

**PROYECCIÓN DE TASAS DE MORTALIDAD Y ESTIMACIÓN DE LOS RIESGOS DE
LONGEVIDAD Y MORTALIDAD PARA
EL CASO COLOMBIANO**

FERNANDO GÓMEZ RICO

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y ECONÓMICAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
SANTIAGO DE CALI
2016**

**PROYECCIÓN DE TASAS DE MORTALIDAD Y ESTIMACIÓN DE LOS RIESGOS DE
LONGEVIDAD Y MORTALIDAD PARA
EL CASO COLOMBIANO**

**FERNANDO GÓMEZ RICO
CÓDIGO: 201130145**

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR EL TÍTULO DE ECONOMISTA

**TUTOR:
JORGE MARIO URIBE GIL**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES Y ECONÓMICAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA
SANTIAGO DE CALI
2016**

Tabla de Contenido

1. Introducción.....	1
2. Revisión de Literatura	5
3. Marco Teórico.....	10
4. Antecedentes.....	12
5. Metodología	15
5.1 Modelo de estimación.....	15
5.2 Descomposición de Valor Singular	16
5.3 Valor en Riesgo (VaR).....	18
6. Estimación y Resultados.....	19
6.1 Datos	19
6.2 Estimación	21
6.3 Pronóstico en la tasas de Mortalidad.....	24
6.4 Comparación en los pronósticos.....	26
7. Conclusiones	29
Bibliografía.....	31

Índice de Tablas

Tabla 1. Rangos de edades quinquenales para hombres y mujeres	19
---	----

Índice de Gráficas

Gráfica 1. Representación de riesgo de Longevidad y Mortalidad.	3
Gráfica 2. Tasas logarítmicas de mortalidad de mujeres en Colombia 1985-2015.....	20
Gráfica 3. Tasas logarítmicas de mortalidad de hombres en Colombia 1985-2015	20
Gráfica 4. Dinámicas de la tasa de mortalidad de mujeres en Colombia 2016-2050	22
Gráfica 5. Dinámicas de la tasa de mortalidad de hombres en Colombia 2016-2050.....	22
Gráfica 6. Estimación del parametro ax en hombres y mujeres	23
Gráfica 7. Estimación del parametro bx en hombres y mujeres	24
Gráfica 8. Dinámica y pronóstico de kt	25
Gráfica 9. Escenarios de la dinámica de mortalidad en Colombia en hombres y mujeres.....	27

PROYECCIÓN DE TASAS DE MORTALIDAD Y ESTIMACIÓN DE LOS RIESGOS DE LONGEVIDAD Y MORTALIDAD PARA EL CASO COLOMBIANO

Resumen

Este documento aporta información relevante y detallada sobre el pronóstico de las tasas de mortalidad en Colombia, haciendo uso del modelo Lee-Carter (1992). A partir de las estimaciones de este modelo, se calcula el Valor en Riesgo a dos colas, con el fin de medir adecuadamente los riesgos de longevidad y mortalidad en el país, y de esta manera, proporcionar a empresas públicas y privadas, el gobierno, los fondos de pensiones y las empresas aseguradoras, información en las tasas de mortalidad futura que permita el desarrollo de herramientas mínimas para enfrentar tales riesgos de forma óptima.

Palabras Claves: Proyecciones de tasas de mortalidad, Lee-Carter, riesgo de Longevidad, riesgo de Mortalidad, fondos de pensiones, empresas aseguradoras.

Clasificación JEL: G23, J11 y H55

1. Introducción

La literatura académica, especialmente la económica y la actuarial, en las últimas décadas han mostrado un gran interés por la medición y valoración de los riesgos de longevidad y mortalidad. Los estudios se han concentrado en el análisis de instrumentos financieros relacionados con índices demográficos, tales como los planes de pensiones, las hipotecas de vida, las rentas vitalicias, entre otros (Richards y Jones, 2004).

El interés por este tema se justifica, en parte, por la evolución y relevancia del mercado asegurador en diferentes economías, como es el caso de la economía colombiana, ya que según los resultados arrojados por la investigación de Uribe (2011), el mercado accionario colombiano no parece responder en gran medida a fundamentales macroeconómicos sino, según la evidencia empírica, a la dinámica de los portafolios de los Administradores de Fondos de Pensiones (AFP).

Por otra parte, dicho interés corresponde también a la observación de las tendencias globales de mortalidad desde hace varias décadas, en las que, al igual que en Colombia, se ha presentado una notable disminución en la mortalidad, como respuesta a un fenómeno estrechamente relacionado con el desarrollo social y económico. Lo anterior origina aumentos en la esperanza de vida de las personas, especialmente en los países desarrollados. Esto se debe principalmente a la promoción de un estilo de vida más saludable, a la reducción en accidentes laborales y tráfico, a los grandes avances en la medicina y las mejoras en los servicios sanitarios, así como mejores condiciones de vida de la sociedad, entre otros (Bravo y Díaz, 2014).

Igualmente, Trigo, Moreno, Betzuen, De la Peña y Iturricastillo (2013), exponen las siguientes razones para demostrar por qué los riesgos de mortalidad y longevidad se han convertido en un tema de interés para muchas áreas de estudio (como por ejemplo, la medicina, la biología, la farmacología, la epidemiología, la sociología, la psicología, la gerontología, y especialmente dentro de los escenarios actuariales y económicos):

- Incertidumbre en los instrumentos financieros para la cantidad de años de duración de la vida de un individuo.
- Normatividad de supervivencia y control de entidades aseguradoras.
- Desarrollos de modelos de medición del riesgo de mortalidad en la última década.
- Mejor análisis que otros riesgos financieros según estudios realizados por el ámbito actuarial y demográfico.
- Ineficiencia en instrumentos para gestionar otros riesgos financieros característicos por la baja dependencia con los riesgos del mercado.

Por otra parte, según Villegas (2011), hay tres tipos de escenarios que presentan desviaciones en el pronóstico de las tasas de mortalidad. Dichas desviaciones se definen como los riesgos de mortalidad o de longevidad:

a) Desviaciones alrededor de las tasas de mortalidad esperadas:

Un individuo puede vivir más o menos que el promedio de la población. Este escenario implica analizar la mortalidad individual. Por lo tanto, los riesgos de longevidad o de mortalidad se consideran como idiosincráticos o no sistemáticos.

b) Desviaciones de las tasas de mortalidad esperadas:

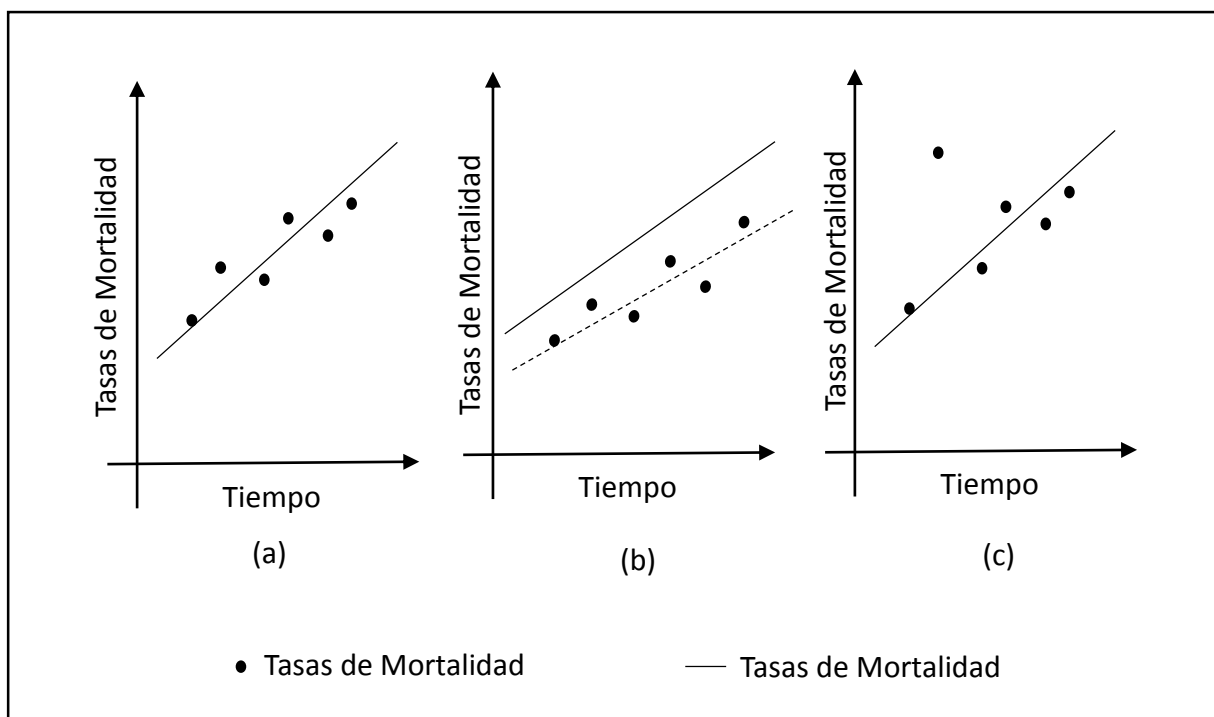
La tasa de mortalidad está regularmente por encima o por debajo de las tasas esperadas. En dicho caso es de relevancia estudiar la mortalidad agregada, por lo cual, los riesgos mencionados son definidos como agregados o sistemáticos.

c) Aumento o disminución repentina y temporal de las tasas de mortalidad:

Saltos o disminución repentinan en las tasas de mortalidad. En este último caso se involucra la mortalidad agregada, pero con choque de corto plazo. Por consiguiente, los riesgos de longevidad o mortalidad son catalogados como catastróficos.

En la Gráfica 1, se puede observa tres tipos de escenarios que presentan desviaciones en el pronóstico de las tasas de mortalidad, dichas desviaciones son los riesgo de longevidad y mortalidad:

Gráfica 1. Representación de riesgo de longevidad y mortalidad.



Fuente: Tomado Aguilera (2014), Instrumentos financieros vinculados a la mortalidad.

Predecir cuánto tiempo pueden vivir las personas es una tarea difícil, ya que está ligada a un conjunto enorme de incertidumbres. Un pronóstico adecuado de la longitud de la vida conlleva el uso de información periódica actualizada y confiable, referente a la mortalidad, además de que requiere del uso de modelos estadísticos, matemáticos y actuariales complejos. En algunos casos se hace necesario incluso obtener datos sobre la dinámica de los factores biológicos y las causas de muerte, subyacentes a las dinámicas demográficas de la población.

Es importante resaltar que las proyecciones de mortalidad son un elemento clave a la hora de cuantificar los riesgos de longevidad y mortalidad de una población dada. La idea general detrás de este hecho es que, las proyecciones estadísticas de las tasas de mortalidad permiten extrapolar las tendencias observadas de mortalidad, de acuerdo con las características propias de ésta, y por ende, permiten predecir la cantidad de años que los

individuos de una sociedad llegarían a vivir. Sin embargo, sucesos inesperados, ya sean positivos o negativos, pueden afectar la predicción en las tasas de mortalidad.

En economía, las proyecciones tienen múltiples usos. Por ejemplo, ayudan a predecir tanto la población como la mortalidad a corto y largo plazo, constituyen un factor conveniente para estimar el aumento de los costos de pensiones, las primas de seguros relacionados con la supervivencia o con el fallecimiento de las personas, la asistencia sanitaria de los adultos mayores, o el simple hecho de conocer características de una población para una determinada investigación, entre otras.

Usualmente, el pronóstico de las tasas de mortalidad es relevante para la toma de decisiones a nivel de política gubernamental, en términos de salud y de mejoras en las condiciones de vida de un país (García y Ordorica, 2012). También es una base importante para los fondos de pensiones que buscan establecer la cantidad de capital con el que necesitan operar. Por otro lado, es un elemento clave para determinar los riesgos que enfrentan algunas firmas en relación con factores demográficos, como las empresas de seguros de vidas o funerarias, que están vinculadas en su operación con las variaciones de las tasas de mortalidad (Manotas, Ulloa y Uribe, 2014).

En Colombia, y en general en los otros países del mundo, el pronóstico de las tasas de mortalidad constituye una buena herramienta para la formulación de políticas, la determinación del capital con el que deben funcionar los fondos de pensiones o el diseño de sus productos. Con este trabajo se busca aportar información relevante y detallada sobre el pronóstico de las tasas de mortalidad en Colombia, a partir de los datos correspondientes del periodo 1985-2015 y haciendo uso del modelo Lee-Carter (1992). El ejercicio de pronóstico se realiza hasta el año 2050. Además, se hace la estimación discriminando por sexo y edades, lo cual es más apropiado frente a las proyecciones de mortalidad con tasas globales, debido a la heterogeneidad que presenta la población en los diferentes años de edad y sexo.

A partir de las estimaciones obtenidas, se emplea el modelo de Valor en Riesgo (VaR), con el objetivo de medir principal y adecuadamente el riesgo de longevidad y, de esta manera, su

contrapartida: el riesgo de mortalidad. Al incluir estos riesgos en la estimación de las tasas de mortalidad, se puede obtener información útil tanto para el Gobierno Nacional a la hora de desarrollar políticas orientadas a las condiciones de salud y de vidas más eficientes, como para los fondos de pensiones y las empresas públicas y privadas.

Este documento contiene, en primer lugar, la revisión de la literatura relacionada con el método Lee-Carter, los riesgos de mortalidad y longevidad. Luego, se presenta el marco teórico que sustenta el posterior análisis empírico y se explica la metodología que se usará para obtener tanto el pronóstico como los riesgos de interés. Posteriormente se presentan la estimación y los resultados obtenidos. Por último, se muestra las principales conclusiones de las estimaciones obtenidas.

2. Revisión de Literatura

La literatura relacionada con la modelación de las tasas de mortalidad y los riesgos de longevidad y mortalidad a nivel internacional, es muy densa y variada. Dentro estos trabajos se encuentran el de Lee-Carter (1992), en el cual, desarrolló uno de los modelos con más impacto para la literatura actuarial y demográfica en la modelación de la mortalidad. Este trabajo expone el Modelo por Factores, en el que el factor es la tendencia estocástica común a todas las tasas específicas de mortalidad. El ejercicio se aplica originalmente a los datos de mortalidad de Estados Unidos desde 1933 a 1987, logrando proyecciones para el periodo 1990 - 2065.

De igual modo, el estudio realizado por Belliard & Williams (2013) proporciona información sobre las proyecciones de mortalidad para Argentina, con el objetivo de actualizar el pronóstico para este país realizado con un modelo determinístico hace más de 10 años. En esta misma lógica se encuentra el documento de Aguilar (2013) para el caso de Costa Rica.

Por otra parte, el modelo de Lee-Carter ha sido fuertemente criticado, primordialmente, en el sentido de considerar un solo factor en la estimación, ya que éste parece ser incapaz de

capturar todos los componentes comunes latentes en la dinámica de las tasas de mortalidad, como se puede ver en el estudio realizado por Dushi, Friedberg, y Webb (2010), quienes plantean que dicho modelo empíricamente subestiman de manera considerable lo que una persona podría vivir. En esta dirección se encuentran Debón, Martínez, Montes & Moshuk (2010), quienes contrastan el modelo original de Lee-Carter con el de extensiones (con dos factores y efectos de cohortes), para el caso de España. Concluyen de manera empírica y después de un ajuste para su comparación, que aquel con mejor predicción es el extendido.

Algunos trabajos están encaminados en ampliar el modelo con otros factores, específicamente factores de tendencia estocástica como es el caso Yang, Yue, y Huang (2010), en el cual, proponen una modelación de la mortalidad usando el análisis de componentes principales y empleando la base de datos Human Mortality, obteniendo como resultado menores errores de predicción para casi todos los países ilustrados.

Otros estudios plantean que factores demográficos como las tasas de mortalidad y las expectativas de vida, entre otros, pueden variar en diferentes subgrupos de la misma población, las cuales se definen por sexo, área geográfica o variables socioeconómicas. Dichas diferencias plantean importantes desafíos para el diseño de políticas públicas, programas de pensiones y carteras de renta vitalicia. Para este caso, Villegas & Haberman (2014), proponen hacer la modelación de las tasas de mortalidad haciendo uso del modelo de Lee-Carter con diferenciación socioeconómica de la población de Inglaterra.

Por su parte, García et al. (2012), hacen un pronóstico sobre los niveles de la mortalidad, para la población de México con el modelo Lee-Carter, discriminando por sexo y edades, con los propósitos de desarrollar diversas políticas orientadas a la salud y la población de ese país, y proporcionar bases a los fondos de pensiones mexicanos para la elaboración de sus diferentes programas. Adicionalmente, hacen una comparación con la proyección realizada en el año 2006 por el Consejo Nacional de Población (CONAPO) para determinar su precisión.

En el caso colombiano, se encuentra el trabajo de Ochoa (2015), en el cual, se presenta dos aplicaciones del modelo de Lee-Carter a través del método de Descomposición Singular y los modelos lineales generalizados, siguiendo la metodología Log-bilineal de Poisson presentada por Wilmoth (1993) y Brouhns, Denuit y Vermunt (2002). El autor estima la tasa de mortalidad de Colombia hasta el año 2011 a partir de los datos de 1951-1999. De acuerdo con los resultados obtenidos, se muestra que hay una disminución significativa en la mortalidad poblacional en Colombia.

Adicionalmente, se tiene el trabajo realizado por Manotas et al. (2016), que propone una metodología econométrica para medir el “riesgo demográfico” de empresas expuestas ante variables como tasas de mortalidad, expectativas de vida, tasas de morbilidad, etc. Los autores proponen combinar modelos demográficos como el de Lee-Carter, con los de economía financiera como el VaR y CoVaR, y herramientas estadísticas como Cópulas, con el objetivo de cuantificar el riesgo latente a los cambios en los factores demográficos y, al mismo tiempo, lograr minimizar los requerimientos de información para hacer la estimación. Esta metodología se emplea en una empresa colombiana de auxilios funerarios.

Por su parte, los riesgos de mortalidad y longevidad se encuentran en una gran variedad de trabajos que se han abordado en diferentes temáticas a nivel internacional. Por ejemplo, se tiene el realizado por Hári, De Waegenaere, Melenberg, y Nijman (2008), que analizan la importancia del riesgo de la longevidad en la solvencia de las carteras de rentas vitalicias. Además, se distinguen dos tipos de riesgo asociados: riesgo de micro-longevidad, que cuantifica el riesgo relacionado con la incertidumbre en el momento de la muerte si las probabilidades de supervivencia se conocen con certeza, mientras que el riesgo de macro-longevidad se debe a futuros inciertos de probabilidades de supervivencia. En esta dirección se encuentran los trabajos de Hanewald, Post, y Gründl (2011) y Olivieri (2011), que concretamente tiene como eje central, determinar los efectos en las firmas de seguros vulnerables al riesgo de longevidad.

Wan & Bertschi (2015), plantean un modelo actuarial ajustado a varios factores biológicos y otros parámetros de la población, con el fin de que las AFP y los proveedores de seguros

en Suiza sean capaces de cuantificar el riesgo de longevidad para hacer más adecuada la fijación de los pagos de los planes de pensiones. Los autores argumentan que las pensiones de este país están muy expuestas a este riesgo, por lo cual, buscan desarrollar soluciones de mercado de capitales para enfrentarlo. En esta misma lógica se encuentran los autores Orlando, Di Lorenzo & Politano (2014).

Así mismo, Devolder & Piscopo (2014), tienen como objetivo hacer un análisis colectivo de los tres principales riesgos financieros que afectan un esquema de pensiones, los cuales, son los riesgos de mercado, la inflación y la longevidad, para observar de esta manera sus efectos sobre la solvencia en las compañías aseguradoras.

Para el riesgo de mortalidad se tiene el trabajo de Liang & Ma (2015), en el que se analiza la asignación dinámica óptima de activos de los fondos de pensiones al tener en cuenta el riesgo de mortalidad y el riesgo de salarios. Afirman que los administradores de fondos de pensiones tratan de encontrar la política de inversión óptima (asignación óptima de los activos) para maximizar la utilidad esperada de la riqueza terminal. Sin embargo, en las decisiones que se toman con respecto a dicha asignación no consideran estos riesgos, produciendo información incompleta en el mercado. Por esto, los autores emplean el método de Martingala y el principio de programación dinámica para tratar de obtener una aproximación a la política de inversión óptima frente a la problemática de interés, y luego determinar la eficacia de la aproximación. Por último, resuelven el problema de gestión óptima de activos y pasivos con el riesgo de mortalidad y el riesgo de salario, obteniendo como resultado que dichos riesgos tienen fuerte influencia sobre la política de óptima inversión.

En este mismo sentido Biagini, Botero & Schreiber (2015), estudian la fijación de precios y la cobertura de los pasivos de seguros de vida típicos para una cartera de seguros, dependiente con el riesgo de mortalidad en el enfoque de minimización de riesgo. Introducen los modelos afines de las intensidades de mortalidad basados en campos aleatorios gaussianos que ofrecen resultados analíticamente manejables para carteras de

seguros, que se componen de individuos de diferentes grupos de edad, con el fin de capturar la estructura de dependencia entre generaciones de la cartera.

En el trabajo de Chuliá, Guillén y Uribe (2016), se proponen una metodología para el pronóstico de las tasas de mortalidad a partir del Modelo por Factores Dinámico Generalizado, haciendo una comparación con otros modelos empleados en la literatura, con el objetivo de fijar en términos de rendimiento, el mejor modelo. Además, emplean el método Vine-Copulas con el objetivo de estimar los riesgos de mortalidad y longevidad, aplicado para el Reino Unido.

Por otro lado, la revisión de literatura relacionada con los objetivos de este documento a nivel nacional es muy reducida, a pesar de que este tema en la actualidad se torna como objeto de investigación de diferentes estudios. Dentro de los pocos documentos que han abordado este tópico de manera directa, se encuentra el documento de trabajo realizado por Rodríguez y Zarruk (2011), el cual se centra en el riesgo de longevidad que poseen los activos del sector asegurador relacionados con rentas y pensiones, utilizando como base del cálculo las tablas de vida con datos españoles que se generan en el modelo desarrollado por Lee-Carter, y se plantean dos formas de medir el impacto del riesgo de longevidad. Además, se propone un método para calcular la solvencia necesaria requerida por este riesgo, comparándolo con el propuesto por la normativa europea de requisitos mínimos de capital “Solvencia II”.

Por último, en el estudio de Mora (2011), se muestra una resumida historia del sistema pensional colombiano, las leyes que lo rigen, los riesgos que enfrentan (entre esos, se encuentra el riesgo de longevidad) y las diversas modalidades de pensión que existen. El autor plantea que las tablas de mortalidad son el principal insumo de las compañías aseguradoras para determinar sus costos originados con el riesgo de longevidad. Sin embargo, en Colombia no se han actualizado constantemente, por lo cual existe mayor incertidumbre en el patrón de mortalidad a seguir y, por ende, mayores costos relacionados con dicho riesgo.

3. Marco Teórico

Antes de abordar, el riesgo de longevidad especialmente -y por ende de su contraparte, el riesgo de mortalidad- como tema central de estudio, es importante definir el concepto de riesgo en general, y de esta manera contextualizar la importancia de los riesgos a tratar en los posibles escenarios en que usualmente se puedan encontrar.

La humanidad se ha preocupado desde tiempos muy remotos por definir, medir y determinar las consecuencias e implicaciones que tiene el riesgo en la sociedad, no solo en el ámbito económico, sino también en todas las áreas de conocimientos. Como respuesta a estos aspectos, Peter L. Bernstein en su obra *“Against the Gods. The remarkable story of risk”* (Bernstein, 1996), plantea que el acontecimiento que diferencia a los tiempos históricos de los modernos va más allá de los avances de la ciencia, la tecnología, el desarrollo del capitalismo o de la democracia. Para el autor, el límite entre ambos tiempos fue la interpretación y dominio del riesgo. Anteriormente, la idea del futuro se consideraba como un capricho de los dioses y los hombres solían resignarse ante la naturaleza del mismo. Sin embargo, con el paso del tiempo, el futuro se logró interpretar bajo la idea de que era espejo del pasado.

Bernstein en su libro cita a grandes pensadores como es el caso de Blaise Pascal, Pierre de Fermat, Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Daniel Bernoulli, Thomas Bayes, entre otros, para aludir que a los aportes de las ciencias de la matemática y de la probabilidad ayudaron a entender y gestionar el riesgo en los tiempos modernos. Ya que, según el autor, dichos aportes permitieron poner el futuro al servicio del presente, lo cual fue uno de los principales pilares que impulsaron la sociedad al desarrollo que se tiene hoy en día. Además, la definición del riesgo llevó a emplear un proceso racional de toma de decisiones, permitiendo elegir alternativas más óptimas en un amplio conjunto de opciones.

Por su parte, McNeil, Frey y Embrechets (2005) proponen definir globalmente el riesgo y una manera de cuantificarlo. Los autores expresan que el diccionario Conciso de Oxford define el riesgo como sinónimo de peligro, posibilidad de malas consecuencias, pérdida o exposición a la mala suerte. En cuanto a los autores, estos exponen que el riesgo está fuertemente ligado a acontecimientos, decisiones, consecuencias, incertidumbres y noción de aleatoriedad.

El riesgo se puede interpretar de diferentes maneras dependiendo del contexto en que se encuentre. En este caso, los autores estudian el riesgo, principalmente en los mercados financieros y de seguros. De acuerdo con el libro, se pueden obtener las siguientes definiciones generales del riesgo: *“cualquier evento o acción que pueda afectar negativamente a la capacidad de una organización para lograr sus objetivos y ejecutar sus estrategias”* o, como: *“la probabilidad de pérdida o posibilidad de obtener menores retornos esperados”*. Sin embargo, McNeil, Frey y Embrechets, resaltan que dichas definiciones capturan algunos elementos característicos del riesgo. Sin embargo, aún no hay una definición única que satisfaga en todos los contextos.

En el contexto de las finanzas está presente el riesgo financiero, que se puede definir como la probabilidad de que los beneficios obtenidos no sean los esperados o no se logre un retorno en absoluto. Por tanto, este abarca varios tipos de riesgo, de los cuales se pueden mencionar el riesgo de mercado, el riesgo de cambio, el riesgo de tipo de interés, el riesgo de crédito, el riesgo operativo, el riesgo de liquidez, el riesgo país, entre otros.

Dentro del riesgo financiero también se encuentra los riesgos relacionados con factores demográficos como es el caso del mercado asegurador, ya que este está estrechamente relacionado con la incertidumbre y por ende con el riesgo. Las personas encargadas (usualmente los actuarios) de administrar los activos y los pasivos en los fondos de pensiones o empresas aseguradoras, lo hacen mediante la modelación y el análisis de sucesos pasados en las tasas de mortalidad y en otros aspectos característicos de una sociedad (especialmente relacionados con la demografía).

De esta manera, Chulián et al. (2016), definen el riesgo de longevidad como la desviación a la baja de las tasas de mortalidad con respecto a una tendencia pronosticada, en el cual, una persona puede vivir más de lo predicho. Además, resaltan que para su comprensión, tal indicador está asociado a la naturaleza estocástica de las tasas, y por ende, ligado a la incertidumbre y las decisiones con determinados niveles de confianza estadística.

Por otra parte, el riesgo de mortalidad se define como la incertidumbre de que una persona viva menos de lo que se predice, lo cual supone que los valores observados de las medidas de mortalidad de dicho individuo son mayores que los previstos por un índice o modelo utilizado para una determinada población, Trigo et al. (2013).

FIAP (2014), plantean que en los riesgos mencionados asocian tres factores importantes en las proyecciones de la tasas de mortalidad: uno es el riesgo de modelación, que se debe en la distorsión de los datos; el segundo es el riesgo idiosincrático, que consisten en el cambio de las expectativas de vida en torno al valor esperado y, el último es el riesgo de tendencia, que son ocasionados por la disminución o aumentos inesperados en las tasas de mortalidad, ocasionados por las mejoras socioeconómicos o en la medicina.

4. Antecedentes

Con respecto a los individuos de una sociedad, la relevancia de dicho riesgo se debe a que las personas tienden a subestimar su esperanza de vida, originando un alto porcentaje de población que no tienen los suficientes recursos para hacer frente a su vejez y por ende, no poseen la posibilidad de adquirir un mecanismo para enfrentarlo (Bravo y Díaz, 2014). Dichos mecanismos pueden ser de sistemas públicos de seguridad social, seguros de vidas y de productos de rentas vitalicias, planes de pensiones, entre otros.

Adicionalmente, una gran parte de la población colombiana pertenece al sector informal, que según el DANE, “Colombia es un país en donde cerca del 70% de la economía es informal y aproximadamente el 80% de los trabajadores formales cotizan sus pensiones y

menos del 15% de los informales lo hace”. Dado que la pirámide poblacional tiende a invertirse debido al aumento en la esperanza de vida de la población, como resultado se obtendrán significativos deterioros en la tasa de dependencia¹ de esta economía, originando una población económicamente poco productiva y sin suficientes recursos en su vejez.

De acuerdo a lo anterior, esto se traduce en importantes desafíos y fuertes implicaciones al estado colombiano, en términos de cargas fiscales y sostenibilidad financiera, dado que al caer los recaudos por aportes de pensionales debido a los argumentos expuestos anteriormente, se generan problemas de impago a las personas que ya gozaban de los beneficios del sistema de pensional. Para mitigar este problema el gobierno debe emitir más deuda o aumentar la carga tributaria.

En este mismo sentido, Santa María, Steiner, Botero, Martínez y Millán (2010) exponen que el gobierno, para ampliar la cobertura de seguridad social en pensiones, salud y otros programas sociales, busca recaudar recursos fiscales, aplicando mayores impuestos a la nómina. Como consecuencia, se produce una reducción en la base de aportes que hacen la población asalariada formal (debido a que se disminuye la demanda de empleo formal) y a su vez se presentan menos recursos para financiar las coberturas de la Seguridad Social.

En vista de los fondos de pensiones y empresas o compañía aseguradoras, la preocupación en conocer detalladamente la evolución principalmente del riesgo de longevidad, como se ha referenciado, con el propósito de determinar para ello un nivel de prudencia a la hora de desarrollar sus productos, pensiones y niveles de capital requerido para funcionar, ya que las calificadoras, reguladores y reformas en la normativa que se rigen, obligan a que dichas entidades tomen una postura preventiva y eficaz en la gestión del riesgo de interés, Albarrán, Ariza, Cóbreces y Rodríguez (2014).

¹ Relación entre la proporción de personas dependientes o económicamente improductivas (es decir personas menores de 12 y mayores de 65 años de edad) y personas económicamente productivas (en otras palabras en edad de trabajar) Lora (2011).

Por otra parte, Albarrán et al. (2014), expone que uno de los métodos más empleados son las tablas de mortalidad, modelo teórico que permite medir las probabilidades de vida o de muerte en función de la edad, con base en observaciones de periodos. Además, afirman que los autores que detallan la construcción de este método son Benjamin y Pollard (1992) y Bowers, Gerber, Hickman, Jones y Nesbitt (1986).

Asi mismo, en la evolución de las proyecciones de la mortalidad, se tiene que los modelos estocásticos más conocidos, según el artículo, son: el modelo de Lee-Carter, el modelo de Renshaw y Haberman, el modelo de ADC, el modelo de B-splines y P-splines, el modelo CBD, el modelo CBD con efecto Cohorte, el modelo CBD con efecto cohorte y componente cuadrático y el modelo con efecto de cohorte decreciente con el tiempo. Cabe resaltar que la calidad en el pronóstico de los modelos mencionados depende de registros estadísticos fiables y actualizados.

Por su parte, en la medición de los riesgos de interés, se puede cuantificar a partir de la construcción de intervalos de confianzas a través de la técnica estadística del método de remuestreo, conocida como Bootstrapping. De igual modo, de acuerdo con el artículo de Chuliá et al. (2015), se cuenta con otras alternativas, usualmente financieras, como es el caso del método de Valor en Riesgo (Var), utilizado especialmente para evaluar el riesgo de una determinada cartera de inversiones de activos financieros, el cual se detalla en la siguiente sección. Otra alternativa financiera es el Valor de Riesgo de Cola (TailVaR o TVaR), que consiste en ir más allá de la esperanza matemática del VaR, y se define como $TVaR_{\alpha}(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_x(x) d\lambda$, y tiene como fin, cuantificar el valor esperado de pérdidas, ocasionado por un evento fuera de un nivel de probabilidad dado.

Por último, Manotas et al. (2013), proponen el Valor de Riesgo Condicional (CoVaR), el cual consiste en determinar las perdidas si un evento extremo efectivamente ocurre (más allá del nivel de confianza del VaR, en las colas de la distribución). Se define CoVaR como el valor esperado de las pérdidas, L , en caso que sean superiores al VaR y se define como $CoVaR = E[L|L > VaR]$.

5. Metodología

El algoritmo planteado a seguir en el presente estudio es el siguiente: pronosticar las tasas de mortalidad con el modelo Lee-Carter a través del método de Descomposición Singular, a partir de la estimación, se emplea el modelo de VaR para obtener los intervalos de confianza que permitirá determinar tanto el riesgo de longevidad como el de mortalidad.

5.1 Modelo de estimación

El modelo Lee-Carter propone estimar, a partir de una relación lineal, las tasas de mortalidad futura para cada uno de los rangos de edad en función de una variable no observable que depende del tiempo, k_t , utilizando los datos históricos de las tasas de mortalidad observadas. Dichas tasas, es una relación entre las defunciones y la población de un país en un determinado año, multiplicado por cada 1.000 habitantes. El modelo se presenta formalmente en la siguiente ecuación:

$$\text{Log}(m_{xt}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{xt} \quad [1]$$

En Donde las variables se definen de la siguiente manera:

$\log(m_{xt})$: Es el logaritmo natural de la tasa de mortalidad en el grupo de edad x en el período t .

a_x : Se refiere al patrón general de la mortalidad por año.

b_x : Mide el cambio porcentual en la tasa logarítmica ante un cambio de una unidad de la variable no observable.

k_t : Se conoce como el índice de mortalidad para el tiempo t y refleja específicamente la tendencia de la mortalidad. Además, puede ser negativa para mostrar las variaciones en la dinámica de las tasas de mortalidad común.

ε_{xt} : Es un término error, el cual, se supone que es ruido blanco, y muestra las influencias no capturadas por el modelo.

Cabe resaltar, que los parámetros a_x y b_x dependen únicamente de las tasas de mortalidad del grupo de edad analizado y no cambian en el tiempo.

Adicionalmente, para que los parámetros del modelo tengan solución única, ya que el modelo presenta problemas de identificación, debe cumplirse la restricción de que $\sum_{\forall x} b_x = 1$ y $\sum_{\forall x} k_t = 0$. Por ende, en este caso se tiene que ax son promedios temporales de la tasa de mortalidad específica y que bx está completamente identificado.

La estimación del modelo no se puede hacer a través de un modelo de regresión lineal, por el hecho de que la variable regresora es no observable. En consecuencia, la estrategia de estimación consiste en utilizar la Descomposición de Valor Singular o Componentes Principales, comúnmente aplicados en los Modelos por Factores, de manera que, se obtiene la estimación de los coeficientes y de la variable no observable.

5.2 Descomposición de Valor Singular

El proceso de estimación de los parámetros se hace a través de la metodología de Descomposición del Valor Singular (SVD por sus siglas en ingles), la cual ya está contenida en la librería de Demography perteneciente al Programa Estadístico de R.

Acorde con el artículo de Ochoa (2015), se encuentra la planteada la metodología de SVD de la siguiente manera:

La estimación del Modelo de Lee-Carter se basa en minimizar de la función

$$D(\alpha, \beta, k) = \sum_{x,t} (\log(m_{x,t}) - (\alpha_x + \beta_x k_t))^2 \quad [2]$$

Donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n_a}$, y $k \in \mathbb{R}^{n_c}$. En forma matricial, si $M = [\log(m_{x,t})] \in \mathbb{R}^{n_a \times n_c}$, $\underline{1}_{n_c} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^{n_c}$, donde la ecuación [3] se puede expresar de la siguiente manera:

$$D(\alpha, \beta, k) = \left\| M - \underline{\alpha} \underline{1}'_{n_c} - \underline{\beta} \underline{k}' \right\|_2^2 \quad [3]$$

Donde $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j |A_{ij}|^2}$ es la norma Frobenius para matrices. A partir de la ecuación $\partial D / \partial \underline{\alpha} = \underline{0}$, las restricciones planteadas en el modelo para tratar el problema de identificabilidad permiten obtener como solución el vector dado por los promedios de las filas de M , $\underline{\hat{\alpha}} = \frac{1}{n_c} M \underline{1}_{n_c}$. Reemplazando esta solución en la ecuación [3], el paso siguiente consiste en minimizar con respecto a $(\underline{\beta}, \underline{k})$, originado la función [4]:

$$D(\alpha, \beta, k) = \left\| M - \underline{\hat{\alpha}} \underline{1}'_{n_c} - \underline{\beta} \underline{k}' \right\|_2^2 \quad [4]$$

La minimización de la ecuación anterior es un caso particular del problema general de aproximar una matriz dada H por otra matriz de rango o menor, X , es decir se trata de encontrar $\hat{X}$ tal que:

$$\hat{X} = \underset{rank(X) \leq r}{argmin} \|H - X\|_2 \quad [5]$$

Donde $r = rank(H)$. La solución $\hat{X}$ se puede encontrar mediante la descomposición singular de la matriz H .

El autor plantea, que el teorema de descomposición singular de una matriz según Shores (2004), establece que dada una matriz $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se pueden definir dos matrices ortogonales (sus columnas son vectores ortogonales) $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tales que $H = U \Sigma V'$, donde $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz diagonal $\Sigma = diag(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, con $p = \min(m, n)$ y $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$. Los valores σ_j se denominan valores singulares de H , las columnas de U los vectores singulares izquierdos y las de V vectores singulares derechos. Si $r \leq \min(m, n)$ es el rango H se cumple $\sigma_r > 0$ y $\sigma_{r+1} = 0$. El siguiente resultado es un corolario de este teorema. Si $U = [u_1, \dots, u_m]$, $V = [v_1, \dots, v_n]$ entonces se cumple la siguiente descomposición:

$$H = \sum_{j=1}^r \sigma_j u_j v_j' \quad [6]$$

La matriz original debe ser real, con el objetivo de no generar números complejos ya que los valores singulares σ_j son reales no negativos y los vectores u_j, v_j son reales.

La solución $\hat{X}$ a la ecuación [5] para $rank(X) = h < r = \min(m, n)$ esta dada por la siguiente expresión, establecida en Eckart y Young (1936):

$$\hat{X} = \sum_{j=1}^h \sigma_j u_j v_j'$$

Aplicando este resultado a la matriz $H = M - \hat{\alpha} \underline{1}'_{n_c}$, suponiendo $n_a = m < n = n_c$, con $r = n_a$ se obtiene:

$$M - \hat{\alpha} \underline{1}'_{n_c} = \sum_{j=1}^h \sigma_j u_j v_j' \quad [7]$$

5.3 Valor en Riesgo (VaR)

Conforme con el artículo de Manotas et al. (2016), el Valor en Riesgo es un método estadístico que permite medir la exposición a diferentes riesgos, en este caso se utiliza para medir los riesgo de longevidad y mortalidad. Dicho método se define como la máxima perdida esperada que podría presentarse durante un periodo y un nivel de confianza dado.

Una forma de calcular el Valor en Riesgo, es decir determinar el cuantil en pérdidas, es suponiendo que sigue una distribución normal, la cual se puede representar de la siguiente forma:

$$VaR_{(1-\alpha)} = \mu + \sigma \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

Donde α es el nivel de significancia, μ y σ son estimación de la media y desviación estándar respectivamente, y Φ^{-1} es la generalizada de la función de distribución normal estándar.

Para este caso, se calcula el Valor del Riesgo al 90% de confianza, y con este, se gráfica los intervalos de confianza del pronóstico obtenido con el modelo de Lee-Carter. De esta

manera, se determina que el riesgo de Longevidad es la posibilidad de estar por debajo de la tendencia pronosticada y el riesgo de mortalidad estar por encima.

6. Estimación y Resultados

6.1 Datos

Se emplea para el caso colombiano la información suministrada por la página oficial del DANE, en la cual, se toman las defunciones no fetales y las proyecciones de la población, desagregando por sexo y rangos quinquenales (Ver Tabla 1), para el periodo comprendido entre 1985 al 2015².

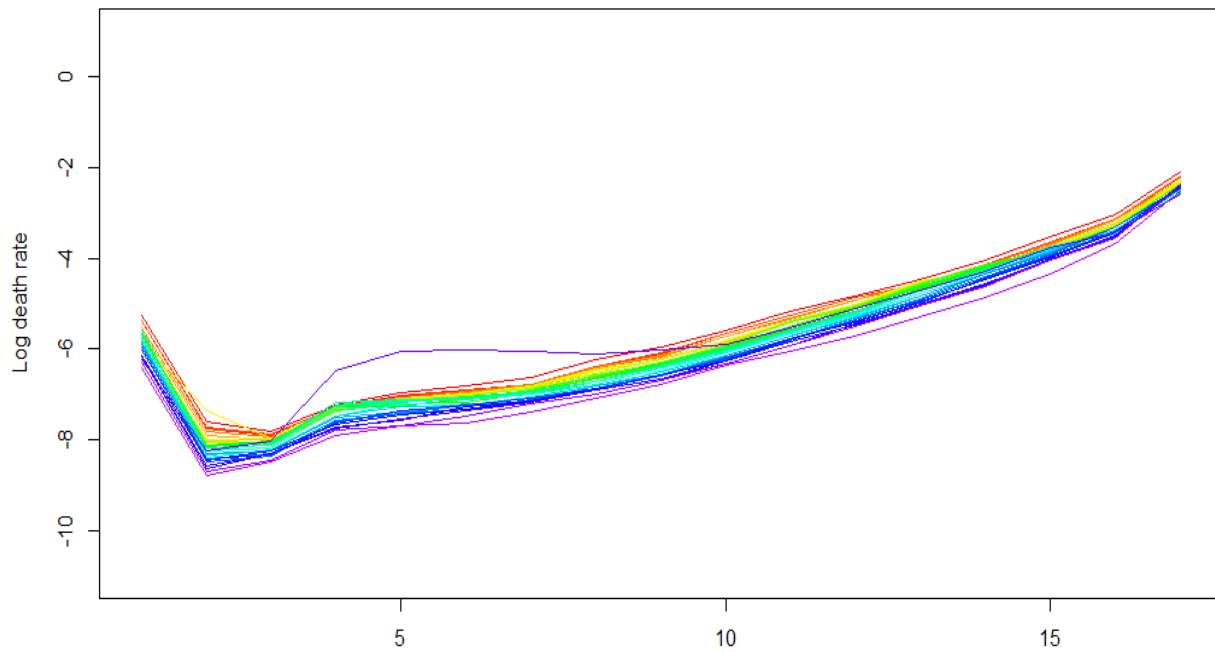
Tabla 1. Rangos de edades quinquenales para hombres y mujeres

1	2	3	4	5	6
< 4 años	5-9 años	10-14 años	15-19 años	20-24 años	25-29 años
7	8	9	10	11	12
30-34 años	35-39 años	40-44 años	45-49 años	50-54 años	55-59 años
13	14	15	16	17	
60-64 años	65-69 años	70-74 años	75-79 años	80 <	

Las Gráficas 2 y 3 representan las tasas logarítmicas de mortalidad para hombres y mujeres, en Colombia para el periodo de 1985-2015:

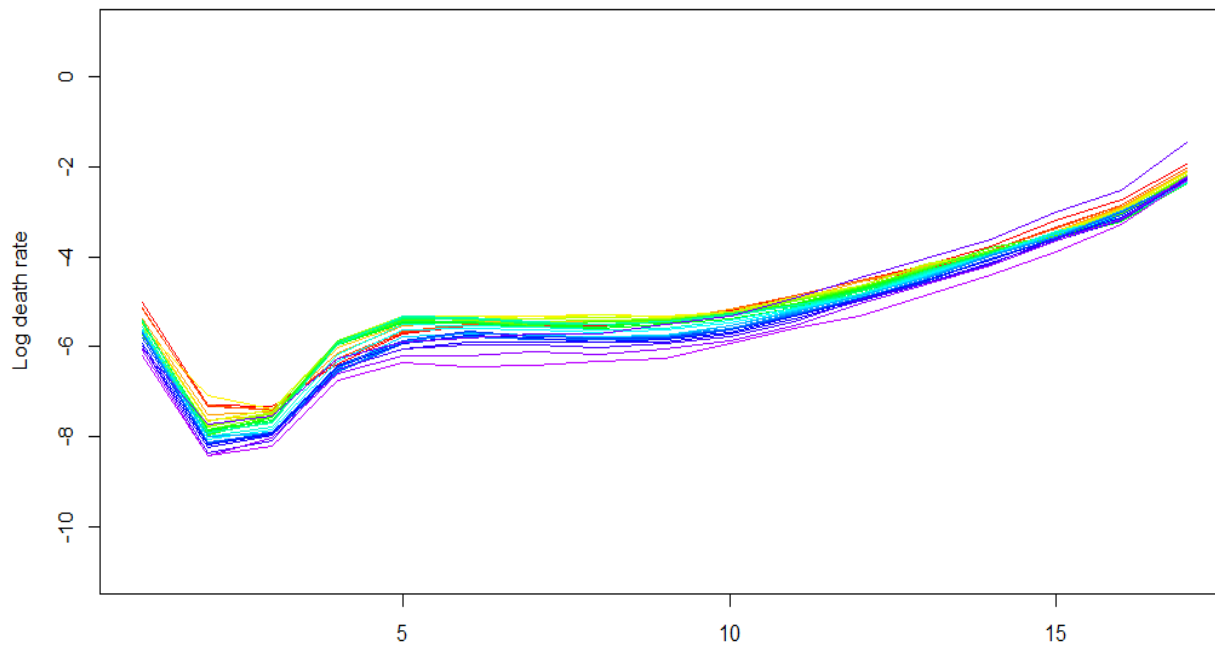
² Para el año 2015 los datos son preliminares y tienen una periodicidad trimestral, debido a que las cifras definitivas se publican 18 meses después del año de referencia.

Gráfica 2. Tasas logarítmicas de mortalidad de mujeres en Colombia 1985-2015



Fuente: Elaboración propia usando paquete Demography en R.

Gráfica 3. Tasas logarítmicas de mortalidad de hombres en Colombia 1985-2015



Fuente: Elaboración propia usando paquete Demography en R.

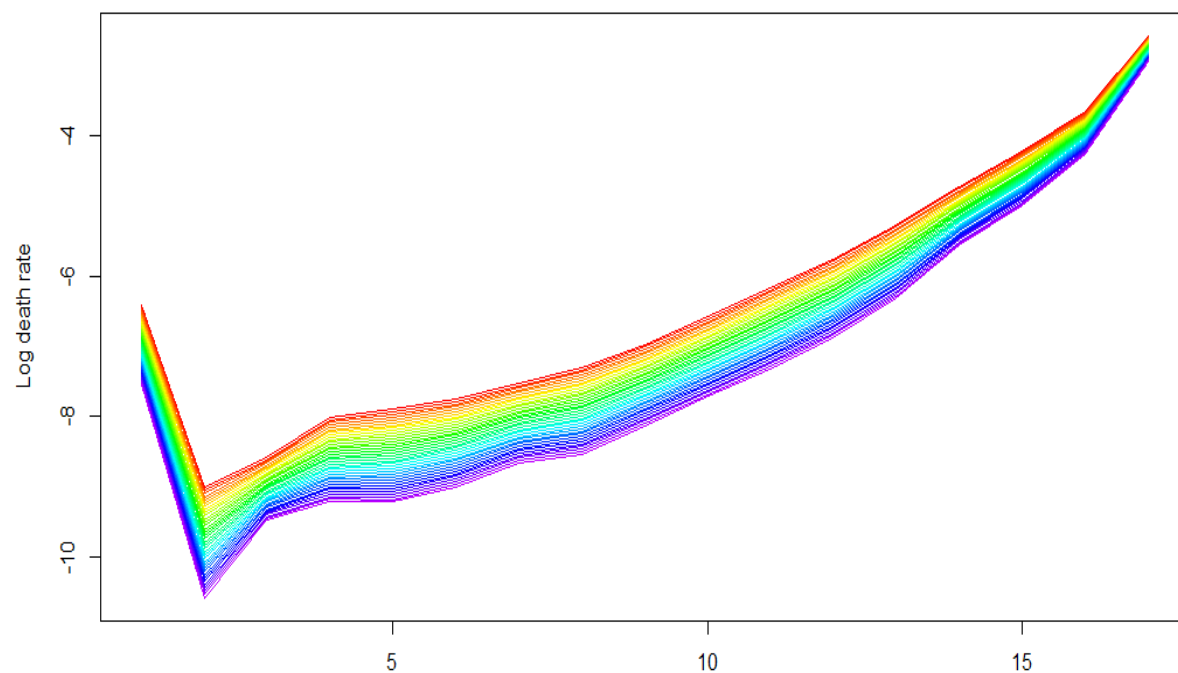
Las gráficas anteriores muestran la evolución de las tasas de mortalidad observadas en los últimos 30 años, tanto para hombres como mujeres, en escala logarítmica. Se puede apreciar que las tendencias son decreciente en los tres primeros rangos quinquenales de ambos sexos. Después de dichos rangos, la tasa de mortalidad presenta un notable aumento sostenido, siendo más pronunciada para los hombres, probablemente debido a las dinámicas sociales presentadas en Colombia, para este género en especial.

Adicionalmente, de manera general se puede visualizar importantes reducciones en las tasas de mortalidad cuando se hace la comparación por periodos, lo cual es coherente con lo encontrado en la literatura, y posiblemente esté relacionado con el desarrollo social, económico, y avances tanto en la medicina como en las ciencias.

6.2 Estimación

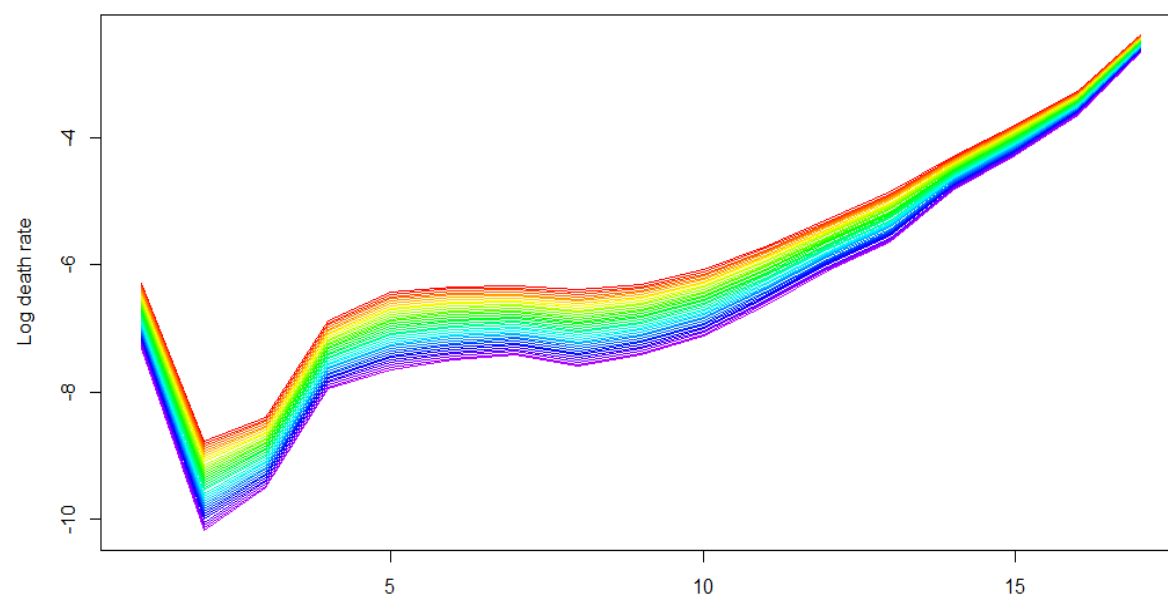
De acuerdo al modelo de mortalidad de Lee-Carter y usando el método de Descomposición de Valor Singular (SVD), se obtiene como resultado el pronóstico de las tasas de mortalidad diferenciado para hombres y mujeres para el periodo comprendido entre 2016 y 2050. Las Gráficas 4 y 5 muestran las dinámicas de las tasas de mortalidad. Se observa que el comportamiento por edad de las proyecciones obtenidas guarda similitud con el comportamiento de la muestra.

Gráfica 4. Dinámicas de la tasa de mortalidad de mujeres en Colombia 2016-2050



Fuente: Elaboración propia usando paquete Demography en R.

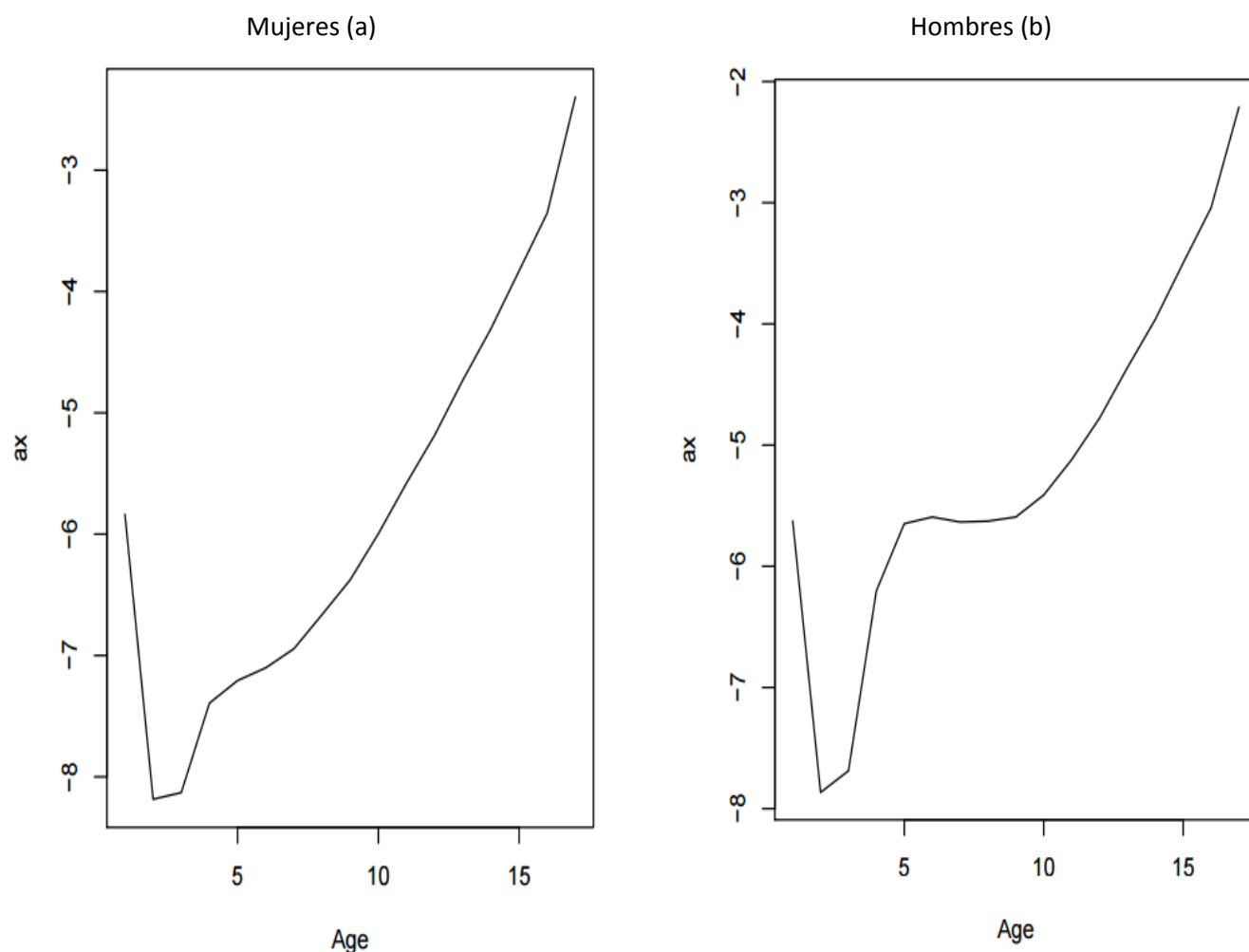
Gráfica 5. Dinámicas de la tasa de mortalidad de hombres en Colombia 2016-2050



Fuente: Elaboración propia usando paquete Demography en R.

El parametro a_x es el comportamiento general de la mortalidad en los periodos analizados y en los distintos rangos de edad, dicha dinámica se pueden apreciar en la Gráfica 6, donde se evidencia el patrón seguido por las tasas de mortalidad por sexo. Tales tendencias suelen presentar forma de “u”, ya que en los primeros rangos de edad la mortalidad disminuye y empieza a aumentar despues de estos (García et al. 2012).

Gráfica 6. Estimación del parametro a_x en hombres y mujeres

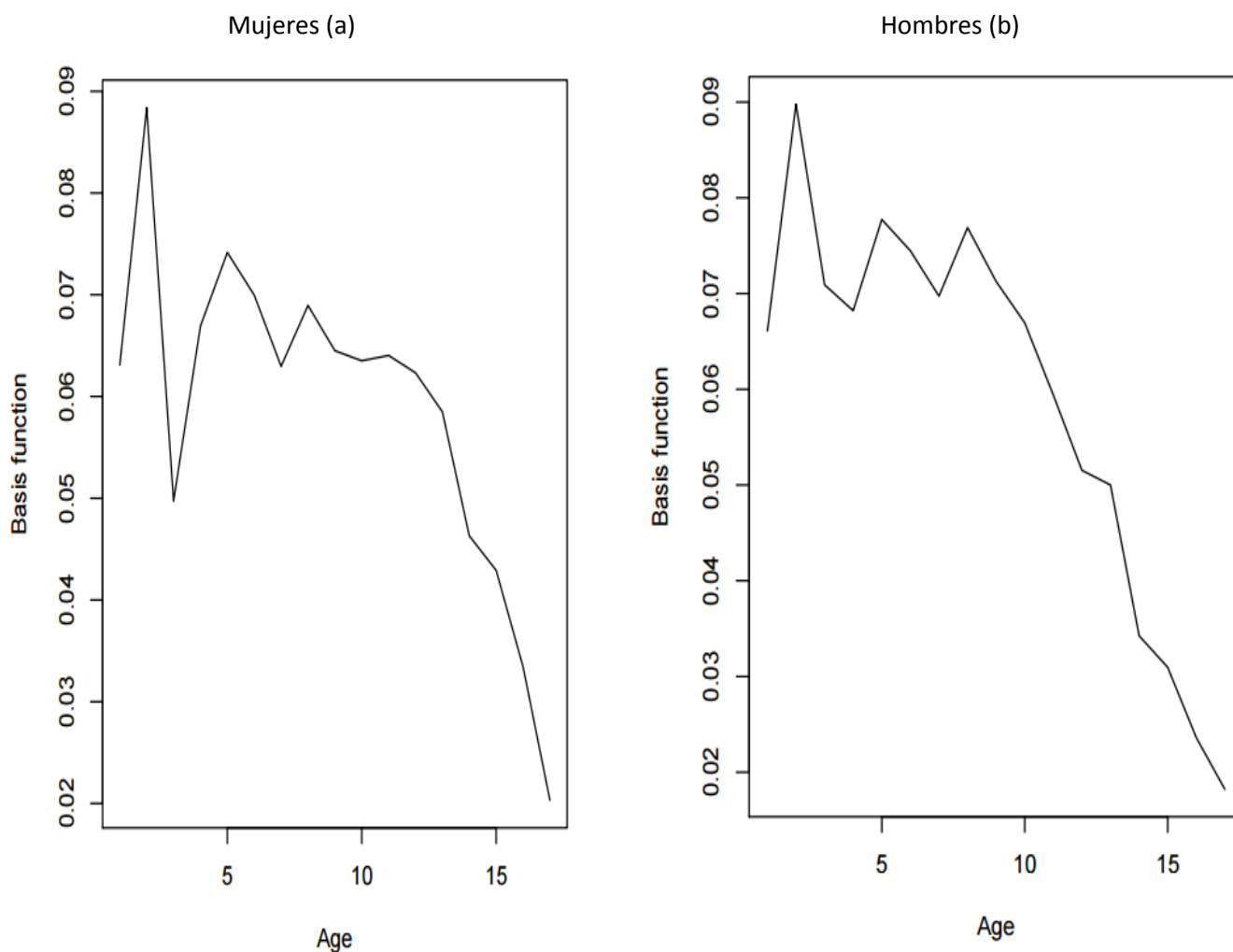


Fuente: Elaboración propia usando paquete Demography en R.

Por su parte, el parámetro b_x como se mencionó anteriormente, mide la sensibilidad de la tasa de mortalidad específica antes cambios en la variable k_t . Se observa la estimación de dicho parámetro en la Gráfica 7, en la cual se puede ver una importante diferencia en la

intensidad en la mortalidad de los hombres y de las mujeres en Colombia, para los distintos rangos de edad.

Gráfica 7. Estimación del parametro b_x en hombres y mujeres



Fuente: Elaboración propia usando paquete Demography en R.

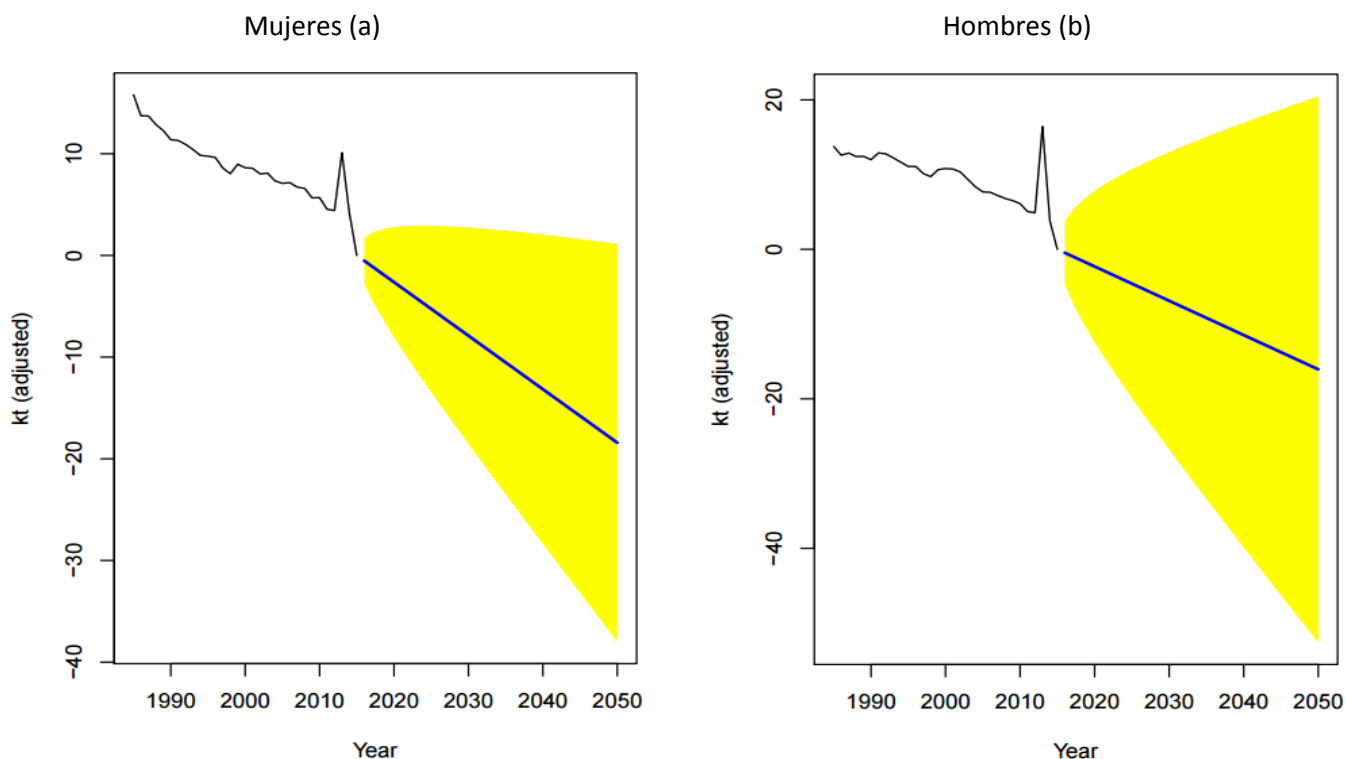
6.3 Pronóstico en la tasas de Mortalidad

La variable k_t se refiere al índice de mortalidad en el tiempo. La estimación de dicho índice se puede apreciar en la Gráfica 8, en la cual, se puede observar que el comportamiento de las tasas de mortalidad por sexo, en los últimos 30 años para el caso colombiano ha tenido una clara tendencia decreciente, siendo un poco más significativa en las mujeres.

Por otra parte, en la misma gráfica también permite visualizar la proyección de k_t que arroja el modelo de Lee-Carter, es decir, el pronóstico de la tasa de mortalidad general para Colombia. La predicción fue realizada hasta el año 2050, donde claramente se observa que para ambos sexo, dichas tasas de mortalidad siguen disminuyendo considerablemente, al igual que en la idea anterior, se puede afirmar que se presenta una variación más relevante para las mujeres.

La gráfica 8 también contiene los intervalos de confianza (franjas de color amarillo) que fueron construidos a partir del método de Valor en Riesgo -método incluido en la librería de R- a un nivel de significancia del 90%. Esto permite conocer los riesgos de interés. Como se referencio anteriormente, el riesgo de longevidad en este caso se considera como la desviación a la baja de las tasas de mortalidad con respecto a la tendencia pronosticada y por ende, riesgo de mortalidad desviación por encima, lo cual se puede observar en dicha gráfica.

Gráfica 8. Dinámica y pronóstico de k_t



Fuente: Elaboración propia usando paquete Demography en R.

Es importante resaltar que los intervalos de confianzas observados en la gráfica anterior, se amplían a medida que aumentan los años del pronóstico para ambos sexos.

6.4 Comparación en los pronósticos

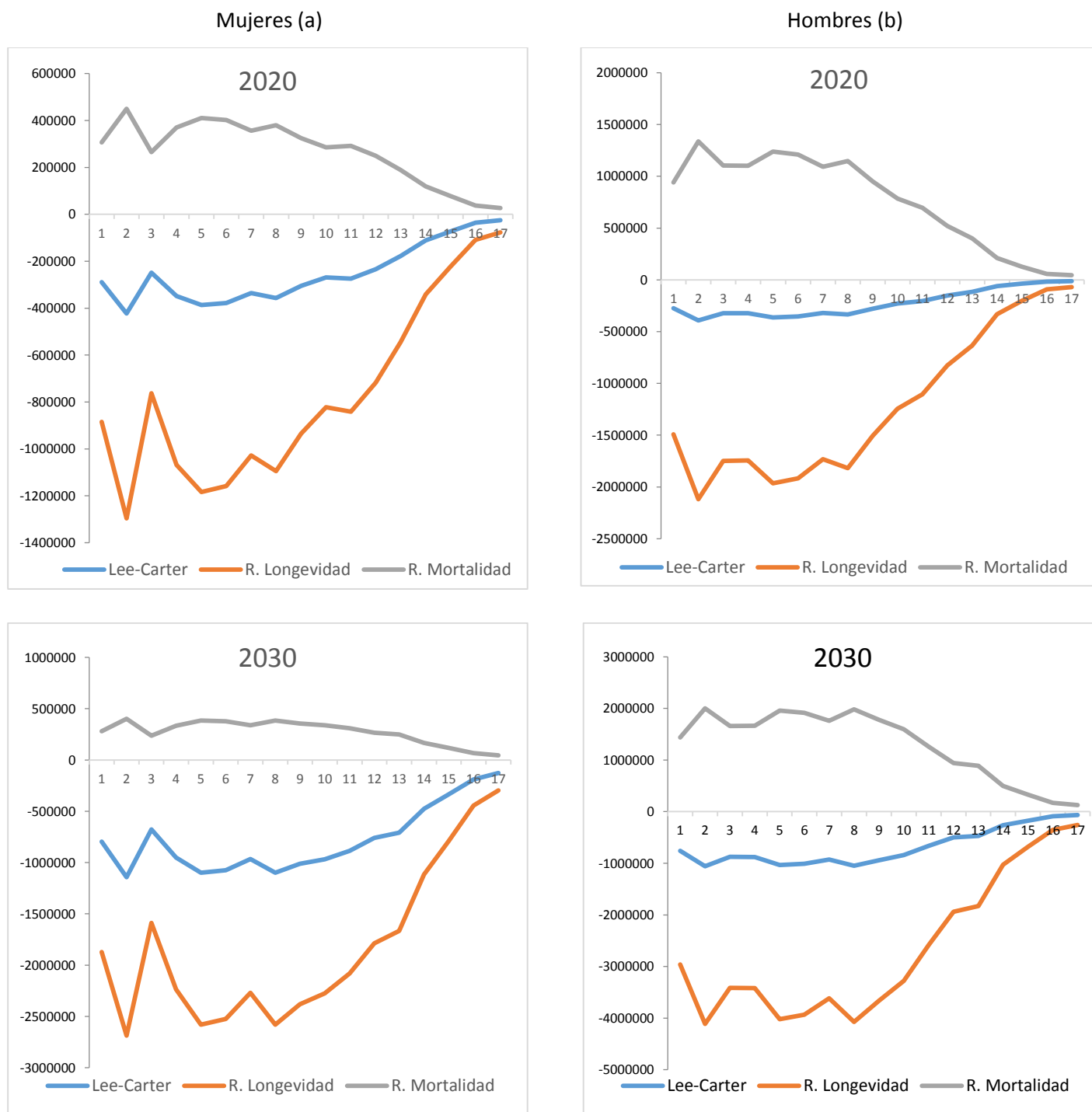
Una vez pronosticadas las tasas de mortalidad en Colombia, el paso siguiente es calcular un conjunto de tres curvas que permita hacer una comparación entre las dinámicas de las tasas de mortalidad en los diferentes rangos de edad con respecto a la estimación arrojada por Lee-Carter, y los resultados obtenidos al tener en cuenta los riesgos de Mortalidad y Longevidad. Por consiguiente, esto posibilita determinar la cuantía de personas se esperaría que fallezcan en un determinado año, pero también conocer tanto la cantidad de individuos que podrían sobrevivir a lo que se predijo (longevidad), así como el número de muertos de más que se podrían presentar (mortalidad), siguiendo los intervalos de confianza que se obtuvieron con el modelo de Valor en Riesgo.

Para este paso se decidió por simplicidad hacer el análisis por decenios. Es decir, para los años 2020, 2030, 2040 y 2050. Para el caso de la estimación de Lee-Carter, el proceso consiste en multiplicar el parámetro k_x común de cada uno de los años en mención con las proyecciones de la población desagregada por rango de edad (obtenidas de la CEPAL³) y, a su vez multiplicar por el b_x correspondiente. Para los dos casos faltantes, solo se trata de multiplicar por el intervalo de confianza inferior para hallar la tendencia de longevidad o superior si se desea es conocer la de mortalidad.

En la Gráfica 9, se presenta las tres curvas en hombres y mujeres con el procedimiento descrito anteriormente:

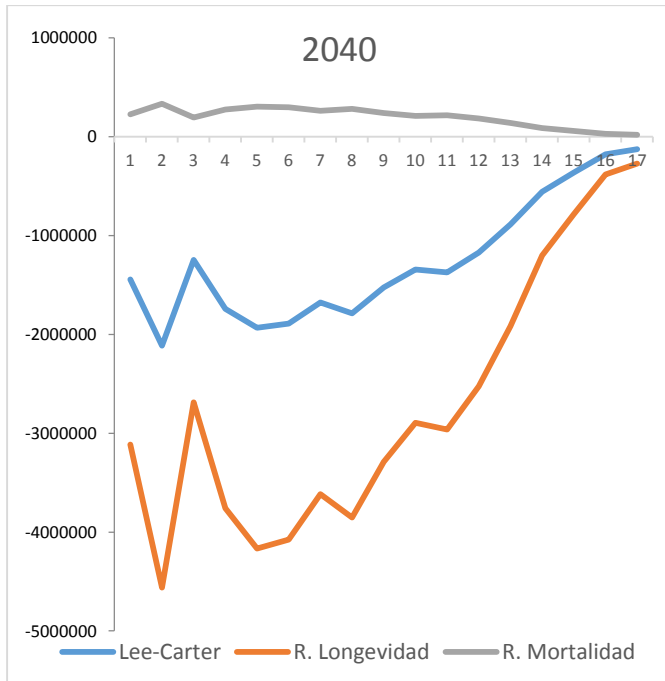
³ Se tomó las proyecciones realizadas por la CEPAL ya que el pronóstico de la población en el DANE solo estaba hasta el 2020

Gráfica 9. Escenarios de la dinámica de mortalidad en Colombia en hombres y mujeres

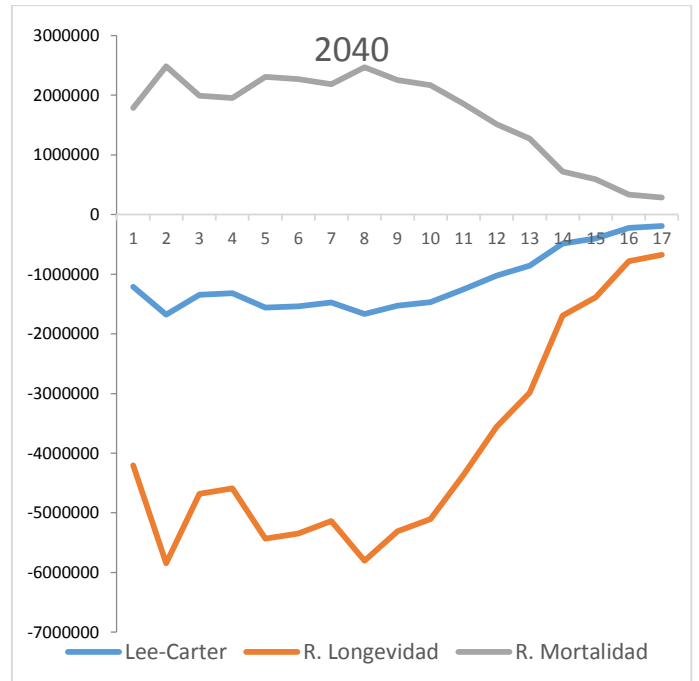


Fuente: Elaboración propia

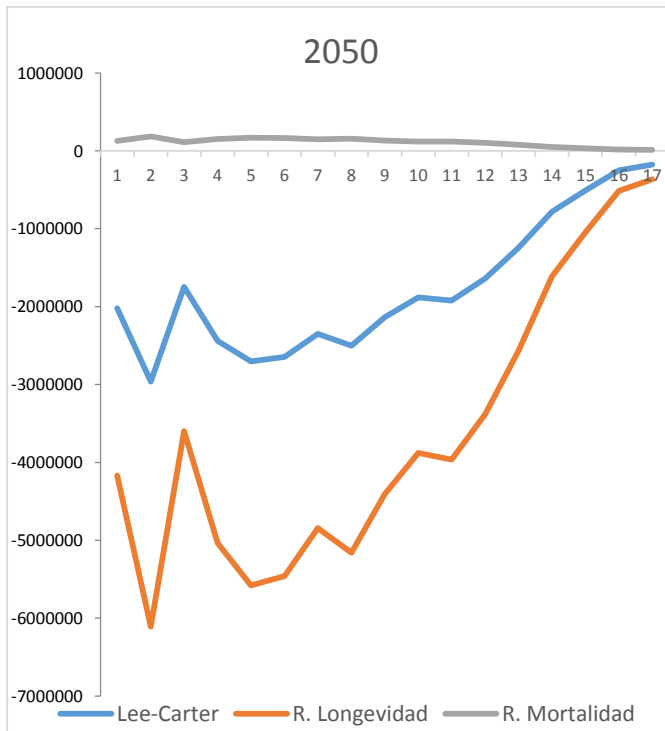
Mujeres (a)



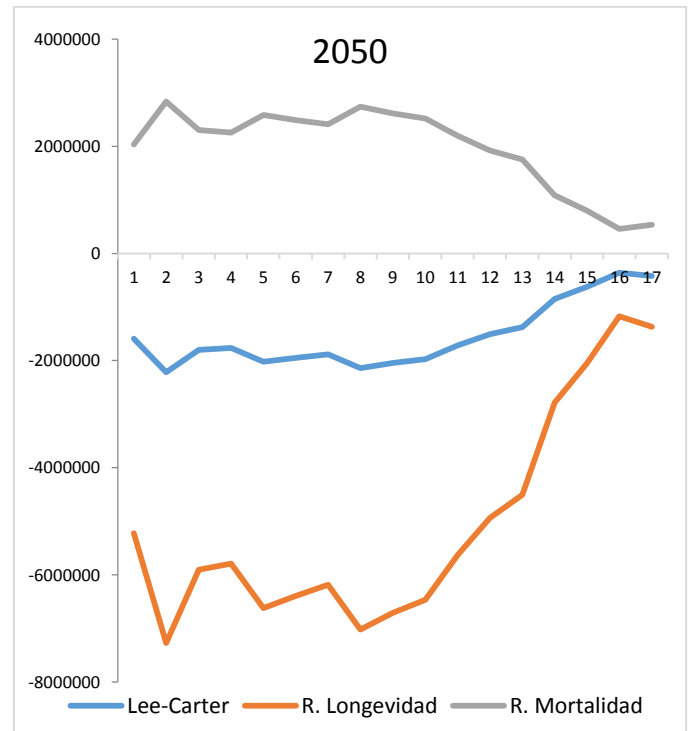
Hombres (b)



2050



2050



Fuente: Elaboración propia.

Se observa que para hombres y mujeres, los escenarios analizados en la dinámica de la mortalidad en los diferentes años, presentan tendencias simétricas, lo cual se debe a la forma en que el modelo de Lee-Carter realiza la estimación.

Por otra parte, a partir de las anteriores gráficas se puede afirmar que el riesgo de mortalidad, afecta cada vez menos a las mujeres al pasar de los años en comparación con los hombres. Asimismo, a simple vista es relevante resaltar que en ambos casos, el riesgo de longevidad es de suma importancia al predecir las tasas de mortalidad, dado que este análisis presenta considerables cuantías de individuos que se alejan por debajo de la tendencia pronosticada de acuerdo con el modelo utilizado.

7. Conclusiones

El presente estudio tuvo como principal objetivo abordar un tema poco explorado en la literatura nacional, pero de suma importancia para agentes tanto de sector público como privado. Se trata del riesgo de longevidad y el riesgo de mortalidad. De esta forma se buscó aportar información relevante y detallada sobre el pronóstico de las tasas de mortalidad en Colombia y por ende sobre los riesgos en mención.

A lo largo del documento se expusieron los principales argumentos que justifican el interés de medición de estos riesgos, en distintos escenarios. Especialmente para los fondos de pensiones, las empresas aseguradoras y para la realización de políticas gubernamentales.

Para este fin se propuso un ejercicio empírico que hizo uso de un modelo clásico de la literatura actuarial como lo es el de Lee-Carter, ya que su principal ventaja es la parsimonia. Además, se combinó con técnicas de economía financiera, como es el caso del modelo de Valor en Riesgo (VaR), a partir del cual se construyeron los intervalos de confianza, que permitieron hacer la medición de los riesgos de longevidad y mortalidad.

De acuerdo a la estimación, se puede afirmar que la evolución de las tasas de mortalidad en Colombia presenta una tendencia decreciente, siendo más significativas para las mujeres

que para los hombres, tanto dentro de la muestra como en el pronóstico. Es importante mencionar que dicha tendencia es acorde con lo encontrado en la literatura internacional, y posiblemente esté relacionada con el desarrollo social, económico, y los avances, tanto en la medicina como en las ciencias. Además, con los resultados obtenidos del VaR, se llega a la conclusión que el riesgo de mortalidad afecta menos a las mujeres en comparación con los hombres. En cuanto al riesgo de Longevidad, se observa fuerte incidencia en ambos casos.

Por consiguiente, no cabe duda que es un importante avance en la medición de los riesgos de interés, lo cual conlleva que, tanto los fondos de pensiones, empresas o compañías aseguradoras, como los hacedores de políticas gubernamentales, generen alternativas y herramientas a la hora de enfrentar dichos riesgos en la elaboración sus pronósticos, permitiendo gozar de resultados más óptimos y eficientes para la toma de sus decisiones.

Este trabajo abre las puertas a una exploración más exhaustiva en el tema, que permita obtener una variedad de instrumentos para gestionar los riesgos de mortalidad y longevidad. Así como la exploración de variaciones en la metodología de proyecciones de las tasas de mortalidad, ya sea por la implantación de otros modelos como es caso el modelo de Renshaw y Haberman, el modelo de ADC, el modelo de B-splines y P-splines, el modelo CBD, el modelo CBD con efecto Cohorte, el modelo CBD con Efecto cohorte y componente cuadrático y el modelo con efecto de cohorte decreciente con el tiempo, que según otros autores gozan de mayor ajuste en otras bases de datos. Otra opción en la modelación se puede optar por hacer diferenciación ya sea por regiones geográficas, socioeconómica o nivel educativo.

En relación con lo anterior, desde el punto de vista de la econometría, se puede incorporar también pruebas estadísticas que permita mirar el comportamiento del parámetro de k_t , particularmente el de raíz unitaria y cointegración, que son importantes alternativas en el pronóstico de series de tiempo.

Por otro lado, sería importante incluir en el análisis de los tres factores importantes en las proyecciones de la tasas de mortalidad como es el caso de los riesgos de modelación, idiosincrático y tendencia.

Con respecto a los riesgos de Mortalidad y Longevidad se podrían utilizar las alternativas financieras como TVaR, planteada por Chuliá et al (2015), o CoVar empleada por Manotas et al. (2016), las cuales podrían arrojar mejores resultados, debido a que va más allá de la media y varianza utilizada en el VaR de este documento.

Finalmente, es de suma importancia resaltar la necesidad de la actualización constante los datos de demográficos en Colombia.

Bibliografía

Aguilar, E. (2013). Estimación y proyección de la mortalidad para Costa Rica con la aplicación del método Lee-Carter con dos variantes. *Población y Salud en Mesoamérica, Revista electrónica semestral, ISSN-1659-0201, 11(1)*.

Aguilera, R. (2015). Instrumentos financieros vinculados a la mortalidad. Análisis del mercado y medición del riesgo de crédito. *RIUMA, Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga*.

Albarrán, I., Ariza, F., Cóbrecas, V., & Rodríguez, J. (2014). El riesgo de longevidad y su aplicación en práctica a Solvencia II. *Fundación Mapfre*.

Belliard, M., & Williams, I. (2013). Proyección estocástica de la mortalidad. Una aplicación de Lee-Carter en la Argentina. *Revista Latinoamericana de Población, 129-148*.

Benjamin, B., & Pollard, J. (1992). *The analysis of mortality and other actuarial statistic* (6 ed.). London.

Bernstein, P. L. (1996). *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*. New Yor: Wiley.

- Biagini, F., Botero, C., & Schreiber, I. (2015). Risk-minimization for life insurance liabilities with dependent mortality risk. *Mathematical Finance*.
- Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C. (1986). Actuarial Mathematics. *The Society of Actuaries*.
- Bravo, J. M., & Díaz, J. (2014). ¿La longevidad es un riesgo asegurable? Cubriendo lo Incubrible. *Instituto BBVA de pensiones*.
- Brouhns, N., Denuit, M., & Vermunt, J. (2002). A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 31, 373-393.
- Chuliá, H., Guillén, M., & Uribe, J. M. (2016). Modelando el riesgo de Longevidad con los modelos Factoriales Dinámicos Generalizada y la Vid-Cópula. *ASTIN Bulletin: The Journal of the International Actuarial Association*, 46(1), 165-190.
- Debón, A., Martínez, F., Montes, F., & Moshuk, M. (2010). Proyección de los indicadores de mortalidad. *Estadística Española*, 57(188), 291-321.
- Devolder, P., & Piscopo, G. (2014). Solvency Analysis of defined benefit pension schemes. *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, 141-150.
- Dushi, I., Friedberg, L., & Webb, T. (2010). The impact of aggregate mortality risk on defined benefit pension plans. *Journal of Pension Economics & Finance*, 9(4), 481-503.
- Federación Internacional de Administradoras de Fondos de Pensiones, F. (2015). Riesgo de Longevidad y Mecanismo para su mitigación.
- García, V., & Ordorica, M. (2012). Proyección estocástica de la mortalidad mexicana por medio del método de Lee-Carter. *Redalyc*, 27(2), 409-448.
- Hanewald, K., Post, T., & Gründl, H. (2011). Stochastic mortality, macroeconomic risks and life insurer solvency. *The Geneva Papers on Risk and Insurance-Issues and Practice*, 36(3), 458-475.

- Hári, N., De Waegenaere, A., Melenberg, B., & Nijman, T. E. (2008). Longevity risk in portfolios of pension annuities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42(2), 505–519.
- Lee, R. D., & Carter, L. R. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419), 659-671.
- Liang, Z., & Ma, M. (2015). Optimal dynamic asset allocation of pension fund in mortality and salary risks framework. *Insurance: Mathematics and Economics*, 64, 151-161.
- Lora, E. (2008). *Técnicas de medición económica: Metodología y aplicación en Colombia*. Bogotá: Alfaomega.
- Manotas, D., Ulloa, I., & Uribe, J. M. (2016). Medición del Riesgo asociado con factores demográficos en el ambito empresarial. *Revista de Ingenierías, Universidad de Medellín*. , Por aparecer.
- McNeil, A., Frey, R., & Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton Series in Finance.
- Mora, C. (2011). Las rentas vitalicias. *Fasecolda*.
- Ochoa, C. A. (2015). El modelo Lee-Carter para estimar y pronosticar mortalidad: una aplicación para Colombia. *Universidad Nacional de Colombia, sede Medellin*.
- Olivieri, A. (2011). Stochastic mortality: experience-based modeling and application issues consistent with Solvency 2. *European Actuarial Journal*, 1(1), 101–125.
- Orlando, A., Di Lorenzo, G., & Politano, M. (2014). A stochastic quantile approach for longevity risk. *Investment Management and Financial Innovations*, 11(4), 143-141.
- Richards, S., & Jones, G. (2004). Financial aspects of longevity risk. *The Staple Inn Actuarial Society*.
- Rodríguez, H., & Zarruk, A. (2011). Cálculo del riesgo de longevidad usando el modelo de Lee-Carter. *Universidad Nacional de Colombia, Bogotá*.

- Santa María, M., Steiner, R., Botero, J. H., Martínez, M., & Millán, N. (2010). El sistema pensional en Colombia: Retos y alternativas para aumentar la cobertura. *Fedesarrollo*.
- Trigo, E., Moreno, R., Betzuen, A., De la peña, I., & Itucarricastro, I. (2013). Nuevos instrumentos para la gestión de los riesgos de Longevidad/Mortalidad. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 3(19), 101-134.
- Uribe, J. M. (2011). Mercado de Acciones Colombiano. Determinantes Macroeconómicos y Papel de las AFP. *CIDSE, Universidad del Valle*.
- Villegas, A. (2011). Riesgo de Longevidad: Característica e implicaciones. *III Simposio Internacional de Actuaría*.
- Villegas, A., & Haberman, S. (2014). On the Modeling and Forecasting of Socioeconomic Mortality Differentials: An Application to Deprivation and Mortality in England. *North American Actuarial Journal*, 18(1), 168-193.
- Wan, C., & Bertschi, L. (2015). Swiss coherent mortality model as a basis for developing longevity de-risking solutions for Swiss pension funds: A practical approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 63, 66-75.
- Wilmoth, J. (1993). Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change. *Technical Report. Department of Demography, University of California*.
- Yang, S. S., Yue, J. C., & Huang, H. C. (2010). models., Modeling longevity risks using a principal component approach: A comparison with existing stochastic mortality. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1), 254–270.