, cuya utilidad pueda ser sustentada en problemas de aplicación que apoyen la apropiación de sentido matemático para que el estudiante pueda construir herramientas que le ayuden para situaciones con características idénticas en otras instancias. En este nivel los modelos se constituyen en *modelos para*, al relacionarse con casos que sean parecidos donde se pueden emplear estos modelos.

Nivel formal: Aquí se alcanza el uso de los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales, los cuales son parte del lenguaje matemático aceptado y permiten desarrollar aspectos de orden abstracto y/o formal.

Bressan y Gallego (2011) produjo una síntesis de estos niveles (Figura 3)

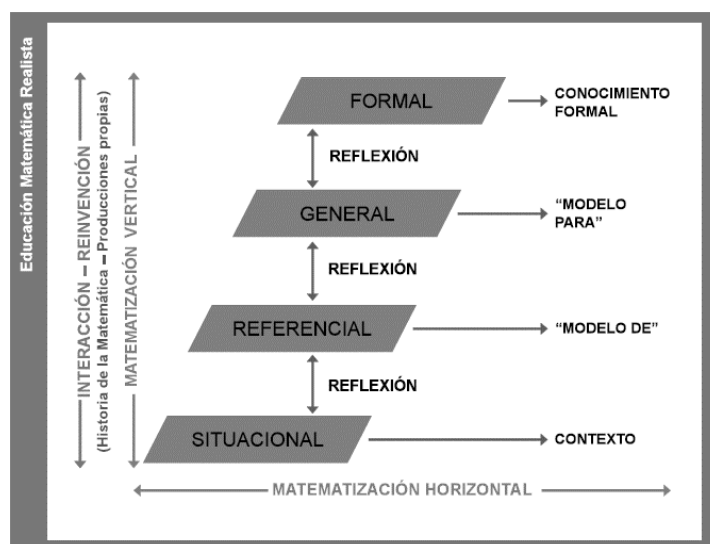


Figura 3. Niveles de matematización

Fuente: Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016). Educación Matemática Realista Bases teóricas.

El dinamismo de estos niveles favorece en el estudiante el paso de uno al otro cuando lo requiera, en este sentido, “un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o aspectos de un mismo contenido” (Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower, 2016, p. 8).

En conclusión, el enfoque de la EMR aporta al presente trabajo una estructura teórica ya desarrollada y con un alto valor estructural para la toma de decisiones en la elaboración de la propuesta de aula y las tareas que se inscriben en ella, la consolidación de la postura más idónea posible referente a los procesos de modelación y la articulación entre la actividad matemática del estudiante y la posibilidad de abordar las dificultades y errores asociados, entre otros elementos anteriormente mencionados.

2.2.3. Aspectos fundamentales de una secuencia didáctica.

La formación de docentes de matemáticas y, especialmente, su práctica profesional se encuentra supeditada a cómo se piensa la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En el seno de una didáctica clásica de las matemáticas, Gascón (1998) asevera que:

Antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. (p. 2)

Este pensamiento sugiere que el modelo de formación de profesores y su práctica se encontraba relegado inherentemente a la idiosincrasia del profesor y, tal como lo expone Porlan, (citado en Guerrero F., Sánchez N., y Lurduy, O., 2006, p. 1-2), está:

Centrado en una visión academicista, racionalista y formal del conocimiento escolar, en una visión del aprendizaje como “saco vacío”, de la metodología como la explicación directa de los contenidos acabados a los alumnos y de la evaluación como medición de la capacidad de reproducir las formas lingüísticas de los conceptos, y no de sus significados internos.

Dicho pensamiento ha sido fuertemente cuestionado desde las construcciones teóricas que cimentan la *didáctica fundamental* y, como es expuesto por Guerrero F., Sánchez N., y Lurduy O. (2006), postulan nuevos enfoques de la práctica profesional del docente que hacen posible un cambio de paradigma en su formación, la cual incide directamente sobre su práctica

profesional al permitirse pasar de ser administradores de currículos a intérpretes, gestores y productores de currículos formados a través de las actuales teorías didácticas. (pp. 1-2).

En consecuencia, Guerrero F., Sánchez N., y Lurduy O. (2006), proponen que las consideraciones que se hacen sobre la producción del profesor y su práctica aluden algún modelo de enseñanza, una forma de organizar el saber a ser enseñado desde los criterios actuales de la didáctica, situando dicho saber en contextos pragmáticos, de resolución de problemas como “marco de actuación del profesor” y desde la cual la actividad matemática desarrollada en el aula es la “generadora del significado”. (p. 2).

Esta organización es una pieza fundamental en la planeación, gestión de aula e intervención docente y la evaluación, pues conduce directamente a dilucidar la propuesta de aula del docente que vincula un marco actual y consistente con el cambio o nuevo enfoque didáctico de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas asociados a su forma, como, por ejemplo; secuencias didácticas, experimentos de enseñanza, trayectorias hipotéticas de aprendizaje, entre otras.

Para este trabajo abordaremos la idea de secuencia didáctica propuesta por Guerrero F., Sánchez N., y Lurduy O., (2006) como un instrumento de actuación, un plan del profesor que tiene una intencionalidad con la cual sus estudiantes aprenden. Son situaciones, actividades estructuradas y sistematizadas, la cual es preactiva (anterior), que toma vida en el momento de la implementación. (p. 3). En esta modalidad de propuesta se consideran algunas características del modelo DECA y la Teoría de las Situaciones Didácticas de Guy Brousseau para la construcción

de unas fases o momentos de la secuencia, en otras palabras, la idea de secuencia didáctica propuesta por Guerrero F., Sánchez N., y Lurduy O., no pretende fusionar el modelo DECA con la teoría de Brousseau, lo que pretende es recoger algunos elementos característicos de uno y otro que coinciden y permiten reflexionar sobre un momento particular de la secuencia.

Los momentos o fases de la secuencia didáctica son: inicial o actividad diagnóstica, desarrollo y reestructuración, profundización y aplicación. Una consideración transversal a estas fases es la posibilidad de evaluar o presentar en cada una de ellas espacios de la validación de los contenidos propuestos, es decir, que en cada fase se consideren estrategias que permitan que los estudiantes validen sus conocimientos, una validación continua dentro de la secuencia didáctica.

Estas Fases o momentos de la secuencia didáctica permiten exhibir con claridad la propuesta o plan de actuación del docente. Como se muestra en la siguiente tabla, cada fase o momento describe un objetivo particular que se desarrolla alrededor de ciertas acciones propuestas por el profesor y algunas evidencias que se espera identificar sobre la actividad matemática del estudiante.

Tabla 3

Estructura de la secuencia didáctica

Fases	Objetivo	Intencionalidad y Evidencias.
Inicial o actividad diagnóstica	Indagar y construir un perfil del estudiante y las ideas matemáticas asociadas. También, identificar las competencias, dominio conceptual y procedimental, entre otros aspectos de la actividad actual matemática del estudiante.	• Explicitar y exteriorizar sus ideas previas sobre los contenidos que se van a tratar en la UD. • Comprobar la necesidad de trabajar esos contenidos. • Se predisponga favorablemente para afrontar el desarrollo de la UD con una actitud positiva. • Compruebe que sus conocimientos y estructuras conceptuales anteriores no son las más adecuadas para tratar esas situaciones y que, por tanto, deben ser transformadas o ampliadas. • Orientar a los estudiantes a que caiga en un conflicto cognitivo interno que le fuerce a un cambio en sus esquemas de conocimiento. (Grupo Deca, 1992, p.33).
Desarrollo y reestructuración	Examinar en el estudiante cómo realiza las devoluciones de la situación adidáctica, para saber con qué repertorio de conocimientos, envía mensajes a sus compañeros de clase (o el profesor) y los instrumentos de mediación que usa (medio material /simbólico).	• Tomar contacto, asimilar y practicar los nuevos contenidos. • Reflexionar sobre su utilidad a la hora de enfrentarse a nuevas situaciones. • Comparar con los conocimientos anteriores, comprobar sus ventajas e incorporarlos a su experiencia personal. • Producir el cambio deseado en sus esquemas mentales, como consecuencia de la superación del conflicto cognitivo aparecido con las actividades de iniciación. (Grupo Deca, 1992, p.33).
Profundización y aplicación	Valorar la efectividad del trabajo en el aula, así como la pertinencia de la secuencia didáctica, el logro de los objetivos.	• Aplicar a otras situaciones los nuevos conocimientos adquiridos. • Reflexionar sobre las características esenciales de esos contenidos. • Ampliar el conocimiento conseguido, para trabajar nuevas situaciones y contextos. • Facilitar el trabajo en pequeñas investigaciones relacionadas con los contenidos trabajados. • Proponer situaciones de carácter opcional, dependiendo del nivel de dificultad y de la situación personal de cada alumno/a. (Grupo Deca, 1992, p.34).

En consecuencia, la elaboración de secuencias didácticas contribuye claramente a pensarse y formular cómo la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se puede gestar a partir de un modelo no estacionario que se forma alrededor de la caracterización de diferentes problemáticas en el aprendizaje y la enseñanza, permitiendo un análisis orientado de la actividad matemática del estudiante y articulando el desarrollo de competencias, el enriquecimiento del conocimiento sobre los objetos matemáticos y el alcance de otros con un sentido pragmático mediante la resolución de situaciones problema.

2.3. Perspectiva matemática

El propósito de este apartado es considerar aspectos relevantes en la construcción histórico-epistemológica de los conceptos de ecuación y función y la forma en cómo estas se encuentran representadas o definidas en la actualidad, lo cual permiten seguir construyendo y fundamentando una mirada crítica respecto a las formas y estrategias que se dispondrán en la propuesta de aula.

2.3.1. Aspectos relevantes de la historia de la ecuación y su definición

La historia de las ecuaciones tiene sus inicios en el desarrollo de la historia del álgebra. Los inicios del álgebra parten del trabajo de los babilónicos que usaban técnicas, formas y fórmulas para resolver problemas relacionados con áreas de terrenos, la repartición de víveres o de cosechas, entre otros.

En el álgebra árabe se presenta un acercamiento a las ecuaciones más teórico y formal, dado que los matemáticos árabes realizaron un desarrollo consciente con respecto al estudio de las ecuaciones algebraicas. Se resalta el trabajo realizado por el matemático Mohammed ibn

Musa al-khwarizmi quien presentó el inicio de la teoría de ecuaciones, entendida como la designación de objetos desde el plano teórico, sin alusión a un contenido, sus relaciones, propiedades.

Posteriormente, con el fin de crear una teoría para resolver ecuaciones, al-khwarizmi instaure términos como raíz, tesoros y simples números que le permite construir un sistema de representación que sirve para modelar problemas o situaciones de la realidad. Este sistema de representación contribuye a la creación de la noción de seis formas normales que exigen reducir sistemáticamente cada ecuación a su forma normal, estas formas normales pueden ser usadas para resolver cualquier tipo de problema comercial o de agrimensura.

Al-khwarizmi inició una nueva disciplina, su teoría contribuyó a la generalidad del objeto matemático y a la generalidad de las operaciones. Sus aportes significativos a la forma en cómo empiezan a construirse los objetos algebraicos, desde el uso de palabras para designar números y designar las cantidades como números, no magnitudes geométricas. Su trabajo es un gran aporte a lo que hoy es la teoría de las ecuaciones, aunque sigue presente el referente geométrico para validar los procesos de resolución de las formas normales.

Durante muchos siglos, la geometría era un aspecto importante dentro del álgebra, hasta principios del siglo XVI, las ecuaciones junto con el álgebra tienen un avance significativo con el trabajo de Cardano, matemático renacentista, que toma los aportes realizados por los árabes y otros matemáticos para desarrollar y fundamentar métodos de solución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Los aportes de Cardano a las ecuaciones fueron; el uso de un lenguaje

simbólico, establecer una relación entre las raíces y el grado de las ecuaciones, establecer relaciones entre los coeficientes de los objetos matemáticos con sus soluciones, explicar la existencia de las raíces imaginarias, entre otros.

Al igual que los babilónicos y los árabes, Cardano no acepta las raíces negativas, son tomadas como parte de una solución, pero no se encuentra una explicación lógica para estas cantidades a diferencia de las raíces positivas las cuales es posible atribuirle una magnitud que se exprese por medio del plano geométrico. Con relación a esto, Torres (2012) propone que:

El propósito de Cardano por construir una teoría general de soluciones de ecuaciones estaba lejos de ser establecida así, pues la falta de aceptación de los coeficientes negativos en las ecuaciones, lo llevaron a contemplar casos y casos de cada tipo de ecuación (cuadrática, cúbica) de forma detallada, según los términos de los diversos grados que debían aparecer en el mismo o en diferente miembro de la ecuación, puesto que los coeficientes solo debían ser positivos, tratando cada caso de la ecuación como un problema diferente, aunque relacionados. (p. 86)

Hasta el momento las bases del álgebra eran numéricas o geométricas, pero no era una rama autónoma de las matemáticas. En la edad moderna los matemáticos franceses Vieta y Descartes contribuyen a un álgebra independiente de otras ramas matemáticas. Vieta empieza a dotar de una estructura analítica al álgebra a partir de la homogenización de esta, creando reglas para construir ecuaciones en sí mismas, manipulando las letras y creando una independencia en la aritmética y la geometría.

Descartes necesitaba la ecuaciones para darle solución a sus problemas geométricos, pero las ecuaciones no tenían una estructura bien formada que le permitiera usarlas en estos

problemas, para construir las ecuaciones necesitaba fundamentar aspectos relacionados con las operaciones entre magnitudes, la designación de las rectas, la clasificación de las curvas y la redimensión del método analítico, el ocuparse de estos problemas permitió grandes avances en el álgebra, como: crear relaciones entre número y magnitud, el trabajo de expresiones no homogéneas, la introducción del método analítico que permite poner en ecuaciones cualquier problema geométrico para encontrar sus soluciones, las cantidades negativas fueron aceptadas como raíces falsas, entre otros.

Resolver el problema de Pappus, contribuyó a mejorar la idea de ecuación desde un plano funcional, en el que no se enfoca en determinar el valor de la incógnita, sino que la ecuación permite relacionar dos cantidades, x e y , en una relación de dependencia entre ellas. Descartes logra darle solución a este problema sin importar la cantidad de rectas que se involucre, solución que permitió avanzar en los procesos de generalización de la ecuación.

Hasta este momento, el concepto de ecuación ha evolucionado como el objeto de estudio del álgebra, el cual se definió como una igualdad entre expresiones algebraicas en la cual se busca igualarla a cero. Además, Descartes establece el número de raíces que puede tener una ecuación teniendo en cuenta la dimensión de la cantidad desconocida, que ayudará a la construcción de lo que hoy conocemos como el Teorema Fundamental del Álgebra.

Por lo demás, uno de los elementos que ha permitido la evolución a lo largo de la historia de los objetos algebraicos, es suplir las necesidades del día a día y abordar las necesidades de

tipo intelectual, que permiten resolver problemas específicos de manera estandarizada, lo que conduce a la construcción de una teoría de ecuaciones como un sistema matemático de signos.

- **Caracterización de la Ecuación.**

A lo largo de la historia el concepto de ecuación ha tenido cambios que dependen de las necesidades que suple y los diferentes desarrollos teóricos. Teniendo en cuenta la intencionalidad de esta investigación se presentarán 3 definiciones que guardan estrecha relación con la idea matemática y los libros de textos escolares.

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que no se cumple para todos los valores de las letras. Una igualdad algebraica está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual. (Santillana Educación, 2007, p. 310).

Una **ecuación** con incógnitas o variables $x_1, x_2, x_3 \dots, x_n$ es una proposición abierta que establece la igualdad entre dos expresiones matemáticas. (Martínez, 2014, p. 1)

Las **ecuaciones**, en tanto igualdades, son casos particulares de relaciones binarias más generales como la relación de equivalencia. En particular, las ecuaciones son relaciones binarias simétricas. (Velasco, 2011).

En la resolución de ecuaciones se debe tener en cuenta las propiedades de la igualdad y los axiomas del conjunto numérico que delimita la ecuación, este proceso construye una cadena de ecuaciones equivalentes. La solución de una ecuación se define como:

La *solución de una ecuación* con variables $x_1, x_2, x_3 \dots, x_n$ es una lista ordenada de n valores, los cuales, al sustituir por la variable respectiva, se obtiene una proposición verdadera. Al conjunto de todas las soluciones lo llamamos conjunto solución. (Martínez, 2014).

2.3.2. Aspectos relevantes de la historia de la función y su definición

A continuación, se presenta brevemente la ascensión del concepto de función en tres diferentes periodos de la historia; Edad Antigua, Edad Media y Edad Moderna. En estos tres periodos históricos se pueden presentar las contribuciones que fueron abriendo paso al desarrollo del concepto de función, hasta llegar a una definición que satisfizo la necesidad de generalización de este concepto, es decir, su conceptualización.

Inicialmente, Azcárate y Deulofeu (1990) propone que, en la edad antigua, si bien el concepto de función no es para nada visible, las actividades matemáticas de los babilonios y egipcios, generalmente asociadas a la aritmética y una geometría elemental, estaban sujetas al análisis de fenómenos astronómicos en tanto a cantidades que varían, por ejemplo, los periodos de visibilidad de un planeta y el ángulo que se forma con respecto al sol. A su vez, los griegos condujeron desarrollos para describir la relación ingenua de dependencias entre dos magnitudes homogéneas asociadas a la proporción, pero que constituyó un obstáculo para el desarrollo del concepto de función, ya que esta relación no suponía más allá la comparación entre dos magnitudes de la misma naturaleza. (pp. 40-42).

En este sentido, Azcarate y Deulofeu (1990) concluyen que:

El estudio de fenómenos de cambio es aún muy reducido y que las aproximaciones cuantitativas y cualitativas de dichos fenómenos se hallan todavía totalmente disociadas y por tanto no es posible hablar de la formulación explícita de nociones como variable, dependencia o función. (p. 43)

Por otra parte, en la Edad Media, Azcárate y Deulofeu (1990) sugiere que en este periodo el estudio de diferentes fenómenos de cosas que cambian, como, por ejemplo, el movimiento, y la necesidad de pensarse un modelo que dé cuenta del universo y lo que consigo abarca, condujeron al desarrollo de conceptos necesarios para la noción de función, entre ellos se encuentran; velocidad instantánea, aceleración, densidad y la luz. Además, los desarrollos de Nicolas Oresme llevaron a la aproximación del concepto de función ya que estableció el uso de graficas para representar fenómenos de variación asociado a una relación de dependencia parcial; pues la consideración de la dependencia actual sujeta a ese periodo, caería en un anacronismo, debido a que Oresme no tomaba la parte de sus gráficos, que suscitan la idea de dependencia, por separado, sino que, hacen parte de todo el grafico de manera inseparable. (pp. 43-45).

En la edad moderna se constituyeron formalmente los avances que dieron lugar a una definición del concepto de función. Azcárate y Deulofeu (1990) reconocen las contribuciones de Galileo al establecer leyes entre magnitudes asociadas a una relación funcional, pero supeditadas a la teoría griega de las proporciones. Posteriormente, los trabajos de otros pensadores como Descartes, con los desarrollos de la geometría analítica, desde la cual, se expanda la idea de dependencia entre dos cantidades variables. A su vez, el desarrollo de las series de potencias y el cálculo infinitesimal con Newton y Leibnitz permitió considerar el concepto de función más cercano que antes, pues lograba superar muchos obstáculos relacionados con las representaciones analíticas de algunos fenómenos mecánicos estudiados anteriormente. Leibnitz supuso el primer

uso formal del término función y la superación de la concepción del término variable asociado a la cinemática, aproximando la idea de que provenía de un conjunto numérico cualquiera. (pp. 46-50).

Por último, Azcárate y Deulofeu (1990) manifiestan que el concepto de función, asociado a Jean Bernoulli sigue en ascenso, toda vez que se separa más y más como uso de la mecánica para situarse como un desarrollo propio del análisis, desde el cual la mecánica supone ser un caso particular de este. A su vez, propone que en Euler se conduce a precisar la definición alterna de Bernoulli definiendo aquello que se entendía por expresión analítica, lo que condujo la inclusión de funciones derivadas del cálculo integral. Adicionalmente, con los desarrollos de la Teoría de conjuntos se introduce una definición de función que conduce a su aspecto más general en detrimento de conceptos como; variación, continuidad, variable como parámetro temporal, entre otras. (pp. 50-53)

En conclusión, la ascensión histórica del concepto de función ha sido provista de un sin número de desarrollos matemáticos asociados a las necesidades y reinterpretaciones del universo, que han permitido, por un lado, consolidar nociones como la variación y relaciones de dependencia asociadas a las magnitudes, y por otro, a relaciones de correspondencia, pero, en cualquier caso, de forma transversal y constitutiva al edificio de las matemáticas.

- **Caracterización de la Función**

Teniendo en cuenta la intencionalidad del presente trabajo se propone la siguiente caracterización.

Como se expuso anteriormente, el concepto de función está asociado a una diversa cantidad de procesos evolutivos, que construyeron diferentes visiones o formas de entender dicho concepto. Como resultado de esto, se encuentran muchas definiciones que sugieren un aspecto diferente en cada caso, por ejemplo, retomando la definición del Grupo Zero 1981, (citado en Azcarate C y Deulofeu J ,1990, p. 20) encontramos que:

La característica esencial de una función o aplicación es la dependencia entre dos variables. Una función o aplicación está formada por:

- a) Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
- b) Conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.
- c) Regla que asigna a cada elemento del conjunto de salida uno y sólo uno del conjunto de llegada.

Así, la noción de función se compone de un Dominio; el conjunto de valores de la variable independiente, Rango; el conjunto de valores de la variable dependiente, y el tipo de Relación que caracteriza la dependencia de las variables.

Esta definición favorece la idea de dependencia entre dos variables, la cual, para efectos del presente trabajo resulta más adecuada y conduce a resaltar la noción de función desde un aspecto dinámico. Azcarate C y Deulofeu J (1990) proponen que:

En este sentido, cuando consideramos una función bajo la idea de variable, el papel del dominio es poco relevante; implícitamente se considera ordenado y generalmente continuo, o cuanto menos denso y se pone el acento en la forma como cambia la variable dependiente. (p. 60).

Para continuar con la caracterización, se consideran otros conceptos y elementos que hacen parte del concepto de función, los cuales se tomaran algunos de ellos a partir de lo expuesto por Azcarate C y Deulofeu J (1990).

- Función sobreyectiva: Cuando un conjunto imagen (Rango) coincide con el conjunto de llegada (Co-dominio), se dice que la función es sobreyectiva o exhaustiva. Por ejemplo: $f: R \rightarrow R^+$
 $x \rightarrow x^2$.
- Función inyectiva: Cuando el conjunto imagen está formado por elementos que son imagen de un solo elemento del Dominio, la función se llama inyectiva. En este caso se cumple la siguiente condición: $f(x_1) = f(x_2)$. Por ejemplo, la función: $f: N \rightarrow N$
 $x \rightarrow x^2$.
- Función biyectiva: Cuando la función es simultáneamente sobreyectiva e inyectiva, el conjunto imagen coincide con el conjunto de llegada y está formado por elementos tales que todos son imagen de un elemento del Dominio, pero no de más de uno, la función se llama biyectiva. Por ejemplo: $f: Z \rightarrow Z$
 $x \rightarrow x+1$.

Además, dado el interés del presente trabajo, fundamentalmente interesa caracterizar aquellas que pertenecen a la familia de funciones de primer grado, y como propuesta abierta la posibilidad de abordar las de segundo grado. En esencia, el tipo de función lineal y cuadrática, comúnmente presentes en los modelos más comunes trabajados en la escuela, son aquellas que se caracterizan a continuación.

- Función lineal o de proporcionalidad directa: Está caracterizada por las dos siguientes propiedades:
 - a. Propiedad aditiva: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
 - b. Propiedad homogénea: $f(kx) = kf(x)$.

En este tipo de funciones la variación de la función es constante y equivale a una gráfica cuyos puntos están alineados.

- Función cuadrática: Está caracterizada por ser una función polinómica del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ en la que a, b y c pertenecen a los números Reales y $a \neq 0$.

2.3.3 Aproximación histórica de la relación entre ecuación y función

La necesidad de establecer el momento histórico en el cual los conceptos de ecuación y función convergen en un mismo punto parece apropiada y dúctil con relación a los intereses del presente trabajo, a pesar de ello, esta tarea precisa un estudio profundo en comparación a la mirada amplia que se ha desarrollado en el presente trabajo, además, la consideración de aportes que al final no ha sido posible establecer e identificar con claridad. No obstante, desde lo que se ha establecido en las breves reconstrucciones históricas de ambos conceptos, se concluye una estrecha relación, no solo desde los contextos que dieron origen o propiciaron la necesidad de pensarse estos conceptos, también desde su uso pragmático como herramienta de modelación.

Si bien, las ecuaciones tienen un origen íntimamente cercano al desarrollo del álgebra, las funciones tienen un origen o desarrollo común a ellas, pues es posible aproximar referentes matemáticos y desarrollos comunes, sin caer en anacronismos, como, por ejemplo, los trabajos de Descartes sobre la geometría analítica y el método de coordenadas, que propiciaron los

avances en el estudio y representación de cantidades geométricas que varían, elementos fundamentales en el establecimiento de relaciones funcionales.

Agregado a lo anterior, en la geometría antigua, propiamente la euclidiana, aunque no se precisaba el concepto de ecuación y función, la presencia implícita de relaciones funcionales entre magnitudes, por ejemplo; en la proposición 18 del libro de los elementos de Euclides (~300 a.C), en el que se propone que “En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor” (p. 223), se puede identificar una correlación general entre el lado mayor del triángulo y su ángulo opuesto, ya que el tamaño del lado del triángulo depende del tamaño del ángulo. Desde esta correlación también se puede abarcar la idea de ecuación tomando el ángulo del triángulo como una incógnita e intentando precisar su valor por medio del lado mayor, del cual se conoce su valor.

También, el estudio de cortes de superficies y curvas desarrolladas mediante expresiones algebraicas y ecuaciones, apoyan la idea de que, al expresar dos cantidades coordinadas mediante ecuaciones, se podía llegar a establecer una relación de dependencia implícita entre ellas, dando lugar a nociones cercanas al origen de los conceptos asociados a la función, como: variable y relación de dependencia.

Como estos, hay varios momentos en la historia que permiten identificar los vestigios de las relaciones entre ecuaciones y funciones, sin llegar a entrar en anacronismos, aun así, sigue siendo una tarea difícil de precisar con un momento puntual en el que se pueda establecer relaciones entre ambos conceptos, de hecho, lo que se logra percibir es que son varios momentos de encuentro entre ambos conceptos a lo largo de la historia, que conducen a referir ciertas

relaciones entre ambos, lo que sugiere que las relaciones entre ellos no dependen de un único momento y que se encuentran sujetos a los desarrollos relacionados con el álgebra.

En adición, con resultados más cercanos a la actualidad, la forma de definir una función cualquiera alude a la idea de una representación algebraica asociada al concepto de ecuación. Esta idea, también se traslada en la forma posible de definir una ecuación, ya que la igualdad de dos funciones constituye una ecuación, cómo se sugiere en el enfoque funcional. En este sentido, si la función se puede definir a partir de una ecuación, la ecuación también se puede definir a partir de la igualdad de dos funciones, lo cual se puede verificar.

Con estos ejemplos y la interpretación que se sugiere cómo se relacionan los conceptos de ecuación y función se pretende decir que, si bien las condiciones históricas en la constitución y desarrollo de uno y otro objeto matemático son diferentes en algunos aspectos y momentos, esto no impide rastrear información relevante que permita dar cuenta de la existencia de relaciones entre ambos conceptos y que se encuentran estrechamente ligadas.

Además, a partir de lo que se ha presentado a lo largo del presente trabajo, se estima que la estrecha relación que guardan los conceptos de ecuación y función advierten la necesidad de establecer mecanismos metodológicos, propuestas de aulas, tareas y actividades, que permitan reconciliar estos conceptos al responder, desde una perspectiva didáctica, a la exploración de relaciones entre estos dos objetos matemáticos en la escuela.

2.4. Algunos elementos fundamentales de las perspectivas curricular, didáctica y matemática para el diseño de la propuesta de aula

Considerando las tres perspectivas expuestas en el presente trabajo, se exhibirá una breve interpretación de cómo estas contribuyen a unificar criterios para la producción de una propuesta

de aula, precisando con la mayor claridad posible el objeto relevante y característico en cada perspectiva, aquello que sugiere ser tomado con un mayor interés.

En la *Tabla 4* se exhiben las características importantes de cada una de las perspectivas que inciden directamente en la construcción de la secuencia didáctica

Tabla 4

Elementos teóricos para la secuencia didáctica

Perspectiva Curricular		Perspectiva Didáctica	Perspectiva Matemática
Se toman en consideración, a partir de: • LCM: Los procesos generales (modelación), conocimientos básicos, el contexto y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. • EBC: Noción de competencia y los estándares asociados. • DBA: Noción de derecho básico de aprendizaje, propuestas y evidencias de aprendizaje. En este sentido, esta perspectiva aporta, entre otras cosas, una coherencia respecto al contexto nacional y normativo, las formas en cómo se piensa la educación, los aspectos relevantes de la formación de los estudiantes en los diferentes ciclos de escolaridad.	<i>Errores y dificultades</i> <i>EMR</i> <i>Secuencia didáctica</i>	Reconocer el estado perceptivo de la educación matemática en la actualidad a partir de los errores y dificultades documentados, como: las dificultades relacionadas con las operaciones, las dificultades en la comprensión de la simbología, las dificultades en la resolución de problemas, las dificultades relacionadas con el paso de un sistema de representación a otro. Los procesos de matematización cómo procesos de modelación. La interpretación de los procesos y principios de matematización, los niveles de comprensión y su estructura dinámica asociada a la matematización horizontal y vertical. Interpretación de propuesta de aula, las fases de la secuencia didáctica asociadas al modelo DECA y la teoría de Situaciones Didácticas.	Se toman en consideración tres aportes de esta perspectiva: • Exhibir y reconocer aspectos epistemológicos que dieron lugar al concepto de ecuación y función, el reconocimiento de la historia y su incidencia en las prácticas educativas actuales. • La construcción de las definiciones analíticas de los objetos matemáticos. • La aproximación en el establecimiento de la relación entre los conceptos.

En conclusión, la tabla de elementos relevantes de las tres perspectivas presentadas constituye, en principio, la exposición de cómo las diferentes partes del presente trabajo se encuentran articuladas en favor del desarrollo de la propuesta de aula y los elementos que la conforman, seguido de las orientaciones que configuran una mirada unificada de la problemática que se pretende abordar desde la implementación de dicha propuesta de aula.

Capítulo III. Relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en la escuela

En este capítulo se abordan temas relacionados con la consolidación de la propuesta de aula, en el que se tiene en cuenta el soporte documental del trabajo de investigación, aspectos relevantes del diseño de la propuesta de aula, como: el enfoque curricular, didáctico y disciplinar, además de la población y contexto en el que se desarrolla la implementación. Por último, el análisis de los resultados obtenidos en la Situación 1 y 2 teniendo en cuenta los referentes teóricos expuestos en el capítulo 2.

3.1. Diseño de la propuesta de aula

La propuesta de aula constituye un elemento fundamental como herramienta que permite abordar, desde el contenido teórico que recoge, la problemática planteada y los objetivos del presente trabajo.

El diseño de la propuesta (ver anexo A) se construyó a partir de los aspectos desarrollados en el marco de referencia en coordinación con los objetivos específicos planteados, en estos se pretende fundamentar y articular aportes teóricos y metodológicos desde tres perspectivas; curricular, didáctica y matemática.

A partir del enfoque curricular, se consideran ideas fundamentales para la elaboración de la propuesta de aula, entre ellas; vincular el desarrollo del pensamiento variacional a los procesos de modelación a través de situaciones problemas en contextos que favorezcan la construcción de sentido matemático. Adicionalmente, de los EBC considerados relevantes corresponde a los grados 8° y 9°, los cuales son: “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas” y “Modelo situaciones de variación con funciones

polinómicas”, que permiten exponer la pertinencia y cercanía entre el diseño de la propuesta y los referentes curriculares de la educación básica secundaria en Colombia.

Del enfoque didáctico se consideran los aportes de las investigaciones sobre errores y dificultades que permean cada una de las tareas presentes en la propuesta de aula y los aportes de la EMR como principios para el diseño estructural de esta. También, se considera la idea sobre los procesos de matematización como procesos de modelación, los cuales se ajustan pertinentemente con lo expuesto en los referentes curriculares, toda vez que son elementos característicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, el concepto de secuencia didáctica, como instrumento y plan de actuación del profesor, que permite dar claridad sobre la forma y el diseño general de la propuesta de aula.

Finalmente, en relación con el enfoque disciplinar, se toman en consideración las evidencias históricas de la estrecha relación que guardan los conceptos de ecuación y función con los procesos de modelación y la cercanía entre ellos. Este aporte histórico permite definir otros conceptos inscritos en la relación entre ecuaciones y funciones, como variable y aquellas que caracterizan a ambos objetos matemáticos.

El contenido de las siguientes tablas es, inicialmente, producto de una yuxtaposición de la propuesta sobre los procesos de modelación abordada en los referentes curriculares de educación matemática en Colombia y los procesos de matematización progresiva de la teoría de EMR, vinculando desempeños propuestos en contextos de modelación como evidencias que apoyan el tránsito por los diferentes niveles de Matematización Horizontal y Matematización Vertical. Esta yuxtaposición es posible gracias al desarrollo afín que tiene la teoría de la EMR con lo propuesto

en los referentes curriculares, los cuales favorecen el estudio de las relaciones funcionales mediante el desarrollo de procesos de modelación correspondientes al estudio de las relaciones funcionales en contextos tales como; cotidianos, matemáticos u otros contextos científicos.

Por otra parte, el constructo teórico expuesto en el marco de referencia conceptual permite identificar que un aspecto nuclear de la relación entre ecuaciones y funciones es que ambos conceptos han estado vinculados al desarrollo y el estudio de la variación en diferentes contextos y problemáticas de cada momento de la historia, con lo cual, es posible la propuesta de pensarse las ecuaciones como igualdad de dos funciones a partir situaciones problema que vinculan procesos de modelación matemática.

A continuación, se presenta un resumen de cómo se encuentran estructuradas las dos situaciones que conforman la secuencia didáctica, es decir, una síntesis de los elementos constitutivos de cada situación expuestos en dos tablas. A su vez, estas tablas permiten realizar el análisis de los resultados como un ejercicio de validación de las condiciones, desempeños y niveles propuestos en las tablas a modo de rejilla de análisis.

Tabla 5

Síntesis de la estructura de la situación 1

	Preguntas	Objetivo	Contenido matemático	Desempeños	Modelación
SITUACIÓN 1	Tarea 1				
	Comprendiendo la situación	1		Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	
		2	Reconocer las cantidades involucradas en la situación y, a partir de estas, aproximarse y comprender la situación.	Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.	
		3		Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	Nivel situacional
		4			
	Tarea 2				
	Plan móvil y cantidades constantes y variables	1	Reconocer cómo están relacionadas		
		2	las cantidades constantes y variables		
		3	en la situación asociadas al modelo de función lineal. Realizar un salto cualitativo a la relación entre la		
		4	función lineal y la ecuación de primer grado a partir de la naturaleza	Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades constantes y variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	Nivel referencial
		5	función lineal y la ecuación de primer grado a partir de la naturaleza		
		6	variable e incógnita que posee la x en cada caso.		Nivel general
		7			

Tarea 3 <i>Comparando planes móviles a través de la intersección</i>	1 Identificar y comparar el valor de la 2 abscisa del punto de intersección 3 entre las gráficas de dos funciones 4 lineales ($f(x)$ y $g(x)$) con el 5 conjunto solución de la ecuación 6 $f(x) = g(x)$ de primer grado, a 7 través de la exploración, 8 comparación y análisis de diferentes sistemas de representación (tabular, gráfico y algebraico).	Operaciones básicas en $\mathbb{Z}$, función lineal, ecuación de primer grado y sistemas de representación.	• Relaciono diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. • Reconozco y genero equivalencias entre diferentes sistemas de representación. • Identifico y calculo el punto de intersección de las funciones.	Nivel referencial Nivel general
--	---	--	--	--

Tabla 6

Síntesis de la estructura de la situación 2

SITUACIÓN 2	Preguntas		Objetivo	Contenido matemático	Desempeños	Modelación
SITUACIÓN 2	Tarea 1					
	<i>La tienda de doña Florinda</i>	1	Reconocer, comprender y realizar conjeturas de la situación 2 por medio de la caracterización de la función lineal asociada ($f(x) = 280.000 - 5000x$) y la aproximación a la relación entre la función lineal y ecuación de primer grado a través de un ambiente de geometría dinámica que ofrece GeoGebra como ejercicio práctico del saber hacer de los estudiantes y su actividad matemática.	Operaciones básicas en $\mathbb{R}$, función lineal, ecuación de primer grado, razón de cambio y sistemas de representación.	• Uso diversas estrategias de cálculo resolver problemas. • Relaciono cantidades que varían en la razón de cambio con las coordenadas de dos puntos de una línea recta con pendiente diferente de cero. • Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural.	Nivel situacional
		2				Nivel referencial
		3				
		4				
		5				
		6				
		7				
	Tarea 2					
	<i>Extensión y generalización de la relación $f(x)=g(x)$</i>	1	Caracterizar el modelo de función (lineal o cuadrática) a partir de la consciencia de lo que varía y las relaciones de dependencia.	Operaciones básicas en $\mathbb{R}$, función lineal y cuadrática, ecuación de primer y segundo grado y sistemas de representación.	• Uso diversas estrategias de cálculo para resolver problemas. • Reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades constantes y variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). • Identificar el punto de intersección de dos funciones a través de procesos de visualización.	Nivel referencial
		2	Concretar la relación entre ecuación y función a través de un ambiente de geometría dinámica como ejercicio práctico del saber hacer de los estudiantes y su actividad matemática asociada a la idea del punto de intersección para			
		3				
		4				
		5				
		6				
		7				

8 aproximarse a una generalización
de la relación entre ecuación y
función.

9

- Justifico o refuto sobre enunciados asociados a la relación entre el punto de intersección de la gráfica de dos funciones lineales y la ecuación $f(x) = g(x)$.
-

Nivel
general

3.2. Contexto de desarrollo

El contexto institucional en el que se desarrolla la implementación de la propuesta de aula es la Institución Educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali, la cual se encuentra ubicada en el Oeste de Cali, en el barrio libertadores. Esta institución cuenta con dos jornadas, la matutina; que cuenta con los grados del ciclo de educación básica secundaria (novenio) y el ciclo de educación básica media (decimo y once), y la vespertina; que cuenta con los grados del ciclo educación básica secundaria (sexto, séptimo y octavo). Adicionalmente, esta institución educativa cuenta con jornada nocturna, ofreciendo un programa de formación complementaria para obtener el título de normalista.

A partir de un ejercicio comparativo entre el currículo nacional y el institucional, con el deseo de no violentar las practicas académicas de los estudiantes de la institución, considerando los fenómenos culturales y postpandemia, se determinó, en coordinación con la institución y los docentes del área de matemáticas, que el grado de escolaridad afín con el presente trabajo de investigación, es el grado decimo.

Por lo tanto, teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, los objetos de estudio, las competencias que se quieren desarrollar lo ya mencionado, la implementación se lleva a cabo en grado decimo en su jornada correspondiente, con un grupo de 35 estudiantes, de los cuales 16 asistieron a la totalidad de las sesiones y completaron satisfactoriamente las dos situaciones, por tal razón constituyen la población sobre la cual se realiza el análisis de los datos.

Como estrategia de investigación se espera capturar toda la información relevante al estudio del fenómeno de interés principalmente a través de la producción escrita de los estudiantes, apoyando también esta tarea en grabaciones de audio y notas de campo.

3.3. Resultados y análisis de resultados

En el presente apartado, se presentan los resultados obtenidos a partir de la implementación de la *Situación 1* de la secuencia didáctica. Como primer elemento, se incorpora el enunciado de la situación y las tareas con sus respectivas preguntas a través de una tabla, la cual puede ser de dos tipos posibles, en las cuales se registran las repuestas de los estudiantes. El primer tipo de tabla está formada por 4 columnas; *tipo de respuesta*, *descripción*, *frecuencia relativa* y *frecuencia absoluta*, y el segundo tipo de tabla está formada por las 4 columnas anteriores y una columna adicional; *justificación*, para aquellas preguntas que suponen o se pide explícitamente una justificación por parte del estudiante a una respuesta dada.

Respecto a las columnas, la primera de ellas llamada *tipo de respuesta*, corresponde al índice de categorización o tipificación de las diferentes respuestas de los estudiantes, las cuales han sido agrupadas según la información y características, denotadas por R_n (con $n = 1, 2, 3, \dots$). En la segunda columna; *descripción*, se encuentra la información del tipo de respuesta dada por uno o varios estudiantes, en un intento objetivo de presentar dicha información de manera fiel y precisa. La tercera columna, para el tipo de tabla dos, corresponde a la *justificación*, en este espacio se realiza un ejercicio análogo al de la columna dos, con la diferencia que la información presentada corresponde a la justificación, explicación o argumentos previamente solicitadas a los estudiantes sobre una respuesta dada. Finalmente, las columnas restante; *frecuencia relativa* y *frecuencia absoluta*, corresponden al número y el porcentaje de estudiantes, respectivamente, vinculados a un tipo de respuesta.

Posterior a esto, se realiza el análisis de las respuestas de los estudiantes según corresponda a una o varias preguntas que compartan similitudes o características similares, con el propósito de conducir un análisis unificado en la medida de lo posible. Para el análisis de la situación 2 se procede igual a lo anteriormente expuesto para la situación 1.

Este análisis se realiza en coordinación con los elementos teóricos propuestos en capítulos anteriores, la *Tabla 1* y *Tabla 2* para poder dar cuenta de los desarrollos y alcances de la propuesta didáctica en los estudiantes.

3.1.1. Análisis de resultados de la situación 1

Situación 1 (S1): Plan móvil, ecuaciones y funciones de primer grado

Javier es un empresario dedicado a la comercialización de productos estéticos y actualmente tiene contratado un servicio de internet móvil de hasta 50 GB por un precio mensual inicial de \$50.000 mensuales con la compañía telefónica Claro S.A. La comunicación que sostiene Javier con sus clientes, amigos y familiares es frecuentemente por llamadas telefónicas y en este plan, por cada minuto consumido en llamadas realizadas a cualquier operador el precio total de la factura incrementa \$80. Esto le ha generado precios elevados cada mes y está pensando en cambiarse de operador o de plan.

Ayudemos a Javier a entender cómo está cambiando el precio total de su factura.

Tarea 1 (T1): Comprendiendo la situación.

Tabla 7

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y pregunta 1 (S1T1P1)

(P1) Pregunta 1. Indica las cantidades que intervienen en la situación.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que reconocen de manera correcta las tres cantidades que intervienen en la situación y asocian una unidad a cada cantidad (50GB, precio mensual inicial de \$50.000 y precio por minuto consumido de \$80). (E3, E4, E6, E8, E13 y E16)	6	37,50%
R2	Estudiantes que reconocen de manera correcta las tres cantidades que intervienen en la situación y asocian solo a una de ellas la unidad (ej. 50 GB, 50.000, 50). (E2, E5, E7, E10, E11 y E14)	6	37,50%
R3	Estudiantes que reconocen de manera correcta dos de las tres cantidades que intervienen en la situación y no asocian ninguna unidad (ej. 50.000 y 80) (E1, E9, E12 y E15)	4	25,00%

Tabla 8

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y pregunta 2 (S1T1P2)

(P2) Pregunta 2. Camilo, un estudiante de grado decimo, ha dicho que una forma para la cual el precio total de la factura sería menor a \$50.000 es cuando Javier no consume ningún minuto. Explica la validez de esta afirmación.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden de manera correcta al no estar de acuerdo con la afirmación de Camilo de forma explícita. (E1, E4, E5, E6, E7, E8, E9 y E12)	Indican que el precio fijo de \$50.000 no disminuye cuando Javier no consumen ningún minuto. (E1, E4, E6, E7 y E9)	5	31,25%
		Indican que el precio inicial es una cantidad aparte del valor de los minutos consumidos. (E5, E8 y E12)	3	18,75%

Potencialidades y dificultades

R2	Estudiantes que responden de manera correcta al no estar de acuerdo con la afirmación de Camilo de forma implícita (E2, E3, E10, E14 y E15)	Afirman que el precio fijo de \$50.000 solo aumenta con el consumo de minutos. (E3, E14 y E10)	3	18,75%
		Indican que el precio inicial es una cantidad aparte del valor de los minutos consumidos. (E2 y E15)	2	12,50%
R3	Estudiantes que responden de manera incorrecta al estar de acuerdo con la afirmación de Camilo de forma explícita. (E11, E13 y E16)	Afirman que el precio fijo de \$50.000 solo aumenta con el consumo de minutos. (E11, E13 y E16)	3	18,75%

Teniendo en cuenta los resultados de *S1T1P1*, se puede apreciar en la *Tabla 7* que el 100% de los estudiantes reconocen de manera correcta las tres cantidades que intervienen en la situación, sin embargo, un primer porcentaje del 37,5% de los estudiantes asocian una unidad o magnitud a cada cantidad numérica (ver *figura 4*), a diferencia del otro 37,5% que asocian una unidad o magnitud solamente a una cantidad. El 25% restante no asocian ninguna unidad a las cantidades que reconocen (ver *figura 5*).

1. Indica las cantidades que intervienen en la situación

- Servicio de internet móvil de 50 GB
- Precio inicial de 50.000 mensual
- El precio incrementa \$80 por minuto

Figura 4. *S1T1PIR1*

Primera pregunta:

• 50,000

• 80

Figura 5. *S1R1P1R3*

Por otra parte, la *Tabla 8* contiene los tipos de respuesta de *S1T1P2*, el 82% de los estudiantes, que no están de acuerdo con la afirmación de Camilo, reconocen que el precio total de la factura se asocia directamente con el precio mensual inicial de \$50.000 como una cantidad fija y, a partir de ello, justifican su posición acertada; el 50% de los estudiantes lo hacen de manera explícita y el otro 32% de estudiantes lo hace de manera implícita, lo que sugiere diferentes niveles de precisión en la manera como expresan sus ideas acerca del precio mensual inicial (\$50.000) como una cantidad fija o constante. El 19% restante, exhiben en sus justificaciones un reconocimiento total o parcial de que el precio mensual inicial (\$50.000) es una cantidad fija asociada al precio total de la factura, aun cuando están de acuerdo con la afirmación de Camilo, postura que es incorrecta.

Lo expuesto anteriormente, en relación con las respuestas del tipo *S1T1P1* y *S1T1P2*, permite conjeturar que las cantidades que la mayoría de estudiantes logran reconocer son en efecto afines a su realidad y contexto cotidiano, pues se parte de la premisa de que los estudiantes están vinculados a la manipulación de dinero y con ello evidenciar que sucede con él en diferentes situaciones como la presente, a tal punto de poder realizar inferencias sobre cantidades relacionadas o que dependen entre sí a través de procesos rápidos de cálculo o estimación. En efecto, relacionado con la EMR, a partir de contextos y situaciones realistas como generadores de la actividad matemática del estudiante posibilita la articulación entre los diferentes niveles de matematización.

Tabla 9*Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y preguntas 3a, 3b y 3c (S1T1P3abc)***(P3abc) Pregunta 3.** Calcula el precio total de la factura cuando Javier ha consumido:**a.** 0 minutos.**b.** 30 minutos.**c.** 120 minutos.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben las tres cantidades de manera correcta correspondientes al precio total de la factura (50.000, 52.400 y 59.600), sus respectivos procedimientos de cálculo y uso adecuado del signo igual. (E1, E4, E8 y E9)	4	25%
R2	Estudiantes que escriben las tres cantidades de manera correcta correspondientes al precio total de la factura sin los respectivos procedimientos de cálculo y uso adecuado del signo igual (ej. $A = 50.000$, $B = 52.400$ y $C = 59.600$). (E7 y E12)	2	13%
R3	Estudiantes que escriben las tres cantidades de manera correcta correspondientes al precio total de la factura sin los respectivos procedimientos de cálculo y uso indiscriminado del signo igual (ej. $a = 0 = 50.000$, $b = 30 = 52.400$ y $c = 120 = 59.600$). (E3, E6, E13, E15 y E16)	5	31%
R4	Estudiantes que escriben uno o dos de las tres cantidades correspondientes al precio total de la factura de manera correcta, sus respectivos procedimientos de cálculo y uso indiscriminado del signo igual (ej. 50.000, 2.400 y 9.600). (E5 y E10)	2	13%
R5	Estudiantes que escriben tres cantidades correspondientes al precio total de la factura de manera incorrecta sin sus respectivos procedimientos de cálculo (ej. 0, 2.400 y 9.600). (E2, E11 y E14)	3	19%

En la *Tabla 9* se presentan los tipos de respuesta de la *S1T1P3*, cerca del 70% de los estudiantes responden de manera acertada y satisfactoria con las tres cantidades correspondientes al precio total de la factura, aun así, solo el 25% de este grupo de estudiantes precisa procedimientos de cálculo adecuados, en tanto que, el 43,75% restante se caracteriza por la imprecisión, o ausencia total, en los procedimientos de cálculo asociados a sus respuestas. Por el contrario, cerca del 30% de los estudiantes restante se caracteriza por responder de manera poco satisfactoria; siendo menos del 6,25% (un estudiante) quien logra exhibir dos cantidades de manera correcta correspondientes al precio total de la factura; el 23% restante de los estudiantes responden con tres cantidades incorrectas, o bien, solo una de las tres cantidades es correcta.

De este modo, se puede inferir que la mayoría de los estudiantes usan estrategias de cálculo apropiadas para hallar el precio total de la factura asociando las cantidades relevantes que lo permiten, las cuales son: \$50.000 (precio mensual inicial) y \$80 (precio por minuto consumido) que se reconocieron en las preguntas inmediatamente anteriores, como se muestra en la siguiente figura:

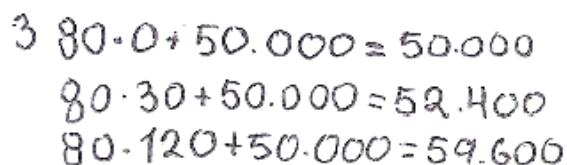

$$\begin{array}{l} 3 \ 80.0 + 50.000 = 50.000 \\ 80.30 + 50.000 = 52.400 \\ 80.120 + 50.000 = 59.600 \end{array}$$

Figura 6. S1T1P3R1

Aunque, el 70% de los estudiantes registraron respuestas correctas, solo el 25% mostraron sus procesos de cálculo en los cuales hicieron uso de las cantidades mencionadas anteriormente y del otro 43,75% restante se puede inferir el uso de estas cantidades en sus procesos de cálculo como consecuencia de sus respuestas acertadas. El uso de estas cantidades y los cálculos estratégicos permiten inferir un dominio aceptable e implícito del concepto de la función lineal. Se puede afirmar que el porcentaje de estudiantes que usaron correctamente las

dos cantidades se encuentra en el *Nivel Situacional* por el uso de estrategias informales y la intuición que les permitió encontrar las matemáticas inmersas en la situación problema.

Tabla 10

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 1 y preguntas 4a y 4b (S1T1P4ab)

(P4ab) Pregunta 4. Si el valor total de la factura es de \$51.200, responda:

a. Escribe cuántos minutos ha consumido Javier.

b. Explica cómo calculaste.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben la respuesta de manera correcta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos (15 minutos) considerando la diferencia entre 51.200 y 50.000 de manera implícita (1.200) para realizar la división entre 1.200 y el precio por minuto consumido (80) y, de este modo, calcular la cantidad de minutos consumidos. (E1, E5, E6, E8, E11 y E14)	6	37,50%
R2	Estudiantes que escriben la respuesta de manera correcta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos considerando la diferencia entre 51.200 y 50.000 de manera implícita (1.200) para realizar procedimientos de ensayo y error, multiplicando una cantidad numérica con 80 hasta que el producto sea igual a 1.200, y, de este modo, calcular la cantidad de minutos consumidos. (E3, E7, E9, E12, E13, E15 y E16)	7	43,75%
R3	Estudiante que escribe la respuesta de manera correcta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos y explica el procedimiento para resolver la ecuación $(80x + 50.000 = 51.200)$ para determinar el valor de la incógnita y, de este modo, calcular la cantidad de minutos consumidos. (E4)	1	6,25%
R4	Estudiante que escribe la respuesta de manera correcta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos considerando la diferencia entre 51.200 y	1	6,25%

50.000 de manera implícita (1.200) sin indicar cómo esta cantidad es relevante para conocer la cantidad de minutos consumidos (ej. $12.000 + 50.000 = 51.200$). (E10)

R5	Estudiante que escriben la respuesta de manera incorrecta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos (640 minutos) y explica que realizó un procedimiento de ensayo y error, multiplicando una cantidad numérica por 80 hasta que el producto sea igual a 51.200, para calcular la cantidad de minutos consumidos. (E2)	1	6,25%
----	--	---	-------

La *Tabla 10* contiene los tipos de respuesta de la *S1T1P4*, aproximadamente el 94% de los estudiantes responden de manera correcta con la cantidad de minutos pedida y brindan algún tipo de explicación asociada a su proceso de cálculo. Aquellos cuya explicación es consecuente con algunos de los procesos y/o estrategias de cálculo válidos para llegar a la cantidad de minutos consumidos a partir de la información presentada, corresponde al 87,5% a diferencia del 6% (E10) que no presenta información concluyente en su explicación. Del grupo de estudiantes pertenecientes a este alto porcentaje (87,5%), E4 destaca por el planteamiento y acertado desarrollo de una ecuación que en efecto propone una generalización de este caso particular de problema, como se logra ver a continuación:

$$\begin{aligned}
 4 \quad 80 \cdot x + 50.000 &= 51.200 \\
 80 \cdot x &= 51.200 - 50.000 \\
 80 \cdot x &= 1.200 \\
 x &= \frac{1.200}{80} \\
 x &= 15
 \end{aligned}$$

Figura 7. *S1T1P4R3*

Por último, el 6,25% (E2) restante, erra en la cantidad de minutos consumidos, aunque explica un procedimiento válido y recurrente en el que hacer matemático de los estudiantes, como lo son los procedimientos de ensayo y error.

A este respecto, en coordinación con la estrecha relación que sugiere calcular la cantidad de minutos consumidos para un caso particular del precio total de la factura con el concepto de ecuación y el alto porcentaje de estudiantes que responde de manera correcta con sus procedimientos de cálculo, es posible inferir que existe un dominio (a diferentes niveles) del concepto de ecuación, rápidamente verificable al identificar que todos los procedimientos expuestos son parte parcial o total de las partes que constituyen el proceso de solución de la ecuación $80x + 50.000 = 51.200$ que propone el estudiante E4.

Retomando lo evidenciado en los tipos de respuesta de la *S1T1P1* y *S1T1P2* se determina que la gran mayoría de los estudiantes reconocen las cantidades que están involucradas en la situación y el carácter constante o fijo del precio mensual inicial como elemento de partida para el incremento del precio total de la factura. Además, se verifica que, en *S1T1P3* se utiliza de manera implícita el modelo funcional $f(x) = 80x + 50.000$ compuesto a partir de las cantidades referidas en las preguntas anteriores, lo que apoya la idea de que los estudiantes adquieren o desarrollan una conciencia del papel de estas cantidades en los procesos de modelación o matematización vertical de la situación.

Esta secuencia de evidencias cierra con las registradas en *S1T1P4*, las cuales dan cuenta de un breve salto cualitativo hacia cómo lo funcional puede estar ligado también en contextos tradicionalmente estáticos, como es el caso de las ecuaciones y la búsqueda del valor de una

incógnita. Además, el dominio implícito del concepto de ecuación, al considerar la expresión $80x + 50.000 = 0$ a partir de los procesos de cálculo y validación expuestos por la gran mayoría de los estudiantes, es una constante recurrente que permite inferir el desarrollo de competencias ligadas al *Nivel referencial*, como, por ejemplo: utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones, que parece necesario para realizar este salto mencionado.

Todo lo anterior, permite concluir que más del 70% de los estudiantes reconoce las cantidades involucradas en la *Situación 1* y a partir de estas, se aproximan a su comprensión. Además, las acciones y la actividad matemática de los estudiantes, asociadas a los procesos de modelación, se centra particularmente en la *Matematización Horizontal – Nivel Situacional* y *Matematización Vertical – Nivel Referencial*.

Tarea 2 (T2): Plan móvil y cantidades constantes y variables.

Tabla 11

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 1 (S1T2P1)

(P1) Pregunta 1. Considera la situación anterior y completa la siguiente tabla:

Tabla 1. Relaciones entre cantidades que determinan el precio total de la factura

<i>Minutos consumidos</i>	<i>Precio mensual inicial (pesos)</i>	<i>Precio por minuto consumido (pesos)</i>	<i>Precio total por minutos consumidos (Pesos)</i>	<i>Precio total de la factura (Pesos)</i>
0				
2			160	
8				50.640
14		80		
35			2.800	
41	50.000			
59				54.720
70				

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
--------------------------	--------------------	----------------------------	----------------------------

Potencialidades y dificultades

R1	Estudiantes que completan la tabla de manera correcta con las cantidades respectivas a cada una de las cuatro columnas (precio mensual inicial, precio por minuto consumido, precio total por minutos consumidos y precio total de la factura). (E1, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E15 y E16)	12	75,00%
R2	Estudiantes que completan de manera correcta la tabla con las cantidades respectivas, salvo uno o dos errores en la columna del precio total por minutos consumidos o en la columna del precio total de la factura. (E2, E3, E13 y E14)	4	25,00%

Tabla 12

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 2a y 2b (S1T2P2ab)

(P2ab) Pregunta 2. Teniendo en cuenta la información de la tabla, indica:

Tabla 1. Relaciones entre cantidades que determinan el precio total de la factura

<i>Minutos consumidos</i>	<i>Precio mensual inicial (pesos)</i>	<i>Precio por minuto consumido (pesos)</i>	<i>Precio total por minutos consumidos (Pesos)</i>	<i>Precio total de la factura (Pesos)</i>
0				
2			160	
8				50.640
14		80		
35			2.800	
41	50.000			
59				54.720
70				

a. Las cantidades constantes.

b. Las cantidades que varían.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta las dos cantidades constantes (precio mensual inicial y precio por minuto consumido) y las tres cantidades que varían (minutos consumidos, precio total por minutos consumidos y precio total de la factura). (E4, E7, E9 y E13)	4	25,00%

R2	Estudiantes que escriben de manera correcta las dos cantidades constantes (precio mensual inicial y precio por minuto consumido) y dos de tres cantidades que varían (precio total por minutos consumidos y precio total de la factura). (E1, E2, E3, E5, E6, E8, E10, E11, E12, E15, E14 y E16)	12	75,00%
----	--	----	--------

De acuerdo con la *Tabla 11*, el 100% de los estudiantes completaron satisfactoriamente la *Tabla 1*, salvo algunas impresiones mínimas por parte del 25% del total de los estudiantes, como se muestra a continuación:

Minutos consumidos	Precio mensual inicial (pesos)	Precio por minuto consumido (pesos)	Precio total por minutos consumidos (Pesos)	Precio total de la factura (Pesos)
0	50 000	80	0	50 000
2	50 000	80	160	50 160
8	50 000	80	640	50.640
14	50 000	80	1120	51 120
35	50 000	80	2.800	52 800
41	50.000	80	3280	53 800
59	50 000	80	4720	54.720
70	50 000	80	5600	55600

Figura 8. S1T2P1R2

A partir de las respuestas *S1T2P1R1* y *S1T2P1R2*, se puede inferir que todo el grupo de estudiantes resolvió de manera acertada la actividad al calcular las cantidades respectivas para completar la *Tabla 1*. El 25% de los estudiantes que cometió uno o dos errores, puede aludir a una desatención al transcribir a la *Tabla 1* sus respuestas, como se muestra en la figura anterior (*Figura 8*), más que a una falta de comprensión de las operaciones y los cálculos requeridos para dar cuenta de cada una de las cantidades solicitadas en dicha tabla, pues en comparación con el máximo número de cantidades acertadas (27), errar dos de estas parece poco significativo y no conforma evidencia suficiente para decir que estos estudiantes no se conducen bajo estrategias de cálculo adecuadas para dar cuenta del resto de las cantidades correctas en sus respuestas.

Análogamente a la descripción de la tabla anterior, en la *Tabla 12* el 100% de los estudiantes identifican claramente cantidades constantes y que varían. El 75% del total de los estudiantes, corresponde al tipo de respuestas *S1T2P2abR2* los cuales omiten la cantidad minutos consumidos como una cantidad que varía.

Considerando las respuestas *S1T2P2abR1* y *S1T2P2abR2*, se concluye que todo el grupo, derivado del ejercicio de completar la *Tabla 1*, reconoce la variación y no variación de ciertas cantidades vinculadas a la *Situación 1* a partir de las regularidades asociadas a cada cantidad que, como se sugiere en la EMR, tiene lugar en un *Nivel situacional* como consecuencia de las estrategias usadas por los estudiantes para buscar dichas regularidades entre cantidades y reformularlas.

Retomando lo evidenciado en las respuestas *S1T2P1* y *S1T2P2ab*, como resultados asociados al paso del *Nivel situacional* al *Nivel referencial*, son concluyentes respecto al uso adecuado de estrategias de cálculo y la conciencia de aquello que varía o permanece constante a través de un registro tabular, lo que les permite, a su vez, interpretar y resolver problemas asociados a la *Situación 1* con un mayor grado de dificultad, alienando parcialmente el contexto de la situación y procediendo a darle significado a las operaciones y cantidades numéricas presentes. En este sentido, el grupo de estudiantes en general, referente a la *Matematización Horizontal*, abordan la comprensión del contexto a partir de acciones propias del *Nivel situacional* consecuentes con referente a la *Matematización Vertical - Nivel referencial*, en tanto se aproximan al desarrollo de *modelos de* con la tipificación de lo que varía o permanece constante, lo cual es sumamente importante, puesto que, estas nociones iniciales son necesarias

para establecer dependencia entre cantidades que varían y la consolidación de modelos de una relación funcional presente.

Tabla 13

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 3a y 3c (S1T2P3ac)

(P3ac) Pregunta 3. Teniendo en cuenta la información de la tabla, escribe:

Tabla 1. Relaciones entre cantidades que determinan el precio total de la factura

<i>Minutos consumidos</i>	<i>Precio mensual inicial (pesos)</i>	<i>Precio por minuto consumido (pesos)</i>	<i>Precio total por minutos consumidos (Pesos)</i>	<i>Precio total de la factura (Pesos)</i>
0				
2			160	
8				50.640
14		80		
35			2.800	
41	50.000			
59				54.720
70				

a. De que depende el precio total por minutos consumidos.

c. La manera como calculaste el precio total por minutos consumidos.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta que el precio total por minutos consumidos depende de las dos cantidades (minutos consumidos y precio por minuto consumido) e indican que para calcularlo multiplicaron la cantidad de minutos consumido con el precio por minuto consumido. (E1, E4, E6, E8, E9, E10 y E12)	7	43,75%
R2	Estudiantes que escriben que el precio total por minutos consumidos depende solamente de una de las dos cantidades correctas e indican que para calcularlo multiplicaron la cantidad de minutos consumidos con el precio por minuto consumido. (E2, E3, E5, E7, E13, E14, E15 y E16)	8	50,00%
R3	Estudiante que escribe que el precio total por minutos consumidos depende del número de llamadas realizadas e indica que para calcularlo multiplicó la cantidad de minutos consumidos con el precio por minuto consumido. (E11)	1	6,25%

Potencialidades y dificultades

Tabla 14*Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 3b y 3d (S1T2P3bd)***(P3bd) Pregunta 3.** Teniendo en cuenta la información de la tabla, escribe:*Tabla 1. Relaciones entre cantidades que determinan el precio total de la factura*

<i>Minutos consumidos</i>	<i>Precio mensual inicial (pesos)</i>	<i>Precio por minuto consumido (pesos)</i>	<i>Precio total por minutos consumidos (Pesos)</i>	<i>Precio total de la factura (Pesos)</i>
0				
2			160	
8				50.640
14		80		
35			2.800	
41	50.000			
59				54.720
70				

b. De que depende el precio total de la factura.**d.** La manera como calculaste el precio total de la factura.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta que el precio total de la factura depende de las tres cantidades respectivas (minutos consumidos, precio mensual inicial y precio por minuto consumido) e indican de manera correcta que sumaron el precio mensual inicial y el precio total por minutos consumidos. (E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9 y E14)	8	50,00%
R2	Estudiantes que escriben que el precio total de la factura depende solo de dos de las tres cantidades respectivas e indican de manera correcta que sumaron el precio mensual inicial y el precio total por minutos consumidos. (E1, E7, E11 y E15)	4	25,00%
R3	Estudiantes que escriben que el precio total de la factura depende de las tres cantidades respectivas e indican un procedimiento incorrecto para calcularlo (ej. multiplicar el precio mensual inicial y el precio total por minutos consumidos). (E10 y E12)	2	12,50%

R4	Estudiantes que escriben que el precio total de la factura depende solo de dos de las tres cantidades respectivas e indican un procedimiento incorrecto para calcularlo (ej. sumar el precio total por minutos consumido y el precio total de la factura). (E13 y E16)	2	12,50%
----	--	---	--------

Con base en las respuestas de la *Tabla 13*, se puede determinar que el 100% de los estudiantes reconoce las cantidades de las cuales depende el precio total por minutos consumidos, el 43,75% lo hace de manera precisa, es decir, explicitando cuales son dichas cantidades y cómo interfieren en el proceso de cálculo para encontrar el precio total por minutos consumidos. El 50%, que corresponden al tipo de respuesta *S1T2P3acR2*, pasan por alto la cantidad de minutos al no referirse explícitamente a ella como una de las cantidades de las cuales depende el precio total por minutos consumidos, pero sí la reconocen necesaria como tal en el proceso de cálculo. El 6,25% de los estudiantes restante no escriben de manera explícita las cantidades de las cuales depende el precio total por minutos consumidos, pero se evidencia que las consideran a través del proceso de cálculo.

En relación con los tipos de respuesta de la *Tabla 14*, el 75% estudiantes reconoce las cantidades de las cuales depende el precio total de la factura. El 50% lo hace de manera precisa, y el 25% restante, que corresponden al tipo de respuesta *S1T2P3bdR2*, pasan por alto la cantidad de minutos al no referirse explícitamente a ella como una de las cantidades de las cuales depende el precio total de la factura, pero sí la reconocen como tal en el proceso de cálculo. En relación con el 25% de los estudiantes restante, si bien, reconocen dos o tres de las cantidades de las cuales depende el precio total de la factura sus procedimientos son imprecisos, pues no permiten calcular el precio total de la factura.

De acuerdo con los tipos de respuestas *S1T2P3acR1*, *S1T2P3acR2*, *S1T2P3bdR1* y *S1T2P3bdR2*, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes reconocen la dependencia del precio total por minutos consumidos y el precio total de la factura de otras cantidades como unidades más pequeñas que permiten representar una situación particular, acciones que configuran un escenario a partir del cual se aborda un problema desde un *Nivel referencial*, presentando un dominio básico del uso de *modelos de* como herramienta de comprensión de situaciones problemas. En este sentido, se verifica que este grupo de estudiantes avanza progresivamente en la consolidación de sus procesos de modelación, toda vez que logran asociar adecuadamente la tipificación de las cantidades presentes en una situación problema y de relaciones funcionales y posteriormente usarlas como unidades que componen un modelo de dicha situación, ad-ortas de establecer modelos generales.

Por otra parte, una parte significativa de los estudiantes (aproximadamente el 50%), parece que dan por hecho que la cantidad de minutos esta necesariamente vinculada tanto al precio total por minutos consumidos como al precio total de la factura, a tal punto que, la conciencia de esta cantidad solo es exhibida en la explicación de los procesos de cálculo en cada caso. En este sentido, es posible que se esté en presencia de una dificultad asociada a la complejidad del objeto matemático (la expresión variable de una relación funcional) y la forma como los estudiantes comunican información acerca de este, además, es posible que la forma de presentar la *Tabla 1* en la pregunta *S1T2P1* pudo orientar a este grupo de estudiantes a centrar su atención solo en las columna vacías, como ejercicio práctico de completar la tabla, y dejar de lado el reconocimiento del carácter variable de los minutos consumidos que sí identificaron para

las otras cantidades cuya columna debían completar. Esto último, es una hipótesis basada en la observación y el criterio profesional de los proponentes de este análisis.

Tabla 15

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 4a y 4b (S1T2P4ab)

(P4ab) Pregunta 4. Si x representa la cantidad de minutos consumidos, escribe una expresión que permita calcular:

- a. El precio total por minutos consumidos.
- b. El precio total de la factura.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta las expresiones algebraicas para calcular el precio total por minutos consumidos ($80x$) y el precio total de la factura ($50.000 + 80x$). (E1, E2, E3, E4, E5, E7, E8, E9, E10, E12 y E13)	10	62,50%
R2	Estudiantes que utilizan la x como abreviatura de precio total por minutos consumidos y precio total de la factura en dos expresiones aritméticas como caso particular del cálculo de ambas cantidades, respectivamente. (ej. $x = 2(80)$ y $x = 50.000 + 160$). (E6 y E14)	2	12,50%
R3	Estudiantes que escriben de manera correcta la expresión algebraica para calcular el precio total por minutos consumidos e incorrecta la expresión para calcular el precio total de la factura (ej. Es sumar minutos consumidos por el precio total por minutos consumidos). (E2, E11, E15 y E16)	4	25,00%

Tabla 16

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 5a (S1T2P5a)

(P5a) Pregunta 5. Camilo propone la siguiente expresión para calcular el precio total de la factura:

$$\text{Precio total de la factura} = 80x + 50.000$$

- a. Justifique si la expresión que propuso Camilo es correcta.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
-------------------	-------------	---------------	---------------------	---------------------

Potencialidades y dificultades

R1	Estudiantes que responden de manera acertada al indicar que la expresión que propuso Camilo es correcta. (E1, E3, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13 y E14)	Indican que en la expresión x representa la cantidad de minutos consumidos. (E1, E2, E7, E11 y E14)	5	31,25%
		Indican que la suma entre las cantidades (precio mensual inicial y precio total por minuto consumido) son las correctas para calcular el precio total de la factura. (E3, E4, E5, E8, E9, E10 y E13)	7	43,75%
		Indica que la expresión permite calcular el precio total de la factura. (E6)	1	6,25%
		No escribe una justificación relacionada con la expresión. (E12)	1	6,25%
R2	Estudiantes que responden de manera desacertada al indicar que la expresión que propuso Camilo es incorrecta. (E15 y E16)	Sin justificación. (E15 y E16)	2	12,50%

Teniendo en cuenta la información de la *Tabla 15*, el 75% de los estudiantes formulan dos expresiones que permiten calcular el precio total por minutos consumidos y el precio total de la factura de manera correcta, de este porcentaje el 65, 50% lo hace por medio de una expresión general y el 12,50% lo hace a través de un ejemplo o caso particular de cada una de las

cantidades respectivas. El 25% de estudiantes restante escriben correctamente una expresión general para calcular el precio total de la factura.

En relación con las respuestas de *S1T2P5a* de la *Tabla 16*, aproximadamente el 88% de los estudiantes reconocen que la expresión propuesta por Camilo es correcta (postura correcta), de este grupo, el 80 % considera los elementos constitutivos de la expresión (*Precio total de la factura = $80x + 50.000$*) como parte relevante de la justificación. Por otra parte, el 12% de los estudiantes restante indican que la expresión propuesta es incorrecta sin presentar argumentos.

Con respecto a las respuestas a las preguntas *S1T2P4ab* y *S1T2P5a*, la gran mayoría de los estudiantes (más del 75%) asocian correctamente las cantidades constantes y variables en situaciones de variación, formulando expresiones compuestas a partir de cantidades previamente reconocidas y calificadas (ej. *Precio total de la factura = $80x + 50.000$*) exhibiendo con claridad las relaciones de dependencia entre cantidades relacionadas, esto último, como consecuencia de la producción y validación de modelos.

Referente a la EMR, se sugiere que la actividad matemática del estudiante gira en torno a la esquematización de la situación a través de creación, validación y comprensión de *modelos de* como trampolín hacia los *modelos para*, en este sentido, se evidencia la dinámica de los procesos de *Matematización Vertical* que conduce a propiciar condiciones aptas para avanzar cualitativamente desde la *Matematización Vertical – Nivel Referencial* hacia la *Matematización Vertical – Nivel General*.

En este grupo mayoritario, se evidencia que poco más del 60% del total de los estudiantes, en relación con ciertas dificultades asociadas a la complejidad de los objetos

matemáticos (función lineal), no comenten errores derivados de este tipo de dificultades, ellos reconocen de manera única y apropiada la letra x como variable asociada o que representa los minutos consumidos, tal y como se espera que los estudiantes procedan.

Por el contrario, un porcentaje menor al 25% del total de los estudiantes, si comente ciertos errores derivados de dos tipos de dificultades generales, a saber; dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático. Este tipo de dificultades se encuentran dentro de lo referente a las funciones.

La evidencia que sugiere el primer tipo general de dificultades es relativa a la incomprensión de la simbología, rastreada a través del error de no distinguir entre variable dependiente e independiente, ya que claramente en la consigan de la pregunta *S1T2P4ac* se deja claro que la letra x representa la cantidad de minutos consumidos, es decir, la variable independiente, esto ocurre en la respuesta del siguiente estudiante, quien expone un caso particular donde se han consumido dos minutos y la letra x es usada para designar la variable dependiente:

4.º $x = 2 \times 80 \rightarrow$ precio de cada minuto
 $\downarrow$
representa los minutos consumidos
 $x = 160 \rightarrow$ Este es el precio total por minutos consumidos

b. $x = 50.000 + 160 \rightarrow$ precio total por minutos consumidos
 $\nwarrow$
precio mensual inicial factura

Figura 9. S1T2P4abR2

En este caso, el estudiante en una medida pragmática representa la situación general del precio total por minutos consumidos y el precio total de la factura (ambos modelos funcionales), a través de un ejemplo particular, pero no caracterizó adecuadamente el uso de la letra x como la variable independiente, por el contrario, la asoció como variable dependiente.

Por otra parte, la evidencia que sugiere el segundo tipo general de dificultades es relativa a la dificultad en la resolución de problemas, rastreada a través del error de no establecer correctamente una expresión algebraica que modele el problema, como se presenta en la siguiente figura:

$x = 59.50.000 \rightarrow$ para saber el precio total de la factura

Figura 10. S1T2P4abR3

Como se puede observar, este estudiante no solo plantea equívocamente la expresión algebraica que modela la situación del precio total de la factura, también, designa la variable independiente como dependiente.

Estos errores evidenciados, como lo presenta Socas (1997) configuran “la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste” (p. 125).

Tabla 17

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 5b (S1T2P5b)

(P5b) Pregunta 5. Camilo propone la siguiente expresión para calcular el precio total de la factura:

$$\text{Precio total de la factura} = 80x + 50.000.$$

b. Calcule el precio total de la factura cuando Javier ha consumido 8 y 59 minutos.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben las dos cantidades de manera correcta correspondientes al precio total de la factura (\$50.640 y \$54.720), asociando procedimientos de cálculo y uso adecuado del signo igual. (E1, E4, E5, E7, E8, E9, E11 y E13)	8	50,00%
R2	Estudiantes que escriben las dos cantidades correctas correspondientes al precio total de la factura asociando procedimientos de cálculo y uso indiscriminado del signo igual (ej. $8 = 8(80) = 640 + 50.000 = 50.640$). (E6 y E14)	2	12,50%
R3	Estudiantes que escriben las dos cantidades correctas correspondiente al precio total de la factura sin asociar procedimientos de cálculo (ej. 8 minutos: 50.640 y 59 minutos: 54.720). (E10, E12, E15 y E16)	4	25,00%
R4	Estudiantes que escriben de manera incorrecta dos cantidades correspondientes al precio total de la factura (ej. 640 y 4.729). (E2 y E3)	2	12,50%

Tabla 18

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 5c (S1T2P5c)

(P5c) Pregunta 5. Camilo propone la siguiente expresión para calcular el precio total de la factura:

$$\text{Precio total de la factura} = 80x + 50.000.$$

c. Explica si x puede tomar valores como $1/2$ o $3/4$.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que están de acuerdo con el uso de valores racionales para x . (E2, E9, E11, E12, E14, E15 y E16)	Indica que la x puede tomar cualquier valor dentro del dominio de la función porque representa una variable. (E2)	1	6,25%
		Indican que la x representa una variable que puede tomar cualquier valor. (E15 y E16)	2	12,50%
		Indica que x representa cualquier número. (E9)	1	6,25%
		Indica que se le puede asociar un precio total por minutos consumidos a cualquier cantidad de minutos que represente la x . (E11)	1	6,25%
		Indica que las fracciones son una representación válida para la cantidad de minutos consumidos. (E14)	1	6,25%
		Indica que las cantidades racionales de minutos consumidos se acumulan hasta ser cantidades enteras. (E1)	1	6,25%
		Sin justificación. (E12)	1	6,25%
R2	Estudiantes que no están de acuerdo con el uso de valores racionales para x . (E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10 y E13)	Indican que solo se pueden considerar números enteros para los minutos consumidos. (E4, E5, E8, E10 y E13)	5	31,25%
		Indica que el precio total de la factura solo aumenta al considerar números naturales para los de minutos consumidos. (E6)	1	6,25%
		Sin justificación. (E3 y E7)	2	12,50%

Se puede apreciar en la *Tabla 17* que el 87,50% de los estudiantes realizan los cálculos adecuados para encontrar el precio total de la factura cuando se ha consumido una cantidad específica de minutos. En relación con este porcentaje, el 50% de los estudiantes asocian procedimientos de cálculo con uso adecuado del signo igual, a diferencia del 12,50% que presenta un uso inadecuado (ver *figura 11*). El 25% de los estudiantes restante no presentan sus procesos de cálculo.

b. El precio total de la factura cuando javier ha consumido:

$$8 = 8 \times 80 = 640 + 50.000 = 50.640$$

$$59 = 59 \times 80 = 4720 + 50.000 = 54720$$

Figura 11. S1T2P5bR3

En relación con la *Tabla 18*, teniendo en cuenta las respuestas de S1T2P5c el 50% de los estudiantes reconoce que la x , que representa la cantidad de minutos consumidos, puede tomar valores racionales, a partir de ello, justifican de manera acertada sobre el carácter variable de la x o relacionan el dominio que tiene la función precio total de la factura. El 50% restante, consideran que la x no puede usar valores racionales y sus justificaciones están relacionadas con el uso exclusivo de números naturales o enteros positivos asociado a la cantidad de minutos consumidos.

Con relación a las respuestas a las preguntas S1T2P5b y S1T2P5c, se puede determinar que un grupo aproximadamente del 50%, correspondiente a los tipos de respuestas S1T2P5bR1, S1T2P5bR2 y S1T2P5cR1, realizan procesos de cálculos adecuados para hallar el precio total de la factura, considerando el modelo lineal propuesto ($y = 80x + 50.000$), y determinan un dominio para la función más allá de los números naturales o enteros positivos, sin que esto

configure un conflicto entre la lógica cotidiana y la lógica matemática, es decir, toman en consideración que en el contexto cotidiano los precios totales de la factura no siempre son cantidades enteras y pueden ser producto de un consumo de minutos diverso (cantidades racionales) y trasladan este conocimiento al plano netamente matemático.

En ese sentido, este grupo de estudiantes encaran esta situación problema de manera paradigmática, lo que permite avanzar a objetos matemáticos más complejos y abstractos, como la producción de *modelos para*, esto último, referente a la *Matematización Vertical – Nivel General* de EMR.

Por otro lado, el 50% restante de los estudiantes, correspondiente a los tipos de preguntas *S1T2P5bR4* y *S1T2P5cR2*, exhiben la existencia del conflicto anteriormente sugerido entre la lógica cotidiana y la lógica matemática. Esto se evidencia a partir de la oposición manifiesta de que la variable x pueda tomar valores racionales, además de lo que expresaron en la plenaria.

Respecto a lo anterior, en la plenaria, tres estudiantes correspondientes a los tipos de respuesta *S1T2P5bR4* y *S1T2P5cR2*, expresan que; “no se pueden cobrar \$40 por medio minuto consumido, así yo hable un segundo me cobran el minuto”, “Cuando va a un minuterero no le van a cobrar un minuto y medio, cobran los dos minutos” y “Cuando uno va al D1 y en la factura dice \$170, le cobra a uno \$200”, comunicando claramente que, a partir de la lógica cotidiana y propia de sus contextos socioculturales, tal cosa (considerar valores racionales para la variable x) no es posible. Su experiencia con la divisa Colombiana o el cobro en puestos de venta de llamadas (en las que se realizan estimaciones o aproximaciones por encima a una cantidad entera), entra claramente en conflicto con un posible dominio racional de la función $y = 80x + 50.000$.

Con base en la discusión, el profesor reconoce el obstáculo que se generó a partir de la pregunta *S1T2P5c* y lo atiende enfocándose en la expresión algebraica ($f(x) = 80x + 50.000$) que modela la situación y su dominio en los reales.

Socas (1996) propone que:

En general, la “lógica” de las matemáticas escolares depende muchas veces de la situación en la que se encuentre el alumno. Ya hemos mencionado la pragmática como un dominio del lenguaje, donde el sentido de la palabra está en función del contexto en que se enuncia; en un sentido más general, podemos hablar de la influencia de lo social sobre lo lógico. (p. 131)

En este sentido, las decisiones didácticas que configuran la elaboración de una tarea o una pregunta, en este caso la elaboración de la pregunta *S1T2P5c*, requieren una mayor atención a las posibles connotaciones e inferencias del contexto social sobre lo matemático, con el fin de prever y atender estas discusiones y conflictos.

Tabla 19

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y preguntas 6a y 6b (S1T2P6ab)

(P6ab) Pregunta 6. Si el precio total de la factura es de \$62.000,

- a. Calcula la cantidad de minutos consumidos.
- b. Explica cómo lo calculaste.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben la respuesta correcta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos (150 minutos) considerando la diferencia entre 62.000 y 50.000 de manera implícita (12.000) para realizar la división entre 12.000 y el	10	62,50%

	precio total por minuto consumido (80) y, de este modo, calcular la cantidad de minutos consumidos. (E1, E2 E3, E6, E8, E9, E10, E13, E14 y E16)		
R2	Estudiante que escribe la respuesta de manera correcta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos y explica el procedimiento para resolver la ecuación ($80x + 50.000 = 62.000$) para determinar el valor de la incógnita y, de este modo, calcular la cantidad de minutos consumidos. (E4)	1	6,25%
R3	Estudiantes que escriben la cantidad correcta de minutos consumidos y consideran la diferencia entre 62.000 y 50.000 de manera implícita (12.000) e indican procedimientos de ensayo y error multiplicando una cantidad numérica con 80 hasta que el producto sea igual a 12.000. (E7, E11 y E15)	3	18,75%
R4	Estudiantes que escriben la respuesta de manera incorrecta correspondientes a la cantidad de minutos consumidos (775 minutos) considerando la división entre el precio total de la factura (62.000) y el precio por minuto consumido (80) para calcular la cantidad de minutos consumidos. (E5 y E12)	2	12,50%

Teniendo en cuenta los resultados de la *Tabla 19*, se puede apreciar que el 87,50% de los estudiantes calcula la cantidad correcta a través de cuatro diferentes procesos de cálculo asociados, directa o indirectamente, al proceso de resolución de la ecuación $50.000 + 80x = 62.000$. El 12,50% de estudiantes restante, responde equívocamente con una cantidad de minutos consumidos producto de procedimientos de cálculo inadecuados y difícilmente relacionados con la ecuación en cuestión.

De acuerdo con las respuestas *S1T2P6ab* y considerando que una de las consignas propuestas para esta pregunta era presentar la necesidad de un salto de la función lineal $y = 50.000 + 80x$ a la ecuación $50.000 + 80x = 62.000$ para que los estudiantes pudiesen llegar a interactuar o recurrir a la ecuación, se puede observar que la gran mayoría de estudiantes logra llegar y reconocer, de una u otra manera, la ecuación como una característica esencial dentro de

su estrategia de cálculo; esto se evidencia en los tipos de respuestas *S1T2P6abR1* y *S1T2P6abR3* y en sus explicaciones sobre los procesos de cálculo. Las explicaciones de estos estudiantes permiten reconstruir un paso a paso del uso implícito de la ecuación $50.000 + 80x = 62.000$, en consecuencia, la consigna propuesta fue acertada.

En la respuesta *S1T2P6abR2*, se puede observar con total claridad el desarrollo paso a paso de la ecuación $x80 + 50.000 = 62.000$ hecho por un estudiante, como se muestra en la siguiente figura:

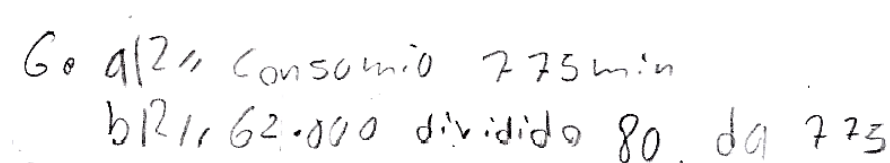
g) Si el precio total de la factura es 62.000
a) $x \cdot 80 + 50.000 = 62.000$
 $80x = 62.000 - 50.000$
 $80x = 12.000$
 $x = 12.000 / 80$
 $x = 150$
b) Halle "x"

Figura 12. *S1T2P6abR3*

En efecto, esta precisión en la respuesta *S1T2P6abR2* y las aproximaciones de las respuestas *S1T2P6abR1* y *S1T2P6abR3*, son evidencia, respecto a la *Matematización Vertical - Nivel Referencial*, de un aumento de la conciencia y dominio de *modelos de*, ya que la puesta en correlación de las cantidades en la ecuación ($50.000 + 80x = 62.000$), ligadas directamente desde el contexto funcional, es aceptada y el modelo de referencia al problema ($y = 50.000 + 80x$) se vuelve premisa en sus formas de abordar y tratar de esquematizar la situación planteada en la pregunta *S1T2P6ab*.

En este sentido, la gran mayoría de estudiantes logra realizar eficazmente un salto cualitativo entre el modelo lineal y la ecuación, lo cual conduce al reconocimiento de la relación que guardan estos dos conceptos, a saber; la ecuación $50.000 + 80x = 62.000$ procede de las funciones $y = 50.000 + 80x$ y $y = 62.000$. Esta primera idea o relación, se espera que permita a los estudiantes avanzar hacia la construcción de relaciones más poderosas, generalizables y bien definidas, por ejemplo; cualquier ecuación puede verse como la igualdad de dos funciones.

Por otra parte, en el tipo de respuesta *S1T2P6abR4* (ver *figura 13*) queda claro que estos estudiantes en particular no logran asociar el modelo lineal previamente definido ($y = 50.000 + 80x$) con la ecuación ($50.000 + 80x = 62.000$), posiblemente porque parten del modelo lineal $y = 80x$, donde la variable x representa la cantidad de minutos consumidos y 80 el precio por minuto consumido, es decir, parten del modelo asociado al precio total por minutos consumidos y no del modelo asociado al precio total de la factura, de manera que, al considerar y como el precio total de la factura (62.000) y despejar x del precio total por minutos consumidos ($y = 80x$), es razonable obtener las respuestas *S1T2P6abR4*.



60 d/21 consumo 775 min
b) R1, 62.000 dividido 80 da 775

Figura 13. S1T2P6abR4

No obstante, se puede determinar que estos estudiantes tienen dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, en sentido estricto, dificultades en la resolución de problemas. Esto se puede evidenciar a través de los dos errores que están relacionados con sus respuestas, los cuales son: igualar dos expresiones que no representan la misma cantidad y no relacionar las posibles soluciones al contexto del problema.

Tabla 20

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7a (S1T2P7a)

(P7a) Pregunta 7. Teniendo en cuenta el procedimiento anterior:

Figura 1. Procedimiento para calcular la cantidad de minutos consumidos cuando el precio de la factura es de 62.000

		$80x + 50.000 = 62.000$	Ecuación inicial
Paso 1		$80x + 50.000 - 50.000 = 62.000 - 50.000$	
Paso 2		$80x = 12.000$	
Paso 3		$\frac{80}{80}x = \frac{12.000}{80}$	
Paso 4		$x = 150$	

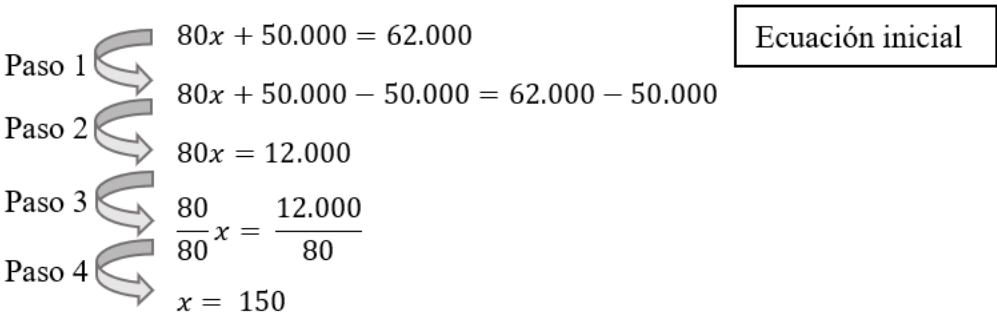
a. Indica qué hizo en el paso 1.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican de manera correcta que en el paso uno del procedimiento hecho por Camilo se resta 50.000 en ambos lados de la ecuación inicial ($50.000 + 80x = 62.000$). (E1, E2, E5, E7, E8, E9 y E12)	7	43,75%
R2	Estudiantes que indican que en el paso uno del procedimiento hecho por Camilo paso a restar 50.000 al otro lado de la ecuación inicial. (E4 y E13)	2	12,50%
R3	Estudiantes que indican que en el paso uno del procedimiento hecho por Camilo se formuló la ecuación inicial. (E6, E10, E11 y E14)	4	25,00%
R4	Estudiantes que indican que en el paso uno del procedimiento hecho por Camilo se formuló la expresión $50.000 + 80x$. (E3, E15 y E16)	3	18,75%

Tabla 21
Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7b (S1T2P7b)

(P7b) Pregunta 7. Teniendo en cuenta el procedimiento anterior:

Figura 1. Procedimiento para calcular la cantidad de minutos consumidos cuando el precio de la factura es de 62.000



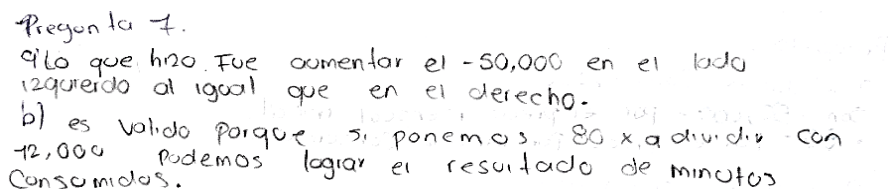
b. Indica si el procedimiento que hizo Camilo en el paso 3 es válido y justifica.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican de manera correcta que el paso tres del procedimiento hecho por Camilo es válido. (E1, E2, E5, E6, E7, E10, E12 y E13)	Indica que dividir ambos lados de la ecuación entre 80 preserva la igualdad. (E6)	1	6,25%
		Indican que al dividir ambos lados de la ecuación entre 80 permite conocer la cantidad de minutos consumidos. (E1, E2, E5, E7, E10, E12 y E13)	7	43,75%
R2	Estudiantes que indican de manera incorrecta que el paso tres del procedimiento hecho por Camilo es inválido. (E3, E4, E8, E9, E11, E14, E15 y E16)	Indican que no hay razón para dividir ambos lados de la ecuación entre 80. (E3, E4 y E8)	3	18,75%
		Indican que no hay razón para dividir 80 entre 80. (E9, E14, E15 y E16)	4	25,00%
		Indica que dividir ambos lados de la ecuación entre 80 no preserva la igualdad. (E11)	1	6,25%

La *Tabla 20* contiene los tipos de respuesta de *S1T2P7a*. El 56,25% de los estudiantes identificaron de manera correcta que el procedimiento hecho por Camilo fue restar 50.000 en ambos lados de la ecuación inicial, como lo indica el 43,75%, o pasar 50.000 a restar al otro lado de la ecuación, expresada por el 12,50% de los demás estudiantes. Con relación al 43,75% de los estudiantes restante, respondieron de forma imprecisa al referirse a la ecuación inicial sin tener en cuenta que el paso 1 hace referencia a cómo cambia la ecuación inicial y es transformada en la siguiente ecuación equivalente.

Por otra parte, en la *Tabla 21*, teniendo en cuenta los tipos de respuesta de los estudiantes, el 50% indican que el proceso de dividir la misma cantidad en ambos lados de una igualdad es acertado y solo un estudiante basa su justificación a partir de las propiedades de la igualdad, a diferencia del otro 50% de los estudiantes que invalida el proceso anteriormente mencionado, aludiendo a una incomprensión de las operaciones vinculadas a dicho proceso.

Teniendo en cuenta las respuestas *S1T2P7aR1* y *S1T2P7bR1* se puede determinar que aproximadamente un 50% de los estudiantes reconocen de manera correcta las operaciones básicas y algunas propiedades de la igualdad, como lo son; la propiedad aditiva y multiplicativa de la igualdad, en un sentido algo coloquial, como se puede apreciar en la siguiente figura:



Pregunta 7.
a) lo que hizo fue aumentar el -50,000 en el lado izquierdo al igual que en el derecho.
b) es valido porque si ponemos 50 x a dividir con 50,000 podemos lograr el resultado de minutos consumidos.

Figura 14. *S1T2P7abR1*

En consecuencia, este grupo de estudiantes presentan un dominio conceptual y procedimental respecto al uso y manipulación de las ecuaciones, lo cual es relevante para la creación de modelos, dado que, guarda relación con lo propuesto en los LCM; respecto a la modelación, y con los EBC; respecto a la coherencia vertical asociada al desarrollo integral del pensamiento matemático, concretamente, al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. En este sentido, el dominio que tienen los estudiantes de las operaciones básicas es afín y coherente con la construcción de modelos en diferentes niveles, referente a la EMR, el pensamiento matemático del estudiante se asocia a esa dinámica vertical entre los diferentes niveles de matematización.

Por el contrario, el otro 50% del total de los estudiantes, presentan dificultades, que se evidencian en las respuestas *S1T2P7aR2*, *S1T2P7aR3*, *S1T2P7aR4* y *S1T2P7bR2*, asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas, en sentido estricto; las dificultades relacionadas con las operaciones, las dificultades relacionadas con las propiedades básicas de los números y dificultades relacionadas a la comunicación de los objetos matemáticos.

Respecto a lo anterior, en el tipo de respuesta de *S1T2P7aR2*, el 12% los estudiantes describen la acción de restar un número en ambos lados de una igualdad como la acción de pasar un número al otro lado a restar, esa caracterización imprecisa, está relacionada con la dificultad en la comunicación de los objetos matemáticos; posiblemente, como resultado de las decisiones didácticas de los docentes al referir estas expresiones como adecuadas para tratar de conciliar un signo matemático o significado matemático.

Esto crea conflictos cognitivos que pueden llevar a los estudiantes a disociar los procesos internos entre las operaciones, dicho de otra manera, tal como lo presenta Socas (1997), “Hay también algunas palabras usadas en ciertos contextos que pueden ocasionar confusiones de

conceptos y que probablemente, podrían ser evitadas, particularmente, cuando se emplean connotaciones del lenguaje diario para atraer la atención sobre un signo”. (p. 127)

Finalmente, en el tipo de respuesta de *S1T2P7bR2*, se puede apreciar que el 50% estudiantes no reconocen la propiedad inversa de la multiplicación en los procedimientos de cálculo, porque en sus justificaciones lo mencionan como un proceso invalido o poco posible, como se muestra en la *figura 15*:

b) Es correcto pasar el 80 a dividir, pero no lo considero valido porque dejo 2 '80' en un lado (como si dividiera 80/80) lo que no me parece correcto

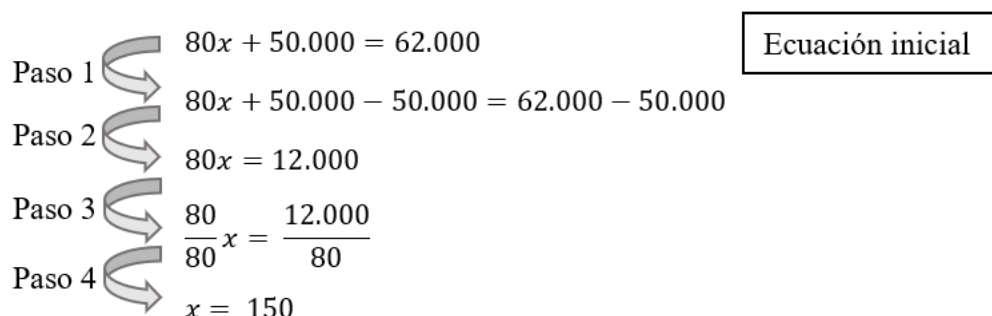
Figura 15. *S1T2P7bR2*

Tabla 22

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7c (S1T2P7c)

(P7c) Pregunta 7. Teniendo en cuenta el procedimiento anterior:

Figura 1. Procedimiento para calcular la cantidad de minutos consumidos cuando el precio de la factura es de 62.000



c. Explica a qué corresponde el valor obtenido de la x .

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican de manera correcta que el valor obtenido para x (150 minutos) corresponde a la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de la factura es \$62.000. (E3, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13 y E14, E15 y E16)	13	81,25%

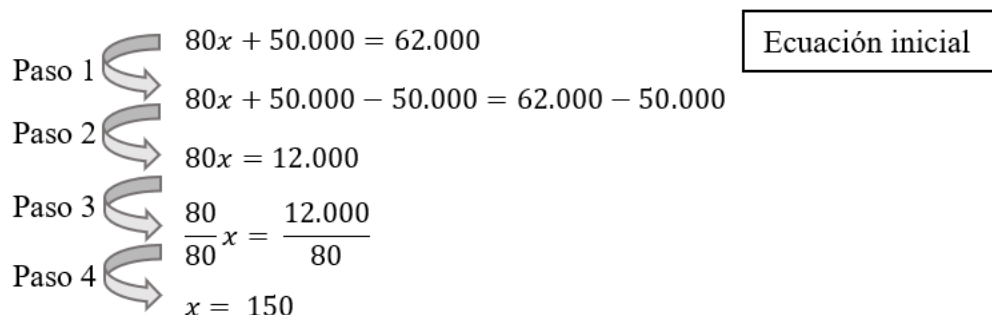
R2	Estudiantes que indican que el valor obtenido para la x es el cociente entre 12.000 y 80. (E1, E2 y E5)	3	18,75%
----	---	---	--------

Tabla 23

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 2 y pregunta 7d (S1T2P7d)

(P7d) Pregunta 7. Teniendo en cuenta el procedimiento anterior:

Figura 1. Procedimiento para calcular la cantidad de minutos consumidos cuando el precio de la factura es de 62.000



d. Reemplaza el valor de la x en la ecuación inicial e indica que se obtiene.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que evalúan de manera correcta el valor de x (150) en la ecuación inicial e indican que se obtiene el precio total de la factura (62.000). (E4, E9, E11, E14, E15 y E16)	6	37,50%
R2	Estudiantes que evalúan de manera correcta el valor de la x en la ecuación inicial, sin indicar lo que se obtiene. (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E10, E12 y E13)	10	62,50%

La Tabla 22, que contiene las respuestas a la pregunta S1T2P7b, se puede apreciar que 81,25% de los estudiantes identifica con claridad que la letra x representa la cantidad de minutos consumidos asignando a ella el carácter de incógnita, toda vez que justifican que representa esa cantidad cuando el precio total de la factura es \$62.000. En contraste, el 18,75% de los

estudiantes restante relaciona la x con la cantidad resultante de una operación previa, dejando de lado el contexto de la situación problema.

En cuanto a la *Tabla 23*, el 100% de los estudiantes reemplazan el valor de la x en la ecuación inicial, operan correctamente hasta reducir las expresiones de los dos o un solo miembro de la ecuación y obtienen como resultado el precio total de la factura (62.000) o la identidad ($62.000 = 62.000$). El 37,5%, correspondientes al tipo de respuesta *S1T2P7bR1* expresa la relación entre el conjunto solución de la ecuación inicial ($x = 150$) y la situación problema, al indicar de manera correcta que reemplazar el valor de x en dicha ecuación ($80x + 50.000 = 62.000$) da como resultado el precio total de la factura (62.000). Por su parte, el 62,5% restante no emite algún tipo de caracterización del resultado del proceso de reemplazar x en la ecuación inicial.

Considerando el tipo de respuestas *S1T2P7cR1*, *S1T2P7dR1* y *S1T2P7dR2*, se evidencia que la gran mayoría de los estudiantes reconocen eficazmente la ecuación ($80x + 50.000 = 62.000$) como una proposición susceptible de ser validada, es decir, la ecuación es vista como la igualdad entre dos expresiones algebraicas que se cumple, o no, para un determinado valor, o valores, que puede tomar la letra x (conjunto solución). En este sentido, esta idea, que se deduce de sus respuestas, constituye una evidencia sobre sus esquemas mentales relacionados al concepto de ecuación y sobre la vigencia que tienen algunas definiciones acerca del concepto de ecuación a lo largo del tiempo, las cuales condicionan altamente dicho concepto de ecuación a la idea de lo estático, lo no variable o a una relación de correspondencia, como la siguiente definición tomada de un libro de texto: Una ecuación es una igualdad algebraica que no se

cumple para todos los valores de las letras. Una igualdad algebraica está formada por dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual. (Santillana Educación, S.L, 2007, p. 310).

Este tipo de definiciones tan marcadas en el contexto educativo y en la educación matemática en general, puede presentar grandes desafíos y oposición al desarrollo de la propuesta de inclusión de un aprendizaje del álgebra a partir de un enfoque funcional.

Al respecto de la *Tarea 2*, se pretende un acercamiento a la *Matematización Vertical- Nivel Referencial* y la *Matematización Vertical- Nivel General* a partir de la creación, manipulación y validación de *modelos de* y *modelos para* en situaciones de variación. En este sentido, los estudiantes avanzaron en el establecimiento de relaciones de dependencia bien definidas entre las cantidades variables y constantes al identificar regularidades en diferentes registros, en este sentido, poco más del 50% de los estudiantes formularon expresiones generales que permiten esquematizar la situación planteada, lo que contribuyó a realizar un salto cualitativo a la relación entre un modelo lineal y la ecuación de primer grado a partir de la naturaleza variable e incógnita que posee la x en cada caso.

En relación con los errores y dificultades presentes en la *Tarea 2*, aproximadamente un 25% de los estudiantes, en el proceso de formulación y comprobación de las expresiones algebraicas, presentaron dificultades relacionadas con el uso y manipulación de una función lineal y ecuación de primer grado, pero esto no representó un obstáculo para los estudiantes al momento de presentar conclusiones acertadas sobre las cantidades y sus relaciones dentro de la situación.

Tarea 3 (T3): Comparando planes móviles a través de la intersección.**Tabla 24***Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1a (S1T3P1a)***(P1a) Pregunta 1.** En la siguiente tabla se presenta la información de los dos planes.*Tabla 2. Información del plan actual y plan b*

Plan	Contiene	Precio mensual inicial
Actual	50 GB + \$80 por minuto consumido	\$50.000
B	50 GB + \$30 por minuto consumido	\$60.000

1. Considerando la información de los planes,**a.** Completa la siguiente tabla:*Tabla 3. Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b*

<i>Mínutos consumidos</i>	<i>Precio total de la factura del Plan actual (\$)</i>	<i>Precio total de la factura del Plan b (\$)</i>	<i>Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b (\$)</i>
190	65.200	65.700	500
193,5			
199			
203			
207			
212,8			

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que completan la tabla de manera correcta con las cantidades respectivas a cada una de las tres columnas. (E1, E2, E5, E6, E7, E8, E9, E13, E14, E15 y E16)	11	68,75%
R2	Estudiantes que completan de manera correcta la tabla con las cantidades respectivas, salvo uno o dos errores en alguna de las columnas. (E3, E4, E10, E11 y E12)	5	31,25%

Tabla 25

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1b (S1T3P1b)

(P1b) Pregunta 1. Teniendo en cuenta la información de la tabla:

Tabla 3. Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b

<i>Mínutos consumidos</i>	<i>Precio total de la factura del Plan actual (\$)</i>	<i>Precio total de la factura del Plan b (\$)</i>	<i>Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b (\$)</i>
190	65.200	65.700	500
193,5			
199			
203			
207			
212,8			

b. Explica cómo cambian los valores de la diferencia entre el precio total de la factura del plan actual y el precio total de la factura del plan b.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican de manera correcta que los valores de la diferencia en principio van disminuyendo y posteriormente aumentan. (E10, E12 y E13)	3	18,75%
R2	Estudiantes que indican que los valores de la diferencia cambian de manera constante, porque el precio total de la factura del plan actual y plan b pueden aumentar o disminuir. (E2 y E8)	2	12,50%
R3	Estudiantes que indican que los valores de la diferencia cambian porque el precio por minutos consumidos y el precio mensual inicial para cada plan son diferentes. (E1, E3, E5, E6, E7, E9, E11, E14, E15 y E16)	10	62,50%
R4	Estudiantes que escriben una justificación relacionada con cual plan es más favorable. (E4)	1	6,25%

Potencialidades y dificultades

Tabla 26

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1c (S1T3P1c)

(P1c) Pregunta 1. Teniendo en cuenta la información de la tabla:

Tabla 3. Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b

<i>Mínutos consumidos</i>	<i>Precio total de la factura del Plan actual (\$)</i>	<i>Precio total de la factura del Plan b (\$)</i>	<i>Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b (\$)</i>
190	65.200	65.700	500
193,5			
199			
203			
207			
212,8			

c. Explica si es posible que el precio total de los dos planes llegue a ser igual.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden de manera correcta al afirmar que es posible que el precio total de los dos planes llegue a ser igual. (E1, E2, E4, E5, E7, E8, E12, E13, E14, E15 y E16)	Indican que se debe consumir 200 minutos en cada plan. (E2, E3, E4, E8, E12 y E13)	6	37,50%
		Indican que se debe consumir diferentes cantidades de minutos en uno y otro plan. (E1, E5, E7, E14, E15 y E16)	6	37,50%
R2	Estudiantes que responden que no es posible que el precio total de los dos planes llegue a ser igual. (E6, E9, E10 y E11)	Indica que el precio por minuto consumido es diferente para cada plan. (E6)	1	6,25%
		Indica que el precio total de la factura de cada plan tiene valores cercanos, pero no lo suficiente. (E9)	1	6,25%
		Indican que el precio por minutos consumido y el	2	12,50%

precio mensual inicial para cada plan son diferentes.
(E10 y E11)

Tabla 27

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 1d (S1T3P1d)

(P1d) Pregunta 1. Teniendo en cuenta la información de la tabla:

Tabla 3. Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b

<i>Minutos consumidos</i>	<i>Precio total de la factura del Plan actual (\$)</i>	<i>Precio total de la factura del Plan b (\$)</i>	<i>Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b (\$)</i>
190	65.200	65.700	500
193,5			
199			
203			
207			
212,8			

d. Justifique si la tabla anterior permite determinar cuál plan le favorece a Javier.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que afirman que las tablas permiten determinar cuál plan le favorece a Javier. (E1, E4, E5, E6, E7, E9, E11, E14, E15 y E16)	Indican que el plan que más le favorece a Javier depende de la cantidad de minutos que consume mensualmente. (E1 y E4)	2	12,50%
		Indican que los datos de la tabla permiten hacer comparaciones entre el precio total de cada plan a través de su diferencia. (E5, E6, E7, E9, E14, E15 y E16)	7	43,75%
		Sin justificación. (E11)	1	6,25%
R2	Estudiantes que afirman que las tablas no permiten determinar cuál plan le favorece más a Javier. (E2, E3, E8, E10, E12 y E13)	Escribe que no hay claridad en los datos de la tabla. (E12)	1	6,25%
		Escriben que cualquier plan le favorece a Javier. (E2, E3, E8 y E13)	4	25,00%

Potencialidades y dificultades

Indica que la diferencia entre los precios totales de cada plan es mínima. (E10)	1	6,25%
--	---	-------

En relación con la *Tabla 24*, el 100% de los estudiantes completaron satisfactoriamente la *Tabla A*, salvo algunos errores en una o dos celdas de la tabla por parte del 31,25% del total de los estudiantes, como se puede observar en la siguiente figura (error en la última columna y fila):

Ahora bien, en la *Tabla 25*, solo el 18% de los estudiantes explican de manera precisa y

Minutos consumidos	Precio total de la factura del Plan actual (\$)	Precio total de la factura del Plan b (\$)	Diferencia entre el precio total de la factura del plan actual y el precio total de la factura del plan b (\$)
190	65.200	65.700	500
193,5	65 480	65 805	325
199	65 920	65 970	50
203	66 240	66 090	150
207	66 560	66 210	350
212,8	67 074	66 384	360

Figura 16. S1T3P1aR2

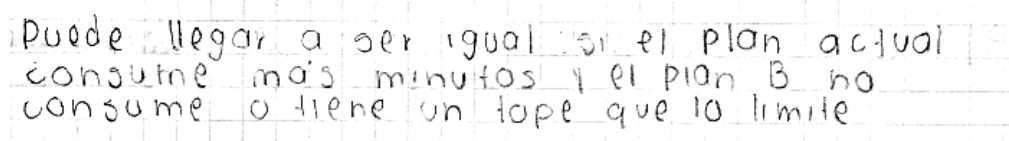
correcta, la forma en cómo está variando la diferencia entre el precio total de la factura del plan actual y el precio total de la factura del plan b, argumentando que, inicialmente, la diferencia decrece y posteriormente empieza a crecer. Por otro lado, el 75% de los estudiantes escriben explicaciones relacionadas con las posibles razones de por qué los distintos valores obtenidos para la diferencia entre los precios totales de las facturas cambian, como se aprecia en la respuesta del siguiente estudiante:

cambiando los valores por los minutos consumidos por el valor del plan, uno es de \$ 50.000 y el otro de \$ 60.000

Figura 17. S1T3P1bR3

Este estudiante, expone una razón por la cual la diferencia entre los precios totales de las facturas cambia, al reconocer que el precio mensual inicial es diferente para uno y para otro plan, sin argumentar sobre la tendencia decreciente-creciente que da cuenta de cómo está cambiando esta diferencia.

En la *Tabla 26*, se puede apreciar que el 75% de los estudiantes responden de forma afirmativa sobre la posibilidad de que el precio total de ambos planes llegue a ser igual, de los cuales un 37,50% justifican su posición a partir de una cantidad precisa de minutos consumidos (200) para la cual el precio total de ambos planes sería igual. Por su parte, el otro 37,50%, justifican que el precio total de ambos planes puede llegar a ser igual, siempre y cuando haya un consumo diferente de minutos en cada plan, como se presenta a continuación:



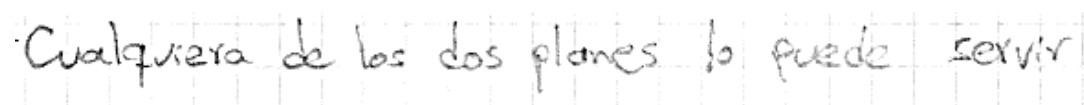
Puede llegar a ser igual si el plan actual consume más minutos y el plan B no consume o tiene un tope que lo limite

Figura 18. S1T3P1cR1

El 25% de los estudiantes indican que no es posible que el precio total de ambos planes llegue a ser igual, teniendo como premisa que los planes tienen distintos precios mensuales iniciales y distintos precios por minutos consumidos.

De acuerdo con la *Tabla 27*, el 62,50% de los estudiantes indican que la *Tabla 3* permite determinar el plan que más le favorece a Javier, de este porcentaje, el 12,50% afirma que depende de los minutos que se consuman y el 43,73% indica que las tablas les permite comparar los precios totales de cada plan por medio de la columna de la diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b. Por otra parte, 37,50% restante de los estudiantes, indican que la *Tabla 3* no permite determinar el plan que más le favorece a Javier y presentan distintas justificaciones

relacionadas con un cierto grado de incertidumbre sobre los datos relacionados en la *Tabla 3* y la posible conclusión, como se presenta a continuación:



Cualquiera de los dos planes lo puede servir

Figura 19. S1T3P1dR2

Considerando las respuestas *S1T3P1a* y *S1T3P1b*, se determina que el 100% de los estudiantes disponen de forma adecuada de los conocimientos previamente movilizados en las Tareas 1 y 2 anteriormente desarrolladas, al vincular las cantidades presentantes en la *Tabla 2* y las relaciones de dependencia correctas para reconocer y/o precisar los modelos lineales (precio total de una y otra factura) de manera eficaz; modelos que permitían calcular plenamente los precios totales respectivos a cada plan y completar la *Tabla 3*. En consideración a la *Matematización Vertical - Nivel Referencial*, los estudiantes afrontan la situación y toman decisiones según lo demanda el contexto, es decir, los estudiantes reconocen las matemáticas presentes y actúan de manera consecuente a ellas, para determinar acciones pragmáticas y lograr llegar a conclusiones validas a partir del uso de *modelos de*.

No obstante, el 75% de estos, al precisar determinar regularidades en la diferencia entre precios totales de los planes y tratar de inferir cómo estos cambian (acciones correspondientes al *Nivel Situacional*), aluden argumentos que parecen inconexos con el objetivo de la pregunta (pregunta b); la cual era el reconocimiento de cierta tendencia decreciente hasta un punto y creciente hasta otro (en ese orden) en las cantidades resultantes al efectuar la diferencia entre el precio total obtenidos en un plan y el otro y, de esta forma, reconocer la posibilidad de que el

precio total de una plan es igual al otro para alguna cantidad de minutos consumidos. La razón de estos argumentos pudo tener lugar en dos sentidos, a saber; una formulación y redacción poco familiar y cercana a la cotidianidad de los estudiantes o un mal ejercicio de lectura por parte de estos. En cualquier caso, sus respuestas siguen siendo evidencia de un dominio práctico de los procesos de modelación o de los desarrollos asociados a la *Matematización Vertical - Nivel Referencial*.

Por otra parte, las preguntas *S1T3P1a*, *S1T3P1b* y *S1T3P1c*, son fundamentales en la consolidación de otra aproximación inicial acerca del paso de los modelos lineales a la ecuación, en un contexto funcional, pues parece necesario que los estudiantes realicen de facto el reconocimiento, validación y construcción de modelos acordes a la situación, además, la posibilidad de visibilizar e inferir el cambio del sentido decreciente a creciente entre la diferencia del precio total de uno y otro plan, como la existencia de un momento (un punto) en el que ambos planes son iguales, en el consumo de minutos y el precio total de las facturas, basando su análisis en la premisa de que si la diferencia entre los precios totales llegaba a ser cero, entonces, el precio total en ambos planes era igual para cierta cantidad de minutos consumidos.

Esta inferencia, algo compleja, fue evidenciada en las respuestas *S1T3P1cR1* y posteriormente ampliada en las discusiones de la plenaria, por ejemplo, un estudiante responde a la pregunta de cómo estaba cambiando la diferencia, diciendo que “Primero iban normal, estaba disminuyendo y después aumentan los valores”, en tanto otro estudiante continuó la discusión y precisó un poco más dicha respuesta, diciendo que “Yo puse del 500 al 50 que bajaban y después del 150 al 640 crecían”, hasta que al final el docente investigador sugiere pensar en que podría suceder con el precio total de la factura de ambos planes si la diferencia entre ellos llegaba a ser cero, a lo que un estudiante responde “pues los precios son iguales”, concluyendo finalmente, en

Potencialidades y dificultades

efecto, que si la diferencia entre los precios totales de los planes llegaba a ser cero era debido a que ambos planes. La otra consecuencia (misma cantidad de minutos consumidos en ambos planes) se discutió y concluyó de forma análoga a la anterior en la plenaria.

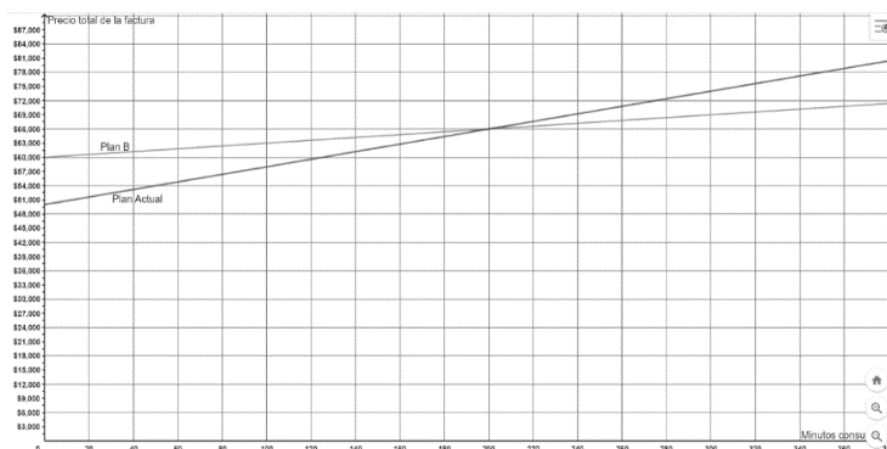
Respecto a si el registro tabular permitía determinar el plan que le conviene a Javier, el tipo de respuesta *S1T3P1dR2*, permite concluir que aproximadamente un 90% de los estudiantes toma en consideración toda la información desarrollada a través del registro tabular, reflexionan a partir de las matemáticas presentes y se atreven a formular algún tipo de conclusión desde diferentes perspectivas, lo cual es provechoso en términos del desarrollo de competencias matemáticas.

Tabla 28

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y preguntas 2a y 2b (S1T3P2ab)

(P2ab) Pregunta 2. Camilo realiza la gráfica del plan actual y la del plan b para mostrarle a Javier cómo cambia el precio total de la factura respecto a la cantidad de minutos consumidos en cada uno. Tenga en cuenta que el eje x (horizontal) corresponde a los minutos consumidos y el eje y (vertical) al valor total de la factura.

Figura 2. Gráfica del plan actual y del plan b



Considerando la gráfica de cada plan, describe para qué cantidad de minutos consumidos:

- a. El precio total de la factura del plan b es mayor que el precio total de la factura del plan-actual.
- b. El precio total de la factura del plan actual es mayor que el precio total de la factura del plan-b.

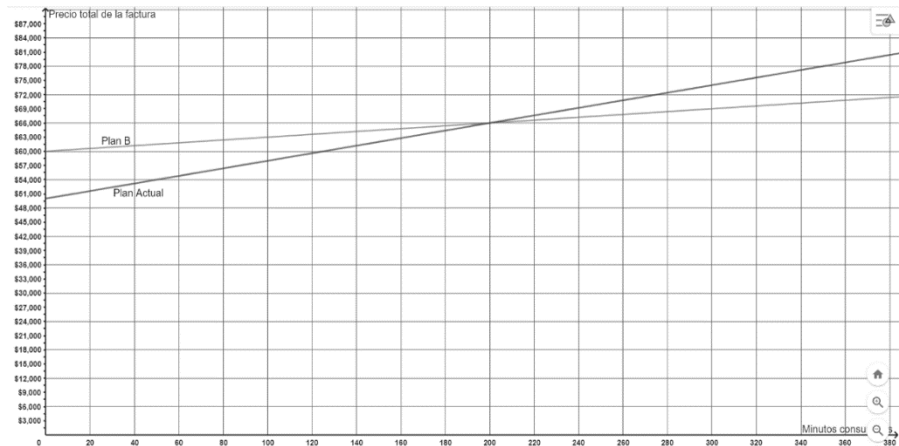
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que reconocen de manera correcta que, en el intervalo menos de doscientos minutos consumidos, el precio total de la factura del Plan B es mayor que el precio total de la factura del plan actual y que, en el intervalo más de doscientos minutos consumidos, el precio total del Plan Actual es mayor que el precio total del plan b. (E1, E4, E6, E11 y E13)	5	12,50%
R2	Estudiantes que escriben de manera correcta que el precio total de la factura del Plan B es mayor que el precio total de la factura del Plan Actual para 0 minutos consumidos y que el precio total del Plan Actual es mayor que el precio total del Plan B para 380 minutos consumidos. (E2, E3, E8, E9 y E10)	5	18,75%
R3	Estudiantes que indican que el precio total de la factura del Plan B es mayor que el precio total de la factura del Plan Actual sin referencia alguna a una cantidad de minutos. (E5, E7, E12, E14, E15 y E16)	6	43,75%

Tabla 29

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 2c (S1T3P2c)

(P2c) Pregunta 2. Camilo realiza la gráfica del plan actual y la del plan b para mostrarle a Javier cómo cambia el precio total de la factura respecto a la cantidad de minutos consumidos en cada uno. Tenga en cuenta que el eje x (horizontal) corresponde a los minutos consumidos y el eje y (vertical) al valor total de la factura.

Figura 2. Gráfica del plan actual y del plan b



Considerando la gráfica de cada plan, describe para qué cantidad de minutos consumidos:

c. Justifique si la gráfica anterior permite determinar cuál plan le favorece a Javier.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que afirman de manera correcta que la gráfica permite determinar cuál plan le favorece más a Javier. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	Explica que el plan que más le favorece a Javier depende de la cantidad de minutos que el consuma, si consume de 0 a 200 minutos le favorece el plan actual y si consume de 200 a 380 minutos le favorece el plan b. (E13)	1	6,25%
		Indica que la gráfica permite comparar los precios totales de las facturas para una misma cantidad de minutos consumidos. (E1, E4, E5, E6, E7, E9, E10, E11, E14, E15 y E16)	11	68,75%
		Indica que a Javier le favorece el plan b. (E2, E3, E8 y E12)	4	25,00%

Tabla 30

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y preguntas 3a y 3b (S1T3P3ab)

(P3ab) Pregunta 3. Teniendo en cuenta la intersección de las gráficas del plan actual y el plan b, escriba:

a. La cantidad de minutos consumidos.

b. El precio total de las facturas.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben la respuesta de manera correcta correspondiente a la cantidad de minutos consumidos (200) y de manera correcta correspondiente a la cantidad del precio total de las facturas (\$66.000). (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E11, E12 y E13)	11	68,75%
R2	Estudiantes que escriben de manera aproximada la cantidad correspondiente a los minutos consumidos (ej.199) y de manera correcta la cantidad correspondiente al precio total de la factura (\$66.000). (E5, E14, E15 y E16)	4	25,00%
R3	Estudiante que escribe la respuesta de manera incorrecta una cantidad de minutos consumidos (380) y dos precios totales respectivos a cada factura (72.000 y 81.000). (E10)	1	6,25%

En la *Tabla 28* se observa que el 62,50% de los estudiantes reconocen para que cantidades de minutos consumidos el precio total de la factura de un plan es mayor que en el otro y en qué momento, de este grupo de estudiantes, el 31,25% al determinan los intervalos respectivos y el otro 31,25% indican una cantidad específica de minutos consumidos para cada caso. Por otra parte, el 37,5% se limita a decir que plan es mayor sin sugerir o proponer una evidencia o razones del por qué.

En relación con la *Tabla 29* se puede apreciar que el 100% de los estudiantes logra determinar qué plan le favorece a Javier a través de la gráfica. Uno de los estudiantes, que

Potencialidades y dificultades

representa el 6,25%, explica que depende de la cantidad de minutos consumidos asociados al intervalo respectivo, como se presenta a continuación:

B. Como lo dije anteriormente siempre le va a favorecer depende cuantos minutos consume si consume de (0 a 200) le va a favorecer el plan actual, pero si consume de (200 a 380) le favorece el Plan B.

Figura 20. S1T3P2cR1

Por otra parte, el 68,5% indica que la gráfica permite realizar comparaciones entre los precios totales de las facturas, a diferencia del 25% restante quienes determinan un plan, bajo algún supuesto que no se explicita.

Por otro lado, en la *Tabla 30* aproximadamente el 94% de los estudiantes identifica el punto de intersección en las gráficas, el 68,75% escribe los valores precisos de cada coordenada, a diferencia del 25% que escribe una cantidad aproximada para la abscisa (minutos consumidos). Ahora bien, el 6% escribe las coordenadas de dos puntos pertenecientes a las gráficas con la abscisa en común, como se muestra a continuación:

3. a. 380 minutos consumidos plan A y B
b. plan A 72.000 plan B 81.000

Figura 21. S1T3P3abR3

Considerando las respuestas *S1T3P2abR1*, *S1T3P2abR2*, *S1T3P3abR1* y *S1T3P3abR2*, se determina que el 70% de los estudiantes identificaron y precisaron el lugar geométrico para el cual, el precio total de las facturas de cada plan es igual ($f(x) = g(x)$), a través de reflexiones y procesos de visualización relacionados con la tendencia creciente o decreciente de las gráficas de las funciones, la coordinación de la información representada en las gráficas con su

conocimiento acerca de las funciones, coordenadas y puntos de intersección. En este sentido, los estudiantes reconocen el registro gráfico como una representación válida de la situación (el comportamiento de cada plan), además de establecer relación entre el registro tabular de la pregunta *S1T3P2ab* y el registro grafico en *S1T3P3ab* y, de esta manera, concluir que el precio de las facturas es igual para una cantidad de minutos consumidos.

Las preguntas *S1T3P2ab* y *S1T3P3ab*, son fundamentales y guardan una estrecha cercanía, porque, por un lado; refieren información de un mismo contexto o fenómeno que puede ser comparada y, por otra parte; conduce a que los estudiantes lleguen a construir o considerar la idea de que los modelos lineales de ambos precios totales de las facturas son iguales para una cantidad determinada de minutos consumidos, a partir de la información expuesta en el registro gráfico y el registro tabular de la pregunta *S1T3P1a*. Esto último, apoyado en un ejercicio de coordinación entre ambos registros, lo que finalmente conduce a una aproximación a la relación general entre función y ecuación, a saber; la ecuación se puede definir como la igualdad entre dos funciones $f(x) = g(x)$.

A su vez, en relación con la *Matematización Horizontal – Nivel Referencial*, al coordinar reflexiones sobre estos dos diferentes registros de representación (tabular y gráfico) y exhibir el uso de *modelos de* eficazmente, la gran mayoría de los estudiantes precisan un avance significativo, toda vez que realizan este tipo de acciones con un mayor grado de asertividad y encaminada a esquematizaciones más generales.

Por otra parte, respecto al tipo de respuesta *S1T3P2cR1* y la plenaria, se concluye que el 100% de los estudiantes reconocen que las gráficas son un registro de representación más eficiente, en comparación con el registro tabular de la pregunta *S1T3P1c*. Por ejemplo, el profesor invita a realizar una comparación entre ambos registros y determinar, en cada caso, cual

registro les ayudo a determinar qué plan le favorece a Javier, a lo que un estudiante respondió que “la gráfica, se entiende más la gráfica y uno puedo mirar el precio del plan y la cantidad de minutos”, generando un replica en otro estudiante que se refirió con más detalle sobre esta cuestión, afirmando que “porque allí las gráficas están mostrando que el plan actual vale menos antes de 200 y depende de cuantos minutos consuma, porque si consume menos de 200 el plan actual le conviene más y si consume más el plan b le conviene más”. En este sentido, se esclareció, a partir de las respuestas de los estudiantes, un análisis más enriquecedor sobre el plan que le favorece a Javier.

Tabla 31

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 4 (S1T3P4)

(P4) Pregunta 4. Camilo afirma que si Javier consume más de 200 minutos en el plan actual el precio total de la factura será menor que si consume la misma cantidad de minutos en el plan b. Explica la validez de esta afirmación.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden de manera correcta al no estar de acuerdo con la afirmación de Camilo. (E1, E2, E3, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13 y E16)	Indican que la gráfica del plan actual refleja un precio total de la factura mayor que aquel que se refleja en la gráfica del plan b después de 200 minutos consumidos. (E1, E3, E8, E9 y E12)	5	31,25%
		Indican que el precio total de la factura del plan actual aumenta más que el precio total de la factura del plan b después de 200 minutos consumidos. (E4, E6, E11 y E13)	4	25,00%

Indican que el precio total de ambas facturas es el mismo para 200 minutos consumidos. (E5, E7, E14, E15 y E16)	5	31,25%
Sin justificación. (E2 y E10)	2	12,50%

Tabla 32

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 5 (S1T3P5)

(P5) Pregunta 5. Escribe una expresión que permita calcular cuándo el precio total de la factura del plan actual es igual al precio total de la factura del plan b.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta la expresión general $(80x + 50.000 = 30x + 60.000)$ que permite calcular cuándo el precio total de la factura del plan actual es igual al precio total de la factura del plan b. (E1, E4, E9, E11 y E12)	5	31,25%
R2	Estudiantes que escriben dos expresiones correctas que permiten verificar que el precio total de la factura para ambos planes es igual cuando se consumen 200 minutos. (ej. plan actual: $80(200) + 50.000 = 66.000$ y plan b: $30(200) + 60.000 = 66.000$). (E2, E3, E5, E6, E7, E8, E13, E14, E15 y E16)	10	62,50%
R4	Estudiante que escribe de manera incorrecta una expresión general $(380x + 81.000 = 380x + 72.000)$ para calcular cuándo el precio total de la factura del plan actual es igual al precio total de la factura del plan b. (E10)	1	6,25%

La *Tabla 31* contiene los tipos de respuesta de *S1T1P4*, el 100% de los estudiantes no están de acuerdo con la afirmación de Camilo, postura que es correcta. El 56,25% de los estudiantes indican que después de 200 minutos consumidos el precio total del plan actual aumenta con relación al plan b, de este porcentaje, el 31,25% se apoya en la gráfica y el 25% sobre procedimientos de cálculo. Por su parte, el 43,75% del resto de los estudiantes justifica, o

Potencialidades y dificultades

no, dicha posición con argumentos o información parcial y correcta, como se muestra a continuación:

4 No es así, el precio total en la factura actual y el b no cambian dan un mismo precio que es 66.000.

Figura 22. S1T2P4R1

El estudiante anterior refiere información verdadera derivada de sus procesos de análisis, no obstante, no responde de forma consecuente con la pregunta S1T1P4, en la cual se espera que el estudiante identifique que a partir de los 200 minutos consumidos el plan actual registra un precio total en su factura siempre mayor al precio total registrado en el plan b.

De acuerdo con la *Tabla 32*, aproximadamente el 94% de los estudiantes formulan expresiones que permiten calcular o verificar cuando el precio total de la factura de ambos planes es igual, de este porcentaje, el 31,25% lo hace por medio de una expresión general ($80x + 50.000 = 30x + 60.000$) y el 62,50% lo hace a través de un ejemplo o caso particular con cada una de las cantidades respectivas, que sugiere necesariamente el uso del modelo general anterior para $x = 200$, como se presenta continuación:

$$\begin{aligned} \text{Plan A.5)} & 80 \times 200 + 50000 = 66.000 \\ \text{Plan b)} & 30 \times 200 + 60.000 = 66.000 \end{aligned}$$

Figura 23. S1T3P5R2

Aproximadamente un 6% de estudiantes restante escriben de manera incorrecta una expresión general para calcular el precio total de la factura.

Teniendo en cuenta las respuestas *S1T3P4R1*, *S1T3P5R1* y *S1T3P5R2* se evidencia que un grupo mayoritario de estudiantes, aproximadamente del 90%, tienen claridad sobre el momento en el que las dos funciones (precio total de la factura) son iguales, esto producto de las preguntas anteriores, lo cual ha permitido que contemplen la idea de que si dos fenómenos lineales llegan a ser iguales en algún momento (punto de intersección o valor de las abscisas iguales), su expresión analítica es dada a través de la ecuación $f(x) = g(x)$, lo que conlleva a inferir que se aproximan pragmáticamente a establecer una relación entre las funciones y las ecuaciones, ya que para este caso particular (precio total de las facturas iguales) lo hacen con un alto grado de conciencia.

En relación con la *Matematización Horizontal – Nivel General*, los estudiantes logran esbozar rasgos particulares de procedimientos o acciones de sistematización de la información en un sentido más abstracto, dado que inician un desprendimiento del contexto planteado para conjeturar y extraer ideas procedentes de la cotidianidad hacia lo netamente matemático.

No obstante, en relación con el tipo de respuesta *S1T3P5R2*, el 62,50% de los estudiantes, si bien se apoya en casos particulares para representar situaciones generales, no dejan de lado el uso implícito del modelo general, por lo tanto, aquello que se desprende directamente de cómo estos estudiantes comunican la información está relacionado con su actividad matemática que puede estar ubicada de forma intermedia entre la *Matematización Vertical - Nivel Referencial* y la *Matematización Vertical - Nivel General* de la EMR, pues según esta teoría, en el *Nivel General* se toman en consideración las acciones que den cuenta de la conciencia, uso y producción de *modelos para* como consecuencia de la superación del *Nivel Referencial*, tal cual como se propone en un proceso de matematización progresiva. En este sentido, este grupo de

estudiantes aun no alcanza o exhibe en su actividad matemática visible, acciones concretas referentes a la *Matematización Vertical - Nivel General*.

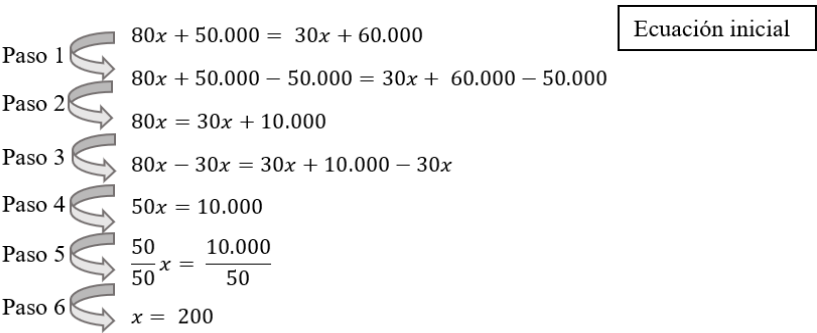
Por otra parte, se evidencia que la secuencia de preguntas *S1T3P1a* hasta *S1T3P5*, como lo propone la idea de secuencia didáctica, al estar articuladas una a la otra, permiten, entre otras cosas, coordinar el contenido matemático de manera secuenciada y direccionado hacia la consecución por parte del estudiante de niveles más altos de comprensión y abstracción del contenido matemático. En este sentido, es de suma importancia que el avance de los estudiantes respecto a los procesos de matematización progresiva sean proporcionales con las exigencias y demandas en cada pregunta, pues si bien, un promedio aproximado del 85% de los estudiantes logra seguir esta ruta ascendente y evidenciar una consistencia en sus procesos de *Matematización Vertical*, un pequeño porcentaje no lo logra, esto, puede estar vinculado al carácter que sugiere una estructura articulada entre las preguntas, es decir, que un error o mal desarrollo en una pregunta puede trasladarse hacia las demás como efecto de domino y llevar a conclusiones erradas, cómo, por ejemplo; establecer un modelo inconexo o poco aproximado de la situación presentada.

Tabla 33

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6a (S1T3P6a)

(P6a) Pregunta 6. Respeto al procedimiento anterior,

Figura 3. Procedimiento para conocer la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de las facturas de ambos planes es igual



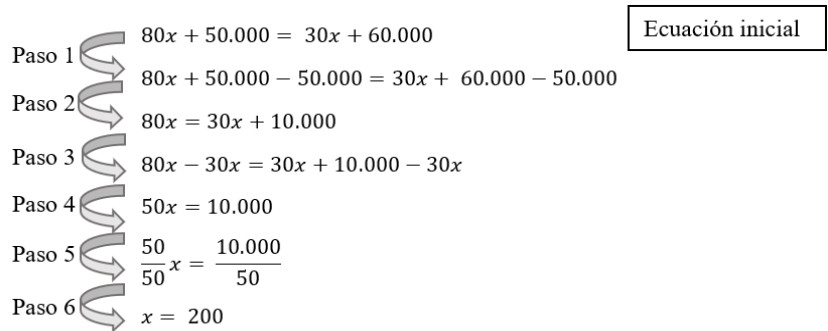
a. Indica qué hizo en el paso 1.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiante que indica de manera correcta que en el paso uno del procedimiento hecho por Camilo se resta 50.000 en ambos lados de la ecuación inicial. (E4, E6, E7, E11, E12, E13 y E16)	7	43,75%
R2	Estudiantes que indican de manera correcta que en el paso uno del procedimiento hecho por Camilo se elimina el precio inicial del plan Actual. (E2, E3 y E8)	3	18,75%
R3	Estudiantes que indican que en el paso uno del procedimiento hecho por Camilo se formuló la ecuación inicial. (E1, E5, E9, E10, E14 y E15)	6	37,50%

Tabla 34
Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6b (S1T3P6b)

(P6b) Pregunta 6. Respecto al procedimiento anterior,

Figura 3. Procedimiento para conocer la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de las facturas de ambos planes es igual



b. Indica si el procedimiento que hizo Camilo en el paso 5 es válido y justifica.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden de manera acertada al indicar que el paso 5 del procedimiento hecho por Camilo es válido. (E1, E4, E5, E6, E7, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	Escriben que se puede dividir ambos lados de la igualdad entre 50. (E4 y E6)	2	12,50%
		Indican que lo que está hecho multiplicando en un lado de la igualdad se puede pasar a dividir al otro lado. (E12 y E13)	2	12,50%
		Escriben que Camilo divide 1.000 entre 50. (E5, E7, E14, E15 y E16)	5	31,25%
		Sin justificación. (E1 y E10)	2	12,50%
R2	Estudiantes que responden de manera incorrecta al indicar que el paso 5 del procedimiento hecho por Camilo es inválido. (E2, E3 y E8)	Indican que en la igualdad no se pueden agregar operaciones nuevas como la división entre 50. (E2, E3 y E8)	3	18,75%

R3	Estudiantes que no responden. (E9 y E10)	Sin justificación. (E9 y E10)	2	12,50%
----	--	-------------------------------	---	--------

Tabla 35

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6c (S1T3P6c)

(P6c) Pregunta 6. Respecto al procedimiento anterior:

Figura 3. Procedimiento para conocer la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de las facturas de ambos planes es igual

		Ecuación inicial
Paso 1		$80x + 50.000 = 30x + 60.000$
Paso 2		$80x + 50.000 - 50.000 = 30x + 60.000 - 50.000$
		$80x = 30x + 10.000$
Paso 3		$80x - 30x = 30x + 10.000 - 30x$
Paso 4		$50x = 10.000$
Paso 5		$\frac{50}{50}x = \frac{10.000}{50}$
Paso 6		$x = 200$

c. Explica a qué corresponde el resultado obtenido.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican de manera correcta que el resultado obtenido corresponde a la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de la factura de ambos planes es igual. (E4 E5, E6, E7, E9, E14, E15 y E16)	8	50,00%
R2	Estudiante que indica de manera correcta que el resultado obtenido corresponde a la cantidad de minutos consumidos. (E1, E2, E3, E8, E11, E12 y E13)	7	43,75%
R3	No responde. (E10)	1	6,25%

Tabla 36

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 6d (S1T3P6d)

(P6d) Pregunta 6. Respecto al procedimiento anterior,

Figura 3. Procedimiento para conocer la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de las facturas de ambos planes es igual

		Ecuación inicial
Paso 1		$80x + 50.000 = 30x + 60.000$
Paso 2		$80x + 50.000 - 50.000 = 30x + 60.000 - 50.000$
Paso 3		$80x = 30x + 10.000$
Paso 4		$80x - 30x = 30x + 10.000 - 30x$
Paso 5		$50x = 10.000$
Paso 6		$\frac{50}{50}x = \frac{10.000}{50}$
		$x = 200$

d. Reemplaza el valor de la x en la ecuación inicial e indica que se obtiene.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que reemplazan de manera correcta el valor de x en la ecuación inicial e indican que se verifica la igualdad $66.000 = 66.000$, con sus respectivos procedimientos cálculo. (E2, E3, E4, E6, E8, E9 y E13)	7	43,75%
R2	Estudiantes que escriben de manera correcta el valor que se obtiene al reemplazar la x en la ecuación inicial (66.000) sin los respectivos procedimientos de cálculo. (E5, E7, E12, E14, E15 y E16)	6	37,50%
R3	Estudiantes que indican de manera incorrecta que al reemplazar la x en la ecuación inicial se obtiene una cantidad de minutos consumidos, sin los respectivos procedimientos. (E1 y E11)	2	12,50%
R4	No responde. (E3 y E10)	1	6,25%

La *Tabla 33* contiene los tipos de respuesta a la pregunta *S1T2P76a*. El 62,50% de los estudiantes identificaron de manera correcta que el procedimiento hecho por Camilo fue restar 50.000 en ambos lados de la ecuación inicial, como lo indica el 43,75%, o eliminar el precio inicial del plan actual, expresada por el 18,75%. Con relación al 37,50% de los estudiantes restante, respondieron de forma imprecisa al referirse a la ecuación inicial sin tener en cuenta que el paso 1 hace referencia a cómo cambia la ecuación inicial y es transformada en la siguiente ecuación equivalente.

En cuanto a la *Tabla 34*, el 68,75% indican que el proceso de dividir la misma cantidad en ambos lados de una igualdad es acertado, el 12,50% basa su justificación a partir de las propiedades de la igualdad, otro 12,50% lo hace a través de una expresión coloquial; “pasar a dividir al otro lado un número que está multiplicando”, y el 31,25% recurre a enunciar la operación realizada $\left(\frac{1000}{50}\right)$. Por su parte, un 18,75% de los estudiantes, correspondiente al tipo de respuestas *S1T1P6bR2* y *S1T1P6bR3*, consideran invalido el proceso anteriormente mencionado, aludiendo la imposibilidad de agregar nuevas operaciones (o cantidades) en una ecuación, como se muestra en la figura:

esta mal por que agrego una division la cual no estaba

Figura 24. S1T3P6bR2

En relación con, la *Tabla 35*, que contiene las respuestas de *S1T2P6c*, se puede apreciar que el 93,5% de los estudiantes identifica con claridad que la letra x representa la cantidad de minutos consumidos, de este porcentaje, el 50% especifica que el resultado es la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de la factura de ambos planes es igual.

Por otro lado, la *Tabla 36*, el 81,25% de los estudiantes reemplazan el valor de la variable x en la ecuación inicial, opera correctamente hasta reducir las expresiones de los dos o un solo miembro de la ecuación y obtiene como resultado el precio total de la factura (66.000) o la identidad ($66.000 = 66.000$), sin embargo, no emiten algún tipo de caracterización del resultado, con relación a este porcentaje, el 37,50% no presenta los respectivos procedimientos. Por su parte, el 12,5% restante indica, de manera incorrecta, que al reemplazar la x se obtiene la cantidad de minutos consumidos.

Respecto al grupo de respuestas dadas a las preguntas de la *Tarea 3* pregunta 6, (*S1T3P6a*, *S1T3P6b*, *S1T3P6c* y *S1T3P6d*), se propone realizar una comparación entre los porcentajes de acierto de estas con las preguntas de la *Tarea 2* pregunta 7 (*S1T2P7a*, *S1T2P7b*, *S1T2P7c* y *S1T2P7d*), debido a que ambas preguntas son similares en estructura, formulación, contenido matemático y objetivos. En ellas se propende evidenciar cómo los estudiantes perciben una situación que se esquematiza a través de una ecuación planteada asociadas a dos funciones, además, orientar a los estudiantes a dilucidar la relación que guardan las funciones con las ecuaciones.

Es este sentido, esta comparación se realiza con el fin de evidenciar si hubo, o no, un avance a través del tiempo respecto a las acciones anteriormente mencionadas. A continuación, se presenta la *Tabla 37* con los porcentajes de acierto a dos grupos de preguntas.

Tabla 37*Porcentaje de acierto de las preguntas S1T2P7abcd y S1T3P6abcd*

	a	b	c	d
S1T2P7	56,25%	50,00%	81,25%	100,00%
S1T3P6	62,50%	68,75%	93,50%	81,25%

Teniendo en cuenta los porcentajes de acierto en las preguntas *S1T2P7a* y *S1T3P6a* se puede determinar que hubo un avance del 6,25% y para *S1T2P7b* y *S1T3P6b* hubo un avance de 18,75%, es decir, aproximadamente para estas respuestas creció el grupo entre uno y tres estudiantes más que reconocen de manera correcta las operaciones básicas y algunas propiedades de la igualdad, como lo son; la propiedad aditiva y multiplicativa de la igualdad.

Considerando el tipo de respuestas *S1T2P7c* y *S1T3P6c*, se puede concluir que hubo un progreso del 12,25%, aproximadamente tres estudiantes, al pasar de reconocer eficazmente la ecuación como una expresión algebraica susceptible de ser validada, a pensarse en un aspecto más formal, en relación con la idea de que una ecuación es la igualdad entre dos funciones $f(x) = g(x)$. Esto último, como consecuencia de la forma en que argumentan sobre el significado del conjunto solución de una ecuación en coordinación con la situación problema.

En relación con los tipos de respuesta *S1T2P7d* y *S1T3P6d*, se presentó una disminución del 18,75% de los estudiantes, que corresponde a 3 estudiantes menos, pero dada la evidencia de sus respuesta, esta disminución puede ser consecuencia de una mala lectura de la consigna en la pregunta *S1T3P6d*, no obstante, es el 81, 25% de estudiantes quienes proceden de manera correcta con la lectura de la pregunta y exhiben los procedimientos adecuados al reemplazar el valor de x en la ecuación inicial, desarrollando la ecuación resultante, relacionando de manera correcta el resultado con la situación y aquello que representa, es decir, el precio total de la factura para la cantidad de x minutos.

En conclusión, se evidencia claramente que más del 80% de estudiantes cumple satisfactoriamente con lo propuesto en la pregunta *S1T3P6* al reconocer la ecuación como un modelo que esquematiza la situación propuesta a partir de la igual de dos funciones.

Tabla 38

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 7 (S1T3P7)

(P7) Pregunta 7. Considerando las preguntas 3 y 6, escriba qué relación tienen las respuestas 3a y 3b con las respuestas 6c y 6d.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican de manera correcta que las respuestas 3a y 6c corresponden a la cantidad de minutos consumidos (200) y las respuesta 3b y 6d corresponden al precio total de la factura (66.000), cuando los planes son iguales. (E1, E4, E5, E6 E7, E9, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	12	75,00%
R2	Estudiantes que indican de manera correcta que las respuesta 3a y 6c y la respuesta 3b y 6d corresponden a formas de averiguar la cantidad de minutos y el precio total de la facturas, respectivamente, cuando los planes son iguales. (E2, E3 y E8)	3	18,75%
R3	Sin respuesta. (E10)	1	6,25%

En la *Tabla 38* aproximadamente el 94% de los estudiantes realizan inferencias correctas sobre las relaciones que hay entre dos conjuntos de preguntas, a saber, *S1T3P3a* con *S1T3P6c* y *S1T3P3b* con *S1T3P6d*, en relación con la justificación, indican que las cantidades relacionadas en cada conjunto de preguntas son las mismas, las repuestas de 3a y 6c corresponde averiguar la cantidad de minutos consumidos y la respuestas de 3b y 6d corresponde averiguar al precio total de la factura cuando los planes son iguales.

Con relación al tipo de respuesta *S1T3P7R1* y *S1T3P7R2* una parte mayoritaria de los estudiantes relacionan una misma respuesta para dos registros de representación diferentes, gráfico y algebraico, en el gráfico se identificaron las coordenadas del punto de intersección de las gráficas de ambos planes en relación con las cantidades de la situación, al igual que en el registro algebraico, a través de la ecuación $f(x) = g(x)$ que permite hallar la abscisa y posteriormente la ordenada para vincular los resultados obtenidos con las cantidades involucradas en la situación.

Referente a la EMR se sugiere que la actividad matemática del estudiante se encuentra en un *Nivel Referencial*, porque relacionan las mismas cantidades de dos diferentes sistemas de representación, lo que les permite comprender y caracterizar la información relevante de distintas perspectivas apoyado por procesos de visualización y cálculo. En este sentido, los estudiantes utilizan los modelos matemáticos como herramientas que les permiten organizar ideas y establecer relaciones entre cantidades inmersas en una situación.

Por otro lado, la relación que hay entre las preguntas *S1T3P3ab* y *S1T3P6cd* es consecuente con el concepto de secuencia didáctica, ya que, se proponen actividades estructuradas y articuladas de forma coherente que permitan coordinar distintos tipos de contenido matemático de manera secuenciada para alcanzar un progreso en la comprensión y abstracción del contexto presentado, lo que se ha logrado a partir del uso de diferentes registros de representación. De este modo, hay una coordinación entre los cambios de registro de representación, que apoya el desarrollo de herramientas para comprender la situación y acercarse a las relaciones entre función y ecuación establecidas.

Tabla 39

Tipos de respuesta de la situación 1, tarea 3 y pregunta 8 (S1T3P8)

(P8) Pregunta 8. Escoge el plan que consideres más apropiado para Javier y escribe las razones.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que consideran que el plan más apropiado para Javier depende de los minutos que él consume. (E5, E6, E10, E13, E14 y E15)	Explica que si Javier consume menos de 200 minutos el plan actual le conviene más ya que el precio total de la factura es más bajo, pero si consume más de 200 minutos el plan b le conviene más porque su precio total de la factura es menor que en el otro plan. (E6)	1	6,25%
		Sin justificación. (E5, E10, E13, E14 y E15)	5	31,25%
R2	Estudiantes que consideran que el plan más apropiado para Javier es el plan b. (E2, E3, E7, E8, E9, E11, E12 y E16)	Indica que considera más apropiado el plan b, porque Javier realiza muchas llamadas. (E4)	1	6,25%
		Explica que considera más apropiado el plan b porque en caso de que Javier consuma muchos minutos el precio total de la factura en el plan actual será más alto. (E2)	1	6,25%
		Indica que considera más apropiado el plan b porque si Javier consume más de 200 minutos el precio total de la factura será menor en comparación al otro plan. (E11 y E12)	2	12,50%
		Indica que considera más apropiado el plan b porque sus	1	6,25%

precios totales no cambian mucho en relación con el aumento de minutos. (E8)		
Indica que considera más apropiado el plan b porque tiene precios totales más bajos que el plan actual, cuando se consume la misma cantidad de minutos. (E9)	1	6,25%
Escribe que considera más apropiado el plan b, pero depende de la cantidad de minutos que consuma Javier. (E1)	1	6,25%
Sin justificación. (E3, E7 y E16)	3	18,75%

De acuerdo con la *Tabla 39*, el 100% de los estudiantes logra concluir y tomar una de las dos posturas sobre qué plan conviene que Javier tome. Para la primera postura, el 37,5% de los estudiantes, determina que la conveniencia depende de la cantidad de minutos consumidos y solo el estudiante E6 justifica la razón de esta posición. Por otro lado, para la segunda postura, el 62,5% del resto de los estudiantes, determina que el plan b le conviene a Javier, tomando en consideración diversos argumentos que justifican su posición, entre ellos; considerar la necesidad de realizar muchas llamadas, necesidad que se sugiere en el enunciado al inicio de la *Situación 1*.

A partir de las respuestas *S1T3P8R1* y *S1T3P8R2* se evidencia cómo los estudiantes logran coordinar la información, aprendizajes y matemáticas abordadas a lo largo de la *Situación 1* para llegar a conclusiones válidas como resultado de una acción reflexiva, esto permite determinar que los estudiantes han comprendido con un alto grado de detalle como el modelo de función lineal juega un papel preponderante en la modelación de la situación y como la ecuación

de primer grado conduce a precisar algunos momentos característicos de la misma, por ejemplo; el punto de intersección entre dos funciones, los cuales aportan a que sus razonamientos sean más refinados.

La acción reflexiva de los estudiantes con respuesta tipo *S1T3P8R1* y *S1T3P8R2* sugiere que un argumento poderoso yace en el punto de intersección entre las dos funciones lineales que modelan uno y otro precio total en ambos planes ($y = 80x + 50.000$, $y = 30x + 60.000$), pero lo que hace que las conclusiones sean diferentes entre un grupo de estudiantes (37,5%) y otro (62,5%), respectivamente al tipo de respuestas *S1T3P8R1* y *S1T3P8R2*, es la consideración e interpretación que los estudiantes hacen del enunciado inicial de la *Situación 1*, concretamente la premisa de que Javier consume una alta cantidad de minutos.

En este sentido, el grupo de estudiantes con respuesta *S1T3P8R2* considera esta premisa como determinante en sus reflexiones, por ello, concluyen que el plan b conviene a Javier, pues en este, al consumir más de doscientos minutos el precio total de la factura siempre será menor que en el plan actual. Esta conclusión es la que se espera logre concretar el estudiante, sin embargo, los estudiantes con respuesta *S1T3P8R1* exhiben tan interesante conclusión (ver figura 25), la cual es válida en todo sentido, al evidenciar que la actividad matemática del estudiante se conduce sobre; las matemáticas inmersas en la situación problema, sus experiencias personales,

8. Depende de cuantos minutos consuma, ya que si consume ~~mayor~~ más de 200 minutos, el precio total del plan b le conviene más. Si Javier sabe que va a consumir más de 200 minutos, el plan actual le conviene más.

Figura 25. *S1T3P8R1*

el contexto sociocultural y la idiosincrasia del mismo, entre otras, que juntas, confluyen formas de entender y encontrar sentido matemático a su entorno vital.

A partir de la implementación de la de la primera situación, considerando la *Matematización Horizontal – Nivel Situacional* y la *Matematización Horizontal – Nivel Referencial*, se concluye que en la *Tarea 1* la gran mayoría de estudiantes logró precisar y reconocer las cantidades involucradas y las relaciones de dependencia presentes para aproximarse a comprender la *Situación 1*, de modo que, las estrategias de cálculo que fueron formulas a partir de sus conocimientos informales, experiencias vinculadas a la manipulación del dinero y sus conocimientos previos, hizo posible realizar conjeturas sobre dicha situación y exponer un dominio, en buena parte de manera implícita, del modelo de función lineal $f(x) = 80x + 50.000$ y de la ecuación de primer grado asociada a la función lineal, como, por ejemplo: $80x + 50.000 = 51.200$.

La propuesta desarrollada en la *Tarea 1* toma en consideración que los estudiantes precisen de ciertas competencias para comprender la *Situación 1*, formular conclusiones y preparar las bases de los modelos lineales a desarrollar a lo largo de la misma que favorecen la aproximación y reconocimiento de relaciones entre funciones lineales y ecuaciones de primer grado. En este sentido, el tránsito, avance y superación de las exigencias formuladas para esta tarea, constituyen una base estable que permita considerar los modelos lineales y su relación con las ecuaciones de primer grado.

En efecto, a partir de los primeros acercamientos y cuestionamientos que se reflejan en la actividad matemática de los estudiantes para esta tarea, se puede concluir que la *Tarea 1*; por medio de un contexto cercano a la cotidianidad, cálculos propuestos y afirmaciones susceptibles de ser validades, contribuyó en los estudiantes a considerar los modelos lineales como parte de

su práctica social y como elementos característicos de su actividad matemática en contextos reales que sugieren la necesidad de dichos modelos, además de permitir sentar las bases de una primera aproximación a la siguiente idea, a saber; una ecuación algebraica de primer grado es la igualdad de dos funciones lineales o una lineal y una constante.

Esta relación es un caso particular de una relación más amplia, de tipo general, como aquella que se espera que los estudiantes logren reconocer, formalizar y usar en contextos que lo sugieran, esta relación general propone que cualquier ecuación algebraica es la igualdad entre dos funciones.

En relación con la *Tarea 2*, la caracterización del trabajo de la gran mayoría de los estudiantes y los niveles de matematización de la EMR, se identifica una dinámica ascendente, tal cual como se esperaba, es decir, la evidencia en las respuestas de los estudiantes durante toda la *Tarea 2* (*S1T2P1* hasta *S1T2P7*) exhibe que los procesos de modelación y su actividad matemática fue ascendentemente, partiendo de la *Matematización Horizontal - Nivel Situacional*, para avanzar en la *Matematización Vertical - Nivel Referencial* y posteriormente situarse de forma ingenua con acciones características de la *Matematización Vertical - Nivel General*.

Inicialmente, de acuerdo con la *Matematización Horizontal - Nivel Situacional*, al aportar información correcta sobre cantidades previamente determinadas en la *Tarea 1* y su uso como herramientas para identificar las matemáticas inmersas en la situación o contexto, en este caso; las operaciones básicas y regularidades en las cantidades, se evidenció que la actividad matemática de los estudiantes partía desde una aproximación mucho más asociada a sus experiencias y sus conocimientos informales que a definiciones y/o argumentos

matemáticamente bien formulados. Lo anterior, permitió que los estudiantes escalaran y abordaran rápidamente las siguientes preguntas de acuerdo con la *Matematización Horizontal - Nivel Referencial*, al tipificar las cantidades variables y constantes, las relaciones de dependencia y los *modelos de* necesarios en la situación, como el modelo lineal $f(x) = 80x + 50.000$. De este modo, los estudiantes realizan un salto cualitativo en la producción de *modelos de*, inicialmente intuitivos, orientando la reflexión sobre dichos modelos en ambientes un poco más generales y su uso en contextos particularmente amplios.

En este punto, relacionado con las *Dificultades y errores en el aprendizaje de las ecuaciones (Tabla 1)* y *Dificultades y errores en el aprendizaje de las funciones (Tabla 2)*, se presentó un grupo de errores, relacionado con; *Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos* y *Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento*. Estos errores fueron cometidos por un grupo de estudiantes inferior al 50%, pero que no determinaron un obstáculo mayor a la hora de realizar y presentar algunas ideas y conclusiones sobre el reconocimiento de cantidades (variables y constantes) ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio, las relaciones de dependencia y la producción de *modelos de*.

Por otra parte, aquello que configura los primeros indicios o evidencias, respecto a la *Matematización Horizontal – Nivel General*, y de cómo los estudiantes se aproximan a la producción, validación y comprensión de *modelos para*, se sujeta a los argumentos y posiciones presentadas por los estudiantes en general que dividían el grupo en dos, a saber; aquellos que consideraban de facto o posible un domino en el conjunto de los racionales para la función lineal del precio total de la factura ($f(x) = 80x + 50.000$) y aquellos que no lo veían de este modo.

Lo anterior generó una ruptura entre la lógica cotidiana y la lógica matemática, en sentido pragmático, es decir, se evidenció una ruptura entre lo que los estudiantes vivían en sus

contextos socioculturales, las matemáticas cotidianas y las matemáticas escolares, lo que sigue la importancia de una correcta articulación entre ambos contextos (cotidiano y matemático) para el diseño de tareas, que permitan considerar lo cotidiano de tal forma que lo propuesto en el salón de clase se aproxime cada vez más a la realidad, sin llegar a cometer errores de corte didáctico en las decisiones del profesor, como, por ejemplo; disponer de un lenguaje muy coloquial cómo abreviaturas de procedimiento matemáticos que inhiben al estudiante de visibilizar las operaciones internas o de aplicaciones compuestas por una o más operaciones en algunos procesos y razonamientos.

Este desarrollo propositivamente ascendente, expuso a los estudiantes a una primera relación entre las funciones y las ecuaciones, a saber; que la ecuación $80x + 50.000 = 62.000$ procede o se puede ver como el resultado de igualar la función lineal ($y = 80x + 50.000$) con la función constante ($y = 62.000$).

Respecto a la *Tarea 3*, referente a la *Matematización Vertical – Nivel Referencial* y *Matematización Vertical – Nivel General* de la EMR y un proceso de matematización progresiva, se evidencia que la mayoría de los estudiantes tienen un desempeño de acuerdo con las exigencias propuestas en la tarea, proponiendo y empleando diferentes modelos gráficos y algebraicos sujetos a un contexto particular y, de esta forma, ascienden progresivamente en la superación de los límites propios de dicho contexto hacia reflexiones un poco más amplias o generales a través de la producción de *modelos para* como consecuencia de emplear de forma acertada *modelos de*, no obstante, esta superación es parcial, no se logra evidenciar

concretamente que los estudiantes desarrollen o exhiban mayoritariamente acción propias del *Nivel General*.

En la *Tarea 3*, se aborda la noción de igualdad entre dos funciones a partir de la necesidad de explicitar cuándo y porqué el precio total de dos planes de telefonía móvil llega a ser igual, con lo cual, se evidencia un avance significativo en la comprensión acerca de que una ecuación algebraica se establece a partir de la igualdad entre dos funciones.

Dicho avance tiene lugar a partir de las acciones de los estudiantes que suponen consciencia acerca de que el punto de intersección entre las gráficas de las funciones del precio total de cada uno de los dos planes de telefonía móvil se puede estudiar algebraicamente a partir de la ecuación $f(x) = g(x)$, siendo f y g las funciones. Lo anterior, se logra al disponer en la *Tarea 3* de una serie de preguntas que requieren que el estudiante, en primera instancia; reconozca y caracterice de manera rápida los dos modelos lineales asociados al precio total de cada plan y las relaciones de dependencia, a través del registro tabular y gráfico, en segundo lugar; precise el lugar geométrico y valor numérico para el cual ambas funciones llegan a ser iguales, y finalmente; logre determinar que la ecuación $f(x) = g(x)$ está relacionada con las coordenadas del punto de intersección entre las gráficas de ambas funciones, principalmente, que el conjunto solución de dicha ecuación corresponde a la abscisa del punto de intersección, en tanto la ordenada corresponde al valor resultante de la comprobación de la igualdad expresada en la ecuación que la verifica.

3.3.2. Análisis de resultados de la situación 2

Situación 2 (S2): La tienda, ecuaciones y funciones.

Doña Florinda es la dueña de una tienda en el barrio Libertadores que diariamente tiene un ingreso total en ventas de \$280.000. Ahora que cerraron la vía donde está ubicada su tienda para hacer mantenimientos, el ingreso total en ventas diarias ha bajado significativamente. Si esta situación continua, doña Florinda desea conocer qué representaría esto en su negocio con el paso de los días.

Tarea 1 (T1): La tienda de doña Florinda

Tabla 40

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 1a y 1b (S2T1P1ab)

(P1ab) Pregunta 1. Doña Florinda ha registrado en la siguiente tabla el ingreso total de ventas desde que cerraron la vía.

Tabla 4. Relación entre el número de días y el ingreso total en ventas

Número de días	0	1	2	3	4	5	6
Ingreso total en ventas (\$)	280.000	275.000	270.000	265.000	260.000	255.000	250.000

Considerando la situación y la tabla anterior:

- Escribe qué está sucediendo con el ingreso total en ventas durante los primeros 6 días.
- Explica cuál crees que podría ser el ingreso total en ventas cuando han pasado 7 días.

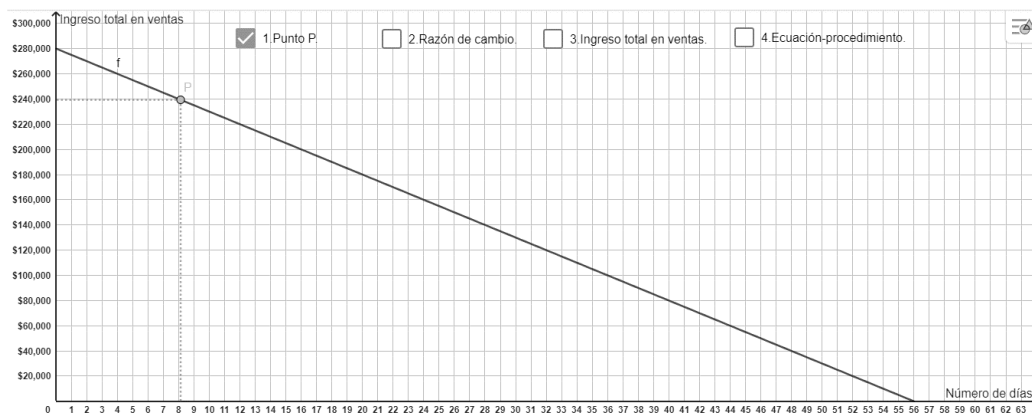
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta que el ingreso total en ventas durante los primeros seis días disminuye \$5.000 diarios y predicen que para el séptimo día será de \$245.000. (E2, E4, E6, E8, E9, E10, E11, E13, E14 y E16)	10	62,50%
R2	Estudiantes que escriben de manera correcta que el ingreso total en ventas durante los primeros seis días disminuye y predicen que para el séptimo día será de \$245.000. (E1, E5, E7 y E12)	4	25,00%

R3	Estudiantes que indican que el ingreso total en ventas los primeros seis días cambia y predicen que para el séptimo día será de \$245.000. (E3 y E15)	2	12,50%
----	---	---	--------

Tabla 41

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 2a, 2b y 2c (S2T1P2abc)

(P2abc) Pregunta 2. Haz clic en la casilla 1. *Punto P*. Para realizar las siguientes actividades mueve el punto P.

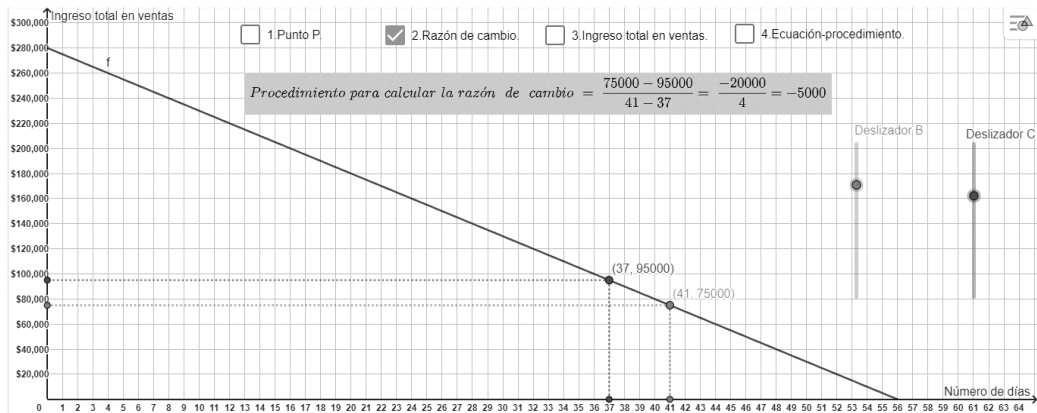


- Escribe el número de días cuando el ingreso total en ventas es \$240.000, \$200.000 y \$180.000.
- Escribe a partir de qué número de días el ingreso total en ventas de \$280.000 se reduce a la mitad.
- Escribe cómo cambia el ingreso total en ventas cuando el número de días aumenta.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta que el ingreso total en ventas disminuye \$5.000 diariamente y escriben las 4 cantidades correspondientes al número de días cuando el ingreso total en ventas es de \$240.000, \$200.000 y \$180.000 (8, 16 y 20 días) y cuando el ingreso de \$280.000 se reduce a la mitad (28 días). (E1, E4, E2, E5, E7, E8, E9, E11, E12 y E13)	10	62,50%
R2	Estudiantes que escriben de manera correcta que el ingreso total en ventas disminuye y escriben 3 de las cuatro cantidades correspondientes al número de días cuando el ingreso total en ventas es de \$240.000 y \$200.000 (8 y 16 días) y cuando el ingreso de \$280.000 se reduce a la mitad (28 días). (E3, E6, E10, E14, E15 y E16)	6	37,50%

Tabla 42
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 3 (S2T1P3)

(P3) Pregunta 3. Haz clic en la casilla 2. *Razón de cambio*. Ubica en posiciones diferentes los deslizadores B y C, y escribe qué representa el resultado final del procedimiento para calcular la razón de cambio en la situación anterior.



Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiante que indica de manera correcta que el procedimiento para calcular la razón de cambio es la diferencia entre cualquier par de puntos diferentes de la gráfica y el resultado representa la cantidad que disminuye diariamente el ingreso total en ventas de la tienda de doña Florinda. (E4)	1	6,25%
R2	Estudiantes que indican de manera correcta que el resultado del procedimiento para calcular la razón de cambio representa la cantidad que disminuye diariamente el ingreso total en ventas de la tienda de doña Florinda. (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	15	93,75%

En la *Tabla 40* se observa que el 100% de los estudiantes identifican de manera correcta las cantidades representadas en la *Tabla 4* (Número de días e ingreso total en ventas) como cantidades que varían, cuanto cambia el ingreso total en ventas diariamente (5.000) y realizan una predicción correcta sobre el ingreso total en ventas para el séptimo día. El 87,5% de los

estudiantes precisa la dirección del cambio del ingreso total en ventas al referir que disminuyen con el paso de los días, como se muestra en la siguiente figura:

1 a. El ingreso total en ventas disminuye \$5.000 pesos por cada día que transcurre si la vía continúa cerrada
b. 245.000 pesos ya que continuarían disminuyendo.

Figura 26. S2T1P1R1

En relación con la *Tabla 41*, el 100% de los estudiantes determina correctamente que el ingreso total en ventas disminuye cuando el número de días aumenta, de los cuales, el 62,5% identifican la cantidad en el cambio del ingreso total en ventas al escribir que disminuye \$5.000 diariamente, además, precisan el número de días solicitados para cada uno de los cuatro valores del ingreso total en ventas.

De acuerdo con la *Tabla 42*, el 100% de los estudiantes establecen de manera correcta que el resultado del procedimiento para calcular la razón de cambio representa la cantidad que disminuye diariamente el ingreso total en ventas de la tienda de doña Florinda, un solo estudiante, que representa el 6,25%, indica que el procedimiento es la diferencia entre cualquier par de puntos diferentes de la gráfica.

A partir de las respuestas a las preguntas de la *S2T1P1ab*, *S2T1P2abc* y *S2T1P3* se evidencia que una gran parte de los estudiantes logran reconocer regularidades en un registro tabular y realizar inferencias sobre cantidades relacionadas o que dependan entre sí a través de procesos de visualización, arrastre y estimación que ayudan a la caracterización de la función $f(x) = 280.000 - 5000x$, la cual permite modelar la *Tarea 1* de la *Situación 2*.

Se puede apreciar un dominio del concepto de función, al considerar la expresión $f(x) = 280.000 - 5000x$, a partir de la caracterización de cómo cambia el ingreso total en ventas y

número de días y la conciencia sobre la razón de cambio asociándola a la situación, lo que permite inferir el desarrollo en los estudiantes de ciertas competencias ligadas a la *Matematización Horizontal - Nivel Situacional*; como el uso del sentido común para identificar las matemáticas inmersas en el contexto con el fin de esquematizar y buscar regularidades, y respecto a la *Matematización Vertical - Nivel Referencial*, el uso de *modelos de* como una herramienta para comprender la situación problema.

Con relación a lo anterior, en el tipo de respuesta *S2T1P2abcR1*, queda claro que los estudiantes lograron establecer relaciones de dependencia entre el número de días y el ingreso total en las ventas diarias, al explorar la función $f(x) = 280.000 - 5000x$ a través de su representación gráfica de GeoGebra que, por medio de acciones como el arrastre del punto P, hizo posible reconocer y cuantificar el cambio del ingreso total en ventas diarias y dar respuestas acertadas a la pregunta *S2T1P2abc*, como se observa en la siguiente figura:

a) $240.000 = 8$ días
 $200.000 = 16$ días
 $160.000 = 20$ días
 b) la mitad es de 140.000 son 28 días
 c) el ingreso total de las ventas va reduciendo $\$5.000$ desde el día 0 con el aumento de los días

Figura 27. *S2T1P2abcR1*

Respecto a la pregunta S2T1P3, si bien el 100% de los estudiantes responde correctamente sobre qué representa el valor obtenido en el procedimiento para calcular la razón de cambio, se destaca el estudiante E4 pues es el único que logra esbozar, a partir de su explicación, el carácter general de la fórmula que permite calcular la razón de cambio en la función $f(x) = 280.000 - 5000x$, expresando que para cualquier pareja de puntos que se consideren y pertenezcan a la función el resultado siempre va a ser una cantidad constante proveniente de una relación entre cantidades variables, aludiendo de manera implícita a una relación entre las cantidades variables y constantes, como en el caso de la razón de cambio para una función lineal que permite encontrar una cantidad constante a partir de cantidades variables. A continuación, se presenta la respuesta del estudiante E4:

3 La razón de cambio es la resta entre dos puntos en la línea de la gráfica

$$\frac{280.000 - 200.000}{0 - 16} = \frac{80.000}{-16} = -5.000$$

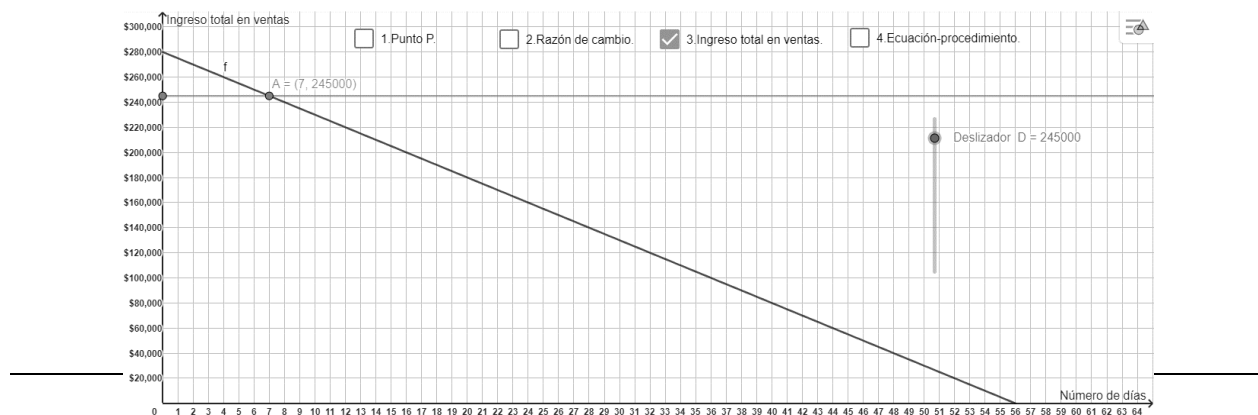
sin importar que 2 puntos se elijan la razón de cambio siempre va a ser -5.000 x representa lo que disminuye el ingreso.

Figura 28. S2T1P3R1

Tabla 43

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 4a y 4b (S2T1P4ab)

(P4ab) Pregunta 4. Haz clic en la casilla 3. *Ingreso total en ventas.* Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador D.



Potencialidades y dificultades

- a. Escribe qué sucede con las coordenadas del punto A al mover el deslizador D.
- b. Explica cuándo el ingreso total en ventas llega a ser nulo.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta que al mover el deslizador D el número de días aumenta y el ingreso total en ventas disminuye e indican que en el día 56 el ingreso total en ventas es nulo. (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	16	100,00%

Tabla 44
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y preguntas 5a y 5b (S2T1P5ab)

(P5ab) **Pregunta 5.** Haz clic en la casilla 4. *Ecuación-procedimiento*. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador D.



- a. Escribe qué relación encuentras entre las coordenadas del punto A y el procedimiento.
- b. Escribe qué relación encuentras entre las coordenadas del punto A cuando el ingreso total en ventas es nulo.

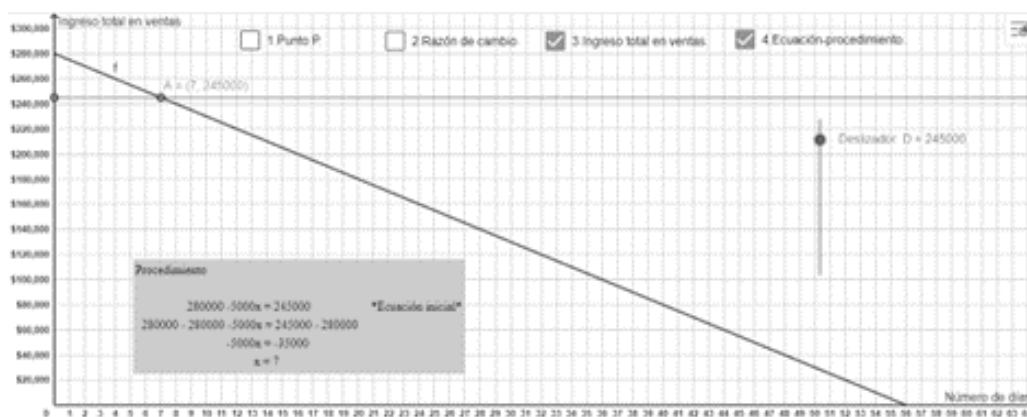
Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican que la relación es que ambos registros presentan la misma información (número de días e ingreso total en ventas) en cualquier momento, particularmente cuando el ingreso es nulo, añadiendo que el procedimiento describe como calcular las	6	37,50%

	coordenadas del punto A. (E2, E4, E12, E14, E15 y E16)		
R2	Estudiantes que indican que la relación es que ambos registros presentan la misma información (número de días e ingreso total en ventas) en cualquier momento, particularmente cuando el ingreso es nulo. (E1, E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11 y E13)	10	62,50%

Tabla 45

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 5c (S2T1P5c)

(P5c) Pregunta 5. Haz clic en la casilla 4. *Ecuación-procedimiento*. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador D.



c. Explica que permite calcular el procedimiento.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican de manera correcta que el procedimiento permite calcular el número de días para cualquier valor del ingreso total en ventas. (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E13 y E14)	10	62,50%
R2	Estudiantes que mencionan las cantidades necesarias o que intervienen en la ecuación inicial para desarrollar el procedimiento. (E4, E11, E12, E15 y 29)	5	31,25%

De acuerdo con la *Tabla 43*, el 100% de los estudiantes reconoce la dirección del cambio en las coordenadas del punto A, al indicar que el número de días (abscisa) aumentaba mientras el

Potencialidades y dificultades

ingreso total en ventas (ordenada) disminúa, además, logran determinar de forma concreta que en el día número 56 el ingreso es nulo.

Por otra parte, en la *Tabla 44*, el 100% de los estudiantes establece que las coordenadas del punto A (punto de intersección entre las gráficas de la función $f(x) = 280.000 - 5.000x$ y la familia de funciones del tipo $g(x) = k$, tal que $280.000 \leq k \leq 0$, $k \in \mathbb{Z}$) y los valores del *procedimiento* (desarrollo paso a paso de la ecuación $f(x) = g(x)$) determinan el ingreso total en ventas para cualquier número de días. El 37,5% concluye que el *procedimiento* expone una forma de calcular o saber las coordenadas del punto A.

En la siguiente figura se puede apreciar un ejemplo con el objetivo de aclarar lo inmediatamente anterior, particularmente para reconocer el procedimiento:

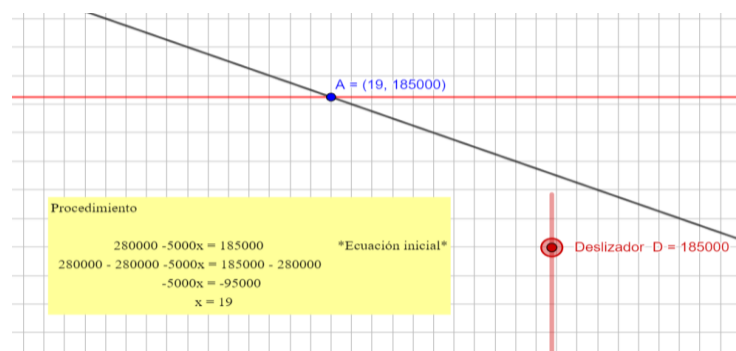


Figura 29. Procedimiento que calcula el número de días para cualquier valor del ingreso total en ventas

En este ejercicio, al mover el deslizador D, las coordenadas del punto A (particularmente la abscisa) y el valor del miembro derecho de la ecuación inicial (18.500) siempre toman el valor que tenga el deslizador D, lo que hace que para cada valor del deslizador D se tengan diferentes resultados en el procedimiento y en las coordenadas del punto A.

En la *Tabla 45*, el 62,5% responden correctamente que el *procedimiento* permite calcular el número de días para algún valor dado del ingreso total de la factura, en tanto el 31,25% restante, se encarga de describir las cantidades necesarias o que intervienen en el *procedimiento*, como lo hace el siguiente estudiante:

Para calcular el procedimiento es necesario el valor del día o del Precio

Figura 30. S2T1P5cR2

Como se mencionó anteriormente, el punto A es un punto de intersección que varía con relación a cada uno de los representantes de la familia de funciones constantes $g(x) = k$ en el determinada por el valor que toma el deslizador D, al considerar las respuestas a la pregunta *S2T1P4* y el apoyo que encontraron los estudiantes en el arrastre del deslizador D para visualizar el movimiento del punto A en la gráfica de GeoGebra, se evidencia que todos los estudiantes, al establecer la dirección del cambio para ambas coordenadas del punto A, determinan la relación de dependencia entre el ingreso total en ventas y el número de días, para corroborar que, llegado un determinado número de días (56 días), el ingreso total sería nulo.

Esta coordinación entre la dirección del cambio en las coordenadas y el establecimiento de las relaciones de dependencia permitió que los estudiantes predijesen o realizaran algún tipo de inferencia o descripción asociado al modelo lineal ($f(x) = 280.000 - 5.000x$), en este sentido, estas acciones hacen parte de los procesos de modelación asociados a la *Matematización Vertical – Nivel Referencial*, fundamentales en la construcción de sentido matemático acerca de los modelos lineales.

Además de lo anterior, algunos estudiantes estuvieron de acuerdo en que la gráfica de GeoGebra les condujo a comprender mejor que la intersección entre la gráfica de la función

lineal y la función constante (como representante de la familia $g(x) = k$) siempre está dada por el punto A y que para determinar cuándo el ingreso es nulo, es necesario que el representante de la familia de funciones $g(x) = k$ sea $g(x) = 0$, como lo precisa un estudiante al decir que “la línea de color rojo siempre se mueve y nos indica cual es el ingreso total, por eso para conocer el día solo baje la línea roja hasta cero”, refiriéndose con “línea roja” al representante de la familia de funciones $g(x) = k$.

Lo anterior; aunque no configura una evidencia precisa de que los estudiantes comprenden y establecen la relación entre las funciones f y g y la ecuación $f(x) = g(x)$ (con $k = 0$) como aquella ecuación que permite identificar o saber el valor de la variable x para el que ambas gráficas se intersecan o son iguales o el ingreso total en ventas diarias llega a ser nulo, si permite decir que hay un acercamiento a esta relación, toda vez que los estudiantes comprenden que el ingreso total en ventas es nulo cuando $g(x) = 0$ y por lo visto en los resultados de la *Situación 1*, este grupo de estudiantes puede concluir este tipo de relaciones a partir de las dos funciones.

En relación con el tipo de respuesta *S2T1P5abR1* y *S2T1P5abR2* se destaca que el grupo general de estudiantes logra identificar similitudes al comparar los valores de las coordenadas del punto A y el procedimiento, aludiendo que la información en un registro y otro son idénticas. De esto es posible inferir que los estudiantes están asociando el punto A de manera directa con el procedimiento a través de lo numérico, apuntando a la posibilidad de determinar, para este caso, la relación o propiedad derivada del punto de intersección y la ecuación que se logró establecer al final de la *situación 1*, la cual se refiere a que la ecuación $f(x) = g(x)$ permite establecer si

las gráficas de las funciones f y g se intersecan en un punto, o varios, y de ser así, el conjunto solución de dicha ecuación es equivalente a la abscisa del punto de intersección. No obstante, en el tipo de respuesta *S2T1P5abR1* se alcanza a rastrear que esta idea está presente en los estudiantes, al enunciar que el procedimiento permite hallar o saber las coordenadas del punto A, como se presenta a continuación:

5 La ecuación es útil para hallar el valor desconocido en caso de que solo se conozca uno (el día o el precio).
Ambas permiten conocer cuando el ingreso total es nulo cuantos días han transcurrido

Figura 31. *S2T1P5abR1*

Tabla 46

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 6 (S2T1P6)

(P6) Pregunta 6. Teniendo en cuenta la información anterior, justifica cuál de las siguientes expresiones permite calcular el ingreso total en ventas diarias.

$$f(x) = 280.000x + 5.000$$

$$280.000 - 5.000x = 0$$

$$f(x) = 280.000 - 5.000x$$

$$5.000x + 280.000 = 0$$

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que consideran de manera correcta que la expresión $f(x) = 280.000 - 5.000x$ permite calcular el ingreso total en ventas diarias. (E1, E3, E4, E5, E6, E7, E10, y E11)	Indica que x representa el número de días y \$5.000 la cantidad que decrece diariamente el ingreso total en ventas. (E4)	1	6,25%
		Reconocen en la expresión que el valor (5.000) representa lo que decrece diariamente el ingreso total en ventas. (E1 y E5)	2	12,50%
		Sin justificación. (E3, E6, E7, E10, y E11)	5	31,25%

Potencialidades y dificultades

R2	Estudiantes que indican que la ecuación permite considerar que la hallar el número de días. (E13) expresión $280.000 - 5000x = 0$ permite Indica que la expresión contiene calcular el ingreso el ingreso total en ventas diario total en ventas diarias. (280.000) y la cantidad que (E2, E8, E9, E12, decrece diariamente el ingreso E13, E14, E15 y E16) total en ventas (\$5.000). (E14)	1	6,25%
		1	6,25%
	Sin justificación. (E2, E8, E9, E12, E15 y E16)	6	37,50%

Tabla 47

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 1 y pregunta 7 (S2T1P7)

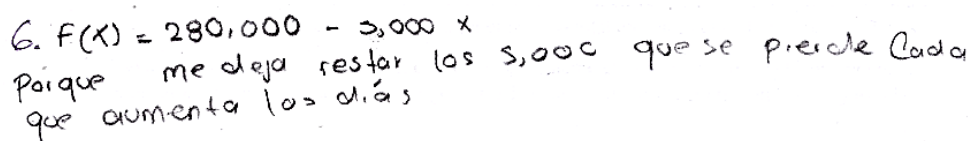
(P7) Pregunta 7. Explica que representaría el cierre de la vía en el negocio de doña Florinda con el paso de los días.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican que el cierre de la vía con el paso de los días representa pérdidas monetarias para la tienda de doña Florinda y en el día 56 sus ingresos serán nulos, por lo que se verá obligada a cerrar su tienda. (E2, E4, E8 y E13)	4	25,00%
R2	Estudiantes que indican que el cierre de la vía con el paso de los días representaría la bancarrota o cierre del negocio de doña Florinda. (E1, E3, E5, E6, E11 y E15)	6	37,50%
R3	Estudiantes que indican que el cierre de la vía con el paso de los días representa que el ingreso seguirá disminuyendo hasta ser nulo, por lo que se verá obligada a cerrar su tienda. (E7, E9, E10, E12, E14 y E16)	6	37,50%

En la Tabla 46 se puede apreciar que el 50% de los estudiantes seleccionan de manera correcta la expresión $f(x) = 280.000 - 5.000x$ como aquella que permite calcular el ingreso

total en ventas diarias; el 6,25% reconoce en la expresión que 5.000 es la cantidad en la que decrece diariamente el ingreso total en ventas e identifica la x como la cantidad variable, la cual representa el número de días; el 12,5% de los estudiantes indican que la expresión $280.000 - 5000x = 0$ permite calcular el decrecimiento diario en el ingreso total en ventas, como se puede ver en la *figura 32*. El 31,25% restante no presenta justificación.

Con relación al otro 50% de los estudiantes que seleccionaron incorrectamente la expresión $280.000 - 5000x = 0$ como aquella que permite calcular el ingreso total en ventas diarias, exhiben justificaciones relacionadas con las cantidades que intervienen en la situación, el 12,5% indica se puede hallar el número de días con la ecuación o que la expresión tiene las cantidades características del problema, como lo son: el ingreso que tenía doña Florinda antes del cierre de la vía (\$280.000) y la cantidad que decrece diariamente (\$5.000). El 37,5% de los estudiantes restante no presenta justificación.



G. $F(x) = 280,000 - 5,000 x$
 Porque me deja restar los 5,000 que se pierde cada que aumenta los días

Figura 32. S2T1P6R1

La intención de las preguntas S2T1P6 y S2T1P7 es proponerles a los estudiantes reflexionar sobre la posibilidad de determinar, a partir de la ecuación $f(x) = g(x)$, las funciones que hacen parte de ella, particularmente centrar la atención en la función lineal $f(x)$.

En este sentido, los tipos de respuesta a las preguntas S2T1P6 y S2T1P7, en conjunto con lo dicho sobre las respuestas de las preguntas de la 1 a la 5, permite determinar que el 50% de los estudiantes logran aproximarse a realizar un salto cualitativo entre la ecuación $f(x) = g(x)$ y la caracterización de la función $f(x)$, como una consecuencia evidente de que, al poder componer

una ecuación como la igualdad de dos funciones o determinar ambas funciones a partir de la ecuación.

Por otra parte, el 50% de los estudiantes restante que consideraron que la expresión $280.000 - 5000x = 0$ permite calcular el ingreso total en ventas diarias, no se tiene en cuenta como un error consecuente de una dificultad, sino una falencia en la articulación de la secuencia de preguntas de la *Situación 2* porque gran parte de las preguntas se enfocan de forma directa en las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) = 0$ pero de forma indirecta sobre la función.

Teniendo en cuenta las respuestas de la pregunta *S2T1P7* la mayoría de los estudiantes logran matematizar la situación y llegar a conclusiones coherentes sobre los ingresos en las ventas diarias de la tienda de doña Florinda por medio de las actividades sugeridas a lo largo de la *S2T1*, en este sentido y en relación con la *Matematización Horizontal - Nivel Situacional* los estudiantes por medio de la experimentación, el arrastre, la visualización y la intuición transformaron un problema de la realidad en un problema matemático.

Por otro lado, la actividad matemática del 50% de los estudiantes está asociada a la *Matematización Vertical – Nivel referencial* por el uso y caracterización de un modelo lineal que esquematiza el problema, a partir del reconocimiento de las relaciones de dependencia y comprensión de la situación que contribuyeron a concretar y establecer la relación entre ecuación y función por medio de la geometría dinámica.

Respecto a la *Tarea 2* de la *Situación 2*, la gran mayoría de los estudiantes transitaron progresivamente por algunos procesos de matematización caracterizados por la EMR, de acuerdo

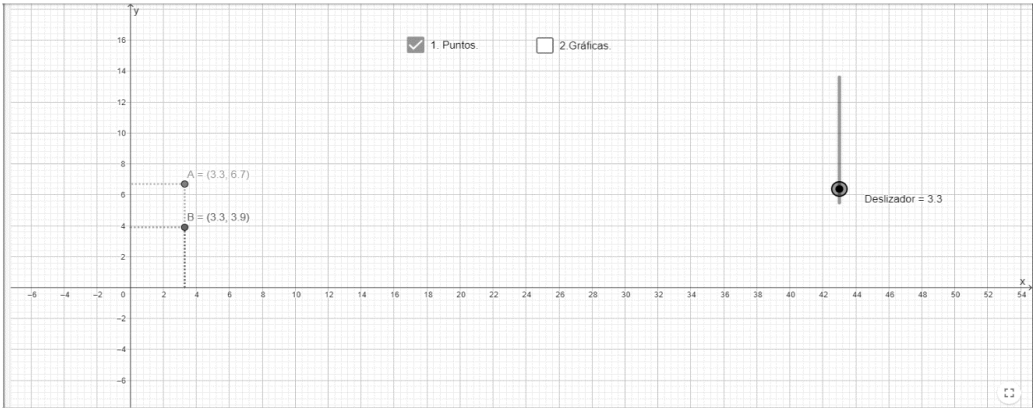
con la Matematización Horizontal – Nivel Situacional, al identificar patrones y realizar inferencias sobre cantidades que tienen relaciones de dependencia en un registro tabular, por medio de procesos de visualización y arrastre, los estudiantes respondieron de manera acertada sobre las cantidades y su relación con la situación. Además, se evidencia un paso ascendente a la *Matematización Vertical* respecto al *Nivel referencial* en el que los estudiantes se enfrentan de forma implícita a la función lineal que modela la situación del ingreso total en ventas de la tienda de doña Florinda, a partir de la caracterización de relaciones de dependencia entre el número de días e ingreso total en ventas, identificación de patrones de variación y establecimiento de la dirección de cambio entre los valores de las coordenadas del punto A, estas acciones hacen parte de procesos de modelación fundamentales para pasar de un nivel preformal a uno formal en la construcción de sentido matemático sobre los modelos lineales.

Teniendo en cuenta las respuestas a las dos últimas preguntas de la *Tarea 1* (S2T1P6 y S2T1P7) se evidencia que más de la mitad de los estudiantes se aproxima a la relación entre la función lineal y la ecuación de primer grado a través de un ambiente de geometría dinámica que ofrece GeoGebra como ejercicio práctico de sus saberes, ya que logran realizar un salto cualitativo entre la ecuación $f(x) = g(x)$, compuesta por dos funciones hacia la caracterización de la función $f(x)$, implícitamente se reconoce la ecuación como una igualdad de dos funciones. A partir del tipo de respuesta de S2T1P7 se registraron problemas para determinar la expresión algebraica que modela la situación problema, esto no se considera como una dificultad del estudiante sino una falencia en la articulación de las preguntas.

Tarea 2 (T2): Extensión y generalización de relación $f(x) = g(x)$.

Tabla 48
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 1a y 1b (S2T2P1ab)

(P1ab) **Pregunta 1.** Haz clic en la casilla 1. Puntos. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador.



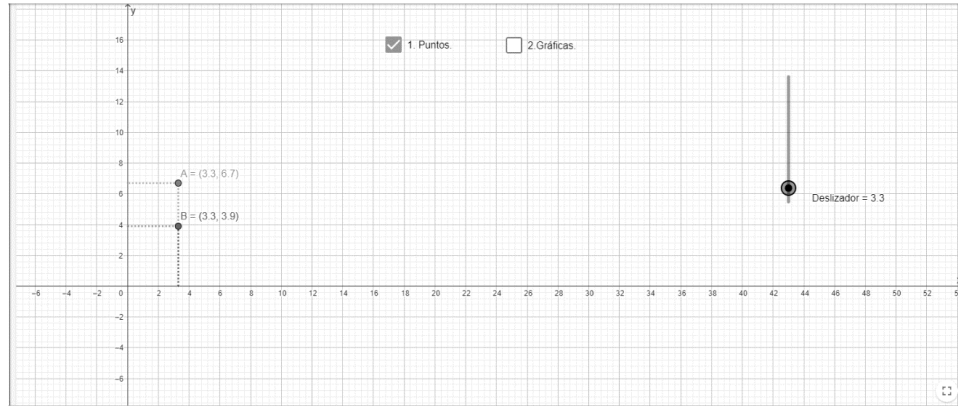
- a. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto A.
- b. Escribe sobre que grafica se mueve el punto A.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden de manera correcta que para el punto A el valor de la abscisa aumenta mientras el valor de la ordenada disminuye e indican que se mueve sobre una gráfica lineal. (E1, E2, E3, E4, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	12	75,00%
R2	Estudiantes que responden que para el punto A la ordenada disminuye a medida que los valores del deslizador aumentan e indican que se mueve sobre una línea recta. (E5, E6, E7 y E8)	4	25,00%

Tabla 49

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 1c y 1d (S2T2P1cd)

(P1cd) Pregunta 1. Haz clic en la casilla 1. Puntos. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador.

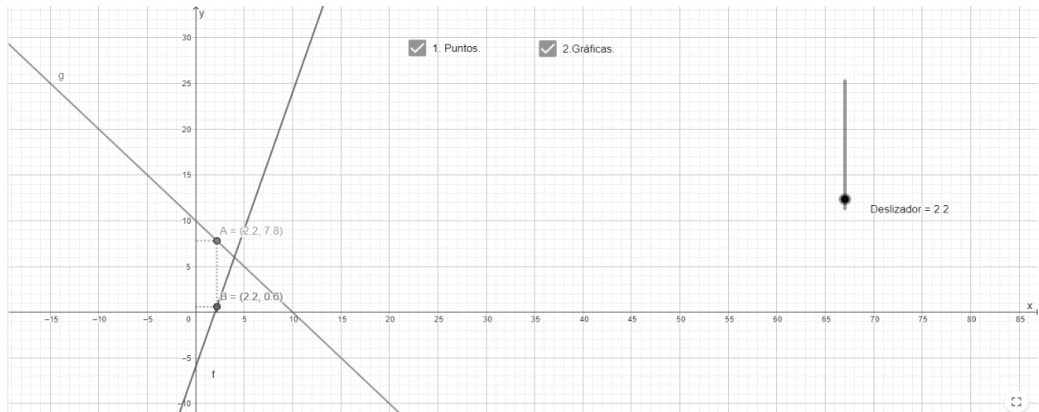


- c. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto B.
d. Escribe sobre qué grafica se mueve el punto B.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden de manera correcta que para el punto B el valor de la abscisa y la ordenada está aumentando e indican que se mueve sobre una gráfica lineal. (E1, E2, E3, E4, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	12	75,00%
R2	Estudiantes que responden que para el punto B el valor de la ordenada disminuye a medida que los valores del deslizador disminuyen e indican que se mueve sobre una línea recta decreciente. (E5, E6, E7 y E8)	4	25,00%

Tabla 50
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 2 (S2T2P2)

(P2) Pregunta 2. Haz clic en la casilla 2. *Gráficas.* mueve el deslizador y escribe la coordenada del punto de intersección entre las gráficas.



Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta las coordenadas del punto de intersección entre las gráficas (4,6). (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	15	93,75%
R2	Estudiante que escribe las coordenadas de dos puntos diferentes (ej. A= (6.5,3.5) y B= (6.5,13.5) al punto de intersección entre las gráficas. (E5)	1	6,25%

Tabla 51
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 3a, 3b y 3c (S2T2P3abc)

- (P3abc) Pregunta 3.** Si las expresiones de las gráficas anteriores son; $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = 10 - x$:
- a. Escriba una expresión para hallar la abscisa del punto de intersección.
 - b. Calcule la abscisa del punto de intersección.
 - c. Calcule la ordena del punto de intersección.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta la ecuación ($3x - 6 = 10 - x$) que permitir hallar la	15	93,75%

	abscisa del punto de intersección entre las funciones $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = 10 - x$ y calculan el valor correcto de las coordenadas de dicho punto (4,6) exhibiendo sus procesos de cálculo con un uso adecuado del signo igual. (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)		
R2	Estudiante que escribe de manera correcta la ecuación $(3x - 6 = 10 - x)$ que permitir hallar la abscisa del punto de intersección entre las funciones $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = 10 - x$ y calculan el valor correcto de las coordenadas de dicho punto (4,6) sin exhibir sus procesos de cálculo. (E5)	1	6,25%

En la *Tabla 48* se puede apreciar que el 75% de los estudiantes responden de manera correcta sobre la dirección del cambio de cada una de las coordenadas del punto A, al concluir que la abscisa aumenta y la ordenada disminuye, e indican que el punto A se mueve sobre una gráfica lineal. Por otro lado, el 25% de los estudiantes restante reconocen que en el punto A que la ordenada disminuye a medida que los valores del deslizador aumentan, en este caso, los valores del deslizador son iguales a los valores que toma la abscisa del punto A.

Con relación a la *Tabla 49*, el 75% de los estudiantes responden de forma acertada sobre la dirección de cambio de las coordenadas del punto B, al concluir que la abscisa y la ordenada aumentan, e indican que el punto B se mueve sobre una gráfica lineal. Por otra parte, el 25% de los estudiantes reconocen que en el punto B los valores de la ordenada disminuyen a medida que los valores del deslizador disminuyen, teniendo en cuenta que el deslizador está asociado a la abscisa del punto B, e indican que el punto se mueve sobre una línea decreciente.

Teniendo en cuenta la *Tabla 50*, aproximadamente el 94% de los estudiantes identifican el punto de intersección de las funciones f y g e indican de manera correcta las coordenadas de dicho punto (4,6). Por otro lado, un estudiante, que representa el 6%, escribe dos coordenadas

para los puntos A y B sin que estas coordenadas coincidas y representen el mismo punto o punto de intersección, como se puede ver en la siguiente figura:

Punto # 2

$A = (6, 5, 3, 5)$ $B = (6, 5, 13, 5)$

Figura 33. S2T2P2R2

De acuerdo con la *Tabla 51*, el 93,75% de los estudiantes escriben una expresión ($3x - 6 = 10 - x$) que permite hallar la abscisa del punto de intersección y la utilizan de manera correcta para encontrar el valor de la abscisa y la ordenada de dicho punto, asociando procedimiento de cálculo con un uso adecuado del signo igual (ver *figura 34*), a diferencia del 6,25% que no presenta procedimientos de cálculo.

3. a. $3x - 6 = 10 - x$

b. $3x = 10 - x + 6$
 $3x = 16 - x$
 $3x + x = 16$
 $4x = 16$
 $x = \frac{16}{4}$
 $x = 4$ - abscisa

c. $3x - 6$
 $= 3(4) - 6$
 $= 12 - 6$
 $= 6$ - Ordenada

Figura 34. S2T2P3abcR1

Considerando los tipos de respuestas *S2T2P1abR1*, *S2T2P1cdR1*, *S2T2P2R1* y *S2T2P3abcR1*, se evidencia que más del 75% de los estudiantes establece correctamente la

dirección del cambio en las coordenadas de los puntos A y B y reconocen que ambos puntos se encuentran sobre gráficas lineales independientes, aludiendo a la gráfica de una función lineal decreciente y otra de una función lineal creciente. Hasta este momento las gráficas de las funciones podían ser referidas a través del movimiento rectilíneo de los puntos o la cuantificación del crecimiento o decrecimiento de sus coordenadas, esto último se puede evidenciar, por ejemplo, en el tipo de respuesta S2T2P1abR1 y S2T2P1cdR1 de un estudiante al proponer un par de ejemplos para visibilizar la cantidad y dirección del cambio en las coordenadas de los puntos A y B, como se presenta en la siguiente figura:

- 1)
- a. En el punto A al ir subiendo el deslizador la abscisa sube un número y al bajar el deslizador baja un número. Ejemplo: $A = (3.8, 6.2)$, cuando el deslizador sube quedan $A = (3.9, 6.1)$
 - b. Gráfica lineal.
 - c. En el punto B cuando el deslizador sube la abscisa sube 0.1 y cuando la ordenada sube 0.3. Ejemplo: $B = (2.1, 0.3)$.
 - d. Gráfica lineal.

Figura 35. S2T2P1abR1 y S2T2P1cd R1

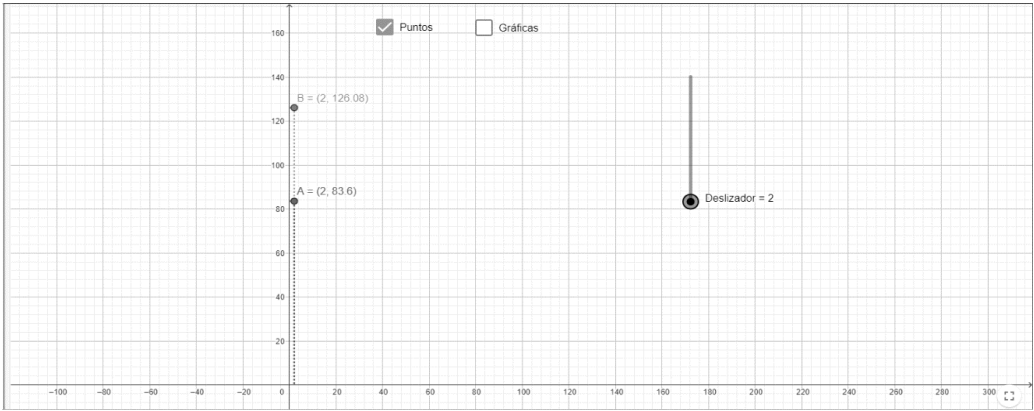
Lo anterior puede ser resultado de sus procesos personales para medir el cambio o cuantificar el cambio y la articulación con la apropiación de ciertos modelos que no surgen propiamente de un contexto, sino que subtienden una familia de situaciones parecidas, en este sentido, se sugiere que la actividad matemática del estudiante parece estar asociada a la *Matematización Vertical – Nivel General*. Esto se esclarece en la plenaria, cuando el docente investigador propone pensar sobre si era posible que los puntos A y B, hasta ese momento, se estuviesen moviendo sobre gráficas no lineales, a lo que un estudiante responde que “no es posible profe, porque la vez pasada (refiriéndose a las preguntas de la *Situación 2 Tarea 1*) vimos que las coordenadas del punto decrecían de manera constante”, repuesta que sugiere que el estudiante ha reflexionado sobre sus experiencias previas con este tipo de modelos y ha

extendido una propiedad de las funciones lineales a situaciones parecidas, generalización de procesos de matematización previos.

Adicional a lo anterior y a partir del tipo de respuestas *S2T2P2R1* y *S2T2P3abcR1*, se consolida la evidencia de que más del 90% de los estudiantes asocian el punto de intersección entre las gráficas de las dos funciones lineales $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = 10 - x$ con la ecuación $3x - 6 = 10 - x$, lo cual es consecuente con la intencionalidad de las preguntas *S2T2P2* y *S2T2P3abc*. En estas, se espera que el estudiante al identificar el punto de intersección de las gráficas de las funciones f y g , a través del movimiento sincrónico de los puntos A y B en la gráfica de GeoGebra, recurra a los conocimientos previamente alcanzados a lo largo del desarrollo de la *Situación 1* asociados a las relaciones que se pueden establecer entre funciones y ecuaciones. Este alto porcentaje de estudiantes determinan la ecuación $3x - 6 = 10 - x$ cómo aquella que permite encontrar la abscisa del punto de intersección entre f y g , calcular la abscisa y la ordenada, están exhibiendo un dominio pragmático por lo menos de una relación entre funciones y ecuaciones, a saber; la ecuación $f(x) = g(x)$ permite determinar si las funciones f y g se interseca en un punto, o varios, y de ser así, caracterizar la abscisa y ordenada de dicho punto.

Tabla 52
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 4a y 4b (S2T2P4ab)

(P4ab) Pregunta 4. Haz clic en la casilla 1. *Puntos*. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador.

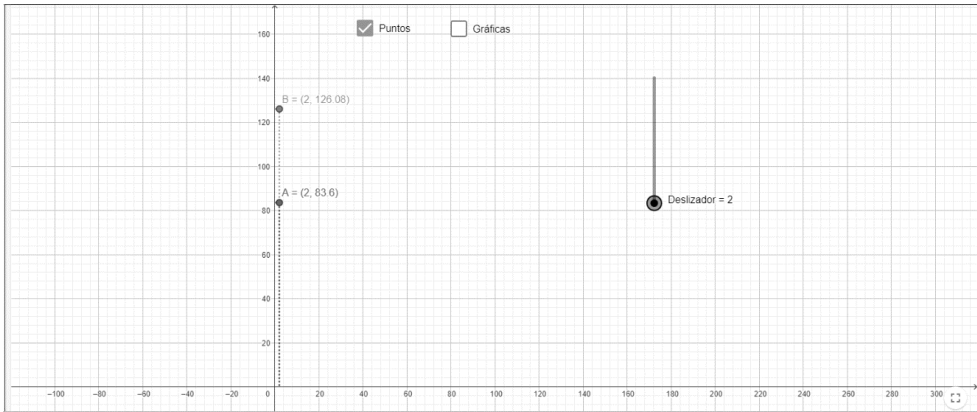


- a. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto A.
- b. Escribe sobre que grafica se mueve el punto A.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden de manera correcta que para el punto A el valor de la abscisa aumenta una unidad mientras el valor de la ordenada disminuye dos décimas e indican que se mueve sobre una gráfica lineal. (E9, E11, E14, E15 y E16)	5	31,25%
R2	Estudiantes que responden de manera correcta que para el punto A el valor de la abscisa aumenta mientras el valor de la ordenada disminuye e indican que se mueve sobre una línea recta. (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E12 y E13)	10	62,50%
R3	No responde. (E5)	1	6,25%

Tabla 53
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y preguntas 4c y 4d (S2T2P4cd)

(P4cd) Pregunta 4. Haz clic en la casilla 1. Puntos. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador.

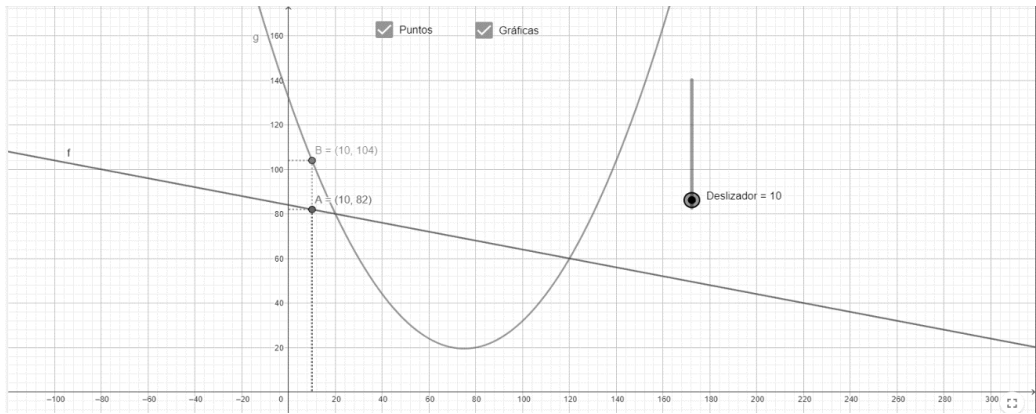


- c. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto B.
- d. Escribe sobre que grafica se mueve el punto B.

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que responden que para el punto B el valor de la abscisa aumenta mientras el valor de la ordenada disminuye e indican que se mueve sobre una parábola. (E1, E2, E3, E9, E11, E12, E13, E14, E15 y E16)	10	62,50%
R2	Estudiantes que responden que en el punto B el valor de la abscisa y la ordenada aumenta e indican que se mueve sobre una gráfica cuadrática. (E4, E6, E7, E8 y E10)	5	31,25%
R3	No responde. (E5)	1	6,25%

Tabla 54
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 5 (S2T2P5)

(P5) Pregunta 5. Haz clic en la casilla 2. Gráficas. Mueve el deslizador y escribe las coordenadas de los puntos de intersección entre las gráficas.



Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que escriben de manera correcta las dos coordenadas de los dos puntos de intersección entre las gráficas ((20,80) y (120,60)). (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E10, E12 y E13)	10	62,50%
R2	Estudiantes que escriben de manera correcta las dos coordenadas de uno de los dos puntos de intersección entre las gráficas ((20,80)). (E9, E11, E14, E15 y E16)	5	31,25%
R3	No responde. (E5)	1	6,25%

Tabla 55
Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 6 (S2T2P6)

(P6) Pregunta 6. Si las expresiones de las gráficas anteriores son $f(x) = \frac{-1}{5} x + 84$ y $g(x) = \frac{-1}{50} x^2 - 3x + 132$, explique qué permite calcular la ecuación:

$$\frac{-1}{5} x + 84 = \frac{-1}{50} x^2 - 3x + 132$$

Tipo de respuesta	Descripción	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
-------------------	-------------	---------------------	---------------------

Potencialidades y dificultades

R1	Estudiantes que escriben que la expresión permite calcular la abscisa de los puntos de intersección entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. (E11, E14 y E15)	3	18,75%
R2	Estudiantes que escriben que la expresión permite calcular los puntos de intersección entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$. (E1, E2, E3, E4, E7, E8, E9, E10, E12, E13 y E16)	11	68,75%
R3	No responde. (E5 y E6)	2	12,50%

En la *Tabla 52* se puede apreciar que aproximadamente el 94% de los estudiantes responden de manera correcta sobre la dirección del cambio de cada una de las coordenadas del punto A (la abscisa aumenta y la ordenada disminuye) e indican que el punto A se mueve sobre una gráfica lineal o una línea recta.

Con relación a la *Tabla 53*, el 62% de los estudiantes responden de forma acertada sobre la dirección de cambio de las coordenadas del punto B, al determinar que la abscisa aumenta y la ordenada disminuye, e indican el punto B se mueve sobre una parábola. Por otro lado, 31,25% que responden de manera correcta sobre la dirección de cambio de las coordenadas del punto B al concluir que el valor de la abscisa y la ordena aumenta, e indican que el punto B se mueve sobre una gráfica cuadrática. Ambas respuestas son correctas porque los estudiantes se están enfocando en diferentes puntos de la gráfica, que al ser una parábola cambia la variación de sus coordenadas.

De acuerdo con la *Tabla 54*, se puede apreciar que el 62,5% de los estudiantes identifican y escriben las coordenadas de los dos puntos de intersección de las gráficas de las funciones

$f(x) = \frac{-1}{5}x + 84$ y $g(x) = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$, sin embargo, el 31,23% de los estudiantes restante sólo escriben las coordenadas del primer punto de intersección.

Por otro lado, en la *Tabla 55*, se puede evidenciar que el 87,5% de los estudiantes identifican que la expresión $\frac{-1}{5}x + 84 = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$, compuesta por dos funciones, está relacionada al cálculo de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{-1}{5}x + 84$ y $g(x) = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$, y sólo el 18,75% detalla que la expresión permite calcular la abscisa del punto de intersección.

Teniendo en cuenta los tipos de respuesta *S2T2P4abR1*, *S2T2P4abR2*, *S2T2P4cdR1* y *S2T2P4cdR2* se puede apreciar que aproximadamente el 94% de los estudiantes reconocen la variación entre los valores de las coordenadas de los puntos A y B, además identifican por medio de la dirección de cambio que el punto A se mueve sobre una gráfica lineal o línea recta y el punto B sobre una parábola o gráfica cuadrática. El 30% de estos estudiantes logra reconocer cuánto cambian los valores de las coordenadas y cuantificar el crecimiento o decrecimiento de la abscisa y la ordenada, como se presenta en la figura 36.

6. 0.4 - 0.2

4. A cuando el deslizador sube la abscisa ^{sube} 1 y la ordenada baja 0.2 por ejemplo $A = (0, 84)$
 cuando el deslizador sube queda $A(1, 83.8)$

B Gráfica lineal

C al subir el deslizador la abscisa de la A sube 1 y la ordenada baja 0.2 en el punto B la abscisa sube 1 y la ordenada baja 2.98

D parábola

Figura 36. *S2T2P4abR1* y *S2T2P4cdR1*

En relación con la pregunta *S2T2P4cd* los estudiantes presentaron dos respuestas diferentes, pero correctas, sobre el cambio de los valores de las coordenadas del punto B, el primer grupo (R1) indicó que la abscisa aumenta y la ordenada disminuye haciendo referencia a la variación de las coordenadas en el brazo izquierdo de la parábola, a diferencia del segundo grupo (R2) que indicó que ambas coordenadas aumentan enfocando su atención en el cambio de los valores de la abscisa y ordenada del brazo derecho de la parábola, esto ocurre porque en la gráfica cuadrática el crecimiento y decrecimiento en los valores de las coordenadas cambia según la posición respecto al eje de simetría.

Con relación al tipo de respuesta *S2T2P5R2*, se evidencia que el 31,25% de los estudiantes sólo reconoce las coordenadas de uno de los dos puntos de intersección entre la gráfica lineal $f(x) = \frac{-1}{5}x + 84$ y la gráfica cuadrática $g(x) = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$, sus respuestas no se consideran una falta de comprensión del concepto de función o intersección de rectas, se puede aludir a una desatención o debido al uso recurrente en las tareas anteriores de funciones lineales que sólo tienen un punto de intersección.

Teniendo en cuenta el tipo de respuesta *S2T2P6R2*, el 87,50% de los estudiantes relacionan la ecuación $\frac{-1}{5}x + 84 = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$ con el cálculo de los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{-1}{5}x + 84$ y $g(x) = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$, de estos estudiantes el 18,75% lo relaciona específicamente al cálculo de la abscisa de los puntos de intersección. De estas respuestas se puede inferir que los estudiantes logran establecer y ampliar el dominio de una de las relaciones importantes entre las ecuaciones y las funciones, a

saber, que para f y g dos funcionales lineales que se intersecan, el conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$ es igual a la abscisa del punto de intersección de ambas funciones, pero en este caso no solo compete a la función lineal y ecuación de primer grado o una función lineal con una función constante como se ha trabajado en la S1 y S1T1 sino que se extiende a las funciones de segundo grado, aproximándose a la generalidad de la idea que para una función y ecuación de cualquier grado se cumple la relación anteriormente expuesta, en este sentido, la actividad matemática del estudiante se encuentra asociada a la *Matematización Vertical – Nivel General*.

Tabla 56

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 7 (S2T2P7)

Considere lo trabajado hasta el momento, justifique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(P7) Pregunta 7. Si f y g son funciones lineales y la solución de la ecuación $f(x) = g(x)$ es $x = 2$, entonces, la abscisa del punto de intersección entre las gráficas de las funciones f y g también es 2.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican que el enunciado es verdadero.	Indican que igualar dos funciones permite encontrar la abscisa del punto de intersección. (E1, E2, E3 y E12)	4	25,00%
		Escriben que, si el conjunto solución de la ecuación es 2, entonces, la abscisa del punto de intersección también es 2. (E4, E8, E10, E11 y E13)	5	31,25%
		Indican que la ecuación $f(x) = g(x)$ permite encontrar la abscisa del punto de intersección. (E7, E9, E14, E15 y E16)	5	31,25%

Potencialidades y dificultades

		Escribe que el punto de intersección es un ejemplo de la ecuación. (E6)	1	6,25%
R2	No responde. (E5)	Sin justificación. (E5)	1	6,25%

Tabla 57

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 8 (S2T2P8)

Considere lo trabajado hasta el momento, justifique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(P8) Pregunta 8. Si las gráficas de dos funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$ se intersecan en un punto, la abscisa de ese punto se puede calcular a través de la ecuación $f(x) = 0$ o la ecuación $g(x) = 0$.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican que el enunciado es falso.	Indican que para encontrar la abscisa del punto de intersección se deben igualar las funciones f y g . (E1, E2, E3, E7, E9, E11, E12, E15 y E16)	9	56,25%
		Indican que no se puede hallar la abscisa del punto de intersección entre las funciones f y g con las ecuaciones $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$. (E4, E6, E8, E10, E13 y E14)	6	37,50%
R2	No responde. (E5)	Sin justificación. (E5)	1	6,25%

Tabla 58

Tipos de respuesta de la situación 2, tarea 2 y pregunta 9 (S2T2P9)

Considere lo trabajado hasta el momento, justifique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

(P9) Pregunta 9. Para cualquier par de funciones lineales, la ecuación $f(x) = g(x)$ permite saber si las gráficas de las funciones se intersecan en un punto.

Tipo de respuesta	Descripción	Justificación	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
R1	Estudiantes que indican que el enunciado es verdadero.	Indican que la ecuación permite calcular el punto de intersección. (E1, E2, E4, E6, E9, E10, E12, E14, E15 y E16)	12	75,00%
		Indica que la ecuación permite encontrar el punto de intersección porque la dos funciones están juntas. (E7)	1	6,25%
		Indica que la ecuación permite conocer las dos funciones. (E8)	1	6,25%
		Sin justificación. (E13)	1	6,25%
R2	No responde. (E5)	Sin justificación. (E5)	1	6,25%

En la *Tabla 56* el 93,75% de los estudiantes responden de manera correcta al considerar como verdadero el enunciado propuesto en la pregunta *S2T2P7*. Para ello, el 87,50% justifica su posición a partir de enunciar alguna relación entre funciones y ecuaciones, como, por ejemplo; el conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$ es equivalente a la abscisa, o abscisas, del punto de intersección, tal como se verifica en el tipo de respuesta *S2T2P7R1* a continuación:

✓ Verdadera ya que al solucionar la ecuación nos da $x=2$ y x es la abscisa.

Figura 37. S2T2P7R1

Con relación a la *Tabla 57*, el 93,75% de los estudiantes responden de manera correcta al considerar falso el enunciado propuesto en la pregunta *S2T2P8*. Como argumentos, el 56,26%

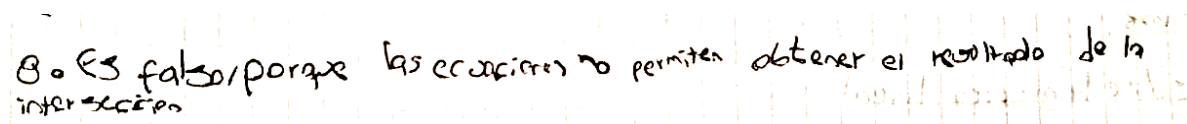
Handwritten text in Spanish: "Es falso porque las ecuaciones no permiten obtener el resultado de la intersección". The text is written in black ink on a white background with faint horizontal lines.

Figura 38. S2T2P8R1

indican cuales son los miembros de la ecuación $f(x) = g(x)$, como aquella que permite calcular la abscisa del punto de intersección entre f y g , el 37,50% lo hace expresando que las ecuaciones $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$ no permiten calcular dicho punto de intersección, como se presenta en la siguiente figura:

Con relación a la *Tabla 58*, el 93,75% de los estudiantes responden de manera correcta al considerar verdadero el enunciado propuesto en la pregunta S2T2P9. El 87,50% reconoce que la $f(x) = g(x)$ permite calcular el punto de intersección entre las funciones f y g , añadiendo que en la ecuación se considera la igualdad de ambas funciones, o bien, que se consideran ambas funciones.

Considerando que, uno de los objetivos con el conjunto de preguntas S2T2P7, S2T2P8 y S2T2P9 era enfrentar a los estudiantes a enunciados susceptibles de ser válidos, o no, y que aflorara en ellos reflexiones sobre relaciones entre la ecuación $f(x) = g(x)$, las funciones lineales f y g y el punto de intersección entre ellas, se evidencia, a través de los tipos de respuestas S2T2P7R1, S2T2P8R1 y S2T2P9R1, que más del 90% de los estudiantes actúa acertadamente con relación a los requerimientos y exigencias en dichas preguntas, abordando los conceptos de ecuación, función lineal y punto de intersección de forma articulada y con diversas expresiones acerca de las relaciones entre ellas, especialmente la relación entre abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones lineales f y g y la ecuación $f(x) = g(x)$, a

saber; la abscisa del punto de intersección entre dos funciones lineales f y g es equivalente al conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Por un lado, en el tipo de respuesta *S2T2P7R1* se evidencia que los estudiantes comprenden un primer sentido de la equivalencia anterior. Estos determinan que, si el conjunto solución de una ecuación $f(x) = g(x)$ es $x = 2$, entonces, la abscisa del punto de intersección entre las funciones lineales f y g también lo es. La conciencia de esta implicación advierte, necesariamente, que los estudiantes deben inscribir en su razonamiento al menos dos premisas, a saber; las funciones f y g son lineales o al menos una lo es y la otra es una función constante; la unicidad del punto de intersección. En cualquier caso, los estudiantes hacen uso de los desarrollos conceptuales y procedimentales que han tenido lugar a lo largo del desarrollo de la *Situación 2*, la cual, a su vez, se nutre de los acercamientos y desarrollos de la *Situación 1*, especialmente aquellos que están ligados a las relaciones entre función lineal y ecuación de primer grado.

Por otra parte, la segunda implicación se puede rastrear a partir del tipo de respuesta *S2T2P8R1*. En este momento, los estudiantes determinan que la abscisa del punto de intersección entre dos funciones lineales está dada a partir de la ecuación $f(x) = g(x)$, esto, a través de un ejercicio evaluativo que conduce a los estudiantes a reconocer que las expresiones propuestas ($f(x) = 0$ y $g(x) = 0$) no permiten conocer la abscisa del punto de intersección entre la gráfica de las dos funciones lineales, para lo cual recurren a lo desarrollado a lo largo de la *Situación 1* y la *Situación 2* que la expresión que permite conocer dicha coordenada es la ecuación $f(x) = g(x)$.

Posterior a eso, en la pregunta *S2T2P9* se trata de evidenciar que los estudiantes reconocen esta doble implicación o equivalencia como información que hace parte de sus esquemas mentales de pensamiento, esto, a través de la confrontación con una consecuencia inmediata de la equivalencia, como lo es que; para cualquier par de funciones lineales f y g , la ecuación $f(x) = g(x)$ permite saber si las gráficas de estas se intersecan en un punto o no. En efecto, más del 87% de los estudiantes reconoce esta consecuencia como válida, lo que sugiere un nivel de apropiamiento de la relación que se menciona como la doble implicación o equivalencia entre la abscisa del punto de intersección entre dos funciones lineales f y g y el conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Considerando los resultados de la implementación de la segunda situación y tomando como soporte teórico los niveles de matematización de la EMR, se concluye que las tareas desarrolladas en la *Situación 1* permitieron a los estudiantes a reflexionar sobre algunas relaciones entre ecuaciones y funciones desde un contexto realista que contribuyó al logro de avances significativos sobre estas relaciones en un contexto matemático aproximándose a acciones particulares de la *Matematización Vertical - Nivel General* en el desarrollo de la *Situación 2*.

En la *Tarea 1* se esperaba que los estudiantes reconocieran, comprendieran y realizaran conjeturas sobre la situación problema acerca de los ingresos en las ventas diarias de la tienda de doña Florinda por medio de la caracterización de la función asociada ($f(x) = 280.000 - 5000x$). De acuerdo con esto se observó en las respuestas que la mayoría de los estudiantes logró matematizar la problemática por medio del reconocimiento de regularidades,

establecimiento de relaciones entre cantidades variables que dependen entre sí y la identificación de los cambios y su dirección cambio en los valores de las coordenadas de un punto con el apoyo de GeoGebra y los procesos de visualización y acciones de arrastre que permitieron aproximarse a la función que modela la situación.

La actividad matemática del estudiante en la *Tarea 1* está asociada a la *Matematización Horizontal – Nivel Situacional* por la identificación de patrones, cantidades y cambios esbozando algunos procesos de modelación y la transformación de una problemática real a un problema matemático para aproximarse a la relación entre ecuación y función de primer grado por medio de un ambiente de geometría dinámica. Además, se evidencia el tránsito hacia la *Matematización Vertical – Nivel Referencial* al usar y caracterizar el modelo funcional $f(x) = 280.000 - 5000x$ para comprender la situación por medio del establecimiento de relaciones entre el ingreso total en ventas diarias y el número de días.

En esta tarea el 62,50% de los estudiantes precisan una de las relaciones entre ecuación y función que se trabajó en la *Situación 1*, a saber, que para dos funciones lineales f y g que se intersecan la ecuación $f(x) = g(x)$ permite hallar la abscisa del punto de intersección, esto se evidencia en las respuestas a la pregunta *S2T1P5CR1* en el que están haciendo uso de la relación general de manera particularizada, dentro del contexto de los ingresos de doña Florinda, cuando indican que la ecuación permite calcular el número de días haciendo referencia de forma implícita a la abscisa del punto A.

En relación con la *Tarea 2* se parte de un contexto netamente matemático que permitió caracterizar las relaciones entre ecuaciones y funciones de primero y segundo grado de forma general, a diferencia de las anteriores situaciones en las que se usaban las relaciones de manera

implícita a través de contextos realistas, en este caso, las preguntas propuestas cumplían con características de la *Matematización Vertical – Nivel Referencial y Nivel General* de la EMR.

Se puede concluir que en la *Tarea 2* una gran parte de los estudiantes identificó la variación entre los valores de coordenadas y las relaciones de dependencia entre cantidades para caracterizar algunos modelos lineales y cuadráticos particulares de una situación, pero no propios de un contexto, de manera que, los procesos de medición y cuantificación de los cambios presentes entre los valores de las coordenadas, la particularización de los puntos de intersección y lo trabajado en las tareas anteriores contribuyeron a que los estudiantes concretaran una de las relaciones entre ecuación y función de primer grado, como se evidencia en las respuestas de los estudiantes a la pregunta *S2T2P3a* en la que expusieron que la ecuación $3x - 6 = 10 - x$, compuesta por dos funciones, permite hallar la abscisa del punto de intersección de las funciones lineales $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = 10 - x$, exhibiendo un dominio conceptual y pragmático de dicha relación entre funciones y ecuaciones de primer grado.

En consecuencia, en la *Tarea 2* relacionado a las preguntas *S2T2P4ab*, *S2T2P4cd*, *S2T2P5* y *S2T2P6* se propuso un salto cualitativo de lo desarrollado anteriormente respecto a las ecuaciones y funciones de primer grado hacia la caracterización de ecuaciones y funciones de segundo grado con la intención de profundizar en el carácter general de estas relaciones descritas durante la secuencia didáctica. Esto permitió el tránsito hacia acciones del estudiante relacionadas con *Matematización Vertical – Nivel General*, dado el uso de GeoGebra que facilitó el trabajo interactivo y dinámico de las representaciones para que de esta manera los estudiantes

realizarán procesos de exploración y reflexión asociada a la idea del punto de intersección para aproximarse a una generalización de la relación entre ecuación y función.

Teniendo en cuenta las respuestas de las preguntas *S2T2P7*, *S2T2P8* y *S2T2P9* de la *Tarea 2* se puede afirmar que más del 90% de los estudiantes realizaron inferencias correctas acerca de tres relaciones entre las ecuaciones y funciones que se derivan de la relación que se trabaja en profundidad en las tareas con contexto, esto es, la abscisa del punto de intersección entre dos funciones lineales f y g es equivalente al conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

De acuerdo con lo anterior, se concluye que se dio cumplimiento a los propósitos de la *Situación 2*, se abordaron de manera articulada los conceptos de ecuación de primero y segundo grado, función lineal y cuadrática y punto de intersección con el fin de caracterizar el modelo de función (lineal o cuadrática) a partir de la consciencia de lo que varía y las relaciones de dependencia para concretar la relación entre ecuación y función a través de un ambiente de geometría dinámica como ejercicio práctico del saber hacer de los estudiantes y su actividad matemática asociada a la idea del punto de intersección para aproximarse a una generalización de la relación.

Capítulo IV. Conclusiones generales y reflexiones

En el siguiente capítulo se presentan las conclusiones teniendo en cuenta el objetivo general y los objetivos específicos, como consecuencia de la implementación de la propuesta de aula o secuencia didáctica desarrollada a partir de la articulación entre los referentes teóricos propuestos en el marco de referencia conceptual. También, se presentan las reflexiones que suscita el presente trabajo con relación a la práctica investigativa, los desarrollos alcanzados por los proponentes del presente trabajo, los resultados y logros en el trabajo de los estudiantes involucrados en la investigación.

4.1. Conclusiones generales

Con relación al objetivo específico que propone: “fundamentar desde una perspectiva curricular, didáctica y matemática el problema de investigación relacionado con el establecimiento de la relación entre ecuación y función de primero grado”, se permite llegar a las siguientes conclusiones:

- La potencia didáctica, metodológica y conceptual de las diversas investigaciones propuestas en las tres diferentes perspectivas de referencia, asociadas a la modelación y los procesos de matematización, el desarrollo del pensamiento variacional, el aprendizaje del álgebra, las ecuaciones y las funciones; vinculadas a un enfoque funcional, develan la riqueza de los objetos matemáticos ligados al estudio del álgebra y los sistemas analíticos, además, permiten desarrollos prácticos en la enseñanza y el aprendizaje de las

matemáticas, lo que favorece la administración de recursos en el ejercicio de la práctica profesional del docente de matemáticas al permitirle considerar y pensarse diferentes estrategias y enfoques metodológicos para la enseñanza, particularmente del álgebra en la escuela. En relación con lo anterior, el propósito de potenciar el pensamiento variacional y el establecimiento de relaciones entre ecuación y función de primer grado a través de tareas organizadas y secuenciadas permitieron que los estudiantes analizaran diferentes modelos, ascendieran en la consideración de ciertas relaciones entre ambos objetos matemáticos y construyeran procesos argumentativos mucho más completos con relación a los modelos lineales y las ecuaciones de primer grado.

- Las investigaciones propuestas permiten reflexionar sobre cómo el desarrollo del pensamiento variacional y sus implicaciones didácticas se articulan ampliamente con la modelación y un proceso de matematización progresiva, toda vez que; facilita la orquestación de diferentes acciones cognitivas por parte de los estudiantes y la caracterización de la actividad matemática del estudiante por parte del profesor a través de diferentes niveles de complejidad. De acuerdo con nuestro interés investigativo, estas investigaciones condujeron a establecer y formular estrategias de análisis de la actividad matemática de los estudiantes al identificar, por un parte; los diferentes errores y dificultades asociadas al trabajo y manipulación de las ecuaciones y funciones de primer grado asociadas al pensamiento variacional, y por otra; los avances alcanzados por los estudiantes respecto a la manera en que estos formulan y utilizan diferentes

modelos lineales y articulan el carácter variacional de estos con las ecuaciones de primer grado.

- Lo evidenciado respecto a la forma de concurrir entre los diversos referentes del marco teórico como los conceptos de ecuación y función de primer grado, el estudio del álgebra, la modelación y los procesos de matematización, la enseñanza del álgebra y errores y dificultades en su aprendizaje, los contextos cotidianos y el pensamiento variacional, entre otros elementos teóricos, posibilitan considerar la estructuración de las relaciones visibles entre el concepto de ecuación y función lineal a través de su manipulación en contextos de la vida cotidiana y netamente matemáticos, teniendo como eje articulador la modelación.

Al considerar el objetivo específico de “articular en una propuesta de aula los resultados de la fundamentación estudiados desde las perspectivas curricular, didáctica y matemática”, se puede determinar que:

- La secuencia didáctica diseñada y destinada para contribuir al estudio del álgebra y el establecimiento de relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado a partir de los contextos como el de la primera situación acerca de un plan móvil y el cobro por minutos consumidos, y el contexto de la segunda situación que considera una tienda de barrio y sus ingresos económicos, correspondientes a expresiones de la vida cotidiana, responden a la articulación de las tres perspectivas consideradas como un producto terminado, el cual favorece el

estudio de modelos funcionales en contexto, su uso e interpretación como herramientas poderosas de análisis de la realidad.

- La cohesión estructural de las dos situaciones que componen la secuencia didáctica, desarrolladas a partir de un orden relativo a la articulación entre los referentes teóricos y lo relevante en relación con los procesos de matematización y el estudio del álgebra, posibilitó la consecución de un producto didáctico terminado como una opción que a lo mejor, por un lado; aportar a la práctica de los docentes de matemáticas como consecuencia del orden secuencial y ascendente de las tareas y situaciones, toda vez que configuran una manera de plantear el estudio de relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado articulada a procesos de matematización progresiva, y por otro lado; contribuye al desarrollo de competencias matemáticas, comprensión de objetos matemáticos complejos y habilidades de análisis en los estudiantes, en tanto la transición de lo relativo a lo familiar y particular hacia lo abstracto y formal se presenta más accesible a los estudiantes. En consideración con las dinámicas del sistema de educación nacional en Colombia, las investigaciones exhibidas en los antecedentes y la experiencia de los proponentes del presente trabajo, no se destacan avances significativos en el desarrollo de metodologías o recursos didácticos que constituyan un aproximación al establecimiento de relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado, particularmente; por lo cual se realiza un ejercicio de diseño de una propuesta de aula en coordinación con avances teóricos como la EMR, con el fin de presentar un recurso didáctico terminado que atienda a las necesidades de los estudiantes y el desarrollo de bases estables para enfrentar

situaciones problemas asociadas a procesos de modelación y el uso de modelos lineales puestos en relación con ecuaciones de primer grado.

Al considerar el objetivo específico relacionado con: “caracterizar las relaciones que establecen los estudiantes de grado noveno de la educación básica entre ecuaciones y funciones de primer”, se concluye que:

- La estructura de la secuencia didáctica, la cual se conduce bajo los elementos teóricos recogidos en las perspectivas curricular, didáctica y matemática, fue determinante para que la actividad matemática de los estudiantes se originara a partir de sus experiencias y formación previa como una actividad preactiva y coherente para avanzar en sus procesos de formación y el desarrollo de dicha secuencia, al involucrarse activamente en los procesos de modelación, descripción, uso e interpretación de modelos lineales presentes en las situaciones cercanas a la realidad como premisas de un análisis en contexto, susceptible de ser generalizadas. Adicional a lo anterior, a través de la implementación de la propuesta de aula fue posible señalar y caracterizar la actividad matemática de los estudiantes a raíz de las respuestas presentadas por ellos y cómo estos se aproximaron, mediante acciones relativas a la manipulación de ecuaciones y funciones de manera sincrónica, a establecer relaciones entre ambos conceptos, lo que hizo posible determinar las diferentes formas de comprensión de las situaciones problema realistas y los niveles de matematización para modelarlas.

- Con relación a los niveles de comprensión de la EMR se logra precisar que los contextos y situaciones problemáticas realistas favorecieron y dinamizaron en todo momento la generación de la actividad matemática de los estudiantes, lo cual les condujo a desarrollar las diferentes tareas de las situaciones presentadas en la propuesta de aula con bastante suficiencia. A partir de estos niveles se pudo caracterizar que los estudiantes, al enfrentar aquellas preguntas iniciales que permitían fundamentar las características de las situaciones problemáticas realistas y alcanzar un grado necesario de consciencia sobre ellas, ejecutaban de forma adecuada y transversal a todo el proceso de modelación acciones referentes al *Nivel Situacional*. Adicionalmente, la mayoría de los estudiantes pudo desarrollar las preguntas referentes al *Nivel Referencial* al manipular e interpretar cómo los diferentes esquemas, representaciones o *modelos de* cobraban sentido al interior de las situaciones y permitían efectuar conclusiones parciales de ellas, nivel desde el cual las primeras relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado aparecen y se desarrollan. En relación con las preguntas de *Nivel General*, la mayoría de los estudiantes realizan muy buenas aproximaciones al considerar relaciones entre ecuaciones y funciones como premisas en el desarrollo de las preguntas referentes a este nivel, lo que a su vez hizo posible un salto hacia reflexiones de carácter general sobre dichas relaciones, exhibiendo un puente entre aquello que depende de un contexto o situación particular a la transversalidad de las relaciones propuestas en diferentes contextos asociados a ecuaciones y modelos funcionales de diferente grado.

- Fomentar el estudio de relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado a partir de procesos de modelación y la función como relación de dependencia, favoreció al desarrollo, comprensión y el análisis de situaciones problemáticas que precisan modelos lineales, sus características y propiedades, tal como se hizo necesario en las situaciones de la propuesta de aula. Referente a lo anterior, sobre las expresiones algebraicas o analíticas se hizo hincapié en la caracterización de los parámetros, las variables (dependiente e independiente) y la definición de ecuación a partir de funciones lineales y/o constantes. En relación con los registros de representación, el registro tabular condujo al reconocimiento de patrones y regularidades, el estudio de las cantidades que varían, aquellas que no y la coordinación de la dependencia entre variables; el registro gráfico o cartesiano hizo posible la cualificación y cuantificación de la tendencia y el cambio en los modelos funcionales, y la caracterización del lugar (o lugares) geométrico donde convergen los conceptos de ecuación y función. Estos elementos abordados en la propuesta de aula y desarrollados por los estudiantes componen aspectos característicos de la relación entre ecuaciones y funciones, particularmente de primer grado.
- De acuerdo con las situaciones 1 y 2 de la propuesta de aula y su carácter propositivamente ascendente en complejidad, favorece que la gran mayoría de los estudiantes logran determinar relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado, en un primer momento como un ejercicio de coordinación entre el uso

necesario del modelo lineal y el paso hacia la ecuación para realizar precisiones acerca de la situación problemática; y en un segundo momento expandir dichas relaciones a niveles más generales referentes a las ecuaciones y funciones de primer grado. En este sentido, los estudiantes articulan las relaciones relativas a una situación problemática como ejercicio ejemplificante para construir condiciones necesarias o suficientes para realizar un salto cualitativo hacia lo general, es decir, la actividad de razonamiento es inductiva.

Al considerar lo anterior y el objetivo general que propone “Contribuir al establecimiento de relaciones entre las ecuaciones y funciones de primer grado en estudiantes de grado noveno en educación básica a través de una propuesta de aula que integra procesos de modelación”, se concluye que la organización estructural de la propuesta de aula, compuestas por dos situaciones y asociada a procesos de modelación en la EMR, favoreció la producción intelectual de los estudiantes como consecuencia de la elaboración, comparación y análisis de modelos funcionales necesarios para abordar las situaciones problemáticas realistas, la comunicación de saberes, la ejercitación de procedimiento y conocimientos básicos.

A partir de lo propuesto en la secuencia didáctica, los procesos de matematización y la actividad matemática registrada de los estudiantes, se encontraron en el análisis elementos característicos del pensamiento variacional, de las ecuaciones y funciones de primer grado, las cuales posibilitaron el establecimiento de relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado. En relación con los procesos de matematización, las representaciones e imágenes mentales que constituían modelos personales para cada estudiante, se pudo considerar las diferentes estrategias, formas y perspectivas de cómo se entendía la variación y las relaciones establecidas entre cantidades, a partir, por ejemplo, de sus expresiones como “aumenta una

décima y la otra disminuye lo mismo”, “cambia”, “es constante”, entre otras, la producción escrita y los modelos funcionales expresados a través de notación algebraica.

Adicionalmente a lo anterior, se evidenció en la mayoría de los estudiantes acciones de coordinación entre los modelos funcionales y las ecuaciones; cómo a través del tránsito de una expresión algebraica a otra (función o ecuación) permitía conseguir reflexiones importantes acerca de la información que se desprende de cada una de ellas y la verbalización de lo representado; la tendencia o la dirección del cambio, la razón de cambio, la consciencia de la posibilidad de intersección, entre otras acciones, que hizo posible reportar que los estudiantes precisaban de una comprensión adecuada respecto a la relación general entre ecuación y función, a saber; la ecuación como consecuencia de la igualdad entre dos funciones, y que, en coordinación con los análisis de las gráficas de dos funciones que se intersecan, se derivaran otras relaciones como; la equivalencia entre la abscisa del punto de intersección y conjunto solución a la ecuación $f(x) = g(x)$. En consecuencia, con los elementos descritos se concluye que fue posible abordar y dar respuesta a la pregunta de investigación.

Con relación al crecimiento personal de los investigadores se concluye que el nivel de profundización sobre los objetos matemáticos en cuestión contribuyó al aumento de nuestras competencias profesionales como docentes, la implementación de la propuesta de aula y el análisis de los datos fundamentan cada vez más las estrategias metodológicas y recursos a considerar en el aula. La posibilidad de recoger diferentes investigaciones, acercamientos y desarrollos teóricos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra, a través del trabajo investigativo, configuró una gran experiencia académica que afianzó el campo perceptivo y

agudizó nuestra sensibilidad con relación a las diferentes problemáticas circundantes en el campo de la educación matemática, promoviendo mejores hábitos investigativos, criterios adecuados y precisos en la selección de información, la organización y análisis de datos.

La articulación del marco teórico, el diseño e implementación de la propuesta, acrecentaron nuestra comprensión de la labor docente, la cual se conduce bajo la multiplicidad de acciones y diferentes frentes de la educación; investigativa, didáctica, metodológica, procedimental, social, entre otras.

4.2. Algunas reflexiones

En el siguiente espacio se presentan las siguientes reflexiones derivadas del trabajo investigativo:

- Generar una problemática que relacione los saberes incompletos de los estudiantes, que coincida precisamente con preguntas que ellos ya se habían hecho pero no fueron abordadas a partir de las matemáticas cotidianas y el contexto social y cultural de la población a intervenir, articulada a una propuesta de aula bien secuenciada, abre la posibilidad de atender las necesidades cognitivas de los estudiantes y brindar respuestas a sus dudas, poniendo en juego los conocimientos matemáticos previos y haciendo cada vez más estrecha la relación entre las matemáticas cotidianas con las formales. En este sentido, el diseño de materiales o recursos para intervenir en el aula, como la secuencia didáctica, requiere de un conocimiento profesional adecuado, que con el paso del tiempo puede ir creciendo y ser reestructurado, de tal forma que permita al docente ser consciente de ciertas decisiones didácticas y mejorar sus prácticas profesionales.

- El estudio de las relaciones entre ecuaciones y funciones de primer grado a partir de situaciones problemáticas realistas y los procesos de modelación, constituyen un aspecto relevante y potente en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente del álgebra, ya que permite a los estudiantes realizar avances con relación a la producción de modelos funcionales a través de la observación e identificación de regularidades y patrones, la predicción, verbalización y discusión de reflexiones sobre implicaciones pragmáticas de los modelos, lo que a la postre conduce a la caracterización de conceptos matemáticos con significado, además la formulación de relaciones y propiedades asociadas a las características compartidas entre uno y otro conceptos (ecuación y función). En consecuencia, es necesario que los estudiantes puedan experimentar la construcción de modelos funcionales a través de procesos de matematización articulado con la caracterización de características entre conceptos estrechamente relacionados, como es el caso de las ecuaciones y funciones.
- Determinar los elementos característicos de los objetos matemáticos a través de su evolución histórica, las diferentes definiciones y enfoques que los circundan, un ejercicio investigativo adecuado sobre los diferentes enfoques y metodología de su aprendizaje y enseñanza posibilita y nutre los diseños y propuestas de aula a un alto grado de especificidad. En este sentido, fundamentar la propuesta a partir de diferentes teorías y enfoques metodológicos suscita la reflexión acerca de la importancia de abordar un objeto matemático y su consolidación a través de una

propuesta de aula, como una actividad preactiva y transversal a toda la práctica profesional del docente, que represente una ampliación a su abanico de posibilidades para enseñar a aprender matemáticas.

- La secuencia didáctica presentada puede ser considerada como una herramienta para el estudio de las relaciones entre ecuación y función de primer grado, susceptible de ser reestructurada o ampliada para atender diferentes situaciones problemáticas que demanden de modelos funcionales de grado mayor a 1 y avanzar en la generalización de dichas relaciones, en todo caso, la organización de las situaciones y las preguntas, permiten realizar un trabajo ascendente referentes a los niveles de matematización de la EMR. Además, este trabajo puede ser útil como punto de partida para ahondar sobre la caracterización de relaciones entre conceptos relacionados como las ecuaciones y las funciones, o en su defecto, reflexionar sobre las dificultades que llegan a circular en esta propuesta de aula a partir de otro tipo de enfoques o perspectivas didácticas.
- La intervención y el desarrollo de investigación realizada en la IE Escuela Normal Superior Farallones de Cali fomentó en los estudiantes el desarrollo de competencias ajustadas al marco educativo de referencia nacional, acciones propias de los procesos de matematización y el desarrollo del pensamiento variacional, además enriqueció nuestra práctica profesional y reflexiva frente a las dinámicas reales de un entorno educativo. Por otra parte, este estudio favoreció las competencias matemáticas de los estudiantes y atendió algunas necesidades intelectuales insatisfechas, procedentes de grados anteriores y quizás como consecuencia de la reciente crisis sanitaria (COVID), lo que es un aliciente para la

formación matemática de los estudiantes y un apoyo en las prácticas profesionales de los docentes de la institución.

- Los retos que se afrontaron en la consecución del presente trabajo de instigación, el proceso de elaboración de la secuencia didáctica, su implementación y los análisis de los datos, nos invitan a considerar lo denso, amplio y diverso que resulta la formación y práctica docente, lo importante de adquirir competencias profesionales sensibles al contexto social y cultural de nuestros estudiantes, el desarrollo metódico de los aspectos formales de un trabajo de investigación y las oportunidades de crecimiento integral junto con las dificultades que ello conlleva, como elementos distintivos de la profesión. En este sentido, es menester sugerir que el presente trabajo, así como sus elementos constitutivos como la secuencia didáctica, quedan abiertos a observaciones, modificaciones y críticas que permitan mejorar en todo sentido dicho trabajo de investigación, para de esta manera seguir nutriendo los desarrollos y la consolidación de recursos didácticos de altísima calidad, en este caso, recursos que permitan una mejora en el acercamiento, articulación y comprensión de los conceptos de ecuación y función que a la postre orienten el establecimiento de relación entre ambos conceptos.

Referencias Bibliográficas

- Azcárate, C. Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid. España. Editorial Síntesis, S.A.
- Bressan, A. Gallego, M. (2011, octubre, 18-20). Educación Matemática Realista Bases teóricas. Trabajo presentado en III Congreso Nacional de Matemática y Problemáticas de la Educación Contemporánea del Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática en Santa María, Prov. de Catamarca. Argentina.
- Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016) Educación Matemática Realista Bases Teóricas. GPDM. Bariloche- Argentina.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.
- Cuellar, A. (2014). *Un acercamiento a través del lenguaje de programación TI-BASIC a la variable como relación funcional: un estudio de caso con estudiantes de grado 9 de la educación básica*. (Trabajo de grado para optar el título de Licenciatura en Matemáticas y física). Universidad del Valle, Cali.
- Cuevas Vallejo, C. A., Delgado M. P., Martínez M.R. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y el concepto de función real. [A proposal to introduce functional

thinking and the real function concept, prior to a course of differential calculus]. *Revista Logos, Ciencia & Tecnología*, 10(2), 20-38.

De la Fuente, A., & Deulofeu, J. (2022). Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(72), 389-410.

Echeverri, G. Sombrerero, N. (2014). *Dificultades en el aprendizaje de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales enseñados en grado noveno*. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en Educación básica con énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali.

Font, V. (2008, febrero). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. Trabajo presentado en el III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Perú. Lima, Perú.

Galeano, O. Váquiro, L. (2016). *Una propuesta didáctica para la resolución de ecuaciones de primer grado como relación de equivalencia utilizando el modelo virtual de la balanza*. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en Educación básica con énfasis en Matemáticas). Universidad del Valle, Cali.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/1, n° 52, pp. 7-33.

Guerrero, F. Lurduy, O. Neila, S. (2006, marzo, 29-31). La práctica docente a partir del modelo DECA y la teoría de las situaciones didácticas. Trabajo presentado en Quinto festival internacional de matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Henao, S. Vanegas, D. (2012). *La modelación matemática en la educación matemática realista: un ejemplo a través de la producción de modelos cuadráticos* (Trabajo de grado para optar el título de Licenciatura en Matemáticas y física). Universidad del Valle, Cali.

Kieran, C. Boileau, A. Garançon, M. (1996) Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In approaches to algebra: Perspectives for research and teaching (pp. 257-293). Dordrecht: Springer Netherlands.

López, H. Messa, J. (2013). *Una aproximación a la noción de ecuación lineal en grado noveno*. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en Matemáticas y física). Universidad del Valle, Cali.

López, J. Rodríguez, J. (2010). Álgebra lineal. Universidad de los Andes: Bogotá, Colombia.

López, J. Sosa, L. (2008). *Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato*. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 308-318). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos en Competencias Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Novembre, A. (2005). Las letras, las ecuaciones y las funciones. (Informe de actividades abiertas). Dirección Nacional de Información y Evaluación de Calidad Educativa.
- Martinez, H. Sanabria, A. (2014). *Álgebra lineal*. Programa Editorial Universidad del Valle.
- Muelas, G. Velasco, M. (2018). *Errores que presentan los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Alejandro de Humboldt de Popayán, al desarrollar ejercicios sobre función cuadrática y ecuación cuadrática*. (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en Matemáticas). Universidad del Cauca, Popayán.
- Muelas, J. (2014). *Estrategias de enseñanza de ecuaciones y funciones matemáticas mediante el texto conceptual y el uso de las tics en estudiantes del grado noveno de la institución educativa El Palmar, Santander de Quilichao – Cauca*. (Tesis de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales. Universidad Nacional de Colombia). Palmira, Colombia.
- Posso Torres, J. (2020). Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática. (Tesis de maestría en educación, con énfasis en educación matemática). Universidad del Valle. Cali.

Rodríguez, J. (2018). *La creación de problemas como medio para comprender la relación de las ecuaciones cuadráticas con las funciones cuadráticas*. (Tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas), Pontificia Universidad católica del Perú. San Miguel, Lima.

[https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/13364/RODRIGUEZ_BARRENECHEA_JUAN_JOS%
c3%89.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/13364/RODRIGUEZ_BARRENECHEA_JUAN_JOS%c3%89.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Editorial Santillana (2007). *Seis: Ecuaciones de primer y segundo grado*. Editorial Santillana, 2007.

Salett, M., Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Revista Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, agosto, pp. 105-125. Grupo Santillana México Distrito Federal, México.

Sánchez, N. (2014, Noviembre 24- 25). Análisis de errores asociados a la resolución de ecuaciones de primer grado. Una aproximación desde la zona de desarrollo próximo. Trabajo presentado en las XVIII jornadas de educación matemática de Universidad de Santiago de Chile, Santiago de Chile.

Socas, M. (1996). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la educación secundaria. En: Rico, L. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (Ed.p. 125-154), España: Universidad de la Laguna.

Torres, L. (2005, Octubre 13-16). Relación entre ecuaciones y funciones: la teoría de ecuaciones vs la teoría de funciones. *Trabajo presentado en el 7º encuentro colombiano de*

matemática educativa de Asociación colombiana de matemática educativa, Universidad pedagógica tecnológica de Colombia. Tunja, Colombia.

Torres, L. (2010). *Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela* (Tesis de maestría en educación con énfasis en educación matemática). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In *Anis eletrônicos do CIAEM-conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau (Vol. 9).

Velasco, M. (2011). Aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurirregistro (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Anexos

A. Anexo: La propuesta de aula

Situación 1: Plan móvil, ecuaciones y funciones de primer grado

Javier es un empresario dedicado a la comercialización de productos estéticos y actualmente tiene contratado un servicio de internet móvil de hasta 50 GB por un precio mensual inicial de \$50.000 mensuales con la compañía telefónica Claro S.A. La comunicación que sostiene Javier con sus clientes, amigos y familiares es frecuentemente por llamadas telefónicas y en este plan, por cada minuto consumido en llamadas realizadas a cualquier operador el precio total de la factura incrementa \$80. Esto le ha generado precios elevados cada mes y está pensando en cambiarse de operador o de plan.

Ayudemos a Javier a entender cómo está cambiando el precio total de su factura.

Tarea 1. Comprendiendo la situación.

Teniendo en cuenta la información anterior responde:

1. Indica las cantidades que intervienen en la situación.
2. Camilo, un estudiante de grado decimo, ha dicho que una forma para la cual el precio total de la factura sería menor a \$50.000 es cuando Javier no consume ningún minuto. Explica la validez de esta afirmación.
3. Calcula el precio total de la factura cuando Javier ha consumido:
 - a. 0 minutos.
 - b. 30 minutos.
 - c. 120 minutos.
4. Si el valor total de la factura es de \$51.200, responde:
 - a. Escribe cuántos minutos ha consumido Javier.
 - b. Explica cómo calculaste.

Tarea 2. Plan móvil y cantidades constantes y variables.

1. Considera la situación anterior y completa la siguiente tabla:

Tabla 1. Relaciones entre cantidades que determinan el precio total de la factura

<i>Minutos consumidos</i>	<i>Precio mensual inicial (pesos)</i>	<i>Precio por minuto consumido (pesos)</i>	<i>Precio total por minutos consumidos (Pesos)</i>	<i>Precio total de la factura (Pesos)</i>
0				
2			160	
8				50.640
14		80		
35			2.800	
41	50.000			
59				54.720
70				

2. Teniendo en cuenta la información de la tabla, indica:
- Las cantidades constantes.
 - Las cantidades que varían.
3. Teniendo en cuenta la información de la tabla, escribe:
- De que depende el precio total por minutos consumidos.
 - De que depende el precio total de la factura.
 - La manera como calculaste el precio total por minutos consumidos.
 - La manera como calculaste el precio total de la factura.
4. Si x representa la cantidad de minutos consumidos, escribe una expresión que permita calcular:
- El precio total por minutos consumidos
 - El precio total de la factura.
5. Camilo propone la siguiente expresión para calcular el precio total de la factura:

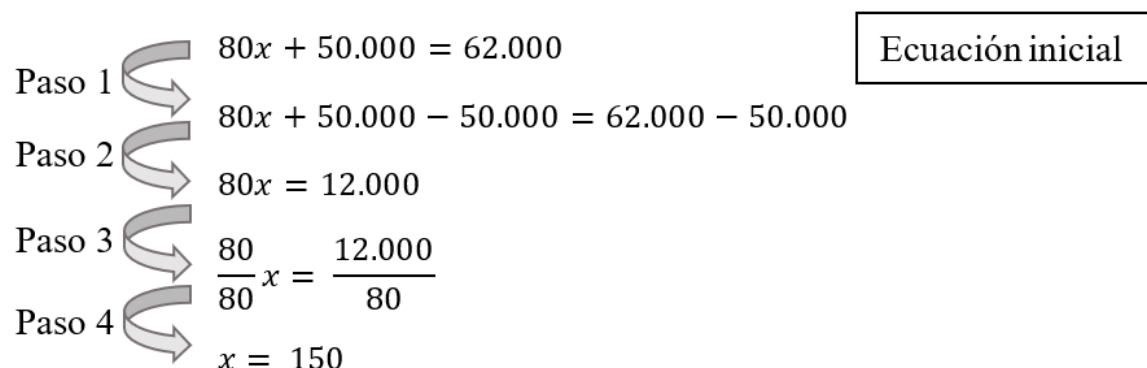
$$\text{Precio total de la factura} = 80x + 50.000.$$

- Justifique si la expresión que propuso Camilo es correcta.

Potencialidades y dificultades

- b. Calcule el precio total de la factura cuando Javier ha consumido 8 y 59 minutos.
 - c. Explica si x puede tomar valores como $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{4}$.
6. Si el precio total de la factura es de \$62.000,
- a. Calcula la cantidad de minutos consumidos.
 - b. Explica cómo lo calculaste.
7. Camilo realiza el siguiente procedimiento para calcular la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de la factura es de 62.000.

Figura 1. Procedimiento para calcular la cantidad de minutos consumidos cuando el precio de la factura es de 62.000



Teniendo en cuenta el procedimiento anterior:

- a. Indica qué hizo en el paso 1.
- b. Indica si el procedimiento que hizo Camilo en el paso 3 es válido y justifica.
- c. Explica a qué corresponde el valor obtenido de la x .
- d. Reemplaza el valor de la x en la ecuación inicial e indica que se obtiene.

En la expresión, $y = 80x + 50.000$, la x representa cualquier cantidad de minutos consumidos, y representan el precio total de la factura, por lo tanto, Javier puede utilizar esta expresión para conocer en cualquier momento el precio total de la factura en el mes dependiendo de los minutos que consuma, es decir, los valores de y dependen de x . En esta expresión funcional, la x varía en el conjunto de todos los minutos posibles que consuma Javier.

Por otra parte, en la expresión $80x + 50.000 = 62.000$, la x representa una sola cantidad de minutos desconocida para los cuales el precio total de la factura que debe pagar Javier es de \$62.000, es decir, x es una incógnita. Javier puede utilizar esta expresión cuando sabe que debe pagar \$62.000 y quiera conocer cuántos minutos consumió.

Tarea 3. Comparando planes móviles a través de la intersección.

Javier insiste en retirarse de Claro S.A, por esta razón le ofrecen otro plan para que pueda elegir entre el plan actual y el plan b.

En la siguiente tabla se presenta la información de los dos planes.

Tabla 2. Información del plan actual y plan b

Plan	Contiene	Precio mensual inicial
Actual	50 GB + \$80 por minuto consumido	\$50.000
B	50 GB + \$30 por minuto consumido	\$60.000

1. Considerando la información de los planes,

a. Completa la siguiente tabla:

Tabla 3. Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b

Minutos consumidos	Precio total de la factura del Plan actual (\$)	Precio total de la factura del Plan b (\$)	Diferencia entre el precio total del plan actual y del plan b (\$)
190	65.200	65.700	500
193,5			
199			
203			
207			
212,8			

Teniendo en cuenta la información de la tabla:

Potencialidades y dificultades

- b. Explica cómo cambia la diferencia entre el precio total de las facturas.
- c. Explica si es posible que el precio total de los dos planes llegue a ser igual.
- d. Justifique si la tabla anterior permite determinar cuál plan le favorece a Javier.

2. Camilo realiza la gráfica del plan actual y la del plan b para mostrarle a Javier cómo cambia el precio total de la factura respecto a la cantidad de minutos consumidos en cada uno. Tenga en cuenta que el eje x (horizontal) corresponde a los minutos consumidos y el eje y (vertical) al valor total de la factura.

Figura 2. Gráfica del plan actual y del plan b



Potencialidades y dificultades

Considerando la gráfica de cada plan, describe para qué cantidad de minutos consumidos:

- a. El precio total de la factura del plan b es mayor que el precio total de la factura del plan actual.
 - b. El precio total de la factura del plan actual es mayor que el precio total de la factura del plan b.
 - c. Justifique si la gráfica anterior permite determinar cuál plan le favorece a Javier.
3. Teniendo en cuenta la intersección de las gráficas del plan actual y el plan b, escriba:
- a. La cantidad de minutos consumidos.
 - b. El precio total de las facturas.
2. Camilo afirma que si Javier consume más de 200 minutos en el plan actual el precio total de la factura será menor que si consume la misma cantidad de minutos en el plan b. Explica la validez de esta afirmación.
3. Escribe una expresión que permita calcular cuándo el precio total de la factura del plan actual es igual al precio total de la factura del plan b.
4. Camilo realiza el siguiente procedimiento para conocer la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de las facturas de ambos planes es igual.

Figura 3. *Procedimiento para conocer la cantidad de minutos consumidos cuando el precio total de las facturas de ambos planes es igual*

Paso 1		$80x + 50.000 = 30x + 60.000$
Paso 2		$80x + 50.000 - 50.000 = 30x + 60.000 - 50.000$
Paso 3		$80x = 30x + 10.000$
Paso 4		$80x - 30x = 30x + 10.000 - 30x$
Paso 5		$50x = 10.000$
Paso 6		$\frac{50}{50}x = \frac{10.000}{50}$
		$x = 200$

Ecuación inicial

Respecto al procedimiento anterior,

- Indica qué hizo en el paso 1.
 - Indica si el procedimiento que hizo Camilo en el paso 5 es válido y justifica.
 - Escribe a qué corresponde el resultado obtenido.
 - Reemplaza el valor de la x en la ecuación inicial e indica que se obtiene.
- Considerando las preguntas 3 y 6, escriba qué relación tienen las respuestas 3a y 3b con las respuestas 6c y 6d.
 - Escoge el plan que consideres más apropiado para Javier y escribe las razones.

La igualdad entre las expresiones de cada uno de los planes se escribe como:

$$f(x) = g(x)$$

ó

$$80x + 50.000 = 30x + 60.000$$

Esta igualdad entre las dos funciones forma una ecuación que permite encontrar la cantidad x de minutos consumidos para el cual el precio de ambos planes es igual, que a su vez es también el valor de la coordenada x del punto de intersección entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Situación 2: La tienda, ecuaciones y funciones.

Doña Florinda es la dueña de una tienda en el barrio Libertadores que diariamente tiene un ingreso total en ventas de \$280.000. Ahora que cerraron la vía donde está ubicada su tienda para hacer mantenimientos, el ingreso total en ventas diarias ha bajado significativamente. Si esta situación continua, doña Florinda desea conocer qué representaría esto en su negocio con el paso de los días.

Tarea 1. La tienda de doña Florinda

- Doña Florinda ha registrado en la siguiente tabla el ingreso total de ventas desde que cerraron la vía.

Tabla 4. Relación entre el número de días y el ingreso total en ventas

Número de días	0	1	2	3	4	5	6
Ingreso total en ventas (\$)	280.000	275.000	270.000	265.000	260.000	255.000	250.000

Potencialidades y dificultades

Considerando la situación y la tabla anterior:

- a. Escribe qué está sucediendo con el ingreso total en ventas durante los primeros 6 días.
- b. Explica cuál crees que podría ser el ingreso total en ventas cuando han pasado 7 días.

David, el sobrino de doña Florinda, construye la siguiente gráfica interactiva en GeoGebra para explicarle a su tía cuál podría ser el ingreso total en ventas diarias si continúan los arreglos a la vía.

*Diríjase a <https://www.geogebra.org/m/c5uq7tma> e ingrese el código que le proporcionará el docente.

2. Haz clic en la casilla 1. *Punto P*. Para realizar las siguientes actividades mueve el punto P.
 - a. Escribe el número de días cuando el ingreso total en ventas es \$240.000, \$200.000 y \$180.000.
 - b. Escribe a partir de qué número de días el ingreso total en ventas de \$280.000 se reduce a la mitad.
 - c. Escribe cómo cambia el ingreso total en ventas cuando el número de días aumenta.

*Al finalizar haz clic nuevamente en la casilla 1. *Punto P*.

3. Haz clic en la casilla 2. *Razón de cambio*. Ubica en posiciones diferentes los deslizadores B y C, y escribe qué representa el resultado final del procedimiento para calcular la razón de cambio en la situación anterior.

Al finalizar haz nuevamente clic en la casilla 2. *Razón de cambio*.

4. Haz clic en la casilla 3. *Ingreso total en ventas*. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador D.
 - a. Escribe qué sucede con las coordenadas del punto A al mover el deslizador D.
 - b. Explica cuándo el ingreso total en ventas llega a ser nulo.
5. Haz clic en la casilla 4. *Ecuación-procedimiento*. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador D.

- a. Escribe qué relación encuentras entre las coordenadas del punto A y el procedimiento.
 - b. Escribe qué relación encuentras entre las coordenadas del punto A cuando el ingreso total en ventas es nulo.
 - c. Explica que permite calcular el procedimiento.
6. Teniendo en cuenta la información anterior, justifica cuál de las siguientes expresiones permite calcular el ingreso total en ventas diarias.
- $f(x) = 280.000x + 5.000$
 - $280.000 - 5.000x = 0$
 - $f(x) = 280.000 - 5.000x$
 - $5.000x + 280.000 = 0$
7. Explica que representaría el cierre de la vía en el negocio de doña Florinda con el paso de los días.

Tarea 2. Extensión y generalización de relación $f(x) = g(x)$.

Para el desarrollo de esta tarea se hace uso de dos applets diseñadas en GeoGebra, considere la información gráfica en ellas y responda cada una de las siguientes preguntas.

*Diríjase a <https://www.geogebra.org/m/qqqbhayx> e ingrese el código que le proporcionará el docente.

1. Haz clic en la casilla 1. *Puntos*. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador.
 - a. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto A.
 - b. Escribe sobre que grafica se mueve el punto A.
 - c. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto B.
 - d. Escribe sobre que grafica se mueve el punto B.
2. Haz clic en la casilla 2. *Gráficas*. mueve el deslizador y escribe la coordenada del punto de intersección entre las gráficas.
3. Si las expresiones de las gráficas anteriores son; $f(x) = 3x - 6$ y $g(x) = 10 - x$:
 - a. Escriba una expresión para hallar la abscisa del punto de intersección.
 - b. Calcule la abscisa del punto de intersección.
 - c. Calcule la ordenada del punto de intersección.

*Diríjase a <https://www.geogebra.org/m/edyxfdv4> e ingrese el código que le proporcionará el docente.

Potencialidades y dificultades

4. Haz clic en la casilla 1. *Puntos*. Para realizar las siguientes actividades mueve el deslizador.
 - a. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto A.
 - b. Escribe sobre que grafica se mueve el punto A.
 - c. Explica cómo cambian los valores de la abscisa y la ordenada del punto B.
 - d. Escribe sobre que grafica se mueve el punto B.
5. Haz clic en la casilla 2. *Gráficas*. Mueve el deslizador y escribe las coordenadas de los puntos de intersección entre las gráficas.
6. Si las expresiones de las gráficas anteriores son $f(x) = \frac{-1}{5}x + 84$ y $g(x) = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$, explique qué permite calcular la ecuación:

$$\frac{-1}{5}x + 84 = \frac{-1}{50}x^2 - 3x + 132$$

Considere lo trabajado hasta el momento, justifique si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

7. Si f y g son funciones lineales y la solución de la ecuación $f(x) = g(x)$ es $x = 2$, entonces, la abscisa del punto de intersección entre las gráficas de las funciones f y g también es 2.
8. Si las gráficas de dos funciones lineales $f(x)$ y $g(x)$ se intersecan en un punto, la abscisa de ese punto se puede calcular a través de la ecuación $f(x) = 0$ o la ecuación $g(x) = 0$.
9. Para cualquier par de funciones lineales, la ecuación $f(x) = g(x)$ permite saber si las gráficas de las funciones se intersecan en un punto.