



Formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer año de
ingeniería en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales

Tesis doctoral

Leonel Monroy Guzmán

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Doctorado Interinstitucional en Educación Énfasis
Educación Matemática
2023



Formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer año de
ingeniería en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales

Leonel Monroy Guzmán

Dr. David Benítez Mojica

Director Trabajo de Grado

Dr. Manuel Santos Trigo

Co director Trabajo de Grado

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Doctorado Interinstitucional en Educación Énfasis

Educación Matemática

2023

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento a Dios por su guía y fortaleza. Su presencia en mi vida ha sido la principal fuente de inspiración. Le agradezco sobre todo por sus bendiciones y las oportunidades que me ha concedido.

Un especial agradecimiento para mi amada familia, especialmente a Sandra Lorena y Ana Isabel, quienes han sido mi apoyo incondicional durante todo este proceso. A mi familia en general, les agradezco de corazón por su paciencia y constante aliento. Sus oraciones, apoyo y motivación han sido fundamentales para superar los desafíos y alcanzar este importante logro.

Quiero extender el agradecimiento especial a mis respetados tutores, el Doctor Manuel Santos Trigo y el Doctor David Benítez. Su amistad, dedicación, conocimiento y orientación han sido invaluableles en cada etapa de este proyecto. Les agradezco por su tiempo y valiosas orientaciones, las cuales han contribuido significativamente a mi crecimiento personal y profesional.

Asimismo, agradezco a los Doctores Héctor Jairo Martínez, Jorge Enrique Fiallo y Marco Santillán por su lectura del trabajo y sus invaluableles aportes a la evolución del documento. También agradezco a los profesores del DIE por sus enseñanzas y orientaciones, así como a mis compañeros Arnulfo, Yonathan y Wilmer por su compañerismo y apoyo.

Quiero agradecer al Instituto GeoGebra Cali y, en particular, a los profesores César Cuartas, Hendel Yaker y Aníbal Sossa, por permitirme involucrar sus espacios académicos en la realización de los dos ciclos de investigación.

Agradezco a la Universidad del Valle por su auspicio y, en particular, a la Facultad de Educación y Pedagogía, y a la Facultad de Ciencias Naturales y Exactas. Mi agradecimiento se extiende a todas aquellas personas que, de una u otra manera, me han brindado su apoyo y aliento a lo largo de este camino. Sus palabras de ánimo, gestos de amistad y aliento constante han sido un verdadero motor para superar los obstáculos y perseverar en la consecución de esta meta académica.

Resumen

Esta investigación combinó diseño de intervención y análisis de la resolución de problemas de álgebra lineal con medios digitales. Se realizó una revisión bibliográfica para identificar problemáticas relacionadas con enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, así como el papel de las tecnologías digitales en este contexto. Se encontró que el enfoque tradicional de dedicar tiempo a operaciones rutinarias es la principal fuente de problemas.

Se abordó la problemática planteada por Sierpinska, quien distingue tres formas de razonamiento asociadas a diferentes lenguajes en la resolución de problemas de álgebra lineal. La flexibilidad entre estas formas de razonamiento es crucial para construir aprendizaje significativo.

Se diseñaron actividades para un curso universitario de álgebra lineal buscando fomentar los procesos centrales del pensamiento matemático y la flexibilidad en el razonamiento. Las preguntas de investigación se centraron en las características emergentes del razonamiento al utilizar medios digitales, las características del diseño de intervención que promueven la fluidez entre las formas de razonamiento y las nuevas demandas en la resolución de problemas utilizando tecnologías digitales.

El marco teórico e interpretativo se basa en resolución de problemas matemáticos con medios digitales. El análisis se centró en las características de las actividades que fomentaron la flexibilidad en el razonamiento y en las producciones de los estudiantes, que involucraban el uso de tecnologías digitales y diferentes formas de razonamiento. Los resultados principales destacan características matemáticas, didácticas, tecnológicas e históricas en las actividades del diseño de intervención, las cuales generaron nuevas demandas en la resolución de problemas de álgebra lineal.

Palabras claves: Matemáticas, Resolución de problemas, Tecnología digital, Educación matemática.

Abstract

This research combined intervention design and analysis of linear algebra problem solving with digital media. A bibliographic review was carried out to identify problems related to the teaching and learning of linear algebra, as well as the role of digital technologies in this context. The traditional approach of spending time on routine operations was found to be the main source of problems.

The problem posed by Sierpinska is addressed, who distinguishes three forms of reasoning associated with different languages in solving linear algebra problems. The flexibility between these forms of reasoning is crucial to construct meaningful learning.

Activities are designed for a linear algebra university course seeking to promote the central processes of mathematical thought and flexibility in reasoning. Research questions focused on emerging features of reasoning when using digital media, intervention design features that promote fluency between forms of reasoning, and new demands on problem solving using digital technologies.

The theoretical and interpretive framework is based on solving mathematical problems with digital media. The analysis focused on the characteristics of the activities that fostered flexibility in students' thinking and productions, which involved the use of digital technologies and different forms of reasoning. The main results highlight mathematical, didactic, technological, and historical characteristics in the intervention design activities, which generate new demands in solving linear algebra problems.

Keywords: Mathematics, Problem solving, Digital technology, Mathematics education.

Tabla de contenido

Resumen.....	3
Abstract	4
Índice de tablas	9
Índice de figuras	11
Introducción	12
Capítulo 1: Definición del problema.....	14
1.1. Introducción	14
1.2. Antecedentes históricos.....	14
1.2.1. Formas de Razonamiento en el álgebra lineal	15
1.3. Antecedentes de investigación	15
1.3.1. En cuanto a la enseñanza: El enfoque geométrico y el enfoque formal o axiomático	15
1.3.2.Comprensión de los estudiantes de algunos Conceptos Claves del álgebra lineal.....	20
1.3.3. El Papel de la tecnología en la Instrucción y La innovación en la enseñanza del álgebra lineal.....	21
1.4. Principales problemáticas señaladas: revisión de literatura.....	27
1.4.1. Educación tradicional: énfasis algorítmico.....	27
1.4.2. El problema de la falta de conocimientos previos	30
1.4.3. Problema del formalismo.....	30
1.4.4. Sincretismo.....	31
1.4.5. Conciencia Metacognitiva	32
1.5. Planteamiento del problema y preguntas de investigación	32
1.6. Justificación	34
1.6.1. El álgebra lineal y su creciente importancia en los programas de pregrado	34
1.6.2. Un problema local sin explorar	35

1.6.3.	Promoviendo el pensamiento matemático a través de las tecnologías digitales	37
1.6.4.	La importancia de las tecnologías digitales en la Educación Matemática	38
Capítulo 2: Marco Teórico		40
2.1	La Resolución de problemas Matemáticos con Medios.	40
2.1.1.	Postulado: Las matemáticas como una actividad de “Resolución de Problemas”	40
2.1.2.	¿Cómo Resolver Problemas? El legado de George de Pólya.....	41
2.1.3.	Con la mirada puesta en la Estrella Polar: La heurística moderna.....	42
2.1.4.	Estrategias heurísticas para todos	42
2.1.5.	Breve diccionario de estrategias heurísticas de Pólya	43
2.2.	Hacia un marco teórico de Resolución de Problemas: El trabajo de Alan H. Schoenfeld.....	45
2.2.1.	Problemas y la resolución de un problema.....	46
2.2.2.	¿Qué no es un problema?	46
2.2.3.	Tres contextos en el planteamiento de problemas	47
2.2.4.	La Resolución de Problemas: El corazón de las matemáticas.....	50
2.3.	Fundamentos del enfoque de Resolución de Problemas Matemáticos (MPS).....	51
2.3.1.	Los conocimientos de base (Recursos)	51
2.3.2.	Estrategia de resolución de problemas (estrategias heurísticas)	52
2.3.3.	Auto regulación, seguimiento y control: Metacognición.....	53
2.3.4.	Creencias y afectos.....	54
2.3.5.	El pensamiento teórico y el pensamiento práctico: herramientas de descripción	55
2.3.6.	El pensamiento creativo en la Resolución de Problemas	55
2.4.	Tecnologías digitales y Resolución de Problemas Matemáticos.....	57
2.5.	Unidad de construcción de conocimiento y Unidad básica de análisis.	57
2.5.1.	Diseño de actividades interactivas en ambientes de matemáticas dinámicas....	58
Capítulo 3: Marco Metodológico		61

3.	Investigación basada en el diseño: Cerrando la brecha.....	61
3.1.	Introducción	61
3.2.	Investigación Basada en el Diseño (IBD): Características principales.	61
3.2.1.	Creativa y visionaria: Nuevas estrategias traen nuevos resultados.....	62
3.2.2.	Contexto: Ecológicamente válido.....	62
3.2.3.	Intervencionista e Iterativa	63
3.3.	Fases de la investigación	64
3.3.1.	Fase 1: Planteamiento del Problema de Investigación	64
3.3.2.	Fase 2: Marco interpretativo y referencial	65
3.3.3.	Fase 3: Diseño de intervención	65
3.3.4.	Fase 4: Estudio Piloto	68
3.3.5.	Fase 5: Análisis de los datos	71
3.3.6.	Fase 6: Gramática Argumentativa y Confiabilidad	72
	Capítulo 4: Análisis de resultados	74
4.1.	Características del Entorno de Aprendizaje	74
4.1.1.	Tiempo y Participantes.....	74
4.1.2.	Partes del Diseño de Intervención	74
4.1.3.	Características del Aula	74
4.1.4.	Actividades Desarrolladas por los Estudiantes	75
4.1.5.	Actividades Desarrolladas por el Investigador	75
4.1.6.	Objetivos	76
4.2.	Análisis de la prueba diagnóstico	77
4.2.1.	Primer bloque de preguntas	77
4.2.2.	Segundo bloque de preguntas	79
4.2.3.	Tercer bloque de preguntas.....	80

4.2.4.	Cuarto bloque de preguntas	82
4.2.5.	Quinto bloque de preguntas	82
4.2.6.	Consideraciones Finales	85
4.3.	Análisis de las producciones de los estudiantes: Inferir, justificar y relacionar las distintas formas de razonamiento	87
4.3.1.	Hoja de trabajo: Tipos de Solución de los SEL 2X2.....	88
4.3.2.	Hoja de Trabajo: Hablemos de Matrices.....	108
4.3.3.	Hoja de Trabajo: Aplicaciones del Álgebra Lineal	120
Capítulo 5. Conclusiones		130
5.1.	Características de las Actividades del Diseño de Intervención que favorecen la fluidez entre las formas de razonamiento.....	130
5.2.	Nuevas demandas en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales. 136	
5.3.	Características Emergentes en la Formas de Razonamiento debido al uso coordinado de Tecnologías Digitales.....	141
5.4.	Sugerencias.	143
5.4.1.	Sugerencias Para la Investigación	143
5.4.2.	Sugerencias para la Formación de Profesores	144
5.4.3.	Sugerencias para la docencia.	144
5.4.4.	Sugerencias para el Diseño Curricular.....	145
Referencias bibliográficas		146

Índice de tablas

	PÁG.
TABLA 1: PROMEDIO DE NOTAS POR INGENIERÍA, POR AÑO Y GENERALES. -----	36
TABLA 2: TASAS DE REPROBACIÓN DE ÁLGEBRA LINEAL EN LOS ÚLTIMOS OCHO AÑOS, DE LOS DOCE PROGRAMAS DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE EN EL PERÍODO 2010 A 2017 -----	36
TABLA 3: FASES DE LA INVESTIGACIÓN.-----	64
TABLA 4 OBSTÁCULO EPISTEMOLÓGICO “PARADIGMA DE LA SOLUCIÓN” -----	78
TABLA 5 DISTRIBUCIÓN INICIAL DE LAS FORMAS DE RAZONAMIENTO ENCONTRADAS EN ESTA PARTE DEL DIAGNÓSTICO. -----	79
TABLA 6 ANÁLISIS DE LA CONSISTENCIA DE LA ELECCIÓN CON LA JUSTIFICACIÓN Y LAS FORMAS DE RAZONAMIENTO QUE PRESENTAN EN SUS AFIRMACIONES.-----	79
TABLA 7 FORMAS DE RAZONAMIENTO: TERCER BLOQUE DE PREGUNTAS -----	81
TABLA 8 FORMAS DE RAZONAMIENTO: PROBLEMA 1. -----	83
TABLA 9 FORMAS DE RAZONAMIENTO: PROBLEMA 2. -----	84
TABLA 10 FORMAS DE RAZONAMIENTO: PROBLEMA 3. SISTEMA INCONSISTENTE. -----	84
TABLA 11 DATOS CUANTITATIVOS SOBRE LOS RESULTADOS EN LOS BLOQUES DE PREGUNTAS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICO. NÚMERO DE ESTUDIANTES QUE PRESENTARON EL DIAGNÓSTICO: 24 ESTUDIANTES-----	87
TABLA 12 RESPUESTA A LA PREGUNTA 3 DEL EQUIPO A. -----	93
TABLA 13 RESPUESTA A LA PREGUNTA 3 DEL EQUIPO E. -----	94
TABLA 14 RESPUESTA A LA PREGUNTA 4 DEL EQUIPO A. -----	95
TABLA 15: RESPUESTA A LA PREGUNTA 4 DEL EQUIPO E.-----	97
TABLA 16 RESPUESTA A LA PREGUNTA III, EQUIPO A.-----	102
TABLA 17 RESPUESTA A LA PREGUNTA III, EQUIPO E.-----	103
TABLA 18 RESPUESTA A LA PREGUNTA 3, EQUIPO F.-----	104
TABLA 19 RESPUESTA A LA PREGUNTA 6 EQUIPO A Y E -----	105
TABLA 20 PRIMERA PARTE DE LA SOLUCIÓN A LA ACTIVIDAD 2 A). GRUPO A. -----	110
TABLA 21 PARTE FINAL SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 2 A) GRUPO A.-----	111
TABLA 22 PARTE FINAL SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 2 A) GRUPO A.-----	111
TABLA 23 PARTE FINAL SOLUCIÓN DE LA ACTIVIDAD 3 A) GRUPO A.-----	112
TABLA 24 NUEVAS DEMANDAS AL RESOLVER UN SEL.-----	115
TABLA 25 ACCIONES DE METACOGNICIÓN Y ALGUNAS INFERENCIAS INICIALES. -----	116
TABLA 26 CRITERIOS ESTABLECIDOS POR LOS ESTUDIANTES PARA RESOLVER UN SEL E INFERENCIAS. ----	117
TABLA 27 ANÁLISIS DE EXPRESIÓN DE GENES A TRAVÉS DEL ÁLGEBRA LINEAL. PARTE 1. -----	123

TABLA 28 SEGUNDA PARTE DEL ANÁLISIS DE LA PRODUCCIÓN DE LOS ESTUDIANTES DEL EQUIPO A.----- 126

TABLA 29 COMPARATIVO DE LAS DEMANDAS TRADICIONALES CON LAS QUE SE EMPLEAN EN LA ACTIVIDAD
CORRESPONDIENTE DEL DI. ----- 137

Índice de figuras

FIGURA 1 EJEMPLO DE LA VARIANTE REPRESENTACIÓN METAFÓRICA DEL ENFOQUE GEOMÉTRICO.....	17
FIGURA 2 TEOREMA DE RESUMEN DE DOS LIBROS DE TEXTOS TRADICIONALES.	31
FIGURA 3 FASES PARA RESOLVER PROBLEMAS EN CONTEXTO REAL.....	48
FIGURA 4 DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LA RESPUESTA 1 DEL PRIMER BLOQUE DE PREGUNTAS, TOMADA DEL FORMULARIO DE GOOGLE.	77
FIGURA 5 DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LA RESPUESTA A LA PREGUNTA DE SELECCIÓN MÚLTIPLE DEL SEGUNDO BLOQUE DE PREGUNTAS, TOMADA DEL FORMULARIO DE GOOGLE.	80
FIGURA 6: DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LA RESPUESTA A LA PREGUNTA DE SELECCIÓN MÚLTIPLE DEL TERCER BLOQUE DE PREGUNTAS, TOMADA DEL FORMULARIO DE GOOGLE.....	81
FIGURA 7: DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LA RESPUESTA A LA PREGUNTA DE SELECCIÓN MÚLTIPLE DEL CUARTO BLOQUE DE PREGUNTAS, TOMADA DEL FORMULARIO DE GOOGLE.	82
FIGURA 8 IMAGEN DEL APLET GEOGEBRA: SOLUCIÓN DE UN SISTEMA 2X2.	91
FIGURA 9 TABLA PARA ALMACENAR LA INFORMACIÓN INFERIDA DE LA ACTIVIDAD TIPO LABORATORIO Y PREGUNTA PARA EL ANÁLISIS.	93
FIGURA 10 IMÁGENES DE LA TABLA Y EL APLET DEL LABORATORIO DE LA SEGUNDA PARTE DE LA HOJA DE TRABAJO.....	100
FIGURA 11 REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ESCRITA DEL PROBLEMA 1, HOJA DE TRABAJO 1, PARTE 2.	100
FIGURA 12 PREGUNTAS QUE ORIENTAN EL ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES EN EL LABORATORIO.....	101
FIGURA 13 CÓDIGO QR DEL RECURSO DIGITAL QUE MUESTRA LA TRANSFERENCIA DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN EL CONTEXTO FORMAL.....	125
FIGURA 14 CÓDIGO QR DEL RECURSO DIGITAL QUE MUESTRA LA TRANSFERENCIA DE LA DESCOMPOSICIÓN SVD AL CONTEXTO CIENTÍFICO REAL.	125
FIGURA 15: ENUNCIADO E IMAGEN DEL APLET GEOGEBRA DEL PROBLEMA 3. PRIMERA JORNADA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (VER ANEXO 1. PÁGINA 12).....	132
FIGURA 16 ENUNCIADO E IMAGEN DEL APLET GEOGEBRA DEL PROBLEMA 3. PRIMERA JORNADA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (VER ANEXO 1. PÁGINA 16).....	134
FIGURA 17 PROBLEMA 2 DE LA HOJA DE TRABAJO: ELIMINACIÓN GAUSSIANA (VER ANEXO 1, P. 35).....	138
FIGURA 18 PROBLEMA 3 DE LA HOJA DE TRABAJO: ELIMINACIÓN GAUSSIANA (ANEXO 1, P. 35)	139

Introducción

El presente trabajo de investigación se centra en el diseño de actividades que abordan problemas del álgebra lineal en un contexto formal y analiza las formas de razonamiento que emplean los estudiantes al resolver dichos problemas utilizando tecnologías tipo CAS (Computer Algebra Systems, por sus siglas en inglés) y DGS (Dynamic Geometry Software, por sus siglas en inglés).

El primer capítulo introduce la naturaleza de la investigación y establece los antecedentes relacionados con el álgebra lineal, incluyendo el papel de la geometría en la enseñanza, la comprensión de los conceptos clave por parte de los estudiantes y el uso de la tecnología en la educación e innovación.

A través de una revisión de literatura, se identifican las principales problemáticas encontradas en la enseñanza del álgebra lineal, como el enfoque excesivamente algorítmico, la falta de conocimientos previos de los estudiantes y el formalismo excesivo. Estas problemáticas son consideradas al diseñar las actividades que conforman la primera versión del diseño de intervención.

Asimismo, se plantea la relevancia de esta investigación en el contexto actual, donde el álgebra lineal ha adquirido una creciente importancia debido a la vectorización digital de la información. También se aborda la problemática global y local de deserción y reprobación en el ámbito educativo, así como la importancia de las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas.

En el segundo capítulo, se presenta el marco teórico basado en la resolución de problemas de matemáticas con medios. Se reportan los aportes principales de autores como George Pólya y Alan Schoenfeld, cuyo trabajo complementario sienta las bases de este enfoque. También se analiza la evolución de este enfoque con la incorporación de tecnologías digitales en la resolución de problemas, tomando como referencia la obra de Manuel Santos Trigo y otros investigadores. Se incorporan las ideas de Marcelo Borba y Mónica Villarreal sobre "Humanos con Medios" para concebir que la producción de conocimiento no se encuentra exclusivamente en la mente, sino en la interacción con los medios.

En el tercer capítulo, se presenta el marco metodológico de la Investigación basada en Diseño. Este modelo de investigación en educación matemática se centra en el análisis de cómo se transforman las formas de razonamiento de los estudiantes al utilizar tecnologías digitales.

Además, se diseña una intervención en el aula que busca no solo provocar los fenómenos a analizar, sino también innovar la instrucción. Se resumen las fases llevadas a cabo en la investigación y se presentan los principios de diseño iniciales, así como las conjeturas sobre los resultados del diseño de intervención y las producciones de los estudiantes en la resolución de problemas del álgebra lineal.

En el cuarto capítulo, se hace un Análisis de Resultados de la investigación. Inicialmente, se realiza un análisis de la prueba diagnóstico, realizada durante el pilotaje del semestre. Este análisis permite comprobar diversas problemáticas identificadas en el primer capítulo relacionadas con el aprendizaje del álgebra lineal y la pertinencia de introducir el enfoque cualitativo de los sistemas de ecuaciones y su relación con la naturaleza de la solución. En segunda instancia, se seleccionan tres actividades, dos en contexto formal y una en contexto real, las cuales permiten analizar las características del diseño de actividades de aprendizaje, las nuevas demandas en la resolución de problemas de álgebra lineal con medios digitales y las características de las formas de razonamiento con medios digitales.

Finalmente, en el quinto capítulo se responden las preguntas que orientan la investigación. Estas preguntas están interrelacionadas y abordan las características de las actividades diseñadas, las nuevas demandas que enfrentan los estudiantes gracias al diseño de intervención y las características del razonamiento asociadas al uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas del álgebra lineal. Asimismo, se presentan sugerencias para futuras investigaciones, la formación de profesores, la docencia y el diseño curricular.

Capítulo 1: Definición del problema

1.1. Introducción

El álgebra lineal resulta una fuente de frustración tanto para profesores como estudiantes. Los profesores pueden sentirse frustrados al intentar explicar conceptos abstractos como espacio vectorial, rango, base, dimensión, dependencia e independencia lineal, y no logran hacerse entender por sus estudiantes. A pesar de que esta asignatura se puede pensar como una de las más sencillas al abordar uno de los problemas más elementales de las matemáticas, la variación lineal, la complejidad de los conceptos puede dificultar su enseñanza. Por otro lado, los estudiantes pueden experimentar frustración al intentar comprender la idea de que todo espacio de dimensión n es isomorfo con $\mathbb{R}^n$, a pesar de ser capaces de operar matrices y resolver sistemas lineales no cuadrados con cierta facilidad. Además, el álgebra lineal es una asignatura obligatoria en muchos planes universitarios, técnicos y tecnológicos, esto genera altos índices de estudiantes reprobados semestre tras semestre, lo que es motivo de preocupación institucional. Éste no sólo es un fenómeno local, sino que es común en gran parte de las universidades alrededor del mundo (L. A. Monroy Guzmán, 2011).

André Revuz (1914-2008), Matemático francés, creador de los Institutos de Investigación sobre la enseñanza de las matemáticas IREM, en el prefacio del texto *Sobre la Enseñanza del álgebra Lineal*, manifestó:

Una preconcepción común entre los matemáticos es que, para enseñar bien las matemáticas, todo lo que se necesita es conocer bien el tema. La enseñanza del álgebra lineal proporciona un sorprendente contraejemplo. La teoría está bien desarrollada, quienes la enseñan la conocen personalmente muy bien ... pero los estudiantes no la entienden. La preconcepción contraria, sostenida por pedagogos que creen que con una pedagogía apropiada se puede enseñar cualquier cosa, es igual de desastrosa. (Dorier, 2000, p. xv)

1.2. Antecedentes históricos

Históricamente, los principales conceptos del álgebra lineal se desarrollan en una continua interacción entre los enfoques Geométrico y Algebraico (Dorier, 2000). Por más de 20 siglos, la

geometría, gracias a la Geometría Euclidiana, presta a las matemáticas no sólo un campo de imaginación, sino de validación de resultados.

1.2.1. Formas de Razonamiento en el álgebra lineal

En Dorier (2000), se presenta un análisis histórico epistemológico del concepto de espacio vectorial; de este trabajo, Sierpinska (2000) abstrae lo que denomina Formas de Razonamiento, asociadas al lenguaje, que se usan de manera predominante en la resolución de problemas del álgebra lineal. Las formas de razonamiento se presentaron en la historia y se manifiestan en las aulas donde se reconstruyen los principales conceptos del álgebra lineal. Sierpinska las denominó Sintético-Geométrico (SG), Aritmético-Analítico (AA) y Analítico-Estructural (AE); según Sierpinska, esta clasificación obedece a la naturaleza misma del álgebra lineal en tanto guardan estrecha relación con los lenguajes que debe usar o privilegiar quien se enfrenta a resolver un problema relacionado con el álgebra lineal.

El desarrollo histórico del concepto de vector deja una traza que permite verlo en su estado inicial en la geometría, como segmento, pasando luego a su calidad de segmento dirigido. En su proceso evolutivo o metamorfosis, se presenta luego como un objeto “aritmetizado” en la geometría analítica. Finalmente, y en un ambiente de naturaleza analítica, como el de los espacios normados de dimensión infinita, emerge el concepto de Espacio Vectorial y con él, la “desaritmetización” de los vectores.

1.3. Antecedentes de investigación

La investigación en el ámbito de la Educación Matemática, sobre el álgebra lineal, según Stewart, Andrews-Larson, y Zandieh (2019), se puede clasificar en tres temáticas: (1) En cuanto a la enseñanza: El enfoque geométrico y el enfoque formal o axiomático. (2) Investigación sobre la comprensión de los estudiantes alrededor de conceptos del álgebra lineal considerados claves. (3) El papel de la tecnología en la instrucción y la innovación.

1.3.1. En cuanto a la enseñanza: El enfoque geométrico y el enfoque formal o axiomático

Harel (2019) señala que, en cuanto al uso del enfoque geométrico en la enseñanza del álgebra lineal, se pueden determinar dos posiciones, un tanto contradictorias; por un lado, quienes argumentan que con el uso de la geometría los estudiantes aprenden mejor las nuevas ideas del álgebra lineal, por otro lado, algunos investigadores que cuestionan la eficiencia del enfoque

geométrico en la enseñanza del álgebra lineal. Harel (2019) a partir del análisis de seis libros de texto, con gran circulación a nivel mundial, plantea lo que denominó variantes del enfoque geométrico, con el objetivo de describirlas e intentar establecer posibles dificultades y beneficios. Aclara inicialmente que la idea de enfoque geométrico depende de si se trata de la idea de geometría del estudiante o del profesor, finalmente presenta un total de ocho variantes: generalización, reducción, aplicación, representación metafórica, representación literal, investigación autónoma, terminología basada en el espacio y geometría dinámica.

Un ejemplo de la variante *generalización* se presenta cuando el estudiante asume como paralelos o colineales a los vectores, sin importar su naturaleza, que forman un conjunto linealmente dependiente de dos vectores, o dicho, en otros términos, dos polinomios linealmente dependientes son colineales. La variante *reducción* consiste en ejemplificar en el plano o el espacio conceptos generales como: combinación lineal, conjunto generado, subespacio o teoremas como el de complemento ortogonal entre el espacio fila y el espacio nulo de una matriz. La variante *solicitud* hace referencia a la geometría como aplicación, como es el caso de las formas cuadráticas. La variante *de representación literal* consiste en interpretar en lenguaje simbólico las ideas geométricas relativas al álgebra lineal y viceversa; la potencial fluidez cognitiva que brinda esta variante se privilegiará en los diseños de intervención que se emplearán en esta investigación, una tarea importante será identificar cómo se transforma esta variante con el uso coordinado por sistemas de cálculo algebraico CAS (por sus siglas en inglés) y sistemas de geometría dinámica (por sus siglas en inglés DGS). Se presenta un ejemplo tomando como punto de partida el problema planteado en (Harel, 2019, p. 1035):

¿Existe solución para el sistema $Ax = b$, dado cualquier vector b ? Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Una manera de emplear la variante *representación literal* requiere que el resolutor encuentre la equivalencia entre el enunciado anterior y algún interrogante con enfoque geométrico, como: ¿cualquier vector b del espacio es combinación lineal de los vectores columna de la matriz A ?, ¿Cualquier vector b del espacio es generado por los vectores columna de la matriz A ?, ¿Cualquier vector b del espacio pertenece al espacio columna de la matriz A ? O simplemente, ¿las columnas

de A generan todo R^3 ?. Para responder cualquiera de estos interrogantes, incluyendo el original, se puede plantear la matriz ampliada (aumentada) $(A|b)$ y escalonar para obtener:

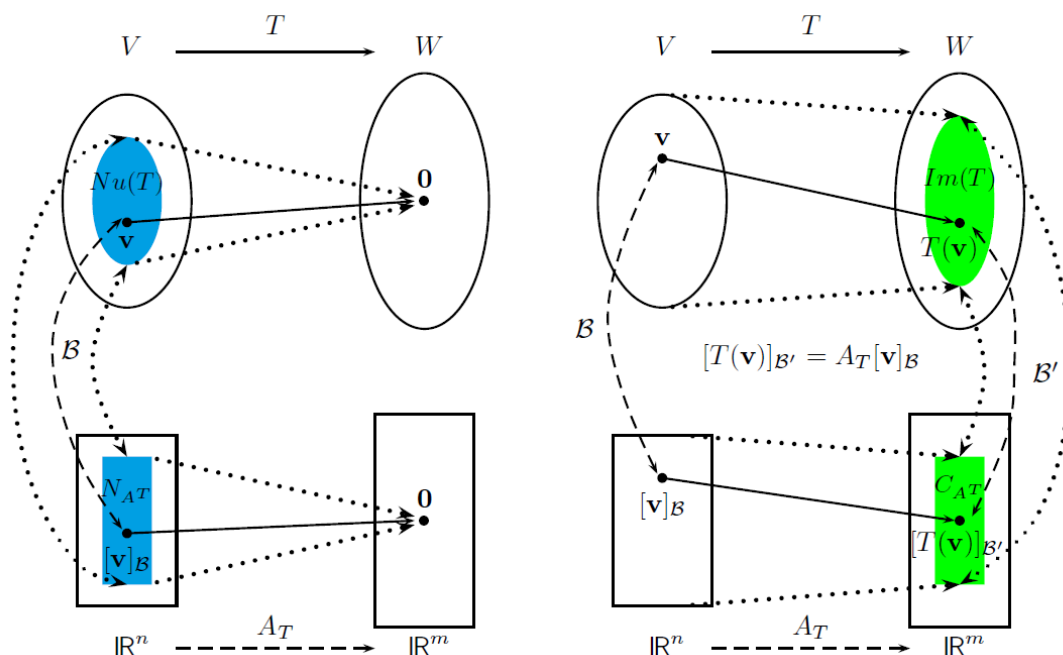
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & b_1 \\ 0 & 14 & -10 & 4b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1 - b_2 + 2b_3 \\ \hline & & & 2 \end{array} \right)$$

De esta forma escalonada, el resolutor puede concluir que el plano: $2x - y + 2z = 0$ es el espacio columna de la matriz A ; es en esta afirmación donde finalmente emerge la variante *representación literal*.

En general, los ejemplos de las variantes hasta ahora representan un beneficio limitado a $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$; lo que podría representar una fuente de dificultad para espacios de diferente naturaleza como los conformados por polinomios o matrices (Harel, 2017).

La variante *Representación metafórica* hace referencia a una especie de síntesis gráfica de un conjunto de ideas conectadas, que puede ser tan amplio como el que se muestra a continuación:

Figura 1 Ejemplo de la variante representación metafórica del enfoque geométrico.



Nota: Tomado de Equivalencia entre los núcleos y las imágenes de una transformación lineal y los respectivos conjuntos de sus matrices asociadas (Martínez R. & Sanabria R., 2014, p. 313).

La variante *investigación autónoma* se refiere a un enfoque geométrico adoptado por profesores e investigadores que buscan implementar intervenciones en el aula enfocadas en el plano y el espacio. Según Harel (2019) solo se conocen tres intentos de investigación que han seguido esta orientación. El propósito de esta investigación es establecer los fundamentos para el diseño de una intervención basada en esta variante como principio central.

La variante *terminología basada en el espacio* hace referencia a las denominaciones empleadas para un número importante de conceptos e ideas generales, como es el caso de: combinación lineal, dependencia lineal, espacio vectorial, proyección, complemento ortogonal, vector de coordenadas, entre otros. Harel (2019) cita una decena de artículos que reportan las dificultades, para los estudiantes, provenientes de la terminología empleada. La variante *geometría dinámica* la califica como emergente y citando algunos artículos de amplia difusión, destaca su potencial para convertirse en un verdadero aliado para la enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. En (Sierpinska, 2000), se realiza un experimento de enseñanza del álgebra lineal con el apoyo del

programa de geometría dinámica Cabri®¹, con el propósito de familiarizar a los estudiantes con algunos conceptos básicos del álgebra lineal, privilegiando su naturaleza geométrica a través del propicio ambiente ofrecido por Cabri®, con la intención de retardar su manipulación a través de sus representaciones de carácter aritmético o algebraico. A pesar de la estrategia, los estudiantes no lograron el objetivo de aprendizaje trazado por los investigadores: entender la definición axiomática del concepto de Transformación Lineal. Según Sierpinska, la frustración se da por dos razones principales: las altas pretensiones del objetivo por parte del profesor investigador y la tendencia de los estudiantes de enfrentar las actividades propuestas aplicando alguna regla sin filtro alguno. La práctica por parte de los estudiantes llevó al grupo de Sierpinska a considerarla un obstáculo que denominó *pensamiento práctico* que, aunque necesario, si se privilegia en contraposición del *pensamiento teórico*, trae como consecuencia que los estudiantes no comprendan los conceptos del álgebra lineal que se ponen en juego en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal en general.

El enfoque formal de la enseñanza se caracteriza principalmente porque le asigna un peso importante a la demostración, entre las metas a alcanzar; según Sierpinska (2000), estos ideales esperados por los diseñadores de un curso o actividades de álgebra lineal se convierten en fuente de frustración, principalmente, por la madurez académica alcanzada por los estudiantes a la hora de tomar este curso. En forma más específica, Stewart y Thomas (2019), manifiestan que esperar que los estudiantes, al final de un primer curso de álgebra lineal, alcancen los conocimientos matemáticos y metamatemáticos que se juntan en cada paso de una demostración, resulta poco realista. Según Stewart y Thomas (2019), para un amplio porcentaje de los estudiantes, los métodos de demostración son desconocidos; para ellos, existen dos tipos de demostración: las que prueban y las que explican. Sobre las primeras queda la sensación de que no tienen sentido para ellos, pero asumen que son verdad y, en algunos casos, deciden memorizarlas para estar listos a la hora de la evaluación. Las pruebas que explican, las encuentran valiosas porque les ayuda con la comprensión y convicción personal.

¹ Software comercial de geometría dinámica, ver (www.cabri.com).

1.3.2. Comprensión de los estudiantes de algunos Conceptos Claves del álgebra lineal

En el artículo de revisión (Stewart et al., 2019) se eligieron 54 artículos relativos al álgebra lineal, de las 20 principales revistas de educación matemática en inglés, de los cuales el 67% se centró en la comprensión de los estudiantes de algún contenido o franja de contenidos. El 50% de ellos, se enfocó en la franja de contenido relacionada con la dependencia e independencia lineal, y conjunto generado y generador; sorprende que, en los sistemas de ecuaciones lineales, un tema que resulta transversal en los cursos de álgebra lineal, se enfoque un porcentaje tan bajo de publicaciones; 5% aproximadamente.

El concepto de Espacio Vectorial ha sido catalogado como central para el álgebra lineal (Parraguez, 2009; Stewart, 2017), puesto que en él subyacen gran parte de los conceptos que forman su amplio cuerpo teórico: base, dimensión, conjunto generado y generador, rango, dependencia e independencia lineal y combinación lineal; de este último concepto, Monroy Guzmán (2011) afirma:

La síntesis de la idea básica del álgebra lineal, como disciplina de pensamiento matemático, se encuentra en reconocer que todos los elementos de un conjunto se puedan formar por la combinación lineal de un número finito de ellos (en el caso de los espacios de dimensión finita); esta idea se afirma cuando logramos separar la menor cantidad de objetos del conjunto con los que se puede lograr este sorprendente resultado. La evolución final se da cuando se establece la relación entre el conjunto inicial, el número de elementos del conjunto generador y R^n (p. 12).

Mas adelante, se realiza una síntesis de las principales problemáticas reportadas por los investigadores y como parte del trabajo final se analizaron, de manera crítica, los diseños de intervención que aparecen o se describen en la literatura escudriñada; los insumos obtenidos en esta etapa hacen parte de las hojas de trabajo que conforman el diseño de intervención de esta investigación. Por ejemplo, en Roa-Fuentes y Okaç (2010), se presentan posibles fundamentos para el diseño de intervenciones en el aula, para el concepto de transformación lineal, a través de dos posibles rutas cognitivas que el estudiante pueda seguir; a este proceso se le llama descomposición genética de saberes matemáticos y hace parte de la etapa de análisis teórico del enfoque de investigación APOE, ampliamente empleado en la investigación en educación

matemática. La descomposición genética que presenta Roa-Fuentes y Oktaç (2010) se centra en la definición formal del concepto, marginando las representaciones geométricas y tomando como requisito una comprensión madura de los conceptos de función y espacio vectorial; lo que implica un presupuesto muy alto para considerarse una trayectoria viable o en el mejor de los casos lo limita a ser empleado para diseños orientados a cursos muy especializados. Según Roa-Fuentes y Oktaç (2010), partiendo del concepto de función, ampliando la posibilidad de que el dominio y el codominio sean espacios vectoriales, un buen manejo de las ideas constitutivas de la combinación lineal y empleando conscientemente el cuantificador universal, se conforma una de las posibles rutas para que un estudiante construya el concepto de transformación lineal.

1.3.3. El Papel de la tecnología en la Instrucción y La innovación en la enseñanza del álgebra lineal

Uso de Herramientas digitales tipo CAS.

De lo que hoy conocemos como programas de sistemas de cálculo algebraico (CAS por sus siglas en inglés) puede rastrearse hasta 1950, y el uso de CAS en cursos de pregrado comenzó a ser introducido de manera limitada en la década de 1970. En 1982, algunos investigadores en educación matemática ya se planteaban cómo transformar los contenidos de los cursos de matemáticas del primer año de pregrado para permitir el uso de CAS. Por ejemplo, Hillel (1993) mostraba cómo el uso de CAS podría ayudar a los estudiantes a reducir la carga de realizar cálculos rutinarios y enfocarse en aspectos más relacionados con los conceptos del álgebra lineal. Sin embargo, también señalaba que existe el riesgo de perder lo ganado al enfrentar a los estudiantes a matrices de gran tamaño, lo que podía llevar a cometer errores al ingresar los datos de la matriz.

El uso de CAS hace que los estudiantes puedan acceder a conceptos más complejos que estaban prácticamente ocultos en la enseñanza tradicional para todo tipo de estudiantes; ahora estos se vuelven accesibles (Jin, Bi, & Zhao, 2011; Sacristán et al., 2010). Al respecto, Jin et al. (2011) señalan que el uso de un software que ayude con algunos algoritmos, hasta ahora implementados de manera obligada con papel y lápiz, requisito reconocido como inoficioso actualmente, permite poner al alcance de los estudiantes conceptos que, sin el uso de estos, no podrían asomarse en las aulas de clase. Al respecto, Lavicza (2010) resaltó que uno de los matemáticos que participó en su encuesta dijo:

La enseñanza relacionada con CAS debería usarse para alentar a los estudiantes a explorar las matemáticas. Las matemáticas más sofisticadas ("de la vida real") se vuelven accesibles a través de CAS: por ejemplo, la programación lineal se puede enseñar en una clase introductoria de álgebra lineal (Lavicza, 2010, p. 169).

Dogan-Dunlap (2010), muestra que las formas de razonamiento que plantea Sierpinska (2000) aparecen en el análisis de las respuestas construidas por un grupo de 42 estudiantes, ante un grupo de actividades que diseñó alrededor de los conceptos de dependencia e independencia lineal, combinación Lineal y las nociones de espacio y subespacio vectorial, para el caso del plano y el espacio, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Las actividades que propuso, las dividió en dos grupos, con la diferencia de que en una primera actividad los estudiantes pueden usar dispositivos tecnológicos tipo CAS y en la segunda se incorpora además un programa tipo sistema de geometría dinámica DGS. Ninguno de los dos programas contaba con las dos vistas integradas de manera dinámica, es decir, en la forma que se presenta actualmente en programas como GeoGebra. Los autores afirmaron que el uso del DGS potenció en los estudiantes no sólo el uso del método deductivo a partir de axiomas y otros, sino que potenció, en un gran porcentaje de estudiantes, la flexibilidad cognitiva (Dorier & Sierpinska, 2001); esto es, pasar de un modo de representación semiótica a otro a través de las formas de razonamiento mencionadas anteriormente. Dogan-Dunlap (2010) deja planteada también la idea de que se debe estudiar el efecto de las representaciones geométricas en el aprendizaje del álgebra Lineal, señalando además que, el poder de las representaciones geométricas parece potenciar su influencia cuando se encuentran simultáneamente con las representaciones aritméticas y algebraicas; para estudiar este fenómeno, se propuso en este trabajo que GeoGebra es una herramienta con las características deseadas.

Una característica importante del uso de CAS son sus efectos a largo plazo, el más sustancial es la empleabilidad que genera el hecho de responder a algunas demandas relativas al siglo XXI, en cuanto a competencias tecnológicas; (Marshall, Buteau, Jarvis, & Lavicza, 2012), al respecto señalan:

Por lo tanto, esta conjetura de Lavicza de que la integración de CAS puede ser ayudada por las futuras necesidades de empleo de los estudiantes se ve reforzada por los hallazgos

de la revisión de la literatura sobre habilidades transferibles relacionadas con CAS. (p. 431)

En un estudio posterior, Cooley et al (2014) resalta la importancia de la mediación de la tecnología, el trabajo en grupo y las aplicaciones prácticas en el álgebra lineal desde la perspectiva de los estudiantes. Se refieren específicamente a las aplicaciones actuales del álgebra lineal en áreas STEM (ciencias tecnología ingeniería y matemáticas) que resultan de interés para los estudiantes.

En el trabajo de Caridade, Encinas, Martín-Vaquero y Queiruga-Dios (2015), se defiende el uso de CAS, argumentando que existen problemas muy interesantes en el álgebra lineal que se pueden abordar mediante el uso de estos programas. Como se mencionó en el documento de Marshall et al. (2012), algunos profesores plantean obstáculos relacionados con la sintaxis de los programas CAS. Sin embargo, según Caridade et al. (2015), para ese año el lenguaje de estos programas se volvía más accesible y, al mismo tiempo, familiariza al estudiante con el lenguaje matemático formal.

La evolución de la enseñanza de algoritmos matemáticos: el papel de los programas tipo CAS.

La enseñanza de algoritmos tradicionales en matemáticas ha experimentado cambios significativos en los últimos años. Por ejemplo, el algoritmo para calcular la raíz cuadrada ha sido eliminado de las aulas ya que existe un acuerdo generalizado de que es suficiente comprender que se trata de otro número real del mismo tipo, para el caso de los números reales positivos, cuyo cuadrado es el número del cual se obtiene la raíz. Sin embargo, otros algoritmos tradicionales, como la factorización de polinomios cuadráticos y de mayor grado, siguen siendo resueltos preferiblemente a través del método tradicional; utilizando papel y lápiz.

En el contexto de los cursos de álgebra lineal, los algoritmos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales requieren extensos cálculos numéricos manuales. Esto se puede verificar revisando las secciones de ejemplos y ejercicios de la mayoría de los libros de texto del álgebra lineal (Grossman & Flores Godoy, 2012; Lipschutz, 1991; Poole, 2011). Sin embargo, al igual que con el algoritmo de la raíz cuadrada, muchos de estos algoritmos están cediendo espacio a las tecnologías reconociendo que no es necesario que los estudiantes realicen los cálculos

manualmente, sino que puedan comprender y analizar los resultados proporcionados por las herramientas tecnológicas.

Por ejemplo, en el caso de la raíz cuadrada, es importante que el estudiante pueda responder preguntas como: ¿cuál es la relación entre un número y su raíz cuadrada? Además, a partir de los resultados y las nociones asociadas, los estudiantes pueden verificar sus propios cálculos utilizando la misma herramienta tecnológica, esto es, desplegar en el proceso estrategias de metacognición (Schoenfeld, 2016).

Aprovechar las potencialidades de los programas tipo CAS y plantearse preguntas como ¿qué algoritmos se pueden *migrar* a estos programas? Y ¿cómo cambian los procesos que se le exigen a los estudiantes? De acuerdo con una encuesta internacional a profesores universitarios de matemáticas por Marshall et al. (2012), Se observó que aquellos que utilizan programas tipo CAS liberaron a sus estudiantes de las tareas computacionales rutinarias, lo que les permitió centrarse en actividades más esenciales y en el desarrollo de un entendimiento profundo de los conceptos.

En el caso del álgebra lineal, mientras un profesor puede dedicar una parte significativa de sus clases a resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando los métodos tradicionales, con los programas tipo CAS se pueden resolver numerosos sistemas de manera eficiente, lo que permite enfocar la atención de los estudiantes en las nociones fundamentales del álgebra lineal que subyacen en las salidas proporcionadas por el programa.

Los programas tipo CAS han demostrado tener un impacto significativo en el campo de la ingeniería. En la actualidad muchos problemas son resueltos gracias a la combinación del ingenio humano y el poder de estas herramientas tecnológicas. Esta fusión entre el conocimiento humano y la capacidad de las máquinas se conoce como competencia computacional (Se, Ashwini B, Chandran, & Soman K.P, 2015).

Sistemas de Geometría Dinámica: “La nueva realidad de los Objetos Matemáticos”

Manuel Santos-Trigo (2020), a las herramientas digitales de acción que se pueden emplear para representar, explorar y trabajar tareas matemáticas, las denomina Sistemas de Geometría Dinámica (DGS por sus siglas en inglés); como es el caso inicial de GRAPHER, Cabri® y actualmente GeoGebra. La abstracción situada es según Noss y Hoyles (1996) el principio fundamental de los DGS. Este tipo de abstracción se da gracias a las potencialidades que surgen al sumar las características de la herramienta, los conocimientos, motivaciones e interacciones de quien

aprende y la intención de quien diseña la actividad a enfrentar; el trabajo con DGS demanda del estudiante el uso de comandos, construcciones geométricas, la sintaxis propia de las hojas de cálculo y en general un lenguaje que lo aproxima al uso de la terminología propia de las matemáticas. Noss y Hoyles presentan así una forma distinta, entre muchas otras ya existentes, de definir la abstracción como proceso o mecanismo que implica abstracción en la situación, no alejada (abs-tracción) de ella. La abstracción situada es entonces la forma *"cómo los alumnos construyen significados matemáticos en la red de un entorno particular que, a su vez, da forma a la forma en que se expresan las ideas"* (Noss & Hoyles, 1996, p. 122); lo que califican como una especie de comunicación humano-máquina. En el caso particular del concepto de dependencia lineal, al respecto Aranda y Callejo (2010), afirman que:

Los resultados muestran que el uso simultáneo del lenguaje analítico y geométrico, así como la interacción dinámica con estos sistemas de representación en un contexto tecnológico, pueden favorecer las generalizaciones necesarias para desarrollar los procesos de abstracción reflexiva que inciden en la elaboración del concepto de dependencia lineal. (p. 129)

Además, afirman que plantear una trayectoria hipotética de aprendizaje en un medio de matemáticas dinámicas, potencia la adquisición de los conceptos de dependencia e independencia lineal. Con respecto a la conclusión anterior, se añade que, aunque se les llama Sistemas de Geometría Dinámica (DGS), en realidad no son solo los objetos relativos a la geometría los que adquieren "vida". Las matemáticas tradicionales se venían acompañando de representaciones estáticas, pero gracias a programas como GeoGebra, estas parecen evolucionar en cuanto a su representación; Moreno-Armella y Hegedus (2013), describen lo que en este trabajo se llama el "nuevo realismo de los objetos matemáticos"; al respecto, uno de los autores había afirmado que:

En el caso de las computadoras, estos medios llegan a ser parte integral de nuestros recursos intelectuales y expresivos. Permiten, además, generar una forma de realidad virtual asociada a los objetos conceptuales de las matemáticas y traerlos, virtualizados ya, a la pantalla en donde podemos manipularlos con amplitud. (Moreno-Armella, 2002, p. 83).

El “nuevo realismo de los objetos matemáticos” no es un privilegio de los objetos de la geometría; las funciones, los vectores, las matrices, etc. adquieren dinamismo y realidad en estos entornos. Aguilar-Magallón (2018) afirma que el uso de DGS transforma algunas heurísticas en poderosas herramientas, lo que representa un hallazgo de lo que se plantea a partir de las ideas de Hegedus y Moreno-Armella (2009), Moreno-Armella y Hegedus (2013) y Noss y Hoyles (1996). Esto es, el símbolo que representa un objeto se enriquece; al respecto Moreno-Armella y Hegedus (2013) dice: “Podemos hablar de inscripciones matemáticas como las marcas externas de los símbolos, pero no podemos olvidar que símbolo y referencia son como caras de una moneda: cada una es la condición de existencia de la otra”. (p. 101).

En consecuencia, el objeto se transforma, al menos para el observador, pues es a través de los símbolos que podemos establecer las características del objeto matemático, características que antes no se habían revelado, por carencias del observador o del agente representante; estas representaciones que han cobrado "vida", léase, dinamismo en un DGS y su interacción con las representaciones tradicionales ya conocidas, hace que este “todo” se tenga que estudiar de manera holística, para documentar todas las potencialidades que brinda a aquellos que tienen oportunidad de interactuar con este evolucionado objeto.

Klasa (2010), desde su propia experiencia usando Cabri® y Maple, señala las múltiples posibilidades que brinda un DGS para mejorar la forma de trabajo de los estudiantes y su comprensión de los principales conceptos del álgebra lineal. Klasa (2010) afirma además que, en esta tarea, el software Cabri® le resulta más productivo que Maple, en cuanto que las representaciones dinámicas interactúan en simultánea con otras formas de representación. En esta misma dirección, Caglayan (2015) afirma que la posibilidad de representar situaciones problemas en diferentes contextos, es una de las potencialidades que brindan los DGS como GeoGebra. Los estudiantes pueden construir modelos que cumplen con las características exigidas por el problema; si estas resisten la “prueba del arrastre” se les llama *construcciones dinámicas*. Cuando construir modelos de las definiciones o problemas planteados, se convierte en una estrategia recurrente, Aguilar-Magallón (2018) afirma que la competencia de proponer problemas evoluciona al presentarse al inicio del problema, durante el desarrollo del problema y después de solucionarlo.

1.4. Principales problemáticas señaladas: revisión de literatura

La problemática en torno al álgebra lineal planteada por el grupo de estudios del currículo del álgebra lineal en Norteamérica en 1990 sigue siendo relevante hasta el día de hoy (Carlson, Johnson, Lay, & Porter, 1993). En aquella época, ya se observaba un creciente requerimiento del álgebra lineal en la formación de estudiantes en una amplia gama de programas universitarios y tecnológicos. Dos décadas después, la enseñanza del álgebra lineal se había vuelto casi universal en la educación terciaria (Oktaç & Trigueros, 2009).

Además, el grupo de estudios señaló que los programas de álgebra lineal en las diversas instituciones no satisfacían las necesidades básicas de los estudiantes ni las demandas de formación provenientes de los planes de estudio. Estas demandas se basaban principalmente en el creciente número de aplicaciones del álgebra lineal, una tendencia que continúa en la actualidad. El grupo de estudio destacó la falta de conexión entre el curso y sus aplicaciones, una preocupación compartida más recientemente por Caridade et al. (2015) y Marshall et al. (2012), así como la falta de conocimiento de los instructores sobre los avances en tecnologías tipo CAS. A pesar de que en aquel momento estos software ya llevan más de 20 años utilizándose en la enseñanza de las matemáticas, su influencia y aprovechamiento en la enseñanza del álgebra lineal eran prácticamente inexistentes (Carlson et al., 1993). Esta problemática sigue siendo recurrente en la literatura académica relacionada con la enseñanza del álgebra lineal.

1.4.1. Educación tradicional: énfasis algorítmico

Ya en el prefacio de la obra de George Pólya (1945), se llama la atención sobre los énfasis tradicionales y equivocados de la enseñanza de las matemáticas en general; “Si se dedica su tiempo a ejercitar en sus alumnos operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, perderá la oportunidad de participar positivamente en su formación” (G Polya, 1945, p. VI). Para lograr el efecto contrario en los estudiantes, Pólya afirma que, con el planteamiento de problemas adecuados a sus conocimientos y con la ayuda de preguntas estimulantes, se podría despertar en los alumnos el gusto por el pensamiento independiente.

Según Schoenfeld (2016), los exámenes estandarizados de la época en que se publicó por primera vez este trabajo (1992), revelaron que prevalecía una práctica centrada en el contenido, en la que se suponía que los estudiantes conocían los fragmentos específicos del tema que

dominaban. Desde esta perspectiva, se concebía el conocimiento del estudiantes como la suma de estas partes:

Una consecuencia de experimentar el currículo en pedazos pequeños es que los estudiantes aprenden que se les proporcionarán respuestas y métodos a los problemas; no se espera que los estudiantes descubran los métodos por sí mismos. Con el tiempo, la mayoría de los estudiantes llegan a aceptar su papel pasivo y a pensar en las matemáticas como "transmitidas" por expertos para que las memoricen (Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983; National Assessment of Educational Progress, 1983). Citados por (Schoenfeld, 2016, p. 343).

En el informe que se menciona en la cita anterior, se registró que alrededor de un 50% de los estudiantes opinaban que aprender matemáticas consiste en memorizar y el 90% estaba de acuerdo en que siempre había una regla a seguir para resolver un problema.

En el estudio realizado por Jin et al. (2011), se describe lo que se denomina como la enseñanza tradicional del álgebra lineal, centrándose en la problemática del énfasis algorítmico presente en los cursos de esta asignatura. Según los autores, los textos guía utilizados por los profesores suelen privilegiar los procesos algorítmicos y la memorización de técnicas, sin lograr profundizar en el sentido conceptual subyacente.

Los sistemas de ecuaciones lineales son un ejemplo donde se suele utilizar una serie de claves o trucos para reconocer las características del sistema como, si tiene una, infinitas o ninguna solución, ver (Grossman & Flores Godoy, 2012; Lipschutz, 1991; Poole, 2011). Si bien estos "trucos" pueden ser efectivos al asociarlos con el problema planteado, promueven la falta de comprensión de la relación entre los datos, los resultados obtenidos y los conceptos involucrados.

Estas prácticas, que todavía persisten en un alto porcentaje, se enmarcan dentro de lo que Benítez Mojica (2006), describe como la memorización de técnicas para resolver actividades rutinarias:

Aprender matemáticas va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias. Adicionalmente, debe propiciarse en el aula un ambiente donde los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas,

usar múltiples representaciones, hacer conjeturas y formular contra ejemplos. (Benítez Mojica, 2006, p. 6)

A partir del siglo XX, la psicología comenzó a mostrar interés en cómo las personas aprenden matemáticas; se ocuparon entonces de la importante misión de trazar principios para el diseño de tareas. Mientras tanto, los profesores de matemáticas reflexionaban sobre cuál debía ser el contenido a enseñar. Sin embargo, la investigación sobre cómo enseñar las matemáticas, surgió en la comunidad matemática, sólo en la segunda mitad de la década de 1960 (Kieran, Doorman, & Ohtani, 2015). El modelo de diseño de tareas resultante, basado en la repetición y emulación (Uicab & Oktaç, 2006), demostró ser efectivo durante mucho tiempo y se ha mantenido fijo entre las prácticas de los profesores. Aunque en el ámbito de la investigación ha habido en el diseño de tareas, estos resultados no han impactado de manera significativa en la práctica docente.

En el estudio realizado por Se et al. (2015), se plantea la alternativa del modelo de clase invertida en la enseñanza del álgebra lineal. Sugieren que los profesores deben crear videos tutoriales que aborden los temas que normalmente se enseñan a través de exposiciones magistrales, ya que consideran que esta práctica es ineficaz, ya que, “los alumnos pueden simplemente olvidar lo que se ha dicho 10 minutos atrás” (Se et al., 2015, p. 2). Esta es una realidad que los profesores comprueban una y otra vez, cuando creen que, al conectar ideas dentro de sus largos discursos, sus estudiantes también lograrán hacerlo de manera simultánea.

Por ejemplo, los conceptos de dependencia e independencia lineal son ampliamente estudiados en la investigación sobre la enseñanza del álgebra lineal, y con frecuencia se informa que los estudiantes los asocian con un procedimiento algorítmico sin comprender su significado. Esto impide reconocer su papel fundamental en la comprensión de otros conceptos estructurales del álgebra lineal, donde es importante tener claro su valor Conceptual (Aranda & Callejo, 2010). En este sentido, los profesores recurren a frases como “Si el sistema homogéneo tiene solución única, es linealmente independiente (LI) sino es linealmente dependiente (LD)” para “ayudar” a sus estudiantes.

El énfasis en los algoritmos, característico de la enseñanza tradicional, hace que los estudiantes memoricen numerosas técnicas y procesos paso a paso, como se ha descrito anteriormente, pero sin acompañarlos de una consistencia conceptual que los relacione. Moreno-Armella (2021)

describe este fenómeno como la desconexión entre la fluidez instrumental y la fluidez conceptual.

1.4.2. El problema de la falta de conocimientos previos

Dogan-Dunlap (2006) aborda la problemática que posiblemente surge debido a la falta de conocimientos previos en la teoría de conjuntos, mediante el análisis de algunas tareas propuestas a estudiantes. En diferentes momentos de un curso introductorio del álgebra lineal, es necesario interpretar la regla que define un conjunto para identificar uno o más de sus elementos, y realizar algunas muestras que terminen, en ocasiones mediante una simple inspección, si un elemento pertenece o no a un conjunto; lo que permite concluir, por ejemplo, que un conjunto no es un subespacio vectorial. Dogan-Dunlap (2006) sostiene que el álgebra lineal utiliza un lenguaje propio de la teoría de conjuntos en tareas como encontrar ejemplos particulares de elementos de un conjunto, escribir por comprensión un conjunto e identificar la diferencia entre subconjunto y pertenencia, entre otros.

El autor llega a la conclusión de que los estudiantes que ingresan a los cursos de álgebra lineal carecen de comprensión en la mayoría de los conceptos básicos de la teoría de conjuntos. En trabajos posteriores, Dogan-Dunlap (2010) vuelve a informar sobre esta misma carencia, agregando la falta de conocimientos básicos de geometría analítica. Además, la falta de conocimientos básicos en teoría de conjuntos también ha sido señalada recientemente por Cárcamo Bahamonde, Fortuny Aymemí y Gómez i Urgellés (2017).

1.4.3. Problema del formalismo

El obstáculo del formalismo, según la perspectiva de Dorier (2000), se refiere al uso de los conceptos clave del álgebra lineal sin una lógica clara al argumentar o responder preguntas. Según se relata en el documento, esto se debe a los objetivos establecidos para el curso y al uso temprano del lenguaje formal (Sierpinska, 2000). El concepto de obstáculo del formalismo también se atribuye al considerable número de axiomas, teoremas y, sobre todo, al número de definiciones que se presentan en cada sesión de clase de álgebra lineal (Bagley & Rabin, 2016).

En este sentido, los estudiantes argumentan que la mayoría de los temas requieren un nivel de abstracción más alto al que no estaban acostumbrados, lo que hace que sientan que el curso carece de conexión con sus conocimientos previos y experiencias con las matemáticas (Dogan-Dunlap, 2010).

1.4.4. Sincretismo

La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal ha destacado de manera constante la cantidad de conexiones lógicas que existen entre los principales conceptos de esta disciplina, lo que representa una fuente principal de dificultad para los estudiantes. En un corto período de tiempo, los estudiantes deben ser capaces de establecer estas conexiones de manera eficiente un claro ejemplo de esto se encuentra en las secciones de los libros de texto tradicionales dedicados a los denominados “teorema de resumen”:

Figura 2 Teorema de resumen de dos libros de textos tradicionales.

T

Teorema 8.1.7 Teorema de resumen (punto de vista 9)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 12 afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras 11 (de manera que si una es cierta, todas las demás son ciertas):

- i) A es invertible.
- ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- iii) Para cada vector $\mathbf{b}$ de dimensión n , el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única.
- iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n .
- v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.
- vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.
- vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.
- viii) $\det A \neq 0$.
- ix) $\nu(A) = 0$.
- x) $\rho(A) = n$.
- xi) La transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ es un isomorfismo.
- xii) Cero no es un valor característico de A .

Nota: Imagen tomada de Stanley I. Grossman S. 2012, Álgebra lineal. Sexta edición. University of Montana. University College London, pág. 557

Teorema 4.17

El teorema fundamental de las matrices invertibles: versión 3

Sea A una matriz de $n \times n$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- a. A es invertible.
- b. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para todo $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.
- c. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
- d. La forma escalonada reducida por renglón de A es I_n .
- e. A es un producto de matrices elementales.
- f. $\text{rank}(A) = n$
- g. $\text{nulidad}(A) = 0$
- h. Los vectores columna de A son linealmente independientes.
- i. Los vectores columna de A generan $\mathbb{R}^n$.
- j. Los vectores columna de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.
- k. Los vectores renglón de A son linealmente independientes.
- l. Los vectores renglón de A generan $\mathbb{R}^n$.
- m. Los vectores renglón de A forman una base para $\mathbb{R}^n$.
- n. $\det A \neq 0$
- o. 0 no es un eigenvalor de A .

Nota: Imagen tomada de Poole, D. 2011. Álgebra Lineal. Una introducción moderna. Tercera Edición. Cengage Learning Editores, pág. 307

El problema del sincretismo es inherente al álgebra lineal y no puede ser evitado, como se ilustra en las figuras anteriores. No obstante, Uicab y Oktaç (2006) destacan que muchos de los errores cometidos por los estudiantes se deben precisamente a la falta de conexiones entre los conceptos. Además, afirman que, si los profesores e investigadores identificaran las conexiones clave que deben ser enfatizadas, se podría lograr una mejor comprensión de la asignatura.

1.4.5. Conciencia Metacognitiva

Una problemática importante reportada es la falta de conciencia por parte de los estudiantes con respecto a mecanismos de metacognición. Sierpinska (2000) señala que, a pesar de tener a su disposición las posibilidades que ofrece el software de geometría dinámica, en este caso Cabri®, los estudiantes no parecen estar preocupados por verificar sus afirmaciones. Esto resulta preocupante, ya que existe una oportunidad explícita brindada por las características de las herramientas empleadas.

En síntesis, la falta de conciencia metacognitiva por parte de los estudiantes con respecto a los mecanismos disponibles en los programas tipo CAS y DGS, es otra de las problemáticas importantes. Es necesario que los educadores promuevan la autorreflexión y el monitoreo activo del aprendizaje, así como brindar orientación y apoyo para que los estudiantes puedan aprovechar al máximo las oportunidades que ofrecen estas herramientas.

1.5. Planteamiento del problema y preguntas de investigación

La enseñanza tradicional ha mostrado limitaciones en el desarrollo del pensamiento teórico en los estudiantes, mientras que se enfoca en fomentar el pensamiento práctico. Además, los profesores, aferrados a antiguos paradigmas de la reforma de las matemáticas modernas, establecen objetivos que exigen a los estudiantes de ingeniería alcanzar un razonamiento analítico estructural (AE), sin antes promover la flexibilidad entre las formas de razonamiento sintético geométrico (SG) y analítico aritmético (AA), Las cuales son necesarias para lograr dicho nivel de razonamiento (Sierpinska, 2000).

Es necesario diseñar actividades de aprendizaje que fomenten la complementariedad entre estos dos tipos de pensamiento centrándose en las diversas formas de razonamiento del álgebra

lineal. Un elemento clave para tener en cuenta en el diseño de intervención es la reducción de la carga de cálculos aritméticos que se les exige a los estudiantes al resolver sistemas de ecuaciones, matrices, determinantes, inversas y, valores y vectores propios. A pesar de la aparición de herramientas tecnológicas cada vez más poderosas y versátiles, sigue siendo común la demanda de realizar cálculos a mano. Devlin (2019) señala que hacer y aprender matemáticas ha evolucionado significativamente desde 1990 y debería ser una experiencia diferente, aprovechando todas las oportunidades que brindan las herramientas digitales para democratizar el conocimiento y reorganizar el pensamiento matemático.

En la construcción progresiva del álgebra lineal en el contexto histórico de las matemáticas se pueden identificar dos vertientes de desarrollo: la algebraica y la geométrica (L. A. Monroy Guzmán, 2011). Los conceptos más relevantes del álgebra lineal no han surgido exclusivamente de la vertiente algebraica, a pesar de su nombre, ni tampoco exclusivamente de la línea geométrica, a pesar de la noción de vector que forma parte del concepto central de *espacio vectorial*. La historia muestra que los principales conceptos del álgebra lineal han surgido de una especie de dialéctica entre estas dos formas de concebir las matemáticas en diferentes momentos históricos. Es después de lograr una flexibilidad entre las dos formas de razonamiento en estas líneas que se alcanza el nivel de razonamiento analítico o estructural (AE).

La geometría desempeña un papel fundamental como campo de imaginación y validación para el álgebra lineal y su potencial se ve incrementado por herramientas digitales de geometría dinámica, como GeoGebra (Bu & Hohenwarter, 2015; Leung, 2017; L. Monroy Guzmán, Obregón Mosquera, Yaker Agudelo, & Domínguez Arboleda, 2023; Olsson, 2019; M. Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2016; Turgut, 2018, 2019). El campo de imaginación y validación, como se ha demostrado en el desarrollo histórico del álgebra lineal, requiere su complemento, que corresponde a la forma de razonamiento analítico aritmético. En el uso moderno y real del álgebra lineal la forma de razonamiento analítico aritmético demanda grandes volúmenes de operaciones, que se deben trasladar por razones prácticas y didácticas, a entornos informáticos como GeoGebra, Matlab, Matrix calculator, Wolfram alpha, entre otros (Artigue, 2002; Gonçalves, Costa, & Abreu, 2019; Kieran, 2019; Trouche, 2000; Wawro, 2015; Weigand, 2017).

En este contexto, se desarrolló una investigación basada en *el diseño de intervención* orientada por las siguientes preguntas:

Pregunta central de Investigación

¿Cuáles son las formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer año de Ingeniería, al resolver problemas del álgebra lineal con la mediación de herramientas digitales tipo DGS (GeoGebra) y CAS?

Preguntas auxiliares de Investigación

- a. ¿Cuáles son las características del *Diseño de Intervención* que favorecen fluidez entre las diferentes formas de razonamiento?
- b. ¿Cuáles son las nuevas demandas en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales (DGS y CAS)?
- c. ¿Qué características emergen en las formas de razonamiento gracias al uso coordinado de medios digitales?

1.6. Justificación

El inicio de la investigación en torno a la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal puede rastrearse hasta la década de 1990, cuando se publicó el trabajo compilado por Jean Luc Dorier en su libro “On the Teaching of Lineal Algebra” (Dorier, 2000). Este trabajo sentó las bases para explorar diferentes enfoques y estrategias en la enseñanza del Álgebra y ha servido como referencia clave en el campo.

Las líneas de investigación iniciadas en el trabajo de Dorier siguen siendo relevantes en la actualidad y, en algunos casos, se han ramificado en nuevas direcciones. Esto evidencia la amplitud y profundidad del álgebra lineal como campo de investigación en la educación matemática.

1.6.1. El álgebra lineal y su creciente importancia en los programas de pregrado

La gran cantidad de información que se mueve a través de los medios digitales ha hecho que el tratamiento de los grandes volúmenes de datos se traduzca en múltiples y variados problemas que han marcado el camino para que la rama de las matemáticas que más ha ampliado sus dominios sea precisamente el álgebra lineal. Esto se debe, en alguna medida, a que la encapsulación de esta información se da precisamente en artefactos importados del andamiaje mismo del álgebra lineal, como es el caso de: vectores, matrices (arreglo de vectores), tensores

(arreglo de matrices). En el prefacio del texto *“El Álgebra Lineal y sus Aplicaciones”* (Strang, 2006b), afirma que:

Personalmente, creo que muchas más personas necesitan álgebra lineal que cálculo. ¡Isaac Newton podría no estar de acuerdo! Pero él no está enseñando matemáticas en el siglo XXI [...] Ciertamente las leyes de la física están bien expresadas por ecuaciones diferenciales. Newton necesitaba cálculo, muy bien. Pero el alcance de la ciencia, la ingeniería y la administración (y la vida) es ahora mucho más amplio, y el álgebra lineal se ha movido a un lugar central. (p. iv)

Al respecto, Alan Tucker, profesor desde 1970 en la Universidad Estatal de New York Stony Brook, quien presidió por muchos años y en distintas épocas, la Asociación Americana de Matemáticas (MAA), manifestó, en su trabajo *“La Creciente Importancia del Álgebra Lineal en los Pregrados”* (Tucker, 1993), que el álgebra lineal debería tener el mismo espacio de tiempo que el cálculo en los ciclos de formación básica.

Situándose en el contexto local, en las universidades colombianas, el tiempo que se emplea para la enseñanza del álgebra lineal representa un poco menos de la tercera parte del empleado para la enseñanza del cálculo; si a esto se le agrega el tiempo que se toma para cursos de precálculo, la proporción sería aproximadamente de 1:4.

En un sentido más general, refiriéndose a la enseñanza de las matemáticas, Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin y Ohtani afirman que: “En nuestra opinión, las matemáticas merecen una atención especial. Esto es especialmente cierto debido a la forma en que la informatización afecta a las matemáticas y viceversa” (2017, p. 106).

1.6.2. Un problema local sin explorar

En la Universidad del Valle, los cursos de matemáticas básicas para carreras de ingeniería tienen altas tasas de reprobación. Según Tenorio (2011), esto contribuye directamente a la deserción educativa. Para actualizar los datos de este estudio, se recopilaron las notas de álgebra lineal de 2010 a 2017. La Tabla 1 muestra dos columnas por programa de ingeniería: la columna izquierda indica el promedio anual y la columna derecha el número de estudiantes que completaron el curso. Por ejemplo, en 2012, 68 estudiantes de ingeniería eléctrica completaron el curso con un promedio de 2.4. Las calificaciones están en una escala de 1.0 a 5.0 y se requiere

un mínimo de 3.0 para aprobar. La última fila muestra los promedios por programa de ingeniería. Por ejemplo, ingeniería de sistemas tuvo el promedio más bajo (2.5) durante los ocho años observados y 524 estudiantes completaron el curso de álgebra lineal. La última columna muestra los promedios y el número total de estudiantes que completaron el curso por año. Por ejemplo, el promedio mínimo (2.6) se registró en 2011, 2012 y 2015.

Tabla 1: Promedio de notas por ingeniería, por año y generales.

	Agrícola	Civil	Alimentos	Materiales	Sistemas	Eléctrica	Electrónica	Industrial	Mecánica	Química	Sanitaria	Topográfica	General													
2010	2,4	26	3,4	39	2,7	29	2,3	58	2,7	60	2,9	44	3,3	37	3,4	46	3,2	45	3	45	3,4	34	2,4	72	2,9	535
2011	2,6	46	2,6	53	2,1	45	2,7	80	2,4	88	2,6	82	2,8	70	2,4	94	2,8	56	2,6	54	2,6	60	2,4	84	2,6	812
2012	2	58	2,6	58	2,6	52	2,5	75	2,3	67	2,4	68	3,1	55	2,7	76	2,7	64	3,1	41	2,5	56	2,5	63	2,6	733
2013	2,6	55	3	48	2,6	56	2,9	61	2,2	61	2,5	59	2,7	63	2,8	60	2,8	53	3,3	45	2,6	61	2,6	69	2,7	691
2014	2,7	50	3,4	49	3	39	2,9	61	3,2	47	3	56	3,4	45	3,3	60	3,2	48	3,2	59	3,2	43	2,6	65	3,1	622
2015	2,8	53	3,1	41	2,4	59	2,8	63	2	80	2,7	65	2,7	49	2,8	58	2,5	45	3,1	51	2,2	53	2,8	58	2,6	675
2016	2,7	62	3,4	70	2,6	84	2,9	80	2,4	96	2,9	79	3,4	62	2,6	92	2,6	88	2,7	78	3	73	3,1	86	2,8	950
2017	3,3	32	3,5	30	3	34	3,3	38	3,7	25	3,4	32	3,9	30	3,3	40	3,7	30	4	20	3,3	38	2,6	34	3,4	383
	2,6	382	3,1	388	2,6	398	2,8	516	2,5	524	2,7	485	3,1	411	2,8	526	2,9	429	3,0	393	2,8	418	2,6	531	2,8	5401

Nota: datos entregados por Registro académico de la Universidad del Valle.

En términos generales, encontramos que los estudiantes de álgebra lineal, en los programas de ingeniería, tienen un bajo rendimiento. Los promedios están por debajo del nivel de aprobación.

Tabla 2: Tasas de reprobación de álgebra lineal en los últimos ocho años, de los doce programas de ingeniería de la Universidad del Valle en el período 2010 a 2017

Agrícola		Civil		Alimentos		Materiales		Sistemas		Eléctrica		Electrónica		Industrial		Mecánica		Química		Sanitaria		Topográfica		General		
2010	62%	16	28%	11	55%	16	64%	37	57%	34	41%	18	32%	12	22%	10	27%	12	33%	15	18%	6	58%	42	43%	229
2011	48%	22	60%	32	71%	32	48%	38	66%	58	50%	41	53%	37	61%	57	54%	30	63%	34	57%	34	62%	52	58%	467
2012	76%	44	52%	30	65%	34	56%	42	66%	44	62%	42	42%	23	47%	36	52%	33	32%	13	57%	32	62%	39	56%	412
2013	64%	35	40%	19	57%	32	38%	23	66%	40	54%	32	51%	32	50%	30	51%	27	29%	13	54%	33	51%	35	51%	351
2014	50%	25	29%	14	31%	12	39%	24	30%	14	36%	20	18%	8	32%	19	40%	19	29%	17	26%	11	51%	33	35%	216
2015	45%	24	41%	17	59%	35	46%	29	80%	64	48%	31	51%	25	47%	27	53%	24	31%	16	74%	39	41%	24	53%	355
2016	52%	32	23%	16	50%	42	39%	31	58%	56	43%	34	21%	13	58%	53	59%	52	47%	37	33%	24	36%	31	44%	421
2017	38%	12	23%	7	29%	10	34%	13	20%	5	31%	10	10%	3	30%	12	13%	4	10%	2	24%	9	53%	18	27%	105
	55%	210	38%	146	54%	213	46%	237	60%	315	47%	228	37%	153	46%	244	47%	201	37%	147	45%	188	52%	274	47%	2556

Nota: datos entregados por Registro académico de la Universidad del Valle.

La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** muestra que el promedio ponderado de estudiantes que reprobaron álgebra lineal durante el periodo observado es del 47%. Según Tenorio (2011), la tasa de reprobación en ese momento estaba entre el 30% y el 40%, lo que significa que

ha aumentado en aproximadamente 10 puntos porcentuales. Esto representa un alto nivel de fracaso escolar. Cabe señalar que estas tablas solo tienen en cuenta a los estudiantes que completaron el curso y no incluyen a aquellos que cancelaron la materia antes de terminarla. Estos indicadores respaldan la justificación del proyecto.

1.6.3. Promoviendo el pensamiento matemático a través de las tecnologías digitales

En el contexto educativo, se ha observado una desmotivación generalizada entre los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas, según investigaciones realizadas en el marco del programa “Universidad y Culturas” Coordinado por Tenorio (2011). Estas investigaciones también han evidenciado una actitud negativa hacia esta materia y la falta de capital cultural necesario para tener éxito en su formación. Además, se ha reiterado que la enseñanza de las matemáticas se basa en procedimientos rutinarios.

A pesar de los esfuerzos institucionales por proporcionar infraestructura y capacitar a los docentes en el uso de las tecnologías en el aula, sin impacto en la enseñanza sigue siendo limitado. Por tanto, en el desarrollo de esta investigación se tiene como objetivo transversal promover el uso de herramientas digitales para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático en el curso de álgebra lineal.

En particular se busca alentar el uso coordinado y orientado de programas como GeoGebra, Matlab, Matrix calculator y matemática, con el fin de mejorar el razonamiento y comprensión de los conceptos matemáticos en el curso de álgebra lineal. Las tecnologías digitales ofrecen recursos interactivos, visualizaciones y cálculos computacionales que pueden facilitar y motivar el aprendizaje significativo.

Es importante destacar que la Universidad del Valle está adelantando una reforma curricular en todos sus programas (Superior, 2015). En este contexto el departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias está brindando apoyo a la reforma de los programas de matemáticas, y se encuentra abierto a discutir propuestas de innovación para la enseñanza de las matemáticas.

En este escenario, la investigación educativa desempeña un papel crucial ya que permite someter a prueba las actividades de aprendizaje y los nuevos enfoques sobre la enseñanza de las matemáticas en general, y del álgebra lineal en particular. A través de la investigación, se podrán

evaluar los resultados identificar posibles mejoras generar conocimientos pedagógicos que contribuyan a una enseñanza más efectiva y motivadora de las matemáticas.

1.6.4. La importancia de las tecnologías digitales en la Educación Matemática

Como se señaló antes, hace más de 40 años, autores e instituciones han venido destacando la importancia del empleo de las tecnologías digitales en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2000; MEN, 2014; UNESCO, 2013; OCDE, 2015; Moreno, L, & Santos, L.M., 2016). Al revisar buena parte de la literatura con enfoque en resolución de problemas matemáticos con tecnologías digitales, se adoptó la idea de que las tecnologías digitales, por la forma en que han transformado la forma de comunicar, interactuar, pensar y en general de vivir y convivir de los seres humanos, se constituyen en una cualidad para generar conocimiento, tan importante como la oralidad y la escritura. Así como la escritura no desplazo la oralidad en su momento, sino que reordenaron la manera de pensar y producir conocimiento de los seres humanos con estos medios, es necesario explorar los roles de esta nueva cualidad: ¿cómo reacomoda las formas de construcción de conocimiento cuando se promueve su participación? (Borba & Villareal, 2005; Jacinto & Carreira, 2017; Villarreal & Borba, 2010). En el trabajo de Jacinto y Carreira (2017) se afirma que:

Hoy tenemos fuertes evidencias de un cuerpo comprensible de investigación de que el uso de tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas reformula y reorienta el pensamiento matemático: favorece los enfoques experimentales y exploratorios, promueve habilidades críticas y de indagación, permite una variedad de estrategias, desencadena la generación de conjeturas y apoya demostración matemática. Por otro lado, el desarrollo de una fluidez tecno-matemática abarca la exploración de las posibilidades de varias herramientas matemáticas digitales, y esto puede beneficiarse al conectar la tecnología y los problemas matemáticos no rutinarios. (p. 1135)

En el ámbito nacional y regional del Valle del Cauca, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), las secretarías de Educación y la Universidad del Valle han acatado las directrices generadas desde la investigación educativa, para implementar las tecnologías digitales en Educación Matemática. Gracias a estos esfuerzos, las Instituciones Educativas cuentan hoy con infraestructura y actualización parcial de los docentes en esta materia. Sin embargo, no es notorio el impacto que tienen estas iniciativas sobre los resultados de aprendizaje.

En el año 2014, la UNESCO realizó el Acuerdo de Mascate, elaborado mediante amplias consultas y aprobado en la Reunión Mundial sobre la Educación para Todos (EPT) de 2014, que sirvió de fundamento para las metas de educación propuestas por el Grupo de Trabajo Abierto sobre los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). La UNESCO, en coorganización con la UNICEF, el Banco Mundial, la UNFPA, el PNUD, La ONU, mujeres y el ACNUR, realizaron en mayo de 2015 el evento denominado *Educación 2030*. En dicho evento, los ministros de Educación, los jefes y miembros de delegaciones de los estados participantes, los jefes de organismos y funcionarios de organizaciones multilaterales y bilaterales, los representantes de la sociedad civil, de la profesión docente, de los jóvenes y del sector privado, construyeron el documento denominado *Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del Objetivo de Desarrollo Sostenible 4*. Específicamente, esta declaración construye una plataforma de trabajo para cumplir el objetivo 4 del acuerdo de Mascate que dice lo siguiente: *Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos*.

Este objetivo implica trabajar en las dimensiones de equidad, equitatividad y calidad. La calidad de la educación matemática depende de varias variables, entre ellas: el currículo, la evaluación, la infraestructura escolar, el presupuesto, los materiales, las actividades de aprendizaje, la formación de los profesores, entre otras. Esta última variable ha sido reconocida por diferentes investigadores e instituciones como la variable preponderante en la determinación de la Calidad de la Educación.

Capítulo 2: Marco Teórico

2.1 La Resolución de problemas Matemáticos con Medios.

Este marco teórico tiene sus bases en el enfoque de resolución de problemas matemáticos a partir de los trabajos representativos de George Pólya, Alan Schoenfeld y el trabajo en resolución de problemas mediados con tecnologías digitales de Manuel Santos Trigo. Incorpora las ideas de la producción de conocimiento de humanos con medios de Marcelo Borba y Mónica Villareal, y de Helia Jacinto y Susana Carreira, y adopta las ideas de Anna Sierpinska de formas de razonamiento en la resolución de problemas del álgebra lineal, para constituir finalmente el marco teórico e interpretativo “Resolución de Problemas con Medios”

La investigación en Educación Matemática que se realiza con las herramientas teóricas del enfoque de Resolución de Problemas Matemáticos (MPS por sus siglas en inglés), se ocupa de analizar el papel de la actividad de resolver problemas en la construcción individual y colectiva de las competencias matemáticas por parte de los estudiantes (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina, & Bruder, 2016). Este marco teórico se enfoca en analizar la actividad de resolver problemas utilizando herramientas y medios tecnológicos. Al incorporar estas herramientas en el proceso de resolución de problemas, se busca mejorar la comprensión y el razonamiento de los estudiantes.

2.1.1. *Postulado: Las matemáticas como una actividad de “Resolución de Problemas”*

George Pólya (1887 - 1985) fue un gran investigador matemático, reconocido profesor e investigador de la enseñanza de las matemáticas, combinación de facultades que en escasas ocasiones se da en un mismo ser humano (Shirali, 2014). Entre 1919 y 1976 hizo contribuciones trascendentales, por su impacto y vigencia, a la enseñanza de las matemáticas. Como matemático, realizó constantes contribuciones al análisis real y complejo; ya en la cúspide de su carrera, contribuyó como investigador en probabilidad, combinatoria, álgebra y teoría de números (Boas, 1990).

En el enfoque de investigación en Resolución de Problemas Matemáticos, una obra influyente es *¿How to solve it?* (George Polya, 1945). Este libro es considerado un clásico en la Educación Matemática y destaca la importancia de la resolución de problemas como actividad principal en el aprendizaje de las matemáticas. En el prefacio, Pólya presenta un postulado que puede considerarse el fundamento del enfoque de Resolución de Problemas.

Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de un problema, hay un descubrimiento. El problema puede ser sencillo, pero si se pone en juego la curiosidad y se resuelve por medios propios, se experimenta el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo (George Polya, 1945, p. vi).

Una forma concreta de este postulado se obtiene delimitando La *premisa de vinculación de conocimiento* en Guershon Harel (2018) así: “*cualquier pieza de conocimiento matemático que los humanos conocen es el resultado de su resolución de un problema*”

2.1.2. ¿Cómo Resolver Problemas? El legado de George de Pólya

En la primera parte de su libro *¿How to solve it?*, presenta lo que se necesita para resolver un problema dividido en cuatro etapas muy conocidas y extensamente usadas: I. Comprender el problema II. Concebir el plan. III. Ejecutar el plan. IV. Visión retrospectiva. Pólya (1945) presenta una lista de preguntas estimulantes y orientadoras para cada etapa de la resolución de problemas. Estas preguntas, también conocidas como aforismos (Liljedahl et al., 2016), ayudan a guiar el proceso de resolución.

En la primera etapa, "Comprender el problema", las preguntas están orientadas a identificar lo que se busca y los datos proporcionados. También es importante determinar si la información es suficiente para encontrar una respuesta y si hay información redundante o tácita en el enunciado.

En la segunda etapa, "Concebir un plan", se sugiere recordar soluciones a problemas similares o relacionados y enunciar el problema de distintas formas. Si no se puede resolver, se puede intentar resolver un problema similar, más general o un caso particular.

En la tercera etapa, "Ejecución del plan", Pólya propone un monitoreo constante y demostrar la validez de cada paso.

En la cuarta etapa, "Visión retrospectiva", se debe revisar críticamente si los resultados satisfacen el enunciado del problema, y buscar nuevas estrategias y formas de obtener la solución. También se puede generalizar qué tipo de problemas se pueden resolver con este mismo método.

2.1.3. Con la mirada puesta en la Estrella Polar: La heurística moderna

La heurística, según Pólya, se define como el método que conduce a la solución de un problema. Se trata de una disciplina que se relaciona con la psicología y la filosofía y que ha sido tratada de manera general en el pasado. En el prefacio del primer volumen de su obra "Mathematical Discovery" (George Polya, 1981), Pólya menciona que la heurística era un concepto olvidado y desprestigiado en su época, pero que no temía utilizarlo. Según él, en las matemáticas se pueden encontrar vestigios de la heurística en los comentaristas de la obra de Euclides, como el trabajo de Pappus, al cual dedica varios apartados en sus propias obras. Otros autores relevantes en las obras de Pólya son René Descartes (1596-1650), Gottfried Leibniz (1646-1716) y Bernardo Bolzano (1781-1848). Pólya comenta que Bolzano "posee un trabajo detallado y notable sobre heurística" (George Polya, 1945, p. 102).

Según Regina Bruder en (Liljedahl et al., 2016), el origen de la palabra "heurística" se remonta a la época de Arquímedes (287-212 a.C.). Bruder argumenta que la palabra "heurística" y el famoso grito de júbilo "¡Eureka!" tienen raíces comunes. Bruder identifica las estrategias heurísticas como "heurismos".

Pólya (1945) busca caracterizar, mediante lo que él llama "heurística moderna", las principales operaciones mentales típicamente útiles para resolver problemas. Además, aclara que ningún trabajo serio puede afirmar que las reglas del descubrimiento son infalibles. Pólya comenta que, aunque Descartes especuló sobre un método universal para resolver todos los problemas y Leibniz formuló la idea de un método perfecto, esto solo es un sueño imposible de alcanzar. Sin embargo, Pólya termina su reflexión en este sentido con un atisbo de esperanza, afirmando que: "Nadie ha alcanzado la estrella polar, pero muchos han encontrado el camino correcto al mirarla".

2.1.4. Estrategias heurísticas para todos

La obra de Pólya no va dirigida a un solo tipo de público, algunos de sus diálogos van dirigidos a estudiantes, profesores, futuros matemáticos y también a aficionados a resolver problemas de naturaleza lúdica.

Después de las etapas anteriores, Pólya presenta en el capítulo titulado "En el salón de clase", una lista de preguntas que, al ser planteadas a un estudiante, le ayudarán a resolver el problema. Afirma que, en el salón de clase, el papel del maestro consiste en ayudar al alumno, aunque no se

trata de hacerlo de tal manera que no deje nada de valor para que el estudiante realice, ni tampoco dejarlo solo con el problema. Reiteradamente, señala que el profesor debe realizar preguntas o indicaciones que lleven al alumno a realizar operaciones intelectuales que son particularmente útiles para resolver problemas. Las preguntas deben tener características de generalidad, esto es, que resulten aplicables en una amplia gama de problemas; por ejemplo, ¿cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición que une los datos y la incógnita?

Todas las preguntas que aparecen en la lista, según Pólya, proceden del sentido común, es decir, se le presentan a cualquiera que va en la dirección correcta para resolver un problema. Para Pólya, estas preguntas tienen una doble misión: Ayudan a resolver el problema y a que el estudiante adquiera habilidades en la resolución de problemas. En esta sesión de su obra, presenta un primer ejemplo de problema: “Encontrar la medida de la diagonal de un paralelepípedo rectangular, dadas su longitud, su ancho y su altura”. A través de este problema y su resolución, muestra cómo funcionan las preguntas orientadoras y las etapas antes planteadas. Pólya afirma que la relevancia del papel del profesor, en el proceso de enseñanza, depende en gran parte de su propia experiencia como resolutor de problemas.

2.1.5. Breve diccionario de estrategias heurísticas de Pólya

Las estrategias heurísticas que Pólya plantea surgen de observar a sus alumnos, a sí mismo, a grandes matemáticos y, en general, a seres dedicados a la ciencia que lo antecedieron en su deseo de encontrar métodos o estrategias generales para resolver problemas.

Analogía: En esta sección de su obra, inicia presentando la estrategia heurística de la **Analogía** que la describe como la forma de encontrar problemas que podrían considerarse isomorfos a otros; además, señala que la inferencia por analogía le ayuda al químico a deducir medicinas para humanos habiendo experimentado con animales. Sugiere que esta heurística está guiada por la pregunta ¿conoce algún problema que se relacione con el suyo? propone también, que se debe usar de manera conjunta con las heurísticas auxiliares de generalización y particularización. En esta misma dirección, Regina Bruder en (Liljedahl et al., 2016) presenta el heurismo que llama *Cambio de aspectos*, que consiste principalmente en cambiar los supuestos o datos del problema por otros válidos. Por ejemplo, en un problema dado, transformar datos de naturaleza algebraica en términos de vectores.

Condición: la que califica como parte principal de un problema por resolver; resalta la importancia de clasificar la condición como *redundante* si resultan datos superfluos y como *contradictoria* cuando los datos se oponen unos a otros. Cita un ejemplo en el marco de los sistemas de ecuaciones lineales diciendo que, si una condición está dada por un número de ecuaciones, donde la cantidad de ecuaciones excede el número de incógnitas, entonces esto podría resultar redundante o contradictorio.

Descomponer un problema: Pólya (1945) presenta esta estrategia y cita el trabajo de René Descartes (1596-1650). Esta estrategia consiste en dividir un problema en subproblemas y resolverlos para luego recomponer las partes y dar respuesta al problema inicial. En el prefacio, señala que muchas personas disfrutan resolviendo problemas, y menciona los crucigramas y otros problemas de entretenimiento en los periódicos. Incluso presenta un ejemplo de un problema tipo crucigrama y lo resuelve utilizando esta heurística. Sin embargo, advierte que para descomponer un problema adecuadamente es necesario entenderlo bien y verlo como un todo para no perder de vista el objetivo. En este mismo sentido, Regina Bruder en (Liljedahl et al., 2016) menciona lo que denomina el *heurismo cuidado de aspectos*, que consiste en intentar encontrar relaciones de dependencia entre los datos del problema, los cuales deben hacerse variar para intentar obtener ideas en dirección de aclarar o detectar formas de resolver el problema. Un ejemplo se da cuando el resolutor de un problema halla una cierta simetría o identifica partes claramente constitutivas (ver el problema fraccionado) que le permitan atacar el problema por secciones.

Diagnóstico: Esta heurística la describe desde la perspectiva del profesor; afirma que es importante para el profesor detectar si un estudiante presenta algunos desordenes en el momento de resolver problemas. Por ejemplo, si se lanza a realizar cálculos sin haber entendido el enunciado del problema. Además, es frecuente que los estudiantes no comprueben sus respuestas y se conformen con soluciones inverosímiles, si el profesor detecta esto, quizás usando algunas de las preguntas sugeridas en la última etapa, puede hacer algo por aliviar este problema.

Figuras: Los inicios de esta práctica como heurística de apoyarse en imágenes para resolver problemas o comunicarlos se remonta hasta los geómetras griegos; reafirma su declaración citando el uso de gráficas por parte de Pappus. Pólya resalta que el uso de las gráficas en la

solución de problemas no sólo es importante en aquellos de naturaleza geométrica. Da también algunas pautas para que la gráfica realizada por el resolutor de cuenta de su entendimiento del problema no sea que su propia construcción lo lleve a cometer errores. Por ejemplo, si en un problema se habla de un triángulo cualquiera, la figura no debe sugerir un triángulo con características particulares. Para las figuras en tres dimensiones, plantea la dificultad de visualizar los detalles que estas puedan ofrecer para ayudar al resolutor. Dadas las limitaciones de las gráficas en 3D y los costos para hacer representaciones materiales, propone realizar modelos de cartón. Afirma, en general, que encontrar una representación geométrica fiel a un problema geométrico puede permitir o limitar el avance hacia la solución.

Reducción: consiste en llevar un problema a lo esencial; para este efecto, el resolutor se puede ayudar con la visualización de tablas, gráficos y diagramas.

Generalización: Consiste en pasar de evaluar un objeto a evaluar un conjunto de objetos entre los cuales se incluye el objeto inicial.

Desafortunadamente, como señala Bruner (Liljedahl et al., 2016), la aplicación de estos heurismos no se produce de manera automática en muchos estudiantes, debido a la carencia de una estimulación temprana.

2.2. Hacia un marco teórico de Resolución de Problemas: El trabajo de Alan H. Schoenfeld

El investigador en educación matemática y actual profesor de matemáticas en la Universidad de Berkeley en California, Alan H. Schoenfeld (1946), inicia su trabajo *Mathematical Problem Solving* (Schoenfeld, 1985) reconociendo el potencial de la obra de Pólya y sugiere que en el salón de clase hay que generar condiciones similares a las que los matemáticos experimentan en sus procesos reales de producción académica; es decir, se propone convertir la clase de matemáticas en un microcosmos de la cultura matemática de investigación (Benítez Mojica, 2006). Para tal efecto, Schoenfeld estudia la actividad académica de matemáticos en ejercicio y en formación, encontrando que en su actividad matemática de resolver problemas existen elementos que influyen decididamente en su accionar, como son: las estrategias cognitivas, el conocimiento, estrategias metacognitivas y el sistema de creencias.

2.2.1. Problemas y la resolución de un problema

(Schoenfeld, 2016), basándose en informes oficiales de distintas entidades de control de la educación estadounidense, concluía en 1992 que la educación matemática venía de tres décadas seguidas en crisis; en tanto que el rendimiento de los estudiantes en pruebas internacionales sobre “conceptos básicos” estaba muy por debajo de los países asiáticos homólogos. Con la idea de revertir este rumbo, en cada época predominó una reforma distinta: en los sesenta las llamadas “Matemáticas Modernas”, en los setenta “el regreso a lo básico” y en la década de los ochenta “el enfoque en la resolución de problemas”. A la hora de publicar este documento, por primera vez en 1992, ya era claro que la crisis de resultados se mantenía, a pesar de que, como lo señala Schoenfeld, citando importantes encuentros de educadores matemáticos como los ICME IV y V, la importancia que tomaba el enfoque de resolución de problemas y la metacognición entre los educadores e investigadores había alcanzado reconocimiento. El estancamiento en la década de los ochenta lo asocia a que el enfoque de resolución de problemas estaba siendo mal comprendido, como advierte en la siguiente frase: “La resolución de problemas y la metacognición, los términos principales en el título de este artículo, son quizás las dos palabras de moda más trabajadas y menos comprendidas de la década de 1980” (Schoenfeld, 2016),

2.2.2. ¿Qué no es un problema?

Schoenfeld advierte que se podría estar gestando, para 1992, una nueva reforma, como lo insinuaba el fenómeno oscilante que se venía dando entre décadas, aunque asegura que el uso equivocado de la resolución de problemas y la metacognición se podía revertir con la comprensión alcanzada desde Pólya. En consecuencia, se ocupa en este documento en expandir los alcances de la obra de Pólya. El trabajo “Aprender a pensar matemáticamente” (Schoenfeld, 2016) se ha convertido en los sólidos cimientos del marco teórico de la resolución de problemas matemáticos; en este, señala la idea equivocada de problema manejada en la década de los 80, y su relación con el fracaso de la reforma basada en este enfoque; se aproxima también a la noción de problema adoptado en el marco teórico y a la idea misma de lo que significa resolver problemas.

(Schoenfeld, 2016), basado en su encuesta (Schöenfeld, 1983), infiere que, en las prácticas de enseñanza de las matemáticas universitarias, los profesores declaran concebir los problemas de matemáticas, en lo que él llama el sentido tradicional del término problema. Estos son considerados como medios para practicar, reforzar o medir habilidades en aspectos

recientemente presentados por el profesor. Agrega además que, el diseño de este tipo de problemas busca garantizar la estructura que consiste en: presentar una tarea para introducir una técnica, explicar la técnica y finalmente asignar una tarea con un buen número de “problemas” en los que se pueda practicar la técnica. Concluye que estas actividades son más bien ejercicios de rutina que están muy lejos de ser problemas. Sin embargo, para este tipo de actividades, el investigador en educación matemática del Cinvestav (México), Manuel Santos Trigo en (Liljedahl et al., 2016), manifiesta que, con una actitud inquisitiva, aquellas tareas que se califican como rutinarias pueden iniciar una interesante actividad matemática. Para este tipo de problemas, Santos-Trigo propone la heurística de ampliar las condiciones iniciales, de tal forma que se transforme en una actividad retadora.

En efecto, un problema es una situación matemática que no tiene una solución obvia o inmediata, y requiere que el estudiante tenga que pensar de manera crítica y creativa para encontrar una solución (Schoenfeld, 2016).

2.2.3. Tres contextos en el planteamiento de problemas

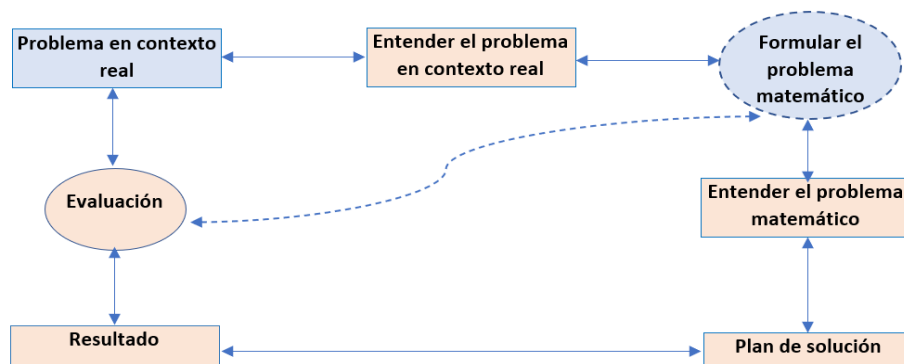
En la enseñanza de cualquier disciplina, es esencial involucrar a los estudiantes en actividades que les permitan construir, comprender y aplicar los conceptos fundamentales. En el caso de las matemáticas, es necesario que los estudiantes formulen preguntas, usen diversas representaciones y comuniquen resultados. El profesor debe diseñar actividades que permitan a los estudiantes valorar la importancia de las estrategias y guiarlos en su exploración. Las situaciones de aprendizaje efectivas tienen una estructura que fomenta la exploración y las conexiones entre la disciplina y los contextos en los que se presentan. En este sentido, se pueden utilizar tres tipos de contextos comúnmente para este propósito. (Manuel Santos Trigo & Barrera-Mora, 2000)

Contextos del mundo real. La resolución de problemas en un entorno real implica la construcción de un modelo matemático; para lograrlo, es esencial conocer las propiedades y características del entorno donde ocurre el problema para crear una representación matemática adecuada. La aplicación de modelos matemáticos se convierte en una herramienta valiosa en diversos campos del conocimiento, como la ingeniería, la física o la economía. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el modelo es una simplificación idealizada de la situación real,

sujeto a suposiciones e intereses específicos. Por lo tanto, es necesario establecer una clara distinción entre el modelo y la situación representada. Durante el proceso de solución, se aplican métodos conocidos para obtener los resultados del modelo, que deben ser interpretados para hacer predicciones y tomar decisiones. Es fundamental validar las predicciones mediante la comparación con observaciones del fenómeno estudiado en la situación real. Si el modelo no describe bien la situación real, se debe revisar la interpretación del problema o modificarlo o reemplazarlo por uno nuevo. En resumen, la construcción de un modelo matemático, la interpretación de los resultados, la validación de las predicciones y la revisión del modelo son los elementos básicos para resolver problemas en contexto real de manera rigurosa y coherente.

La resolución de problemas en contexto real involucra varias fases: entender el problema en su contexto real, formular matemáticamente el problema, comprender el problema matemático, planificar la solución matemática y finalmente, resolver el problema matemático. Es importante identificar el contexto del problema y comprender la información proporcionada, así como identificar los conocimientos matemáticos relevantes y las posibles estrategias a utilizar en la solución. La evaluación es un proceso constante en todas las fases del proceso:

Figura 3 Fases para resolver problemas en contexto real.



Nota: Construcción propia

Contextos hipotéticos. También denominado contexto realista, se caracteriza porque la situación se construye a partir de una serie de condiciones y suposiciones sobre las variables que intervienen en un problema real. Al tratarse de una aproximación de un problema real, las fases para resolver el problema se espera que sean similares; es decir, se espera que el estudiante realice ciclos como los descritos en la figura 3.

Contexto puramente matemático o formal. La situación que se presenta se centra exclusivamente en aspectos matemáticos. El objetivo principal puede ser plantear un problema o encontrar una solución a una pregunta formulada. El enfoque instruccional se centra en que los estudiantes puedan comprender la situación y plantear un método de solución mediante el uso de recursos matemáticos. Por ejemplo, identificando la información relevante y explorando conceptos para analizar casos particulares y eventualmente presentar un plan de solución. El análisis y discusión se localiza en el ámbito puramente matemático. Son muchas las aplicaciones de las matemáticas que se pueden abordar en el nivel universitario, del álgebra lineal en ingeniería.

En el caso particular del álgebra lineal, cuando se resuelven problemas, en contexto formal, se usan básicamente tres formas de razonamiento determinadas por el lenguaje matemático empleado durante los procesos; estas ideas se presentan con mayor detalle en (2.3.4). Una vez planteados los problemas en el contexto matemático formal directamente o después de la conversión desde el contexto real o hipotético, se tienen dos posibilidades no excluyentes para resolver el problema matemático. Se presenta a continuación los entornos de resolución de problemas: Estático o Dinámico.

Entorno Estático. En este entorno, se resuelven los problemas con el uso principal del papel y el lápiz, y su conjunto de tecnologías subordinadas.

Entorno Dinámico. En este entorno, las tecnologías digitales inteligentes predominan; para el caso particular de esta investigación las tecnologías tipo CAS y DGS pasan a subordinar las tecnologías empleadas en el entorno estático. Esto es, las tecnologías que les anteceden no desaparecen, sino que paulatinamente modifican sus tareas cediendo parte de su rol a las tecnologías emergentes.

El entorno estático tenía hasta hace poco el monopolio de los tres contextos de proposición de problemas; con la emergencia reciente de los entornos dinámicos, se mantienen los problemas tradicionales y aparecen nuevos problemas reales, hipotéticos y formales, pero de naturaleza puramente digital, como por ejemplo los que dan origen a la ciencia de datos.

Cabe anotar que independientemente del contexto (matemático, de la vida real o hipotético), el estudiante debe acceder a una serie de recursos matemáticos y estrategias que le permitan

analizar sistemáticamente el comportamiento de ciertos parámetros. Es importante plantear conjeturas, utilizar diferentes representaciones, plantear argumentos y comunicar e interpretar soluciones.

2.2.4. La Resolución de Problemas: El corazón de las matemáticas

Del trabajo de (Stanic & Kilpatrick, 1988), Schoenfeld concluye que el mal enfoque en los años ochenta, radicaba básicamente en que la resolución de problemas no constituía un objetivo en sí misma, sino que, por el contrario, fue usada para alcanzar metas distintas, tomando así la resolución de problemas el rol de: pauta para imitar, justificación del uso de las matemáticas a través de problemas de tipo anecdótico o incluso para mostrar las matemáticas como lúdicas.

Schoenfeld asegura que la resolución de problemas es una habilidad digna de ser fomentada por derecho propio, no como “ejercicio mental” para adquirir habilidades de razonamiento que supuestamente va a poder *transferir* y usar en otros ambientes científicos o sociales, mito que desmontó (Thorndike & Woodworth, 1901) citado por (Schoenfeld, 2016).

La postura filosófica que Schoenfeld plantea aquí, para el enfoque de resolución de problemas, es que las matemáticas consisten en resolver problemas no rutinarios, relativos a las matemáticas mismas (contexto formal) o a la vida real (contexto real y realista). Halmos (1980), citado por (Schoenfeld, 2016), sentencia que, aunque los axiomas, teoremas, definiciones, pruebas, teorías, fórmulas y métodos son ingredientes esenciales de las matemáticas, realmente las matemáticas consisten en formular problemas y proponer soluciones.

Schoenfeld reconoce a Pólya como el matemático más conocido por concebir las matemáticas como resolución de problemas; coincide con él en que la dependencia con la conjetura, la comprensión y el descubrimiento hacen de la matemática, en cuanto a práctica constructiva, similar a las ciencias físicas. Para Schoenfeld, las matemáticas son un acto de construcción de sentido, constituido y transmitido socialmente. Por esta razón, la experiencia del estudiante con las matemáticas marcará significativamente la forma de comprenderlas y aplicarlas.

Para Schoenfeld, un aspecto importante del pensamiento matemático es concebir las matemáticas como lo hacen los matemáticos, lo que implica convertirse en un buen solucionador de problemas: “el aprendizaje está formado y definido culturalmente; las personas desarrollan su

comprensión de cualquier empresa a partir de su participación en la “comunidad de práctica” dentro de la cual se practica esa empresa” (Schoenfeld, 2016, p. 8).

Schoenfeld asegura que al final de la década de los ochenta, la comprensión de lo que es saber y hacer matemáticas, había evolucionado de las matemáticas que uno “sabe” a los procesos de pensamiento matemáticos claves que se ponen en juego a la hora de resolver problemas, como es el caso de la abstracción, modelación, representación, entre otros. Por otro lado, las matemáticas se conciben cada vez más como una construcción social.

2.3. Fundamentos del enfoque de Resolución de Problemas Matemáticos (MPS)

(Schoenfeld, 2016) ubica el marco teórico de la resolución de problemas matemáticos en una línea de psicología opuesta a la del conductismo; específicamente, en aquella que se ocupa de explicar qué sucede a nivel mental cuando un individuo realiza una acción conducente a aprender. Señala que la investigación en MPS tiene sus orígenes en la producción de programas informáticos con la “habilidad” de resolver problemas y cita un amplio número de trabajos académicos que adoptaron este tipo de investigación; desde la informática a la educación matemática. Después de clasificarlos, tiene en cuenta aquellos trabajos que no toman los problemas como mera práctica de técnicas; en estos trabajos, asegura que parece haber un acuerdo general de los aspectos más influyentes del pensamiento matemático:

- La base de conocimientos.
- Estrategias de resolución de problemas.
- Seguimiento y control.
- Creencias y afectos.

2.3.1. Los conocimientos de base (Recursos)

Los conocimientos de base que pone en juego una persona que se encuentra en el proceso de resolver un problema, no solo tiene que ver con los conocimientos o herramientas de tipo matemático que posee el resolutor, sino en cómo los opera. Al escudriñar la forma de proceder de quien resuelve problemas, es importante poder identificar si, aunque poseía un conocimiento, no lo puso en juego y por qué razón; esto puede tratarse de cuestiones metacognitivas o no haber visto cómo este conocimiento puede ser útil. Schoenfeld precisa que el inventario de los conocimientos de base la conforman tanto el conocimiento formal como el intuitivo, como también, los hechos, definiciones, descripciones, procedimientos algorítmicos y manejo del

discurso del dominio. Es importante establecer si el elemento que pone en juego viene precedido de certeza absoluta o incertidumbre y si finalmente es bien usado.

El acceso a los recursos va a depender no solo de la “localización” del recurso, sino también de la naturaleza de este. El ser humano, como procesador de datos, recoge información, a partir de su experimentación, por medio de estímulos que pueden ser visuales, táctiles, auditivos; estas formas no son exclusivas ni excluyentes, esta información es codificada según (Anderson, 1983), citado por (Schoenfeld, 2016), en búferes de diferente tipo; por ejemplo, un búfer sensorial se caracteriza porque gran parte de su contenido está en forma de imágenes. La memoria de corto plazo o memoria de trabajo se abastece de los búferes sensoriales y de la memoria de largo plazo. La memoria de corto plazo es limitada dice (Miller, 1956), citado por Schoenfeld (2016) muy a pesar de que una persona pueda guardar gran cantidad de información en forma de búferes en el búfer sensorial y en la memoria de largo plazo, solo puede traer a la mesa de trabajo más o menos siete de estos búferes de manera simultánea; esto explica por qué una persona, sin entrenamiento especial, mentalmente no puede encontrar el producto entre 637 y 829.

2.3.2. Estrategia de resolución de problemas (estrategias heurísticas)

(Schoenfeld, 2016) afirma que el trabajo de Pólya ¿How to solve it? (G Polya, 1945) plantó la semilla del enfoque de resolución de problemas en matemáticas que floreció en los años ochenta, advierte que, aunque la obra de Pólya es mencionada en campos como la inteligencia artificial, la sicología, la química, la computación, entre otros, con frecuencia sus ideas se trivializan.

Aunque las estrategias heurísticas mencionadas por Pólya fueron muchas veces criticadas, parecen haber resurgido en la década de los ochenta. Para Schoenfeld el enfoque de Pólya tiene validez en grupos de personas con cierta solidez en su formación matemática, advierte, además, que las heurísticas presentadas por Pólya tienen un carácter más descriptivo que prescriptivo, lo que trae como consecuencia que sea difícil establecer cuándo se tienen suficientes heurísticas, pues se pueden encontrar docenas de ellas.

Se señala también que la resolución de problemas matemáticos en los planes de estudio americanos no se daba en la práctica; en el *Boletín de calificaciones de matemáticas* (Dossey, Mullis, Lindquist y Chamübers, 1988, p. 76), citado por (Schoenfeld, 2016, p. 21), se reporta que entre los años de 1978 y 1986, la instrucción en las clases de matemáticas se caracterizaba

porque los profesores explicaban el material, resolvían algunos ejercicios para ejemplificar y luego, proponían a sus estudiantes ejercicios para que los resolvieran por su propia cuenta. Aseguraron que este modelo venía de tiempo atrás y que, debía haber mejores formas para que los estudiantes aprendan que escuchar a sus maestros y luego practicar lo que habían escuchado, haciendo solo uso de la memoria. Frente a esto, proponen que los estudiantes debieran aprender a aplicar sus habilidades matemáticas recién aprendidas involucrándose en situaciones de investigación; lo que durante su trabajo investigativo encontraron con muy poca frecuencia. Según este mismo boletín, el predominio en los libros de texto era la misma terna; exposición, ejemplos, ejercicios, incluso en las supuestas sesiones de resolución de problemas. Mientras que, *“la resolución de problemas en el espíritu de Pólya es aprender a lidiar con nuevas y desconocidas tareas cuando no se conocen los métodos de solución relevantes o cuando solo se dominan parcialmente”* (Schoenfeld, 2016, p. 22)

Peter Liljedahl en (Liljedahl et al., 2016) dice que Schoenfeld ha logrado encontrar dentro de las heurísticas de Pólya algunas que no deben ser sujeto de instrucción, sino que, a partir del diseño del problema, el estudiante las evoca de manera natural. Además, dice que Schoenfeld ha refinado a un nivel práctico y empírico el trabajo de naturaleza teórica de Pólya. Señala que para Schoenfeld el proceso de solución de problemas es un dialogo entre los conocimientos de base, sus intentos y sus procesos mentales. Concluye que en el trabajo de Schoenfeld se ha logrado una mejor comprensión de la forma en que se resuelve y se enseña el enfoque de resolución de problemas.

2.3.3. Auto regulación, seguimiento y control: Metacognición

La auto regulación, el seguimiento y el control hacen parte de lo que se llama en este trabajo mecanismos de **metacognición**. Evaluar el progreso y actuar en concordancia con los resultados de estas evaluaciones, son los componentes centrales de la metacognición. (Schoenfeld, 2016), en un experimento con un estudiante de matemáticas puras versus estudiantes de otros planes que han abordado incluso más temas que les permitirían tener más herramientas en la base de conocimientos para abordar el mismo problema propuesto, demuestra cómo los estudiantes de planes distintos a matemáticas, leen brevemente el enunciado del problema, optan por atacar el problema de una cierta manera y aunque no progresan, no son conscientes de ello y no intentan cambiar de estrategia. Por el contrario, el estudiante de matemáticas, que tiene desarrollados sus mecanismos de metacognición, lee el problema, se toma el doble de tiempo que sus pares,

intenta aplicar un plan de solución, y aunque después de un corto tiempo lo abandona, vuelve a leer y ya en el segundo intento, resuelve el problema en corto tiempo y finalmente prueba sus soluciones. Schoenfeld asegura que este tipo de habilidades se pueden formar como resultado de una instrucción explícita centrada en los aspectos metacognitivos del pensamiento matemático. En un amplio porcentaje de sus clases, Schoenfeld fomenta estas estrategias a través de las siguientes preguntas:

¿Qué exactamente está haciendo? (¿puede describirlo con precisión?)

¿Por qué lo hace? (¿Cómo encaja en la solución?)

¿Cómo le ayuda? (¿Qué hará con el resultado cuando lo obtenga?)

Estas preguntas las hace en el principio del semestre; cuando lo hace, los estudiantes no saben qué responder, pero él insiste, a pesar de que los estudiantes muestran incomodidad. Luego los estudiantes empiezan a defender lo que hacen respondiendo a las preguntas sin él haberlas formulado. Advierte que quizás, en esta tarea, deba emplear gran parte del semestre para obtener resultados.

2.3.4. Creencias y afectos

Las creencias se interpretan como la comprensión y los sentimientos de un individuo que dan forma a las maneras en que el individuo conceptualiza y se involucra en el comportamiento matemático. Se tienen creencias de los estudiantes, de los maestros y de la sociedad sobre las prácticas matemáticas. Según (Ball,1988), citada por Schoenfeld (2016) , las creencias de los estudiantes se han moldeado por la experiencia escolar (en la educación tradicional) que invita a pensar en que saber matemáticas es recordar y aplicar la fórmula correcta cuando el profesor plantea una pregunta y la verdad matemática está dada cuando el profesor acepta la respuesta. Esta creencia se adquiere después de años de interacción con este tipo de prácticas.

Concluye Schoenfeld, después de presentar una lista de creencias del profesor, que lastimosamente las ha heredado de su formación y las transmitirá a sus estudiantes. De las creencias de la sociedad, destaca aquella que atribuye el aprendizaje de las matemáticas a una especie de don, que por suerte algunos lo tienen o por desgracia no; por tanto, según esta creencia, aprender matemáticas no se debe a un esfuerzo sistemático. Concluye que las creencias se extraen de las propias experiencias y de la cultura en la que se está inmerso.

2.3.5. El pensamiento teórico y el pensamiento práctico: herramientas de descripción

Como se señala en (Sierpinska, Nnadozie, & Oktaç, 2018), se toma el concepto de Pensamiento Teórico como una herramienta útil para el análisis de las producciones de los estudiantes y las intenciones implícitas de los diseños e intervenciones de quienes tienen la función de instrucción. El pensamiento teórico es según Sierpinska:

... El pensamiento teórico es un pensamiento donde el pensamiento y su objeto pertenecen a planos de acción distintos, y cuyo propósito es la producción de sistemas conceptuales internamente coherentes, basados en sistemas de signos especialmente creados. (Sierpinska, 2005, p. 123)

El Pensamiento Práctico se enfoca en acciones concretas, como la aplicación de técnicas o procedimientos rutinarios. Por otro lado, el Pensamiento Teórico, según (Sierpinska, 2005), es reflexivo, sistemático y analítico. Es reflexivo porque cuestiona la validez de los resultados obtenidos a través de técnicas o procedimientos. Es sistemático porque busca establecer relaciones sistemáticas entre acciones y entre estas relaciones se establecen nuevas relaciones de forma reglada. Estas características llevan a la aparición de resultados que deben ser ordenados y documentados en un lenguaje y estructura formal, lo que le da su carácter analítico. (Sierpinska, 2005) señala que, por la complementariedad, al contrario de otras ciencias, en las matemáticas se hace difícil separar el pensamiento teórico del práctico en las acciones involucradas en momentos reales de aprendizaje de las matemáticas. En este trabajo, se asume como en Sierpinska (2018), que el pensamiento teórico no surge de manera natural del pensamiento práctico, sino que se desarrolla sobreponiéndose a este. Esto es, una persona desarrolla el pensamiento teórico si ante sus acciones, sus conocimientos, sus creencias en cualquier momento del proceso de resolución de un problema, de manera sistemática y consciente, reflexiona sobre éstos.

2.3.6. El pensamiento creativo en la Resolución de Problemas

En el trabajo de Liljedahl (2016), se presenta la idea del pensamiento creativo en la resolución de problemas. Según Liljedahl, el pensamiento creativo se juzga en relación con la solución obtenida o el producto. Un producto creativo está asociado a un proceso de pensamiento creativo que se desarrolla durante las primeras etapas de resolución de problemas propuestas por la Psicología de la Gestalt: iniciación, incubación, iluminación y verificación. Liljedahl afirma que el pensamiento creativo está estrechamente ligado a un énfasis fructífero en la primera

etapa, lo que produce una incubación apropiada y posteriormente una iluminación creativa. Además, sostiene que el pensamiento creativo no es exclusivo de los genios, sino que cada individuo puede tener momentos de creatividad que pueden resultar en una solución creativa o simplemente en la resolución de un problema:

Entre el trabajo de un alumno que intenta resolver un problema de geometría o álgebra y un trabajo de invención, se puede decir que solo hay una diferencia de grado (Hadamard 1945, p. 104), citado por (Liljedahl et al., 2016).

Según Liljedahl, una de las creencias sociales es que las matemáticas son precisas, lo que induce a creer que para resolver problemas se deben emplear estrategias heurísticas que se basan únicamente en los procesos de razonamiento lógico y deductivo; esto esconde el hecho de que, las matemáticas frecuentemente tienen su génesis en medio de procesos extralógicos de iluminación o en un chispazo de creatividad como el que narra Poincaré.

Justo en ese momento, dejé Caen, donde vivía, para hacer una excursión geológica bajo los auspicios de la Escuela de Minas. El incidente del viaje me hizo olvidar mi trabajo matemático. Llegados a Coutances, entramos en un ómnibus para ir de un lugar a otro. En el momento en que puse el pie en el escalón, se me ocurrió la idea, sin que nada en mis pensamientos anteriores pareciera haber allanado el camino, que las transformaciones que había utilizado para definir las funciones de Fuschian eran idénticas a las de la Geometría no euclidiana. No verifiqué la idea; No debí haber tenido tiempo, ya que, al tomar mi asiento en el ómnibus, continué con la conversación ya iniciada, pero sentí una absoluta certeza. A mi regreso a Caen, por motivos de conciencia, verifiqué los resultados en mi tiempo libre. (Poincare 1952, p. 53), citado por (Liljedahl et al., 2016)

O como cuenta la historia de Newton y la manzana, más allá de si es cierto o no, a pesar de lo esquivos o escasos que puedan ser estos momentos de lucidez extraordinaria, a los que (Perkins, 2000), según (Liljedahl et al., 2016), llamó *pensamiento innovador*, aquel que debe emerger en aquellos problemas que el resolutor no puede zanjar en un intento directo; este tipo de problemas los clasificó Perkins, para el resolutor estancado, como no razonable. Es decir, el mismo problema podría ser razonable y ser resuelto con los elementos que posee en su *base de datos y estrategias cognitivas y metacognitivas* otro resolutor. Aunque el pensamiento creativo o

innovador no es exclusivo de los genios, Poincare aclara que se deben dar algunos requisitos para que se manifieste:

Hay que hacer otra observación sobre las condiciones de este trabajo inconsciente: es posible, y con certeza, sólo es fructífero si, por un lado, está precedido y, por otro lado, seguido por un período de trabajo consciente. Estas inspiraciones repentinas no se dan nunca, excepto después de algunos días de esfuerzo voluntario que parece absolutamente infructuoso y de donde nada bueno parece haber venido... (Poincare 1952, p. 56), citado por (Liljedahl et al., 2016).

2.4. Tecnologías digitales y Resolución de Problemas Matemáticos.

Santos-Trigo, en (Liljedahl et al., 2016), señala que en general el marco de resolución de problemas se basa en la actividad del estudiante con papel y lápiz, lo que hace necesario examinar los principios para analizar lo que los estudiantes desarrollan en entornos que incorporan decididamente tecnologías digitales.

Actualmente cuando se mencionan las tecnologías de la Información y la comunicación TIC se entiende que se está hablando de las últimas tecnologías, generalmente ligadas a computadores, aquellas que los seres humanos han incorporado en su quehacer diario, como persona del común o en sus especializadas formas de desempeñarse. En este documento, se emplea el término *tecnologías digitales* porque abarca un espectro más amplio de elementos que van desde dispositivos (hardware) hasta programas (software) (Freiman, 2020).

2.5. Unidad de construcción de conocimiento y Unidad básica de análisis.

Según (Borba & Villareal, 2005), parte de las tecnologías digitales se percibe aún en algunos sectores educativos como una amenaza en los procesos de enseñanza-aprendizaje; pues realiza procesos y acciones por los estudiantes “impidiéndoles” aprender lo que deberían; (Borba & Villareal, 2005), amparados en las ideas de Lévy (1993) argumentan que, por el contrario, el no vincular las tecnologías digitales en los procesos de enseñanza aprendizaje puede desempoderar a los participantes (humanos). Esta última posición es adoptada en este trabajo, en cuanto que, la unidad de producción de conocimientos no es el ser humano, sino una especie de esquema cibernético conformado por el humano o humanos con tecnologías. Al respecto Jacinto y Carreira (2017) afirman que:

Hoy en día, la idea de expresar el pensamiento como parte de la resolución de problemas matemáticos recibe un nuevo impulso porque expresar el pensamiento matemático requiere considerar los medios para transmitirlo. Por lo tanto, es esencial considerar al usuario y la herramienta como una sola unidad y comprender cómo opera esta unidad para resolver y expresar problemas (2017, p. 1118)

En consecuencia, el conocimiento no se gesta exclusivamente en el organismo vivo, ni en el digital, sino en un constructo que se encuentra en la intersección donde estos se fusionan. A diferencia con enfoques muy cercanos, que le dan importancia al uso de las tecnologías digitales, no se conciben humanos y medios como conjuntos disyuntos (Villarreal & Borba, 2010).

Es importante aclarar que, aunque este trabajo se centra en las características que las tecnologías tipo CAS y SGD aportan al razonamiento, el término "tecnología" abarca también otros medios de comunicación como la oralidad y la escritura. De esta manera, se reconoce la relevancia de diversas formas de comunicación en el proceso de razonamiento y en la aplicación de la tecnología en el campo de la educación y la investigación. Para tomar esta postura, adoptamos la línea de argumentación de (Borba & Villarreal, 2005) que recrea la época remota en que el conocimiento se construía y se transfería exclusivamente a través de la oralidad; luego, con la aparición de la escritura, la capacidad de generar conocimiento se amplía y se cualifica; los nuevos medios, generalmente, aparecen no para reemplazar a los existentes, sino para asignarles un nuevo rol en la tarea de construir conocimiento.

Entender la unidad de producción de conocimiento de esta manera realza la importancia de descubrir y describir las nuevas características de las formas de razonamiento que se manifiestan en las producciones de un resolutor de problemas. Para realizar esta tarea, se toma como unidad de análisis básica las producciones del resolutor; entendiendo por resolutor el mecanismo de naturaleza ciborg que puede constituirse como: estudiante con CAS y otros medios, estudiantes con SGD y otros medios o cualquier mezcla de estos.

2.5.1. Diseño de actividades interactivas en ambientes de matemáticas dinámicas

Alrededor del problema o conjunto de problemas que hacen parte de una tarea, es importante precisar cuáles son las estrategias y contenidos a involucrar, qué representaciones brindar y cuáles pedir al resolutor. Santos-Trigo en (Liljedahl et al., 2016) asegura que los sistemas de geometría dinámica SGD (Matemáticas dinámicas) se pueden considerar como un hito en el

desarrollo de tecnologías pensadas para la educación matemática, en particular, entre la lista de posibilidades que brinda esta herramienta citada, mencionadas en repetidas ocasiones por distintos autores, se resaltan algunas como:

- Construir de manera dinámica representaciones de un problema.
- Medir parámetros o atributos de objetos claves o auxiliares en un problema.
- Verificar y descubrir relaciones matemáticas entre objetos involucrados en un problema.
- Diseñar tareas en un entorno interactivo enriquecedor de expresiones para profesores y alumnos.
- Oportunidad para problematizar; por ejemplo, Santos-Trigo en Liljedhal (2016) presenta, a través del problema del “rombo dinámico”, un ejemplo de la forma en que se puede explotar un problema aprovechando las posibilidades que ofrece la herramienta de la representación gráfica e identificación de propiedades de esas representaciones a través de un proceso permanente de indagación.
- Buscar diferentes métodos de solución a través de los cuales es frecuente que emerjan conjeturas y el mismo medio facilita la producción de argumentos que la respaldan o la desechan, es decir, la misma sintaxis del ambiente geométrico ayuda a desarrollar un lenguaje matemático adecuado para comunicar y argumentar. En consecuencia, los alumnos no solo encuentran múltiples opciones para realizar exploraciones dinámicas, sino que mejoran sus formas de comunicar y justificar sus conjeturas (M. Santos-Trigo, 2019)

Santos-Trigo aclara que no se trata solo del poder de una herramienta como GeoGebra, sino de lo que el profesor logre orquestar usando herramientas con otros fines educativos complementarios; ejemplo: Herramientas tipo CAS como Matlab, Octave. Mathematica, herramientas tipo LMS (Learning Management System) como Moodle, Google classroom, entre otras. Repositorios de tutoriales a través de videos, como YouTube, Khan Academy, entre otros. Sistemas de chat basado en el modelo de lenguaje por Inteligencia Artificial como GPT. Herramientas que permiten reuniones sincrónicas como zoom, Meet y herramientas de tipo enciclopédico como Wikipedia.

Capítulo 3: Marco Metodológico

3. Investigación basada en el diseño: Cerrando la brecha

Esta investigación se basa en el análisis del Diseño de intervención, que consiste principalmente en una secuencia de Hojas de Trabajo Dinámicas que se dispondrán en la plataforma Moodle®. A través de estas, se presentará un conjunto de actividades de aprendizaje para el curso de álgebra lineal que se ofrece a las carreras de Ingeniería. Las hojas de trabajo tendrán un carácter dinámico gracias a la mediación de herramientas digitales de Matemáticas Dinámicas como es el caso particular de GeoGebra, Matlab y todas aquellas herramientas que ofrecen el soporte necesario para traspasar las barreras de tiempo y espacio.

3.1. Introducción

En adelante, se esbozan las fases y se explica la propuesta de trabajo que se desarrolló. Por sus características principales, este trabajo se puede clasificar como una *Investigación Basada en el Diseño* (IBD), pues combina el interés de desarrollar una propuesta de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal y de comprender cómo la mediación de la tecnología, integrada en la propuesta, potencia y transforma las formas de razonamiento de los estudiantes. Es decir, concertará en un salón de clases real, el *Diseño Instruccional* y la *Investigación Educativa* (Gravemeijer & Prediger, 2019). El origen, al menos en América, de la investigación basada en el diseño según (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2015; Swan, 2020), se da con el trabajo de (Brown, 1992), quien pretendía desprenderse de los entornos artificiales tipo laboratorio, para trasladar la investigación hacia ambientes más naturales, lo que se traduce en convertir los salones de clase en “comunidades de aprendizaje”, y el trabajo de (collins, 1992) que abogó por el uso de este tipo de enfoque en la educación matemática, argumentando que, del mismo modo que la ingeniería aeroespacial y farmacéutica, para el caso de la educación matemática, los diseños consisten en nuevos materiales de enseñanza o evaluación, nuevos enfoques de enseñanza de una temática o asignatura, programas de desarrollo profesional o incluso mezclas entre dos o más de estos elementos.

3.2. Investigación Basada en el Diseño (IBD): Características principales.

(Swan, 2020) cita diez trabajos académicos en los cuales se ha intentado caracterizar la IBD; de estos trabajos, extrae algunos aspectos en los que parece haber consenso en que la investigación basada en diseño es: creativa, visionaria, ecológicamente válida, intervencionista e iterativa.

3.2.1. Creativa y visionaria: Nuevas estrategias traen nuevos resultados

En este trabajo, por un lado, se **crearon** y refinaron nuevas maneras de acercar los principales conceptos del álgebra lineal a los estudiantes. Con este fin, se plantean actividades con una secuencia sugerida, agrupadas en problemáticas relacionadas del álgebra lineal.

El *Diseño de intervención* (DI) (Dreyfus, Hershkowitz, & Schwarz, 2015) está formado, por un lado, por las actividades recopiladas en aproximadamente nueve *Hojas de Trabajo* (se les llama también *Lecciones de Estudio* por el nombre del recurso de la plataforma Moodle en la que se disponen en línea). Las actividades están conformadas por problemas del álgebra lineal en contexto formal.

De otro lado, las dinámicas planteadas en las actividades y las reglas de participación e interacción de las partes del entorno de aprendizaje **pretenden** que los estudiantes pongan en juego estrategias cognitivas y metacognitivas relacionadas con la resolución de problemas, para luego analizar cómo la mediación de las tecnologías digitales dinamiza y modifica las formas de razonar al resolver problemas. Además, teniendo como prospectiva la transferencia de conocimiento y la proposición de problemas, los estudiantes, al final de la intervención, deberán presentar los resultados de una investigación alrededor de un problema propuesto por ellos en su área de interés, ya sea en un contexto real o hipotético, aunque también es posible que se planteen problemas en contexto formal donde cobren relevancia los conceptos del álgebra lineal y el uso de tecnología digitales.

Estas metas de trabajo entrelazadas las describe Malcolm Swan (1953 - 2017) así:

El objetivo final es producir un diseño eficaz, una descripción de la teoría y los principios que sustentan el diseño y un análisis de la variedad de formas en que funciona el diseño en manos de una muestra típica de la población objetivo de profesores y estudiantes. (2020, p. 193)

3.2.2. Contexto: Ecológicamente válido

La IBD es ecológicamente válida porque, con la salvedad de la incidencia que pueda representar el investigador cuando no es el profesor que orienta el curso y el grado de preparación del DI, la investigación se desarrollará en un salón de clase real y su desarrollo se apegará a las formas más naturales posibles.

Para esta propuesta, se contó con un grupo de clase de álgebra lineal, donde asisten en promedio 25 estudiantes de primer año de ingeniería; en una universidad del suroccidente colombiano. Las clases se desarrollaron en la modalidad de presencialidad asistida por tecnologías digitales tipo videoconferencia (ej.: Zoom y Meet).

Los sujetos de la investigación fueron estudiantes de segundo semestre matriculados en el curso de álgebra lineal de una universidad en la ciudad de Cali, Colombia. La universidad ofrecía regularmente alrededor de seis grupos del curso de álgebra lineal por semestre. El estudio se llevó a cabo en dos etapas: un pilotaje durante el semestre académico en la segunda mitad del año 2021, y se recopilaron los datos finales en el semestre académico de la segunda mitad del año 2022.

Para poder matricularse en el curso de álgebra lineal, la institución requería que los estudiantes aprobaran el curso de matemáticas fundamentales. Este curso constaba de dos unidades: álgebra y funciones. En la unidad de álgebra, se enfocaba en las propiedades de los números reales y las leyes algebraicas que permitían realizar operaciones con expresiones analíticas. Por otro lado, en la unidad de funciones, se estudiaban varios modelos matemáticos que permitían resolver diferentes situaciones problemáticas. Uno de los temas directamente relacionados con el curso de álgebra lineal era el estudio de sistemas de ecuaciones lineales de tamaño 2×2 .

3.2.3. Intervencionista e Iterativa

Durante el desarrollo de este estudio, se utilizaron hojas de trabajo dinámicas en al menos dos ocasiones, en un enfoque iterativo. Estas hojas de trabajo fueron presentadas a través de programas de comunicación por video como Zoom y Meet. La naturaleza dinámica de las hojas de trabajo se debió, por un lado, a la posibilidad de trabajar en grupo de forma sincrónica y asincrónica que ofrece la plataforma Moodle. Por otro lado, se utilizaron diferentes aplicaciones diseñadas en GeoGebra, lo que permitió a los estudiantes dar movimiento a las representaciones predeterminadas en las actividades, así como crear sus propias representaciones.

La primera intervención, conocida como pilotaje, se realizó con la versión inicial del Diseño de intervención (DI). Esta etapa permitió observar cómo funcionaban los procesos planificados. A partir de la experiencia adquirida, se recopiló información para realizar las transformaciones necesarias en el DI. Este enfoque de cambio continuo le otorga al DI un dinamismo adicional.

El enfoque intervencionista de este estudio se centró en dos factores y direcciones principales. En primer lugar, se contó con la participación del investigador; quien en ocasiones, asumió el papel de profesor auxiliar complementando las intervenciones del profesor titular del curso. Además, el investigador influenció las decisiones del profesor a través de reuniones semanales. En segundo lugar, el DI generó procesos activos de competencia matemática computacional y se transformó y/o adaptó en función de los fenómenos observados tanto por el investigador como por el profesor del curso. Estos dos factores conllevan a que el rol del profesor y de los estudiantes en la investigación no sea neutral, ya que tienen un impacto sustancial en el DI y en los enfoques que se priorizarán.

3.3. Fases de la investigación

A continuación, se presentan algunas acciones que caracterizan cada fase de esta investigación:

Tabla 3: Fases de la investigación.

<i>Investigación Basada en el Diseño: Fases</i>					
Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 6
Problema. <i>Antecedentes.</i> <i>Planteamiento del Problema.</i> <i>Preguntas de Investigación.</i> <i>Objetivos.</i>	Marco Teórico. <i>Enfoque e Interpretación.</i> <i>Estrategias cognitivas y metacognitivas.</i> <i>Formas de razonamiento.</i> <i>Pensamiento Matemático Computacional.</i>	Diseño. <i>Conjeturas y principios del diseño.</i> <i>Diseño de intervención inicial</i>	Ciclos. <i>Ciclo 1. Pilotaje. Ajustes.</i> <i>Ciclo 2. Toma de datos. Recolección.</i>	Análisis. <i>Tratamiento de Datos.</i> <i>Niveles de observación.</i> <i>Criterios de Análisis.</i> <i>Estudio de casos.</i>	Resultados. <i>Conclusiones. Formas de Razonamiento.</i> <i>Diseño de intervención final</i>

Nota: Construcción propia.

Las fases 1 y 2, se presentan en los dos primeros capítulos de este documento. A continuación, se esboza, con algún detalle, el resumen de las dos primeras fases y las ideas principales de las fases que se presentan en los capítulos 3, 4 y 5.

3.3.1. Fase 1: Planteamiento del Problema de Investigación

En el primer capítulo, se abordó la primera fase de la investigación, en la cual se formularon las preguntas de investigación. Estas preguntas, cuyas respuestas se presentan en el capítulo 5, constituyen los cimientos de un programa que tiene como objetivo establecer nuevos vínculos

entre las matemáticas en la formación de los ingenieros y las matemáticas en su entorno laboral, a través del diseño de intervención en constante evolución.

3.3.2. Fase 2: Marco interpretativo y referencial

En el capítulo dos de este documento, correspondiente a la segunda fase, se presentan los elementos teóricos que ofrecen las bases del enfoque de resolución de problemas con medios puesto en las actividades que conforman el DI, de otro lado, el marco teórico ofrece los filtros a través de los cuales se realiza el tratamiento de los datos recogidos principalmente en el segundo ciclo de la fase 4.

3.3.3 Fase 3: Diseño de intervención

En la primera etapa de esta fase, se seleccionaron los problemas centrales a resolver en un curso de álgebra lineal, de tal forma que el estudiante pueda enfrentar las actividades iniciales con sus conocimientos previos y con el hilo conductor que ofrece el concepto de combinación lineal y logre así resolver los problemas, en contexto formal, de temas tan avanzados de un primer curso de álgebra lineal; como es el caso de valores y vectores propios. En una segunda etapa, se ejecutaron las siguientes acciones: solución de los problemas planteados, análisis de la solución del problema, rediseño y extensión de actividades, las cuales se realizaron bajo los siguientes presupuestos:

- En la solución del problema, se incluyeron algunas de las siguientes características del quehacer matemático: particularizar, buscar patrones, conjeturar, generalizar, extender la solución, solucionar un problema más simple, revisar la solución, utilizar múltiples representaciones, extraer información de una representación específica, construir modelos matemáticos, formular contraejemplos y estudiar casos particulares, entre otras.
- Sobre los contenidos, se involucraron aquellos contenidos que guardan relación con los grandes temas del álgebra lineal: sistemas de ecuaciones lineales, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, matrices, operaciones con matrices, matrices elementales, factorización LU, espacios vectoriales y subespacios, mínimos cuadrados, factorización QR, valores y vectores propios.
- Promover el uso coordinado de las herramientas tipo CAS y DGS. Los problemas podían ser resueltos con la mediación de las herramientas: GeoGebra www.geogebra.org,

Matlab, Mathematica www.wolframalpha.com, Matrix Calculator www.matrixcalc.org , entre otros.

En síntesis, para evaluar el potencial de las actividades seleccionadas, fue necesario resolverlas por parte del profesor del curso y el investigador. La solución a priori permitió conocer, ampliamente, los procesos y los contenidos matemáticos involucrados en distintas soluciones de un problema. Para enriquecer el análisis, se estudiaron alternativas para solucionar cada problema; inferir dificultades y destrezas que pueden presentar los estudiantes en cada solución; proponer extensiones y establecer conexiones en cada uno de los problemas.

Conjeturas y principios de Diseño

En el diseño de las hojas de trabajo, se pusieron a prueba las siguientes conjeturas abstraídas de los hallazgos reportados en los dos primeros capítulos:

Nuevas características de las Formas de Razonamiento

Esta primera conjetura va ligada a uno de los principales propósitos del DI que pretende presentar una alternativa al enfoque que se ha mencionado como tradicional, que consiste en diseñar actividades que requieran el uso coordinado e incorporado de las tecnologías digitales tipo DGS y CAS.

Conjetura 1: Si se emplean coordinadamente las tecnologías digitales tipo CAS y de Matemáticas Dinámicas como herramientas de aprendizaje, estas transforman interna y externamente las formas de emplear, aplicar y verificar el uso de las matemáticas en la resolución de problemas en contextos formales, reales y realistas.

Resulta clave, a la hora de crear las actividades que forman el DI, diferenciar el uso de las tecnologías como un simple asistente para realizar cálculos, que como una herramienta de construcción de conocimiento asociada e incorporada a los esquemas mentales del estudiante. Durante miles de años, en el contexto escolar, y aun hoy, dominar las técnicas de cálculo numérico y simbólico fue esencial para poder hacer matemáticas. Desde 1990, este requisito se ha ido desmontando gradualmente en el ámbito laboral de los ingenieros y de quienes hacen ciencia en general, debido a la introducción de tecnologías digitales que pueden realizar casi cualquier cálculo numérico o simbólico. Estas tecnologías revolucionaron la praxis matemática, según (Devlin, 2019), para los profesionales hacer y usar las matemáticas hoy en día, es una

experiencia muy diferente a cualquier otro tiempo en el pasado. No se puede negar el esfuerzo de los maestros e investigadores de incorporar las tecnologías digitales en algunos casos para mejorar la comunicación, en otros para agilizar la realización de algunas operaciones, esfuerzos que en alto porcentaje terminan por fortalecer las prácticas tradicionales. En este trabajo, se pretende describir cómo la llamada competencia matemática, en el caso del álgebra lineal, se transforma en lo que se ha llamado Competencia Matemática Computacional, como resultado de intentar incorporar en los esquemas mentales del estudiante las herramientas digitales que usa, como se plantea en (Drijvers et al., 2019). Es claro que este fin no se alcanza con el uso tradicional de estas herramientas, se hace necesario que el DI se adopte como una de las metas estratégicas. Otro resultado implícito en el comentario anterior y en la conjetura en general es que las formas de razonamiento propias del álgebra lineal, descritas por Sierpinska, adquieren nuevas características gracias a los esquemas emergentes logrados por los estudiantes, en gran medida dados como consecuencia de la combinación herramienta-humanos. Un caso ejemplificante de las afirmaciones que se han hilado en esta parte del documento lo constituye *el fenómeno del arrastre*; con el que se produce una serie de sucesos de carácter cibernético que mejoran las habilidades del estudiante, pues le permite ver los efectos de sus acciones, recibir retroalimentación de la herramienta (Benítez Mojica, 2006), y compartir las ideas numérica y simbólicamente, de su interacción con la tecnología (Tall, 2013).

El Principio de migración. Las actividades propuestas en el DI tienen en general un principio al que se ha denominado *Principio de migración o de Algoritmos asistidos por tecnología*, que busca migrar los cálculos tradicionalmente realizados con la tecnología de escritura a mano a través de papel y lápiz, a las tecnologías digitales tipo CAS, lo que trajo como consecuencia que de nuestro análisis se pudieran describir las nuevas demandas que se le asignarán a los estudiantes en el momento de dialogar con las tecnologías digitales, en el modo que ya presagiaba Miguel de Guzmán (1936 - 2004) *“Lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen, y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente”* (De Guzmán, 2007, p. 28).

El principio de Preguntas Retadoras. Consiste en pequeños problemas abiertos, dentro de las actividades que conforman el DI, que retan al estudiante puesto que en un amplio porcentaje el estudiante se vio enfrentado a un desafío que, en algunas ocasiones, podría sortear realizando asociaciones de conocimientos previamente adquiridos y en otras le demandó resolver un

problema en el sentido de (Schoenfeld, 2016). Al respecto, (Stewart et al., 2019) reportan una encuesta con 781 respuestas de estudiantes de álgebra lineal de 10 instructores de 8 instituciones distintas a partir de la cual los autores concluyen que las preguntas que son buenas para estimular la discusión comparten las características de ser desafiantes y se enfocan principalmente en interpretar teóricamente los resultados de los cálculos logrados en el computador en lugar de realizar cálculos manualmente. Para (Gravemeijer et al., 2017) priorizar los cálculos de verificación, desplazando los procedimientos estándar, trae consecuencias significativas para el contenido y el plan de estudios que preparen al estudiante en las competencias que le exige la sociedad digital en la que está inmerso.

El concepto de Combinación Lineal: Hilo conductor entre las formas de razonamiento del álgebra lineal

Conjetura 2: El concepto de combinación lineal, a través del mecanismo de metacognición o proceso activo de la verificación, tiende un hilo conductor entre los conceptos y las formas de razonamiento del álgebra lineal.

En este trabajo, se hizo un uso estratégico del concepto de combinación lineal al que se le asigna el rol de hilo conductor entre los diferentes conceptos que forman el andamiaje principal, no sólo del álgebra lineal básica, sino de los más avanzados conceptos y sus aplicaciones a las más actuales aplicaciones del álgebra lineal en Machine Learning, Deep Learning, Procesamiento de Imágenes, entre otros. Para (Stewart, 2017), cuando se piensa en el concepto que vincula los principales conceptos del álgebra lineal, debe pensarse en el papel central que tiene el concepto de combinación lineal.

3.3.4 Fase 4: Estudio Piloto

En este documento, se entiende por *estudio piloto* (o Pilotaje) un ensayo de la investigación que permita probar los procedimientos que se llevaron a cabo en la investigación real, la puesta en escena de las preguntas y sus finalidades, calibrar tiempos, roles de los participantes en el ambiente de aprendizaje; definición adaptada de (Díaz M., 2020).

Ciclo 1. Calibrando el Diseño de Intervención

El pilotaje se realizó durante un semestre, que equivale a 16 semanas o 64 horas de clase aproximadamente; en el segundo semestre de 2021, de las cuales dos semanas se tomaron para

evaluación, en medio de un curso de álgebra lineal. Como lo propone (Benítez Mojica, 2006), el estudio piloto buscó:

- Identificar el potencial de las actividades seleccionadas.
- Realizar ajustes a las actividades.
- Establecer relaciones entre las actividades planteadas y el marco teórico establecido.
- Precisar categorías de análisis
- Definir ajustes para la toma y análisis de datos de la investigación.

Implementación de las Actividades. Durante la implementación de las actividades, se destacaron algunos momentos que se presentan a continuación en forma resumida: **(i)** *La presentación* de cada hoja de trabajo al grupo de estudiantes, por parte del profesor titular del curso y del investigador, que incluyó una inducción y orientación al uso de las herramientas y una presentación de los problemas planteados siguiendo las recomendaciones de Pólya; no dejar al estudiante a la deriva, ni tampoco, darle tanto que no quede nada retador para que el estudiante realice. **(ii)** *La resolución de los problemas* planteados sin el acompañamiento sincrónico de los orientadores; el grupo de estudiantes se dividió en subgrupos, de tres o cuatro estudiantes, para elaborar y presentar un informe escrito de cada hoja de trabajo. **(iii)** *La presentación del trabajo:* cada tres semanas, dos grupos distintos, tenían la responsabilidad de exponer, frente al resto de compañeros, el trabajo planteado en la hoja de trabajo correspondiente. **(iv)** *La discusión* fue moderada por el profesor a través de los interrogantes e intervenciones de los compañeros de los restantes grupos. De ser necesario, el profesor titular o el investigador podía

generar discusiones con preguntas que buscaban aclarar o profundizar en los temas o las soluciones presentadas. **(v)** *Institucionalización.* El profesor titular o el investigador institucionalizaron a partir de las producciones de los estudiantes, las ideas que resultan correctas, dando especial énfasis a las ideas consideradas centrales, además se profundizó a través de reflexiones o interrogantes, las posibles posturas exitosas o erradas frente a las temáticas abordadas. **(vi)** *La retroalimentación.* Esta actividad se realizó en distintos momentos: en medio del trabajo en grupo; de manera asincrónica vía los documentos compartidos y justo después de las discusiones grupales. Esta actividad se caracterizó porque el profesor titular o el investigador realizó reflexiones o preguntas que orientaron a los estudiantes a encontrar las posibles soluciones erradas o incompletas, entregó sugerencias para retomar la resolución de las

actividades, como también, promovió el planteamiento de nuevos interrogantes suscitando intencionalmente una actitud inquisitiva frente a las soluciones y a las condiciones iniciales del problema.

Uso de tecnología. El uso de tecnologías tuvo un papel múltiple; por un lado, las tecnologías que hicieron posible la modalidad de presencialidad asistida por tecnología; la universidad que albergó tanto el estudio piloto como el ciclo de toma de datos final posee una licencia especial para hacer uso de la plataforma zoom en donde se realizaron las clases; que fueron sincrónicas, pero en forma remota. Se contó con la autorización para grabar las clases con la herramienta para tal efecto que brinda el programa. De otro lado, las tecnologías cuyo uso coordinado se ha planeado dentro de las actividades; desde la primera actividad se involucró la mediación de las herramientas tipo CAS y DGS. El uso del software GeoGebra desde la primera semana; una de las características del software es su entorno amable con el usuario inicial, su fácil aprendizaje y un buen número de tutoriales hacia los que se guiará a los estudiantes. En las primeras cuatro semanas, se trabajó exclusivamente con GeoGebra y sus diferentes vistas; privilegiando las vistas gráficas y la vista CAS. Después de la semana cuatro, se introdujo la herramienta Matlab, se hizo uso de esta herramienta por su doble naturaleza; ha sido creada no sólo como una herramienta de carácter científico, sino para uso pedagógico debido a su potencial mediación en la enseñanza de las áreas STEM. El profesor o el investigador hicieron la presentación de cada hoja de trabajo y de las principales actividades que las componen, con el uso de las herramientas digitales que participan en actividad.

Ciclo 2: Recolección de la información

La etapa de recolección de datos se realizó en un tiempo y curso similar al piloto (primer semestre de 2022), en un intervalo de tiempo igual al que se empleó en el pilotaje, en un grupo del mismo programa y asignatura. Se emplearon, para recolectar la información, los siguientes instrumentos: las hojas de trabajo, las videograbaciones de todas las sesiones de clase (24 aproximadamente), archivos electrónicos de los entregables de los estudiantes correspondientes a los informes sugeridos en todas las actividades y entrevistas semiestructuradas.

Una Hoja de trabajo. En un instrumento para recabar información, que para este caso particular estuvo disponible en la plataforma Moodle donde se ubica el campus virtual de la Universidad donde se realizó la intervención y contó con una lista de problemas, applets

GeoGebra, enlaces para otras herramientas tipo CAS, preguntas, sugerencias y mecanismos suficientes para que los estudiantes presenten a través de él su informe digital. Cada hoja de trabajo está diseñada para durar en promedio semana y media (6 horas de clase + 4 de trabajo en grupo sin asistencia sincrónica de los orientadores).

Archivos de correo electrónico. Las hojas de trabajo se entregaron en archivos digitales a través del correo electrónico. Los estudiantes compartieron con el profesor el documento que se convirtió en el informe final, facilitando así el seguimiento y retroalimentación que se impartió en forma sincrónica y asincrónica. El software GeoGebra a través de su página (www.geogebra.org) ofrece la oportunidad de que los estudiantes creen su perfil y posteriormente puedan subirlos y compartirlos en un recurso llamado libro GeoGebra.

3.3.5 Fase 5: Análisis de los datos

En este trabajo, los mecanismos para recabar información y su análisis fueron de tipo cualitativo; el análisis se dividió en dos etapas; como lo plantea (Benítez Mojica, 2006). Se revisaron las producciones de los estudiantes y se eligieron aquellos informes cuya producción sea abundante, en datos, dentro de las categorías iniciales de análisis, que se plantean grosso modo a continuación:

Primera etapa. Los propósitos de esta etapa fueron:

1. Identificar las diferentes formas de razonamiento y las modalidades de pensamiento aplicado, de acuerdo con las producciones reportadas por los estudiantes.
2. Seleccionar estudiantes como representantes de cada una de las clasificaciones logradas en la etapa anterior.
3. Realizar un análisis de las producciones de los estudiantes con el fin de identificar las distintas dificultades o habilidades de los estudiantes, con esto se pretende además afinar constantemente las actividades en cada hoja de trabajo.

Segunda Etapa. La primera etapa de análisis se realizó tanto en el pilotaje como en el ciclo final; esta segunda etapa se realizó solo después de haber recolectado todos los datos planeados. Para el análisis de estos, se tuvieron en cuenta las siguientes estrategias y criterios de validez.

Estrategias de análisis. Se manejaron dos niveles de observación; esto es, grupal e individual, se consideraron tres momentos importantes en el semestre, se partió con unas categorías de

análisis preliminar, que fue evolucionando con el análisis y se definieron los estudios de caso a realizar.

Niveles de Observación. En el nivel individual, se analizó la producción de los estudiantes en las actividades diseñadas para trabajo individual (Jornadas de resolución de problemas), las formas de razonamiento y los posibles efectos de la mediación tecnológica.

Categorías de Análisis Iniciales.

Se analizaron las características de los esquemas resultantes en la solución de problemas con la mediación de herramientas digitales. Se determinó qué tipo de herramienta privilegiaban, se determinó cuando se usó de manera exclusiva el pensamiento práctico y cuando se dio paso al pensamiento teórico.

En general, se documentó el proceso de solución de problemas con la mediación de tecnologías, teniendo especial atención en la comunicación de las soluciones, la argumentación presentada frente a las soluciones o a las decisiones tomadas, la verificación de los resultados y otras posibles acciones como planteamiento de nuevas formas de resolver o nuevos problemas a partir de la modificación del original. Se hizo seguimiento a los perfiles que muestran los estudiantes con respecto al uso de tecnología.

3.3.6. Fase 6: Gramática Argumentativa y Confiabilidad

Tanto en el estudio piloto como en el ciclo final de recolección, se hizo un permanente análisis del desarrollo de las actividades en cuanto a cómo los estudiantes usan las herramientas, cuáles procesos debían modificarse y cuáles fueron exitosos. Finalmente, se realizó un análisis retrospectivo apoyado en el marco interpretativo inicial y en los elementos emergentes del proceso de análisis constante, con la idea de relacionar las producciones novedosas de los estudiantes y el contexto logrado. Se intenta mostrar que algunas características emergentes de las formas de razonamiento; en este contexto diseñado para resolver problemas con el uso coordinado de tecnologías tipo CAS y SGD, se transforman exitosamente debido a las características generadas gracias a la totalidad del engranaje surgido del proceso de investigación.

La confiabilidad se refiere, por un lado, al hilo lógico de las afirmaciones sobre el proceso de evolución de las formas de razonamiento de los estudiantes y las cualidades del entorno de

aprendizaje que lo respaldan. De otro lado, está la documentación del proceso de análisis, de tal forma que se pudieran identificar las etapas de análisis sistemáticos en los que se producen hallazgos nuevos y relevantes respaldados con las evidencias documentales pertinentes.

Capítulo 4: Análisis de resultados

4.1. Características del Entorno de Aprendizaje

En esta sección, se describen las siguientes componentes del entorno de aprendizaje: las personas involucradas, los criterios del diseño de intervención (Hojas de trabajo y de Resolución de Problemas), la interacción entre los participantes, metodología de la clase y las diferentes formas de evaluación. Aunque la investigación se enfoca en las características de las actividades que conforman el DI y las producciones de los estudiantes, se informará, grosso modo, las características de las restantes partes del entorno de aprendizaje donde estuvo inmersa la investigación.

4.1.1. Tiempo y Participantes

El trabajo de campo se realizó en un curso de álgebra lineal dirigido a estudiantes de distintos planes de ingeniería, y se desarrolló en dos periodos: un periodo de *pilotaje* en el segundo semestre del año 2020 y un periodo de recolección *de la información* en el segundo semestre del año 2021. El curso de álgebra lineal para ingenierías constó de 32 sesiones de 2 horas durante 16 semanas.

Participantes. En los dos ciclos, la población objetivo estuvo conformado por estudiantes universitarios de distintas ingenierías; en el periodo de pilotaje un total de 24 estudiantes y en el periodo de recolección de información, 21 estudiantes. Entre los participantes, también se cuentan al profesor titular del curso y el investigador.

4.1.2. Partes del Diseño de Intervención

El diseño final de intervención consta de 11 hojas de trabajo, dos jornadas de resolución de problemas y un proyecto final de aplicación que se inició la segunda semana de clases y que se adelantó durante el semestre paralelamente al desarrollo de las clases.

4.1.3. Características del Aula

Las sesiones de clases se realizaron en forma remota, a través de la plataforma audiovisual zoom®, y fueron presididas por el profesor titular, bajo la modalidad de aula invertida, que se bosqueja a través de la descripción de las restantes partes del entorno de aprendizaje.

4.1.4. Actividades Desarrolladas por los Estudiantes

Por Equipos. A partir de la segunda semana del curso, los estudiantes debían integrar equipos (equipos A, B, C, D, E, F), máximo de 4 estudiantes. En total, se conformaron 6 equipos de estudiantes, para trabajar durante el semestre. Por equipo, se debía presentar, cada dos semanas, un informe del desarrollo de la hoja de trabajo correspondiente. Los avances alcanzados debían quedar registrados en el documento de Google que compartían los integrantes del equipo, el profesor y el investigador, con el propósito que en medio de la ejecución del trabajo pudieran recibir retroalimentación del investigador y del profesor titular.

Aula de Clase Invertida. Cada 1.5 semanas, dos equipos tenían la responsabilidad de preparar una exposición sobre el trabajo desarrollado en la hoja de trabajo; se asignaba la responsabilidad de iniciar a uno de los equipos, mientras los integrantes del otro equipo se preparaban para complementar, presentar formas distintas de resolver o para deliberar si resultaban posiciones disímiles. Al final de estas exposiciones, el profesor presidía la discusión general del grupo, se daba paso a las preguntas, comentarios y en general a la participación del grupo en pleno.

Los equipos de trabajo plantearon y desarrollaron un *Proyecto Final de Aplicación*, donde los principales conceptos trabajados durante el semestre se aplicaron en la solución de problemas de su afinidad e interés; al final, los estudiantes entregaron un trabajo escrito tipo artículo y realizaron su defensa en la última semana de actividades curriculares.

4.1.5. Actividades Desarrolladas por el Investigador

Actividades Previas: El investigador presentó el diseño de intervención piloto en dos seminarios. El primero fue dirigido por el doctor David Benítez Mojica, director de la investigación, y el segundo fue orientado por el doctor Manuel Santos Trigo, codirector de la investigación. Ambos seminarios contaron con la participación de expertos invitados en educación matemática y estudiantes del doctorado (pares académicos). Paralelamente, se llevó a cabo una intervención piloto en el segundo semestre de 2020 en un curso de álgebra lineal distinto al curso en el que se realizaría la intervención final, pero con las mismas características y el mismo profesor titular de la intervención final que tuvo lugar en el segundo semestre de 2021. Como resultado de estos procesos, se realizaron cambios y se afinaron algunos aspectos del diseño de intervención en los seminarios, obteniendo la aprobación del profesor titular para el diseño de intervención a aplicar en la investigación.

Actividades Durante el Curso: El investigador asistió a todas las sesiones de clase, presenció las exposiciones de los equipos de trabajo y realizó intervenciones para orientar las exposiciones, las discusiones grupales o para llevar a cabo institucionalizaciones, es decir, validar, respaldar u orientar las discusiones, siempre y cuando fuera solicitado o autorizado por el profesor titular. Además, brindó retroalimentación en los documentos compartidos en línea, donde los equipos avanzaban en los informes de las hojas de trabajo, los estudiantes entregaban sus informes individuales de las sesiones de resolución de problemas, y los equipos planteaban y desarrollaban el proyecto final de aplicación.

Se aplicó una prueba diagnóstica con el objetivo general de evaluar el dominio de los conceptos asociados a los sistemas de ecuaciones lineales que se consideraban familiares para los estudiantes. Esta evaluación tenía como propósito establecer un puente conceptual entre las ideas previas de los estudiantes y los nuevos temas que se abordaron.

Prueba diagnóstica: Sistemas de Ecuaciones Lineales 2×2 (SEL 2×2).

En la tercera sesión de clases, después de haber presentado las ideas generales del curso y realizar actividades de introducción a los diferentes softwares que se utilizarían en el curso, se aplicó la primera prueba diagnóstico (ver: [Prueba Diagnóstico](#))

Descripción. Las preguntas y problemas hacen referencia a conceptos, algoritmos y uso de tecnologías digitales en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. La prueba se aplicó a través de un formulario de Google, en un tiempo aproximado 1.5 horas. El formulario consta de 11 preguntas; tres de ellas de selección múltiple acompañadas de la respectiva pregunta que solicitaba la sustentación de la elección y tres problemas cortos en contexto formal. En general se le solicito al estudiante justificar sus respuestas.

4.1.6. Objetivos

- Determinar **las formas de razonamiento** que emplea el estudiante al responder interrogantes y **resolver problemas** relacionados con **sistemas de ecuaciones lineales 2×2** .
- Identificar **qué medios conoce y privilegia** el estudiante al resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 . (SEL 2×2)

4.2. Análisis de la prueba diagnóstico

De acuerdo con los objetivos trazados, para esta prueba diagnóstico inicial, se establecerá: ¿Qué familiaridad conservan los estudiantes con los métodos de solución de $(SEL\ 2 \times 2)$?, ¿Qué herramientas digitales usan? Y ¿Qué formas de razonamiento utilizan en las justificaciones solicitadas?

4.2.1. Primer bloque de preguntas

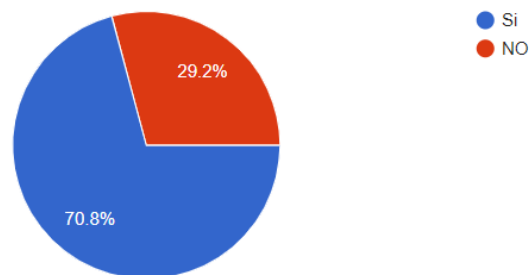
Las siguientes tres preguntas buscan obtener información que permita establecer qué algoritmos, para resolver $SEL\ 2 \times 2$, conoce el estudiante y qué nexos puede establecer entre el proceso rutinario que realiza y el significado de los resultados que obtiene en este contexto particular.

1. ¿Sabe cómo encontrar la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales 2×2 ?

Las opciones a esta pregunta son: Si o No. De los 24 estudiantes del ciclo piloto que contestaron el diagnóstico, 17 contestaron afirmativamente; en la figura 6, se muestra la distribución porcentual.

Figura 4 Distribución porcentual de la respuesta 1 del primer bloque de preguntas, tomada del formulario de Google.

24 respuestas



Con las siguientes preguntas se amplía la información en el caso de las respuestas positivas.

2. ¿Describe qué métodos con lápiz y papel y/o qué tipo de software tecnológico has usado para resolver sistemas 2×2 ?

De los 17 estudiantes que les correspondía contestar la pregunta, 15 mencionaron al menos uno de los tres métodos que tradicionalmente se enseñan: sustitución, igualación y eliminación para resolver $SEL\ 2 \times 2$. Solo cuatro de los estudiantes manifestaron usar algún software; de sus

respuestas, se extrajo la siguiente lista: GeoGebra, Symbolab, Photomath, Numpy, Dataframe, Wolframalpha y Webcal2.0.

3. ¿Describe qué significa resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 ?

Las respuestas dadas por los estudiantes a este interrogante dejan ver algunas creencias de los estudiantes:

- a) Un SEL 2×2 , siempre tiene solución.
- b) La solución de un sistema de ecuaciones se debe al método aplicado.

Estas dos creencias, inferidas a partir de las repuestas de los estudiantes, dejan ver la existencia del obstáculo epistemológico mencionado anteriormente del “*paradigma de la solución*” que se describe en (L. A. Monroy Guzmán, 2011). Trece de las respuestas de los estudiantes permiten el avistamiento de la característica a) del obstáculo y en cinco de las respuestas se manifiesta explícitamente la característica b).

Debido a la reglamentación sobre el tratamiento de datos personales, para analizar, caracterizar o resaltar algunas de las respuestas de los estudiantes, tanto del grupo piloto como del grupo experimental, se le asignó a cada estudiante una sigla para identificarlo, por ejemplo, EP7 corresponde al estudiante del curso piloto número siete, EA3 corresponde al estudiante número 3 del curso experimental que pertenece al equipo A (ver 4.1.4),

En la Tabla 4, se muestran algunas respuestas representativas y el esquema de análisis realizado:

Tabla 4 Obstáculo Epistemológico “Paradigma de la Solución”	
Respuestas a la pregunta: ¿Describe qué significa resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 ?	Inferencias
EP1: Encontrar los valores de dos variables <u>incógnitas</u> generalmente X, Y. EP7: Encontrar las variables desconocidas EP12: Los puntos de corte de las rectas que representan cada una de las ecuaciones de un sistema. EP21: significa que debes hallar el valor de 'x' y 'y' dadas dos ecuaciones lineales, es decir, que están elevadas al exponente 1.	La palabra “Encontrar” predomina en las respuestas de los estudiantes, lo que muestra su certeza de que los SEL 2×2 siempre tienen solución, en efecto se concluye a).
EP10: Significa encontrar valores que satisfagan las ecuaciones iniciales por medio de los métodos existentes. EP17: Es encontrar una solución que aplique para dos expresiones con 2 variables en común. EP18: Encontrar un sistema equivalente al inicial desde distintos métodos.	

	asignárselo.
--	--------------

En las respuestas de los estudiantes EP1, EP7 y EP21, se advierte, de manera implícita o potencial, una forma de razonamiento AA; gracias a que, como se señala en la Tabla 4, la palabra “Encontrar” predomina en las afirmaciones. De otro lado, la forma de razonamiento SG se presenta en la respuesta del estudiante EP12.

Tabla 5 *distribución inicial de las formas de razonamiento encontradas en esta parte del diagnóstico.*

Tabla 5. Formas de razonamiento: Primer bloque de preguntas	
Respuestas seleccionadas	Inferencias
EP12: Los puntos de corte de las rectas que representan cada una de las ecuaciones de un sistema.	En la respuesta del estudiante EP12, se muestra un razonamiento SG; el estudiante reconoce cada una de las ecuaciones como una recta, pero no activa su pensamiento teórico para advertir las otras posibilidades. El estudiante EP20 muestra una forma de razonamiento SG en la primera parte del párrafo; en la segunda parte, muestra una forma de razonamiento AA y al final activa su pensamiento teórico, para advertir que no todo sistema tiene solución.
EP20: Gráficamente sería encontrar un punto en el cual el sistema de ecuaciones coincida. Algebraicamente sería encontrar un valor para el cual el sistema de ecuaciones sea válido. Cabe destacar, no todos los sistemas de ecuaciones tienen solución.	

4.2.2. Segundo bloque de preguntas

En la primera pregunta, se proponen las tres gráficas, típicas, relacionadas con la solución de un SEL 2×2 ; se pide señalar la que corresponde a un sistema con solución única. En la siguiente pregunta, se les pide a los estudiantes sustentar su elección.

Los estudiantes están muy familiarizados con la gráfica que corresponde a un SEL 2×2 con solución única, como se muestra en la figura 7, los 24 estudiantes marcaron la opción correcta A).

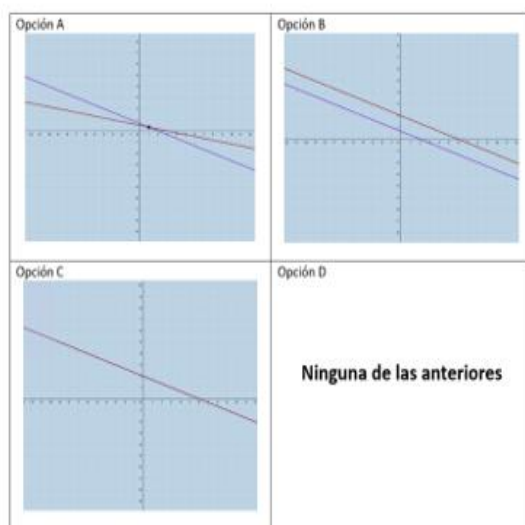
Tabla 6 *análisis de la consistencia de la elección con la justificación y las formas de razonamiento que presentan en sus afirmaciones.*

Tabla 6. Formas de razonamiento: Segundo bloque de preguntas.	
Respuestas seleccionadas	Inferencias
EP8: he escogido la gráfica ya que contiene 2 rectas diagonales que se interceptan en un mismo punto específico; es por esta razón que contienen un punto de solución único	En estas respuestas, los estudiantes usan la forma de razonamiento SG, sin involucrar lenguaje algebraico, en consecuencia, las formas de razonamiento analítico no se manifiestan.
EP15: Tiene única solución ya que las gráficas se cruzan solo en un punto	
EP19: hay un punto de corte en las rectas	
EP2: Ya que en esta gráfica las dos ecuaciones se	En las tres primeras respuestas, los estudiantes usan

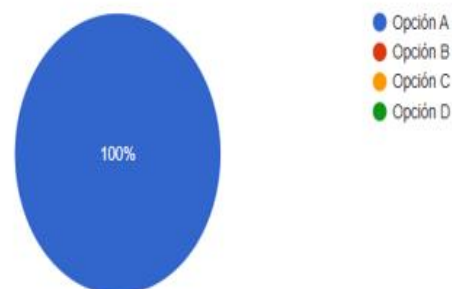
interceptan en un único punto.	la forma de razonamiento SG, además mezclan, de manera inapropiada, el lenguaje propio de la forma de razonamiento AA; sin que esto represente la flexibilidad esperada entre las formas de razonamiento. En la respuesta EP6, se muestra más variedad en el lenguaje geométrico; mencionando el espacio al que pertenecen las rectas En la respuesta EP21, se usa la forma de razonamiento SG y se intenta justificar la unicidad de la solución; podemos decir, en este caso, que se activa sin éxito el pensamiento teórico. En la respuesta EP20, se presenta una flexibilidad exitosa entre las formas de razonamiento SG y AA; se relaciona el punto de intersección que resuelve el sistema, con las incógnitas x y y , que lo representan en la segunda forma de razonamiento.
EP11: Solo existen un punto en donde las funciones interceptan.	
EP18: porque al tener una única solución, las rectas se interceptan en un solo valor.	
EP6: porque las rectas coinciden en un solo punto en el plano.	
EP21: Porque las dos rectas se interceptan en un único punto y no se vuelven a tocar más.	
EP20: Las rectas se cortan en un solo punto. Esto significa que el sistema tiene única solución, dada por los valores x , y y que son coordenadas del punto de corte.	

Figura 5 Distribución porcentual de la respuesta a la pregunta de selección múltiple del segundo bloque de preguntas, tomada del formulario de Google.

Escoja, entre las gráficas dadas, la que representa un Sistema 2x2 con solución única *



24 respuestas



4.2.3. Tercer bloque de preguntas

En la primera pregunta, se proponen las tres gráficas, típicas, relacionadas con la solución de un SEL 2×2 ; se pide señalar la que corresponde a un sistema con infinitas soluciones. En la siguiente pregunta, se les pide sustentar su respuesta.

En contraste con la pregunta relativa a un sistema con solución única, donde el 100% de los estudiantes reconoce la gráfica correcta, en este caso, el 37.5% de ellos no identifica, entre las gráficas, la que corresponde a un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones:

Figura 6: Distribución porcentual de la respuesta a la pregunta de selección múltiple del tercer bloque de preguntas, tomada del formulario de Google.

Escoja, entre las gráficas dadas, la que representa un Sistema 2x2 con infinitas soluciones *

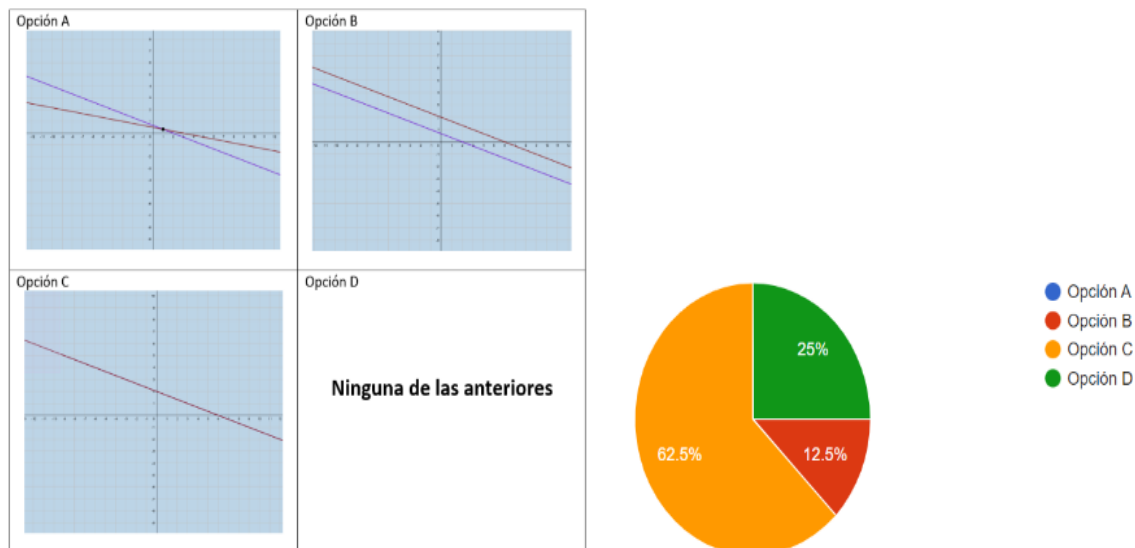


Tabla 7 Formas de razonamiento: Tercer bloque de preguntas

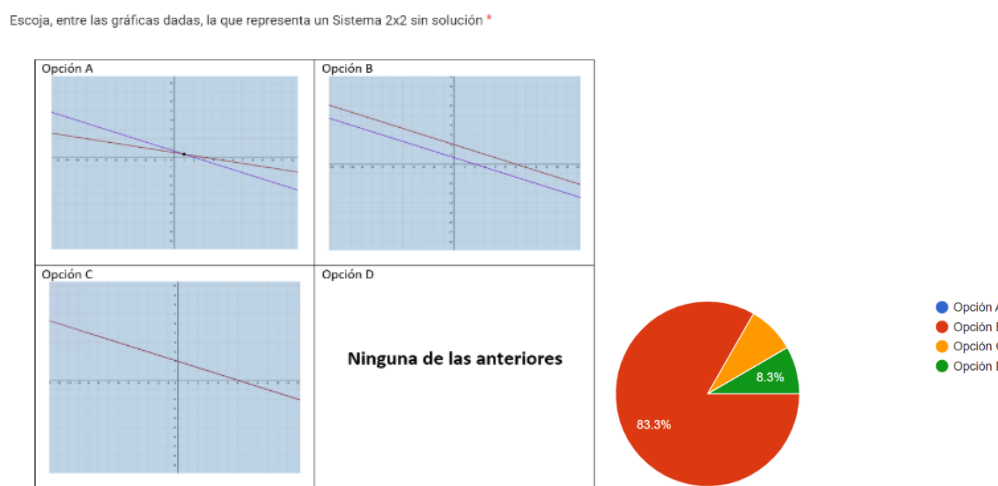
Tabla 7. Formas de razonamiento: Tercer bloque de preguntas	
Respuestas seleccionadas	Inferencias
EP1: Tiene infinitas soluciones porque se interceptan en todos los puntos, cualquier valor a las variables dará una solución, también se puede decir que son la misma función escrita de forma distinta	En estas tres respuestas, se hace uso de la forma AE; se hace referencia a las propiedades de la función lineal que está implícita en cada ecuación. Este conocimiento les permite afirmar que se trata de la misma función y por lo tanto dándole cualquier valor a la variable (aunque no lo mencionan, se refieren a la x) se obtiene una solución. No se reconocen las ecuaciones como conjuntos de infinitos puntos; se remiten a la razón funcional entre los valores de x (rango) y las salidas y , para indicar que de esa forma van “apareciendo” las infinitas soluciones.
EP3: Esta gráfica muestra para dos rectas escritas algebraicamente distintas, una pendiente en proporción igual, un en el mismo punto, y una magnitud que tiende corte numéricamente igual, por lo tanto, se encuentran superpuestas.	
EP7: Porque al presentarse una sola línea recta, esta tiene como dominio y rango todos los reales	
EP22: Cuando las dos rectas son iguales o coinciden, quiere decir que ese sistema tiene infinitas soluciones.	En este grupo de respuestas, se muestra que los estudiantes reconocen la gráfica como una especie de ícono para el caso de los sistemas con infinitas soluciones. No hay realmente una conexión de la idea de punto y las incógnitas del sistema.
EP23: Porque las rectas se interceptan en puntos infinitos, es decir, coinciden en todos los puntos.	
EP16: Tiene infinitas soluciones ya que las gráficas son la misma recta.	

4.2.4. Cuarto bloque de preguntas

En la primera pregunta, se proponen las tres gráficas, típicas, relacionadas con la solución de un SEL 2×2 ; se pide señalar la que corresponde a un sistema sin solución. En la siguiente pregunta, a quienes contesten correctamente, se les pide sustentar su respuesta.

La opción correcta que corresponde a dos rectas paralelas distintas es también un ícono que los estudiantes, en su mayoría reconocen; en esta pregunta más del 80% de los estudiantes lo identifica:

Figura 7: Distribución porcentual de la respuesta a la pregunta de selección múltiple del cuarto bloque de preguntas, tomada del formulario de Google.



La respuesta a la pregunta que solicitaba sustentar la elección se puede representar con la siguiente argumentación: “Porque las rectas son paralelas, por lo tanto, no tienen ningún punto en común”. Los estudiantes, en general, describen el ícono que les permite concluir que el sistema es inconsistente

En el siguiente bloque de preguntas del diagnóstico, se plantean tres problemas cortos en contexto real. Los problemas se plantean con el objetivo de activar y describir la forma de razonamiento AA y la posible fluidez con otras formas de razonamiento.

4.2.5. Quinto bloque de preguntas

Se plantea un SEL 2×2 incompleto; esto es, con una sola ecuación y se le pide al estudiante que complete el sistema, es decir que construya otra ecuación, de tal forma que, para el primer caso,

el sistema tenga solución única; para el segundo caso, infinitas soluciones y finalmente, ninguna solución.

Problema 1. Escribe la segunda ecuación que completa el sistema 2x2, de tal manera que el sistema tenga solución (única, infinitas y ninguna). Justifique su respuesta.

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ ? \end{cases}$$

17 de las respuestas dan una ecuación que completa exitosamente el sistema con solución única, solo siete acompañadas de una justificación; con dos catalogadas como argumentos circulares. En la tabla 8, se muestra la clasificación y análisis de algunas respuestas.

Tabla 8 Formas de razonamiento: Problema 1.

Tabla 8. Formas de razonamiento: Problema 1.	
Respuestas seleccionadas	Inferencias
EP9: $x+y=3$ La solución sería (4,-1).	Se muestra flexibilidad entre las formas de razonamiento AA y SG, al describir la solución del sistema. No se justifica por qué la solución que se propone es única o la justificación sobre el resultado obtenido se le atribuye al algoritmo de solución empleado. No aparece en la argumentación la forma de razonamiento AE; No se establece la unicidad de la solución referida a la relación entre las ecuaciones.
EP11: $2x+3y = -9$ Este sistema genera una única solución puesto que los puntos se interceptarán en el punto (0,-3). Dado que la solución para este sistema es $x=0$, $y=-3$.	
EP23: $X - 3Y = 2$ porque al usar el método de sustitución se evidencia que ambas rectas se cortan en el punto $Y=4$ y $X=14$.	
EP17: $y = x-3$. En este caso $x-2y = 6$ puede ser reescrita como $y = 1/2x - 3$ Estas dos ecuaciones al tener pendientes diferentes me aseguro de que solamente tengan un punto en común (una sola solución en común).	
EP20: $y + x = 6$ Lo que se está haciendo es simplemente generar una función lineal que se intercepte en 1 solo punto con la primera ecuación descrita, en este caso se interceptarían en el punto (6,0), siendo este punto su solución.	

Problema 2. Escribe la segunda ecuación que completa el sistema 2x2, de tal manera que el sistema tenga infinitas soluciones. Justifique su respuesta.

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ ? \end{cases}$$

Doce de las ecuaciones planteadas completan un sistema con infinitas soluciones y solo 6 de las justificaciones resultan correctas. En la tabla 9, se muestran las más representativas y su respectivo análisis.

Tabla 9 Formas de razonamiento: Problema 2.

Tabla 9. Formas de razonamiento: Problema 2	
Respuestas seleccionadas	Inferencias
EP9: $2y-x=-6$ Gráficamente sería una sola recta así que tiene infinitas soluciones, no tiene punto de corte	Para resolver el problema, los estudiantes hacen uso de la forma de razonamiento AA, como, por ejemplo: multiplicar a ambos lados de la ecuación por un mismo número y reescribir la ecuación original en la forma $y = mx + b$. Hacen uso de las propiedades geométricas; es decir, de la representación gráfica de la función lineal implícita en las ecuaciones, para justificar sus respuestas, esto es, activan el pensamiento teórico en la forma de razonamiento geométrico SG.
EP17: $x-2y = 6$ Como es la misma ecuación, eso quiere decir que van a compartir las mismas soluciones, por lo tanto, se asegura que tengan infinitos puntos en común.	
EP20: $2x - 4y = 12$ El proceso que se hizo fue generar una segunda ecuación al multiplicar toda la primera ecuación por 2, por ende, al graficar esto ambas gráficas se superpondrían demostrando ser un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones.	
EP24: $2x-4y=12$ <u>Literalmente</u> son la misma expresión, pero con distinta representación, solo se amplificó toda la ecuación al doble, haciendo que tengan infinitos puntos en común ya que son iguales	

Problema 3. Escribe la segunda ecuación que completa el sistema 2×2 , de tal manera que el sistema no tenga solución. Justifique su respuesta.

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ ? \end{cases}$$

En doce de las repuestas, aparecen ecuaciones que completan un sistema inconsistente. Solo 8 respuestas vienen acompañadas de la justificación requerida, de las cuales 6 se clasifican como justificaciones válidas; en la tabla 10, se muestran las más representativas y su respectivo análisis.

Tabla 10 Formas de razonamiento: Problema 3. Sistema inconsistente.

Tabla 10. Formas de razonamiento: Problema 3. Sistema inconsistente	
Respuestas seleccionadas	Interpretación e Inferencias
EP17: $x-2y = 6+4$ Estas dos rectas serán paralelas, por lo tanto, no tendrán ningún punto en común.	El problema es resuelto usando la forma de razonamiento AA; multiplicar solo el lado izquierdo de la ecuación por un escalar o sumar en el lado derecho un escalar. Se justifican las respuestas tomando como referencia el "ícono" geométrico de las rectas paralelas para los sistemas inconsistentes, pero no se explica la relación. En la resolución de este problema, se pone en juego la forma de razonamiento AA. En la justificación existe una fluidez entre las formas de razonamiento SG y AA; los estudiantes explican cómo aparece el "Ícono" de las rectas paralelas, usando como base sus conocimientos de función lineal. Se activa el pensamiento teórico lo que provoca que los estudiantes muestren los vasos comunicantes existentes entre las formas de razonamiento AA y SG.
EP11: $2x-4y=6$ Este sistema no genera solución, puesto que la segunda ecuación es paralela a la primera ecuación	
EP20: $2y + x = 14$ Lo que se hizo fue despejar Y en la primera ecuación, para así hallar la pendiente de esta y usar este mismo valor para establecer una nueva ecuación que solo cambiara en su punto de corte con el eje Y y nunca tuviera una solución, pues nunca se interceptarían al graficarlas o solucionarlas. Una vez hecho esto, solamente se dejó reflejada la ecuación como una suma las variables X y Y.	
EP23: $X-2Y=3$, porque al resolverlo con sustitución se llega a un punto en el que se cancelan valores y deja como resultado $3=6$, ósea que son dos rectas paralelas.	

4.2.6. Consideraciones Finales

Al momento de presentar la prueba diagnóstica, los 24 estudiantes del curso piloto habían abordado el tema de los SEL 2×2 , tanto en su formación secundaria, como en el curso de precálculo que toman en la universidad en el primer semestre. El tema se aborda, en los grados iniciales de la secundaria, como objeto a enseñar y al final como herramienta para resolver actividades problemáticas en otras asignaturas como trigonometría, física y cálculo, mientras que, en la asignatura universitaria inicial (Precálculo) toma los dos roles a modo de repaso intensivo. Sin embargo, siete de los estudiantes (30%) manifestaron no saber resolver un SEL 2×2 .

Los 17 estudiantes (70%) manifestaron conocer al menos dos de los algoritmos que se enseñan tradicionalmente para resolver SEL 2×2 . En general, en los libros de texto de secundaria y en consecuencia en las clases, cuando se abordan temas que conducen a la solución de SEL 2×2 , se privilegia la enseñanza de algoritmos como: sustitución e igualación, que terminan perdiendo vigencia en etapas posteriores del álgebra lineal cuando se resuelven, en general, SEL $m \times n$ con $m, n \geq 3$, donde el algoritmo de reducción (La eliminación gaussiana) resulta funcional (Martínez R. & Sanabria R., 2014; Pauer, 2018) .

Tanto en la secundaria como en el curso de precálculo en su llegada a la universidad, las tareas que se asignan a los estudiantes recaen en el uso de estos algoritmos, lo que trae como consecuencia que los estudiantes le asignen la causalidad de los diferentes tipos de solución (Naturaleza del conjunto solución: única, infinitas o vacío) a los algoritmos y no a una relación entre las ecuaciones originales. En las respuestas del diagnóstico, se logra comprobar lo que se advierte en la literatura; aunque un alto porcentaje de los estudiantes logran realizar procesos que los lleven a las soluciones esperadas, no pueden asignar sentido a sus respuestas a través de los conceptos involucrados (Kazunga & Bansilal, 2020; Ndlovu & Brijlall, 2016; Stewart & Thomas, 2010).

El concepto de solución en los números reales es un tema recurrente en el ámbito de las matemáticas escolares, desde la educación primaria hasta la educación superior. Según Wawro (2015), existe una falta de conciencia por parte de los estudiantes sobre la variabilidad de la naturaleza de las soluciones en diferentes contextos matemáticos. Un ejemplo de esto es el caso de los sistemas de ecuaciones lineales 2×2 con solución única, solo el 8% de los estudiantes logró establecer alguna conexión entre las parejas ordenadas y el punto de intersección de las rectas,

identificando estas ideas a través de la heurística geométrica asociada a la representación gráfica de las rectas. Es decir, el 92% de los estudiantes no logró asociar la noción de punto geométrico con una pareja ordenada.

De acuerdo con Wawro, los estudiantes tienden a asociar la idea de solución únicamente con un número real y, en casos extremos, esperan que sea un número entero pequeño. Esto se evidencia en el estudio cuando los estudiantes afirman que resolver un sistema significa encontrar el número real que satisface la ecuación para " x " y el que satisface la ecuación para " y ". Este hallazgo se vuelve aún más claro cuando, en el caso de soluciones infinitas, los estudiantes mencionan que la solución son todos los números reales tanto para " x " como para " y ". Esto se debe a que basan su respuesta en la noción de dominio y rango que poseen, convirtiendo así la idea de función lineal de una variable real en un recurso para abordar el problema, pero también para mantener la noción de solución exclusivamente ligada a los números reales.

El bajo uso de tecnologías digitales en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y su impacto en el enfoque procedimental. Solo 4 de los estudiantes (17%) manifestaron haber usado tecnologías digitales para resolver SEL 2x2. En los cursos de álgebra lineal, universitarios, aunque se privilegia el uso del algoritmo de eliminación gaussiana, se disipa su potencial teórico debido al enfoque procedimental que consiste en emplear algoritmos cada vez más costosos, como el método de eliminación de Gauss-Jordan, la matriz inversa, la regla de Cramer, entre otros; el costo computacional de estos procesos, cuando se realizan mediados con lápiz y papel, acopia la atención del estudiante y les dificulta los posibles nexos que pueden establecer entre las formas de razonamiento AA y SG.

Teniendo en cuenta las variedades de uso de la geometría en la enseñanza del álgebra lineal propuestas en (Harel, 2019), las evidencias dejan de manifiesto que el uso de la geometría se restringe a la ejemplificación y a la reducción. En consecuencia, se desperdicia por un lado el campo de imaginación que históricamente le ha prestado la geometría al álgebra lineal y, por otro lado, la estructura formal que ofrece la geometría para los procesos iniciales de validación; lo que trae como consecuencia que, en los niveles previos al álgebra lineal universitaria, no se presente la flexibilidad entre las formas de razonamiento AA y SG, y en efecto, la forma de razonamiento AE resulte inexistente.

En la tabla 11, se presentan cuantitativamente los resultados obtenidos en los bloques de preguntas. Para el segundo, tercer y cuarto bloque de preguntas, en donde los estudiantes debían elegir la representación gráfica que correspondiera a única solución (segundo bloque de preguntas), infinitas soluciones (tercer bloque de preguntas) y ninguna solución (cuarto bloque de preguntas), además que debían justificar su elección. Los problemas 1,2 y 3 corresponden al quinto bloque de preguntas en donde se les plantea un SEL 2×2 con una sola ecuación y se pide al estudiante que construya la otra ecuación que complete el sistema, de tal forma que para el primer caso el sistema tenga solución única (problema 1), para el segundo caso infinitas soluciones (problema 2) y finalmente, ninguna solución (problema 3), además que debían justificar su elección.

Tabla 11 Datos cuantitativos sobre los resultados en los bloques de preguntas de la prueba diagnóstica. Número de estudiantes que presentaron el diagnóstico: 24 estudiantes

Tabla 11. Datos cuantitativos sobre los resultados obtenidos en los bloques de preguntas de la prueba diagnóstica.					
Forma de razonamiento Sintético-Geométrico			Forma de razonamiento Analítico-Aritmético		
Bloque de preguntas	Contestaron correctamente	Justificación aceptable (del total de respuestas correctas)	Problema	Contestaron correctamente (construyeron la ecuación)	Justificación aceptable (del total de respuestas correctas)
Primero	100%	71%	1	87.5%	20%
Segundo	62.5%	42%	2	50%	25%
tercero	83.3%	62%	3	50%	20%

En la tabla 11, cada una de las filas donde aparecen los porcentajes permite contrastar el desempeño de los estudiantes cuando se les pide argumentar sus respuestas desde el contexto geométrico y desde el contexto algebraico. Se hace evidente que los estudiantes presentan mayor dificultad cuando sus argumentos están situados en el contexto algebraico y que sus razonamientos deben ser del tipo AA.

4.3. *Análisis de las producciones de los estudiantes: Inferir, justificar y relacionar las distintas formas de razonamiento*

El análisis de las producciones de los estudiantes a partir de los actos exteriorizados como interpretar, representar, conjeturar, justificar y generalizar en el lenguaje asociado a las distintas formas de razonamiento en el entorno dinámico ha sido fundamental. Se ha asegurado que las formas de razonamiento observadas estén asociadas con las producciones consideradas,

reconociendo que los actos mentales no son independientes entre sí y que un acto puede llevarse a cabo en el contexto de otros actos o para facilitarlos.

En el primer paso del análisis, se ha inferido el significado que los estudiantes dan a los conceptos clave y cómo están relacionando la información disponible para interpretar y comprender la información o el problema en cuestión.

Una vez realizada la interpretación, se ha dado importancia a los actos mentales de justificación y comunicación utilizados por los estudiantes. Se ha evaluado cómo respaldan sus afirmaciones o conclusiones, examinando si presentan argumentos lógicos o evidencias relevantes para respaldar su razonamiento.

En el tercer paso del análisis, se ha explorado la relación entre los actos mentales. Se ha observado que los actos mentales no ocurren de forma aislada, sino que están interconectados y se despliegan en conjunto. Por ejemplo, se ha notado que el acto de interpretar puede ser necesario para justificar, y el acto de representar puede ser útil para modelar. Además, se ha tenido en cuenta si los actos mentales ocurren de manera secuencial o simultánea, ya que esto puede influir en la forma en que se analizan y discuten.

En efecto, el análisis de las producciones del estudiante, es decir; los actos exteriorizados a través de los lenguajes asociados a las distintas formas de razonamiento se han llevado a cabo mediante los pasos de inferir, justificar y relacionar. Estos pasos han permitido comprender y evaluar cómo los estudiantes comprenden, razonan y generalizan en diferentes contextos educativos (Boero, Garuti, Lemut, & Mariotti, 1996). Los últimos dos pasos del análisis se informan en este documento bajo el título de consideraciones finales.

4.3.1. Hoja de trabajo: Tipos de Solución de los SEL 2X2

El análisis de la hoja de diagnóstico brinda elementos que prueban la familiaridad de los estudiantes con los SEL 2X2, y la pertinencia de escoger este tema como punto de anclaje para el diseño inicial de actividades del DI. Esta primera hoja de trabajo retoma, inicialmente, las ideas previas de los estudiantes y luego las enlaza a través de la noción de combinación lineal, tema que se considera el hilo conductor de las temáticas centrales del álgebra lineal; con esta meta, se divide la hoja de trabajo, alrededor del tema central, en dos grupos complementarios de actividades:

1. “Describir desde una perspectiva geométrica y algebraica el conjunto solución de un SEL 2×2 ”.
2. “Hacia una descripción vectorial del conjunto solución de un SEL 2×2 ”

Las dos partes de la hoja de trabajo son complementarias; esto es, se inicia llamando los conocimientos de base del estudiante, para luego, conectarlos con la noción que se considera responsable de la estructuración del álgebra lineal.

En la primera parte, se recaban las ideas que los estudiantes traen de sus etapas previas de formación: métodos para resolver sistemas de ecuaciones y representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales. Se desarrollan actividades tipo laboratorio donde los estudiantes pueden realizar simulaciones, tantas como quieran, de la resolución de sistemas a través del applet “Solución de sistemas 2×2 ” que permite: visualizar la representación gráfica del sistema, la clasificación del sistema como consistente o inconsistente, además se promueve la heurística del almacenamiento, en tablas, de la información obtenida a partir del applet, por observación directa o por inferencia.

En la segunda parte, se introduce la noción de *Combinación Lineal*, con la idea de incorporar la representación del vector de prueba del SEL 2×2 , como combinación lineal de los dos vectores de coeficientes del sistema. Con base en el applet “Combinación Lineal” se activa una nueva tarea tipo laboratorio, donde se simulan combinaciones lineales entre un par de vectores fijos. La actividad promueve nuevamente la heurística de almacenar la información obtenida en tablas.

Al final de cada parte de la hoja de trabajo, se orienta al estudiante con preguntas para interpretar la información obtenida y se promueve el uso de imágenes y otros hallazgos logrados en los laboratorios para respaldar las respuestas dadas.

Objetivos

El andamiaje que se pone en juego en esta parte tiene como propósito inicial que el estudiante ponga en funcionamiento su forma de razonamiento (SG). El propósito central consiste en describir la transformación inicial de las producciones (Formas de razonamiento) de los esquemas mentales que el estudiante posee gracias a los medios habituales (Papel y Lápiz), con la integración de los nuevos medios, GeoGebra en este caso, a sus esquemas. A lo largo del

desarrollo de la hoja de trabajo, se busca que el estudiante vaya alcanzando los siguientes objetivos:

1. Ingresar la información pertinente en los applets GeoGebra e interpretar las salidas obtenidas en los diferentes lenguajes relativos a las formas de razonamiento.
2. Clasificar y almacenar la información para encontrar regularidades, plantear conjeturas y justificarlas o refutarlas estableciendo contraejemplos.
3. Conectar los diferentes tipos de solución de un SEL 2X2 con la representación gráfica del sistema y la relación existente entre las ecuaciones del sistema inicial.
4. Construir la representación vectorial de un SEL 2X2 a través de la de la noción local de combinación lineal.
5. Traducir una forma de razonamiento a otra cuando se esté describiendo el tipo de solución de un SEL 2X2.

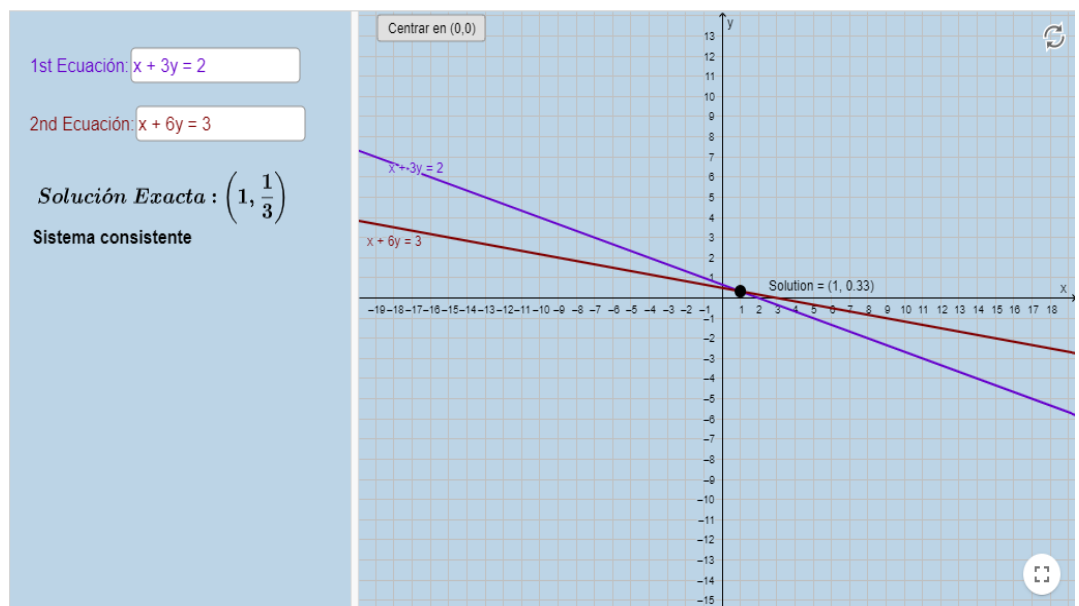
Parte 1: “Describir desde una perspectiva geométrica y algebraica el conjunto solución de un SEL 2X2”

Elementos del diseño. Para el diseño de las actividades que conforman esta hoja de trabajo se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

1. De la clasificación en siete variedades de uso descritas por (Harel, 2019), se privilegiaron la generalización, la representación literal, la representación metafórica y con poca frecuencia la variedad de reducción. Además, las características del DI hacen que el trabajo aquí presentado se ubique en lo que llamó Harel *Investigación Autónoma*; pues, en general, las actividades que conforman el DI se plantean dentro de un ambiente de geometría dinámica (GeoGebra).
2. De manera coordinada se fomentó el uso de las herramientas tipo CAS y DGS, principalmente porque:
 - a. Aproxima a los estudiantes a conceptos que no son viables en cursos donde el uso de estas tecnologías es desestimado o no aparece.
 - b. A través de la interacción con las herramientas digitales, en general, se adquieren habilidades transferibles a las demandadas en el siglo XXI.

- c. La sintaxis de estas herramientas es cada vez más amigable, de hecho, se incorpora de forma natural en el discurso del estudiante al momento de comunicar, describir o argumentar.
 - d. Los entornos de estas herramientas propician la abstracción situada que, según (Noss & Hoyles, 2019), está ligado al ambiente especial de estas herramientas.
3. El *Principio de la Migración* tiene un papel clave en todas las actividades; para esta hoja se tuvieron en cuenta los siguientes elementos:
- a. *Migración de Contexto*. Se refiere a pasar actividades propuestas en un libro texto tradicional a un libro interactivo en línea. Se tomó de un libro de texto tradicional, 12 sistemas de ecuaciones lineales que deberían resolver con la ayuda de un applet GeoGebra que ofrece el nuevo texto dinámico. Ya no se demanda del estudiante que resuelva a mano los sistemas de ecuaciones lineales.
 - b. Inicialmente, las *nuevas demandas* de resolver SEL 2X2, consisten en interactuar con un [applet GeoGebra](#) que tiene su interfaz dividida en dos vistas (Ver figura 8):

Figura 8 Imagen del Applet GeoGebra: Solución de un Sistema 2X2.



- i. La vista CAS (lado izquierdo en la Figura 8), que requiere el ingreso de los coeficientes del sistema, para después de un clic, entregar como salidas la clasificación del sistema como consistente o inconsistente, el applet

informa también cuando el sistema tiene infinitas soluciones y para los sistemas con solución única el applet muestra explícitamente la pareja solución.

- ii. La vista algebraica (lado izquierdo en la Figura 8), que tiene la característica de mostrar simultáneamente las dos ecuaciones del sistema que se ingresa a la vista CAS

Finalmente, las nuevas demandas se enfocan en la interpretación de la información obtenida, por ejemplo: Agrupar y discriminar la información en tablas, a partir de las cuales el estudiante: conjeture, describa, defina, justifique y argumente, en o entre las distintas formas de razonamiento.

Análisis

De la información recogida a través de las hojas de trabajo, se tomaron como datos aquellas actividades que permitieran develar los principios rectores, tanto desde la perspectiva disciplinar como desde los intereses principales de esta investigación; en efecto, se seleccionaron para el análisis aquellas actividades que suscitan las distintas formas de razonamiento, el uso activo y coordinado de las tecnologías digitales tipo CAS Y SGD y que, a su vez, permiten ver el rastro del hilo conceptual que representa el concepto de combinación lineal en el DI.

El trabajo desarrollado por los estudiantes en las diferentes hojas de trabajo se aglutina, por equipos, en un solo documento de Google que se estará compartiendo como referencia en las inferencias presentadas. Se muestra con especial énfasis el proceso que se puede apreciar en el documento desarrollado por el equipo A, sin constituirse en un estudio de caso, se tomará como referencia para complementarlo o en ocasiones contrastarlo con el trabajo realizado por algún otro equipo, para esta escogencia, se tuvo en cuenta la gran cantidad de información que se clasificó como dato compilada en este documento (Ver [anexo 2](#))

Primera Parte. “Describir desde una perspectiva geométrica y algebraica el conjunto solución de un SEL 2×2 ”. Para la hoja de trabajo 1 (Ver [Anexo 1](#), págs. 6-11), en el caso particular de la Parte 1, se eligieron para el análisis las preguntas 3 y 4 (ver [Anexo1](#), p. 8). En la figura 9, se muestra la tabla que guarda la información de la primera actividad tipo laboratorio y la pregunta tres que hace parte de la interpretación orientada.

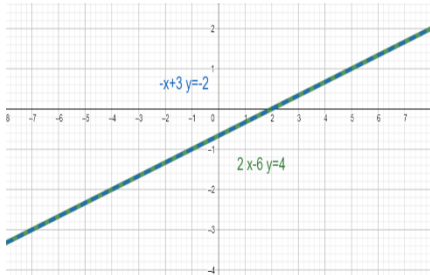
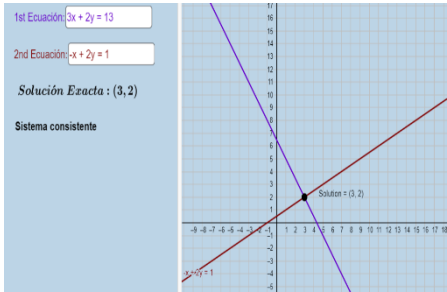
Figura 9 Tabla para almacenar la información inferida de la actividad tipo laboratorio y pregunta para el análisis.

No.	Sistema 2×2	Consistente o Inconsistente*	Número de Soluciones	Solución del sistema**
1	$\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$			
2	$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$			
3	$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$			
4	$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = 3 \end{cases}$			
5	$\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$			
6	$\begin{cases} -x + 3y = 2 \\ 3x - 9y = -6 \end{cases}$			
7	$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = -2 \end{cases}$			
8	$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$			
9	$\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$			
10	$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y = 1 \\ 2x - \frac{1}{3}y = 3 \end{cases}$			

3. Explique, desde una perspectiva gráfica, ¿cuándo un sistema tiene un solo punto como solución (solución única)? ¿cuándo tiene infinitas soluciones? o ¿cuándo no tiene solución (sistema inconsistente)?

Las siguientes son respuestas tomadas de las bitácoras de trabajo de los diferentes equipos de estudiantes del curso de álgebra lineal. Para la pregunta 3, se encontraron dos familias de respuestas, las seleccionadas representan cada una de ellas.

Tabla 12 Respuesta a la pregunta 3 del equipo A.

Tabla 12: Respuesta a la pregunta 3 del equipo A	
	Un sistema tiene infinitas soluciones cuando en la representación en el plano R^2, las rectas se intersecan en todos los puntos, es decir, las gráficas son las mismas.
	Un sistema tiene una solución única cuando en la representación en el plano R^2, las rectas se intersecan en un solo punto.

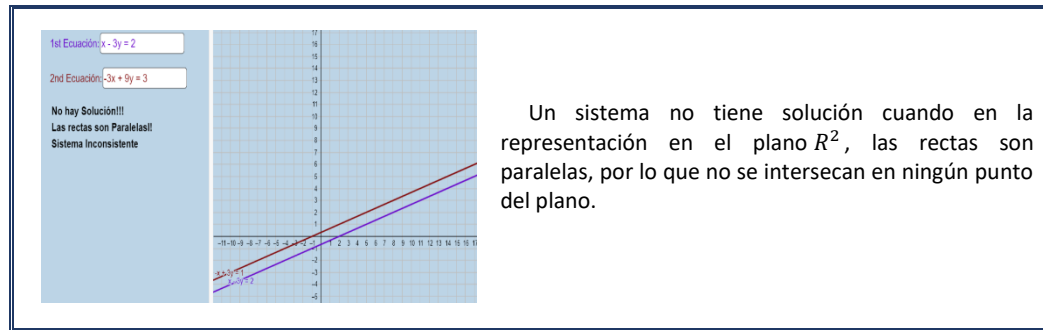
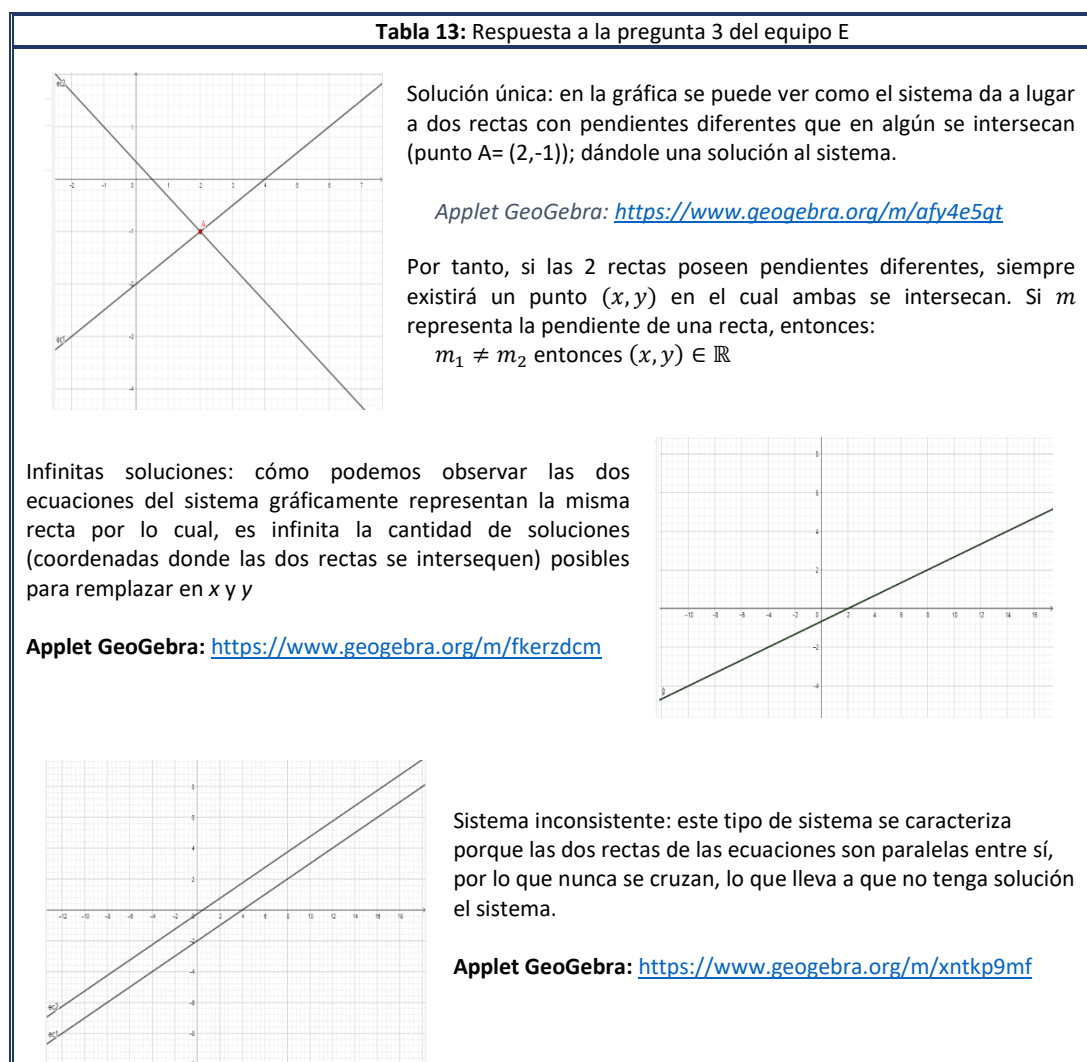


Tabla 13 Respuesta a la pregunta 3 del equipo E.



Inferencias. Como se esperaba, los estudiantes activaron su forma de razonamiento (SG); la familia de respuestas representada por el equipo A, estuvo ligada a los detalles visuales que ofrecía el applet, sin profundidad, pero satisfactoria en relación con lo que se demandó en el interrogante; en general, representa el contenido mínimo de las respuestas de todos los grupos. Las gráficas que representan SEL 2X2 con solución única y sin solución, se establecen como un registro semiótico de representación, en el sentido de Duval (2017), que se constituye en un activo sólido de los recursos de los estudiantes.

En el tipo de respuesta representada por el equipo E, los estudiantes, además, ponen en juego sus conocimientos de base o recursos (ver 2.3.1.): Función Lineal, pendiente de una recta y condiciones de paralelismo. La heurística de llevar cada una de las ecuaciones a la forma $y = mx + b$, establece una conexión exitosa, para este contexto, entre la forma de razonamiento (SG) y (AA).

En ambos casos, se usan las imágenes que ofrece GeoGebra para respaldar sus afirmaciones, el manejo de esta herramienta empieza a ser parte de los recursos que emplean para resolver problemas; no solo usaron los applets.

La abundante información y el soporte con imágenes de calidad dada por los estudiantes para caracterizar las posibles formas del conjunto solución de un SEL 2X2 están íntimamente ligados a la heurística de almacenar, en tablas, la información arrojada por el applet GeoGebra que recrea una especie de “laboratorio” matemático pues permite hacer tantos “experimentos” como el estudiante desee.

A continuación, se presentan algunas respuestas a la pregunta cuatro, con este interrogante se buscaba, por un lado, promover el uso de un discurso más cercano al algebraico y su forma de razonamiento asociada (AA) y de otro lado, determinar si los estudiantes podían asociar los distintos tipos de solución con la relación inicial de las ecuaciones del sistema.

4. Explique, en forma general, **a partir de las ecuaciones iniciales** ¿Cuándo un sistema tiene un solo punto como solución (solución única)? ¿Cuándo tiene infinitas soluciones? o ¿Cuándo no tiene solución? Dé al menos dos ejemplos de cada caso.

En la tabla 14, se muestran algunas partes de la respuesta dada por el equipo A, para más detalles (Ver [anexo 2](#), p. 35-38)

Tabla 14 Respuesta a la pregunta 4 del equipo A.

Tabla 14: Respuesta a la pregunta 4 del equipo A

Ejemplo 2:

*Las pendientes m de las dos ecuaciones de la forma $y = mx + b$ son diferentes

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$x - 2y = 4$$

$$2y = 4 - x$$

$$y = \frac{4}{2} - \frac{2}{2}x$$

$$y = 2 - x$$

$$2x + 3y = 1$$

$$3y = 1 - 2x$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}x$$

Cuando las ecuaciones de un SEL 2x2 tienen diferente pendiente en la ecuación de la forma pendiente-intersección ($y = mx + b$) se puede decir que el sistema tiene una única solución.

Ejemplo 1:

Pendiente-intersección

$$\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$2x - 6y = 4$$

$$-6y = 4 - 2x$$

$$y = -\frac{4}{6} + \frac{2}{6}x$$

$$y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$$

$$-x + 3y = -2$$

$$3y = -2 + x$$

$$y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$$

Cuando las ecuaciones de un SEL 2x2 tienen la misma ecuación pendiente-intersección ($y = mx + b$) se puede decir que el sistema tiene infinitas soluciones. Además, se puede observar que, al multiplicar cada término de una de las ecuaciones por un determinado número, da como resultado la otra ecuación.

Multiplicación

*La primera ecuación se multiplica por $-\frac{1}{2}$ el resultado es la segunda ecuación

$$\begin{cases} 2x - 6y = 4 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}(2x - 6y) = -\frac{1}{2}(4)$$

$$-x + 3y = -2$$

Cuando las ecuaciones de un SEL 2x2 tienen la misma pendiente, pero diferente intersección en el eje y en la forma $y = mx + b$, el sistema no tiene solución. Además, al multiplicar cada término de una de las ecuaciones por un determinado número, da como resultado una ecuación en la que los coeficientes de x y y son los mismos que los de la otra ecuación, pero la constante que está a la derecha de la

Ejemplo 1:
Pendiente-intersección:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = 3 \end{cases}$$

*Las dos ecuaciones tienen pendiente $m = \frac{1}{3}$, pero diferentes constantes b

$$\begin{aligned} x - 3y &= 2 \\ -3y &= 2 - x \\ y &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + 9y &= 3 \\ 9y &= 3 + 3x \\ y &= \frac{3}{9} + \frac{3}{9}x \\ y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

igualdad es diferente.

Multiplicación:
*Los coeficientes de x y y de la primera ecuación se multiplican por -3, dando origen a los coeficientes de x y y de la segunda ecuación. Si se multiplicaran todos los términos de la ecuación (incluyendo la constante), los coeficientes de x y y serían iguales, mas no la constante de cada ecuación.

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3(x) + [-3(-3y)] &= -3(2) \\ -3x + 9y &= -6 \end{aligned}$$

$-6 \neq 3$

Inferencias. Los estudiantes del equipo A, del grupo experimental, utilizan la estrategia para resolver el problema que ya se había encontrado en el análisis del diagnóstico del grupo piloto; utilizan como recurso principal, de sus conocimientos de base, la pendiente (m) y el intercepto con el eje y (b), de la función lineal, usando la heurística de llevar las ecuaciones del SEL 2X2 a la forma $y = mx + b$, para finalmente comparar los valores numéricos correspondientes. La representación gráfica de cada tipo de solución es el recurso rector que guía la heurística para resolver el problema; pues se apoyan en el efecto que los parámetros de la función lineal tienen en las características de la gráfica; en efecto, la forma de razonamiento preponderante en este caso resulta ser la (SG). También se da en esta solución, un caso de flexibilidad exitosa entre las formas de razonamiento (SG) y (AA). Las afirmaciones subrayadas en la columna derecha de la tabla 10, muestran un razonamiento (AA), con la salvedad de que se emplea un lenguaje algebraico de tipo retórico que, aunque cercano, no se lleva al lenguaje analítico que si se alcanza en el caso de la respuesta del equipo E; en la Tabla 15, se presentan los principales detalles de esta respuesta.

Tabla 15: Respuesta a la pregunta 4 del equipo E.

Tabla 15. Respuesta a la pregunta 4 del equipo E.

Sea un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

El sistema poseerá:

Una única solución: Ocurre cuando $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

Demostración: dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2x2:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

Si se aplica el método propuesto y se reemplaza las a y las b , entonces se obtendrá que

$$\begin{aligned} \frac{3}{1} &\neq \frac{2}{2} \\ 3 &\neq 1 \end{aligned}$$

Para comprobar que el sistema posee una única solución, se despeja x en la segunda ecuación y se sustituye en la primera, se obtiene que obtiene que:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2y \\ 3(3 - 2y) + 2y &= 5 \\ 9 - 6y + 2y &= 5 \\ -4y &= -4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Con el valor Y , se sustituye en la primera ecuación hallada para calcular x

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2(1) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

La única solución al sistema ocurre cuando $x = 1$ y $y = 1$

Infinitas soluciones: Ocurre cuando $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Demostración: dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2x2:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 9x + 6y &= 15 \end{aligned}$$

Si se aplica el método propuesto y se reemplaza las a y las b , entonces se obtendrá que

$$\begin{aligned} \frac{3}{9} &= \frac{2}{6} = \frac{5}{15} \\ \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Para comprobar que el sistema posee infinitas soluciones, se soluciona mediante el método de igualación y se obtiene que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5-2y}{3} \quad y \quad x = \frac{15-6y}{9} \\ \frac{5-2y}{3} &= \frac{15-6y}{9} \\ \frac{(5-2y)}{3} &= \frac{3(5-2y)}{9} \\ \frac{5-2y}{3} &= \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} \\ \frac{5-2y}{3} &= \frac{5-2y}{3} \end{aligned}$$

Puesto que ambos lados de la igualdad son lo mismo, no importa cual valor de y se ingrese, se obtendrá siempre un valor de x que satisface ambas ecuaciones a la vez. Por tanto, la ecuación posee infinitas soluciones.

Ninguna solución: Ocurre cuando $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ o $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Demostración: dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales 2x2:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 6 \\ 9x + 6y &= 15 \end{aligned}$$

Si se aplica el método propuesto y se reemplaza las a , b y c , entonces se obtendrá que

$$\frac{3}{9} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{6}{15} \quad \text{o} \quad \frac{1}{3} \neq \frac{6}{15}$$

Para comprobar que el sistema no posee ninguna solución, se resolverá mediante el método de igualación y se obtiene que:

$$y = \frac{6-3x}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{15-9x}{6}$$

$$\frac{6-3x}{2} = \frac{15-9x}{6}$$

$$\frac{6-3x}{2} = \frac{3(5-3x)}{6}$$

$$\frac{6-3x}{2} = \frac{3 \cdot 2}{5-3x}$$

$$\frac{6-3x}{2} = \frac{6}{5-3x}$$

Puesto que ambos lados de la igualdad son dan diferentes valores de y para cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces no habrá ningún valor de x o y que satisfaga ambas ecuaciones a la vez, por lo que el sistema no tiene solución alguna.

Las respuestas a la pregunta 4, de los seis equipos, tienen en general características distintas: Aun así, las respuestas de los equipos B y C admiten una misma descripción. A pesar de que cuentan con el applet que les permite resolver los SEL 2X2, solo logran extraer la información explícita que ofrece el applet; en la columna de las respuestas de cada uno de los sistemas, solo aparece la información solicitada cuando la solución es única. En el caso de los sistemas con infinitas soluciones, no reconocen que cualquiera de las dos ecuaciones del sistema describe el conjunto solución del sistema; lo que no les permite presentar las dos soluciones particulares solicitadas en la consigna de la actividad. Finalmente, estos dos equipos, al igual que el equipo F, para justificar las respuestas dadas presentan una afirmación clasificada como cíclica; pues argumentan que los distintos tipos de solución se deben a la o las soluciones que se obtienen después de aplicar algún método (Ver [Anexo 3](#), p. 6).

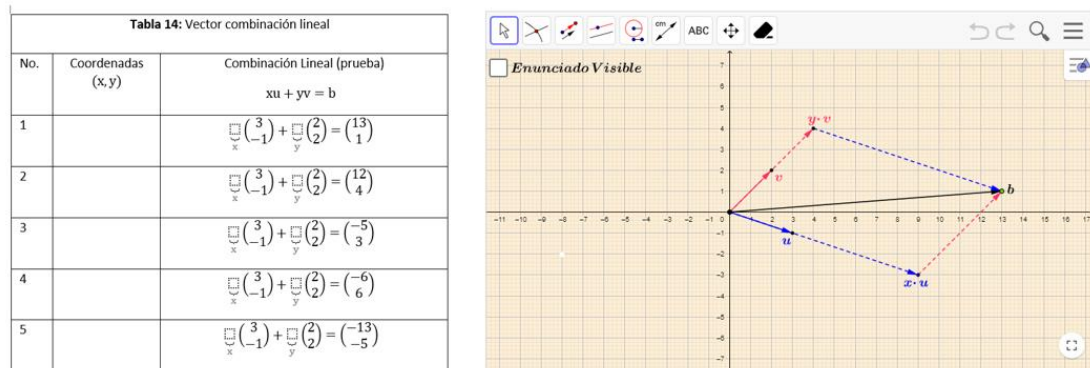
El equipo D, por su parte, “hábilmente”, evade la invitación de relacionar el conjunto solución con las ecuaciones iniciales del sistema; argumentando que toda ecuación lineal está representada gráficamente por una recta, llevando la discusión a la forma de razonamiento (SG). Para más detalles (ver [Anexo 5](#), p. 19).

La solución del equipo E se ubica en la forma de razonamiento (AA); exhiben una representación general de un SEL 2X2 y a partir de sus coeficientes, establecen condiciones para cada caso solicitado. Les falta contemplar los casos especiales donde los coeficientes sean cero, no se atendió las relaciones planteadas entre los coeficientes y sus consecuencias en términos de las ecuaciones que era la consigna del problema.

Segunda Parte: “Hacia una descripción vectorial del conjunto solución de un SEL2X2”.

En la figura 10, se muestran los elementos principales de la actividad tipo laboratorio: el applet “[Combinación lineal en el plano](#)” y la tabla donde los estudiantes organizan la información obtenida a partir de la resolución de los problemas planteados en la misma tabla y simulados (visualizados en forma dinámica) en el applet. A los estudiantes, se les solicitaba estimar las coordenadas de la combinación lineal usando herramientas para “medir” del applet y se les pedía resolver analíticamente los problemas resultantes, esperando que plantearan SEL 2X2 y al resolverlos emplearan el applet anterior o relizaran los procedimiento a papel y lápiz.

Figura 10 Imágenes de la tabla y el applet del laboratorio de la segunda parte de la hoja de trabajo.



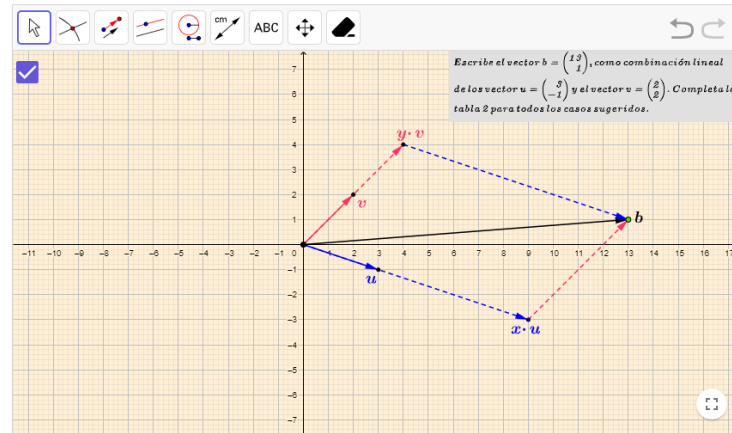
El software GeoGebra ofrece la posibilidad de vincular objetos libres de la vista gráfica, como por ejemplo puntos en el plano, a textos visibles en el propio applet; haciendo uso de esta bondad, se crea un texto dinámico que puede ser activado dando clic en la casilla que aparece en la esquina superior izquierda de la interfaz del applet, en la figura 11, se muestra la representación gráfica de la primera actividad propuesta en la tabla que aparece en la figura 11. El texto dinámico que se observa en el extremo superior derecho traduce, simultáneamente, al lenguaje propio de la forma de razonamiento (AA), cualquier nuevo problema simulado en la vista gráfica del applet.

Figura 11 Representación gráfica y escrita del problema 1, hoja de trabajo 1, parte 2.

Combinación Lineal en el plano

Autor: Leonel Monroy Guzmán

Use las herramientas que considere pertinente de tal forma que pueda estimar las componentes del vector b . Puede cambiar las coordenadas del vector b arrastrando su punto final. De clic en el cuadro blanco para obtener el enunciado particular



Para orientar el enfoque y el análisis de las producciones en los laboratorios y actividades en general, se plantean interrogantes que buscan movilizar los procesos y conceptos del álgebra lineal, en y entre las diferentes formas de razonamiento. En el applet asociado al laboratorio, de la segunda parte de la hoja de trabajo 1, se pide a los estudiantes usar las herramientas seleccionadas para estimar las coordenadas (x,y) del vector de prueba, esta tarea al igual que los interrogantes II, III y IV, se plantean en un contexto geométrico que promueve el uso y desarrollo de la forma de razonamiento (SG), las preguntas I y V orientan al estudiante a realizar una transformación de tipo conversión en el sentido de (Duval, 2006, 2020). Todas las preguntas de la figura 12, son potencialmente útiles para generar tratamientos y conversiones, la pregunta VI se diseñó para promover la conversión entre las dos formas de razonamiento (SG) y (AA) en ambas direcciones (Fluidez entre las formas de razonamiento).

Figura 12 Preguntas que orientan el análisis de las producciones en el laboratorio

Una vez termine de completar la *tabla 2* y **analizar los datos**, conteste las siguientes preguntas. Argumente por escrito cada una de sus respuestas:

- I. Describa un método analítico (Algebraico) que le permita hallar la pareja o parejas de coordenadas (x, y) . ¿Lo usó en algún caso?
- II. ¿Todo vector $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2$ se puede *generar* con los vectores $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$?
- III. ¿Todo vector $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2$ se puede obtener como combinación lineal de cualquier par de vectores u y v ?
- IV. Replantee en términos de vectores, tres (3) de los SEL 2x2 de la tabla 1 y usa la vista gráfica y las herramientas de vectores para visualizar o explicar algunos resultados
- V. En general un SEL 2x2 se representa así: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$, los problemas anteriores pueden modelarse a través de un SEL 2x2. ¿En un SEL 2x2 cuáles son las coordenadas de los vectores u y v ? y ¿cuáles son las coordenadas del vector b ? ¿Cómo se puede representar vectorialmente un sistema 2x2?
- VI. Usando la representación vectorial de los SEL 2x2 explique, en términos relativos a los vectores: ¿cuándo un SEL 2x2 tiene solución única?, ¿cuándo infinitas soluciones? y ¿cuándo resulta inconsistente?
- VII. **Bonus (Opcional)** Construya un applet que conserve las características del applet (3) y que además calcule las coordenadas de la combinación lineal mientras se realiza el arrastre

Del anterior conjunto de siete preguntas, seleccionaron para el análisis las que corresponden a los numerales romanos III y VI.

- III. ¿Todo vector $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in R^2$ se puede obtener como combinación lineal de cualquier par de vectores u y v ?

A continuación las respuestas mas representativas de algunos de los equipos:

Tabla 16 Respuesta a la pregunta III, equipo A.

Tabla 16. Respuesta a la pregunta III, equipo A.
Todo vector b se puede generar a partir de los vectores u y v si: - Los vectores u, v y b no son múltiplos escalares entre sí, debido a que estos estarían en la misma recta y el sistema generador (span) de la combinación lineal de los dos sería el mismo, así se multipliquen por diferentes escalares. - Ninguno de los vectores u y v es un vector nulo, debido a que, si alguno es nulo, el vector b solo podría ser un múltiplo escalar del vector que no lo es. *Sistema generador: Conjunto de vectores que tienen la propiedad de que cualquier vector del espacio vectorial es combinación lineal de los vectores del sistema generador. Respuesta: Video de demostración aquí

Inferencias. Como se esperaba, los estudiantes activan su forma de razonamiento (SG), El equipo A con alguna imprecisión y redundancia, en el contexto geometrico de los vectores, logran hacer corresponder la solución de un SEL 2X2 con la relación entre los vectores u y v , además involucran nuevos conceptos, como conjunto generador, vector, vector nulo. Se destaca el uso coordinado de tecnologías digitales (el documento de Google, Capturador de pantalla para producir video, producción de contenido para YouTube) para complementar el uso de Geogebra en el video que llaman de “demostración” al final de la respuesta.

Tabla 17 Respuesta a la pregunta III, Equipo E.

Tabla 17: Respuesta a la pregunta III, equipo E.	
A diferencia de la situación anterior, los vectores u y w no mantienen un valor constante en sus componentes, por lo que permite la posibilidad que se produzca una combinación de v, u y b tal que no exista ningún valor de x ni y que satisfaga ambas ecuaciones. Para comprender lo anterior, se procede a descomponer la suma de vectores en un sistema de ecuaciones lineales 2x2 siguiendo el mismo procedimiento de la pregunta 2: $\begin{matrix} v * x + u * y = b \\ \begin{bmatrix} v_x * x + u_x * y \\ v_y * x + u_y * y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$ $\begin{matrix} u_x x + v_x y = b_1 \\ u_y x + v_y y = b_2 \end{matrix}$ Al despejar la variable y en ambas ecuaciones, se obtienen 2 rectas de la forma $y = mx + b$ $\begin{matrix} y = \frac{b_1 - u_x x}{v_x} = -\frac{u_x}{v_x} x + \frac{b_1}{v_x} \\ y = \frac{b_2 - u_y x}{v_y} = -\frac{u_y}{v_y} x + \frac{b_2}{v_y} \end{matrix}$ Como puede observarse, la pendiente de las rectas no es un valor, por lo que puede darse que $m_1 = m_2$ $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$ Lo cual puede reescribirse como: $\frac{v_y}{v_x} = \frac{u_y}{u_x}$ Esta fracción representa la pendiente del vector respecto a sus componentes. Lo cual es posible debido que los vectores $\mathbb{R}^2$ se pueden representar como un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es su componente en Y y su cateto adyacente su componente X. Puesto que la fracción es la tangente de ese triángulo rectángulo, se puede obtener su ángulo al aplicar el arco tangente en ambos lados: $\begin{matrix} \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{u_y}{u_x} \right) \\ \angle v = \angle u \end{matrix}$ Lo anterior implica que ambos vectores son paralelos, por lo cual puede ocurrir lo siguiente: El sistema posee infinitas soluciones para x y y si $\frac{b_2}{b_1} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{u_y}{u_x}$, puesto que ambas ecuaciones representarían la misma recta con igual punto de corte con el eje Y. Es un sistema compatible indeterminado. El sistema no posee ninguna solución si $\frac{b_2}{b_1} \neq \frac{v_y}{v_x}$ o $\frac{b_2}{b_1} \neq \frac{u_y}{u_x}$ ya que poseen un diferente punto de corte y están desplazadas verticalmente (con respecto al eje Y). Por tanto, es un sistema incompatible. La última situación (la que niega el estamento de la pregunta 3) se puede comprender mejor con el siguiente ejemplo:	

Dado los vectores $u = [3,4]$, $v = [6,8]$ y $b = [5,4]$, se obtiene lo siguiente:

$$y = -\frac{u_x}{v_x}x + \frac{b_1}{v_x}$$

$$y = -\frac{u_y}{v_y}x + \frac{b_2}{v_y}$$

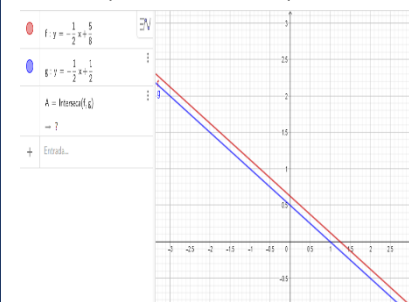
$$y = -\frac{3}{6}x + \frac{5}{8}$$

$$y = -\frac{4}{8}x + \frac{4}{8}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Ambos poseen la misma pendiente, por lo que son rectas paralelas. No obstante, su punto de corte difiere en $\frac{1}{8}$, por lo que no representan la misma recta. Esto significa que son 2 rectas distintas que carecen de un punto de intersección, tal como se muestra en la gráfica.

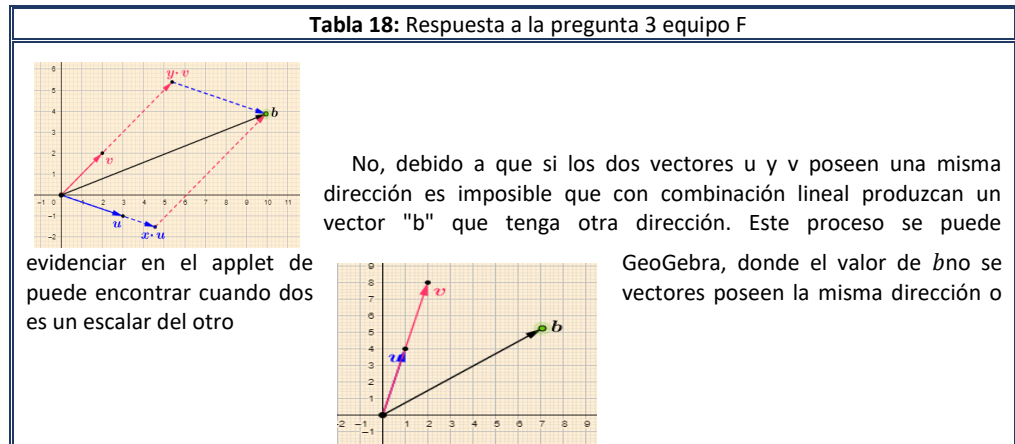


Recta 1 y recta 2 en un plano bidimensional:
<https://www.geogebra.org/classic/ktdfdst>

Este ejemplo es suficiente para demostrar que NO todo vector $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ se puede obtener como combinación lineal de cualquier par de vectores u y v .

Inferencias. El equipo E para resolver el problema emplea la heurística de comparar con el caso particular anterior (la pregunta II), para afirmar, en el primer párrafo, que puede presentarse una situación donde el vector de prueba no sea combinación lineal de los vectores de coeficientes del SEL 2X2. En general, el proceso de justificación es orientado y validado en el contexto geométrico de las líneas rectas; se inicia con una forma de razonamiento (AA) que basa sus tratamientos en una conversión exitosa de la forma de razonamiento (SG). La coordinación entre la conversión entre las formas de razonamiento (SG) a (AA) y el tratamiento en la forma de razonamiento (AA), desemboca en una conversión del contexto geométrico de las líneas rectas al contexto geométrico de los vectores. Finalmente, resuelven el problema a partir de un contraejemplo y la conclusión se hace de manera precisa atendiendo la consigna del problema.

Tabla 18 Respuesta a la pregunta 3, equipo F.



Inferencias. El equipo F, usa el razonamiento (SG) con el respaldo de las imágenes tomadas del applet GeoGebra; las dos imágenes muestran el contraste con relación a la disposición de los vectores de coeficientes de las incógnitas (Vectores azul y rojo); en la imagen superior, el paralelogramo certifica que el vector b es combinación lineal y, en la imagen inferior, la falta de este certifica lo que registran como “imposible”. A pesar de que en el discurso omiten que el vector b no debe tener la misma dirección de los vectores u y v , la imagen si lo muestra.

La otra pregunta de la que se analizarán las respuestas es:

- VI. Usando la representación vectorial de los SEL 2x2 explique, en términos relativos a los vectores: ¿cuándo un SEL 2x2 tiene solución única?, ¿cuándo infinitas soluciones? y ¿cuándo resulta inconsistente?

Tabla 19 Respuesta a la pregunta 6 equipo A y E

Tabla 19: Respuesta a la pregunta 6 equipo A y E

Equipo A:

- Se puede establecer que un SEL 2x2 tiene una única solución cuando los vectores u y v no son múltiplos escalares entre sí por lo que no son colineales.
- Se puede establecer que un SEL 2x2 tiene infinitas soluciones cuando los vectores u , v y b son múltiplos escalares entre sí.
- Se puede establecer que un SEL 2x2 resulta inconsistente cuando el vector u es múltiplo escalar del vector v , y de igual manera, el vector v es múltiplo escalar del vector u . Sin embargo, el vector b no es múltiplo escalar de dichos vectores.

Equipo E:

Dado un sistema compuesto por vectores u , v y w de la forma, se obtiene que:

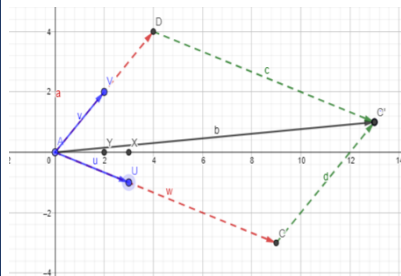
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

Sistema con una única solución: Si los cocientes obtenidos de la división de cada vector entre su componente Y y X son diferentes, entonces el sistema posee una única solución, es decir:

$$\frac{v_y}{v_x} \neq \frac{u_y}{u_x}$$

Por ejemplo, si $u = [2,2]$ y $v = [3,-1]$ y $w = [13,1]$, entonces: $\frac{2}{2} \neq -\frac{1}{3}$

Por lo que el sistema posee una solución ($x = 3$ y $y = 2$), tal como lo demuestra el applet de GeoGebra utilizado:



Applet

<https://www.geogebra.org/classic/dahjxzfz>

GeoGebra:

Sistema con infinitas soluciones: Si los cocientes obtenidos de la división de cada vector entre su componente Y y X son iguales, y estos a su vez son iguales con el cociente de los componentes del vector w , entonces el sistema posee infinitas soluciones, es decir:

$$\frac{w_y}{w_x} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{u_y}{u_x}$$

Por ejemplo, si $u = [3,6]$, $v = [4,8]$ y $w = [5,10]$, entonces:

$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5}$$

$$2 = 2 = 2$$

Si el sistema se convierte a una ecuación lineal y se resuelve por igualación, entonces:

$$3x + 4y = 5$$

$$6x + 8y = 10$$

$$x = \frac{10 - 8y}{6}$$

$$x = \frac{5 - 4y}{3}$$

$$\frac{10 - 8y}{6} = \frac{5 - 4y}{3}$$

$$\frac{2(5 - 4y)}{3} = \frac{5 - 4y}{3}$$

$$\frac{2 \cdot 3}{(5 - 4y)} = \frac{3}{5 - 4y}$$

$$\frac{3}{5 - 4y} = \frac{3}{5 - 4y}$$

$$5 - 4y = 5 - 4y$$

$$-4y + 4y = 5 - 5$$

$$0 = 0$$

Puesto que ambas ecuaciones son la misma, donde la segunda es el doble de la primera, es de esperarse que la ecuación posea infinitas soluciones.

Ninguna solución: Si los cocientes obtenidos de la división de cada vector entre su componente Y y X son iguales, pero estos son diferentes con el cociente de los componentes del vector w, entonces el sistema carece de solución, es decir: $\frac{v_y}{v_x} = \frac{u_y}{u_x}$, $\frac{w_y}{w_x} \neq \frac{v_y}{v_x}$ o $\frac{w_y}{w_x} \neq \frac{u_y}{u_x}$

Por ejemplo, si $u = [3,6]$, $v = [4,8]$ y $w = [5,9]$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{6}{3} &= \frac{8}{4} \\ 2 &= 2 \\ 2 &\neq \frac{9}{5}\end{aligned}$$

Inferencias. El equipo A, para su respuesta, activa únicamente la forma de razonamiento (SG), la causa más probable es que, en esta etapa del curso, solo reconocen los vectores a través de su representación gráfica. El equipo F, usa las formas de razonamiento (AA) y (SG) para comunicar sus respuestas; Esto es, tanto en la primera como en la segunda parte de la hoja de trabajo, hay un predominio de la forma de razonamiento (AA), con la diferencia que en la segunda parte usan la forma de razonamiento (SG) como referente. En su respuesta (Tabla 19), establecen las condiciones, para los distintos tipos de solución, basadas en la relación de los cocientes de las componentes de cada vector.

Consideraciones Finales

Las actividades o tareas propuestas en la hoja de trabajo, tanto en la primera parte como en la segunda, no asignan al estudiante la tarea tradicional de realizar procesos, relacionados con los métodos para resolver SEL 2X2 a papel y lápiz, en su lugar, los estudiantes deben establecer una especie de dialogo o de interacción reflexiva con los applets.

En los applets y preguntas, en la mayoría de los casos, se insinúan los conceptos del álgebra lineal; es decir, sin presentar el teorema o definición de manera explícita, pues existe el acuerdo tácito que es necesario investigar y construir las ideas del álgebra lineal en un lenguaje cada vez más formal.

En la segunda parte de la hoja de trabajo, la puesta en escena de la noción de combinación lineal de vectores en el plano lleva la representación de los SEL 2X2 al contexto híbrido, Es decir; analítico y geométrico, de los vectores. En otras palabras, cuando se escribe un SEL 2X2, a través de la representación del vector formado por los términos independientes (vector de prueba) como combinación lineal de los vectores columna de coeficientes (ver tabla 19, primer párrafo),

se amplía el léxico disponible para el discurso algebraico, como también, las posibilidades de representación con vectores en el plano de los SEL 2X2.

La justificación de la pregunta III del equipo F resulta débil e incluso errada, principalmente, porque no se presentan conversiones desde la forma de razonamiento (SG), en contraste; el equipo E, presenta los elementos de una demostración, lo que implica la aparición inicial de una forma de razonamiento (AE) en este contexto. En las respuestas de las preguntas III y VI, se presenta el hallazgo de que al involucrar el razonamiento (SG) como referente para la forma de razonamiento (AA), se dan las condiciones para que emerja de manera temprana y significativa la forma de razonamiento (AE).

4.3.2. Hoja de Trabajo: Hablemos de Matrices

Las matrices son una herramienta fundamental del álgebra lineal que permite presentar y manipular vectores (Brownlee, 2019). En esta parte, se presenta la Hoja de trabajo "Hablemos de Matrices" (Ver [Anexo 1](#), págs. 29 - 36). Alrededor de las matrices, se introducen y se profundizan algunos conceptos básicos del álgebra lineal. En particular, se abordan las siguientes temáticas:

- Se presenta el vector b combinación lineal de las columnas de la matriz A , como el producto de una matriz A , $m \times n$, por un vector $x \in \mathbb{R}^n$.
- Conjunto generado, Conjunto generador y el Espacio columna.
- La representación matricial general de los Sistemas de Ecuaciones Lineales; $Ax = b$, (SEL $m \times n$).
- La factorización LU, sin pivoteo parcial, de la matriz A .

Objetivos

- Reconocer la expresión Ax como el producto de una matriz por un vector, pero también como un vector combinación lineal b .
- Describir la ecuación $Ax = b$, como la representación de un sistema de ecuaciones, pero también, como el problema de determinar si b es combinación lineal de las columnas de A .
- Resolver SEL $m \times n$, con la factorización LU que ofrecen las tecnologías tipo CAS (Matrix Calculator, Matlab, vista CAS de GeoGebra).

- Escalonar SEL a través del producto por matrices elementales a ambos lados de la igualdad $Ax = b$.
- Establecer las relaciones existentes entre los tipos de solución de un sistema $Ax = b$ y el concepto de combinación lineal.
- Encontrar regularidades que involucren uno o varios de los siguientes aspectos: el tamaño de la matriz, su forma escalonada, número de pivotes. Esto es, Construir conjeturas y contraejemplos que relacionen estos aspectos con los distintos tipos de conjunto solución de los SEL $m \times n$.

En síntesis, esta hoja de trabajo tuvo como propósito central que, con base en la resolución de problemas mediados con tecnologías tipo CAS y SGD, el estudiante infiriera las características de las partes del SEL, a partir de las cuales, pudiera determinar o describir las razones para que un sistema tenga solución única, infinitas o ninguna solución y que finalmente, estableciera condiciones en términos de combinación lineal para los mismos casos. Con este objetivo como eje central, se buscó de manera particular los siguientes objetivos específicos:

Análisis Hoja de trabajo: Hablemos de Matrices

Del total de las actividades que conforman la hoja de trabajo, se seleccionaron tres actividades gracias a que recogen los principales temas y objetivos trazados para el análisis de los estudiantes. La Hoja de trabajo “Hablemos de Matrices” está dividida en tres partes:

- Producto Ax : vector combinación lineal.
- Producto Ax : SEL $m \times n$.
- Matrices elementales y el algoritmo de eliminación Gaussiana.

Producto Ax : Vector combinación lineal. De esta primera parte, se escogen las actividades dos y tres. Actividad 2 a) (Ver [Anexo 1](#), pág. 30):

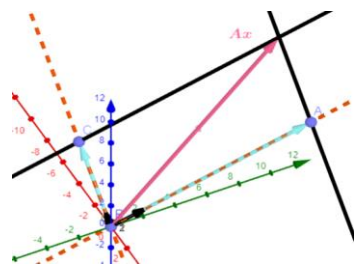
- **Actividad 2.** Use la vista CAS para realizar al menos cinco combinaciones con los vectores $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, use la definición del producto Ax .
(Nota: Usted debe dar, libremente, las coordenadas para cada vector x)

- a. **Espacio Columna:** Al realizar todos los posibles productos de la matriz A , con los infinitos posibles vectores x , geométrica y algebraicamente ¿Qué conjunto se genera? ¿Se genera cualquier vector de $\mathbb{R}^3$?

En la actividad 2, se les pide a los estudiantes que, dados dos vectores en $\mathbb{R}^3$, encuentren 5 vectores que sean combinación lineal de ellos. Luego, se les sugiere que usen la definición del producto Ax como una combinación lineal de los vectores columna de A . Se recomienda a los estudiantes que grafiquen los vectores obtenidos en un mismo applet GeoGebra; para que puedan visualizar el espacio columna de una matriz en $\mathbb{R}^3$. Con esto, se refuerza el concepto de combinación lineal y se introducen las nociones de espacio fila, independencia y dependencia lineal.

Inferencias. En su respuesta a la pregunta 2, el equipo A usa en forma coordinada, las formas de razonamiento (SG) y (AA); la construcción de la matriz y del vector de coordenadas está guiado por la noción de combinación lineal, luego, la expresión Ax , asociada a la forma de razonamiento (AE), se usa para nombrar un vector en la vista gráfica de GeoGebra, lo que corrobora que es la forma de razonamiento (SG) la que prevalece en estas producciones. Se presenta un acto de conversión tipo abstracción situada porque difícilmente se puede desligar del constructo logrado entre el DI, las vistas GeoGebra y el grupo de estudiantes (Humanos con medios).

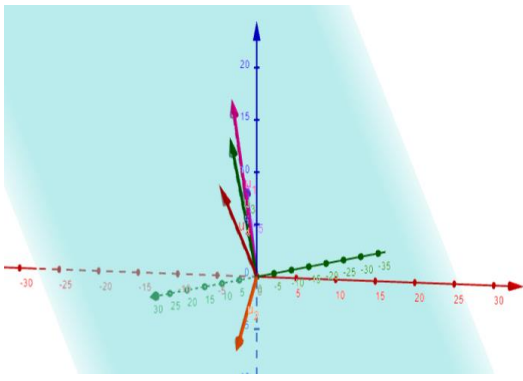
Tabla 20 Primera parte de la solución a la actividad 2 a). grupo A.

Tabla 20. Primera parte de la solución a la actividad 2 a). Grupo A (Ver anexo 2 , pág. 34)	
1) En este applet se encuentra la siguiente construcción de la combinación lineal:  Para realizar la primera combinación lineal con los vectores dados, primero se graficaron los vectores a_1 y a_2, los cuales se pueden observar en la imagen con un color azul.	Después, con la vista CAS, se construyó la matriz A, así: Luego, se escogió libremente un vector X, en este caso se le llamó u: $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Al tener la matriz $A_{3 \times 2}$ y el vector u, se multiplicaron entre sí, dando origen al siguiente vector: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$
Gráficamente, esto generó dos puntos en la gráfica, por lo que se trazaron rectas que pasan por cada punto y el origen de los vectores a_1 y a_2. Al realizar esto, se encontró que los puntos estaban en la misma recta que sus vectores	

correspondientes, por lo que son múltiplos entre sí, concluyendo que el vector resultante b es la combinación lineal de los vectores a_1 y a_2 escalados por los componentes respectivos del vector X

Después de construir y observar los 5 vectores sugeridos, en las vistas CAS y gráfica de GeoGebra, como también gracias a las consultas que realiza en las fuentes sugeridas, textos en línea y sitios web académicos, se reconoce el espacio columna de la matriz como un plano en el espacio generado por todas las combinaciones lineales de los vectores. Emerge la forma de razonamiento (AE) de la interacción coordinada de las formas de razonamiento (SG) y (AA); cuando dan el “paso al infinito” declarando que el conjunto generado por todas las combinaciones lineales es un plano y además añaden un argumento (AA) “El espacio columna está formado por los vectores b para los cuales el sistema tiene solución”. En la tabla 21 se puede observar la forma en que los estudiantes resuelven finalmente el problema 2 a).

Tabla 21 Parte final solución de la actividad 2 a) Grupo A.

Tabla 21. Parte final solución de la actividad 2 a). Grupo A. (Ver anexo 2 , págs. 144-151)	
Espacio columna: Sea A una matriz de $m \times n$, el espacio columna de A es el subespacio $col(A)$ de R^m generado por las columnas de A (Poole, 2011, p. 201) El conjunto que se genera es de los vector resultantes de la combinación lineal $a_1x_1 + a_2x_2$, es decir, se genera el espacio columna de A. No se genera cualquier vector de R^3, sino que se genera cualquier vector que geométricamente esté en el plano donde se ubican ambos vectores a_1 y a_2, aquellos que cumplan con la combinación lineal (que $Ax = b$ tenga al menos una solución, como se muestra en este video de Khan Academy)	 Applet vectores generados <i>Espacio columna: $col(A) = (a_1, a_2)$</i>

Inferencias. La respuesta al interrogante planteado en la parte b), el equipo A, en la primera y segunda viñeta (Ver, tabla 22), presenta una demostración haciendo uso de la forma de razonamiento (AE) aunque con un lenguaje algebraico sincopado.

Tabla 22 Parte final solución de la actividad 2 a) Grupo A.

Tabla 22. Parte final solución de la actividad 2 a). Grupo A. (Ver anexo 2, págs. 144-151)	
El vector cero de R^m siempre puede ser generado por cualquier subconjunto de R^m, debido a que: • Si el vector x es nulo, al multiplicarlo con cada vector de la matriz A, se obtendrán vectores nulos, y finalmente, la combinación lineal sería un vector cero. • El vector que se genera, gracias a la combinación lineal de los vectores de la matriz, estará en el mismo plano que estos, por lo que se puede generar cualquier vector b en este plano, incluido el vector nulo, el cual sería el origen de los vectores de la matriz.	Si se plantea $Ax = b$ como un sistema de ecuaciones lineales, donde b es el vector cero, en Matrix Calculator, obtenemos que la solución es el vector x que es nulo: El sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 1x_1 + -1x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ La solución general: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Además, en la gráfica del espacio columna generado de A, el plano pasa por el origen $(0,0,0)$, por lo tanto, el vector cero puede ser generado por Ax

En la actividad 3, se vuelve sobre las nociones incorporadas para dar nuevas posibilidades de conversión entre las distintas formas de razonamiento. Además, se intenta influir sobre la creencia de que tres vectores generan cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Actividad 3 (Ver [Anexo 1](#) pág. 30):

Actividad 3. Use la vista CAS para realizar al menos cinco combinaciones Lineales con los

vectores $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, use la definición del producto Ax .

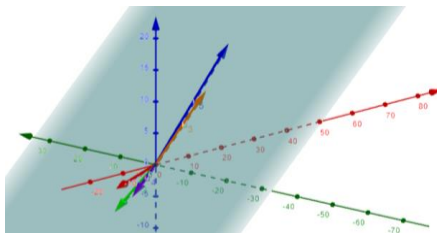
- a. **Espacio Columna:** Al realizar todos los posibles productos de la matriz A , con los infinitas posibles vectores x . Geométrica y algebraicamente ¿Qué conjunto se genera? ¿Se genera cualquier vector de $\mathbb{R}^3$?

Sugerencia: Antes de contestar visualice en una misma gráfica GeoGebra 3D los cinco vectores generados

- b. **Dependencia Lineal** De cuántas formas posibles se puede obtener el vector cero como combinación lineal de los vectores: a_1 , a_2 y a_3 . Si su respuesta es que hay una única manera, explique por qué, si hay infinitas maneras muestre al menos dos formas distintas.

Tabla 23 Parte final solución de la actividad 3 a) Grupo A.

Tabla 23. Parte final solución de la actividad 3 a). Grupo A. (Ver anexo 2 , págs. 152-161)

El conjunto que se genera es de los vectores resultantes de la combinación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, es decir, se genera el espacio columna de A. No se genera cualquier vector de $\mathbb{R}^3$, se generan aquellos que cumplan con la combinación lineal (que $Ax = b$ tenga al menos una solución, como se muestra en este video de Khan Academy) y que geoméricamente están en el mismo plano.	 Applet vectores generados Espacio columna: $col(A) = (a_1, a_2, a_3)$
En el siguiente Applet se plantea la combinación lineal de los vectores a_1, a_2 y a_3 como tres sistemas de ecuaciones lineales que se igualan a 0, pues se busca obtener el vector nulo. Dependencia lineal: se puede considerar que n vectores son linealmente dependientes si existen escalares $x_1, x_2, \dots, x_n$ que formen una combinación lineal NO trivial, es decir, que tales escalares no sean iguales a cero y que además a partir de la combinación se genere un vector nulo. (Gómez & Pustilnik, 2019)	$x = -z = -4 \quad y = 2z = 2(4) = 8 \quad z = 4$ $x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Inferencias. En la actividad 3, el grupo A usó las dos formas de razonamiento prevalentes (SG) y (AA). Su proceso de resolución de la actividad es orientado y validado en el contexto geométrico de los vectores en el espacio. Lo natural en este caso es que los estudiantes contesten que cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se obtiene como combinación lineal de estos tres vectores y en general de tres vectores cualquiera de $\mathbb{R}^3$. La prueba del arrastre que permite la vista grafica 3D de GeoGebra insinúa que los tres vectores columna de la matriz A están en un mismo plano, de donde concluyen que el conjunto formado por sus combinaciones lineales es precisamente el plano que los contiene.

Producto Ax : Sistemas de ecuaciones lineales $m \times n$. En la segunda parte de la hoja de trabajo, se plantean actividades que afianzan la representación matricial de los SEL $m \times n$. Se explora la factorización LU. Se presentan SEL de diferentes tamaños a partir de sus ecuaciones, se demanda de los estudiantes que escriban la representación matricial de cada uno y apoyándose en una tecnología tipo CAS expresar el sistema original en la forma $LUx = b$ y resolver dos sistemas escalonados a cambio del sistema original. Se pretende que se concluya que la matriz L

"guarda" la información necesaria para transformar el vector de prueba b del sistema inicial en el vector y , para finalmente, resolver el sistema escalonado $Ux = y$.

Naturaleza de la solución de los SEL $Ax = b$. En la tercera parte de la hoja de trabajo, se presenta el concepto de matriz idéntica de orden n y a partir de ella se definen las matrices elementales.

En este momento del curso, se había consolidado el principio de no demandar de los estudiantes la realización de procesos algorítmicos, a papel y lápiz, para resolver SEL. En efecto, Las actividades se construyeron, en general, con la idea de presentar una alternativa de cuáles pueden ser las nuevas demandas a los estudiantes a la hora de resolverlos de manera consciente. Los SEL son, a su vez, un concepto clave del álgebra lineal y una herramienta de uso recurrente en la solución de problemas del álgebra lineal en contexto formal, real e hipotético.

De la tercera parte de la hoja de trabajo, se presentan las producciones de los estudiantes en la resolución de problemas planteados en la actividad 4 (Ver [Anexo 1](#), pág. 36). Se introduce una variante que consiste en cambiar los procesos de escalonamiento de matrices aplicando operaciones elementales con papel y lápiz, por procesos de escalonamiento con el uso de matrices elementales que las representan.

En los problemas que involucra la pregunta 4, se usa el principio de migración; algunas actividades del texto guía (Pool, 2012 pág. 86), se llevan al hábitat que ofrece el entorno dinámico de las tecnologías tipo CAS.

Se plantean 6 sistemas de ecuaciones con diferentes tipos de conjunto solución. Al igual que en los cursos tradicionales, se demanda de los estudiantes la tarea de escalar los SEL, a partir del uso de operaciones elementales, con la diferencia que, los estudiantes deben "traducir" las operaciones a matrices elementales y multiplicando por izquierda ambos lados de la igualdad $Ax = b$, para obtener el sistema equivalente $Ux = y$.

Se sugirió a los estudiantes enfocar su atención en las características de la matriz de coeficientes en su versión inicial (A) y final (U), para encontrar patrones que le permitan establecer condiciones para obtener los diferentes tipos de solución.

Tabla 24 Nuevas demandas al resolver un SEL.

Tabla 24. Nuevas demandas al resolver un SEL																					
Procesos realizados con mediación de software tipo CAS, Grupo A	Inferencias																				
Inicialmente se plantea el sistema de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$ $Ax = b$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 8 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 65 \\ 93 \end{pmatrix}$	El problema consiste en resolver un SEL 4x4, que aparece planteado, en el libro de texto, a través de sus ecuaciones. El primer proceso que realiza el grupo es expresarlo en la forma $Ax = b$.																				
Luego, se transcribe lo anterior en Matlab <pre>syms a b c d A=[1 1 1 1;1 2 3 4; 1 3 6 10;1 4 8 15] b1=[10;30;65;93] x=[a;b;c;d]</pre>	Definen en Matlab cada parte del sistema, usando la sintaxis y funciones apropiadas del software.																				
La primera operación elemental que se aplica a la matriz identidad es $R_2 + (-1)R_1 \rightarrow R_2$, y se obtiene la matriz elemental E_1 que se muestra a continuación: $E1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E1 = 4 \times 4$ <table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	Determinan las operaciones elementales a realizar, las representan en la forma $R_i + cR_j \rightarrow R_i$ y construyen la matriz elemental correspondiente. En general, en cada proceso se presenta una conversión bidireccional entre los lenguajes (AA) y (AE).				
1	0	0	0																		
-1	1	0	0																		
0	0	1	0																		
0	0	0	1																		
Con esta matriz elemental, se multiplica por izquierda a A y a b, pues $Ax = b$ entonces $E_1 \cdot A = E_1 \cdot b$. Y así el componente (2,1) de la matriz resultante ahora es 0, y el renglón 2 ya tiene elemento pivote. $E1A = E1 \cdot A$ $E1b1 = E1 \cdot b1$ $E1A = 4 \times 4$ <table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td><td>10</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td><td>8</td><td>15</td></tr></table> $E1b1 = 4 \times 1$ <table><tr><td>10</td></tr><tr><td>20</td></tr><tr><td>65</td></tr><tr><td>93</td></tr></table>	1	1	1	1	0	1	2	3	1	3	6	10	1	4	8	15	10	20	65	93	Realizan el producto entre la matriz elemental y la matriz de coeficientes, teniendo en cuenta la no conmutatividad de la operación y verifican la consecución de los ceros para escalar.
1	1	1	1																		
0	1	2	3																		
1	3	6	10																		
1	4	8	15																		
10																					
20																					
65																					
93																					
$E6E5E4E3E2E1A = 4 \times 4$ $E6E5E4E3E2E1b1 = 4 \times 1$ <table><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr></table> <table><tr><td>10</td></tr><tr><td>20</td></tr><tr><td>15</td></tr><tr><td>8</td></tr></table> Así, la matriz A está en forma escalonada por renglones, pues en cualquier columna que contenga un elemento pivote, todas las entradas	1	1	1	1	0	1	2	3	0	0	1	3	0	0	0	2	10	20	15	8	Usando la forma de razonamiento (AA) como soporte, presentan en lenguaje que corresponde a la forma de
1	1	1	1																		
0	1	2	3																		
0	0	1	3																		
0	0	0	2																		
10																					
20																					
15																					
8																					

bajo el elemento pivote son cero. Esta última matriz resultante corresponde a U, y las operaciones elementales realizadas sobre b van a dar origen a y, resultando $Ux = y$ $Ux = y$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$	razonamiento (AE) El sistema escalonado $Ux = y$.
--	---

A los procesos que se decantaron en la tabla 24, les sigue una serie de acciones de comprobación de resultados, con base en el uso de las distintas herramientas tipo CAS. En la tabla 25, se muestran las acciones de metacognición y algunas inferencias iniciales.

Tabla 25 Acciones de metacognición y algunas inferencias iniciales.

Tabla 25.	
Acciones de metacognición	Inferencias
Luego, se plantea lo anterior como un sistema de ecuaciones lineales. Por sustitución hacia atrás se resuelve dicho sistema: $\begin{aligned} a + b + c + d &= 10 \\ d &= 4 \\ b + 2c + 3d &= 20 & c = 15 - 3d = 3 \\ c + 3d &= 15 & b = 20 - 2c - 3d = 2 \\ 2d &= 8 & a = 10 - b - c - d = 1 \end{aligned}$	Para facilitar la transición de las actividades algorítmicas tradicionales de papel y lápiz a las tecnologías tipo CAS, se sugiere un proceso gradual que permita a los docentes y estudiantes adaptarse a estas herramientas. De esta manera, se podrán aprovechar los beneficios de las CAS, sin perder el rigor y la comprensión de los conceptos algorítmicos.
Por otro lado, en Matlab se puede comprobar este resultado: Solución a $Ux = y$ <pre>syms x1 x2 x3 x4 U=E6E5E4E3E2E1A y=E6E5E4E3E2E1b1 X=[x1;x2;x3;x4] [x1,x2,x3,x4]=solve(U*X==y)</pre> x1 = 1 x2 = 2 x3 = 3 x4 = 4	La tecnología digital crea nuevas posibilidades de expresión y comunicación matemática. Cada medio tecnológico tiene su propia sintaxis que determina cómo se construyen y se interpretan los mensajes matemáticos. Las tres formas de razonamiento de Sierpinska que hemos adoptado, Sintético Geométrico (SG), Analítico Aritmético (AA) y Analítico estructural (AE), se corresponden con diferentes lenguajes matemáticos que se relacionan entre sí. Dependiendo del contexto, el lenguaje de los medios tecnológicos puede ampliar y transformar los lenguajes originales y, por lo tanto, las formas de razonamiento.

Solución a $Ax = B$ <code>[a,b,c,d]=solve(A*x==b1)</code> a = 1 b = 2 c = 3 d = 4 ¡Ambas soluciones arrojadas son iguales a la hallada!	El uso de diferentes softwares les facilita a los estudiantes verificar sus resultados de manera exhaustiva, es decir; realizar una metacognición sólida, en este caso particular se comprueba que el proceso de escalar con matrices elementales es válido. El hecho de mostrar que el sistema $Ux = y$, que construyeron, y $Ax = b$ son equivalentes, es un salto de calidad que añade la satisfacción que se observa en la frase “¡Ambas soluciones arrojadas son iguales a la hallada!”.
--	--

A partir de los procesos realizados y los resultados obtenidos al resolver SEL, los estudiantes almacenan la información asociada a estos sistemas y a otros sistemas resueltos con interacción directa con el software elegido; la información que se organiza preferiblemente en tablas es: Matriz de coeficientes, Rango y Factorización LU.

A partir de la reflexión guiada por las preguntas sobre los datos clasificados, los estudiantes establecen criterios para determinar el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales (SEL). En la Tabla 26, se observa que los estudiantes deducen la mayoría de los criterios que, en los textos y cursos tradicionales, se presentan como principios técnicos para ayudar a los estudiantes a decidir el tipo de solución del SEL, sin que los estudiantes comprendan el significado de sus respuestas, incluso en los casos donde la respuesta es correcta.

Tabla 26 Criterios establecidos por los estudiantes para resolver un SEL e inferencias.

Tabla 26	
Criterios establecidos por el Grupo A	Inferencias
Si la matriz A tiene más variables que ecuaciones, solamente puede tener infinitas soluciones o ninguna. Esto se debe a que su máximo número de filas diferente de 0, es decir, su rank, siempre será menor que el número de variables, y por el teorema del rank: Teorema 2.2 El teorema del rank Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con n variables y m ecuaciones. Si el sistema es consistente, entonces número de variables libres = $n - \text{rank}(A)$ Esto significa que siempre habrá variables libres, por lo que podrán tomar cualquier valor, haciendo que tenga	Este texto explica por qué un sistema rectangular con menos ecuaciones que variables no puede tener solución única en ningún caso. Parten de la idea de que el rango es el número de filas distintas de cero en la forma escalonada, y se usa el razonamiento (AE) para justificar cada paso del proceso. También se aplica el razonamiento (AA) para verificar que el resultado es correcto y

infinitas soluciones. El sistema no tendrá solución si es inconsistente.	coherente con el concepto de rango y el tamaño de la matriz.
Si el determinante es diferente de 0, el sistema siempre va a tener una única solución. Esto se debe a que los vectores columna de la matriz serán linealmente independientes, lo que quiere decir que generan todo el espacio de la dimensión en la que se encuentren, por lo que cualquier vector en esa misma dimensión, será combinación lineal de los vectores de la matriz de coeficientes.	En la presentación de estos dos criterios, se hace uso de la forma (AE), que consiste en partir de una afirmación general y luego apoyarla con argumentos desde las formas de razonamiento (AA) y (SG). La forma como se comunica y se argumenta, estos criterios, es una manifestación de la forma de razonamiento (AE). A esta altura del curso, empieza, en forma esporádica, a ser la forma de razonamiento (AE) la que reorganiza y valida las formas de razonamiento restantes.
Si al escalonar la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, cada fila tiene pivote, el sistema es consistente para cualquier columna de términos independientes. Esto se debe a que los vectores de las columnas que tienen pivote servirán como base para generar el espacio columna que será igual al espacio de toda la dimensión en la que se encuentran los vectores, por lo que cualquier vector columna de términos independientes estará incluido en ese espacio y siempre habrá solución.	
Si alguno de los vectores columna de la matriz de coeficientes resulta de la combinación lineal de los otros vectores columna, se dice que los vectores son linealmente dependientes, entonces si el sistema es consistente, puede tener infinitas soluciones, si no es consistente, no tiene solución.	En la presentación de estos dos criterios, se usa la forma de razonamiento (SG); se extrapolan las evidencias logradas gracias a las tecnologías tipo SGD. Sin embargo, la afirmación “Puede” hace que los criterios no sean precisos y resulten erróneos. No involucrar simultáneamente las formas de razonamiento (SG) y (AA) se ha detectado, de manera recurrente, como la causa de imprecisiones y errores.
Si ninguno de los vectores columna de la matriz de coeficientes resulta de la combinación lineal de los otros vectores columna, se dice que los vectores son linealmente independientes, entonces si el sistema es consistente, puede tener única solución.	

Consideraciones Finales

Los estudiantes incorporan términos propios del algebra lineal a la elaboración de las respuestas a la solución de los problemas, incluyen lenguaje corriente, lenguaje algebraico y gráficos elaborados en GeoGebra. Asimismo, ilustran las respuestas con pantallazos de Khan

Academy, Matlab, GeoGebra y Applets construidos en GeoGebra. Todos estos elementos combinados, propician en los estudiantes una mayor fluidez en el lenguaje escrito y un mayor dominio expresivo.

La posibilidad de rotar un objeto en el espacio resulta ser una de las características clave de la vista gráfica 3D de GeoGebra, que permite introducir en forma precoz la noción de espacio columna en el caso de las matrices 3×3 . La viabilidad de visualizar el producto Ax en la vista CAS y en la vista Gráfica en forma simultánea, reafirma la autoconfianza de los estudiantes y les brinda elementos para coordinar y validar los procesos de tratamiento en la forma de razonamiento (AA), en el contexto geométrico de los vectores.

En general, en las actividades no se presentan las definiciones de los conceptos del álgebra lineal; por ejemplo, en el caso de la independencia lineal, se empieza por plantear problemas del tipo "¿el vector cero se puede generar de formas distintas a la trivial?" es decir, atacando el problema de no lograr construir contra ejemplos que muestren la no independencia lineal y en efecto demuestren la dependencia lineal.

En esta parte de la investigación, se introduce una variante, que consiste en cambiar los procesos de escalonamiento de matrices aplicando operaciones elementales con papel y lápiz, por procesos de escalonamiento con el uso de matrices elementales que las representan. Este descongestionamiento de la carga algorítmica trae consigo varias ganancias para el aprendizaje, las cuales serán comentadas en las conclusiones de esta investigación.

En la construcción, comunicación y argumentación de cada proceso, de la solución y comprobación final, los estudiantes mezclaron diferentes recursos (Conocimientos de base) y heurísticas que en el enfoque tradicional no se demandan, como:

- Transforman un SEL, determinado por sus ecuaciones, a su representación matricial, como también de forma recíproca.
- Determinan las operaciones elementales a realizar y las traducen del lenguaje (AA), al lenguaje (AE) de las matrices elementales.

La comunicación y la argumentación, que acompaña cada proceso, incorpora de manera pertinente, coherente y formal, conceptos del álgebra lineal; en este caso particular: Rango, la noción de nulidad (número de variables libres), determinante y su relación con la factorización LU.

Un propósito general de la hoja de trabajo fue analizar las relaciones entre los sistemas con el mismo tipo de conjunto solución y así determinar las condiciones para que un sistema tenga una, infinitas o ninguna solución. Para lograrlo, fue esencial usar las tecnologías tipo CAS, porque permitieron resolver una gran variedad de SEL, siguiendo nuevas y tradicionales demandas, de forma rápida y eficiente. También se aplicaron las directrices del DI para introducir nuevos conceptos y procesos del álgebra lineal, lo que ayudó a formular hipótesis y contraejemplos. Asimismo, se utilizaron las ventajas de otros recursos digitales, como las vistas gráficas de GeoGebra, libros digitales, blogs y diferentes sitios web de información, los cuales facilitaron el empleo de heurísticas como el uso de tablas y la visualización, así como la interacción sincrónica y asincrónica de los diferentes participantes lo que fomentó el debate entre pares y la retroalimentación de parte de los orientadores.

4.3.3. Hoja de Trabajo: Aplicaciones del Álgebra Lineal

El álgebra lineal se ha establecido como una herramienta esencial en las ingenierías y la ciencia en general, brindando la capacidad de modelar y resolver problemas complejos de manera eficiente (Álvarez-Macea & Costa, 2019). Con esta actividad, se ha buscado ilustrar cómo el álgebra lineal puede ayudar a los ingenieros a plantear y comunicar soluciones innovadoras a problemas reales. A través de una hoja de trabajo diseñada específicamente para este propósito, se ha explorado y demostrado las diversas aplicaciones sólidas de esta disciplina, contribuyendo así al fortalecimiento de las competencias comunicativas de los estudiantes en el ámbito científico.

Explorando las aplicaciones del álgebra lineal: Un enfoque de resolución de problemas y escritura científica. Para abordar la actividad, se implementó un enfoque metodológico basado en la resolución de problemas en equipo y la escritura científica. Este proceso tuvo lugar durante las últimas 11 semanas de un semestre académico de 16 semanas de duración. En ese período, cada equipo seleccionó un tema relacionado con las aplicaciones del álgebra lineal. A partir de la semana 5, los grupos buscaron información en bases de datos científicas y la sintetizaron en un

formato de artículo científico, siguiendo la estructura IMRAD (Introducción, Metodología, Resultados y Discusión).

En la semana 16, los estudiantes presentaron su trabajo de manera oral y escrita ante el resto de la clase. Para ayudarlos en el proceso, se proporcionó a los estudiantes una hoja de trabajo con sugerencias y pautas para cada etapa del proyecto (consultar [anexo 8](#)).

El objetivo principal de esta actividad fue que los estudiantes descubrieran las diversas y sólidas aplicaciones del álgebra lineal en los distintos planes de ingeniería que estaban cursando. Además, se buscó fomentar el desarrollo de habilidades comunicativas de naturaleza científica. Los estudiantes aprendieron a utilizar bases de datos para encontrar información relevante, plantear nuevos problemas y comunicarlos de manera adecuada tanto por escrito como de forma oral, empleando las normas de las comunicaciones científicas como medio de expresión.

Objetivos

Cada actividad del DI, que precedió la actividad central de esta hoja de trabajo, estaba orientada a ayudar a los estudiantes a construir sus conocimientos del álgebra lineal, con la incorporación tangible de las tecnologías digitales a las estructuras de construcción de conocimiento colectivo e individual, con la intención de contribuir a la construcción de las competencias demandadas para los profesionales en la era digital. Para el caso particular de esta hoja de trabajo, los objetivos principales fueron:

- Reconocer las diversas aplicaciones del álgebra lineal en las ingenierías y la ciencia en general.
- Fomentar las competencias de comunicar y argumentar a través de documentos de carácter científico.
- Analizar el uso de las tecnologías digitales en la resolución de problemas de aplicación del álgebra lineal.

Descripción de la Hoja de Trabajo: Proyecto final de aplicaciones del álgebra lineal

El álgebra lineal es una herramienta matemática poderosa que se aplica en muchos campos de la ingeniería, como la teoría de control, el procesamiento de señales, el análisis de imágenes, la optimización, el aprendizaje automático y la robótica. Por ejemplo, el álgebra lineal permite

representar y manipular señales e imágenes como vectores y matrices, lo que facilita el desarrollo de algoritmos para mejorar, comprimir y filtrar la información. En resumen, el álgebra lineal tiene muchas aplicaciones en ingeniería y es fundamental para resolver problemas reales en entornos digitales. (Boyd y Vandenberghe, 2018; Golub, 2013; Singh, Tuli y Mantri, 2021; Strang, 2006a).

En el campo de la educación matemática, la enseñanza a partir de la resolución de problemas de la vida real o a través de aplicaciones reales ha sido una de las preocupaciones más esquivas para profesores e investigadores, en cuanto que, aunque se demanda y se aborda no se logran soluciones satisfactorias. Algunos estudios (Benítez Mojica, 2006; El Ouazizi & Akharraz, 2019; Jeschke, Wilke, Kato, Pfeiffer, & Zorn, 2008; Singh et al., 2021) reportan que cuando la enseñanza de las matemáticas se da en entornos relevantes y significativos, es más probable que los estudiantes se involucren con el tema y en consecuencia obtengan una comprensión robusta de los conceptos involucrados.

Pero también, se advierte que la eficacia de este enfoque podría depender de varios factores: La calidad del diseño de las tareas o actividades, la profundidad que se pueda alcanzar y el tipo de orientación que se ofrece a los estudiantes a lo largo del desarrollo de este tipo de actividades. También, Hernandez-Martinez (2020), añade que aún estudiantes que llegan con un buen capital de recursos matemáticos, logrado en un medio ajeno a la resolución de problemas en contexto real, presentan estancamientos o retrocesos gracias a las creencias adquiridas sobre las matemáticas.

El uso predominante y coordinado de las tecnologías tipo CAS y DGS en los diseños y soluciones de las actividades que conforman el DI, lograron un ambiente de aprendizaje relevante y significativo para los estudiantes. Por otro lado, el papel de las aplicaciones del álgebra lineal no fue para introducir o para que a través de ellas se aceptaran y comprendieran los conceptos del álgebra lineal, sino para que se valorara la potencialidad de las competencias en resolución de problemas que se obtiene a partir de un curso de álgebra lineal con esta propuesta. En efecto, esta hoja de trabajo tiene como propósito orientar a los estudiantes a que reconozcan las ideas estructurales del álgebra lineal en las aplicaciones en general y a que se acerquen a las aplicaciones de su interés en la ingeniería y las ciencias.

Durante las primeras 5 semanas del semestre, se pidió a los estudiantes explorar y comunicar las distintas aplicaciones del álgebra lineal a través de sitios web como libros, blogs y wikis. Luego, se pasó a la etapa de planeación y ejecución, en la cual se acordó un cronograma de actividades que incluía la revisión bibliográfica y el planteamiento del problema a abordar, con una o varias metas a alcanzar al final del trabajo.

En esta etapa, se definió qué tipo de trabajo se realizaría, ya sea profundizando en el tema en general, enfocándose en una línea en particular de este, o planteando un problema particular del tema escogido. Se estableció un cronograma para llegar a la semana 16, momento en el cual se presentarían los resultados del trabajo realizado.

Entre los entregables que se debían presentar, se encuentran actas de las reuniones del grupo, un documento final de máximo 10 páginas con resumen, introducción, antecedentes, objetivos, desarrollo, conclusiones y bibliografía, y una exposición vía zoom de entre 12 y 15 minutos para mostrar el manejo del tema y el uso del álgebra lineal.

Análisis de los Resultados de la Hoja de Trabajo: Proyecto Final de Aplicaciones del Álgebra Lineal.

En la tabla 27, se presentan algunos apartes del trabajo de los estudiantes (ver [anexo 9](#)) y las respectivas inferencias del investigador, con base en el informe de la hoja de trabajo “Aplicaciones del álgebra lineal”.

Tabla 27 Análisis de expresión de genes a través del álgebra lineal. Parte 1.

Tabla 27. Análisis de expresión de genes a través del álgebra lineal. Parte 1.	
Apartes del informe final	Inferencias
En el presente trabajo se exponen los diferentes elementos del álgebra lineal empleados en el artículo “Vector algebra in the analysis of genome-	En este párrafo, que hace parte del resumen, informan que su trabajo es una especie de comentario crítico extenso; pues muestra la relevancia tanto del tema, como del álgebra lineal

<i>wide expression data</i>".	en su estructura, a partir de las ideas principales del artículo (Kuruvilla, Park, & Schreiber, 2002). En este trabajo, se presenta una aplicación en contexto real científico.
De esta manera, el álgebra lineal brinda algunas de las herramientas necesarias para construir algoritmos de Clustering, que permitan agrupar genes o experimentos según su similitud y correlación para así analizar los perfiles de expresión genética.	En la introducción, se plantean afirmaciones que informan de manera concisa los alcances de la aplicación elegida. resaltan inicialmente la triada que se desarrolla a lo largo del artículo: Análisis de genes, microarreglos de genes y el álgebra lineal. Además, se mencionan los conceptos que se ponen en juego.
Además, este artículo trata el problema mediante temas del álgebra lineal que se han visto en clase, por lo que se tiene un interés y conocimiento previo, asimismo, tiene conceptos que se desconocen en un principio, como Singular Value Decomposition, por lo que se necesitó investigar sobre esto. Adicionalmente, se encontraron otros artículos relacionados con el tema, los cuales fueron analizados por los integrantes del equipo.	En los antecedentes, interpretaron el problema que se planteaba en la hoja de trabajo. Eligen este tema porque lo consideran que une los intereses de los distintos planes de ingeniería que adelantan los cuatro integrantes del equipo. Explican que el tema se escoge después de haber revisado artículos que reportan aplicaciones en la ingeniería donde el álgebra lineal juega un papel importante. Finalmente, se plantean el problema de entender la descomposición en valores singulares de una matriz y su papel dentro de la aplicación.
Explicar cómo el álgebra lineal se utiliza para lograr la descripción, clasificación o caracterización de transcripción de genes en experimentos de microarreglos. Describir cómo el ángulo entre vectores, la magnitud de vectores y la descomposición en valores singular permiten establecer relaciones entre genes y experimentos para alcanzar un mayor entendimiento de los organismos. Emplear las herramientas y el conocimiento aprendidos en el curso para afrontar el desarrollo del problema de manera colaborativa, analítica y eficiente.	Los objetivos se presentan como el plan para solucionar el problema central planteado en la hoja de trabajo. Durante el curso, se trataron conceptos como el ángulo entre vectores y su magnitud, y se enfatizó en el uso de las formas de razonamiento (SG) y (AA), lo que llevó al surgimiento de la forma de razonamiento (AE), como se ilustra en un video accesible a través de un código QR en la figura 13. Aunque la descomposición en valores singulares no forma parte del curso introductorio de álgebra lineal, los estudiantes lograron abordar el tema y explicar cómo obtenerlo, lo cual se evidencia en otro código QR presente en la figura 14.

En el curso, se aborda el concepto de ángulo entre vectores mediante una actividad tipo laboratorio. Para visualizar la actividad, se puede consultar la figura 16 de la sección 5.1, donde se muestra la imagen del applet utilizado y una breve descripción de los logros de la actividad.

Figura 13 Código QR del recurso digital que muestra la transferencia del concepto de ángulo en el contexto formal.



En el recurso digital, que se puede descargar mediante el código QR proporcionado en la figura 13, se presenta parte del proceso para resolver el problema de encontrar el ángulo entre dos planos. La estudiante EA3 (Estudiante 3 del equipo A), involucra el ángulo entre los vectores normales como parte de la solución.

La resolución del problema relacionado con los planos implica una transferencia de contexto desde el ángulo entre vectores hasta el ángulo entre planos. El recurso digital, que se puede descargar mediante el código QR proporcionado en la figura 14, presenta parte de la exposición de la estudiante EA1 (Estudiante #1 del equipo A), se observa cómo utiliza el concepto de valores y vectores propios para explicar la obtención de la descomposición en valores singulares de una matriz $m \times n$. Esta transferencia de ideas demuestra su capacidad para aplicar los conceptos y habilidades aprendidas a nuevos contextos. Además, la estudiante logra transferir las propiedades de la descomposición SVD al contexto científico real de los microarreglos genéticos. Esta conexión entre teoría y aplicación práctica resalta la relevancia y utilidad de los conocimientos y habilidades adquiridas. Es importante destacar la riqueza del lenguaje utilizado por la estudiante EA1, así como la fluidez y pertinencia de cada elemento teórico que integra en su discurso. Esto evidencia la riqueza del lenguaje asociado a la forma de razonamiento AE que utiliza de forma coherente, lo cual enriquece su argumentación y demuestra un sólido dominio de los conceptos relacionados.

figura 14 Código QR del recurso digital que muestra la transferencia de la descomposición SVD al contexto científico real.



Tabla 28 Segunda parte del análisis de la producción de los estudiantes del equipo A.

Tabla 28. Análisis de expresión de genes a través del álgebra lineal. Parte 2.	
Apartes del informe final	Inferencias
Se examinó y depuró la bibliografía, y se discutió en profundidad el artículo principal “ <i>Vector algebra in the analysis of genome-wide expression data</i> ”, abordando las dudas que se generaron y compartiendo ideas sobre los posibles enfoques que se le pueden dar al proyecto final.	La metodología utilizada en la hoja de trabajo para la escritura del informe (artículo) describe un enfoque documental, que no implica una revisión exhaustiva de la literatura, sino una investigación y análisis crítico de documentos relevantes en la temática abordada. Se enfatiza en la importancia de una selección rigurosa y objetiva de las fuentes documentales, así como en la validación y contrastación de la información obtenida. Además, se relatan las dinámicas del grupo, incluyendo las problemáticas que se presentaron durante el proceso de trabajo y la forma en que fueron abordadas y solucionadas. Este relato permite comprender el trabajo en equipo y la colaboración entre los miembros para alcanzar los objetivos propuestos.
[...] después de analizar varios experimentos, si el ángulo es menor a 60° entonces estos vectores están correlacionados (r cercano a 1). Por ejemplo, si se analizan vectores experimento, es decir, las columnas de la matriz, el ángulo entre estos será una medida de qué tan similar es la respuesta de los genes cuando se someten a cada una de las pruebas.	En el cuerpo principal del informe, se logra resolver el problema planteado en la hoja de trabajo, en tanto que se dan los siguientes resultados. En primer lugar, se muestra una aplicación real de naturaleza científica y se destaca el papel de los conceptos abordados en el curso; asimismo, se reconoce la relación entre el coeficiente de variación de Pearson r y el ángulo entre vectores, y se explica la idea de costo computacional, lo cual lleva a preferir el ángulo entre vectores para determinar la correlación entre vectores de expresión. Además, se expresa la correlación o no entre los vectores en términos de la nueva escala, y se interpretan algunos resultados
Para caracterizarlas, se buscaron otros vectores experimento que tuvieron un ángulo pequeño con respecto al vector de la Rapamicina. Finalmente, se encontró que había una correlación con los vectores correspondientes a ciertas pruebas que consistían en retirar el carbono y nitrógeno del medio, por lo	

que se infirió que las proteínas Tor regulan las respuestas a estos nutrientes en el medio que se encuentren. De esta manera, se muestra cómo los ángulos entre vectores pueden ayudar a identificar las funciones de proteínas que no han sido	entre vectores en el contexto de la biología. En segundo lugar, se destaca el interés del grupo por conceptos del álgebra lineal que, aunque no se abordan en el curso, si poseen los recursos, heurísticas y compromiso para investigarlos. Además, se ocupan de describir el papel de este concepto en la aplicación.
Esto muestra la redundancia biológica en los organismos, es decir, la capacidad que tienen diferentes genes de producir proteínas que cumplan la misma función, y así, compensar la ausencia del gen que se eliminó en el experimento.	
En algunos casos no es suficiente encontrar el ángulo entre vectores, sino que es necesario tener en cuenta la razón entre las magnitudes de estos. Lo anterior se evidencia en el artículo cuando se expone un experimento en donde se elimina un gen que codifica una proteína con una función específica. Se esperaba que este vector experimento fuera ortogonal a otros vectores que representan esa misma función, no obstante, el ángulo se mantuvo, pero la magnitud se redujo, por lo que la fuerza de expresión de estos genes disminuyó, pero siguió teniendo la misma función.	En el siguiente párrafo hay un caso de metacognición, Aunque no es sobre su propio proceso de resolución de problemas se reconoce como una acción importante, En efecto, puede considerarse como una metacognición “heredada”.

Consideraciones finales.

Esta hoja de trabajo propone un problema matemático en contexto hipotético (ver. 2.2.3.); los equipos de trabajo debían reportar de manera escrita y oral un pasaje del álgebra lineal aplicada; el problema consistía en proponer un problema (proyecto) y resolverlo (artículo). Las etapas que propone Pólya fueron descritas en la columna derecha de las tablas 27 y 28. En la introducción del informe, los estudiantes muestran que han entendido la consigna del problema y se proponen un plan

A lo largo de la aplicación del DI (curso), se fomentó la comunicación escrita a través de los informes de cada una de las hojas de trabajo, pero en el desarrollo del informe de esta actividad final (Artículo), de forma especial, se estimuló la comunicación escrita para acercarla al carácter científico. Lo que se puede inferir de las siguientes características:

- Los estudiantes consultaron bases de datos científicas (ej. Scopus, , Springer, Google Académico, Dialnet, Scielo, Redalyc, etc.) .
- Realizaron un análisis de diferentes artículos y filtraron la información para tener en cuenta.
- En el informe, los estudiantes usan las formas de razonamiento del algebra lineal a través de un discurso mixto, es decir; enriquecido gracias al acervo discursivo del campo donde se da la aplicación, para enlazar las ideas con los argumentos en forma coherente y cohesionada.

Los estudiantes sustentaron el trabajo realizado en el artículo por medio de una exposición oral. A partir de estas sesiones de exposición oral, se puede inferir que:

- Los estudiantes comunicaron y argumentaron sus ideas matemáticas con mayor fluidez. Esto es un resultado combinado de la resolución de problemas, la lectura, la comunicación oral y escrita que se fomentaba permanentemente, la interacción entre los estudiantes, y entre los estudiantes y el profesor, todas estas acciones con el uso coordinado de diversas tecnologías digitales. En su discurso, cada vez más claro, los estudiantes lograron incorporar términos, conceptos, propiedades del álgebra lineal y de la ingeniería.
- En las sesiones de exposición fue notoria la buena disposición de los estudiantes por este tipo de actividades, los hicieron explícito en las exposiciones. La actividad despertó interés en el grupo de estudiantes por el efecto combinado de varias variables: (i) se abordaron problemas propios de la ingeniería, este hecho genera un principio de afinidad y familiaridad con el área de formación de los estudiantes. (ii) Asimismo, los estudiantes pudieron utilizar las definiciones, teoremas y procedimientos discutidos en las hojas de trabajo previas, este hecho da un sentido de congruencia y pertinencia al curso. (iii) Los estudiantes lograron incorporar la tecnología computacional en la resolución de problemas de aplicación, este hecho le aporta un ingrediente adicional a la motivación, pues esta generación está rodeada de tecnología en su vida cotidiana y en las experiencias favorables para el aprendizaje que tuvieron a lo largo del curso. Incorporarla en educación matemática.

De esta manera, se incorporó a los estudiantes a la comunidad de práctica del álgebra lineal disciplinar y aplicada; este trabajo se instala en la noción de que los procesos de producción de

informes, exposiciones y comunicaciones académicas formales, son formas excepcionales de construcción de conocimiento que otorgan pertenencia a una comunidad de práctica con su cultura discursiva propia (Carlino, 2005; Schoenfeld, 2016).

Capítulo 5. Conclusiones

5.1. Características de las Actividades del Diseño de Intervención que favorecen la fluidez entre las formas de razonamiento.

En esta sección, se da respuesta a la pregunta: ¿Cuáles son las características del *Diseño de Intervención* que favorecen fluidez entre las diferentes formas de razonamiento?

Las características esenciales de las actividades que conforman cada una de las 11 Hojas de trabajo que fueron diseñadas para el DI, se agrupan en cuatro categorías no excluyentes, que se clasificarán según su carácter principal como: Matemático, Didáctico, Histórico y tecnológico.

Matemático

Se abordan los principales conceptos del álgebra lineal con un énfasis especial que resulta de las demandas de formación para ingenieros y las requeridas para esta investigación:

- **Vectores:** En el plano ($\mathbb{R}^2$), En el espacio ($\mathbb{R}^3$) y en ($\mathbb{R}^n$) con su estructura algebraica con la suma y producto por un escalar.
- **Sistemas de ecuaciones lineales:** Naturaleza de la solución, uso de matrices aumentadas como representación.
- **Matrices:** Algunas clasificaciones, operaciones con matrices; entre otros temas introductorios a las matrices como objetos matemáticos.
- **Factorización de Matrices:** La factorización LU y su relación con el algoritmo de eliminación de Gauss, El método de mínimos cuadrados y la factorización QR , Los valores y vectores propios de una matriz y su factorización PDP^{-1} .

Los temas involucrados en las hojas de trabajo no se desarrollaron exactamente en el orden que se presentaron en la lista anterior; sin embargo, sí dan una idea de la trayectoria sugerida en el DI. Algunos temas no mencionados en la lista anterior, como la factorización con base en los valores singulares de la matriz y las transformaciones lineales, surgieron en las actividades diseñadas por los estudiantes.

El principio de inducción didáctica, en el contexto del álgebra lineal, se refiere a la introducción de las definiciones de los conceptos partiendo de su naturaleza geométrica, con el objetivo de promover una constante conversación entre dicha naturaleza geométrica y su correspondiente naturaleza analítica. Este enfoque permitió lograr un aprendizaje significativo.

La manifestación del principio de inducción didáctica se observa en las conversiones entre las formas de razonamiento y en los tratamientos de la forma de razonamiento analítico aritmético que se relacionan con la forma de razonamiento sintético geométrica. Estas conversiones pueden ocurrir en ambas direcciones lo que facilita la fluidez necesaria entre las distintas formas de razonamiento.

Además, el principio de inducción didáctica favorece la aparición natural de la forma de razonamiento analítico estructural de manera consistente; esto implica que dicha forma de razonamiento puede retroceder hacia las formas de razonamiento que le proporcionan su base, estableciendo así una conexión sólida y coherente entre las diferentes formas de razonamiento presentes en el proceso de aprendizaje del álgebra lineal.

Didácticos.

Contexto del problema. Los problemas se plantearon entre objetos relativos al álgebra lineal; es decir, en contexto formal (Benítez Mojica, 2006; M. Santos-Trigo, Barrera-Mora, & Camacho-Machín, 2021). Los problemas planteados por los estudiantes en el proyecto final aplicado, que se construyeron a lo largo del semestre y fueron transversales al desarrollo del semestre, se plantearon en contexto real, hipotético y formal.

En la solución de los problemas se suscitan procesos centrales del pensamiento matemático con medios; particularizar, generalizar, conjeturar, proponer nuevos problemas y nuevas formas de resolverlos.

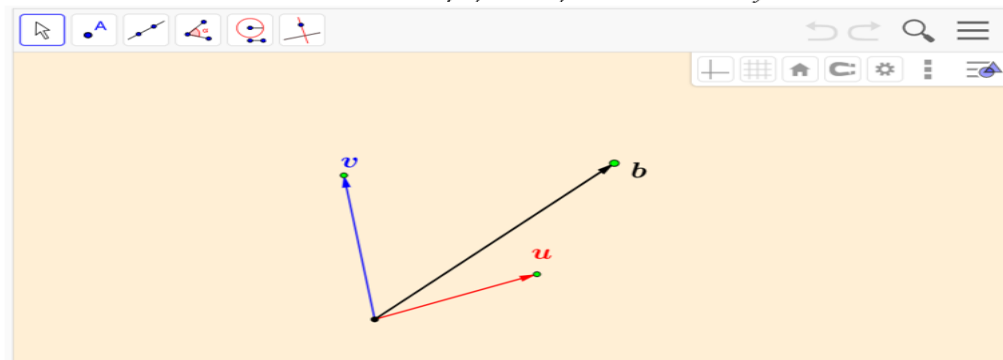
Promoviendo el pensamiento matemático en el álgebra lineal: Un enfoque basado en formas de razonamiento y lenguajes de comunicación. Los problemas involucrados en las distintas hojas de trabajo promueven los procesos centrales de pensamiento matemático con el uso de las formas de razonamiento propuestas por Sierpinska (2000): 1) Sintético-Geométrico (SG). 2) Analítico-Aritmético (AA) y 3) Analítico-Estructural (AE). Cada forma de razonamiento está asociada a los tres “lenguajes” que cohabitan en la comunicación y argumentación de los procesos de solución de problemas en el álgebra lineal. Si se resuelve un problema y, en especial si se comunica o argumenta usando marcadamente términos como plano, recta, hiperplano, vector geométrico y relaciones entre estos como paralelismo, perpendicularidad, corte, entre otros, se entiende que la forma de razonamiento que está usando es (SG). Si resolver un problema del álgebra lineal usa la aritmética entre vectores, ecuaciones o matrices y al comunicar o argumentar sus ideas se

basan en las operaciones realizadas, se entiende que está en la forma de razonamiento (AA). Si para resolver un problema cita Axiomas, propiedades, teoremas, se entiende que está empleando la forma de razonamiento (AE).

La figura 15 muestra la imagen de un problema en contexto formal planteado en la interfaz gráfica 2D de GeoGebra. Los applets en este software permiten al diseñador limitar el número de herramientas que puede usar el estudiante; en este caso, para orientarlo hacia las herramientas que podrían serle útiles y evitar que se sienta abrumado ante la gran cantidad que ofrece por defecto esta interfaz. Tal como está planteado el problema, conduce al estudiante a evocar o a construir la representación geométrica del concepto de combinación lineal. Se prevé que en el proceso de solución se realicen construcciones auxiliares que permitan medir y comparar para finalmente expresar la solución en el lenguaje propio de la forma de razonamiento Analítico-Aritmético como se ha solicitado. En el literal c que se puede observar en parte inferior de la figura 15, se propone un problema inverso, es decir; se plantea el vector combinación lineal en el lenguaje correspondiente a la forma de razonamiento Analítico-Aritmético, para resolver este problema se debe traducir el problema al contexto Sintético-Geométrico para realizar las acciones esperadas para resolver el problema usando las herramientas que ofrece el applet GeoGebra.

Figura 15: Enunciado e imagen del applet GeoGebra del problema 3. Primera Jornada de Resolución de Problemas (Ver [Anexo 1](#). Página 12)

3. Dado el siguiente Applet GeoGebra. Estime las coordenadas (x, y) , para expresar el vector b como combinación lineal de los vectores u y v , esto es; en la forma $xu + yv = b$.



- Para los vectores que aparecen por defecto.
- Arrastre los vectores u y v de tal forma que, para la combinación lineal se necesite usar un escalar negativo.
- Arrastre sólo el vector b de tal forma que: $2u - v = b$

Tecnológicos

Uso coordinado. Un requerimiento en las actividades, explícito o no, es el uso coordinado de distintas tecnologías digitales tipo SGD y CAS. Para la publicación, presentación, disertación y desarrollo en general de las hojas de trabajo, además se emplearon otras herramientas digitales tipo CAS como Matlab®, Octave y Mathematica®, tipo LMS (Learning Management System) como Moodle, Google Classroom y herramientas tipo plataforma en línea que permiten reuniones sincrónicas como Zoom y Meet. Los estudiantes reportaron haber utilizado repositorios de tutoriales en línea como YouTube y Khan Academy y herramientas de tipo enciclopédico como Wikipedia. (Drijvers et al., 2019; M. Santos-Trigo, Moreno-Armella, & Camacho-Machín, 2016)

Los estudiantes usaron GeoGebra en la gran mayoría de los procesos de resolución de problemas; se privilegió su uso gracias a su interfaz que permite que el estudiante presencie la transformación simultánea del lenguaje geométrico al algebraico. El “arrastre” es el fenómeno de carácter cibernético que más potencial ofrece GeoGebra a la hora de pensar en el diseño de actividades que estimulen la fluidez entre las distintas formas de razonamiento. Se enlista a continuación las propiedades del software GeoGebra que se reportan en la literatura académica revisada:

- Construir de manera dinámica representaciones geométricas y algebraicas de un problema.
- Medir parámetros o atributos de objetos claves o auxiliares en un problema.
- Verificar y descubrir relaciones matemáticas entre objetos involucrados en un problema.
- Diseñar tareas en un entorno interactivo enriquecedor de expresiones para profesores y alumnos.
- Buscar diferentes métodos de solución a través de los cuales es frecuente que emerjan conjeturas y el mismo medio facilita la producción de argumentos que la respaldan o la desechan, es decir, la misma sintaxis del ambiente geométrico ayuda a desarrollar un lenguaje matemático adecuado para comunicar y argumentar. En consecuencia, los alumnos no solo encuentran múltiples opciones para realizar exploraciones dinámicas, sino que mejoran sus formas de comunicar y justificar sus conjeturas (Santos-Trigo, 2019).

Principio de Experimentación. Según Schoenfeld (2016), las matemáticas en su construcción se asemejan a las ciencias naturales. En este sentido, las actividades tipo laboratorio que se diseñaron para el DI de esta investigación, promovieron las acciones típicas de un laboratorio; estas fueron: observación, diseño experimental, Instrumentalización, análisis de datos, medir, comparar, comunicar y argumentar.

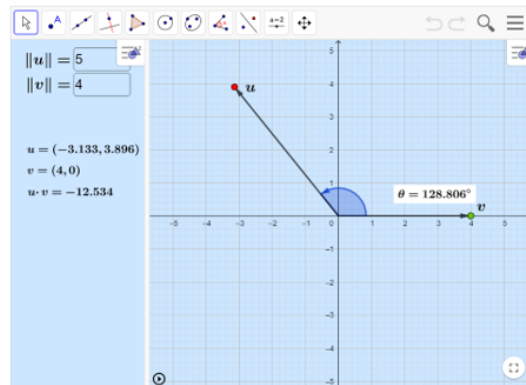
Ejemplo. La lección 5: "Enunciando un teorema" (Ver Ver [Anexo 1](#), págs. 16 y 17) es una nueva actividad tipo laboratorio que tiene por objetivo principal que los estudiantes enuncien el teorema de Schwarz; sobre el valor máximo del producto punto entre vectores de igual magnitud.

Figura 16 Enunciado e imagen del applet GeoGebra del problema 3. Primera Jornada de Resolución de Problemas (Ver [Anexo 1](#). Página 16)

Lección 5: Enunciando un Teorema

En el siguiente applet, se dan dos vectores con longitud constante (distinta de cero) usted puede cambiar las coordenadas del vector u arrastrando el punto rojo, obteniendo "todos" los vectores u del plano con la misma longitud, con el punto verde puede hacer lo propio con el vector v . Dando clic en las casillas de entrada, se puede modificar la norma de los vectores.

[Applet](#)



- Por defecto en el applet se tiene $\|u\| = 5$ y $\|v\| = 4$; para este caso, haciendo girar el punto final del vector u alrededor del origen, encuentre cuál es el menor valor del producto punto $u \cdot v$ y cuál el mayor valor. Haga lo mismo para otras longitudes de los vectores u y v . Con los valores obtenidos, llene la siguiente tabla.

A partir de la experimentación, el almacenamiento estratégico de la información y la orientación de la observación, los estudiantes lograron generar múltiples conjeturas incluyendo unas muy cercanas al teorema de Schwarz. Además, lograron definir el ángulo entre dos vectores, el intervalo donde se define, la relación entre el ángulo entre los vectores y signo del producto punto entre los vectores.

El principio de migración. Se refiere a la transición de actividades tradicionalmente realizadas con papel y lápiz hacia tecnologías digitales más avanzadas, como los sistemas algebraicos computacionales CAS y los softwares de geometría dinámica DGS. En pocas palabras, consiste en llevar problemas clásicos, que se encuentran en un entorno estático, hacia un entorno dinámico donde amplían su potencial (Moreno Armella & Manuel Santos-Trigo, 2001).

Incluso los ejercicios de rutina pueden convertirse en parte de una actividad tipo laboratorio, como se muestra en el ejemplo anterior. En este sentido, Manuel Santos trigo, en (Liljedahl et al., 2016), afirma que, con un enfoque inquisitivo, tareas consideradas rutinarias pueden dar lugar a interesantes actividades matemáticas. En concreto, para este tipo de problemas, Santos-Trigo propone la heurística de ampliar las condiciones iniciales, de modo que se transforme en actividades desafiantes.

El principio de migración implica llevar problemas y ejercicios de rutina desde su entorno original, el estático, hacia un entorno dinámico. Esto presenta nuevos desafíos y demandas para los estudiantes. A partir del análisis de estas actividades en su nuevo entorno, se han identificado nuevas demandas para los estudiantes al resolver problemas, comunicarse y argumentar con medios digitales.

Nuevas Demandas. En el diseño de las actividades en general se atendió el llamado, de Santos-Trigo (2019), a investigar qué tareas rutinarias que actualmente se demandan de los estudiantes se convertirán en una acción de tipo cibernética; esto es, estudiantes-tecnología digital, tal como se describe en (Villarreal & Borba, 2010). El uso coordinado de tecnologías trajo como consecuencia la optimización de los procesos que demandan del estudiante largas jornadas de realización de operaciones rutinarias que no dejan ningún aprendizaje nuevo. Pero también, nuevas demandas: (i) Asociadas a variantes en el proceso de resolución de problemas del álgebra lineal. (ii) Asociadas a las actividades tipo laboratorio y (iii) Asociadas a los procesos de interacción con los medios digitales. Estas tres fuentes de demandas serán descritas en la respuesta a la pregunta de investigación número dos.

Histórico.

Dorier (2000) y Monroy Guzmán (2011) revelan obstáculos epistemológicos en la evolución del álgebra lineal, divididos en tres categorías: el paradigma de la solución, el referente geométrico y el principio de permanencia.

El paradigma de la solución se centra en los algoritmos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, llevando a creencias limitantes sobre la existencia de soluciones únicas. Monroy Guzmán (2011) propone un enfoque que destaque la relación entre las ecuaciones y la naturaleza de la solución, permitiendo la emergencia natural de conceptos clave como la combinación lineal y la dependencia e independencia lineal.

El referente geométrico ha obstaculizado la comprensión en el álgebra lineal, ya que el enfoque analítico ha sido criticado por perder el control geométrico y ocultar la realidad. La coincidencia de términos geométricos y algebraicos en ecuaciones ha planteado desafíos, y matemáticos como Al-Khwarizmi y Cardano han tenido dificultades para aceptar los números negativos debido a su enfoque geométrico.

El principio de permanencia se relaciona con la conmutatividad, que ha sido un obstáculo arraigado en la tradición matemática. Aunque Argand y Wessel definieron el producto cruz entre vectores tridimensionales, su falta de conmutatividad dificultó su aceptación en su momento, retrasando así el desarrollo de conceptos como el producto vectorial y el producto de matrices.

En el análisis de Monroy Guzmán, se destaca cómo Euler y Grassmann tuvieron perspectivas innovadoras. Euler se acercó a conceptos que serían consolidados por la comunidad matemática décadas después, mientras que Grassmann logró anticiparse en la definición de espacio vectorial de dimensión finita rompiendo con la tradición de la conmutatividad en las operaciones matemáticas.

5.2. Nuevas demandas en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales.

En esta sección, se da respuesta a la pregunta ¿Cuáles son las nuevas demandas en la resolución de problemas del álgebra lineal con medios digitales (DGS y CAS)?

A partir de las evidencias empíricas de la presente investigación, se encontraron las siguientes nuevas demandas en la resolución de problemas de álgebra lineal con medios digitales:

1. Nuevas demandas asociadas a variantes en el proceso de resolución de problemas del álgebra lineal. La resolución de problemas con lápiz y papel demanda de unos recursos y heurísticas; al usar tecnologías digitales en el proceso de resolución, estas dos dimensiones se pueden transformar de manera ostensible.

Diferentes tipos de problemas en los textos de álgebra lineal, que también se abordan en la propuesta del DI, desembocan en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Las actividades iniciales del DI, donde se propone la solución de un sistema de ecuaciones lineales, se realizaron a través del algoritmo de Eliminación Gaussiana usando el producto de matrices elementales.

Tabla 29 Comparativo de las demandas tradicionales con las que se emplean en la actividad correspondiente del DI.

Tabla 29: Comparación de Demandas Solución de un Sistema de ecuaciones lineales		
Entorno estático (Papel y Lápiz)	Entorno Dinámico (DGS - CAS)	Inferencias
Construye la Matriz aumentada del sistema $(A b)$	Construye el vector A y el vector b	Las demandas, aunque son similares, en los ambientes dinámicos demanda algo de familiaridad con la interfaz del programa escogido.
Construye la operación elemental tipo $R_i \rightarrow R_i + cR_j$	Construye la operación elemental tipo $R_i \rightarrow R_i + cR_j$	En general ambas operaciones se realizan en el ambiente estático.
Realiza la operación elemental indicada	Construye la matriz elemental E correspondiente y realiza el producto por izquierda con la matriz A y el vector b .	Este proceso es iterativo, la diferencia entre las dos aproximaciones se amplía en forma exponencial dependiendo del tamaño del sistema.
Debe reconocer la forma escalonada del sistema y decidir si es consistente o no	Debe reconocer la forma escalonada del sistema y decidir si es consistente o no	Una vez se obtiene la forma escalonada en ambos procesos y resulte un sistema consistente, se debe realizar la sustitución hacia atrás.
"Comprueba" su respuesta mirando la sección de respuestas o esperando la retroalimentación del orientador.	"Comprueba" sus respuestas usando los comandos apropiados de los programas tipo CAS que prefiera.	Este proceso es exigido a lo largo de los cursos tradicionales aun cuando los SEL son una herramienta para resolver problemas dentro del álgebra lineal. En el contexto Dinámico solo en esta parte del curso se evalúan estos procesos.

Las celdas coloreadas de la segunda columna muestran las demandas que se proponen como novedosas. La primera de ellas no guarda mucha diferencia con la demanda correspondiente en el ambiente estático.

La variante propuesta en cuanto a procedimientos a realizar y la comunicación permanente de sus procesos que se le pide al estudiante traen como consecuencia que la demanda resaltada en verde tenga un gran potencial teórico dentro del curso, pues aproxima al estudiante a la idea de

factorización LU y al determinante de la matriz de coeficientes (A), lo cual se puede capitalizar a partir de la problematización (Preguntas orientadoras) de la información obtenida a lo largo del proceso.

La variante que representa esta propuesta trae como consecuencia una recuperación importante del tiempo empleado en clase por estudiantes y profesores, y, además, evita la frustración y desmotivación que causan los errores cometidos por sumas o restas y la dificultad de encontrar el error y la de realizar metacognición de manera permanente y eficiente. Asimismo, el tiempo y energía optimizadas se dedicó al desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático, como La exploración de casos particulares, la búsqueda de patrones, la construcción de conjeturas, la comunicación y la argumentación.

La demanda en azul resalta las potencialidades que ofrecen los programas tipo CAS en cuanto a mecanismos de metacognición. Finalmente, las demandas que aparecen en blanco en el ambiente dinámico dejan ver que buena parte del problema se resuelve con los métodos tradicionales de los entornos estáticos.

De otro lado, la demanda resaltada en verde provoca la siguiente operación cognitiva: Convertir del lenguaje tradicional de las operaciones elementales a las matrices elementales. 1. Nuevas demandas asociadas a la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo. La tarea tradicional de realizar el proceso de resolver un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ a papel y lápiz consiste en efectuar operaciones elementales sobre las ecuaciones o sobre las filas de la matriz aumentada $(A|b)$, para obtener un sistema escalonado que, de ser consistente, se resuelva con algún procedimiento equivalente a la sustitución hacia atrás. En los problemas 2 y 3 que se muestran en las figuras 17 y 18, se presenta, en conjunto, una propuesta de cómo descargar al estudiante del compromiso procedimental subyacente a esta práctica, para orientarlo a centrar su atención en nuevas demandas que involucren, en primer plano, el pensamiento teórico.

Figura 17 Problema 2 de la Hoja de trabajo: Eliminación Gaussiana (Ver [Anexo 1](#), p. 35)

2. Construya las matrices elementales E_1, E_2 y E_3 , de orden tres, que representan respectivamente, las siguientes operaciones elementales:

- i. $R_2 + (-1)R_1 \rightarrow R_2$
- ii. $R_3 + (-3)R_1 \rightarrow R_3$
- iii. $R_3 + (-1)R_2 \rightarrow R_3$

- b. Realice el producto $E_3 E_2 E_1$, en ese orden. ¿Qué matriz resulta ser?
- c. Para las operaciones i, ii y iii Escriba las operaciones inversas y construya sus tres matrices elementales correspondientes y llámelas E_1^{-1}, E_2^{-1} y E_3^{-1} . Realice el producto $E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$, en ese orden. ¿Qué matriz resulta ser?
- d. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales en su representación matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}}_b$$

Realiza las siguientes operaciones, a ambos lados de la igualdad, con ayuda de algún software tipo CAS. Describa lo que observa en cada paso y resuelve el sistema $Ux = y$ que se obtiene en el paso III.

- i. $E_1 \cdot Ax = E_1 \cdot b$
- ii. $E_2 \cdot E_1 \cdot Ax = E_2 \cdot E_1 \cdot b$
- iii. $\underbrace{E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot Ax}_U = \underbrace{E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot b}_y$

En esta propuesta, la demanda principal es representar o traducir, como dice el enunciado del problema 2 en la figura 17, las operaciones elementales en sus correspondientes matrices elementales. En el enunciado 2 d., se ilustra cómo al multiplicar a ambos lados de la igualdad por cada matriz elemental, en el orden correspondiente, se transforma el sistema original en una forma escalonada $Ux = y$. La acción de multiplicar a ambos lados de una igualdad por una misma matriz le imprime validez al proceso; al conectar al estudiante con nociones que ha alcanzado en etapas previas a la educación superior.

figura 18 Problema 3 de la Hoja de trabajo: Eliminación Gaussiana (Anexo 1, p. 35)

3. El anterior procedimiento se conoce como el algoritmo de eliminación gaussiana. Se debe escalar la matriz solo usando matrices elementales tipo eliminación, se permite también usar matrices elementales tipo permutación, sólo en el caso de ser absolutamente necesario. Resuelva los sistemas
 - a. En el ejemplo 2.9 de la página 72 y 73 del libro de Poole, traduzca las operaciones elementales en matrices elementales y use un software tipo CAS para llevar la matriz a su forma escalonada usando producto de matrices.
 - b. Obtenga la factorización LU de la matriz anterior (Ej.: con www.matrixcalc.org) y describa un procedimiento para obtener la factorización LU de una matriz A ¿Es siempre posible obtener esta factorización?

2. Nuevas demandas asociadas a las actividades tipo laboratorio. El profesor asigna un problema al estudiante y en el proceso de solución se hicieron explícitas las siguientes actividades:

- Observación: Para describir con precisión, encontrar patrones y regularidades.
- Diseño Experimental: Construir o usar applets, código, comandos, o funciones (Matlab) para experimentar y resolver problemas.
- Instrumentalización: Uso adecuado y coordinado de los applets y las tecnologías digitales, esto es, usar la sintaxis apropiada a cada programa.

- **Análisis de datos:** Recopilar la información observada en los applets o las salidas obtenidas de la interacción con las tecnologías tipo CAS y posteriormente la depuración e interpretación de la información para construir posibles definiciones, operaciones o teoremas.
- **Medir y comparar:** En diferentes actividades del DI los estudiantes utilizaron GeoGebra para medir y comparar longitudes y ángulos.
- **Comunicación y Argumentación científica:** comunicar y argumentar los resultados empleando los diferentes lenguajes asociados a las formas de razonamiento de manera coherente, soportando las afirmaciones más generales con gráficas pertinentes o referencias académicas.

3. Nuevas demandas asociadas a los procesos de interacción con los medios digitales.

Para interactuar de manera efectiva con las tecnologías digitales surgen las siguientes demandas:

- **La alfabetización en el uso de tecnologías tipo CAS y DGS** es fundamental para los estudiantes, ya que les permite integrar estas herramientas en su proceso de construcción de conocimiento. Para lograrlo, es necesario familiarizarse con el programa y utilizarlo de manera sistemática, aprovechando los comandos y funciones disponibles en el caso de las tecnologías tipo CAS. En cuanto a las tecnologías tipo DGS, implica conocer las herramientas y sus diferentes opciones de comandos, utilizando gráficas y visualizaciones en diferentes vistas, y aplicando transformaciones relevantes como arrastre, deslizadores y texto interactivo.

Además, a través de los resultados del estudio se observó que los estudiantes coordinan adecuadamente el uso de ambos tipos de tecnologías. Al integrar de manera efectiva el CAS y el DGS, los estudiantes pueden desarrollar un entendimiento más profundo de los conceptos matemáticos. Es en este proceso de maduración de la coordinación entre ambas tecnologías donde emergen los conceptos de manera temprana y significativa.

En síntesis, la alfabetización en el uso de tecnologías tipo CAS y DGS implica familiarizarse con el software, utilizar de forma sistemática las funciones y

herramientas disponibles, y coordinar de manera apropiada ambos tipos de tecnologías para un mejor desarrollo del aprendizaje matemático.

- **Seleccionar el medio digital apropiado.** En el diseño de intervención, los estudiantes tenían acceso a un portafolio digital, el cual incluyó: GeoGebra, Matlab, Octave, Matrix calculator, Wolfram alpha. En este ámbito, una habilidad que deben desarrollar los estudiantes es seleccionar el medio digital que le pueda proporcionar mayor apoyo en algún proceso en la resolución de los problemas propuestos.
- **Habilidad para “dialogar” con las tecnologías digitales:** El estudiante debe saber traducir las preguntas en el entorno estático al entorno dinámico. A lo largo del estudio, los estudiantes fueron desarrollando la habilidad para formular preguntas al medio digital de manera clara, concisa y pertinentes.
- **Decantar la información brindada por el medio digital.** Los estudiantes interactuaron permanentemente con distintos medios digitales en el proceso de resolución de problemas del álgebra lineal. En este diálogo con el medio, el estudiante recibe mucha información a través de diferentes registros de representación, por tanto, es necesario desarrollar la habilidad de decantar la información relevante para incluirla en la solución del problema.

5.3.Características Emergentes en la Formas de Razonamiento debido al uso coordinado de Tecnologías Digitales.

En esta sección, se da respuesta a la pregunta: ¿Qué características emergen en las formas de razonamiento gracias al uso coordinado de medios digitales?

Nuevas tendencias en los entornos dinámicos. En el análisis de las Hojas de trabajo: “*Tipos de solución de un sistema 2×2* ” y “*Hablemos de Matrices*”, se analizan las formas de razonamiento de los estudiantes al resolver problemas del álgebra lineal en un entorno dinámico; este análisis sugiere que, en estas condiciones, la forma de razonamiento (AA) ya no se presenta desconectada de la forma de razonamiento (SG) y además, ya no se manifiesta como la forma de razonamiento prevalente, tal como se reporta en los antecedentes de esta investigación y se constata en el análisis de la prueba diagnóstica 4.2. Por el contrario, la forma de razonamiento (SG) es en los entornos dinámicos, al menos en los diseñados en esta investigación, la prevalente en los acercamientos iniciales de los estudiantes. La forma de razonamiento (AA) también aparece, pero subordinada por la forma de razonamiento (SG).

Antes de la emergencia de la forma de razonamiento (AE), la “*estructura organizacional*” del razonamiento se está transformando; esto es, la forma de razonamiento (AA) es en ocasiones la que subordina a la forma de razonamiento (SG). Dependiendo del problema a resolver, la forma de razonamiento prevalente puede cambiar. Es en medio de estos episodios de intercambio de role (Fluidez) donde se da la emergencia de la forma de razonamiento (AE). Cuando esta forma de razonamiento se presentó, estuvo siempre subordinada por las formas de razonamiento (SG) y (AA), es decir, se validaban las producciones de la forma de razonamiento (AE), en alguna de las otras dos formas de razonamiento o en ambas.

Las formas de razonamiento en entornos dinámicos. En el análisis de las hojas de trabajo, se mostró que el uso coordinado de las tecnologías digitales ensanchó, no solo los lenguajes asociados a cada forma de razonamiento, sino la diversidad de sus producciones. Como resultado del léxico y la sintaxis que desde las tecnologías digitales son incorporados al discurso de quien resuelve problemas de forma sistemática. Asimismo, las abundantes producciones y dinámicas de las tecnologías tipo CAS y DGS, respectivamente, que se incorporan de la misma manera al discurso descriptivo, interpretativo y argumentativo. En consecuencia, las formas de razonamiento sufren una transformación importante gracias al robustecimiento de su lenguaje y formas de expresión.

Gol Tabaghi y Sinclair (2013) describen la transformación de la forma de razonamiento (SG), gracias al uso de una tecnología tipo DGS para resolver problemas en contexto formal relacionados con los conceptos de valor y vector propio. Gracias a las características nuevas de la forma de razonamiento deciden llamarla forma de razonamiento Sintético Geométrica Dinámica. Decidimos extender e incorporar el mismo adjetivo (Dinámico), con fundamento en los resultados de los análisis de la evidencia empírica del presente trabajo de investigación, a las restantes formas de razonamiento, esto es: Forma de razonamiento (SGD), Forma de razonamiento (AAD) y Formas de razonamiento (AED).

Dos conjeturas didácticas. Se plantean dos conjeturas que surgen de la evidencia empírica presentada en esta investigación y en otros estudios relacionados con la resolución de problemas del algebra lineal. La primera conjetura sugiere que la forma de razonamiento (AE), en su forma madura, subordina a las formas de razonamiento que la preceden, es decir, la forma de razonamiento (AE) se vuelve predominante y no necesita apoyarse en las formas de

razonamiento (AA) y (SG), sino que las utiliza solo cuando desea dar claridad sobre sus producciones. La segunda conjetura sugiere que si la forma de razonamiento (AE) es forzada a aparecer sin sus formas de razonamiento base, en cuanto al lenguaje y las experiencias, solo puede evolucionar en su propio dominio o tiende a desaparecer. Además, si evoluciona, esta forma de razonamiento difícilmente podrá interactuar con las otras formas de razonamiento.

5.4. Sugerencias.

A partir del estudio de investigación realizado, se construyó un conjunto de sugerencias en diferentes campos: La investigación, La formación de profesores, la docencia y el diseño curricular.

5.4.1. Sugerencias Para la Investigación

Se recomienda a la comunidad de investigadores realizar las siguientes investigaciones en los siguientes núcleos problemáticos:

- Investigaciones similares a las que se reportan en el presente documento con otros objetos matemáticos del álgebra lineal, como: transformaciones lineales, valores y vectores propios, mínimos cuadrados, entre otros.
- En la respuesta a la pregunta de investigación 3, surgieron dos conjeturas didácticas las cuales sugerimos a la comunidad de investigadores de educación matemática demostrarlas o refutarlas debido al interés que reviste para la didáctica del álgebra lineal. Las dos conjeturas son las siguientes: (i) La forma de razonamiento (AE), en su forma madura, subordina a las formas de razonamiento que la preceden, es decir, la forma de razonamiento (AE) se vuelve predominante y no necesita apoyarse en las formas de razonamiento (AA) y (SG), sino que las utiliza solo cuando desea dar claridad sobre sus producciones. (ii) Si la forma de razonamiento (AE) es forzada a aparecer sin sus formas de razonamiento base, en cuanto al lenguaje y las experiencias, solo puede evolucionar en su propio dominio o tiende a desaparecer. Además, si evoluciona, esta forma de razonamiento difícilmente podrá interactuar con las otras formas de razonamiento.
- Investigaciones similares a las que se reportan en el presente documento en otras áreas de las matemáticas y la estadística.

- Investigar sobre las nuevas demandas, a los profesores de matemáticas, que se desprenden del uso coordinado de tecnologías digitales.
- Investigaciones similares a las que se reportan en el presente documento en los niveles educativos de la básica y media.
- En la presente investigación, se abordó la competencia de resolución de problemas con medios digitales. Se recomienda realizar investigación en el desarrollo de la competencia de proposición de problemas en entornos dinámicos.

5.4.2. *Sugerencias para la Formación de Profesores*

A partir de los resultados de investigación reportados en este estudio, se recomienda a las instituciones formadoras de profesores de matemáticas implementar las siguientes actividades:

- Incluir espacios de formación de profesores que tengan en cuenta el desarrollo de competencias sobre el diseño de actividades con medios digitales. En particular, se recomienda incluir los criterios de diseño reportados en la presente investigación.
- Se propone el *principio de no-segmentación* que consiste en mantener entrelazados los ejes principales de la formación de profesores como son las matemáticas, la didáctica y la pedagogía en toda actividad encaminada a la formación del profesor de matemáticas en cualquiera de sus estadios. Una balanceada dosificación de los ingredientes que debe adquirir el profesor gracias a su formación en estos tres ejes, son necesarios para que realice las actividades centrales de su actividad profesional; diseñar, implementar, y evaluar los procesos de enseñanza - aprendizaje.
- Los entornos dinámicos evolucionan de manera abrupta. Por tanto, en la formación de profesores de matemáticas se sugiere estar actualizando y profundizando en las nuevas demandas que incorpora la resolución de problemas en entornos dinámicos.

5.4.3. *Sugerencias para la docencia.*

A partir de los resultados de investigación reportados en este estudio, se recomienda a la comunidad de profesores de matemáticas tener en cuenta:

- Utilizar los criterios de diseño de actividades de aprendizaje reportadas en este documento.

- Construir criterios, instrumentos y mecanismos de evaluación que sean congruentes con las nuevas demandas para los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos con medios digitales.

Incluir en los diseños de intervención problemas en los siguientes contextos: (i) Contexto Formal. Las actividades de tipo laboratorio permitieron migrar del entorno estático al entorno dinámico. En este nuevo hábitat, las actividades propician el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático como (particularizar, encontrar patrones y construir conjeturas y contraejemplos); también es posible desarrollar habilidades propias de la experimentación en un laboratorio.

(ii) Contextos Hipotéticos y Reales. Se recomienda incluir estos contextos por las siguientes razones: promueve la habilidad para recabar información, coadyuva al desarrollo de las competencias comunicativas y argumentativas, posibilita el trabajo en grupo y articula el desarrollo de diferentes tipos de pensamiento como el numérico, geométrico, variacional y estocástico.

5.4.4. Sugerencias para el Diseño Curricular

A partir de los resultados de investigación obtenidos en el presente estudio, se sugiere a los diseñadores curriculares las siguientes propuestas:

- Generar desarrollos curriculares que permitan que los cursos sean atendidos por grupos interdisciplinarios de trabajo. Por ejemplo, en la investigación que se reporta en el presente documento, en el equipo de trabajo responsable del curso de álgebra lineal participaron un matemático aplicado y un educador matemático, y como invitados un grupo de ingenieros de diferentes especialidades.
- El currículo debe incluir actividades que promuevan el trabajo en equipo, la comunicación y la colaboración en línea. Esto puede incluir proyectos de investigación, resolución de problemas en grupo, discusiones en línea y colaboración en la construcción de modelos matemáticos utilizando herramientas digitales.
- Desde el currículo, se debe impulsar el desarrollo de las nuevas demandas que exige la inclusión de los medios digitales en la resolución de problemas en matemáticas.

Referencias bibliográficas

- Aguilar-Magallón, D. (2018). *La Formulación y Resolución de Problemas Matemáticos en un Ambiente que Promueve el Uso de Tecnologías Digitales*. CINVESTAV.
- Álvarez-Macea, F., & Costa, V. A. (2019). Enseñanza del Algebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático*, 10(2), 65–78. <https://doi.org/10.22463/17948231.2594>
- Aranda, C., & Callejo, M. L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 13(2), 129–158. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000200002&nrm=iso
- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Bagley, S., & Rabin, J. M. (2016). Students' Use of Computational Thinking in Linear Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(1), 83–104. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0022-x>
- Benítez Mojica, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios en la resolución de problemas con uso de tecnologías*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
- Boas, R. P. (1990). GEORGE PÓLYA A Biographical Memoir. In *Biographical Memoirs* (pp. 337–355). Retrieved from <http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/polya-george.pdf>
- Boero, P., Garuti, R., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20TH PME CONFERENCE* (pp. 113–120). Valencia, Spain.

- Borba, M. de C., & Villareal, M. E. (2005). Information Technology, Reorganization of Thinking and Humans-with-Media. In *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation* (pp. 9–27). https://doi.org/10.1007/0-387-24264-3_2
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra*. <https://doi.org/10.1017/9781108583664>
- Brownlee, J. (2019). A Gentle Introduction to Linear Algebra. *MachineLearningMastery.Com*. Retrieved from <https://machinelearningmastery.com/gentle-introduction-linear-algebra/>
- Bu, L., & Hohenwarter, M. (2015). Modeling for Dynamic Mathematics. In X. Ge, D. Ifenthaler, & J. M. Spector (Eds.), *Emerging Technologies for STEAM Education: Full STEAM Ahead* (pp. 355–379). https://doi.org/10.1007/978-3-319-02573-5_19
- Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors’ linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 131–153. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.08.003>
- Cárcamo Bahamonde, A. D., Fortuny Aymemí, J. M., & Gómez i Urgellés, J. V. (2017). Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(3), 338–352. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1241436>
- Caridade, C. M. R., Encinas, A. H., Martín-Vaquero, J., & Queiruga-Dios, A. (2015). CAS and real life problems to learn basic concepts in Linear Algebra course. *Computer Applications in Engineering Education*, 23(4), 567–577. <https://doi.org/10.1002/cae.21627>
- Carlino, P. (2005). *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica*. (Primera; F. de C. Económica, Ed.). Buenos Aires.
- Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41–46. <https://doi.org/10.2307/2686430>
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2015). Design Research: An Analysis and Critique. In *Handbook of International Research in Mathematics Education* (p. 23). Routledge.

- Cooley, L., Vidakovic, D., Martin, W. O., Dexter, S., Suzuki, J., & Loch, S. (2014). Modules as Learning Tools in Linear Algebra. *PRIMUS*, 24(3), 257–278. <https://doi.org/10.1080/10511970.2013.867293>
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19–58.
- Devlin, K. (2019). How Technology Has Changed What It Means to Think Mathematically. In M. Danesi (Ed.), *Interdisciplinary Perspectives on Math Cognition* (pp. 53–78). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22537-7_3
- Díaz M., G. (2020). Metodología del estudio piloto. *Revista Chilena de Radiología*, 26(4), 172–176. <https://doi.org/10.4067/S0717-93082020000400172>
- Dogan-Dunlap, H. (2006). Lack of set theory relevant prerequisite knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(4), 401–410. <https://doi.org/10.1080/00207390600594853>
- Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and Its Applications*, 432(8), 2141–2159. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.08.037>
- Dorier, J.-L. (Ed.). (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. <https://doi.org/https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/0-306-47224-4>
- Dorier, J.-L., & Sierpiska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In E. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255–273). Dordrecht: Editores académicos de Kluwer.
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). *The Nested Epistemic Actions Model for Abstraction in Context: Theory as Methodological Tool and Methodological Tool as Theory*. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_8
- Drijvers, P., Gitirana, V., Monaghan, J., Okumus, S., Besnier, S., Pfeiffer, C., ... Rodrigues, A. (2019). Transitions Toward Digital Resources: Change, Invariance, and Orchestration. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (Eds.), *The "Resource" Approach to Mathematics Education* (pp. 389–444). https://doi.org/10.1007/978-3-030-20393-1_12

- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Duval, R. (2017). The Registers: Method of Analysis and Identification of Cognitive Variables. In *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations* (pp. 73–111). https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9_4
- Duval, R. (2020). Registers of Semiotic Representation. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 724–727). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100033
- El Ouazizi, M., & Akharraz, I. (2019). Ontology-Based Model for a Linear Algebra Intelligent Tutoring System. *2019 International Conference on Intelligent Systems and Advanced Computing Sciences (ISACS)*, 1–3. <https://doi.org/10.1109/ISACS48493.2019.9068867>
- Freiman, V. (2020). Types of Technology in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 869–879). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_158
- Gol Tabaghi, S., & Sinclair, N. (2013). Using Dynamic Geometry Software to Explore Eigenvectors: The Emergence of Dynamic-Synthetic-Geometric Thinking. *Technology, Knowledge and Learning*, 18(3), 149–164. <https://doi.org/10.1007/s10758-013-9206-0>
- Golub, G. (2013). *Matrix Computations*. <https://doi.org/10.56021/9781421407944>
- Gonçalves, R., Costa, C., & Abreu, T. (2019). Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Software as Beneficial Tools in Teaching and Learning Linear Algebra. In M. Tsitouridou, J. A. Diniz, & T. A. Mikropoulos (Eds.), *Technology and Innovation in Learning, Teaching and Education* (pp. 343–356). Cham: Springer International Publishing.
- Gravemeijer, K., & Prediger, S. (2019). Topic-Specific Design Research: An Introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 33–57). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_2
- Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F.-L., & Ohtani, M. (2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(S1), 105–123. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6>

- Grossman, S. I., & Flores Godoy, J. J. (2012). *Álgebra Lineal* (7ma.; P. E. Roig Vásquez & E. C. Zuñiga Gutiérrez, Eds.). México D.F.: The McGraw-Hill. Inc.
- Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69–95. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007>
- Harel, G. (2018). The Learning and Teaching of Linear Algebra Through the Lenses of Intellectual Need and Epistemological Justification and Their Constituents. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 3–27). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_1
- Harel, G. (2019). Varieties in the use of geometry in the teaching of linear algebra. *ZDM*, 51(7), 1031–1042. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-01015-7>
- Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2009). Introduction: the transformative nature of “dynamic” educational technology. *ZDM*, 41(4), 397–398. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0201-9>
- Hernandez-Martinez, P. (2020). *Science Capital, Habitus, and Mathematical Modelling Practices in the Field of University Education BT - Mathematical Modelling Education and Sense-making* (G. A. Stillman, G. Kaiser, & C. E. Lampen, Eds.). https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_5
- Hillel, J. (1993). Computer Algebra Systems as Cognitive Technologies: Implication for the Practice of Mathematics Education. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology* (pp. 18–47). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1115–1136. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8>
- Jeschke, S., Wilke, M., Kato, A., Pfeiffer, O., & Zorn, E. (2008). Early Bird: Preparing engineering freshmen for engineering challenges. *2008 38th Annual Frontiers in Education Conference*, T2D-1-T2D-5. <https://doi.org/10.1109/FIE.2008.4720274>

- Jin, L., Bi, C., & Zhao, Y. (2011). Application of MATLAB Software for Linear Algebra. *2011 Third Pacific-Asia Conference on Circuits, Communications and System (PACCS)*, 1–3. <https://doi.org/10.1109/PACCS.2011.5990256>
- Kazunga, C., & Bansilal, S. (2020). An APOS analysis of solving systems of equations using the inverse matrix method. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09935-6>
- Kieran, C. (2019). Task Design Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Algebra Learning with Technological Tools. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 265–287). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_12
- Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2015). Frameworks and Principles for Task Design. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education: an ICMI study 22* (pp. 19–81). https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2
- Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and Its Applications*, 432(8), 2100–2111. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.08.039>
- Kuruvilla, F. G., Park, P. J., & Schreiber, S. L. (2002). Vector algebra in the analysis of genome-wide expression data. *Genome Biology*, 3(3), research0011.1. <https://doi.org/10.1186/gb-2002-3-3-research0011>
- Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *ZDM*, 42(1), 105–119. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0225-1>
- Leung, A. (2017). Exploring Techno-Pedagogic Task Design in the Mathematics Classroom. In A. Leung & A. Baccaglioni-Frank (Eds.), *Digital Technologies in Designing Mathematics Education Tasks: Potential and Pitfalls* (pp. 3–16). https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0_1
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). Problem Solving in Mathematics Education. In *Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 1–39). https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1
- Lipschutz, S. (1991). *Álgebra Lineal* (Serie scha). McGraw-Hill / Interamericana de España.
- Manuel Santos Trigo, & Barrera-Mora, F. (2000). *Cualidades y procesos matemáticos importantes*

- en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento.* México: CINVESTAV-IPN.
- Marshall, N., Buteau, C., Jarvis, D. H., & Lavicza, Z. (2012). Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study. *Computers & Education*, 58(1), 423–434. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.08.020>
- Martínez R., H. J., & Sanabria R., A. M. (2014). *Álgebra Lineal* (Primera). Retrieved from editorial@univalle.edu.co
- Monroy Guzmán, L. A. (2011). *El Algebra Lineal en el contexto histórico de las Matemáticas* (Universidad del Valle). Retrieved from <https://tinyurl.com/wqubabm>
- Monroy Guzmán, L., Obregón Mosquera, M. del C., Yaker Agudelo, H., & Domínguez Arboleda, D. (2023). Área y Perímetro: Una Experiencia y una reflexión sobre la Educación Matemática en Básica Primaria y la Mediación de la Tecnología. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (7). https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i7.12429
- Moreno-Armella, L. (2002). Instrumentos Matemáticos Computacionales. *Memorias Del Seminario Nacional*, 18.
- Moreno-Armella, L. (2021). The theory of calculus for calculus teachers. *ZDM – Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01222-9>
- Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. (2013). From Static to Dynamic Mathematics: Historical and Representational Perspectives. In S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics* (pp. 27–45). https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_3
- Moreno Armella, L. E., & Manuel Trigo, L. (2001). De la herramienta al instrumento: una perspectiva informática. *Educación Matemática*, 13(2), 78–97. <https://doi.org/10.24844/EM1302.05>
- Ndlovu, Z., & Brijlall, D. (2016). Pre-service Mathematics Teachers' Mental Constructions of the Determinant Concept. *International Journal of Educational Sciences*, 14(1–2), 145–156. <https://doi.org/10.1080/09751122.2016.11890488>

- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). Webs and Situated Abstractions. In *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers* (pp. 105–133). https://doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8_5
- Noss, R., & Hoyles, C. (2019). Micromundos, Construccinismo y Matemáticas. *Educación Matemática*, 31(2), 7–21. <https://doi.org/10.24844/EM3102.01>
- Oktaç, A., & Trigueros, M. (2009). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 13(4-II), 373–385. Retrieved from <http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-especial-13-4-ii/499-201021d>
- Olsson, J. (2019). Relations Between Task Design and Students' Utilization of GeoGebra. *Digital Experiences in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s40751-019-00051-6>
- Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial*. Instituto Politécnico Nacional.
- Pauer, F. (2018). A Computational Approach to Systems of Linear Equations. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 299–316). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_14
- Polya, G. (1945). How to solve it; a new aspect of mathematical method. In *How to solve it; a new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ, US: Princeton University Press.
- Polya, George. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Polya, George. (1981). *Mathematical Discovery On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving* (Combined). Retrieved from https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/194966/George_Polya_Mathematical_discovery.pdf?sequence=1
- Poole, D. (2011). *álgebra Lineal: Una introducción Moder.* Retrieved from <http://latinoamerica.cengage.com>
- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación*

- En Matemática Educativa*, 13(1), 89–112. Retrieved from http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000100005&nrm=iso
- Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., ... Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning -- and Learning Trajectories -- of Mathematical Concepts. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study* (pp. 179–226). https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_9
- Santos-Trigo, L. M. (2019). Pisa y Tecnologías Digitales. *Ciencia y Cultura C2*. Retrieved from <https://www.revistac2.com/pisa-y-tecnologias-digitales/>
- Santos-Trigo, M. (2019). Problem-Solving in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1–7). https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_129-5
- Santos-Trigo, M. (2020). Problem-Solving in Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 686–693). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129
- Santos-Trigo, M., Barrera-Mora, F., & Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' Use of Technology Affordances to Contextualize and Dynamically Enrich and Extend Mathematical Problem-Solving Strategies. *Mathematics*, 9(8), 793. <https://doi.org/10.3390/math9080793>
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2016). Digital technologies and mathematical problem solving: Redesigning resources, materials, and extending learning environments. In *Problem-Solving: Strategies, Challenges and Outcomes*.
- Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM*, 48(6), 827–842. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0757-0>
- Schöenfeld, A. (1983). The Wild, Wild, Wild, Wild, Wild World of Problem Solving (A Review of Sorts). *For the Learning of Mathematics*, 3(3), 40–47. <https://doi.org/10.2307/40247835>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: ACADEMIC PRESS, INC.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and

- Sense Making in Mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1–38.
<https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Se, S., Ashwini B, Chandran, A., & Soman K.P. (2015). Computational thinking leads to computational learning: Flipped class room experiments in linear algebra. *2015 International Conference on Innovations in Information, Embedded and Communication Systems (ICIIECS)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICIIECS.2015.7193021>
- Shirali, S. A. (2014). George Pólya & problem solving ... An appreciation. *Resonance*, 19(4), 310–322. <https://doi.org/10.1007/s12045-014-0037-7>
- Sierpiska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8
- Sierpiska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and Other False Dichotomies in Mathematics Education. In M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 117–135). https://doi.org/10.1007/0-387-24270-8_11
- Sierpiska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2018). *A Study of Relation Between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra* (A. Sierpiska, Ed.). Ontario: Concordia University.
- Singh, G., Tuli, N., & Mantri, A. (2021). Issues and Challenges in Learning Foundation Linear Algebra Course with Technology: A Literature Review. *2021 International Conference on Advance Computing and Innovative Technologies in Engineering (ICACITE)*, 860–865. <https://doi.org/10.1109/ICACITE51222.2021.9404699>
- Stewart, S. (2017). School Algebra to Linear Algebra: Advancing Through the Worlds of Mathematical Thinking. In S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 219–233). https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_12
- Stewart, S., Andrews-Larson, C., & Zandieh, M. (2019). Linear algebra teaching and learning: themes from recent research and evolving research priorities. *ZDM*, 51(7), 1017–1030. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01104-1>
- Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in

- linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 173–188. <https://doi.org/10.1080/00207390903399620>
- Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2019). Student perspectives on proof in linear algebra. *ZDM*, 51(7), 1069–1082. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01087-z>
- Strang, G. (2006a). *Linear Algebra and its Applications* (fourth; B. Thomson, Ed.). Belmont, CA.
- Strang, G. (2006b). *Linear Algebra and Its Applications* (4a ed.; C. Learning, Ed.).
- Superior, C. (2015). *Acuerdo 025-2015* (p. 27). p. 27. Retrieved from http://proxse16.univalle.edu.co/~secretariageneral/consejo-superior/acuerdos/2015/Acu_025.pdf
- Swan, M. (2020). Design Research in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 192–195). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_72
- Tall, D. (2013). The Evolution of Technology and the Mathematics of Change and Variation: Using Human Perceptions and Emotions to Make Sense of Powerful Ideas. In S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics* (pp. 449–461). https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_25
- Tenorio, M. C. (2011). Escolaridad generalizada: ¿inclusión social o pérdida de la identidad cultural? *Revista de Estudios Sociales*, 40, 57–71. Retrieved from <https://revistas.uniandes.edu.co/doi/pdf/10.7440/res40.2011.06>
- Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 239–264. <https://doi.org/10.1023/A:1003939314034>
- Turgut, M. (2018). How Does a Dynamic Geometry System Mediate Students' Reasoning on 3D Linear Transformations? In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 241–259). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_11
- Turgut, M. (2019). Sense-making regarding matrix representation of geometric transformations in $\mathbb{R}^2$: a semiotic mediation perspective in a dynamic geometry environment. *ZDM*, 51(7), 1199–1214. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01032-0>

- Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica: proyecto CONACYT 2002-C01-41726S. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 9(3), 459–490.
- Villarreal, M. E., & Borba, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and ... notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM*, 42(1), 49–62. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0207-3>
- Wawro, M. (2015). Reasoning About Solutions in Linear Algebra: the Case of Abraham and the Invertible Matrix Theorem. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(3), 315–338. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0017-7>
- Weigand, H.-G. (2017). What Is Or What Might Be the Benefit of Using Computer Algebra Systems in the Learning and Teaching of Calculus? In E. Faggiano, F. Ferrara, & A. Montone (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education: Perspectives in the Digital Era* (pp. 161–193). https://doi.org/10.1007/978-3-319-61488-5_8