

Un estudio de caso sobre el abordaje de funciones cuadráticas por parte de los estudiantes de grado 9° de institución educativa pascual de andagoya/Carmen Alexandra Castro Hurtado/Nidia Marcela Caicedo Murillo/Universidad del valle- Sede Pacífico.

**UN ESTUDIO DE CASO SOBRE EL ABORDAJE DE FUNCIONES CUADRÁTICAS
POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO 9° DE INSTITUCIÓN EDUCATIVA
PASCUAL DE ANDAGOYA A PARTIR DE UNA PROPUESTA MULTIREGISTRO**



NIDIA MARCELA CAICEDO MURILLO

COD: 1352800

CARMEN ALEXANDRA CASTRO HURTADO

COD: 1352873

UNIVERSIDAD DEL VALLE – SEDE PACÍFICO

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2018

**UN ESTUDIO DE CASO SOBRE EL ABORDAJE DE FUNCIONES CUADRÁTICAS
POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO 9° DE INSTITUCIÓN EDUCATIVA
PASCUAL DE ANDAGOYA A PARTIR DE UNA PROPUESTA MULTIREGISTRO**



NIDIA MARCELA CAICEDO MURILLO

COD: 1352800

CARMEN ALEXANDRA CASTRO HURTADO

COD: 1352873

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADA EN EDUCACIÓN
BASÍCA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS**

ASESOR DEL TRABAJO:

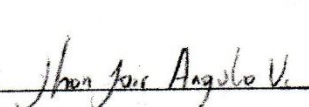
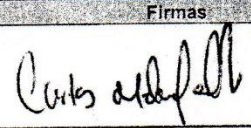
JHON JAIR ANGULO VALENCIA

UNIVERSIDAD DEL VALLE – SEDE PACÍFICO

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

2018

	INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Subdirección Académica	ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO						
Programa Académico _____		Fecha						
Código del programa: _____ Resolución del programa: _____		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 33%;">Día</th> <th style="width: 33%;">Mes</th> <th style="width: 33%;">Año</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">26</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">2018</td> </tr> </table>	Día	Mes	Año	26	2	2018
Día	Mes	Año						
26	2	2018						
Título del Trabajo o Proyecto de Grado								
Un estudio de caso sobre el abordaje de las funciones cuadráticas								
Se trata de:								
Proyecto ☐ Informe Final ☒								
Director								
Jhon Jairo Angulo Valencia								
Nombre del Primer Evaluador								
Carlos Melan								
Nombre del Segundo Evaluador								
Freydis Varedes								
Estudiantes								
Nombres y Apellidos	Código	Plan						
Carmen A. Castro H	1352873	3469						
Nidia M. Caicedo M	1352800	3469						
E-mail	Teléfonos de contacto							
Carmen Castro@correounivalle.edu.co								
Nidia M. Caicedo@hotmail.com								
Evaluación								
Aprobado ☒	Meritorio ☐	Laureado ☐						
Aprobado con recomendaciones ☐	No Aprobado ☐	Incompleto ☐						
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:								
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐	Primer Evaluador ☐	Segundo Evaluador ☐						
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____								
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).								
Firmas								
								
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador						
Recomendaciones ☐ Observaciones ☐ Razón de desacuerdo - Alternativas ☐								
Si se considera necesario, usar hojas adicionales.								

AGRADECIMIENTOS

Principalmente a Dios porque es quien nos da la vida y bajo su gracia se conceden todos nuestros anhelos y sueños.

A nuestras familias por su apoyo incondicional, por ser parte del proceso, por cada palabra de aliento que nos brindaron, gracias por estar ahí cuando lo necesitamos, por enseñarnos nuevas cosas y aportarnos conocimientos invaluable que nos servirán para toda la vida. Este nuevo logro es en gran parte gracias a ustedes.

A nuestro asesor Jhon Jair Angulo Valencia por aceptar darnos una orientación al inicio del proceso, por ayudarnos a encontrar el norte de nuestro trabajo para poder llegar donde estamos, por siempre facilitar los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de nuestro trabajo. Por su confianza, paciencia y entrega, gracias.

Finalmente pero no menos importante, agradecer a todas las personas que de alguna u otra manera han sido importantes en nuestra vida profesional y personal, a todos los profesores que contribuyeron en nuestra formación, aportando sus conocimientos y dedicación para cumplir con nuestros objetivos y obtener una titulación profesional. A todos nuestros compañeros de clase durante todos los semestres en la universidad ya que gracias al compañerismo, amistad y apoyo moral han aportado en un alto porcentaje a nuestras ganas de seguir adelante en nuestra carrera profesional.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS 5

RESUMEN 6

INTRODUCCIÓN 7

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA 9

 1.1. Planteamiento del problema 9

 1.2. Formulación del problema 15

 1.3. OBJETIVOS..... 15

 1.3.1. Objetivo general..... 15

Objetivos específicos 15

 1.4. Justificación de la investigación..... 16

 1.5. Contextualización..... 22

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO..... 23

 2.1. Antecedentes de la investigación 24

 2.2. Bases teóricas 28

 2.2.1 Como aprender matemáticas desde las representaciones semióticas de Duval:..... 28

 2.2.2. Una aproximación hacia la comprensión de un objeto matemático: 33

 2.2.3. Registro de representación, comprensión y aprendizaje. 36

 2.3. Elementos disciplinares: función cuadrática. 38

 2.4. Elementos curriculares..... 43

 2.4.1. Procesos generales..... 43

 2.4.2. Conocimientos básicos 43

 2.4.3. El contexto..... 44

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO..... 44

 3.1. Metodología 44

 3.2. Secuencia didáctica 45

 3.3. Análisis a priori de las actividades..... 55

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS 58

 4.1. Análisis de la situación 1 58

 4.1.1. Análisis de la situación 2 64

 4.1.3. Análisis de la situación 3 75

	5
4.2. Comentarios generales	84
CAPÍTULO 5: CONCLUSIÓN	86
BIBLIOGRAFÍA	88
ANEXOS	90

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Función cuadrática, según su concavidad.	16
Tabla 2. Tratamiento y conversión de una función cuadrática.	31
Tabla 3. Comprensión de un objeto matemático.	33
Tabla 4: Resultado de la enunciación de la concavidad	58
Tabla 5: Resultado de la enunciación del vértice mediante la fórmula canónica	61
Tabla 6: Resultado de la identificación de los elementos de la función cuadrática, a través de la representación gráfica.	65
Tabla 7: Resultado de la identificación del eje de simetría, a través de la formula canónica.	67
Tabla 8: Resultados del tratamiento y la conversión realizados por los estudiantes.	69
Tabla 9: Resultado de la conversión y análisis realizados por los estudiantes.	72
Tabla 10: Resultado del cambio de registro efectuado por los estudiantes.	74
Tabla 11: Resultado de la conversión y el tratamiento para hallar el vértice y el eje de simetría.	74
Tabla 12: Resultado de la conversión del registro algebraico al gráfico.	74
Tabla 13: Resultado del tratamiento para dar solución al problema.	76
Tabla 14: Resultado de los estudiantes que hacen uso del registro lengua natural.	76
Tabla 15: Resultado de la descripción del problema mediante el registro lengua natural.	76
Tabla 16: Resultado del tratamiento realizado para dar solución al problema.	77
Tabla 17: Resultado del tratamiento para hallar la cantidad de máquinas.	77
Tabla 18: Resultado de la coordinación en el registro gráfico.	77
Tabla 19: Resultado de los estudiantes que a través de la aprehensión perceptual dan solución al problema.	77
Tabla 20: Resultado del reconocimiento de los elementos significativos.	78

RESUMEN

La siguiente propuesta de indagación pedagógica, requisito parcial para obtener el título como licenciadas en educación básica con énfasis en matemáticas, describe la forma como un grupo de 10 estudiantes de grado 9°, de la Institución Educativa Pascual de Andagoya, abordaron un conjunto de situaciones relacionadas con funciones cuadráticas a partir de una propuesta multiregistro. Para el análisis de lo realizado por los estudiantes, se tomaron elementos primordiales presentes en la teoría de Raymond Duval (1993, 1999, 2004), elementos tales como: representaciones semióticas que se pueden realizar de un objeto matemático, la conversión de un objeto de estudio, el tratamiento entre las mismas y la coordinación entre esas representaciones.

De la implementación se obtuvo, que la mayoría de los estudiantes logró identificar las unidades significantes involucradas en el desarrollo de las funciones cuadráticas, por lo tanto consiguieron realizar tratamientos y conversiones de estas funciones, para dar solución a los problemas planteados. Cabe resaltar que, ciertos estudiantes prefirieron trabajar solo bajo la aprehensión perceptual, es decir mediante la observación para dar respuestas por medio de la representación de la lengua natural a los problemas, logrando así el reconocimiento de las unidades que hacen posible una coordinación entre registros.

Palabras claves: *Representación semiótica, conversión, tratamiento, coordinación, unidades significantes, función cuadrática.*

INTRODUCCIÓN

La siguiente propuesta de indagación pedagógica, describe la forma como los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Pascual de Andagoya abordan algunas representaciones de la función cuadrática, tales como la representación gráfica, tabular, algebraica y la lengua natural. Para esto se seleccionaron un conjunto de actividades, partiendo de las dificultades que están presentes en el desarrollo de estas funciones, previamente investigadas por autores como Valoyes, Malagón, Filloy, Rojano, Kucheman, Raymond Duval, entre otros.

Para tocar este tema, el presente trabajo se divide en 5 capítulos, los cuales se describen a continuación:

En el primer capítulo se hace referencia a la presentación del problema del cual se va a tratar en el trabajo, del mismo modo están los objetivos como el general y los específicos que se pretenden superar al finalizar, además está presente la justificación por el cual se escoge este objeto matemático y finalmente se encuentra una breve reseña de la Institución Educativa Pascual de Andagoya donde se aplicaron las actividades.

En el segundo capítulo se evidenciará algunos antecedentes que se tienen en cuenta como referentes para exponer el problema de investigación, así como también se presentará los referentes teóricos como el de Raymond Duval, el cual sirvió como base para el desarrollo del trabajo.

En el tercer capítulo se contemplará el marco metodológico donde se exponen las fases que se cumplieron a lo largo del trabajo y también se presentan las actividades seleccionadas para lograr nuestros objetivos, cada una con su respectivo análisis a priori.

En el cuarto capítulo se evidencian los resultados obtenidos de la aplicación de las actividades y el análisis de las diferentes representaciones realizadas por los estudiantes de noveno grado de la institución. Por último, se encuentra el quinto capítulo, donde están inmersas las conclusiones que se pueden tener al finalizar el trabajo de investigación y el que da cuenta si se lograron cumplir con los objetivos planteados al inicio del trabajo.

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA

1.1.Planteamiento del problema

Para el aprendizaje del álgebra en el aula de clase se requiere del conocimiento previo del área de aritmética, por lo que es importante que los estudiantes estén en disposición y comprometidos en la construcción del conocimiento, pese a las dificultades que pudieron existir en el aprendizaje de la aritmética. Para Kieran y Filloy (1989), los estudiantes además deben enfrentarse a los cambios de pensamiento que genera el paso de la aritmética al álgebra en situaciones problemas, ya que por medio de esta área de conocimiento se considera que se le da una solución a estos de manera más formal. Por lo tanto, el estudio del álgebra les permite a los estudiantes desarrollar la capacidad de expresar formalmente los métodos y procedimientos para solucionar problemas de la vida real.

De igual forma, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se han podido notar algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra en el aula de clase. Estas, relacionadas con la generalización de expresiones, simbologías, denotaciones entre otras. Dado que muestran que la combinación de números con letras es para los estudiantes muy compleja, pues ellos no conciben el trato con los literales.

Ante esto, algunos investigadores se han interesado en indagar el porqué de estas dificultades y como se podrían mejorar. Sin embargo, a pesar de todos los aportes que se han hecho, aún persisten las dificultades en el acercamiento de los estudiantes con las funciones cuadráticas, debido a esto, Gustin y Avirama (2014) afirman:

Las causas de estas dificultades se deben a la forma de enseñanza tradicional, donde se puede observar que el docente encargado del área presenta un tema, da algunos ejemplos y deja una serie de

actividades que llevan a cabo la misma estructura de los ejemplos y ejercicios presentados en clase, sin permitirle al estudiantes experimentar e indagar en la realización de ellos, no dejando que los estudiantes desarrollen un pensamiento crítico. (p. 14)

Del mismo modo, Gustin y Avirama consideran que otra de las dificultades en la enseñanza del álgebra es el tratamiento que se les da a las matemáticas, considerándola como una ciencia ya acabada y con una única representación, limitando la interacción con los objetos matemáticos generando en los estudiantes un rechazo hacia las matemáticas.

Así mismo, en la enseñanza del álgebra se presentan dificultades de tipo cognitivo¹, puesto que los estudiantes no siempre están en las condiciones que se requieren, es decir que no tienen los conocimientos previos, a la hora de la enseñanza y aprendizaje de esta área de conocimiento. En este caso de las funciones cuadráticas; de igual forma, se presentan problemas en la actitud de cada estudiante, ya que muchos de ellos consideran que es difícil operar estas funciones, creando así una barrera entre el conocimiento y el estudiante, generando dificultades el aprendizaje del álgebra, limitando al estudiante a memorizar conceptos sin lograr su comprensión. Ante esto, se considera que el docente debe presentar problemas en los que se pueda relacionar con situaciones de la vida cotidiana del educando y encontrarle un significado a dichos problemas, de tal forma que los objetos matemáticos, tengan sentido y funcionalidad para el estudiante.

Por otra parte, Hernández, Márquez y Quiñonez (2008), consideran que en la enseñanza del álgebra y la solución de funciones se debe hacer énfasis en el desarrollo de procedimientos aritméticos de forma general que busca la comprensión de los fenómenos asociados al

¹ Hay desconocimiento parcial de los conceptos que permiten la mediación de la aritmética.

pensamiento variacional, pues se encuentra que no siempre en la mayoría de los casos se da una comprensión de los conceptos presentados y más bien sus soluciones se reducen a aprendizajes mecánicos. Por tanto, se considera que la enseñanza de las situaciones en esta área de conocimiento debe estar mediada por una pluralidad de representaciones que permitan la asimilación de un mismo objeto de estudio en distintos registros.

Por ello, se encuentran situaciones donde el cambio de simbología en las funciones presentadas genera dificultades en los estudiantes, evidenciando que en el aprendizaje de las funciones cuadráticas aun no manejan los procesos de conversión de las mismas, es decir no logran utilizar las diferentes representaciones que posee una función.

En relación con lo que plantea, Valoyes y Malagón (Gustín y Avirama, 2014), plantean que una de las dificultades del aprendizaje del algebra es la ausencia del conocimiento aritmético o la deficiencia de este. Además Vergnaud (1992), sostiene que “la ruptura epistemológica que supone el aprendizaje del algebra en relación con la aritmética compromete los significados que los estudiantes han construido hasta ese momento para el objeto matemático como la igualdad, las operaciones etc”. Es decir que los conocimientos adquiridos en el curso de aritmética son prerrequisitos importantes para un buen aprendizaje del algebra, por lo que es necesario que los estudiantes comprendan la funcionalidad que cumplen las simbologías y las operaciones en la relación de la aritmética con el álgebra para que no exista confusión alguna al hacer uso de estas.

Por otra parte, en el trabajo del álgebra, entender el papel que juega los signos es de gran importancia, dado que una buena asimilación de estos elementos permitirá una adecuada

agrupación de términos que ayudan a un acercamiento al aprendizaje de los conceptos algebraicos. Para Puig (2003), las expresiones algebraicas son iconos, y tienen las propiedades que tienen sus objetos. Ahora bien, las letras de las expresiones algebraicas, tomadas aisladamente no son iconos, sino índices, cada letra es índice de una cantidad. Si la expresión algebraica es el resultado verbal de un problema aritmético-algebraico, cada letra concreta está representando una cantidad concreta como resultado de la convención que ha establecido quien ha hecho la traducción. (Las letras son índices, el signo $+$, $=$, etc., son símbolos y la expresión global es un icono). Reconocer las simbologías que representan cada cantidad, es de gran importancia para la resolución de problemas, pues reconocerá las variables dependientes e independientes, encontrándole soluciones a las situaciones. Además, ayuda a la toma de las decisiones, desde lo que se puede interpretar a partir de su representación.

Guayacundo (2014) citando a (Filloy y Rojano T, 1985), realiza un estudio para identificar las dificultades de los estudiantes del grado octavo y noveno en el tratamiento de funciones lineales y cuadráticas con una incógnita, resaltando la importancia de un trabajo de aula, en el que se pueden evidenciar más los conocimientos de los estudiantes, el interés y la motivación por resolver problemas cotidianos. Según ellos, los ejercicios propuestos en el aula carecen de sentido, aparte son procedimentales y memorísticos, debido a esto no necesitan de una interpretación crítica y reflexiva con respecto a los métodos que se emplean para poder ser solucionados, de tal forma que le dé sentido a la incógnita. Para estos dos investigadores las principales dificultades en el desarrollo de las funciones cuadráticas son:

- La importancia del concepto de variable: este concepto es relevante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que es difícil de definir, ya que los

estudiantes no comprenden la función de cada variable, no logran identificar la dependencia de cada variable. Por lo tanto, pareciera que para los estudiantes es muy compleja la comprensión y poder encontrarle un sentido a las variables, aunque para la mayoría de los estudiantes pueden encontrar este significado en los problemas simples, sin embargo a medida que se va aumentando los niveles de dificultad es mucho más difícil encontrarle el sentido a las variables.

- El uso del signo igual: en el desarrollo de las funciones afecta la comprensión de las mismas, pues no siempre el signo igual significa que lo que está al lado derecho es igual a lo que está al lado izquierdo, por ejemplo $x^2 + x = 0$, en caso tal de que x fuese igual a -1 se puede cumplir la igualdad, ahora bien si se tiene que $x^2 + 3x + 2 = 0$, para este caso es importante enfatizar en la forma como se debe ver este signo, ya que la igualdad no se cumple, excepto para $x = -1$ y $x = -2$.

- El uso del lenguaje matemático: Küchemann (1980) citado por Guayacundo (2014), manifiesta que los estudiantes tienen mayor facilidad para expresar las situaciones problemas por medio de la descripción, que representarlas por medio de funciones, ya que se les dificulta hacer relación de estas con el contexto. Por otro lado, muchos estudiantes consideran que el álgebra es la continuación de la aritmética por lo que tienden a cometer muchos errores operatorios, tales como: la mala utilización de los signos, la implementación de los literales, en cuanto a las operaciones básicas con los polinomios por ejemplo que no se pueden operar cuando los polinomios son de distintos grados.

- Las representaciones: para Duval (1993), “la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en el uso de más de un registro de representación”, de acuerdo con esto se puede decir que se comprende cuando el sujeto es capaz de representar al objeto de varias formas

diferentes bien sea desde lo gráfico, lenguaje natural, lenguaje formal, etc., para esto el sujeto debe realizar la conversión, ya que como lo mencionan Posada y Villa (2006), la conversión proporciona la toma de conciencia de las características del objeto, lo que implica mínimo dos registros diferentes de representación, es decir, “la transformación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro” (Duval, 2004, pag.46).

Por otro lado, los estudiantes presentan dificultades para realizar dos o más representaciones de un objeto matemático, ya que su habilidad para realizar tratamientos y conversiones a un registro de representación es mínima. Ante esto, es importante resaltar que de acuerdo con Duval (1999), en el aprendizaje de las matemáticas se requieren además de la lengua natural e imágenes, representaciones semióticas, las cuales juegan un papel muy importante en la comprensión de las funciones cuadráticas, debido a que permiten al estudiante tener una conexión con los objetos matemáticos, debido a que estos son abstractos, y solo mediante las diferentes representaciones y articulación entre las mismas se puede tener una mejor comprensión de ellos. Además los tratamientos y conversiones que se realizan mediante los sistemas semióticos de representación permiten tener una mejor adquisición del concepto matemático en estudio, teniendo en cuenta que la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes: el uso de más de un registro de representación semiótica y la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos se constituye en símbolo de progreso de conocimiento (Duval, 1993).

De acuerdo con las anteriores dificultades, lo que se busca con esta investigación es seleccionar una secuencia didáctica que permita el desarrollo de las funciones cuadráticas.

1.2. Formulación del problema

De todo lo anterior, este trabajo se centrará en indagar sobre:

¿Cómo abordan y resuelven los estudiantes de noveno grado de la Institución educativa Pascual de Andagoya, situaciones problemas relacionados con funciones cuadráticas desde una propuesta multiregistro?

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo general

Analizar los resultados de una propuesta multiregistro, tomando como referente las unidades significantes de las actividades seleccionadas y las producciones de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Pascual de Andagoya.

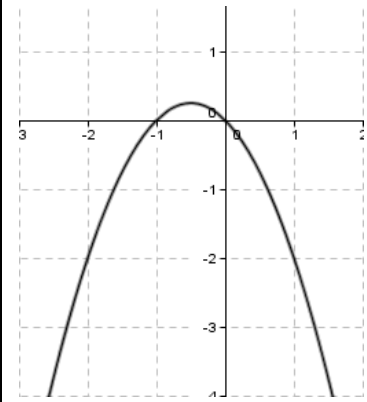
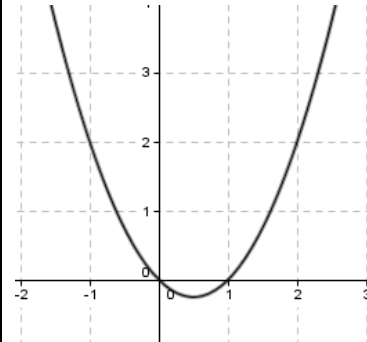
Objetivos específicos

- Articular un conjunto de situaciones problemas que hagan explicito un conjunto de unidades significantes relacionadas con funciones cuadráticas.
- Describir los resultados de la implementación, a través de los diferentes tipos de aprehensiones, en una propuesta multiregistro relacionada con las funciones cuadráticas por parte de los estudiantes de la Institución Educativa Pascual de Andagoya.
- Caracterizar las respuestas que muestran los estudiantes, en relación con la teoría semiótica cognitiva, para el abordaje de las unidades significantes.

1.4.Justificación de la investigación

En matemática, una función cuadrática es una función polinómica definida por $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$. En este trabajo se analizarán las parábolas verticales donde el signo del coeficiente a , determinará la concavidad de la gráfica.

Tabla 1. Función cuadrática, según su concavidad.

COEFICIENTE	GRÁFICA	DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE	CONCAVIDAD
- a		Menor que cero	Abajo
+ a		Mayor que cero	Arriba

En este trabajo se pretende analizar algunas representaciones que realizan los estudiantes de noveno grado, en el desarrollo de las funciones cuadráticas, a partir de una serie de actividades ya diseñadas por otros autores, apoyándonos en lo que exige el ministerio de

educación nacional (MEN), en investigaciones realizadas y en experiencias vividas por nosotras (es importante resaltar que en el desarrollo de este trabajo se hará énfasis en el pensamiento numérico y pensamiento variacional).

El Ministerio de Educación Nacional (MEN), según el decreto 5012/09 tiene como objetivo establecer herramientas para dotar al sector educativo de un servicio de calidad, diseñar estándares que definan el nivel fundamental de calidad de la educación que garantice la formación de las personas en convivencia pacífica, participación y responsabilidad democrática, diseñando así los lineamientos curriculares, los estándares básicos de aprendizaje y la matriz de referencia, los cuales son de gran aporte en el desarrollo de los diferentes componentes aleatorio, espacial, métrico y numérico variacional. Del mismo modo, estimulan el desarrollo de las competencias tales como la comunicación, el razonamiento y la resolución de problemas en los alumnos.

Los lineamientos curriculares son promotores y orientadores de los procesos curriculares de las instituciones. Además, son una propuesta en permanente proceso de revisión y cualificación que ha de promover el análisis, las discusiones y proyecciones en torno al mejoramiento de la calidad de la educación matemática.

De igual forma, los lineamientos curriculares proponen el desarrollo de un pensamiento variacional como un logro para alcanzar en educación básica, lo que busca superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados, buscando llevar al estudiante a analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas en la actividad práctica. Del mismo modo, la variación se encuentra en un proceso de dependencia con la variable al ser presentada en un contexto de la vida práctica, este concepto promueve en los estudiantes actitudes de

observación, el uso de registros y utilización del lenguaje, y logra que los estudiantes al generar estas actitudes puedan encontrarle un significado a las variables. De tal forma que generen aprendizajes significativos.

Otro documento importante para tener en cuenta en la planeación de las actividades a desarrollar en el aula son los Estándares Básicos de Aprendizaje, los cuales fueron formulados a partir de los lineamientos curriculares, con la finalidad de que orienten la búsqueda de localidad educativa por parte de los sistemas educativos. Es importante resaltar que un estándar es un criterio claro y público que permite juzgar al estudiante, institución y sistema educativo para determinar si cumplen con las expectativas comunes de calidad.

De acuerdo a lo anterior, los estándares básicos de competencias son una guía para el diseño del currículo educativo, el plan de estudio, los proyectos escolares e incluso el trabajo de enseñanza en el aula, la producción de textos escolares, el diseño de prácticas evaluativas, la formulación de programas y proyectos que aporte a la formación del profesorado. Los estándares básicos se crearon por la necesidad de superar las dificultades que presentan los alumnos como producto de la transmisión y memorización de contenidos, pues se busca que los estudiantes comprendan los conceptos y sean capaces de aplicarlos dentro y fuera del aula de acuerdo a las necesidades del contexto. Si bien hacen énfasis en el desarrollo de las competencias más que en los contenidos, no los excluye, ya que las competencias no son independiente de los contenidos temáticos de un ámbito del saber qué, saber cómo, el saber por qué, y el saber para qué. Para el ejercicio de cada competencia se requieren muchos conocimientos habilidades, destrezas, comprensiones, que permiten determinar si un estudiante es competente.

Ahora bien, es importante que el docente del área de matemáticas haga uso de los estándares básicos de competencia, para la formulación de su plan de área, logrando de este modo desarrollar actividades acordes para el desarrollo de un pensamiento numérico variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pues se pretende que el estudiante identifique las variables, determine su comportamiento a lo largo de sus posibles conjunto de valores, discriminar entre las variables independientes y las dependientes, además debe hacer buen uso de estas, para hacer conjeturas y predicciones.

En este mismo orden de ideas, el MEN diseñó unas herramientas claves para una educación de calidad, las cuales van dirigidas a los docentes y directivos con la finalidad de que reconozcan el aprendizaje indispensable que los estudiantes deben adquirir en cada grado desde 1° a 11° y por consiguiente se lleven a cabo estrategias necesarias para lograrlo, en otras palabras los derechos básicos de aprendizaje sirven como referente para el docente en la construcción de sus propias secuencias didácticas ya que les permite desarrollar ejercicios de planeación y prácticas en el aula, y de este modo los estudiantes podrán avanzar en su proceso de aprendizaje en relación con lo planteado por el MEN y a su vez, mejorar su proceso de aprendizaje que facilita la coherencia entre los pensamientos. Además, el docente podrá hacer un seguimiento más controlado de como aprenden los alumnos y lograr un aprendizaje significativo.

Otra de las herramientas establecidas por el MEN, es la matriz de referencia, documento basado en los DBA, que permite que los docentes identifiquen lo que se espera que los estudiantes aprendan, además prepararlos para tener mejores aprendizajes, ya que este documento presenta los aprendizajes que se evaluarán en cada competencia. Por tanto, la matriz de referencia permite establecer la relación entre las competencias y los componentes aportando

de esta manera al desarrollo del pensamiento variacional, puesto que hace una estrecha relación entre la competencia de resolución de problemas y el componente numérico variacional, dado que describe el aprendizaje que los estudiantes deben adquirir y la forma como este debe ponerse en evidencia, por ejemplo, un estudiante en grado noveno debe aprender a establecer relaciones entre las propiedades de las gráficas y de las funciones algebraicas. Por lo tanto, si el estudiante adquiere este aprendizaje de manera significativa está en la capacidad de: describir propiedades de las gráficas a partir de las características de la función y viceversa e identificar los puntos de intercepción entre diferentes gráficos, entre otros factores.

La Matriz de referencia establece que un alumno en noveno grado debe desarrollar un pensamiento numérico y variacional que le permita establecer relaciones entre las propiedades de las gráficas y las propiedades de las funciones algebraicas, además debe reconocer el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos, es decir, obtener conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares o individuales.

Desde lo personal, se considera que es necesario trabajar con la función cuadrática, ya que en nuestra etapa de estudiantes, se presentaron dificultades como la comprensión de la resolución de problemas con funciones cuadráticas, debido a que las explicaciones realizadas no eran claras, iniciando por el papel que cumple las variables en el desarrollo de las funciones. Por ejemplo, en el desarrollo de las funciones cuadráticas se exigían algunos componentes que era difícil comprender su utilización, como el que todos los valores del eje Y representan el rango de una función y el vértice era el punto más bajo o el más alto de la gráfica, todo esto necesario para el desarrollo de estas funciones. A partir de esta falencia, se solucionaban estos problemas

guiándose por ejemplos propuestos por el docente, lo cual implica que se realizaban los ejercicios de manera mecánica sin comprender qué realmente se estaba haciendo.

A partir de las dificultades reportadas en el aula y de acuerdo a lo que exige el MEN, se considera importante basar este trabajo en una propuesta multiregistro, puesto que permite profundizar en el concepto de función cuadrática y todo sus elementos, teniendo claro que, cuando se habla de multiregistro, se refiere a las diferentes representaciones semióticas que se pueden realizar de un objeto matemático con la finalidad de lograr una mejor comprensión del mismo, pues desde cada representación se pueden observar y comprender componentes de una función cuadrática; por ejemplo desde la formula canónica se puede evidenciar el vértice y el eje de simetría, desde la representación gráfica se puede encontrar los puntos de corte en X y en Y , al igual que el vértices, su concavidad y eje de simétrica, y así cada registro de representación semiótica facilita la comunicación y la comprensión de los objetos matemáticas en este caso de la función cuadrática.

Del mismo modo, es importante que los estudiantes comprendan la utilización de la función cuadrática en la vida cotidiana, por ejemplo en la ingeniería, arquitectura, en los deportes como en el lanzamiento de la pelota, jabalinas o balas, pues en su trayectoria se pueden observar una parábola lo cual expresa una función cuadrática. En el caso de los deportes se presenta una concavidad negativa, puesto que los objetos lanzados suben hasta una altura máxima (vértice) para luego bajar hasta un objetivo. Si se expresan estas situaciones en el aula de clase los estudiantes podrán observar la importancia del objeto matemático para cualquier tipo de situaciones o profesiones, encontrándole sentido e interés al aprendizaje de las funciones cuadráticas.

De acuerdo a todo lo anterior, se escogerán una serie de actividades donde se privilegie los registros, tabular, el gráfico, algebraico y la lengua natural, con el fin de que los estudiantes comprendan las funciones

1.5.Contextualización



La institución educativa Pascual de Andagoya es una institución pública que lleva 74 años formando de manera integral hombres y mujeres útiles a la sociedad colombiana con valores, capacidad crítica, analítica, espíritu científico y tecnológico, mediante el proceso de la adquisición de competencias en cada una de las áreas del conocimiento para que participen en la búsqueda de alternativas de solución a los problemas que se le presenten en cualquier contexto.

A su vez, la institución busca consolidarse como una gran empresa ofreciendo a la sociedad, hombres y mujeres con un alto desarrollo en valores éticos y técnicos con capacidad de apropiarse de la cultura, la ciencia y la tecnología, que le permitan solucionar conflictos para lograr una convivencia pacífica mejorando así su calidad de vida y poder afrontar los grandes desafíos del siglo XXI.

La institución educativa Pascual de Andagoya está ubicada en Buenaventura, departamento del Valle del Cauca, cuyos estudiantes en su mayoría pertenecen al estrato 1. Consta de tres sedes: MARIA GORETTI, MARIA AUXILIADORA Y PASCUAL DE

ANDAGOYA (sede central). Este trabajo será realizado en la sede central Pascual de Andagoya con los estudiantes del grado noveno, la institución cuenta con 52 profesores, de los cuales 4 son de matemáticas.

Los estudiantes matriculados en la institución educativa deben estar dispuestos a compartir con su comunidad, con la visión, la misión y filosofía institucional. Además, debe ser crítico e investigativo; debe ser capaz de luchar por su autonomía y creatividad fundamentadas dentro de la competencia ciudadana y los valores de la paz y la democracia. De igual forma, que sean competentes, excelente ser humano y que responda a las necesidades de conocimientos sociales, culturales, económicos y políticos del distrito especial Buenaventura. De estos estudiantes, se espera que los seleccionados adquieran competencias claras asociadas al pensamiento variacional específicamente en las funciones cuadráticas.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

En este capítulo, se presentan antecedentes los cuales sirven como soporte de las informaciones sobre las funciones cuadráticas y sobre teorías presentadas en el trabajo de grado. De igual forma, se encuentran los referentes teóricos que abordan los elementos importantes para el desarrollo de las funciones cuadráticas como: las diferentes representaciones que se pueden realizar en el proceso de conversión y tratamiento de estas, apoyándonos en la teoría de Duval (años)

2.1. Antecedentes de la investigación

En las indagaciones realizadas en trabajos cuyo objeto de estudio son las funciones cuadráticas, se encuentran investigaciones como la de Cruz (2008) “diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una función cuadrática”, y su objetivo es buscar la manera de generalizar el método de factorización en la solución de funciones cuadráticas, pretendiendo dar un aporte en el proceso de enseñanza y aprendizaje en las mismas, explicando que las investigaciones realizadas han demostrado que el aprendizaje de las matemáticas no solo es enseñar procesos; sino más bien se requieren utilizar procesos de enseñanza de tal forma que el conocimiento sea significativo para los estudiantes, proponiendo situaciones problemas que le permitan a los estudiantes indagar en lo aprendido, logrando que se interesen más por el tema, sin dejar de lado los procesos que generan comprensión del objeto de estudio.

Para esto, Cruz (2008) se basa en tres enfoques, uno epistemológico que es el conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela, uno cognitivo que son las concepciones del estudiante, sus errores, dificultades y obstáculos, que deben superar o enfrentar en el momento de realizar actividades y finalmente un enfoque didáctico que depende del método de enseñanza que utilice el docente, con el fin de desarrollar en los estudiantes un pensamiento analítico basado en el razonamiento lógico.

En el resultado de esta investigación se encontró como principal obstáculo las explicaciones del docente, ya que no proporciona un método para encontrar los números que hacen posible la factorización de un trinomio cuadrado, sino que se lleva a cabo por ensayo-

error, es decir que se busca una solución alternativa y se verifica si el resultado es correcto, pues se dificulta la factorización cuando los números no son enteros. Es decir, cuando la función es presentada con números diferentes a los enteros los estudiantes tienden a tener dificultad.

Por otra parte, Aranzazu (2013) en su tesis de maestría “secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática”, que tiene como objetivo enseñar el concepto de función cuadrática y sus distintas formas de representación algebraica mediante una secuencia, en este trabajo el autor defiende que la educación de algún modo ha perdido su propósito de enseñanza, porque los estudiantes ahora memorizan los procedimientos para un momento determinado y ya luego ese conocimiento queda en el olvido, y se sabe que el objetivo de la educación es formar estudiantes competentes, y no se es competente si nuestro conocimiento es mínimo, sino somos capaces de relacionar lo aprendido con nuestro contexto y con cada conocimiento que adquirimos. Por otro lado, para Ausubel (1983), el aprendizaje significativo se da cuando el sujeto logra relacionar la nueva información recibida con información previamente asimilada, de acuerdo con Zarzar “un aprendizaje es significativo cuando la información nueva es relacionada de una manera lógica y no arbitraria con información que ya posee el alumno” (Zarzar, 2000, pág. 28), citados por Aranzazu (2013).

Ahora bien, en cuanto a la matemática, estudios como “tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática” realizado por Gonzales (2011) donde manifiesta que los estudiantes presentan problemas para el aprendizaje de las mismas y se les dificulta hacer relación entre un objeto matemático y otro, y por consiguiente no les es fácil relacionarlos con el contexto que los rodea. Esto visto desde la enseñanza de las funciones de segundo grado, considera pertinente hacer énfasis en las distintas representaciones que se pueden

hacer de un objeto matemático, tomando como iniciativa el uso de las representaciones semióticas planteadas por Duval (2004), de tal modo que el estudiante de alguna manera por medio de estas logre entender la matemática, buscando que comprenda y resuelva funciones cuadráticas, ya que mediante cada representación puede aprender diferentes propiedades del objeto matemático en cuestión.

De otro lado, tomando como referente el trabajo de Gustin y Avirama (2014) “Propuesta para la enseñanza de la función en la escuela a través de la integración del material manipulativo”, donde se abordan aspectos sobre la problemática en la enseñanza y aprendizaje de las funciones cuadráticas en estudiantes de la educación básica, en relación con las formas tradicionales de manipular las matemáticas en la escuela como exposición del docente, ejemplos y ejercicios para los estudiantes, evidenciándose que a pesar de las investigaciones existentes, los errores y las dificultades siguen estando presentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De igual manera Socas (2007), plantea que las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas es hoy un foco de estudio e investigación matemática, en el que a pesar de la antigüedad de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aun no resueltas.

De acuerdo con lo anterior, la investigación muestra que hay dificultades presentes en el aula, relacionadas con la manera de enseñar de los docentes, puesto que hay algunos que aún conservan la enseñanza tradicional, es decir, presenta el tema, da algunos ejemplos y deja ejercicios que son similares, sin dejar que los estudiantes indaguen y puedan encontrar una solución desde sus conocimientos previos. Gustin y Avirama (2014) en su trabajo “una propuesta para la enseñanza de la función cuadrática en la escuela a través de la integración del

material manipulativo” afirman que el tratamiento de carácter estático que se les da a las matemáticas en las aulas de clases, concebidas como acabadas y con una única representación, es lo que no permite un espacio para la reflexión sobre la importancia y utilidad de los objetos matemáticos.

De igual forma, la falta de representaciones en las matemáticas incide en la enseñanza de las mismas, ya que las matemáticas son una ciencia que debe ser representada desde distintos registros para lograr su comprensión. Duval (1993) determina que “la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en el uso de más de un registro de representación”.

Finalmente, Gustín y Avirama pudieron concluir que es muy importante el contexto en el cual sean puestas las actividades que los estudiantes deben desarrollar, de tal manera que para los estudiantes sea conocido y puedan vincular las matemáticas con el contexto que conocen, buscando darle sentido a las actividades, así como las experiencias y conocimientos previos que representan un saber significativo en las actividades propuestas, permitiendo que el proceso fluya con naturalidad y de manera positiva.

De los antecedentes mencionados anteriormente, es importante resaltar que cada uno proporciona información frente a las dificultades que pueden presentar los estudiantes a la hora de la factorización de las funciones presentadas en el cambio de registro tales como la factorizada, la canónica, que serán insumos para selección de situaciones que se presentaran en la secuencia de esta investigación.

2.2. Bases teóricas

2.2.1 Como aprender matemáticas desde las representaciones semióticas de Duval:

Duval (1999), expresa que cuando el sujeto siente la necesidad de comunicar genera la necesidad de representar lo que se habla, bien sea de forma no-consciente o de forma consciente. Sin embargo, solo el paso de lo no-consciente a lo consciente se le puede llamar objetivación, puesto que lo no-consciente muestra la representación de un objeto matemático sin haber algo significativo y lo consciente se caracteriza porque reconoce a primera vista la figura del objeto. De modo que, el cambio de lo no-consciente a lo consciente es encontrarle los elementos significativos a la representación del objeto matemático.

Es necesario recalcar, que el reconocimiento de los elementos significativos de una representación lleva al sujeto a realiza la distinción entre lo que ve y lo que visualiza es decir lo que se imagina. Por tanto, Duval (1999) diferencia lo que se ve en aprehensiones, que es resaltar de lo que se ve, lo más significativo. Para esto, expone cuatro aprehensiones que puedan acercarse a la visualización del objeto matemático, que son:

Aprehensión perceptual: reconoce con deficiencia la figura o el objeto matemático.

Aprehensión operatoria: limita al estudiante en la solución de un problema frente al objeto matemático.

Aprehensión secuencial: describe el paso a paso de una construcción del objeto matemático.

Aprehensión discursiva: los estudiantes tienen el conocimiento incompleto acerca de lo que es una prueba formal y sus características (demostraciones del objeto matemático y sus propiedades).

En consecuencia, la articulación de las cuatro apreensiones permite el acercamiento a dicha visualización mencionada anteriormente, puesto que cada una de estas apreensiones presenta elementos importantes para comprender el objeto matemático. Pongamos por caso el de las funciones cuadráticas, el estudiante debe conocer la figura de la función, resolver el problema matemático del método que corresponda, resolviéndolo paso a paso y poder saber explicar lo que está haciendo e igualmente ser capaz hacer diferentes representaciones del objeto matemático y reconocer que elemento arroja cada una de esas representaciones. Una vez hecho cada uno de estos pasos correctamente se podrá decir que el estudiante comprende la función cuadrática. A modo de ejemplo tenemos la función:

1. $y = -x^2 + 4x - 3$ **Aprehensión perceptual**, reconoce a primera vista que la representación algebraica de la función representa una parábola y su concavidad es hacia abajo, puesto que a es negativo.

2. Hallar el vértice

$$x = \frac{-b}{2a} \quad y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$x = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \quad y = \frac{4(-1)(-3) - (4)^2}{4(-1)} = 1 \quad V = (2,1)$$

Apreensión operatoria y apreensión secuencial, saber encontrar los elementos significativos de la función cuadrática, hallando paso a paso por medio de la representación algebraica, elementos como el vértice y los puntos de cortes.

3. Puntos de corte con los ejes

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

- PUNTO DE CORTE CON EL EJE X

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

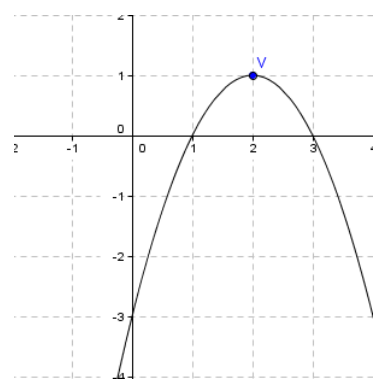
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = 3 \quad x = 1$$

- PUNTO DE CORTE CON EL EJE Y, $X = 0$

$$y = -x^2 + 4x - 3 \quad y = -3$$

4. Graficar



Apreensión discursiva, ubica de manera correcta los elementos de la función cuadrática.

De igual forma, Duval (1999) plantea que para la comprensión de un determinado objeto matemático, el estudiante debe identificar las características visuales de una representación, saber realizar la conversión de un registro a otro, enunciar los elementos significativos del objeto, realizar tratamientos dentro de cada registro y finalmente no debe confundir el objeto representado con su representación, lo que indica el dominio del objeto de estudio. Ejemplo:

Tabla 2. Tratamiento y conversión de una función cuadrática.

OBJETO DE ESTUDIO		
Ejemplo	Tratamiento	Conversión
$y = x^2 + 8x + 15$	$y = (x + 5)(x + 3)$	

$y = x^2 + 8x + 15$	$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(1)} = -4$ $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ $= \frac{4(1)(15) - (8)^2}{4(1)}$ $y = -1$	
---------------------	--	--

Este concepto “conversión” exige que se plantee una claridad entre lo que es un sistema de representación y un registro de representación. El primero se centra en los medios para representar gráficamente una idea y el segundo describe distintos medios para representar una misma información, siendo así, se deja claro que a través de los registros de representación se puede realizar conversión. Siendo esta una de las actividades cognitivas más importantes porque articular una determinada información, que es transportar una determinada información de un registro a otro y viceversa sin que se pierda el significado de lo que en su interior se dice, solo que se visualiza de forma diferente, siendo el mismo contenido presentado en distintos registros.

Finalmente, se quiere dejar claro que la comprensión desde Duval (1999), se entiende como la articulación y significación que se presentan entre los registro de representación. Esto es, poder representar una información de un registro a otro, sin perder de vista la necesidad de comunicar y sobre todo de generar un aprendizaje significativo.

2.2.2. Una aproximación hacia la comprensión de un objeto matemático:

Los distintos registros semióticos, son herramientas indispensables para el aprendizaje de las matemáticas, a pesar de ser un tema de difícil comprensión para los alumnos, entre estos dos factores existen componentes que son de gran importancia como son: la comprensión de las diferentes representaciones, la conversión de un registro a otro, el tratamiento en el mismo registro y por supuesto la compresión del objeto matemático. A continuación se presentará la postura de Cristina Pecharroman (2014) y Raymond Duval (2004), que hablan de estos componentes importantes para la comprensión de un objeto matemático.

Tabla 3. Comprensión de un objeto matemático.

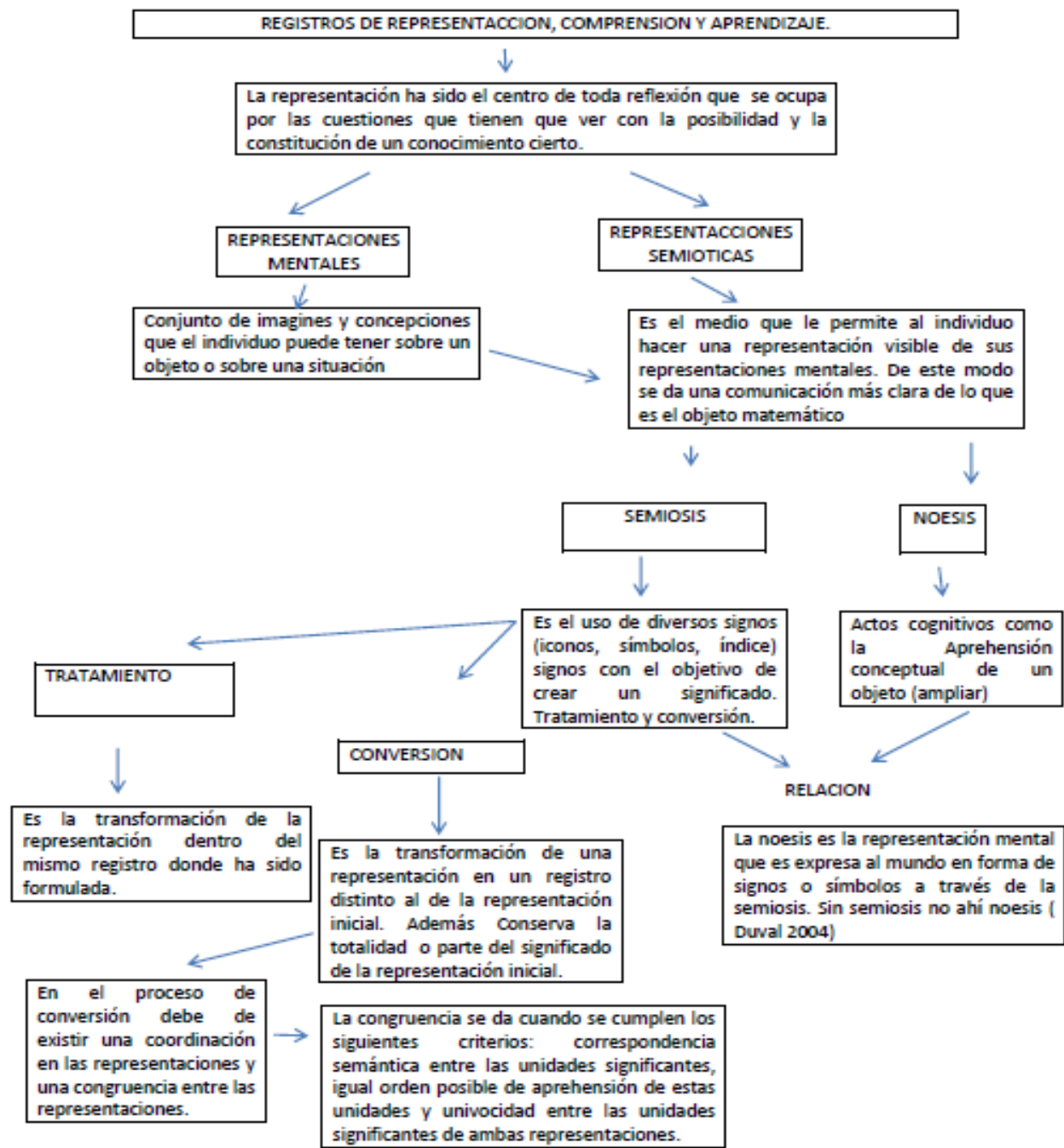
CARACTERISTICAS	PECHARROMAN (2014)	DUVAL (2004)
COMPRENSIÓN	Se comprende el objeto matemático cuando se reconoce la funcionalidad de este en un contexto, el objeto no tiene existencia material, sino desde el contexto de percepción de la funcionalidad (un contexto físico, la representación de un objeto matemático, un registro semiótico). Por tanto el sujeto ha adquirido un conocimiento matemático cuando está en la capacidad de utilizarlo para organizar o interpretar contextos y situaciones diversas y construye nuevos aprendizajes a partir de los aprendizajes ya	Se comprende el objeto matemático cuando está en la capacidad de representarlo en distintos tipos de representaciones semióticas, ya que estas representaciones le permiten al alumno extraer de cada una de ellas un aprendizaje significativo distinto.

	adquiridos.	
REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	El sujeto debe independizar el objeto de sus representaciones, porque independientemente de su representación con signos distintos pero equivalentes deben dar la misma información, ya que cada representación es un medio de aprendizaje distinto.	Las representaciones semióticas son el medio que permite hacer visible las representaciones mentales, permitiendo una comunicación más clara de lo que es el objeto matemático por medio del uso de la semiósis (uso de diferentes signos) que permite la construcción de significados.
CONVERSIÓN	La conversión es la formación de la representación del objeto en el registro de llegada desde su representación en el registro de partida. El proceso de conversión necesita el conocimiento de registros semióticos de partida y de llegada.	La conversión es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.
TRATAMIENTO		Es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.

OBJETO MATEMÁTICO	Manifiesta que la interpretación primera o inmediata del objeto matemático, del mundo sensible se hace a través de cualidades como la cantidad, el tamaño o medida, la ubicación o posición referencial y la forma. Estas cualidades además de motivar la construcción de los primeros objetos son experiencias perceptivas y, por consiguiente medios de interpretación del mundo físico, que permiten al individuo adquirir un conocimiento previo, que puede ser utilizado para construcción de nuevos aprendizajes y comprensión de otros objetos matemáticos.	El reconocimiento de un objeto como miembro del aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica de una clase, por tener características (de expresión, propiedades, uso) comparables o semejantes a los objetos que configuran la clase, conduce a identificar la funcionalidad que representa el objeto con la de los objetos de la clase (un ortoedro es un prisma, un porcentaje es un operador fraccionario...) o a interpretar el objeto por medio de ellos.
--------------------------	--	--

El cuadro anterior tiene como objetivo, establecer la relación que existe entre la visión que tienen Duval y Pecharroman frente a la comprensión del objeto matemático desde las representaciones semióticas. Pues ambos se apoyan en estas como medio para comunicar y construir el significado de un objeto matemático, considerando que el alumno comprende un objeto cuando lo representa en distintos registros de representación semiótica y además reconoce la funcionalidad de este en distintos contextos. De acuerdo con esto, consideran importante que el alumno tenga claro qué son las representaciones semióticas, puesto que cada representación es un medio de aprendizaje distinto y además permite una comprensión más clara del objeto matemático. Para lograr todo lo anterior, es importante que el estudiante sea capaz de llevar a cabo sin mayor dificultad los procesos de conversión y tratamiento.

2.2.3. Registro de representación, comprensión y aprendizaje.



² Representación semiótica.

Según Duval (2004), el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión. Debido a esto en el cuadro anterior, se tomaron aspectos importantes de los registros de representación, comprensión y aprendizaje que expone Duval, los cuales son vitales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que en esta materia se necesitan de las representaciones, los tratamientos y las conversiones para un mejor aprendizaje. Por ejemplo: si se tiene el registro semiótico de un medio en el lenguaje aritmético, una representación semiótica es $\frac{1}{2}$, y uno de sus tratamientos es 0.5, una de sus conversiones es $2x - 1 = 0$ porque este último se expresa en lenguaje algebraico, el cual es un registro semiótico diferente al aritmético, si puede transitar de un registro a otro y trabajar en el mismo registro de representación se considera que el estudiante ha comprendido el objeto matemático.

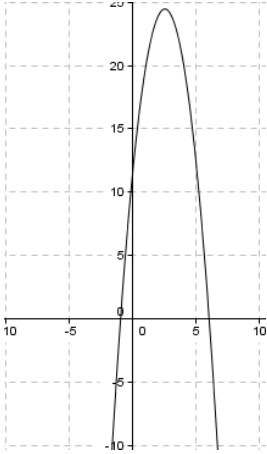
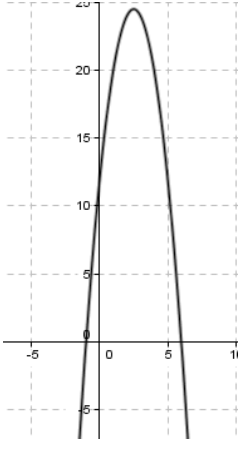
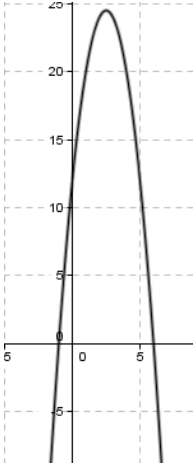
Por lo tanto, los investigadores en educación matemática sugieren que debemos involucrar a nuestros estudiantes en actividades que les permitan construir los conceptos matemáticos a través de una variedad de transformaciones y conversiones de representaciones semióticas en este caso función cuadrática.

2.3. Elementos disciplinares: función cuadrática.

Una función cuadrática es una función polinómica definida por: $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Las gráficas de estas funciones corresponden a parábolas, donde, si a es mayor que cero el vértice de la parábola representa un mínimo, es decir que la parábola es cóncava hacia arriba y cuando a es menor a cero el vértice representa un máximo, es decir que cóncava hacia abajo. Hay tres formas algebraicamente de representar una función cuadrática, sin embargo la gráfica es única independiente de la representación:

- **Forma polinómica:** Corresponde a un polinomio de segundo grado como: $y = ax^2 + bx + c$.
- **Forma factorizada:** La función cuadrática puede ser factorizada, siendo a , el coeficiente principal de la función, es decir, $y = ax^2 + bx + c$ puede ser factorizada como: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Por ello se extrae siempre como factor común, de no escribirse, el coeficiente de x^2 sería 1. En el caso de que x_1 y x_2 sean iguales se podría escribir de la siguiente manera: $y = a(x - x_1)^2$.
- **Forma canónica:** La función cuadrática puede ser expresada mediante el cuadrado de un binomio, como: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde a el coeficiente principal y el par ordenado **(h ; k)** las coordenadas del vértice de la parábola. Para llegar a esta expresión se parte de la forma polinómica y se completan cuadrados.

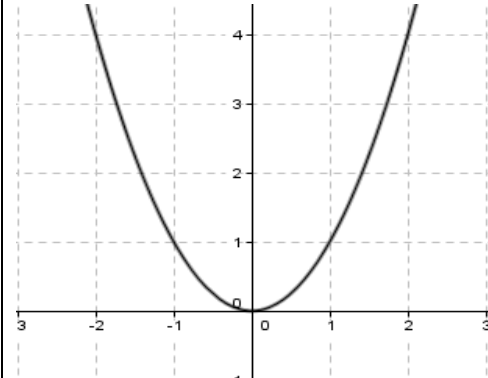
A modo de ejemplo, $y = -2x^2 + 10x + 12$

	Forma polinómica	Forma factorizada	Forma canónica
	$y = -2x^2 + 10x + 12$	$y = -2(x - 6)(x - (-1))$	$y = -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}$
Gráfica			

De acuerdo a lo anterior, comprender las distintas formas de representar una función cuadrática son de gran importancia en el aprendizaje, pues de cada representación nos permite conocer los elementos de una función cuadrática como lo es: su concavidad y el punto de corte con el eje Y, observados en la forma polinómica $y = -2x^2 + 10x + 12$, donde el signo del primer término expresa su concavidad y el último

término el punto de corte con el eje Y; el vértice, que resulta de la forma canónica $y = -2(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{49}{2}$ y por último sus puntos de corte con el eje X expresados en la formula ya factorizada de la forma polinómica $y = -2(x - 6)(x - (-1))$.

Hay que mencionar además, otros puntos importantes en las representaciones de la función cuadrática como lo son la representación gráfica, la representación en forma tabular y la representación en lengua natural.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA	REPRESENTACIÓN TABULAR	REPRESENTACIÓN LENGUA NATURAL												
	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>2</td><td>4.5</td></tr><tr><td>1</td><td>9</td></tr><tr><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>-1</td><td>1.5</td></tr><tr><td>-2</td><td>0</td></tr></table>	x	y	2	4.5	1	9	0	3	-1	1.5	-2	0	“Una pelota es lanzada hacia arriba a 48 pies/s desde una plataforma que está a 100 pies de altura. Encontrar la altura máxima que alcanza la pelota y qué tanto tiempo le tomará llegar ahí”.
x	y													
2	4.5													
1	9													
0	3													
-1	1.5													
-2	0													

El nivel de las representaciones ayuda a diferentes contextos propios de los tipos de pensamiento. Una representación gráfica, se conecta con las potencialidades conceptualizadoras

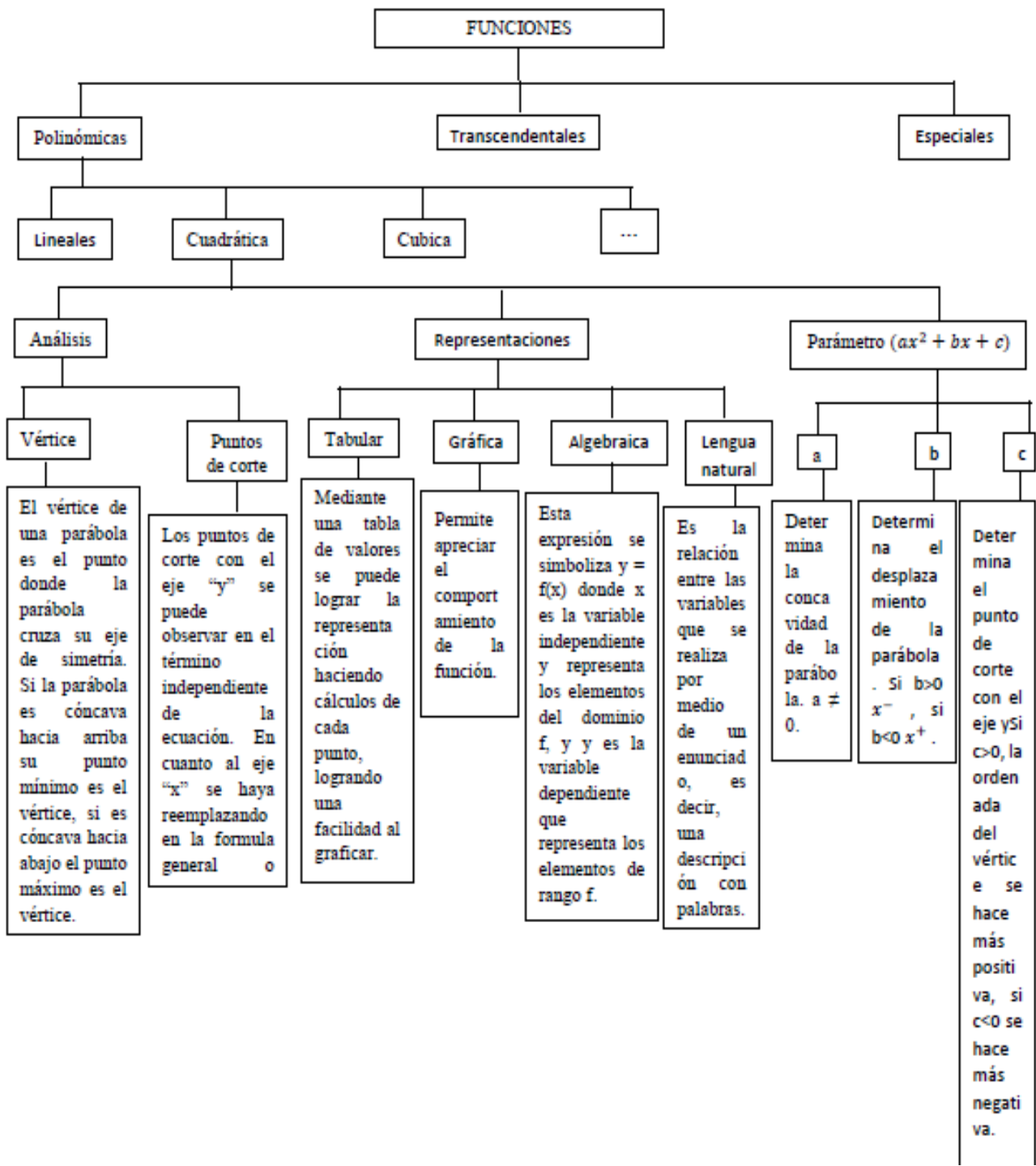
de la visualización y se relaciona con la geometría; la representación en forma tabular, pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos; las expresiones algebraicas, se relacionan con el pensamiento variacional, mientras que la representación en lengua natural se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para trabajar las competencias comunicativa, interpretativa, argumentativa y propositiva.

En este trabajo será primordial las diferentes representaciones, puesto que si el estudiante es capaz de realizar más de dos representaciones de un objeto matemático, mejor será su comprensión, por esta razón en este trabajo se pretende que los estudiantes al cual va dirigida la secuencia didáctica comprendan cada representación y puedan emplearlas sin ningún inconveniente, logrando resolver con más facilidad las funciones cuadráticas.

Por lo que se refiere a función, Hitt (2002, p. 75) citado por Huapaya (2012), describe una función como una variable relacionada con otra variable tal que a cada valor de la última le corresponde únicamente un valor de la primera. Además, las funciones permiten representar, modelar y describir situaciones del mundo real, ya sean fenómenos físicos, económicos, biológicos o demográficos. Por ejemplo, ayuda a conocer la variación del precio de la moneda en un periodo de tiempo, ayuda a predecir el valor de una empresa en la bolsa de valores, etc.

Es necesario recalcar que existen varias clases de funciones, sin embargo en el presente trabajo de grado se enfocará en las funciones cuadráticas, haciendo énfasis en su análisis con respecto al vértice y los puntos de corte con los ejes, igualmente en las diferentes representaciones que se pueden realizar como lo es: tabular, grafica, forma algebraica y lengua natural. Finalmente

también se tendrá en cuenta la importancia que tiene cada parámetro (a, b y c) de las funciones cuadráticas para su representación.



2.4. Elementos curriculares

En este trabajo se hará énfasis en algunos elementos importantes presentados por el ministerio de educación tales como los lineamientos curriculares (1998), donde se evidencian tres aspectos esenciales en el proceso educativo como: procesos generales, conocimientos básicos y el contexto; presentados a continuación:

2.4.1. Procesos generales

Los procesos generales tiene que ver con el desarrollo del pensamiento matemático, en ellos se encuentran aprendizajes como: el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Para el desarrollo de este trabajo se ha tomado la resolución y planteamiento del problema, así mismo como el razonamiento como procesos primordiales para fomentarlos en los estudiantes a través de las actividades escogidas.

2.4.2. Conocimientos básicos

Describe los tipos de pensamiento como: el numérico, el espacial, métrico, aleatorio y el variacional, este trabajo se centra en el pensamiento numérico y en el pensamiento variacional, ya que le permite al estudiante analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas en la actividad práctica, así mismo generar en los estudiantes actitudes donde puedan encontrar un significado a las variables.

2.4.3. El contexto

Hace énfasis a los ambientes que rodea a los estudiantes y contribuyen al sentido de las matemáticas que aprenden, logrando un acercamiento hacia ellas mediante situaciones problemáticas que proceden de la vida diaria, ya que es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje. Tal como lo expone Van (1997, pags 13-14), los estudiantes aprenden a usar las matemáticas en la sociedad y a descubrir que las matemáticas son relevantes para su educación. Puesto que es importante que los estudiantes aprendan matemática como parte de su educación básica, como también es importante que sepan porque las aprenden, debido a que las matemáticas serán utilizadas durante toda la vida, bien sea en el mercado, en una tienda, en la plata que ganamos, etc., así podrán encontrarles el significado a las matemáticas, analizando su grado de importancia.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

3.1. Metodología

La presente indagación se realizará teniendo en cuenta la técnica estudio de caso. Para ello, se seleccionará una muestra de 10 estudiantes con los cuales se desarrollará un conjunto de actividades, con el fin de analizar las representaciones hechas por los estudiantes. Teniendo en cuenta las siguientes fases:

FASE 1: Revisión bibliográfica

En esta primera fase se tomaron en cuenta los referentes teóricos que apoyan esta investigación en cuanto a las dificultades que se puedan presentar en el desarrollo de funciones cuadráticas, que servirán de ayuda en la selección de actividades y evaluación de una secuencia

didáctica, que privilegia las representaciones tabular, grafica, algebraica y lengua natura, para así analizar la forma como trabajan los estudiantes y a su vez logra un mejor aprendizaje de las funciones cuadráticas en grado 9°.

FASE 2: Selección de las actividades e implementación.

Una vez recogida la información de las dificultades en el desarrollo de las funciones cuadráticas, se seleccionó una serie de actividades, que permitan dar cuenta de cómo los estudiantes abordan los problemas desde las distintas representaciones. La implementación de la secuencia, se realizaron de manera individual, para así poder desarrollar mejor los objetivos.

FASE 3: Análisis de los resultados

En la tercera fase se observaron los resultados obtenidos al aplicar la secuencia didáctica a los estudiantes de noveno grado de la Institución Educativa Pascual de Andagoya, teniendo en cuenta la teoría de Raymond Duval desde las representaciones semióticas y las aprehensión visuales que se pueden obtener en el desarrollo de situaciones que involucre un objeto matemático.

3.2. Secuencia didáctica

La visión dominante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas era de tipo cognitivo basada en la teoría piagetiana, la cual se ocupa del desarrollo cognitivo del niño, es decir del conocimiento que adquiere sobre el mundo que los rodea mas no de su aprendizaje escolar; su gran interés es cómo el niño a medida que crece va concibiendo o comprendiendo el mundo. Brosseau (1986), por su parte plantea la teoría de las situaciones didácticas, la cual

permite comprender las interacciones sociales entre alumnos, docentes, y saberes matemáticos que se dan en una clase y condicionan lo que los alumnos aprenden y cómo lo aprenden, además esta teoría permite que el alumno adquiriera la capacidad de aplicar en el mundo lo que aprende en el aula.

Por otro lado una situación didáctica, es todo el entorno del alumno, incluido el docente y el sistema educativo, la cual tiene como intención que el alumno aprenda algo, él debe relacionarse con el problema y responderlo con base en sus conocimientos y sin que el docente intervenga directamente para ayudarlo a encontrar la solución. De acuerdo con esto, para el desarrollo de nuestra secuencia de actividades nos apoyaremos en la teoría de las situaciones didácticas de Brosseau (1986), puesto que esta nos permite satisfacer las necesidades de la comunidad educativa, la cual se basa en formar estudiantes competentes, capaces de enfrentar los desafíos del mundo.

En este orden de ideas, se seleccionó un conjunto de actividades trabajos de grado como el de Emiliana Vargas (2011) el cual habla del concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionas con fenómenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, donde se privilegia los diferentes registros de representación: algebraico, tabular, lengua natural y gráfico.

ACTIVIDADES

SITUACIÓN 1	La concavidad, el intercepto y la enunciación de propiedades de las funciones cuadráticas.
DESEMPEÑO	Reconoce la concavidad, el intercepto y enuncia propiedades de las funciones cuadráticas.

COMPETENCIA	Comunicación
INSTITUCIÓN EDUCATIVA	Institución Educativa Pascual de Andagoya
GRADO	Noveno

Una función cuadrática es una función polinómica definida por: $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx$, $y = ax^2 + c$; donde el signo del coeficiente a determina la concavidad, c representa el punto de corte con el eje y. La función cuadrática puede ser expresada también, mediante el cuadrado de un binomio, como: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde **a** es el coeficiente principal que determina la concavidad y el par ordenado **(h ; k)** las coordenadas del vértice de la parábola. Para llegar a esta expresión se parte de la forma polinómica y se completan cuadrados. Y a partir de un conjunto de tratamiento se llega a la expresión deseada.

TAREA 1: Lengua natural y enunciación de la concavidad.

1. De las siguientes funciones determine su concavidad:

- $y = 2x^2$
- $y = -3x^2 + 8$
- $y = x^2 - 7x + 12$
- $y = -x^2 + 4x$

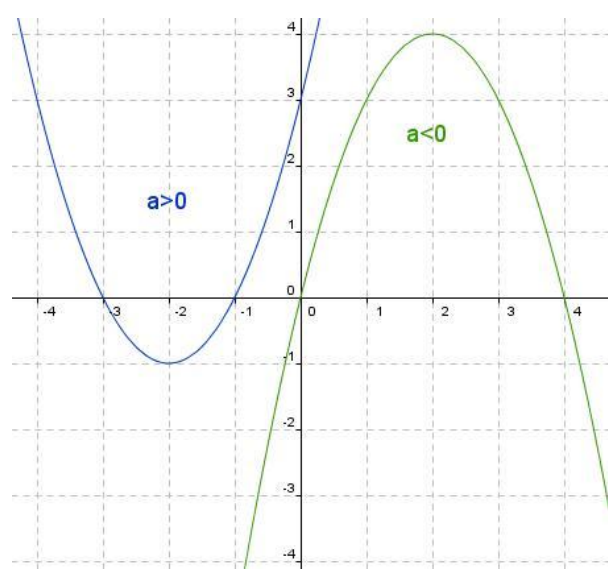
TAREA 2: El vértice y la formula canónica

1. Identificar el vértice de las siguientes funciones cuadráticas.

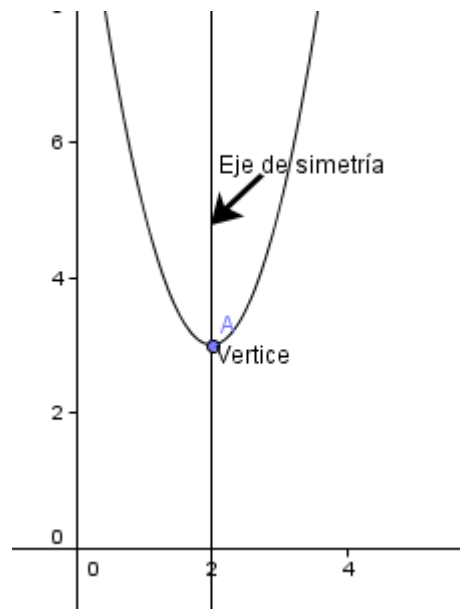
- $y = -2(x - 1)^2 - 4$
- $y = -2(x + 1)^2 - 4$
- $y = (x - 3)^2 + 2$
- $y = (x + 1)^2 - 9$

SITUACIÓN 2	La gráfica de una función cuadrática y sus componentes.
DESEMPEÑO	Halla y grafica una función cuadrática con sus respectivas componentes.
COMPETENCIA	Razonamiento
INSTITUCIÓN EDUCATIVA	Institución Educativa Pascual de Andagoya
GRADO	Noveno

La grafica de una función cuadrática es representada por una parábola, esta tiene algunas propiedades tales como: su concavidad, máximos o mínimos, entre otras, que permiten la construcción del trazo. Esta grafica tiene un punto especial llamado vértice; además su concavidad y su vértice están determinados dependiendo del signo del componente “a”. Ver la siguiente gráfica:



El vértice es el punto más alto o más bajo de la curva, dependiendo si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo. En el caso de que la gráfica abra hacia arriba, el vértice será su punto más bajo; y una parábola que abre hacia abajo, tendrá un vértice en su punto más alto. De igual forma, la gráfica contiene un eje de simetría, el cual es la recta que pasa por el vértice de una parábola que la divide en dos partes simétricas.



La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$, tiene el eje de simetría $x = h$. Por otra parte, para graficar una función se debe seguir los siguientes pasos:

- a. Determinar cómo se abre la parábola (hacia arriba o hacia abajo). Para ello se analiza el signo del coeficiente “a”. Recordamos que si $a < 0$, la parábola de la función abre hacia abajo y cuando $a > 0$, la parábola de la función abre hacia arriba.

b. Determinar el vértice V (h,k) de la parábola. Recordamos que $h = -\frac{b}{2a}$ y $k =$

$$\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

c. Hallar el intercepto en el eje x, haciendo $f(x) = y = 0$ y resolver.

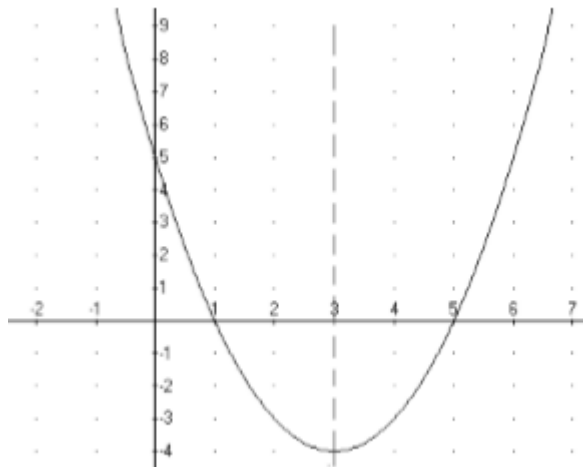
d. Hallar el intercepto en el eje y, haciendo $x = 0$.

e. Ubicar los interceptos y el vértice en el plano cartesiano.

f. Conectar dichos puntos como una curva.

TAREA 1: La representación canónica y el eje de simetría.

1. Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$. Estúdiala.



a. ¿Cuál es el vértice?

b. ¿Cuál es el eje de simetría?

c. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje X?

d. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje Y?

2. Identifica el eje de simetría para la función de:

- a. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$
- b. $f(x) = (x - 3)^2 + 1$
- c. $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 5)^2 - 8$

TAREA 2: Componentes de la gráfica y su ubicación en el plano.

1. Construya la gráfica de la función, definida los números reales $y = f(x) = x^2$ y la gráfica de la función definida también en los números reales $y = f(x) = -x^2$, así:

x	-4	-3	-5/2	-1	0	1	2	3	7/2	4
$y = x^2$	16				0					16
$y = -x^2$				-1						

- a. Complete la tabla
- b. Ubique los puntos en el plano cartesiano.
- c. Una los puntos con un color diferente para cada una de las funciones.
- d. Describa las diferencias y similitudes en cuanto a la forma, la posición y eje de simetría.

2. Construya las gráficas $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$ y $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^2$. ¿Cómo es el comportamiento de estas nuevas gráficas? ¿Crecen o decrecen más rápidamente?
3. Considere la función $y = f(x) = x^2 - x - 6$, con x en R. Elabore la tabla de valores.

X	-3/2	-2	-1	0	1/2	1	2	3
F(x)								

- a) Ubique los puntos en el plano cartesiano.
- b) ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje x y con el eje y?
- c) Halle el vértice.
4. Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x - 6$.
- a. Encuentre el intercepto en y
- b. Encuentre el vértice de la función
- c. Encuentre el eje de simetría
- d. Grafica la función y determine su concavidad.

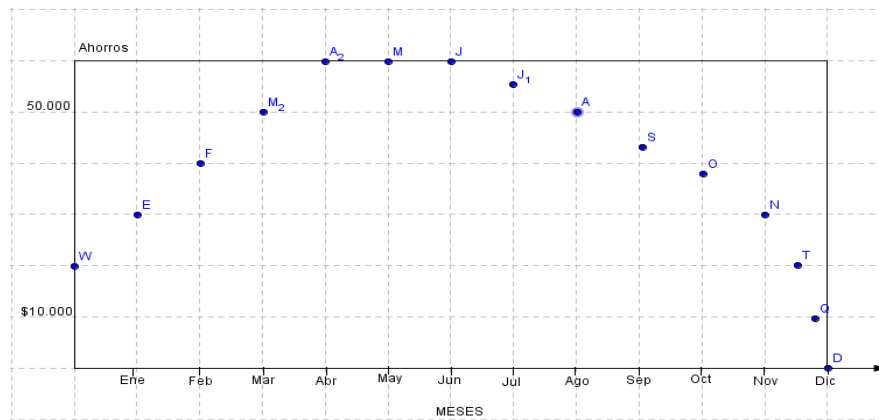
SITUACIÓN 3	Gráfica ,componentes de la función, e interpretación
DESEMPEÑO	Interpreta y construye graficas de la función cuadrática mediante la resolución de problemas.
COMPETENCIA	Resolución.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA	Institución Educativa Pascual de Andagoya.
GRADO	Noveno.

Las funciones cuadráticas son más que curiosidades algebraicas, son ampliamente usadas en la ciencia, los negocios, y la ingeniería. La parábola de una función cuadrática puede describir trayectorias de chorros de agua en una fuente y el botar de una pelota, o pueden ser incorporadas en estructuras como reflectores parabólicos que forman la base de los platos satelitales y faros de los carros. Las funciones cuadráticas ayudan a predecir ganancias y pérdidas en los negocios, graficar el curso de objetos en movimiento, y asistir en la determinación de valores mínimos y máximos. Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los carros hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño.

Comúnmente usamos ecuaciones cuadráticas en situaciones donde dos cosas se multiplican juntas y ambas dependen de la misma variable. Por ejemplo, cuando trabajamos con un área. Si ambas dimensiones están escritas en términos de la misma variable, usamos una ecuación cuadrática. Porque la cantidad de un producto vendido normalmente depende del precio, a veces usamos una ecuación cuadrática para representar las ganancias como un producto del precio y de la cantidad vendida. Las ecuaciones cuadráticas también son usadas donde se trata con la gravedad, como por ejemplo la trayectoria de una pelota o la forma de los cables en un puente suspendido.

1. Al finalizar el mes de diciembre de 2009, Daniela inicio un ahorro mes por mes, para su paseo de fin de año, la gráfica muestra como cambiaron los ahorros de Daniela durante el año 2010.



- a. ¿Entre Junio y Diciembre cuanto ahorro Daniela?
- b. ¿Qué sucedió con los ahorros de Daniela entre los meses de junio y noviembre?
- c. Los ahorros de Daniela siempre aumentaron, siempre disminuyeron, si, no, porqué explique.

2. Un grupo de personas se presenta para reclamar un premio de 500.000, los ganadores se reparten en partes iguales. Para repartir el premio se debe tener en cuenta tres partes más lo que implica una reducción de 37.500 de la cantidad que recibiría cada persona. ¿cuántas personas forman el grupo de ganadores?
3. Los ingresos mensuales de un empresario de máquinas electromecánicas están dados por la función: $f(x) = 100 \cdot x - 2x^2$, donde x es la cantidad de máquinas que se fabrican en el mes.

Observen el gráfico y respondan:



Tomada de <https://www.educ.ar/recursos/14923/aplicaciones-de-la-funcion-cuadratica>

- ¿Cuántas máquinas se deben fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?
- Si decimos que la ganancia fue de ochocientos pesos aproximadamente, ¿cuántas máquinas se fabricaron?
- ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican veinte máquinas?
- ¿A partir de qué cantidad máquinas se comienza a tener pérdidas?

3.3.Análisis a priori de las actividades

Con las actividades seleccionadas se quiere lograr la comprensión de las funciones cuadráticas. Estas fueron divididas en tres situaciones, las cuales están escritas de manera secuencial, en la primera situación se hace el reconocimiento de las partes de una función cuadrática a partir de vértice y su concavidad, en la segunda situación se busca que el estudiante este en la capacidad de graficar una función cuadrática con sus componentes y finalmente, en la

tercera situación el estudiante será capaz de resolver problemas relacionado con la vida cotidiana que involucre esta clase de funciones.

SITUACIÓN 1

En esta situación se espera que los estudiantes identifiquen la concavidad y el vértice de una función cuadrática a partir de la función dada, bien sea la canónica o la fórmula polinómica. Para esto antes de comenzar con la actividad se le presentará una breve introducción a modo de explicación, permitiéndoles a los estudiantes tener todas las bases necesarias para el desarrollo de las actividades, texto donde se les explica a los estudiantes las partes de una función cuadrática y que significa cada una de ellas.

Una vez hecha la lectura, podrán identificar la concavidad y el vértice de una función dada. Lo anterior se podrá desarrollar en dos tareas: la primera tarea se le presentará a los estudiantes 4 funciones cuadráticas, las cuales tendrán que identificar y enunciar su concavidad, en la segunda tarea igualmente tendrán que identificar el vértice de otras funciones presentadas de forma canónica.

SITUACIÓN 2

En el desarrollo de esta situación esperamos que los estudiantes coloquen en práctica los conceptos previos de función cuadrática tales como: la concavidad, el vértice y el eje de simetría se les presentara de manera resumida las formulas y definiciones necesarias para llevar a cabo el desarrollo de la situación. Hubo una tarea 1 donde se les dio la función de manera polinómica y la gráfica de esta, se espera que el estudiante a partir de las definiciones presentadas pueda determinar cuál es el vértice, el eje de simetría y los puntos de cortes tanto en X como en Y bien

sea utilizando las formulas o de manera visual. Posteriormente se le presentan la función de forma canónica para que el estudiante determine el eje de simetría.

Posteriormente tendremos una tarea dos, donde se les darán dos funciones al estudiante para que construya la gráfica correspondiente a cada una, de acuerdo a los valores que se le asignaron a X, después de construidas sus graficas deberá realizar un análisis del comportamiento de cada una y encontrar las diferencias y similitudes.

En la tarea tres y cuatro tuvieron unas funciones a la que debieron encontrarle los puntos de corte en X y en Y, el vértices de la función y su eje de simetría finalmente deberán dibujar su gráfica y determinar la concavidad se espera que el estudiante haga uso de las formulas y definiciones presentadas en el introducción de la situación dos.

SITUACIÓN 3

En esta situación se espera que los estudiantes sean capaces de resolver problemas que involucren las funciones cuadráticas, graficar la situación e interpretar gráficas. Esta situación contiene tres actividades. En el primer ejercicio el estudiante deberá interpretar la gráfica presentada dando solución a las preguntas, encontrando la relación o el sentido con las funciones cuadráticas y su comportamiento.

Posterior a ese punto, habrá un segundo ejercicio que tendrán que resolverlo encontrando la función que define el problema, en este se le presentan unos valores que se tienen que tener en cuenta para la solución, el estudiante tendrá que reconocer el valor que le corresponde a cada variable, para así darle solución a lo pedido en el problema.

Finalmente, los estudiantes se encuentran con un tercer problema dado por una función y su gráfica, tendrán que analizarla y responder una serie de preguntas propuestas en el ejercicio, además en algunas de las preguntas habrá que desarrollar ciertos procedimientos, los cuales se espera que los estudiantes evalúen en la función para poder dar solución a la situación.

CAPÍTULO 4: RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1.Análisis de la situación 1

En esta situación se esperaba que los estudiantes identificaran la concavidad y el vértice de una función cuadrática a partir de la función dada, bien sea en la forma canónica o la fórmula polinómica general. Antes de comenzar con la actividad se le presentó una breve introducción de forma escrita a modo de explicación, permitiéndoles a los estudiantes tener todas las bases necesarias para el desarrollo de las actividades, de tal modo que se relacionaran con las características de una función cuadrática y lo que implica cada una de ellas.

TAREA 1: Lengua natural y enunciación de la concavidad.

2. De las siguientes funciones determine su concavidad:

- e. $y = 2x^2$
- f. $y = -3x^2 + 8$
- g. $y = x^2 - 7x + 12$
- h. $y = -x^2 + 4x$.

Tabla 4: Resultado de la enunciación de la concavidad

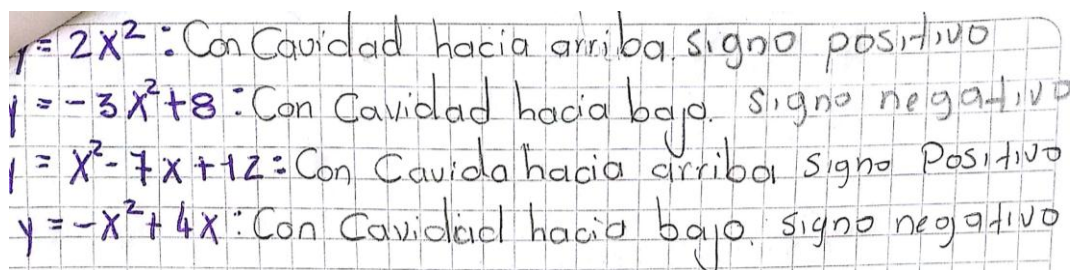
TIPO DE REPRESENTACIÓN	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que responden mediante el uso lengua natural.	4
Estudiantes que responden por medio de las representaciones gráficas y representaciones algebraicas	4
Estudiantes que responde por medio de las representaciones gráficas y lengua natural	2

A partir de los resultados obtenidos en la tabla 4, se puede decir que los estudiantes no presentan dificultad alguna para identificar los elementos significativos que hacen posible determinar la concavidad de la gráfica de una función cuadrática. Pues la mayoría de los estudiantes acuden al menos a dos registros de representación para coordinar los elementos característicos con el registro de inicial. En este sentido, puede verse que el registro inicial ofreció a los estudiantes información suficiente para responder cada uno de los interrogantes planteados.

La unidad significativa de la tarea 1 corresponde al signo que acompaña al coeficiente a . En este caso, las respuestas de los estudiantes muestran una aproximación directa a los elementos significativos a través de la coordinación. Pues a simple vista los estudiantes fueron capaces de vincular el signo con la concavidad de la función en el registro gráfico.

En efecto, el reconocimiento de tales unidades por parte de los estudiantes se hizo evidente al relacionar las características de la expresión con un enunciado en lengua natural que permitiera identificar la misma información.

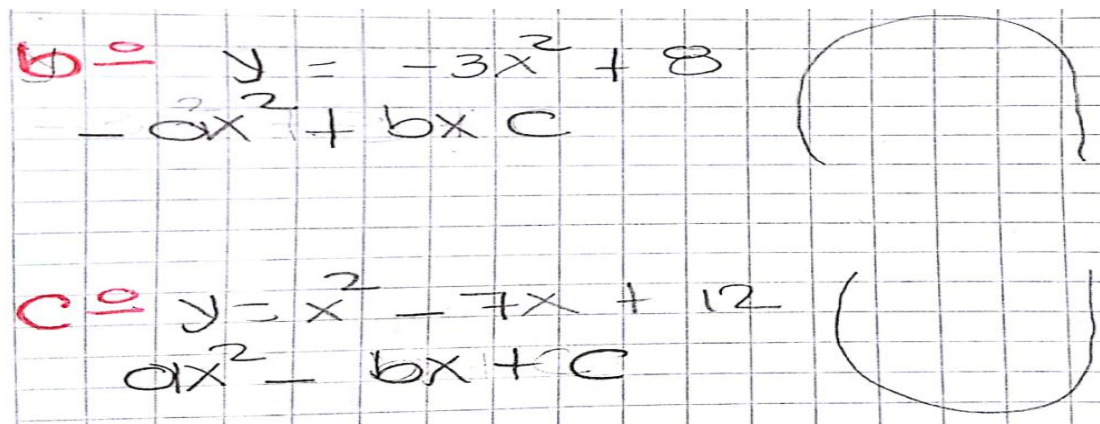
Como muestra la tabla anterior, el 40% de los estudiantes respondió de manera correcta a partir de una referencia a los elementos significativos en lenguaje natural.



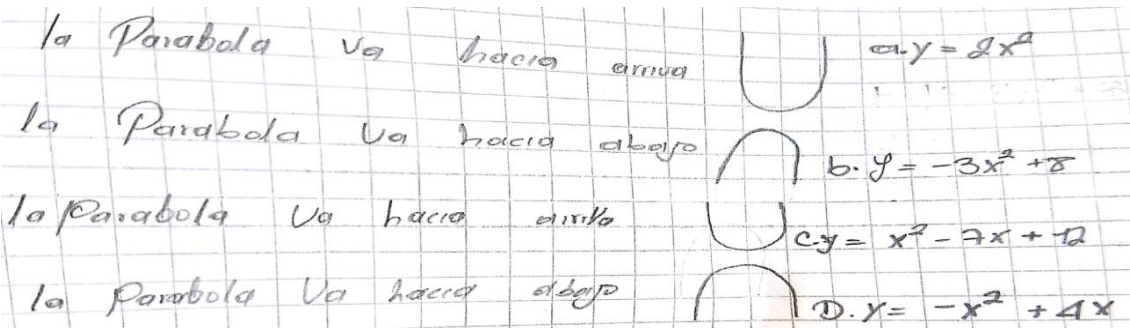
Handwritten student work on grid paper showing four quadratic functions and their concavity/sign:

- $f = 2x^2$: Con Cavidad hacia arriba, signo positivo
- $f = -3x^2 + 8$: Con Cavidad hacia bajo, signo negativo
- $f = x^2 - 7x + 12$: Con Cavidad hacia arriba, signo positivo
- $y = -x^2 + 4x$: Con Cavidad hacia bajo, signo negativo

El otro 60% de los estudiantes que respondió de forma correcta basó la respuesta a través de la información que ofrecen dos registros de representación. Por un lado, el registro gráfico y algebraico. En este sentido, se evidencia la relación considerada por los estudiantes entre el signo del parámetro de la expresión inicial (2, -3, 1, -1) con el signo del parámetro en la ecuación en forma canónica a para determinar la concavidad. Es decir, aquellas expresiones que tenían signo positivo eran comparadas con la condición inicial $a > 0$, abre hacia arriba. Y por tanto, trazaban la gráfica correspondiente.



Por otro lado, la relación entre el registro en lengua natural y la representación gráfica. Pues los estudiantes además de trazar la concavidad correspondiente a la función cuadrática inicial justifican la conversión a través de una característica en lenguaje natural de manera casi formal como se muestra en la imagen.



Al finalizar la tarea 1, y teniendo en cuenta las producciones por parte de las estudiantes, se puede decir, que ésta fue comprendida en su totalidad en el sentido en que el 100% logra vincular el elemento significativo $a > 0$ o $a < 0$ con la concavidad en la representación gráfica.

Lo anterior muestra que hubo un acercamiento a la comprensión de lo que implica el parámetro a en la función cuadrática a través de la identificación espontánea de los elementos constitutivos.

TAREA 2: El vértice y la formula canónica

2. Identificar el vértice de las siguientes funciones cuadráticas.

- e) $y = -2(x - 1)^2 - 4$
- f) $y = -2(x + 1)^2 - 4$
- g) $y = (x - 3)^2 + 2$
- h) $y = (x + 1)^2 - 9$

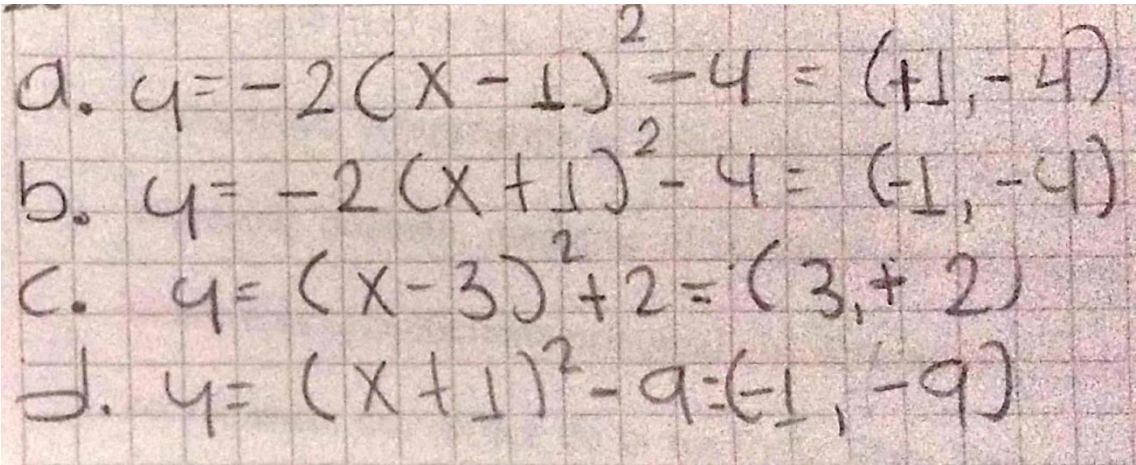
Tabla 5: Resultado de la enunciación del vértice mediante la fórmula canónica

TIPO DE RESPUESTA	ESTUDIANTES	PORCENTAJES
Estudiantes que coordinan los dos elementos (h y k) del vértice según la fórmula canónica.	5	50%

Estudiantes que coordinan un solo elemento (h o k) del vértice según la fórmula canónica.	5	50%
---	---	-----

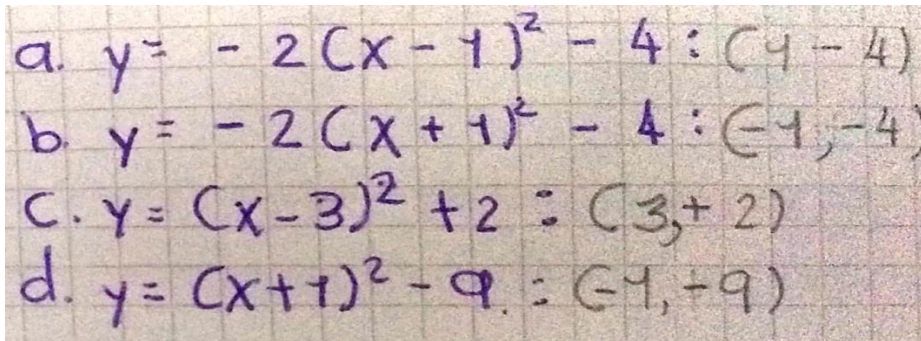
Teniendo en cuenta los resultados de la tabla 5, se puede ver que el 50% de los estudiantes reconocen las unidades significativas que componen el vértice de una función cuadrática presentada de forma canónica. Pues alcanzan a coordinar las unidades al asociar de manera adecuada los elementos constitutivos de la formula canónica y la función cuadrática presentada en el registro inicial.

La mayoría de los estudiantes pudo asociar la coordenada en x e y del vértice teniendo en cuenta los signos asociados a los parámetros en cada ejercicio. Aunque no se logra ver ningún tratamiento que permita saber cómo obtuvieron las relaciones entre signos para la asignación del número real correspondiente.



El 50% de los estudiantes logra identificar el signo como el único elemento significativo que les permite coordinar las coordenadas del vértice con las expresiones algebraicas propuestas.

Esta distinción se hace posible gracias a la correspondencia semántica entre la información del registro inicial, es decir, la posición en que se encuentren los números en el registro algebraico en forma canónica como $y = -2(x - 1)^2 - 4$. En este sentido, para los estudiantes fue evidente asignar al vértice $v(h, k)$ el punto $P(1, -4)$ puesto que las unidades significantes están en el mismo orden y además son las mismas en cantidad. Es decir, lograron asociar~~le~~ el mismo significado para poder coordinarlos.



a. $y = -2(x - 1)^2 - 4 : (1, -4)$
b. $y = -2(x + 1)^2 - 4 : (-1, -4)$
c. $y = (x - 3)^2 + 2 : (3, +2)$
d. $y = (x + 1)^2 - 9 : (-1, -9)$

Por otro lado, llama la atención que el otro 50% de los estudiantes tiene en cuenta solo uno de los elementos para responder a la cuestión. Es decir, logran discriminar una única unidad significativa del registro inicial que le permita vincularla con las características esenciales del vértice.

Handwritten mathematical work on grid paper showing four quadratic functions in vertex form and their corresponding vertex coordinates:

- a. $y = -2(x-1)^2 - 4 = V = (-1; -4)$
- b. $y = -2(x+1)^2 - 4 = V = (-1; -4)$
- c. $y = (x-3)^2 + 2 = V = (-3; +2)$
- d. $y = (x+1)^2 - 9 = V = (-1; -9)$

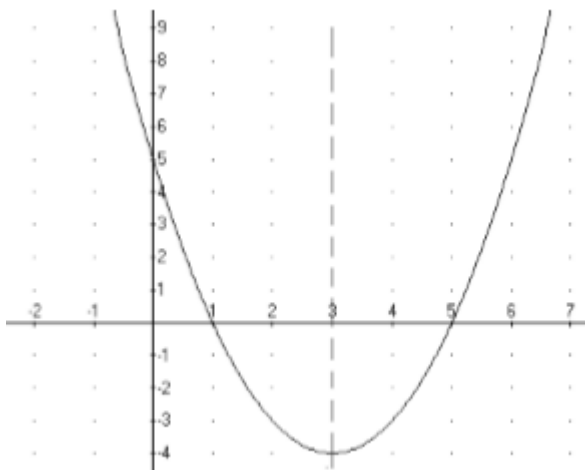
Lo anterior puede darse porque los estudiantes no han tenido un acercamiento constante con la expresión en forma canónica general. Sin embargo, puede notarse un avance significativo en los estudiantes en la interpretación de los parámetros cuando se intenta observar características en el mismo registro, en este caso, la representación algebraica. Pues el 100% logra coordinar al menos una característica.

4.1.1. Análisis de la situación 2

En este análisis observaremos como los estudiantes interpretan las funciones cuadráticas, a partir de la representación gráfica y del mismo modo, como realizan el tratamiento y la conversión de este objeto matemático, pues se espera que puedan dar solución a los problemas planteados haciendo uso de las funciones dadas y logrando graficarlas.

TAREA 1: La representación canónica y el eje de simetría.

3. Sea la función : $y = x^2 - 6x + 5$. Estúdiala.



- e. ¿Cuál es el vértice?
- f. ¿Cuál es el eje de simetría?
- g. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje X?
- h. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje Y?

Tabla 6: Resultado de la identificación de los elementos de la función cuadrática, a través de la representación gráfica.

TIPO DE RESPUESTAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que reconocen todos los elementos significativos de una función cuadrática presentada en el registro gráfico	6
Estudiantes que reconocen algunos elementos significativos de una función cuadrática presentada en el registro gráfico	3
Estudiantes que no reconocen los elementos significativos de una función cuadrática presentada en el registro gráfico	1

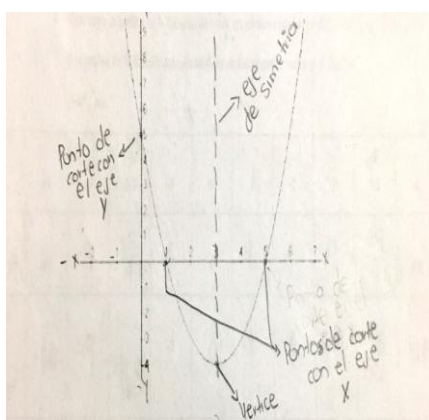
En los resultados que arroja la tabla 6, se puede observar que un gran porcentaje de los estudiantes logran identificar a partir del registro grafico los elementos significativos de una función cuadrática. Sin embargo, ciertos estudiantes solo ponen en evidencia algunos de estos elementos. Pues, si bien los estudiantes pudieron identificarlos a partir de la representación gráfica, no lograron realizar la conversión a la representación algebraica.

c. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje X? $(5, 5)$

d. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje Y? (5)

Estas manifestaciones, dejan ver que los estudiantes confunden el proceso de representar o identificar los puntos de cortes en los ejes, pues como vemos en la imagen la representación que ellos señalan es errónea, pues pertenece a otro punto que no le corresponde, puesto que la respuesta que debieron dar era $x = 1$ y $x = 5$.

Por otro lado, el 90% de los estudiantes que presentaron la actividad lograron identificar todos o algunos de estos elementos significativos presentes en la representación gráfica, estos acuden a dos formas de respuestas. Por un lado, los estudiantes que señalan los elementos ubicados en la representación gráfica, ya que hacen uso de la guía planteada al iniciar la actividad donde se presenta a modo de ejemplo los elementos de la función cuadrática ubicados en una representación gráfica y por otro lado, los estudiantes que logran realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico.



- a. ¿Cuál es el vértice? = el vértice se encuentra en la coordenada $(3, -4)$
 b. ¿Cuál es el eje de simetría? = la recta paralela al eje Y que está sobre 3
 c. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje X? = 1 4 5
 d. ¿Cuáles son los puntos de corte con el eje Y? = 5

Al finalizar la actividad uno, de la segunda situación, se encuentra que los resultados arrojados a partir de la aplicación de esta situación, fueron positivos, pues se puede considerar que esta fue contestada de manera correcta por la mayoría de los estudiantes, ya que se refleja una buena coordinación en la identificación de los elementos significativos de una función cuadrática, realizándolos con base a una gráfica o mediante la conversión.

TAREA 1

PUNTO 2

2. Identifica el eje de simetría para la función de:

- d. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$
- e. $f(x) = (x - 3)^2 + 1$
- f. $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 5)^2 - 8$

Tabla 7: Resultado de la identificación del eje de simetría, a través de la formula canónica.

TIPO DE RESPUESTAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que reconocen el eje de simetría, a través de la formula canónica	7
Estudiantes que no logran reconocer el eje de simetría, a través de la formula canónica	3

De acuerdo a los resultados que se pueden observar en la tabla 7, es posible determinar que los estudiantes no presentan inconvenientes para identificar el eje de simetría en el registro inicial, pues más del 50% de los estudiantes logró responder de manera correcta gracias a la información que ofrece el registro algebraico.

Es importante resaltar que la unidad significativa (de esta actividad) corresponde al eje de simetría, es decir para la expresión algebraica en su forma canónica a partir de esto es posible

afirmar que los estudiantes tuvieron una buena coordinación con los elementos significantes, pues determinaron sin dificultad alguna el eje de simetría de cada una de las funciones cuadráticas presentadas. Sin embargo, hubo estudiantes que no reconocieron el eje de simetría debido a que confundieron los coeficientes h y k , tomando a k como eje de simetría, sin considerar que el eje de simetría lo representa h .

Identifica el eje de simetría para la función de:

a. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 3 = (-2)$

b. $f(x) = (x - 3)^2 + 1 = (+3)$

c. $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 5)^2 - 8 = (-5)$

Identifica el eje de simetría para la función de:

a. $f(x) = 2(x + 2)^2 - 3 = (-3)$

b. $f(x) = (x - 3)^2 + 1 = (-1)$

c. $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 5)^2 - 8 = (-8)$

De lo anterior, se puede decir que los estudiantes logran hacer buen desarrollo de las aprehensiones visuales, pues identificaron claramente el eje de simetría en la expresión canónica que permite dividir la curva correspondiente en partes iguales. En este sentido, puede notarse un acercamiento a la comprensión de la función cuadrática a partir de las unidades o elementos significativos que entran en juego en la situación.

TAREA 2
PUNTO 1

5. Construya la gráfica de la función, definida los números reales $y = f(x) = x^2$ y la gráfica de la función definida también en los números reales $y = f(x) = -x^2$, así:

x	-4	-3	-5/2	-1	0	1	2	3	7/2	4
$y = x^2$	16				0					16
$y = -x^2$				-1						

- e. Complete la tabla
- f. Ubique los puntos en el plano cartesiano.
- g. Una los puntos con un color diferente para cada una de las funciones.
- h. Describa las diferencias y similitudes en cuanto a la forma, la posición y eje de simetría.

Tabla 8: Resultados del tratamiento y la conversión realizados por los estudiantes.

TIPO DE RESPUESTAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que completan la tabla de manera correcta.	9
Estudiantes que completan la tabla, pero las coordenadas de la variable dependiente no corresponde.	1

Como se puede apreciar en la tabla 8, el 90% de los estudiantes logra encontrar los valores de y dados los valores de la variable independiente x a través de tratamientos en el registro algebraico. Es decir, los estudiantes logran coordinar ambos registros a partir de operaciones de tipo multiplicativos. La facilidad de completar la tabla por parte de los estudiantes pudo darse por la congruencia entre los registros involucrados.

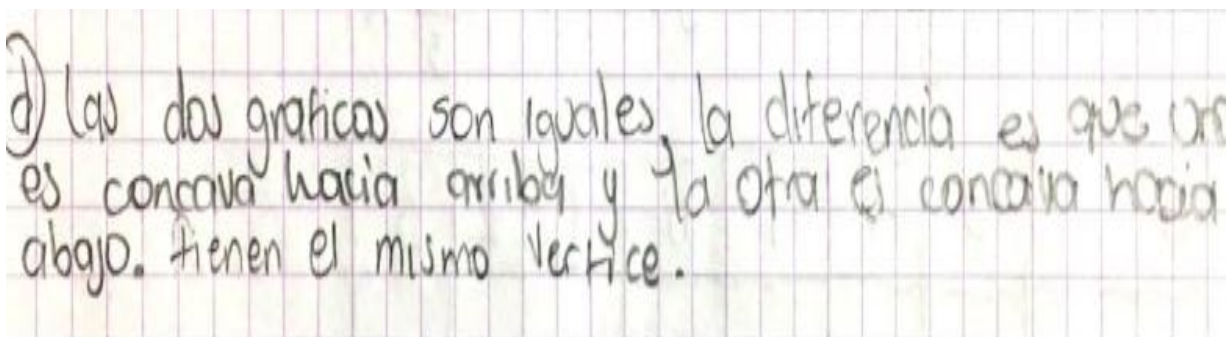
Los tratamientos efectuados por la mayoría de los estudiantes corresponden con lo que permite el registro algebraico en el sentido en que, los resultados de la potenciación para la expresión x^2 fueron todos positivos, independientemente del número real involucrado. Lo cual muestra, que las operaciones intra-registros (*operación de tratamiento*) son comprendidas por la mayoría de los estudiantes.

x	-4	-3	-5/2	-1	0	1	2	3	7/2	4
y = x ²	16	9	25/4	1	0	1	4	9	49/4	16
y = -x ²	-16	-9	-25/4	-1	0	-1	-4	-9	-49/4	-16

Con respecto al cambio de registro, la tabla permite ver que el 100% de los estudiantes logra trazar la curva a partir de la coordinación entre las unidades significantes y usando como medio el registro tabular. Dicho cambio corresponde a un fenómeno de congruencia entre las expresiones algebraicas y la representación gráfica.

La conversión de manera espontánea entre los registros (*expresión algebraica – gráfica*) puede ser producto del continuo trabajo de los estudiantes con este tipo de situaciones. Es decir, en la medida en que los estudiantes han tenido un acercamiento directo con situaciones de cambio de registro, las dificultades tienden a ser menores para tales situaciones.

Ahora bien, para el comportamiento de las gráficas trazadas, el 70% de las justificaciones de los estudiantes muestran que hubo aprehensión visual. Pues se nota la identificación de los elementos característicos de las dos representaciones, es decir, comparación de vértices, enunciar concavidad, ejes de simetría; elementos que constituyen las unidades significativas del registro y que fueron esenciales para analizar la diferencia o similitud entre expresiones $f(x) = x^2$ y $f(x) = -x^2$. Como expresa Duval (2006) Cada característica visual particular puede ser distinguida solamente a través de la oposición de dos gráficas.



Lo anterior se logró debido a que se creó un hilo conductor entre las expresiones algebraicas iniciales, hacia la representación tabular que permitiera utilizar y ubicar los puntos obtenidos al hacer tratamientos de cada una para trazar la curva. Como también, la identificación de los elementos importantes que caracterizan las funciones cuadráticas, el cual les permitió hacer unas observaciones frente a sus diferencias y similitudes.

En general, las repuestas dejan ver la importancia que tienen los distintos registros de representación para poder comprender las propiedades de un objeto de conocimiento en particular, en este caso la función cuadrática. Pues a través de la expresión algebraica los estudiantes pudieron realizar tratamientos para poder coordinar las unidades significantes y ubicarlas en otro registro de manera que conservara parte y a la vez información distinta sobre la representación inicial.

TAREA 2

PUNTO 2

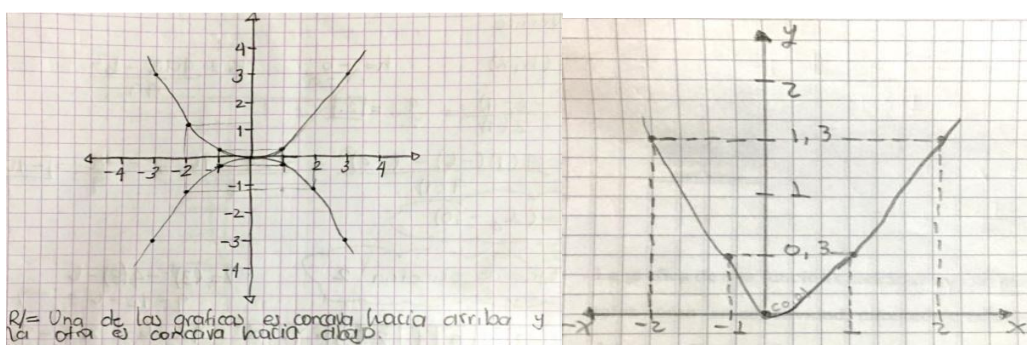
1. Construya las gráficas $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2$ y $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^2$. ¿Cómo es el comportamiento de estas nuevas gráficas? ¿Crecen o decrecen más rápidamente?

Tabla 9: Resultado de la conversión y análisis realizados por los estudiantes.

TIPO DE RESPUESTAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que grafican de manera correcta y además analiza el comportamiento de las graficas	2
Estudiantes que logran graficar una de las gráficas y no analizan su comportamiento	5
Estudiantes que no responden	3

Como se puede observar en la tabla 9, solo dos de los diez estudiantes que presentaron la actividad lograron dar solución al problema planteado, en cual tenían que graficar dos funciones y analizar su comportamiento. Cabe resaltar, que cinco de los diez estudiantes aunque no completan el objetivo de la actividad, cumplen con una aprehensión operatoria y secuencial, pues son capaces de realizar el tratamiento para hallar los puntos y poder realizar la conversión del registro algebraico al registro gráfico sin un análisis de la gráfica resultante.

$y = \frac{1}{3} x^2 \Rightarrow x = -3$
 $y = \frac{1}{3} (-3)^2 = \frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{9}{3} = 3$
 $y = \frac{1}{3} (-2)^2 = \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3} = 1,33$
 $y = \frac{1}{3} (-1)^2 = \frac{1}{3} = 0,33$
 $y = \frac{1}{3} (1)^2 = \frac{1}{3}$



De modo que se puede decir, que los estudiantes logran comprender las representaciones gráficas, algebraicas y tabular, puesto que la mayoría de los estudiantes realizan tratamiento y conversión entre estos registros para dar respuestas a la actividad, existiendo una coordinación en las unidades significantes, ya hay una correspondencia entre los registros.

TAREA 2

PUNTO 3

3. Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x - 6$.
 - a. Encuentre el intercepto en y
 - b. Encuentre el vértice de la función
 - c. Encuentre el eje de simetría
 - d. Grafica la función y determine su concavidad.

PUNTO 3

PUNTO A

Tabla 10: Resultado del cambio de registro efectuado por los estudiantes.

TIPO DE RESPUESTAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que no encuentran los elementos significativos de la función cuadrática	3
Estudiantes que hacen uso de la fórmula para hallar el intercepto en y	5
Estudiantes que realizan la gráfica y a partir de esta identifica el intercepto en y	2

PUNTO B Y C

Tabla 11: Resultado de la conversión y el tratamiento para hallar el vértice y el eje de simetría.

TIPO DE RESPUESTAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que realizan la gráfica y a partir de esta identifica el vértice y el eje de simetría	2
Estudiantes que hacen uso de la fórmula para hallar el vértice e identifican el eje de simetría	4
Estudiantes que no responden	4

PUNTO D

Tabla 12: Resultado de la conversión del registro algebraico al gráfico.

TIPO DE RESPUESTAS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
Estudiantes que grafican y determinan la concavidad de la función cuadrática	4
Estudiantes que no grafican y no determinan la concavidad de la función cuadrática	6

Analizando las tablas anteriores, podemos dar cuenta de que los estudiantes cuentan con una Aprehensión operatoria y aprehensión secuencial que les permite desarrollar la actividad, ya que gran parte de los estudiantes lograron encontrar los componentes de una función cuadrática mediante los procedimientos de tratamientos y conversiones, a partir de esto es importante destacar que algunos estudiantes prefieren realizar una conversión grafica al registro inicial y de ahí determinar los elementos que la componen, mientras que otros optan por realizar el tratamiento paso a paso para hallar cada elemento. Sin embargo hubo estudiantes que no alcanzaron el objetivo de la actividad, que no emplearon ningún método, es decir ni el tratamiento ni la conversión para hallar los componentes de la función cuadrática

④ $f(x) = x^2 - 4x - 6$ $a = 1$, $b = -4$; $c = -6$

Intercepto en y $\rightarrow x = 0$

$$y = (0)^2 - 4(0) - 6 = -6$$

* Vertex

$$V = (h, k) \quad h = -\frac{b}{2a} \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

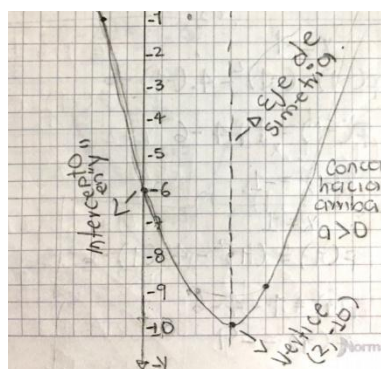
$$h = -\frac{(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$k = \frac{4(1)(-6) - (-4)^2}{4(1)} = \frac{-24 - 16}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$

$V = (2, -10)$

* Eje de simetría 2

$$y = (3)^2 - 4(3) - 6 = -9$$



Finalmente podemos decir, que los estudiantes realizan una buena articulación entre un registro y otro, mostrando una buena comprensión del objeto matemático en estudio, en este caso función cuadrática

4.1.3. Análisis de la situación 3

En esta situación, se espera que los estudiantes sean capaces de resolver problemas cotidianos que involucren las funciones cuadráticas, a partir de la conversión bien sea de la

representación gráfica a la algebraica, de la gráfica a la lengua natural o de la lengua natural a la algebraica.

ACTIVIDAD 1

PUNTO A

Tabla 13: Resultado del tratamiento para dar solución al problema.

Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que presentan procedimiento y dan las respuestas de manera correcta	3
Estudiantes que presentan procedimiento y dan las respuestas de manera incorrectas	2
Estudiantes que no presentan procedimiento y dan las respuestas correctas	4
Estudiantes que no presentan procedimiento y dan las respuestas incorrectas	1

PUNTO B

Tabla 14: Resultado de los estudiantes que hacen uso del registro lengua natural.

Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que responden en el registro de lengua natural de manera correcta	8
Estudiantes que responden de manera incorrecta	2

PUNTO C

Tabla 15: Resultado de la descripción del problema mediante el registro lengua natural.

Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que utilizan el registro lengua natural para describir un caso	10

ACTIVIDAD 2

Tabla 16: Resultado del tratamiento realizado para dar solución al problema.

Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que presentan tratamiento y dan las respuestas correctas	3
Estudiantes que realizan tratamiento y dan las respuestas incorrectas	7

ACTIVIDAD 3

PUNTO A

Tabla 17: Resultado del tratamiento para hallar la cantidad de máquinas.

Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que realizan el tratamiento de manera coherente y dan las respuesta correctas	1
Estudiantes que no presentan tratamiento y dan la respuesta de manera correcta	8
Estudiantes que no contestan	1

PUNTO B

Tabla 18: Resultado de la coordinación en el registro gráfico.

Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que coordinan un solo elemento de la gráfica, a partir de la observación	9
Estudiantes que no responden	1

PUNTO C

Tabla 19: Resultado de los estudiantes que a través de la aprehensión perceptual dan solución al problema.

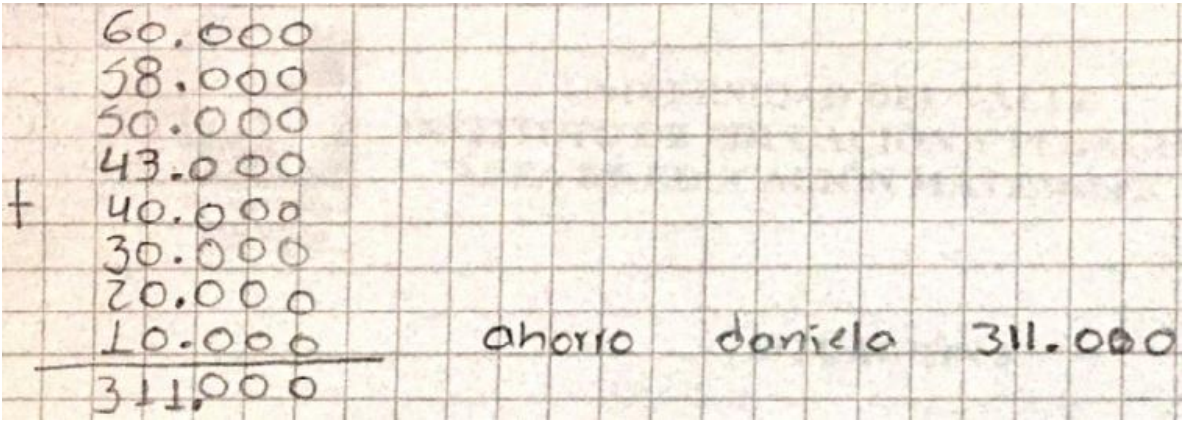
Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que no hacen uso del registro algebraico, sin embargo la respuesta es correcta	9
Estudiantes que no responde	1

PUNTO D

Tabla 20: Resultado del reconocimiento de los elementos significativos.

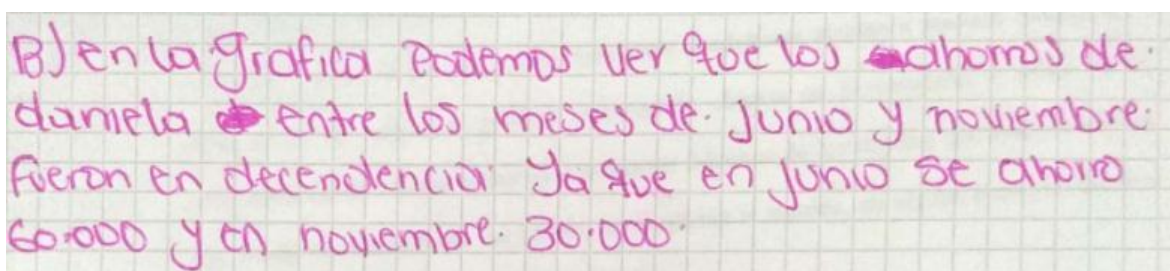
Tipo de respuestas	Número de estudiantes
Estudiantes que mediante la observación identifican los elementos y dan las respuestas correctas	9
Estudiantes que responden de manera incorrecta	1

De acuerdo a los resultados presentados en las tabla 13, podemos dar cuenta de que los estudiantes reconocen la unidades significantes presentes en esta actividad, la cual corresponde a los puntos que conforman la gráfica, pues el 70% de los estudiantes respondieron de manera correcta haciendo uso de la representación gráfica suministrada e hicieron una buena relación entre el valor ahorrado que corresponde al eje Y, y los meses de ahorro que corresponde al eje X, de este modo poder conocer el valor total ahorrado entre junio-diciembre mediante la aprehensión operatoria.

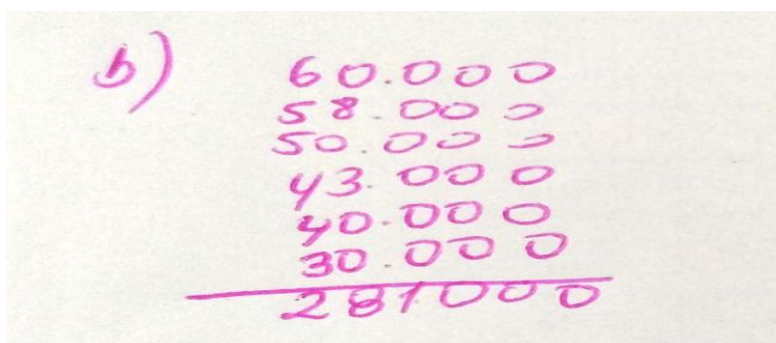


Posteriormente, tenemos la tabla 14, la cual nos muestras los resultados del punto b, donde se puede observar que el 80% de los estudiantes respondió de manera correcta, haciendo uso del lenguaje natural, lo que nos permite afirmar que los estudiantes tienen una buena

interpretación de las representaciones gráficas y además una aprehensión perceptual que les permite a simple vista darse cuenta que los ahorros van disminuyendo. De igual forma, algunos estudiantes a pesar de poder dar su respuesta basados en la observación realizaron procedimientos, es decir recurrieron a la aprehensión operatoria la cual les garantiza que su respuesta es correcta y así poder decidir qué sucede con los ahorros.



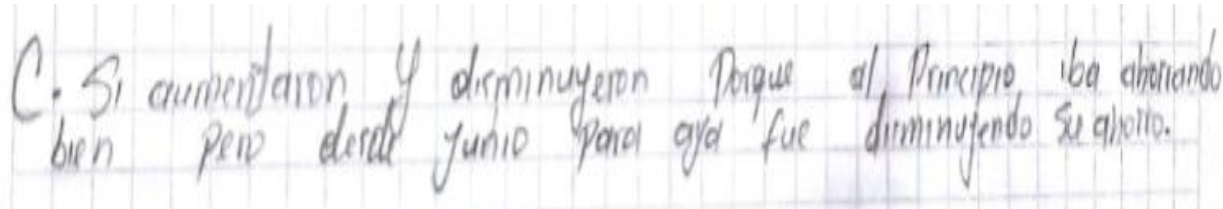
B) en la grafica podemos ver que los ahorros de daniela entre los meses de junio y noviembre fueron en decrendencia ya que en junio se ahorró 60.000 y en noviembre 30.000.



b)

60.000
58.000
50.000
43.000
40.000
30.000
281.000

Por otro lado, en la tabla 15, tenemos los resultados del punto c, donde al igual que en el punto b, los estudiantes deben interpretar el comportamiento de la representación gráfica presentada, podemos ver que el 100% de los estudiantes respondieron de manera correcta, lo que reafirma su nivel de aprehensión perceptual, pues a simple vista pudieron darse cuenta de lo que sucede con la gráfica y sustentar su respuesta por medio de la lengua natural.

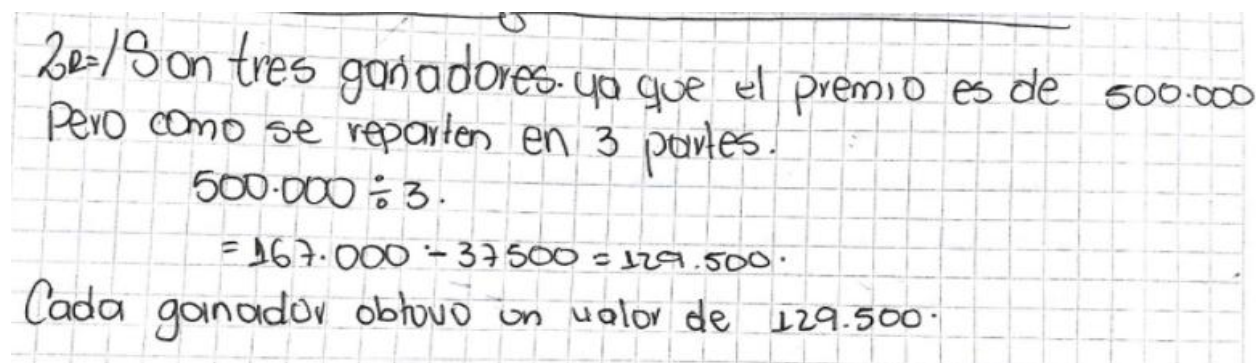


C. Si aumentaron y disminuyeron Porque al Principio iba ahorrando bien pero desde junio para aya fue disminuyendo su ahorro.

Finalmente en el desarrollo de esta actividad, se puede concluir que los estudiantes tienen una buena comprensión de las representaciones gráficas y que además son capaces de comunicar lo que la gráfica quiere decir, apoyándose en la aprehensión perceptual y la aprehensión operatoria, para poder sustentar su respuesta mediante el uso de la lengua natural.

Actividad 2

En esta actividad, como se pudo observar en la tabla 16, los estudiantes presentaron dificultades al realizar la conversión del registro lengua natural al registro algebraico, pues estos tenían que identificar las unidades significantes, de los cuales los estudiantes solo lograron identificar algunas de estas unidades, no logrando completar los datos necesarios para la resolución del problema, realizando la conversión de manera incorrecta y además no logrando dar respuesta al mismo.



22= Son tres ganadores ya que el premio es de 500.000
Pero como se reparten en 3 partes.
$$500.000 \div 3.$$
$$= 167.000 - 37500 = 129.500.$$

Cada ganador obtuvo un valor de 129.500.

Por otro lado, el 30% de los estudiantes obtuvieron una comprensión operatoria, puesto que lograron realizar la conversión paso a paso, de un registro lengua natural al registro algebraico encontrando cada una de las unidades significantes del problema propuesto y además dando una solución de manera correcta, demostrando la buena coordinación que poseen al cambiar de un registro a otro y la buena comprensión que manejan al interpretar la situación.

2. x es la cantidad de ganadores
 $x+3$ las tres partes a tener en cuenta

$\frac{500.000}{x} - 37.500 \rightarrow$ la reducción de 37.500 por persona

$\frac{500.000}{x+3} \rightarrow$ la división del premio en los ganadores y las tres partes adicionales

$$\frac{500.000}{x} - 37.500 = \frac{500.000}{x+3}$$

$$\frac{500.000 - 37.500x}{x} = \frac{500.000}{x+3}$$

$$(500.000 - 37.500x)(x+3) = 500.000x$$
~~$$500.000x + 1.500.000 - 37.500x^2 - 112.500x = 500.000x$$~~

$$500.000x + 1.500.000 - 37.500x^2 - 112.500x - 500.000x = 0$$

$$-1(-37.500x^2 - 112.500x + 1.500.000 = 0)$$

$$37.500x^2 + 112.500x - 1.500.000 = 0$$

$$\frac{37.500x^2 + 112.500x - 1.500.000}{37.500}$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x+8)(x-5) = 0$$

$$x+8 = 0 \quad x-5 = 0$$

$$x = -8 \quad \boxed{x = 5}$$

En definitiva, a pesar de que la mayoría de los estudiantes no lograron cumplir con el objetivo de la actividad, el cual correspondía al cambio de registro, debido a la mala interpretación por parte de los ellos, es importante rescatar lo realizado por los estudiantes que si

cumplieron con este objetivo, pues desarrollan varias aprehensiones como la perceptual, secuencial y operatoria, que son necesarias para la comprensión de un objeto matemático, en este caso de las funciones cuadráticas, pues al realizar la conversión correctamente, encuentran sus unidades significantes, las desarrollan de forma secuencial y operatoria encontrando cada valor.

Actividad 3

A partir de la información suministrada en la tabla 17 se puede decir, que el 90% de los estudiantes responde de manera correcta, un 10% responde apoyándose en un tratamiento, y el 80% basa su respuesta en la aprehensión perceptual, sustentándola por medio de la lengua natural. Es importante tener en cuenta que la unidad significativa presente en este punto es el vértice, el cual corresponde al punto más alto de la representación gráfica. A partir de esto, es posible decir que los estudiantes realizaron una buena coordinación con el elemento significativo, ya que no presentaron dificultad para identificarlo.

$$\begin{aligned} P(x) &= 100.(25) - 2.(25)^2 \\ &= 2500 - 2.625 \\ &= 2500 - 1.250 \\ &= 1.250 \end{aligned}$$

a) ¿Cuántas máquinas se deben fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?
AR/ 25 mensuales

Posteriormente, se observa la tabla 18, la cual relaciona los resultados del literal b, donde el 90% de los estudiantes respondieron de manera correcta, es decir que hacen una buena interpretación de las representaciones gráficas, mostrando la capacidad de relacionar el eje Y, el cual representa los ingresos y el eje X, el cual representa las máquinas, y así poder determinar mediante la aprehensión perceptual, conociendo uno de los datos, en este caso el valor de ingreso (eje Y) cuantas maquinas debe fabricar para tener cierta cantidad de ingresos y sustentarlo mediante la lengua natural.

b) Si decimos que la ganancia fue de ochocientos pesos aproximadamente, ¿cuántas máquinas se fabricaron? 10 o 40 maquinas

A partir de la información suministrada en la tabla 19, se puede observar que el 90% de los estudiantes, al igual que en el literal b hacen una buena interpretación de la representación gráfica, es decir su aprehensión perceptual les permite responder mediante la observación y análisis, para de este modo sustentar sus respuestas con el lenguaje natural.

CR/ si se fabrican 20 los ingresos seran de 1200

En el literal d, según los resultados de la tabla 20, los estudiantes, no presentan dificultad alguna para interpretar las representaciones gráficas, puesto que el 90% respondieron de manera correcta, lo que nos afirma el desarrollo de su aprehensión perceptual, y la relación que realizan entre los diferentes ejes (X y Y).

Finalmente, se puede decir que en el desarrollo de esta situación 3, se logró el objetivo de esta, el cual es relacionar las funciones cuadráticas con casos de la vida real, pues los estudiantes lograron interpretar las gráficas y realizar procedimientos apoyados en las funciones cuadráticas para resolver cada actividad, es importante destacar que la aprehensión perceptual les permitió desarrollar la actividad y a partir de esta identificar los elementos que les permitía dar la respuesta correcta

4.2. Comentarios generales

Las actividades presentes en cada una de las situaciones, fueron seleccionadas de manera secuencial, con el fin de que los estudiantes lograran identificar los elementos significativos de una función cuadrática, además puedan construir la representación gráfica y logren analizar el comportamiento de estas. De este modo, favorecer la conversión, el tratamiento, la descripción y la construcción de las representaciones.

En cuanto a la conversión, se puede decir que los estudiantes las hacen de manera espontánea, puesto que hacen uso de las diferentes representaciones para dar solución al problema planteado. Encontrando los elementos significativos, logrando que haya una coordinación entre los registros de representación. Sin embargo, cabe resaltar que hubo estudiantes que no lograron dicha conversión, pues no diferencian las variables que dan solución

al problema. Esto se hace evidente en el cambio del registro lengua natural al algebraico, del algebraico al tabular, del tabular al gráfico y del gráfico al de lengua natural.

Con respecto al tratamiento, los estudiantes logran trabajar en el mismo registro y se puede observar en el desarrollo de encontrar los puntos necesarios para realizar la tabla, en los procedimientos para hallar los puntos de corte con los ejes, para hallar el vértice. Es importante señalar que si un estudiante es capaz de reconocer, diferenciar las variables y además logra reemplazar correctamente los datos en la función que le sirve para hallar el vértice y los puntos de cortes con los ejes, se confirma lo dicho por Duval que es, distinguir claramente el contenido de la representación y el objeto matemático representado. Estos procedimientos fueron realizados de manera correcta por la mayoría de los estudiantes, lo que se puede decir es que uno una buena coordinación intra-registro, encontrando los elementos significativos que hacen posible este tratamiento.

En relación con el Ministerio de Educación, el cual es una guía en el desarrollo del pensamiento numérico variacional, donde se fomenta los aprendizajes de manera secuencial y coherente, con el fin de lograr la comprensión del objeto matemático por parte de los estudiantes. Se escogieron las actividades bajo esta perspectiva, llevando al estudiante desde la identificación de los elementos de la función cuadrática, hasta la construcción de los mismos, para hacer esto posible se dividieron los problemas en tres situaciones. Siendo este método muy efectivo, puesto que los estudiantes pueden ir relacionando lo aprendido en cada situación para dar solución a la siguiente y de este modo comprender el objeto matemático.

En términos generales, se puede concluir que las actividades seleccionadas resultaron convenientes para la comprensión de las funciones cuadráticas, pues les permitieron a los estudiantes navegar y analizar la problemática en varios registros de representación, lo que les posibilita a los estudiantes hacer un acercamiento a este entendimiento.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIÓN

El desarrollo de este trabajo tuvo como objetivo seleccionar, articular e implementar un conjunto de situaciones problemas de secuencias didácticas ya diseñadas, relacionadas con funciones cuadráticas, para analizar las representaciones realizadas por los estudiantes de grado 9° de la Institución Pascual de Andagoya, desde una propuesta multiregistro. A partir de esto, se puede concluir que a raíz de los resultados obtenidos es posible afirmar que como lo plantea Duval, debe haber una mediación entre lo que se plantea y lo que se muestra; es decir, la necesidad de representar. Siendo así, se reconoce que si se realizan más de dos representaciones de un objeto matemático y se presenta una articulación entre los mismos, habrá mayor aprendizaje del objeto representado. Esto se dice porque en el desarrollo de las actividades se pudo evidenciar que los estudiantes empleaban uno o más de los registros de representación para sustentar sus respuestas, mostrando fluidez, y propiedad a la hora de presentar sus argumentos, y sobre todo generando sensación de seguridad entre lo que se decían y se planteaban. De todo lo anterior, sobre sale que.

- Hubo una buena identificación de los elementos significativos, lo cual permitió que los estudiantes comprendieran lo que debían hacer en cada punto de las situaciones, alcanzando de este modo, poder solucionar situaciones relacionadas

con las funciones cuadráticas, hasta lograr solucionar problemas matemáticos mediante el uso de estas funciones, es decir el hecho de identificar los elementos importantes de una función cuadrática les permite relacionarlos en un problema contextual, con esto se puede afirmar que la selección de la propuesta didáctica tuvo una secuencia clara y coherente permitiéndole al estudiante lograr la comprensión de la función cuadrática.

Las diferentes representaciones de un objeto matemático permite su comprensión, se puede mencionar que es importante que en las clases de matemáticas se empiecen a implementar secuencias didácticas multiregistro, permitiéndoles a estudiantes navegar en diferentes registros de representación, haciendo uso de las conversiones y de los tratamientos, con el fin de lograr la comprensión del objeto matemático y lograr obtener mejores aprendizaje.

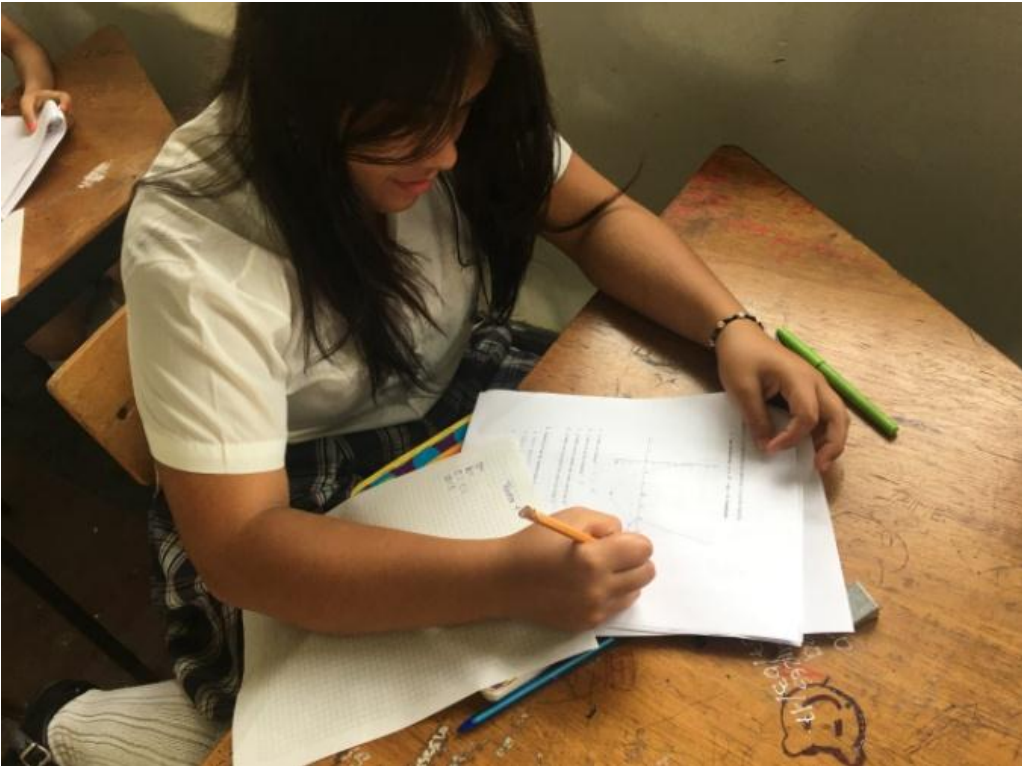
Desde los estándares básicos de competencia, la propuesta desarrollada para la comprensión de las funciones cuadráticas a partir de las representaciones semióticas cumplieron con las expectativas del MEN (2006), ya que esta propuesta por su forma secuencial, logra que los estudiantes dejen de un lado los mecanismos de memorización y repetición, logrando de este modo que sean capaces de aplicar este conocimiento en distintos contextos. Además, fortalecer el pensamiento numérico variacional y sistemas algebraicos y analíticos, ya que en las actividades se esperaba que los estudiantes identificaran las variables, realicen la representación gráfica y analicen comportamiento de las funciones cuadráticas y de este modo logren hacer buen uso de esta en la cotidianidad, potenciando en ellos un pensamiento crítico.

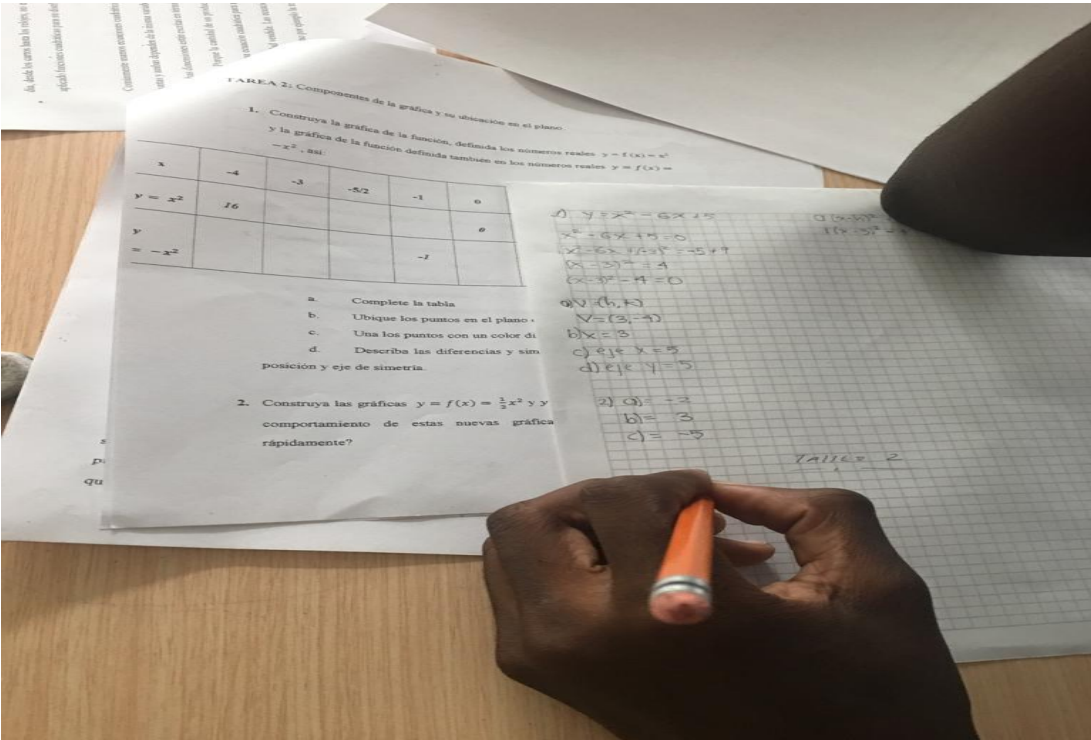
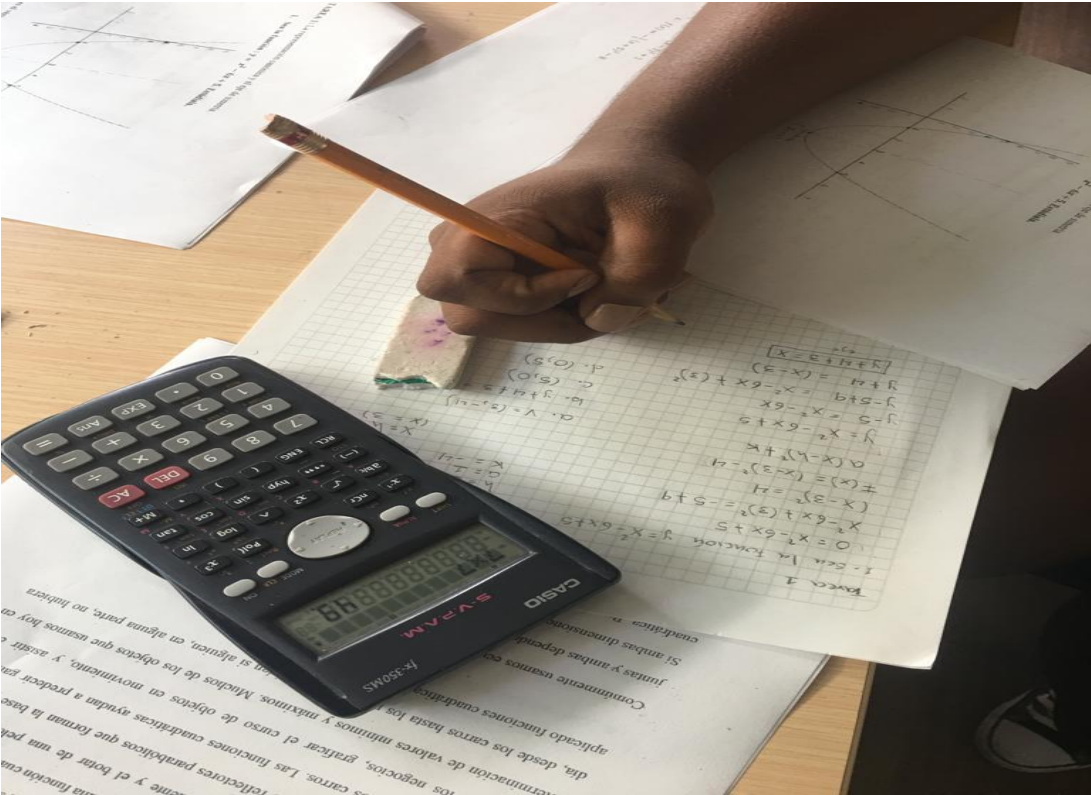
BIBLIOGRAFÍA

- Aranzazu, M. (2013). Secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática, 75.
- Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, 1, 1-10.
- Cruz, E. (2008). Diseño de una secuencia didáctica, donde se generaliza el método de factorización en la solución de una función cuadrática, 195.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2004) Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle.
- Gonzáles, G. (2011). Tratamiento de las representaciones semióticas de la función cuadrática, 143.
- Guayacundo, G. (2014). Proyecto propuesta didáctica de enseñanza en el aula, funciones lineales-cuadráticas y modelos, 101.
- Gustin, J y Avirama, L. (2014). Una propuesta para la enseñanza de la función cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo, 200.
- Kieran, C., & Yagüe, E. F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 7(3), 229-240.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998) Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Colombia, Santafé de Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006) Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Colombia, Santafé de Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015) Derechos básicos de aprendizaje de Matemáticas. Colombia, Santafé de Bogotá.

- Ministerio de Educación Nacional. (2015) Matriz de referencia de Matemáticas. Colombia, Santafé de Bogotá.
- Pecharroman, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. 133.
- Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual*, 174-186.
- Quiñones, W. (2015). Una mirada didáctica a los procesos de articulación de los registros gráfico cartesiano y algebraico: el caso de la función cuadrática, 47.
- Santos, H., Manuel, W., & Marquez Lobo, Z. T. (2010). *La función cuadrática como marco referencial para el desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia con estudiantes del 9o grado* (Doctoral dissertation).
- Socas, M. (2007) Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.
- Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006). Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. *Colombia: Universidad de Antioquia*.

ANEXOS





Un estudio de caso sobre el abordaje de funciones cuadráticas por parte de los estudiantes de grado 9° de institución educativa pascual de andagoya/Carmen Alexandra Castro Hurtado/Nidia Marcela Caicedo Murillo/Universidad del valle- Sede Pacífico.

92

