

# La Enseñanza de la Prueba en Geometría Elemental para la Formación Inicial Docente

Hansbert Alexanderr Delgado Velasco

Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Área de Educación Matemática  
Licenciatura en Matemáticas y Física  
Santiago de Cali, Octubre 2019

La Enseñanza de la Prueba en Geometría Elemental para la Formación Inicial Docente

Trabajo de Grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en  
Matemáticas y Física

Hansbert Alexander Delgado Velasco

Asesora

Mg. Ana Katherine Valencia Montenegro

Universidad del Valle  
Instituto de Educación y Pedagogía  
Área de Educación Matemática  
Licenciatura en Matemáticas y Física  
Santiago de Cali, Octubre 2019

## Resumen

La Enseñanza de la Prueba en geometría constituye un umbral que los estudiantes difícilmente logran superar y es tema de discusión en muchos estudios de investigación (ICMI XIX, Duval (2016, 2017), Montoya (2011)), en los que se considera el uso de la prueba como importante para la construcción de conocimiento matemático. En este trabajo se desarrolló una investigación fundamentada en los referentes teóricos de la perspectiva semiótico cognitiva de Raymond Duval sobre la Enseñanza de la Prueba. Se tomaron elementos teóricos de los Experimentos de Enseñanza proveniente de la Investigación Basada en el Diseño, con el interés de caracterizar un diseño de Recurso Pedagógico en el marco del Laboratorio de Educación Matemática, que promueva la Enseñanza de la Prueba dirigido a estudiantes en formación inicial docente.

El trabajo se desarrolló en tres fases. En una primera fase se realizó un diseño de Recurso Pedagógico, en el que se propuso un diseño de tareas, adaptación de la propuesta de Duval para promover actividades organizadas en tres etapas para la Enseñanza de la Prueba. En la fase de experimentación se aplicó a un grupo de estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas que cursaban Geometría I. En la tercera se desarrollaron dos tipos de análisis, uno a nivel local que favoreció en el ajuste y refinamiento de las tareas puestas en juego en el Recurso Pedagógico, y el otro retrospectivo que permitió evidenciar algunos aspectos de cómo los estudiantes conciben los pasos deductivos en una prueba, también sobre cómo las tareas pueden apoyar en la construcción de pruebas a los estudiantes.

**Palabras Claves:** Enseñanza de la Geometría, Procesos de Prueba, Razonamiento, Recursos Pedagógicos, Formación inicial de docentes.

## Tabla de Contenido

|                                                                                         |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Resumen .....                                                                           | I         |
| La Enseñanza de la Prueba en Geometría Elemental para la Formación Inicial Docente..... | 1         |
| <b>Capítulo 1. Fundamentos de la Propuesta .....</b>                                    | <b>3</b>  |
| Objetivos .....                                                                         | 14        |
| Principal. ....                                                                         | 14        |
| Específicos. ....                                                                       | 14        |
| Marcos de Referencia.....                                                               | 15        |
| La noción de Recursos Pedagógicos. ....                                                 | 15        |
| Referente Semiótico Cognitivo de Duval.....                                             | 18        |
| Referente Geométrico.....                                                               | 25        |
| Prueba de la proposición 1. ....                                                        | 27        |
| Prueba de la proposición 2. ....                                                        | 27        |
| Prueba de la proposición 3. ....                                                        | 28        |
| Prueba de la proposición 4. ....                                                        | 29        |
| Prueba de la proposición 5. ....                                                        | 30        |
| Prueba de la proposición 6. ....                                                        | 30        |
| Tareas de construcción de figuras asociadas a las proposiciones geométricas. ....       | 32        |
| Marco Metodológico. ....                                                                | 36        |
| Diseño y planeación.....                                                                | 38        |
| Fenómeno y propósito de la investigación. ....                                          | 38        |
| Meta de aprendizaje. ....                                                               | 38        |
| Trayectoria Hipotética de Aprendizaje. ....                                             | 40        |
| Conjetura. ....                                                                         | 41        |
| Situación de enseñanza.....                                                             | 42        |
| Diseño del Recurso Pedagógico .....                                                     | 45        |
| Experimentación .....                                                                   | 51        |
| Análisis local.....                                                                     | 52        |
| Refinamiento .....                                                                      | 52        |
| Análisis Retrospectivo .....                                                            | 53        |
| <b>Capítulo 2. Experimentación, Análisis Local y Refinamiento .....</b>                 | <b>54</b> |
| Experimentación.....                                                                    | 54        |
| Análisis Local y Refinamiento .....                                                     | 55        |

|                                                                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Capítulo 3. Análisis Retrospectivo y Conclusiones .....</b>                                                     | <b>70</b> |
| La THA para la prueba en geometría elemental.....                                                                  | 70        |
| Sobre la construcción de figuras. ....                                                                             | 72        |
| Descripción de la trayectoria hipotética para la prueba y construcción de los GP en cada una de las sesiones ..... | 78        |
| Evolución de la Conjetura y THA.....                                                                               | 85        |
| Recursos Pedagógicos .....                                                                                         | 86        |
| Referencias .....                                                                                                  | 91        |
| Anexo 1. Pruebas en Registro de Doble Columna .....                                                                | 95        |
| Anexo 2. Ejemplos de marcas sobre las figuras que aseguran las hipótesis .....                                     | 99        |
| Anexo 3. Lista de Teoremas utilizada por los estudiantes en su curso de Geometría y durante las sesiones. ....     | 100       |
| Anexo 4. Versión digital de los GP realizados por los estudiantes en las tres sesiones.....                        | 101       |
| Anexo 5. Versiones originales de los grafos de los estudiantes, clasificados por sesiones.....                     | 106       |
| Anexo 6. Segmentos de las sesiones registradas en la experimentación.....                                          | 112       |
| Anexo 7. Ejemplo de la relación entre un registro de Doble Columna y un GP.....                                    | 115       |
| Anexo 8. Ejemplos de lo registrado en las Fichas de Trabajo por los estudiantes en la Sesión 1.....                | 116       |
| Anexo 9. Ficha del Docente para el uso del RP. ....                                                                | 118       |

## Lista de Tablas

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabla 1.1 Énfasis de los Grupos de Trabajo para el <i>19th ICMI Study</i> .....                                                                 | 4  |
| Tabla 1.2 Indicadores de incomprensión de la organización de la demostración. ....                                                              | 7  |
| Tabla 1.3 Fichas de un Recurso Pedagógico.....                                                                                                  | 18 |
| Tabla 1.4 Proposiciones para el diseño de tareas para probar en las fichas de trabajo. ....                                                     | 26 |
| Tabla 1.5 Tareas propuestas en las fichas de trabajo correspondiente a cada sesión de la experimentación.<br>.....                              | 45 |
| Tabla 1.6 Descripción del proceso hipotético de aprendizaje del estudiante para cada tarea propuesta en<br>las fichas de trabajo (Hoja 1) ..... | 46 |
| Tabla 1.7 Descripción del proceso hipotético de aprendizaje del estudiante para cada tarea propuesta en<br>las fichas de trabajo (Hoja 2) ..... | 47 |
| Tabla 1.8 Acciones a realizar en la fase de experimentación.....                                                                                | 51 |
| Tabla 2.1 Modificaciones y ajuste de las tareas en los diseños de ficha de trabajo .....                                                        | 65 |
| Tabla 3.1 Descripción de lo realizado por los estudiantes en cada una de las tareas de las fichas de trabajo.<br>.....                          | 71 |
| Tabla 3.2 Descripción de lo realizado por los estudiantes contrario a lo previsto en las tareas. ....                                           | 72 |

## Lista de Figuras

|                                                                                                        |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Figura 1.</i> Conexiones entre los tres procesos cognitivos para la competencia en Geometría. ....  | 19 |
| <i>Figura 2.</i> Transformación del valor epistémico teórico de una proposición .....                  | 20 |
| <i>Figura 3.</i> Grafo Proposicional de la prueba de congruencia de dos triángulos rectángulos.....    | 25 |
| <i>Figura 4.</i> Grafo Proposicional y registro doble columna de la prueba de la proposición 1. ....   | 27 |
| <i>Figura 5.</i> Grafo Proposicional I de la prueba de la proposición 2.....                           | 28 |
| <i>Figura 6.</i> Grafo Proposicional II de la prueba de la proposición 2. ....                         | 28 |
| <i>Figura 7.</i> Grafo Proposicional y registro en doble columna de la prueba de la proposición 3..... | 29 |
| <i>Figura 8.</i> Grafo Proposicional de la Prueba de la proposición 4.....                             | 29 |
| <i>Figura 9.</i> Grafo Proposicional y registro doble columna de la prueba de la proposición 5. ....   | 30 |
| <i>Figura 10.</i> Tres posibles subconfiguraciones de la figura asociada a la proposición 4.....       | 31 |

|                                                                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Figura 11.</i> Grafo Proposicional de la prueba de la proposición 6 para las subconfiguraciones Tipo A y Tipo B. ....                                           | 31 |
| <i>Figura 12.</i> Grafo Proposicional de la prueba de la proposición 6 para la subconfiguración Tipo C. ....                                                       | 32 |
| <i>Figura 13.</i> Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 2. ....                                                                          | 33 |
| <i>Figura 14.</i> Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 4. ....                                                                          | 34 |
| <i>Figura 15.</i> Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 6. Subc. A ....                                                                  | 35 |
| <i>Figura 16.</i> Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 6. Subc. B ....                                                                  | 35 |
| <i>Figura 17.</i> Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 6. Subc. C ....                                                                  | 36 |
| <i>Figura 18.</i> Fases del Experimento de Enseñanza. ....                                                                                                         | 37 |
| <i>Figura 19.</i> Diseño de Ficha de Trabajo para la Primera Sesión. ....                                                                                          | 48 |
| <i>Figura 20.</i> Diseño de Ficha de Trabajo para la Segunda Sesión. ....                                                                                          | 49 |
| <i>Figura 21.</i> Diseño de Ficha de Trabajo para la Tercera Sesión. ....                                                                                          | 50 |
| <i>Figura 22.</i> Estudiantes realizando construcciones de una figura mediante procesos diferentes. ....                                                           | 56 |
| <i>Figura 23.</i> Construcciones de la figura de la tarea de construcción 1 en la primer Ficha de Trabajo realizada por los estudiantes. ....                      | 57 |
| <i>Figura 24.</i> (a) Estudiante listando proposiciones. (b) Estudiante que toma la figura, las reglas de construcción de GP y la hoja en la que lo elabora. ....  | 60 |
| <i>Figura 25.</i> Grafo Proposicional en el que se logran identificar baches y saltos en la prueba. ....                                                           | 61 |
| <i>Figura 26.</i> Grafo Proposicional para la Prueba de la Proposición 2 realizada por una estudiante durante la primera sesión. ....                              | 62 |
| <i>Figura 27.</i> Lista de Proposiciones y Grafos Proposicionales elaborados por estudiantes que no lograron obtener pasos deductivos. ....                        | 62 |
| <i>Figura 28.</i> Estudiantes realizando la construcción de la prueba en el Registro de doble columna. ....                                                        | 63 |
| <i>Figura 29.</i> En un registro de la Prueba los estudiantes conciben que solo debe presentarse una sola línea en la que aparecen las hipótesis. ....             | 64 |
| <i>Figura 30.</i> Diseño de Ficha de Trabajo para la Primera Sesión. ....                                                                                          | 67 |
| <i>Figura 31.</i> Diseño de Ficha de Trabajo para la Segunda Sesión. ....                                                                                          | 68 |
| <i>Figura 32.</i> Diseño de Ficha de Trabajo para la Tercera Sesión. ....                                                                                          | 69 |
| <i>Figura 33.</i> Descripción de la prueba realizada por un estudiante. ....                                                                                       | 74 |
| <i>Figura 35.</i> La identificación de una subconfiguración relevante para la construcción de una prueba. ....                                                     | 77 |
| <i>Figura 36.</i> Lista de las proposiciones que reconoce la estudiante Lina para probar la congruencia de los triángulos $\triangle AEC$ y $\triangle BDC$ . .... | 78 |
| <i>Figura 37.</i> Grafo realizado por la estudiante Lina en el que relaciona terceros enunciados entre sí, y no consigue obtener pasos deductivos. ....            | 79 |

|                                                                                                                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 38. Grafo Proposicional de la estudiante Andrea para la Prueba de la Proposición 2.....                                                                                            | 80 |
| <i>Figura 39.</i> Dos grafos en los que el estatus de las hipótesis no se satisface según la regla de construcción de GP.....                                                             | 81 |
| Figura 40. Algunos errores y baches en la construcción de un GP realizado por el grupo 1 en la segunda sesión. ....                                                                       | 82 |
| <i>Figura 41.</i> Los estudiantes establecen una relación binaria entre proposiciones, estas corresponden a tercer enunciado – conclusión.....                                            | 83 |
| <i>Figura 42.</i> Marcas en el GP de las razones (R) y proposiciones (P), que asocia una estudiante en la tarea de encontrar diferencias y similitudes en los dos tipos de registros..... | 84 |

## **La Enseñanza de la Prueba en Geometría Elemental para la Formación Inicial Docente**

La enseñanza de la Geometría en el contexto escolar se ha caracterizado por lo que se denomina una enseñanza tradicional (Samper, Leguizamón, Camargo y Donado, 2001), que deja implícito la Enseñanza de la Prueba e incluso el desarrollo de los procesos cognitivos subyacentes a la actividad geométrica (construcción, visualización y razonamiento). En el contexto de la educación superior, los estudiantes en formación inicial docente del Área de Educación Matemática no están exentos, las prácticas que se suponen podrían ser similares a las de un contexto escolar se ponen en juego de una manera tradicional, y finalmente la formación de los futuros egresados de la licenciatura al regresar al aula escolar como docentes, puede hacer que sigan esas mismas prácticas en la enseñanza de la Geometría (Montoya, 2011).

Este trabajo se organizó con base en elementos teóricos de la perspectiva semiótica y cognitiva de Raymond Duval, su propuesta para la enseñanza y aprendizaje de la Prueba en Geometría mediante actividades organizadas en tres etapas, que busca promover no solo el uso de la prueba, sino la comprensión de cómo funciona para aprender a probar.

Se articula con una primera caracterización de la noción de Recurso Pedagógico y lo que corresponde a la congruencia de triángulos en la Geometría elemental. La metodología de investigación que orienta la propuesta se basa en los Experimentos de Enseñanza, lo que permite junto con los referentes teóricos, caracterizar un diseño de Recurso Pedagógico en un contexto de Laboratorio para promover procesos de Prueba en Geometría dirigido a estudiantes en formación inicial.

En el primer capítulo se describen los elementos generales que resultan influyentes para plantear el problema de indagación, así como una síntesis de las principales teorías que se han

considerado para su estudio. Entre estos elementos se presentan: la conceptualización de la noción de Recurso Pedagógico, en qué consiste y cómo funciona una prueba en geometría desde la perspectiva semiótico cognitiva de Duval (2016, 2017), proposiciones de congruencia de triángulos probadas mediante el uso de registro de Grafo Proposicional. Estos referentes son organizados y puesto en juego en un diseño que se presenta conforme se describen los elementos que caracterizan los Experimentos de Enseñanza.

En el segundo capítulo se describe aspectos característicos de la fase de experimentación que se desarrolló con estudiantes de segundo semestre de la licenciatura en matemáticas y física, se presenta un primer análisis llamado análisis local que como fase en un experimento de enseñanza favorece en la determinación de ajustes y refinamiento, para este trabajo, en el diseño del Recurso Pedagógico.

En el tercer capítulo se presenta un contraste entre lo que desarrollaron los estudiantes y el proceso hipotético de aprendizaje que se previó en el diseño, se describe con base en los registros del trabajo de los estudiantes aspectos que se consideran relevantes y que permitieron evidenciar cómo lo estudiantes conciben los pasos deductivos en una Prueba en Geometría elemental, esta fase corresponde en el experimento a lo que se denomina análisis retrospectivo, por último se establecen las conclusiones respecto al experimento y la caracterización del diseño del Recurso Pedagógico para la Enseñanza de la Prueba en estudiantes de formación inicial.

## Capítulo 1. Fundamentos de la Propuesta

En esta sección se describen los elementos generales que se consideran involucrados en el problema de indagación, en concordancia con éste, la enseñanza de la Geometría elemental, la formación inicial de docentes, procesos de Prueba, Recursos Pedagógicos. Se menciona la pregunta de investigación y se identifican los objetivos previstos en relación con el uso de Recursos Pedagógicos en el marco del Laboratorio de Educación Matemática, para promover procesos de Prueba de proposiciones correspondientes a la congruencia de triángulos;

A la par que se presentan los elementos generales, se da cuenta de las razones por las cuales se tiene el interés de investigar acerca de la Enseñanza de la Prueba en geometría para docentes en formación inicial, en especial, de los programas académicos ofrecidos por el Área de Educación Matemática (AEM) de la Universidad del Valle. Además, se describe los Experimentos de Enseñanza como metodología para el desarrollo de la investigación.

Como punto de partida el tipo de geometría que se trabaja en la investigación, es la geometría euclidiana elemental, que en adelante se seguirá nombrando como Geometría Elemental; entendida en términos de la descripción de Bkouche (2009), (citado en Garzón y Vega, 2011, p. 13), la cual se ocupa, entre otros, de los problemas fundamentales de la forma, la igualdad, la congruencia y la semejanza.

La iniciativa e interés que motivó la investigación, parte no sólo de reconocer en el paso de la educación media a la educación superior un cambio importante (Morales y Samper (2015), Samper, Leguizamón, Camargo y Donado (2001)), sino también reconocer que, en el caso de los cursos de Geometría I y Fundamentos de Geometría ofrecidos por el AEM, el uso de la Prueba es clave en el trabajo con definiciones, proposiciones y teoremas que hacen parte de la axiomática que se desarrolla, y que se podría extender a otras áreas de conocimiento matemático. Esto

conlleva a reflexionar sobre qué aportes se podrían desarrollar para su enseñanza y aprendizaje. A continuación, se presentan focos de investigación sobre los cuales se problematiza esta cuestión.

En un contexto amplio, el *19th ICMI Study*, encierra muchos de los temas de investigación destinados a tratar los problemas de la Prueba y la Demostración en la Educación Matemática. En el caso de la selección que hacen Hanna y de Villiers (2012), se abordan seis temas principales en los que se enfocaron los Grupos de Trabajo (*Working Group* (WG) en la publicación original en inglés) aprobados por el *International Program Committee* (IPC), los cuales se resumen en la Tabla 1.1

Tabla 1.1

Énfasis de los Grupos de Trabajo para el *19th ICMI Study*

| Grupo                                                                                                                                                 | Énfasis                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Desarrollo Cognitivo de la Demostración                                                                                                               | En las características del desarrollo cognitivo de la demostración en diferentes grados de escolaridad, con una mirada sobre lo que constituye el desarrollo cognitivo de la demostración.                                                                                                            |
| Argumentación                                                                                                                                         | En las relaciones entre la argumentación y la demostración desde la perspectiva de oposición, tales como formal vs informal, forma vs contenido, sintaxis vs semántica, veracidad vs validez, lógica matemática vs sentido común prueba formal vs prueba heurística, y continuidad vs discontinuidad. |
| Experimentación/Software de Geometría Dinámica,                                                                                                       | En las formas en las cuales el uso de investigaciones matemáticas con tecnología avanzada y diferentes recursos semióticos relacionan aspectos formales de discurso matemático y a la producción de demostraciones.                                                                                   |
| Demostración en el Currículo Escolar, Conocimiento para la Enseñanza de la Demostración, y la Transición desde la Educación Elemental a la Secundaria | En el conocimiento que los profesores necesitan para enseñar a demostrar efectivamente y sobre cómo actividades de prueba podrían ser diseñadas para promover instrucciones exitosas sobre prueba y demostración.                                                                                     |
| La Naturaleza de la Demostración para el Salón de Clases                                                                                              | En aspectos de la enseñanza de la demostración desde la primaria hasta la educación superior. Direccionado por cuestiones acerca de la forma, estatus, y el papel que la demostración podría asumir en cada nivel para asegurar exitosamente la generación del entendimiento matemático.              |
| Demostración en la educación superior (Tertiary Level)                                                                                                | En aspectos de la enseñanza y aprendizaje de la prueba y la demostración en la educación superior, incluyendo la transición desde la escuela secundaria a la universidad y la transición desde el pregrado a trabajo de grado en matemáticas.                                                         |

Fuente: Hanna, G., de Villiers M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En: *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study p. 2.* (Traducción libre)

De los temas objeto de estudio de los grupos de trabajo en la Tabla 1.1, el interés se sitúa en la *Demostración en la educación superior*, considerando también, la pertinencia de tomar elementos del trabajo del primer grupo sobre el *Desarrollo Cognitivo de la Demostración*, con la intencionalidad que desde los referentes de este grupo se pueda sustentar y aportar para la Enseñanza de la Prueba en geometría en el nivel superior.

En el nivel terciario o de educación superior, Hanna y otros (2012) y Selden (2012) afirman que las pruebas implican una considerable creatividad y perspicacia, así como la comprensión y el uso de definiciones formales y teoremas previamente establecidos. Las Pruebas y demostraciones tienden a ser mucho más largas, complejas y rigurosas que las de los niveles educativos anteriores, su enseñanza de manera explícita resulta escasa y se convierte en un medio para evaluar la comprensión de los estudiantes. Esto conlleva a plantear muchas preguntas sobre cómo los estudiantes de nivel terciario llegan a comprender y construir pruebas. Hanna y otros. (2012) proponen las siguientes preguntas, con el interés de poder examinarlas a la luz tanto de las prácticas de enseñanza exitosas como de investigaciones recientes:

1. ¿En qué se diferencian las expectativas de los docentes sobre el rendimiento de los estudiantes, en los cursos de matemáticas basados en pruebas, de los cursos que los estudiantes han experimentado anteriormente?
2. ¿Aprender a demostrar en parte o incluso principalmente es una cuestión de inculcación en las prácticas de los matemáticos?
3. ¿Cómo conciben los estudiantes los teoremas, las pruebas, los axiomas, las definiciones y las relaciones entre ellos? ¿Cuáles son los puntos de vista de los estudiantes sobre la prueba y cómo se ven influenciados por sus experiencias con la prueba?

4. ¿Cuáles son las funciones de la resolución de problemas, la heurística, la intuición, la visualización, el conocimiento procedimental y conceptual, la lógica y la validación?
5. ¿Qué experiencias previas han tenido los estudiantes con las pruebas, que los maestros pueden tomar en consideración?
6. ¿Cómo podemos diseñar oportunidades para que los estudiantes para maestros adquieran el conocimiento (habilidades, entendimientos y disposiciones) necesario para proporcionar una enseñanza efectiva sobre la prueba y la demostración? (p. 452)

Las preguntas orientadas hacia cómo los estudiantes de nivel terciario llegan a comprender y construir pruebas, reafirma la pertinencia de considerar el primer grupo de trabajo sobre el Desarrollo Cognitivo de la Demostración. Centrado en la Prueba, se tomó como sustento teórico la perspectiva semiótico cognitiva de Duval (2016, 2017), cuyo punto de partida toma una de las dos acepciones del término “razonamiento” que sintetiza Blanché (1973), (citado en Balacheff, 2000) afirmando que:

El razonamiento se acerca cada vez más a la intuición en la medida en que se concentra el pensamiento, entendido como acto de la mente. Por el contrario, cuando se detiene en su expresión verbal o simbólica, aparece como una manera de organizar el discurso para convertirse al final en una serie de operaciones formales exactamente ordenadas, es decir, un cálculo. (p. 13)

En Duval (2000), (citado en Duval, 2016, p. 109) el razonamiento designa la explicación verbal y simbólica dentro de un discurso, y lo lleva entender la prueba como “una explicación reconocida por una comunidad [...] en relación con un sistema de validación común a los interlocutores” y “demostración” (*apodeixis*) como “una secuencia de enunciados organizados de

acuerdo con reglas específicas”. El tipo de relación entre la prueba y la demostración, podría entenderse en términos generales, que toda demostración se puede constituir como una prueba y sin embargo no toda prueba o tipo de prueba se puede constituir como una demostración.

Una prueba en Geometría requiere un razonamiento válido al que se denomina “deductivo”, que involucra dos niveles bien diferentes de organización discursiva: el nivel de organización de varias proposiciones en un paso de deducción, y el nivel de organización de varios pasos en una prueba. A partir de los dos niveles de organización discursiva en la Tabla 1.2, Duval (2016), presenta indicadores de incompreensión de la organización de la demostración.

Tabla 1.2

Indicadores de incompreensión de la organización de la demostración.

|                                                                                                     | Funcionamiento del razonamiento válido                                                                                                                                                                                                          | Tipos de malentendidos                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I.<br>Organizar PROPOSICIONES DENTRO DE UN PASO DEDUCTIVO teniendo en cuenta tres tipos de estatus. | (1) Cambiar el foco sobre lo que se considera el primer componente del significado de una proposición: ESTATUS EN LUGAR DE CONTENIDO.<br><br>(2) Hacer funcionar el teorema: separar su parte “entonces”. <i>Un teorema no es un argumento.</i> | DISFUNCIONAL:<br><ul style="list-style-type: none"> <li>• Confundir hipótesis (dada) con conclusión.</li> <li>• Confundir un enunciado con su recíproco o su contrario.</li> <li>• No revisar las condiciones de aplicación de teoremas.</li> </ul> |
| II.<br>Organizar PASOS DEDUCTIVOS DENTRO DE UNA PRUEBA DE ...                                       | Traslapar pasos deductivos. Dos condiciones:<br>(1) La conclusión de un paso debe ser la premisa de otro. Hipótesis y premisa no se refieren al mismo nivel.<br>(2) Se usan todas las propiedades matemáticas pertinentes al problema.          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• NO DISTINGUIR EL MECANISMO DE SUSTITUCIÓN</li> <li>• Avanzar dejando “BACHES” EN LA PRUEBA:</li> </ul> No se perciben todas las condiciones del problema que se va a resolver.                             |

Tomado de: Duval, R. (2016). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. P. 110.

Se consideró pertinente abordar la perspectiva de Duval, puesto que hace énfasis en las características principales del funcionamiento cognitivo del acto de razonar, examina las consecuencias para el problema didáctico de aprender a probar; y aborda las variables a

considerar para generar la doble conciencia que haga posible que los estudiantes comprendan “cómo funciona en realidad la prueba” y se convenzan verdaderamente con las pruebas.

En el formato que se entrega a los estudiantes al iniciar los cursos de geometría, se destaca entre los propósitos de estos cursos, aquellos que concierne a procesos demostrativos y el desarrollo de competencias para aprender a demostrar dentro un marco axiomático, por ejemplo:

Construir el marco teórico pertinente de la geometría euclidiana a partir de sus elementos y relaciones fundamentales, desarrollando un marco representacional que vincule las construcciones geométricas (usando la regla y el compás físico) con la estructuración de cadenas simbólicas en procesos demostrativos.

Desarrollar competencias en relación al razonamiento deductivo (explorar, visualizar, conjeturar, relacionar, inferir y sistematizar) para que los estudiantes aprendan a demostrar proposiciones dadas dentro de un sistema axiomático. (Programa de curso del año 2017, Universidad del Valle)

El grupo del ICMI que se centra en *demostración en la educación superior*, enfatiza también en el paso de la educación media o secundaria a la educación superior, paso que Montoya (2011) tomó en cuenta para su investigación, estudió la enseñanza y aprendizaje de la Geometría apoyada en los Paradigmas Geométricos y el Espacio de Trabajo Geométrico (desarrollado por Houdement y Kuzniak, considerando la Tipología de Prueba de Balacheff). Investigó sobre la articulación que realiza un profesor debutante en torno al objetivo de enseñanza en términos de un saber enseñado; y estudió la formación recibida en Chile y el pasaje de un alumno de liceo a estudiante de pedagogía en matemática y el pasaje de un estudiante de pedagogía en matemática a profesor de liceo.

A través del uso de encuestas Montoya (2011) encuentra que los estudiantes mantienen un discurso sobre la importancia de la demostración, pero muestran su falta de claridad al responder como geómetra (estudiante) y como geómetra (profesor). En cuanto a la Institución Formadora (universidad), declara que el estudiante aprende a demostrar sin que se haya sometido a un proceso explícito de aprendizaje de ella. Para el caso de los formadores universitarios, exhiben y exigen de la demostración como una herramienta de un matemático. Finalmente, Montoya (2011) manifiesta que la universidad, no ha creado y tampoco incentiva a los estudiantes a reflexionar sobre la transposición de la enseñanza de la demostración y de ningún otro tipo de prueba exigible y/o viable en la institución liceo (mundo profesional).

En correspondencia con las afirmaciones de Montoya (2011), en un programa académico como el de la Licenciatura, Morales y Samper (2015) consideran necesario, que los alumnos no sólo aprendan a demostrar, sino que también, desarrollen una visión amplia de las funciones de la demostración y adquieran la capacidad de construir ambientes de aprendizaje que favorezcan esta actividad en el aula. Esto conlleva a la pregunta, cómo los cursos de los programas académicos podrían favorecer a la formación inicial de docentes, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la prueba en geometría.

En el contexto internacional, Gellert (2005, p.73) hace hincapié en los siguientes resultados de investigaciones de Lin, Cooney, (2001) y Jaworski, Gellert, (2003), en relación con la formación inicial de docentes, afirmando que:

- La formación inicial del profesorado se vuelve más reflexiva si se dirige explícitamente hacia la práctica escolar.
- La formación inicial es más efectiva si los aspirantes a profesores aprenden las matemáticas universitarias de manera similar a la que uno considera que sería

deseable como práctica escolar. Refiriendo práctica escolar como aquella que permite participar de un contexto de enseñanza, no necesariamente expositivo de parte del docente y que da la oportunidad a estudiantes entre pares y orientados por el docente para participar de la exploración, reflexión y construcción de los conocimientos matemáticos.

Samper y otros (2001) manifiestan que los estudiantes en su vida escolar anterior posiblemente tuvieron poca oportunidad de realizar actividades geométricas de tipo exploratorio, consideradas importantes por proveer la mayor fuente conceptual para la formación de las nociones, conceptos, proposiciones, métodos y técnicas geométricas, y para la posterior formalización de éstas, brindando oportunidad de conjeturar sobre aquello que posteriormente será objeto de estudio.

En Colombia el grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, de su experiencia docente con estudiantes que ingresan al programa de Licenciatura en Matemáticas de esta universidad, Samper, Leguizamón, Camargo y Donado (2001), propusieron la construcción de un currículo para el área de Geometría de la Licenciatura, concibiendo para su enseñanza, ambientes propicios que permitan a los estudiantes construir los conocimientos y habilidades propios de los distintos dominios de la Geometría. Esto como oposición a lo que denominan un tratamiento tradicional, en el que se cree que una buena exposición de los teoremas por parte del maestro es suficiente para que los alumnos aprendan a hacer demostraciones, confundiendo rigor con rigidez y sin hacer evidente la relación entre la Geometría y el mundo.

En el uso de la prueba y la demostración por parte de los estudiantes, Duval (2016) distingue tres tipos de fracasos: disfunciones en el razonamiento válido (confusión del estatus, no

distinción entre un enunciado y su recíproco, etc.), baches o deficiencias en el progreso de una prueba, bloqueo mental y mutismo mental al construir una prueba. Centrando su interés en el primer tipo, refiere que éste persiste independientemente cual sea el problema geométrico que se le presente al estudiante, siendo los otros dos tipos de fracaso sobre los que se enfocan usualmente profesores y matemáticos.

Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina (2007) reconocen que la problemática no es sólo un asunto local, sino que se presenta en la comunidad de educación matemática internacional. Giacardi (2012), citado en Maschietto (2015), afirma que entre finales del siglo XIX e inicios del siglo XX diferentes matemáticos europeos y norteamericanos discutían sus reflexiones hacia las formas de enseñar matemáticas como oposición a las lecciones tradicionales. En Italia, Maschietto (2015) afirma que Giuseppe Vailati, contribuyó con su innovadora idea de school-laboratory, con una metodología basada en resolución de problemas.

La característica principal de las matemáticas en los laboratorios que reconocen Maschietto y Trouche (2010) es que son lugares para experimentos que necesitan de tiempo y libertad. Con respecto a los estudiantes, deben tener asignaturas para explorar en una atmosfera de cooperación, sin tener una tarea que cumplir, sintiéndose libres y no bajo presión. Para los profesores los laboratorios también son un campo de experimentación, en el que pueden probar nuevas asignaturas, fuera de cualquier currículum. Agregando que se puede concebir como una estrategia didáctica de diseño y utilización del material para el estudio de actividades desarrolladas autónomamente por los participantes, bien sean estudiantes, docentes en formación inicial o continua (Pabón, Arce, Vega y Garzón, 2011).

En el documento de *Italian Teaching Commission* (UMI-CIIM) (AA.VV. UMI 2004) citado en Maschietto y Trouche (2010), la idea de un laboratorio de educación matemática se

entiende como un conjunto estructurado de actividades, destinadas a construir significados para objetos matemáticos. La construcción de significados como objetivo del laboratorio, en palabras de Maschietto y Trouche (2010), “está estrictamente vinculado a los instrumentos utilizados al llevar a cabo las actividades dadas y a la interacción entre los participantes durante las actividades”. En el caso del presente trabajo se empleó la noción de Recurso Pedagógico (RP) en lugar de instrumento, al considerar que es mucho más amplia y reúne características de los instrumentos apoyándose en la perspectiva instrumental.

La noción de RP es muy reciente, surge en 2005 en las jornadas de estudios matemáticos del Instituto Nacional de Investigación Pedagógica (Francia) organizadas alrededor de la pregunta ¿Cuáles recursos para la enseñanza de las matemáticas? (Trouche, L., Durand-Guerrier, V., Margolinas, C., y Mercier, A., 2006), citados en Garzón y Vega, 2011). En términos del uso en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, es entendido por Garzón, Pabón y Vega (2013) como:

Todo aquello que llega al aula luego de una búsqueda intencional orientada por un interés e interpretaciones específicos del profesor y que, en el contexto de su gestión didáctica en clase, toma un sentido particular con base en la práctica discursiva con la cual él hace presencia en el tiempo y en el espacio del aula. (p. 10)

Esta aproximación a la noción de recurso pone en evidencia que se pueden tomar elementos de otros referentes teóricos, para describir una aproximación y caracterización particular, que se ajuste a la necesidad de favorecer la Enseñanza de la Prueba en geometría.

El foco de lo geométrico en la investigación se centró principalmente en el trabajo con proposiciones y teoremas correspondientes a la congruencia de triángulos, bajo las siguientes razones: 1) en lo que corresponde a los contenidos de los dos cursos de Geometría, el trabajo con

triángulos es común en los dos programas de curso tanto para los estudiantes de licenciatura básica con énfasis en matemática y los de licenciatura en matemáticas y física, 2). En los libros de texto de Hemmerling (2002) y Moise y Downs (1989), que aparecen como referentes bibliográficos en los programas de curso, se encuentran desarrolladas las demostraciones de algunas proposiciones y otras son propuestas como ejercicios, 3) también se encuentran dos proposiciones desarrolladas en trabajos de investigación con docentes en formación inicial (Clemente, Llinares y Torregrosa (2017), Samper., Camargo y Leguizamón, (2003)).

En lo que se refiere a la metodología de investigación, Correa (2017) elabora una síntesis de trabajos sobre la metodología de experimentos de enseñanza a partir de los desarrollos de Cobb (2000), Confrey y Lachance (2000), Molina, M., Castro, E., Molina y Castro (2011), Steff y Thompson (2000), en la que describe y ejemplifica (con interés en situaciones de enseñanza para la introducción al álgebra en nivel octavo) cada uno de los elementos que la constituyen. Esta metodología se considera pertinente porque: 1) prima el establecimiento de una conjetura, que expresa aquello que se quiere realicen los estudiantes, considerando qué enseñar y un cómo enseñarlo, 2) permite establecer un vínculo entre los elementos teóricos, la situación de enseñanza y los análisis en distintos momentos, Correa (2017). Así, bajo esta metodología se podría hacer una caracterización de RP con la elaboración de un diseño de éste, puesta en práctica y análisis.

En síntesis, en este trabajo se buscó articular algunas reflexiones teóricas sustentadas desde el punto de vista cognitivo, de los recursos pedagógicos y el Laboratorio de Educación Matemática, para aportar a la enseñanza y aprendizaje de procesos de Prueba en la formación inicial de maestros, campo amplio de indagación. Bajo la creencia de que es posible desarrollar propuestas sobre la Enseñanza de la Prueba en geometría para estudiantes en los niveles de

educación superior, con la posibilidad de aportar elementos que se aproximen a dar respuesta a la cuestión sobre cómo construir o diseñar oportunidades para estos estudiantes, teniendo en cuenta su experiencia previa (pregunta 6, p.7).

Pueden ser muchos los cuestionamientos que emergen, por ejemplo: en qué consiste y cómo funciona la prueba en geometría; cómo se podría enseñar a probar en geometría y qué recursos se podrían emplear para potenciarla, cuál podría ser un contexto para hacerlo, de qué manera se proponen los cursos de Geometría en la formación inicial docente en el programa de la Licenciatura, teniendo presente el interés en cómo podemos diseñar oportunidades, para que los estudiantes para maestros construyan el conocimiento (habilidades, entendimientos y disposiciones) necesario para proporcionar una enseñanza efectiva sobre la prueba y la demostración. Fundamentalmente se centró la atención en desarrollar y aportar caminos a la siguiente pregunta problema:

*¿Qué caracteriza un diseño de Recurso Pedagógico para promover procesos de Prueba en Geometría dirigido a estudiantes en formación inicial docente?*

## **Objetivos**

### **Principal.**

Caracterizar un diseño de Recurso Pedagógico, con base en la propuesta de aprendizaje y enseñanza de los procesos de Prueba en Geometría de Raymond Duval, dirigido a estudiantes en formación inicial docente.

### **Específicos.**

1. Caracterizar un tipo de tareas en el marco de la perspectiva Semiótico Cognitiva de Duval a fin de promover la enseñanza y aprendizaje de la Prueba en Geometría

2. Diseñar un Recurso Pedagógico situado en el marco de un experimento de enseñanza, para promover en estudiantes procesos de prueba de proposiciones de congruencia de triángulos, en el contexto de Laboratorio de Educación Matemática.

### **Marcos de Referencia**

En este apartado se presentan los referentes teóricos concernientes a la noción de Recursos Pedagógicos, los procesos de Prueba, el conocimiento geométrico, y una descripción de elementos de Experimento de Enseñanza que se desarrollaron en este trabajo.

#### **La noción de Recursos Pedagógicos.**

Recordando que la noción de Recurso surge como una respuesta a ¿qué recursos para la enseñanza de las matemáticas? Se propone describir de manera general características de un Recurso Pedagógico, que responde a los requerimientos e intencionalidad de la propuesta de Laboratorio de Educación Matemática, incorporando elementos que lo sustentan, principalmente bajo una interpretación y asociación, de lo que resulta de cada uno de los constructos teóricos que conforman la perspectiva instrumental.

Extendiendo el uso del término instrumento de Trouche (2014), un RP tendría la característica de que ha sido creado y se usa con el propósito de ayudar, asistir, soportar, extender y potenciar la actividad, tanto del estudiante como la del docente. Destacando que las actividades desarrolladas por ambos no necesariamente corresponden con los mismos intereses, mientras el estudiante realiza una tarea y su objetivo gira entorno a esta, la del docente es hacer que el estudiante pueda desarrollar algún tipo particular de actividad con la tarea, lo que sugiere una posible existencia de diferentes niveles o tipos de recursos para la enseñanza.

Antes de que se pueda contar con instrumento, se tiene un artefacto con el cual el sujeto interactúa e implícitamente moviliza dos tipos de procesos intrínsecamente entrelazados (la instrumentación y la instrumentalización), que constituyen lo que se denomina génesis instrumental (Rabardel (1995), citado en Trouche 2014, p. 310), que permite a un sujeto desarrollar, desde un artefacto dado, un instrumento para realizar una tarea particular. Esto sugiere que no necesariamente los recursos están dados y que se puedan diseñar, además que un profesor puede coleccionar, modificar y ajustar recursos para construir el material de su enseñanza (Guin y otros, 2005), citado en Touche (2014, p. 310).

Una vez el docente tiene a su disposición varios instrumentos, la necesidad de una combinación en una manera coherente para un diseño de enseñanza, conlleva a la noción de orquestación instrumental. En 2004, Trouche la introdujo para modelar el trabajo de un profesor tomando en cuenta: cuándo diseña su enseñanza, el conjunto de artefactos posible para cada estudiante y para el aula, y el grado de desarrollo de los diferentes instrumentos de los estudiantes (Trouche, 2014)

En la orquestación instrumental, Trouche (2014) afirma que, el docente requiere de una escogencia cuidadosa de un problema matemático, de acuerdo a los objetivos didácticos, para anticipar la posible contribución de los artefactos a la resolución del problema, y para anticipar, en el contexto, la posible instrumentación de los estudiantes por aquellos artefactos.

En términos de otros autores que retoman elementos de la aproximación instrumental describen como características de un RP:

No se consideran terminados y listos para su implementación o uso, para Pabón y otros (2011), constituyen un proceso vivo y permanente de transformación de las propuestas de

enseñanza que inspiraron a los investigadores, las editoriales o a los educadores mismos para el diseño de tales materiales y guías.

Con relación a la formación docente, para Garzón y Vega (2011), constituyen en una puerta de acceso tanto para la investigación que permita la interpretación y comprensión de las prácticas cotidianas de enseñanza en el aula, como para reconsiderar y reorientar los procesos de formación docente y valorar aún más las trayectorias de formación profesional que se van consolidando en las prácticas de enseñanza en el aula.

En Guin y Trouche (2007), citados en Ibargüen (2016, p. 53), definen la noción de RP a partir de dos tipos de material: didáctico reutilizable y adaptable. El primero, corresponde a un tipo de material en el que se describe la situación de aprendizaje, contiene documentación sobre aspectos pedagógicos, incluye descripciones del escenario de uso para que facilite su aplicación. El segundo tipo, se utiliza de acuerdo a las necesidades de cada docente, quien participa de la creación y discusión en comunidades de práctica, con la posibilidad de que los recursos se modifiquen y evolucionen.

De acuerdo con Joab, Guin y Trouche (2003), citados en Ibargüen 2016, pp. 53-54, los RP están compuestos por varios elementos: la ficha de identificación, la ficha del estudiante, la ficha del profesor, la ficha técnica, el escenario de uso y el informe de experimentación (ver Tabla 1.3). En el caso del Laboratorio se utilizan dos fichas y una bitácora, que reúnen los mismos elementos que describen los autores en las cinco fichas. La primera ficha, denominada Ficha de trabajo, corresponde a la del estudiante que coincide con la de Joab y otros (2003), la segunda ficha que se le asigna para uso del docente reúne los elementos descritos en las fichas restantes, excepto el informe de experimentación que en el Laboratorio se refiere como bitácora.

Finalmente el tipo de RP que se propone en este trabajo reúne las características mencionadas hasta el momento, no obstante, las características particulares que se pueden identificar se ajustan al tipo de conocimiento, los estudiantes participantes y el contexto del Laboratorio (con características descritas en p. 11) en el que se pone en juego.

Tabla 1.3

Fichas de un Recurso Pedagógico

| Ficha                      | Descripción                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| De identificación          | Presenta información sobre el contenido del recurso, es decir, sobre la actividad pedagógica que se coloca en juego y el grado al que se tiene proyectado, objetivos pedagógicos generales, los dispositivos técnicos, es decir, los materiales y software necesarios para su realización, lista y descripción de los archivos que se van a utilizar con su respectiva descripción, descripción general del desarrollo de la actividad y finalmente las palabras claves que se refiere al conocimiento en juego. |
| Del estudiante             | En esta ficha se presenta toda la secuencia de tareas que estará a disposición del estudiante.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Del docente                | Presenta información al docente sobre los prerrequisitos matemáticos que se requieren para el desarrollo del problema, además sobre las posibles dificultades que se presenten en la práctica, los objetivos pedagógicos generales, descripción de la situación pero colocando en evidencia el papel de los instrumentos en ella, además se precisan las competencias requerida en el programa de la clase.                                                                                                      |
| Técnica                    | Esta ficha proporciona información sobre el software que se va utilizar, es decir, nombre de los archivos a utilizar, nombre el software y configuración necesaria, modo de empleo, descripción de la interacción con el usuario, modo que se desarrollará la actividad y documentación necesaria para la realización de la actividad (enlaces, manuales de usuario, descripción de los dispositivos técnicos).                                                                                                  |
| Escenario de uso           | Proporciona los elementos sobre el escenario de explotación didáctica describiendo etapa por etapa el desarrollo de la actividad en clase, indicando la situación la tarea a realizar, organización de los tiempos y los espacios de estudio, los artefactos y proceso de instrumentalización, los actores: estudiante o docente.                                                                                                                                                                                |
| Informe de Experimentación | Este informe permite al docente plasmar sus apreciaciones sobre el recurso y hacer sugerencias para su evolución, después de una discusión en el interior de la comunidad; estas apreciaciones son tomadas en cuenta para realizar nuevas versiones de los recursos.                                                                                                                                                                                                                                             |

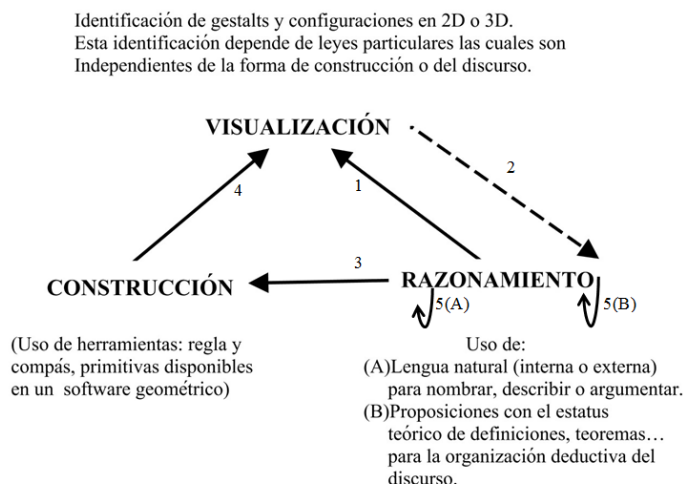
Fuente: Joab, Guin y Trouche (2003), citados en Ibargüen, Y. (2016). Diseño de un Recurso Pedagógico en una comunidad de práctica que integra un AGD para la enseñanza de la geometría. pp. 54-55.

### Referente Semiótico Cognitivo de Duval

La siguiente síntesis recoge los elementos teóricos, metodológicos y didácticos de la propuesta de Duval (2016, 2017) respecto a la enseñanza, aprendizaje y comprensión de la Prueba en Geometría.

El trabajo en Geometría involucra tres procesos cognitivos diferentes (Procesos de visualización, procesos de construcción y razonamiento) que pueden ser realizados

separadamente, y a su vez están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en Geometría (Duval, 2001). En la figura 1 se muestra la forma en la que una clase de proceso cognitivo puede apoyar a otra clase en cualquier tarea. En el caso de la flecha punteada 2, se debe a que la visualización no siempre ayuda al razonamiento. Y la flecha 5(B) enfatiza que el razonamiento B puede desarrollarse de una manera independiente.<sup>[1]</sup>



*Figura 1. Conexiones entre los tres procesos cognitivos para la competencia en Geometría.*

Tomado de: Duval, R. (2001). La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo. p. 1.

El acto de razonar en Duval (2016) es considerado como aquel que se caracteriza por el trabajo implícito o explícito con proposiciones, es decir, enunciados que tienen un valor por sí mismos y un estatus en relación con otras proposiciones. Con el propósito de: 1) modificar el valor epistémico, semántico o teórico, cuya verdad se quiera probar o con respecto a la cual se desea convencer a alguien más; 2) modificar el valor de verdad cuando se cumplen ciertas condiciones particulares de organización discursiva, Duval (2017, p. 250).

El significado de una proposición (no queriendo decir: qué significa una proposición), según el autor, está determinado con respecto a varias dimensiones: una dimensión semántica a través de su contenido, una dimensión de conocimiento a través de su valor epistémico (obvio,

probable, absurdo, irreal, posible, necesario, etc.) y una dimensión lógica a través de su valor de verdad (verdadero, falso, indecidible, etc.).

Una proposición dentro de un conjunto de otras proposiciones requeridas para probar cumple una función específica, llamada “estatus”. El estatus está constituido por el estatus “operativo” y el estatus “teórico”. Siendo el primero, intrínseco a cualquier organización del razonamiento (premisa, hipótesis, conclusión, etc.); y el segundo, intrínseco a una estructura teórica (axioma, definición, teorema, conjetura, principio, regla, etc.), Duval (2016).

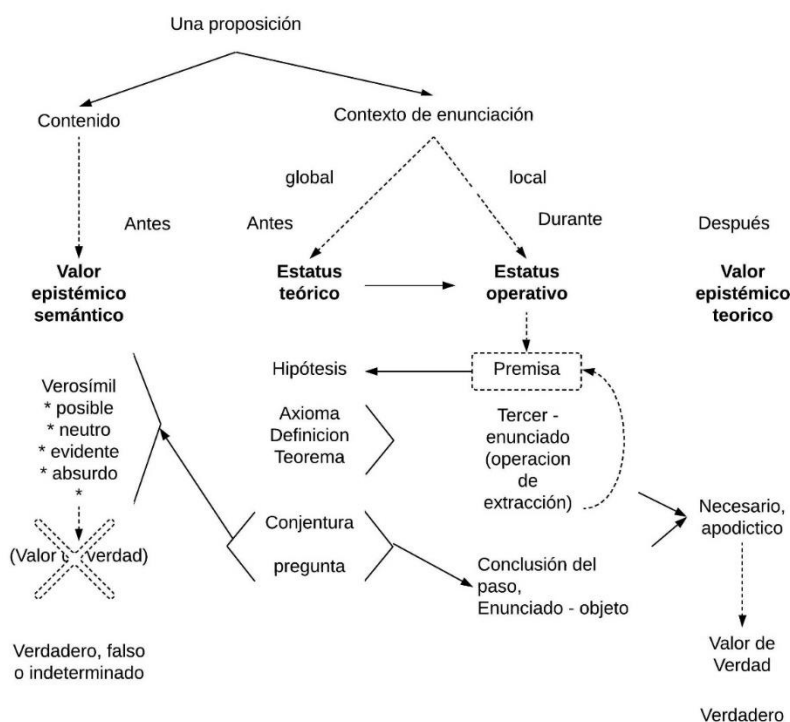


Figura 2. Transformación del valor epistémico teórico de una proposición y por tanto del “sentido” de una proposición en el funcionamiento de un paso de deducción, el cual pone en juego por lo menos tres proposiciones. Fuente: (Duval, 2017, p. 246)

El razonamiento deductivo en una prueba en Geometría involucra dos niveles bien diferentes de organización discursiva: el nivel de organización de varias proposiciones en un paso de deducción, y el nivel de organización de varios pasos en una prueba (Duval, 2016).

En el primer nivel, cada proposición toma una de las tres categorías del estatus operativo, que invierte la predominancia usual entre el contenido y el estatus de las proposiciones; esto implica que el estatus operativo de cada proposición está fijado por su estatus teórico y, por tanto, su valor epistémico se hace dependiente de su valor teórico y no de su contenido, y también hace que no se requieran los conectores (si...entonces, por tanto, etc.) entre premisa y conclusión, puesto que su uso se considera sólo claves lingüísticas del estatus operativo.

Lo anterior favorece al estudiante en el uso correcto y significativo de un teorema, sin llegar a tener el riesgo de entender los pasos como organizaciones binarias en las que no se requiere verificar las premisas para aplicar los teoremas, y conllevar a errores como producir argumentos circulares sin notarlos o de confundir un teorema y su recíproco.

En el segundo nivel, es importante el uso de proposiciones que ya han sido expresadas como hipótesis dadas o conclusiones, cambiando su estatus (definido como “reciclar”), para establecer la conexión con otro paso deductivo siguiente, con lo cual el razonamiento avanza de una conclusión a otra conclusión sin saltos.

Los procesos cognitivos que ponen al estudiante en capacidad de comprender cómo funciona una prueba matemática y de probar, referidos por Duval (2016), dependen de una doble conciencia: una concierne a la distinción entre diferentes causas para el sentimiento de necesidad que puede ser experimentado y la otra concierne a la distinción entre diferentes procesos de organización en un desarrollo discursivo. Sobre conducir la conciencia de la necesidad Duval presenta tres experiencias diferentes.

La primera experiencia que conduce a la conciencia de la necesidad de alguna proposición es que su contenido corresponde a datos sensoriales, percibidos con o sin

instrumentos. Esa es la práctica epistemológica común. De esa manera, la mejor prueba común es la observación directa.

La segunda experiencia que conduce a la afirmación de la necesidad de alguna proposición reside en el hecho de que otros están de acuerdo en que es verdad y, al reconocerlo se convierte en una necesidad, en una necesidad consensual.

La tercera experiencia ocurre siempre que se ve que expresar una determinada proposición es la única conclusión posible de lo que se ha afirmado previamente, aunque vaya en contra de la evidencia perceptual o de un acuerdo general. (p. 108, 2016)

Para inducir a los estudiantes a la comprensión de la manera en que funciona una prueba, el autor propone que se deben organizar actividades matemáticas divididas en tres etapas: una primera etapa de exploración libre, una segunda etapa de investigación específica de la organización deductiva de proposiciones en un registro no discursivo (grafo proposicional), y una tercera etapa de descripción o explicación verbal de la organización deductiva que se ha descubierto.

La primera actividad tiene como propósitos: 1) lograr que los estudiantes se adentren en el problema, 2) proporcionarles las propiedades pertinentes como datos para una investigación específica en la organización deductiva de las proposiciones. En este caso los datos resultan ser los teoremas pertinentes para construir una prueba, lo que requiere un entrenamiento específico en el registro de la figura geométrica (Duval, 2016), que podría llevarse a cabo inicialmente mediante la *aprehensión operativa*, que consiste en la modificación de una figura para considerar subconfiguraciones.

Clemente, Llinares y Torregrosa (2017) sugieren al respecto, que los maestros deberían enseñar a sus estudiantes a *ver* las configuraciones geométricas que pueden ser relevantes para la

resolución del problema. También advierten que el reconocimiento de una subconfiguración relevante en una configuración geométrica, es una condición necesaria pero no suficiente para desencadenar el proceso que relaciona la visualización y el conocimiento de geometría, denominado razonamiento configural, entendido como la coordinación entre las dos aprehensiones, figural y discursiva.

Los teoremas resultan ser necesarios para ver las subfiguras, lo que conlleva a que probar en geometría requiere la capacidad para activar de manera fluida los enunciados o sus representaciones figurales (Duval, 2016). Clemente y otros (2017), afirman que los estudiantes se apoyan en el conocimiento previo de algunos hechos geométricos y a las aprehensiones discursivas vinculadas a la configuración dada, para la generación de procesos de prueba.

Las aprehensiones discursivas, permiten el control lógico sobre las figuras mediante asociaciones de afirmaciones matemáticas a configuraciones o subconfiguraciones, en dos maneras según el sentido de la transferencia realizada: del anclaje visual al anclaje discursivo (a un dibujo se le asocian afirmaciones matemáticas) y del anclaje discursivo al anclaje visual (la capacidad para realizar un dibujo que cumpla alguna de las características de una afirmación enunciada) (Duval (1995), citado en Clemente y otros, 2017, p. 501).

Una vez los estudiantes hayan encontrado los teoremas y las definiciones a utilizar para la prueba, le sigue la segunda etapa en la que se elabora un Grafo Proposicional, para hacer visibles las operaciones discursivas involucradas al organizar las proposiciones en una deducción. La construcción de un Grafo Proposicional (en adelante GP), se puede emprender desde una perspectiva heurística (hallar el camino entre hipótesis y conclusión) o una perspectiva de organización deductiva.

En la perspectiva de organización, la construcción de una representación gráfica se usa para distinguir entre el estatus y el contenido de las proposiciones y también para diferenciar el uso de los teoremas, del uso de las justificaciones argumentativas naturales o del de las explicaciones físicas. La construcción de la gráfica se enfoca exclusivamente en la representación del estatus de una proposición bajo las siguientes reglas, Duval (2016, 2017):

1. Desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha.
2. Una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él.
3. Una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella. (p. 117)

Las reglas de construcción proporcionan a los estudiantes los medios para construir el GP y también para verificar por sí mismos la validez de su construcción pero, sobre todo, les ayuda a percatarse de dónde y por qué se equivocaron (Egret y Duval, 1989, citados en Duval 2017).

La tercera etapa comienza a partir del momento en que los estudiantes organicen todo un GP, en el que pueden verificar por sí mismos la validez de las conexiones, de acuerdo con el estatus de cada proposición, e identificar baches en la prueba del tipo que se muestran en la tabla 1.2 (p. 7). Luego se propone describir o explicar el GP que han construido, esto es ponerlo en el registro de la lengua natural, que se constituye en un segundo cambio de registro.

En la redacción el autor afirma que la referencia de los datos no es la figura geométrica como sucede en la primera etapa, sino la organización discursiva, que está representado por un diagrama. Lo que considera un retroceso con respecto a la obviedad visual de la figura geométrica (Lourido, Melan, 2012). La redacción en lengua natural de la demostración como una traducción del grafo, se privilegian actitudes proposicionales (frases cortas provistas de un verbo,

como: puedo concluir, ya demostré que, tengo que...) que marcan el estatus operatorio de las proposiciones.

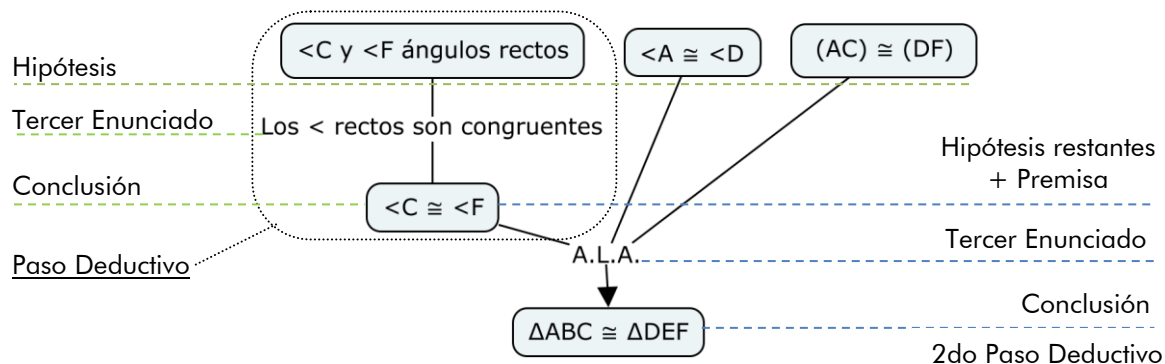


Figura 3. Grafo Proposicional de la prueba de congruencia de dos triángulos rectángulos con ángulo agudo y cateto adyacente congruentes.

## Referente Geométrico

Los teoremas y proposiciones a emplear para el diseño, en el orden en que aparecen en las fichas de trabajo se muestran en la Tabla 1.4. Las figuras que se asocian a estos tienen la característica de que 4 requieren de la identificación de subconfiguraciones (2, 4, 5 y 6), en la proposición 4 particularmente, la figura requiere de una construcción auxiliar para obtener otras proposiciones que de otra forma no se podrían deducir.

La prueba de cada una de las 6 proposiciones de la Tabla 1.4 se presenta en el registro de GP, teniendo en cuenta las reglas de construcción (p. 24). Excepto la prueba de las proposiciones 1 y 3, los registros en doble columna se presentan en el Anexo 1. Las abreviaciones de las proposiciones y en el caso de los terceros enunciados, se presentan con relación a una lista utilizada en el curso de Geometría I (ver Anexo 3) que se tomó como referente para que los estudiantes, de necesitarlo, buscaran teoremas e hicieran uso de estos en la prueba.

Tabla 1.4

Proposiciones (P) para el diseño de tareas para probar en las fichas de trabajo.

| Núm. | Proposición                                                                                                                                                                                                                              | Figura Asociada | Fuente y Aplicación                                                                     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 1    | Hipótesis: Los triángulos rectángulos ABC y DEF con $\angle A \cong \angle D$ , catetos $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ , $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos.<br>Conclusión: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .           |                 | Hemmerling (2002)<br>Teorema 4.15 (p. 137)<br><br>Ficha de Trabajo 1 y 3                |
| 2    | Hipótesis:<br>$\triangle ABC$ con $\angle ABC \cong \angle BAC$ ; D es el punto medio de $\overline{AC}$ ; E es el punto medio de $\overline{BC}$ ; $\angle AEC \cong \angle BDC$ .<br>Conclusión: $\triangle AEC \cong \triangle BDC$ . |                 | Hemmerling (2002)<br>Ejercicio 16 p. 141 (variación)<br><br>Ficha de Trabajo 1          |
| 3    | Hipótesis: B punto medio $\overline{AC}$ de<br>Conclusión: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ .                                                                                                                                         |                 | Ficha de Trabajo 2                                                                      |
| 4    | Hipótesis: AD mediana de ABC;<br>ABC triángulo rectángulo, recto en CAB.<br>Conclusión: el triángulo ABD es isósceles.                                                                                                                   |                 | Samper, Camargo y Leguizamón (2003)<br><br>Ficha de Trabajo 2                           |
| 5    | Hipótesis: El triángulo rectángulo ABC con $\angle ACB$ recto; M, R, S son los puntos medios de $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ .<br>Conclusión: $\overline{MC} \cong \overline{RS}$                                 |                 | Hemmerling (2002)<br>Ejercicio 4 p. 228<br><br>Ficha de Trabajo 2                       |
| 6    | Hipótesis: $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\angle RCB \cong \angle TBC$ .<br>Conclusión: $\overline{RC} \cong \overline{BT}$                                                                                  |                 | Clemente, Llinares y Torregrosa (2017)<br>Moise y Downs(1989)<br><br>Ficha de Trabajo 3 |

### Prueba de la proposición 1.

Para la prueba se requiere de dos pasos deductivos, en el primer paso se asegura la congruencia de los ángulos C y F como conclusión, que se desprende del teorema que señala que todos los ángulos rectos son congruentes, luego se recicla esta proposición y se convierte en una premisa que, junto con las dos hipótesis restantes, satisfacen las condiciones para poder aplicar la correspondencia A.L.A, desprendiendo la conclusión de que los dos triángulos son congruentes. (Ver figura 4)

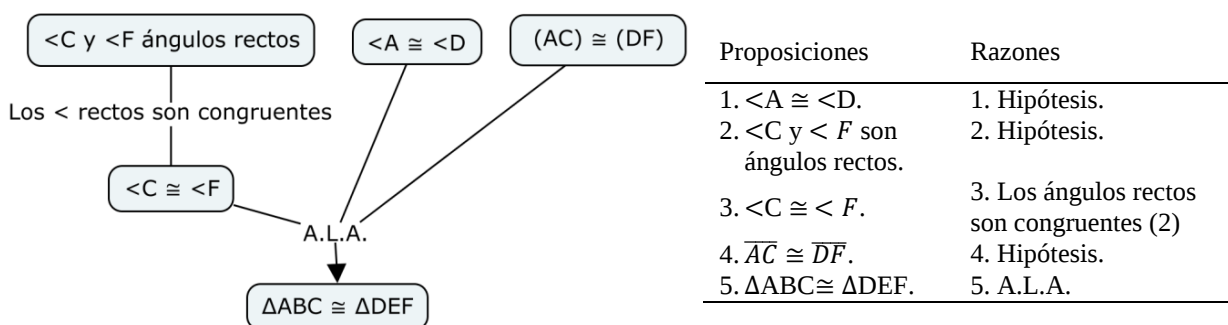


Figura 4. Grafo Proposicional y registro doble columna de la prueba de la proposición 1.

### Prueba de la proposición 2.

En las figuras 5 y 6 se puede observar dos grafos distintos de la prueba de la proposición, estas dos pruebas tienen en común que utilizan la misma subconfiguración relevante y se utiliza el ángulo C común a los dos triángulos (proposición que no aparece como hipótesis y en II se reutiliza); se diferencian en cuanto al uso de las hipótesis (Fig. 6 la prueba se hizo sin recurrir a dos de las hipótesis).

A la subconfiguración se pueden asociar los dos tipos de aprehensión, la identificación de un camino posible para la prueba, se puede poner en términos de trayectoria, la cual resulta

hipotética al ser un tipo de actividad previa a la construcción del GP. Así se entenderá que la identificación de una subconfiguración puede conducir a una Trayectoria Hipotética para la Prueba (THP), en la que se describen las proposiciones y teoremas a utilizar.

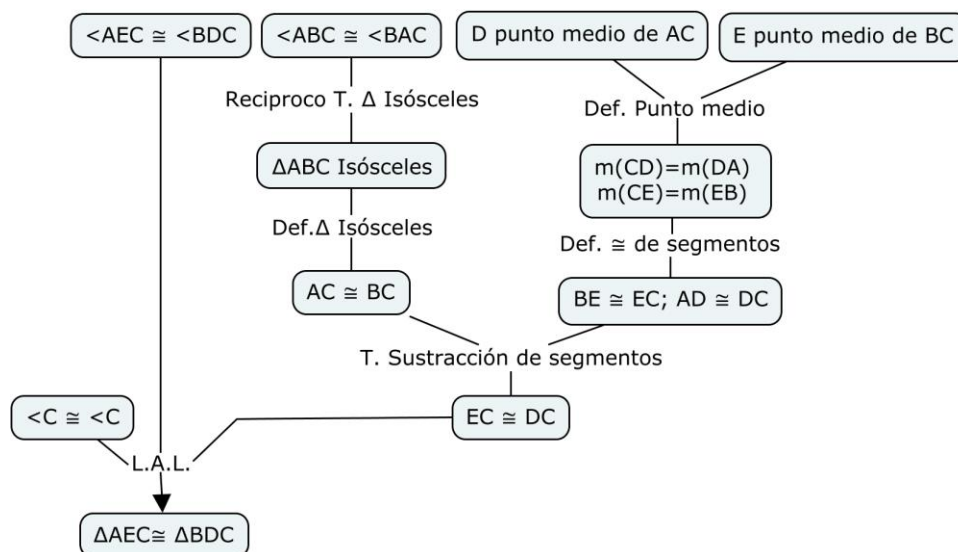


Figura 5. Grafo Proposicional I de la prueba de la proposición 2.

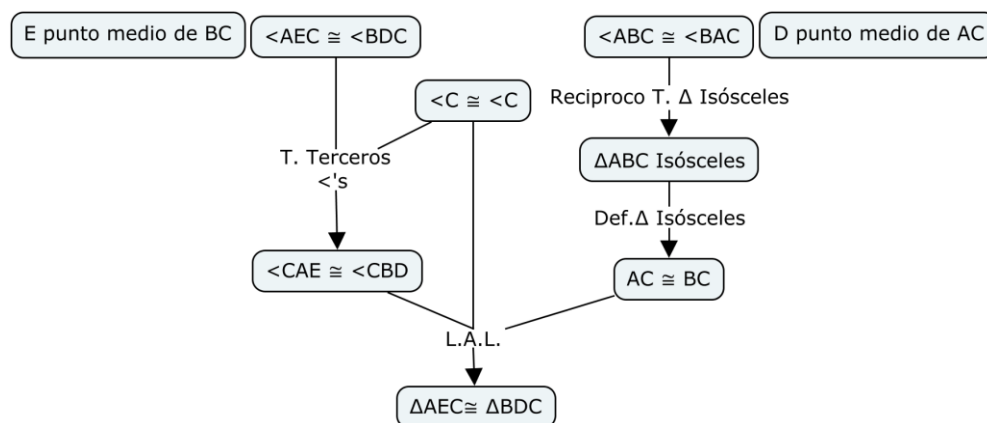


Figura 6. Grafo Proposicional II de la prueba de la proposición 2.

### Prueba de la proposición 3.

La prueba de esta proposición requiere de dos pasos deductivos, se apoya en la comprensión discursiva para obtener las proposiciones que se concluyen en los dos pasos.

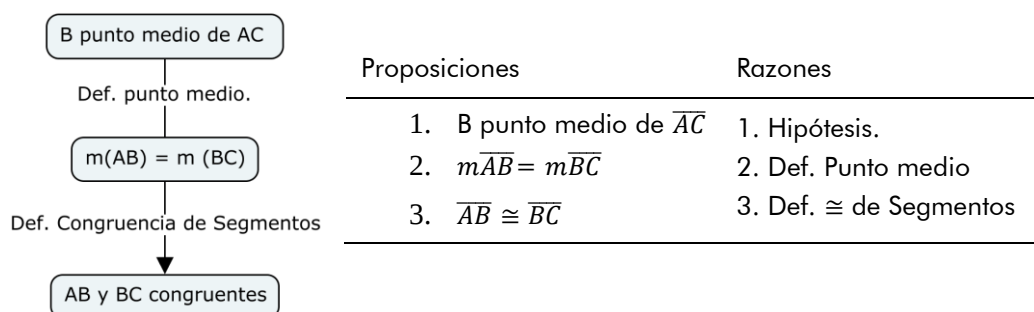


Figura 7. Grafo Proposicional y registro en doble columna de la prueba de la proposición 3.

### Prueba de la proposición 4.

La prueba requiere de una construcción auxiliar, en este sentido el nivel de complejidad es mayor al de las anteriores en cuanto a la identificación de una THP. Para los estudiantes no se propone describir los pasos de construcción auxiliares de la figura en el grafo.

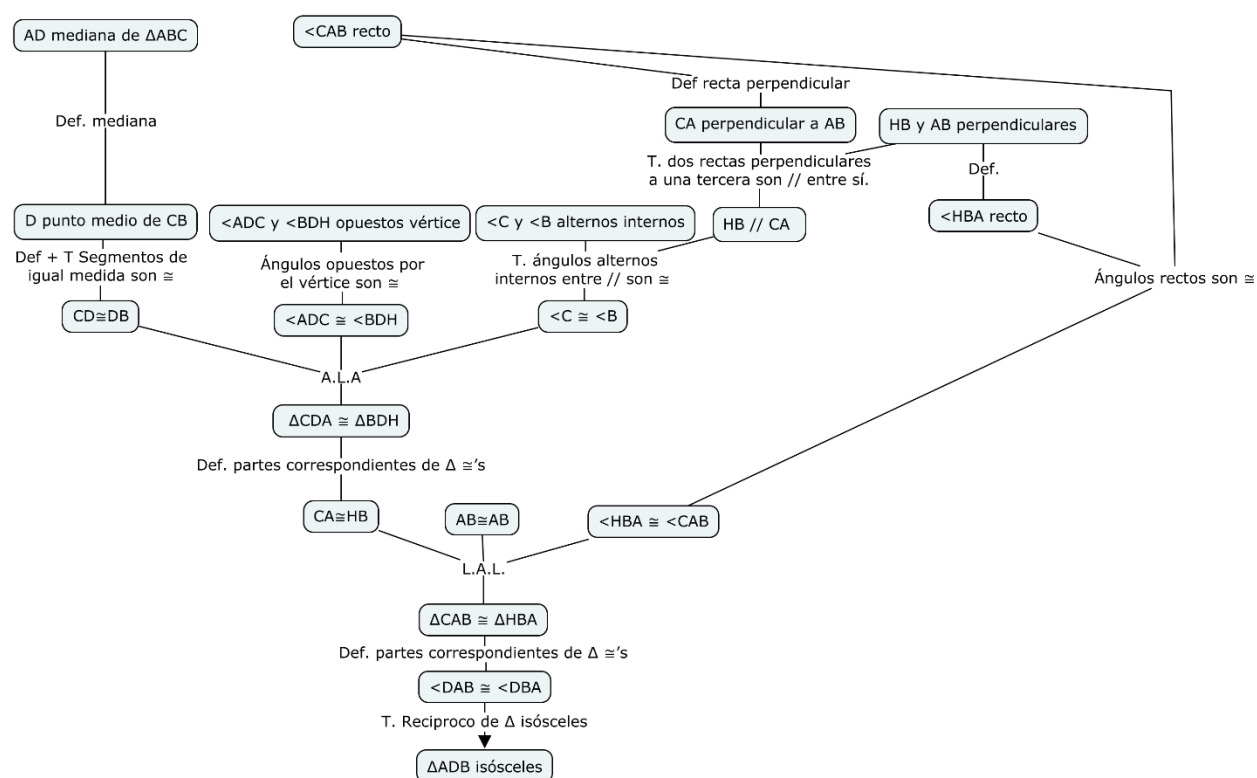


Figura 8. Grafo Proposicional de la Prueba de la proposición 4.

### Prueba de la proposición 5.

En la prueba de esta proposición se reconocen varias subconfiguraciones entre ellas se destacan: 1) una que permite describir una THP en la que se utiliza un teorema sobre rectángulo, 2) una subconfiguración que favorece la utilización de la prueba anterior (proposición 4) en un paso deductivo de la prueba de esta proposición.

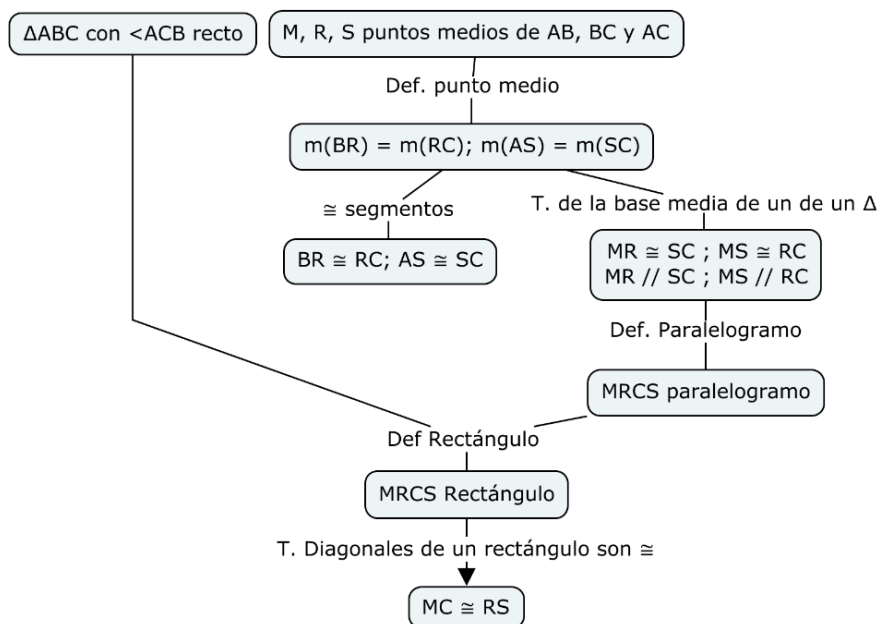


Figura 9. Grafo Proposicional y registro doble columna de la prueba de la proposición 5.

### Prueba de la proposición 6.

La proposición a probar se ha propuesto en una investigación de Clemente y otros (2017), la figura asociada tiene 3 subconfiguraciones relevantes que determinan tres THP (ver Fig. 10). Clemente y otros (2017) afirman que las subconfiguraciones Tipo A y B se solapan en la configuración inicial, lo que implica una acción cognitiva más compleja (aprehensión operativa) para visualizarlas por separado.

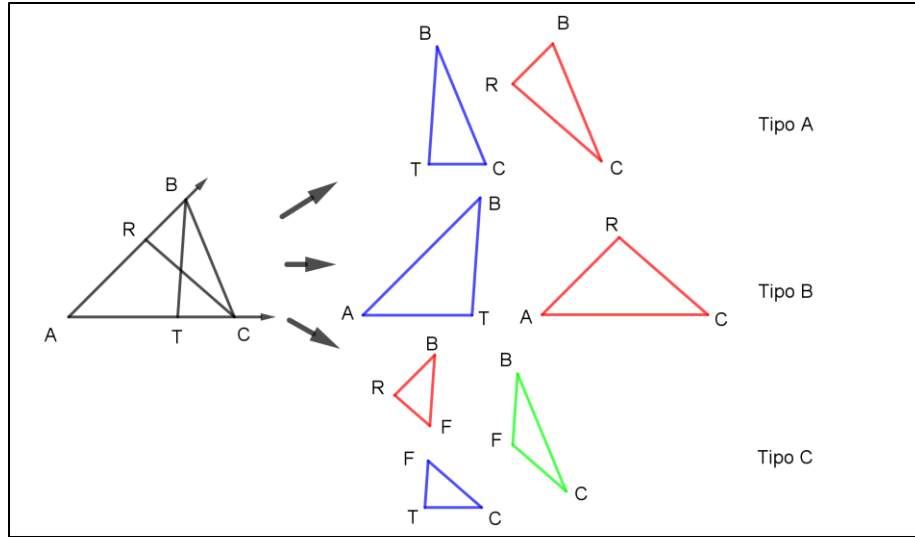


Figura 10. Tres posibles subconfiguraciones de la figura asociada a la proposición 4. Fuente: Clemente y otros (2017). p. 505

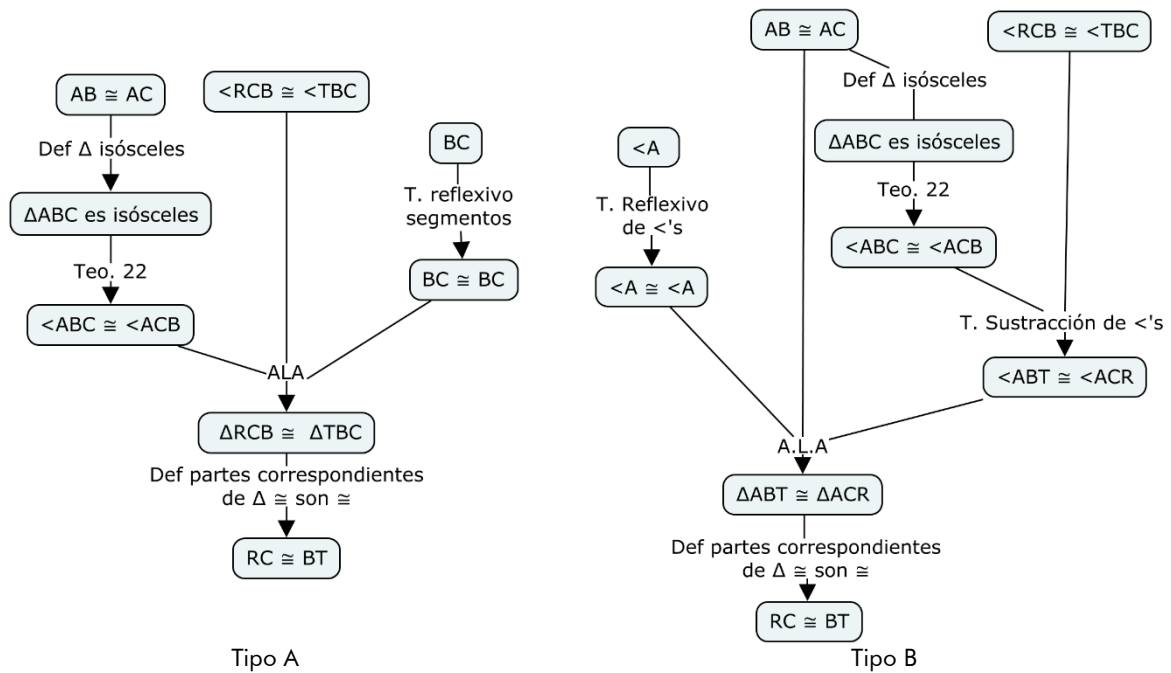
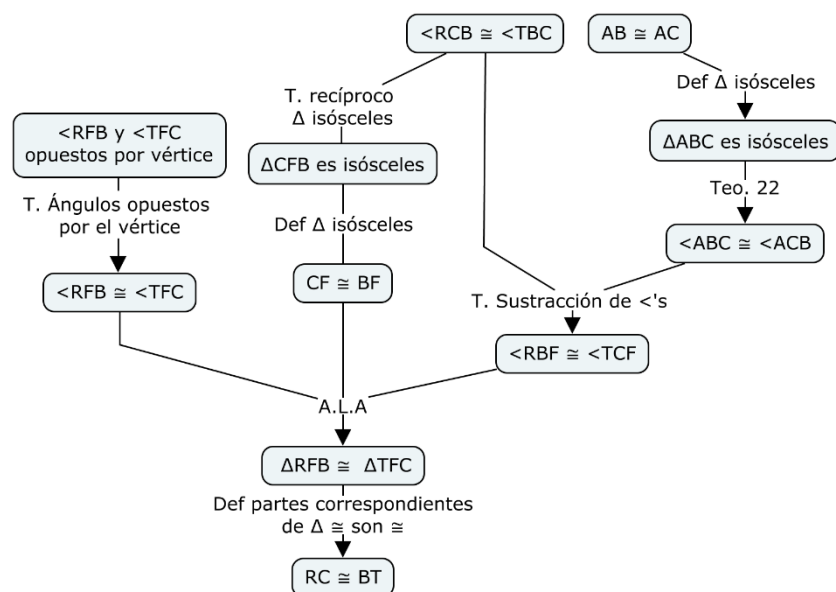


Figura 11. Grafo Proposicional de la prueba de la proposición 6 para las subconfiguraciones Tipo A y Tipo B.



.Figura 12. Grafo Proposicional de la prueba de la proposición 6 para la subconfiguración Tipo C.

### Tareas de construcción de figuras asociadas a las proposiciones geométricas.

Con base en lo propuesto en Duval (2010) con instrumentos no estándar se diseñaron tres problemas o tareas de construcción, asociada cada una a las figuras de las proposiciones 2, 4 y 6.

Estas tareas tienen la característica de que se pueden realizar sin hacer explícito el conocimiento geométrico que se moviliza, sin embargo, el interés de proponer las construcciones era que los estudiantes logaran identificar información y propiedades geométricas como datos para establecer la congruencia entre triángulos (el inicial y el construido). Al reconocer la información de la figura por medio de los instrumentos, los estudiantes darían cuenta de las condiciones necesarias para el uso de teoremas de correspondencia de triángulos como A.L.A, L.L.L o L.A.L.

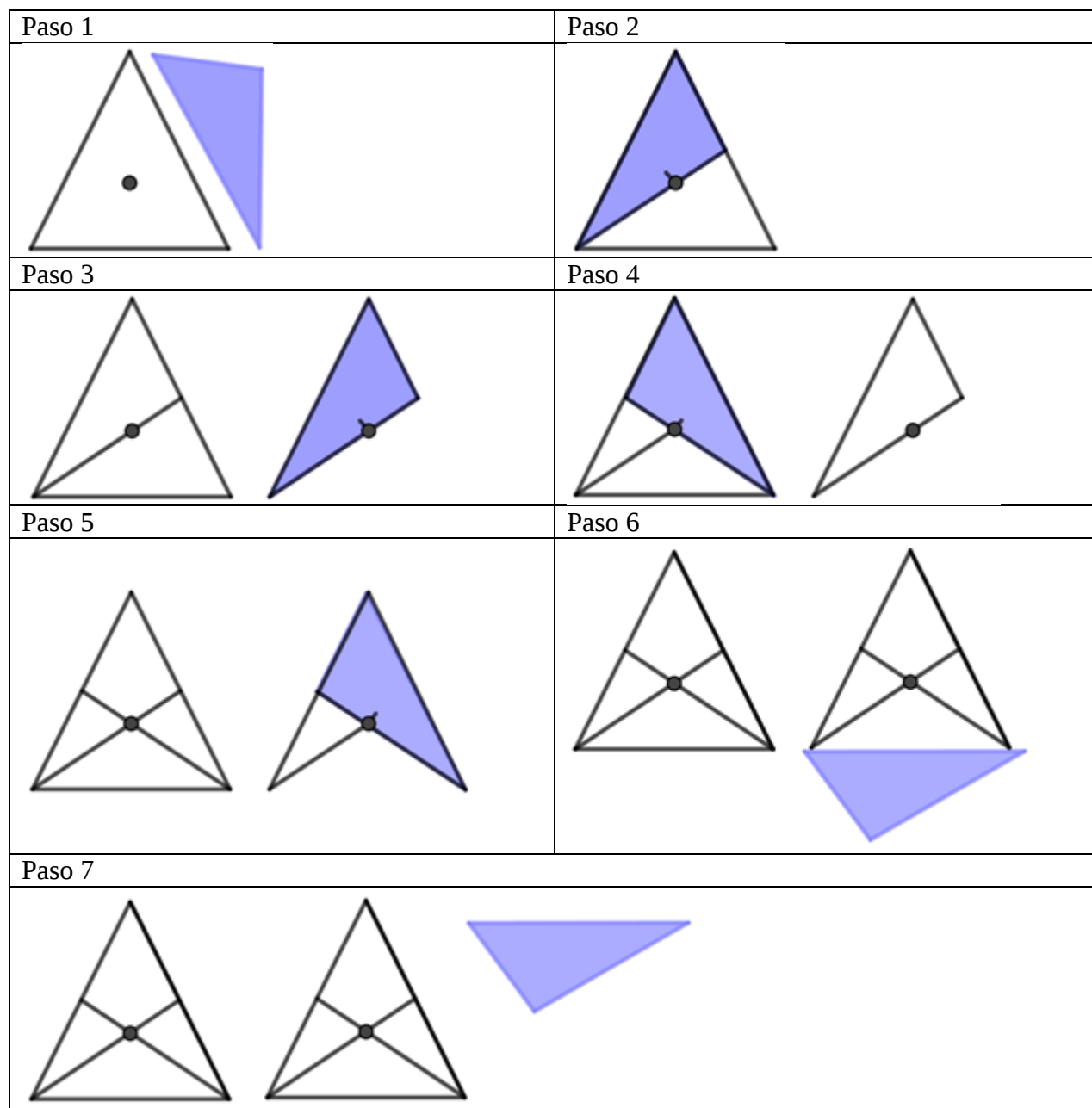


Figura 13. Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 2.

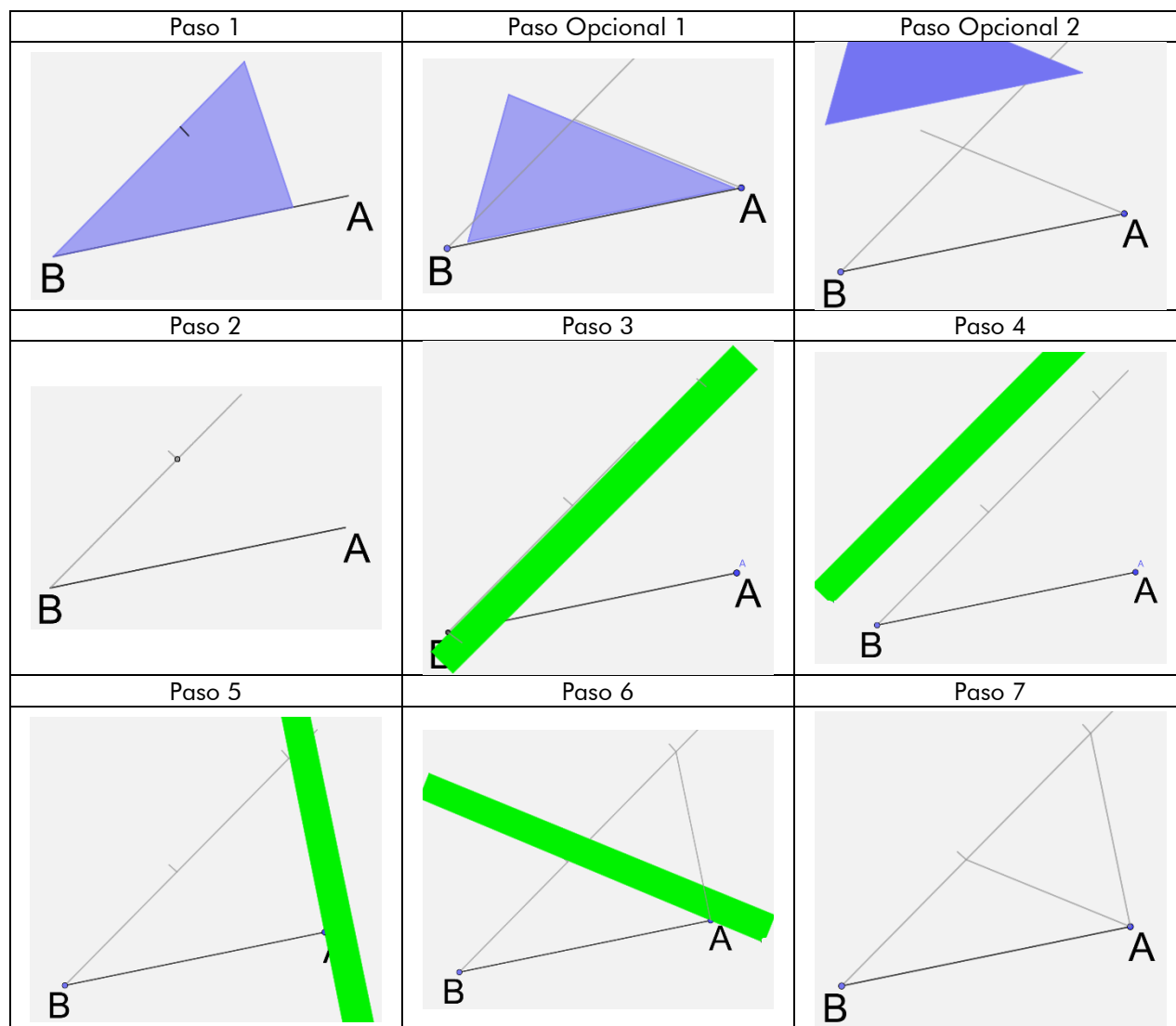


Figura 14. Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 4.

Es de resaltar que la secuencia de pasos de construcción de las figuras no es única, de hecho en la figura 14 se puede observar que, el trazado del punto (que aparece en el paso 2) se puede hacer mediante una marca en el instrumento para transferir la medida (paso 1) o mediante los pasos opcionales 1 y 2, ambos pasos se reconocen como válidos en tanto se pueden obtener por medio del instrumento.

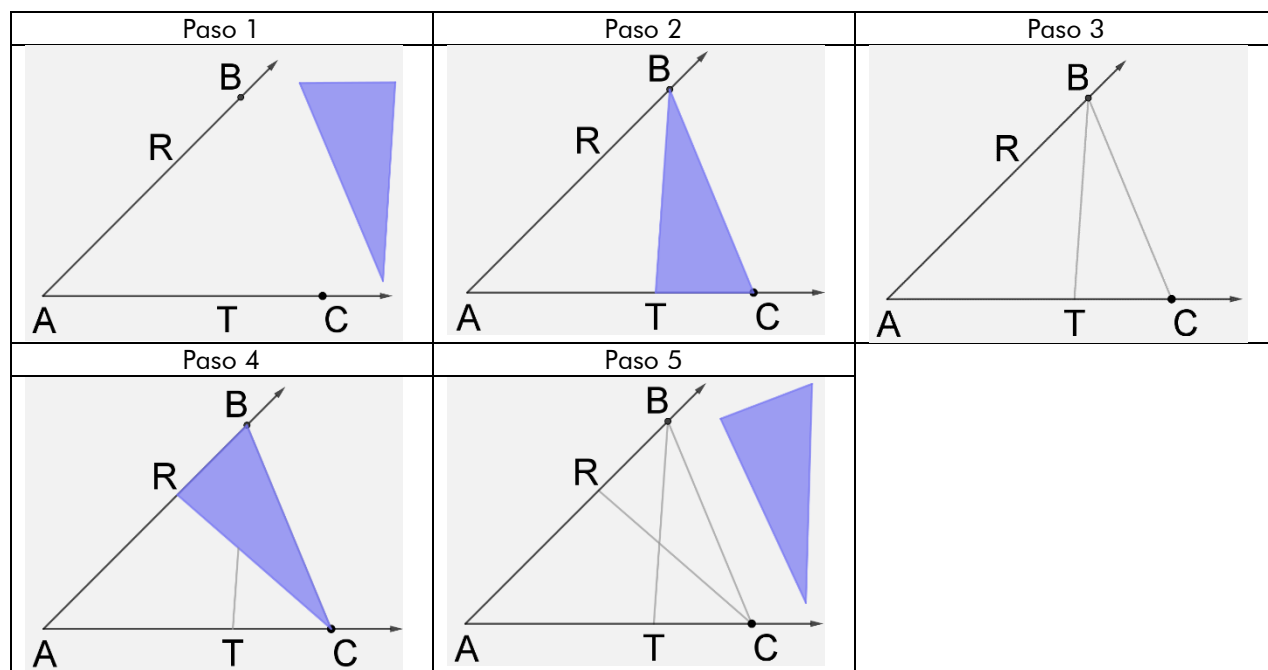


Figura 15. Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 6. Subc. A

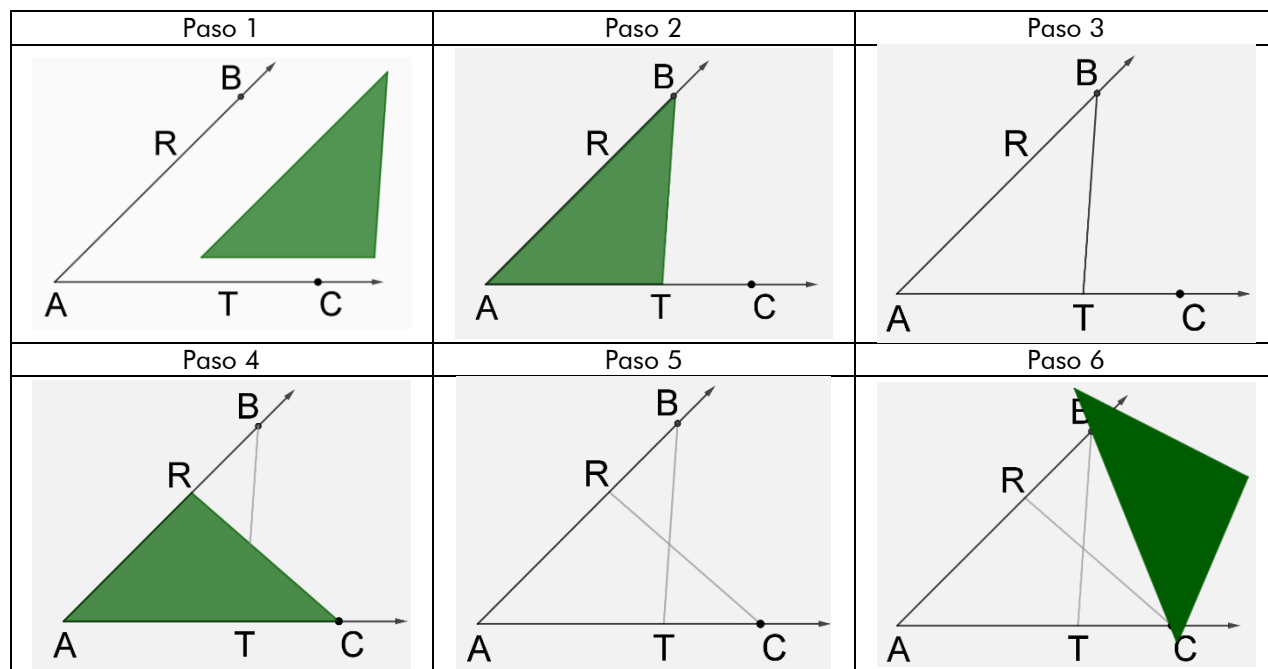


Figura 16. Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 6. Subc. B

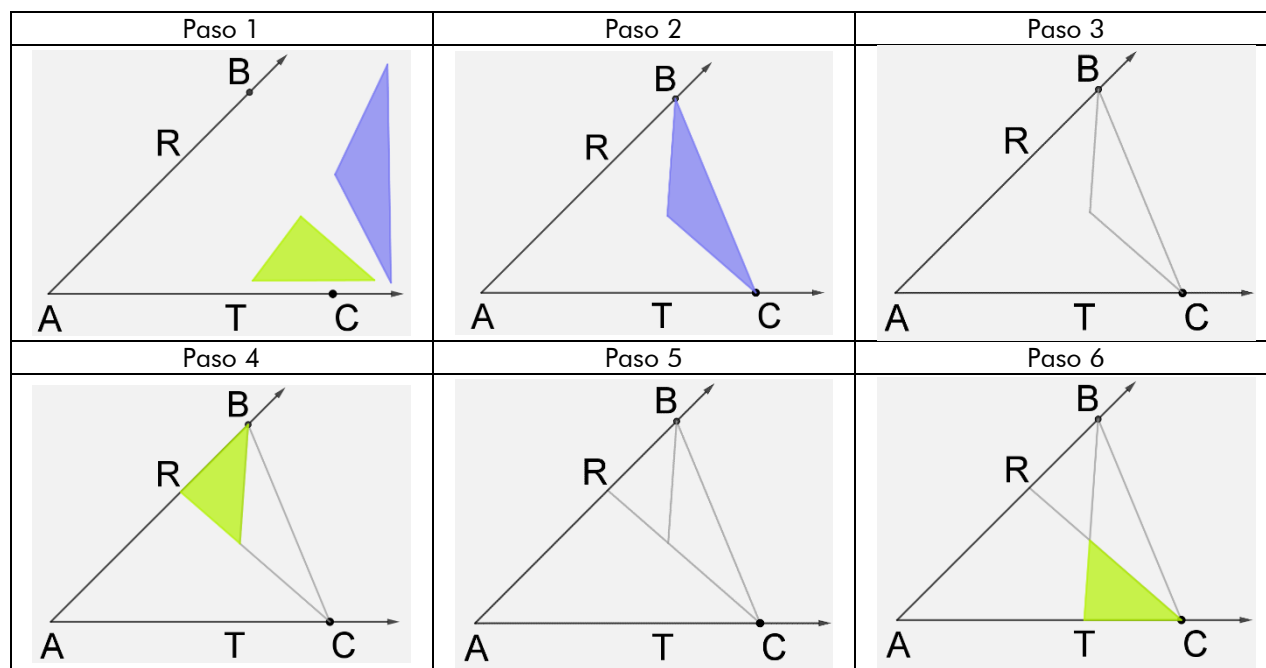


Figura 17. Pasos en la construcción de la figura asociada a la proposición 6. Subc. C

### Marco Metodológico.

Los experimentos de enseñanza como metodología de investigación para el desarrollo de este trabajo, se sustenta en lo que corresponde a la investigación de diseño (*design research*) o investigación basada en diseño, el cual es un paradigma metodológico de investigación del aprendizaje y la enseñanza, de naturaleza cualitativa en el campo de la Didáctica de las Ciencias. El interés en este tipo de investigación es comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad (considerando variables objeto de investigación y asumiendo otras variables como del entorno), y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico (Molina y otros, 2011).

En cuanto a la intencionalidad, más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se busca explicar el porqué el diseño instruccional propuesto funciona y sugerir formas con las cuales puede ser adaptado a nuevas circunstancias, así mismo producir

información sobre el proceso de diseño que aporte directrices para guiar futuros diseños (Cobb, Confrey, diSessa., Lehrer y Schauble. (2003).

Entre las investigaciones de diseño, los experimentos de enseñanza se conciben como los más próximos a la práctica habitual del docente, constituido por el diseño, puesta en práctica y análisis de un conjunto de intervenciones en un aula, que persiguen un aprendizaje (Molina y otros, 2011). Tiene como objetivo desde lo práctico promover el aprendizaje y desde lo teórico elaborar un modelo teórico de dicho proceso de aprendizaje.

De los experimentos de enseñanza Steffe y Thompson (2000) consideran fundamental, que los investigadores se esfuercen por aprender qué cambio pueden producir en sus estudiantes y cómo explicar dicho cambio. En la ejecución, Cobb y Gravemeijer (2008), citados en Molina y otros (2011, p 79), distinguen tres fases: preparación del experimento, experimentación para promover el aprendizaje y ejecución del análisis retrospectivo de los datos. En la segunda de estas fases tiene lugar las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones del ciclo de tres pasos: 1) diseño y formulación de conjetura 2) intervención en el aula y recogida de datos; y 3) análisis de los datos y revisión y reformulación de la conjetura. En la Figura 18 se muestra una adecuación de la presentación de las tres fases del experimento.

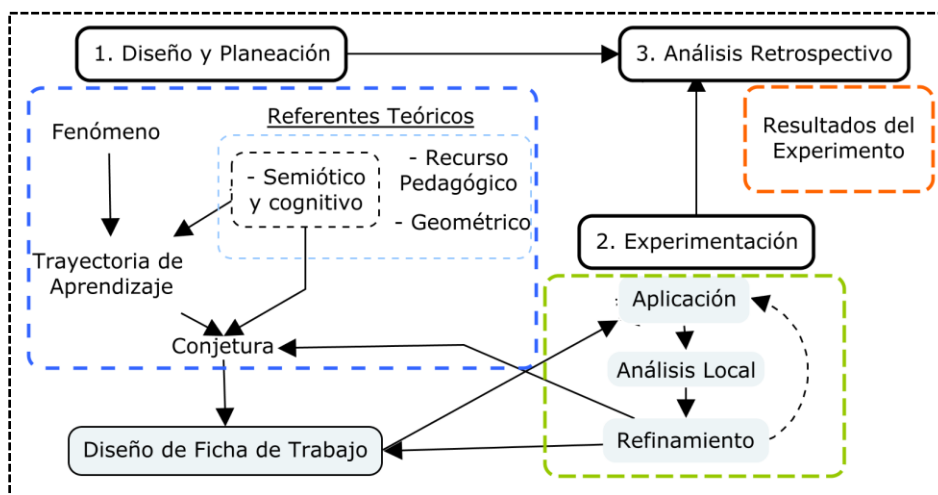


Figura 18. Fases del Experimento de Enseñanza.

## **Diseño y planeación**

En esta primera fase del experimento se tiene en consideración, que los valores y conocimientos enmarcan la elección propia del problema de investigación, selección de métodos e interpretación de los datos Cuba y Lincoln, 1989; Smith, 1989 (citados en Confrey y Lachance, 2000), y que las experiencias también influyen en la figura y estructura del modelo de investigación que se desarrolle, se define a continuación el fenómeno y los elementos que componen el experimento.

### **Fenómeno y propósito de la investigación.**

La propuesta que se desarrolló se centra en la construcción y caracterización de un RP para la Prueba en Geometría Elemental, con base en las actividades divididas en tres etapas propuesta por Duval (2016), dirigido a estudiantes en formación inicial. La puesta en práctica se realizó con estudiantes del AEM de la Universidad del Valle, que estaban cursando la asignatura Geometría I en el periodo académico Agosto-Diciembre del año 2018<sup>1</sup>. Se conformaron cuatro grupos inicialmente, con 13 estudiantes motivados por el interés y disponibilidad para desarrollar la experimentación. Es importante resaltar que, de los cuatro grupos, sólo dos grupos completaron las tres sesiones programadas, a causa principalmente de la anormalidad académica del semestre.

### **Meta de aprendizaje.**

Las metas de aprendizaje, Correa (2017), las describe como aquello que se quiere alcanzar con los estudiantes al poner en práctica el diseño, principalmente apoyada en elementos

---

<sup>1</sup> El periodo académico en el que se desarrolló la experimentación se extendió, debido al paro nacional estudiantil de las instituciones de educación superior estatales, esto conllevó a que las fechas de experimentación se hicieran en el mes de Marzo de 2019.

teóricos que luego permite ajustes según el desarrollo del experimento. Así se propone como meta general en el experimento que los estudiantes construyan y comprendan la prueba en geometría elemental mediante la construcción de grafos proposicionales. Y se define como objetivos o submetas, aquellas que corresponden a cada una de las etapas en las que se organizan las actividades propuestas por Duval (2016, 2017), presentadas a continuación:

En lo que corresponde a la Primera Etapa o de exploración, se tiene como objetivos:

- 1.1 Lograr que los estudiantes se adentren en el problema y proporcionarles las propiedades pertinentes como datos para una investigación específica en la organización deductiva de las proposiciones.
- 1.2 Distinguir las “propiedades” y los teoremas pertinentes que se podría usar.
- 1.3 Darse cuenta del porqué un teorema es o no pertinente.
- 1.4 Desarrollar una habilidad de intuición para hallar las propiedades o los teoremas pertinentes para construir una prueba.

En la Segunda Etapa relacionada con la construcción de Grafo proposicional. Se proponen como objetivos:

- 2.1 Distinguir entre el estatus y el contenido de las proposiciones.
- 2.2 Diferenciar el uso de los teoremas del uso de las justificaciones argumentativas naturales o del de las explicaciones físicas.
- 2.3 Escoger las proposiciones de acuerdo con su estatus para construir la totalidad de la gráfica.

En la Tercera Etapa solo se enfatiza en: Describir o explicar el grafo proposicional construido.

### **Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.**

Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), describe “la meta de aprendizaje, las actividades de aprendizaje, y el pensamiento y aprendizaje el cual los estudiantes pueden participar” (Simon, 1995, p. 133). Así mismo en términos de Clements y Sarama (2009), refieren que tiene tres partes: (a) un objetivo matemático, (b) un camino de desarrollo a lo largo del cual los niños pueden alcanzar este objetivo, (c) un conjunto de actividades instruccionales, relacionadas con cada uno de los niveles de pensamiento en este camino que ayudan a los niños a desarrollar niveles de pensamiento más sofisticados.

Una característica que resalta Correa (2017) sobre las THA, es que construyen los elementos que permiten rastrear y describir cuáles son los posibles cambios generados durante el *Experimento de enseñanza*, y también se especifican las situaciones de enseñanza y las conjeturas. Cabe anotar que se utilizan los términos THA y trayectoria de aprendizaje (TA), estas difieren en que la TA ha sido validada (por lo menos para un contexto y entorno escolar particular) y la THA se encuentra en proceso de construcción y de validación.

Los elementos que se desarrollan en la propuesta de Duval (2016), tiene características que se pueden asociar a una TA, como lo son tareas, sus objetivos o submetas y la descripción de la actividad del estudiante a través de procesos hipotéticos de aprendizaje. En el presente trabajo se realiza una adecuación de la propuesta de Duval (2016), obteniendo como resultado un diseño de tareas y una propuesta que se puede constituir como una THA, en el sentido de que el tipo de tareas, su secuenciación y otros elementos que se consideran para el diseño de un RP, pueden ir evolucionando en el transcurso de la experimentación.

### **Conjetura.**

En el contexto de la educación matemática, la conjetura sin ser una proposición que espera ser probada o desaprobada, responde al cómo la matemática para propósitos educativos podría ser organizada o conceptualizada o enseñada (Confrey y Lachance, 2000). En la conjetura se determina las condiciones que deben tener las situaciones propuestas para posibilitar el desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes, los procesos que se espera que ellos realicen, las intervenciones del docente y demás, Correa (2017).

La formulación de una conjetura se hace bajo la descripción de dos dimensiones: una de contenido y otra pedagógica las cuales están relacionadas por teoría procedente de la literatura que sustenta el diseño (Molina y otros, 2011). Se toma como referencia la descripción que hace Correa (2017) de cada una de estas dimensiones. En la dimensión de contenido se expresa qué concepto o saber matemático se quiere movilizar dentro de la actividad matemática de los estudiantes; se delimita tanto las situaciones propuestas como el trasfondo de dichas situaciones. En la dimensión pedagógica se describe el cómo enseñar un contenido matemático específico, definiendo las condiciones que debe tener el diseño para apoyar la situación de enseñanza.

De lo anterior se presenta como conjetura general del experimento la siguiente formulación: El desarrollo de cada una de las actividades propuestas y organizadas en las tres etapas descritas por Duval (Exploración de propiedades, construcción de grafo proposicional), el trabajo colectivo y el uso de una ficha de trabajo como RP en el marco del Laboratorio, posibilita la construcción de pruebas de congruencia de triángulos en geometría elemental por parte de los estudiantes y permite la comprensión de en qué consiste una prueba en geometría.

Teniendo en cuenta los objetivos mencionados en cada una de las etapas (submetas de aprendizaje pg. 29), la experimentación se realizó en tres sesiones, en cada una de ellas se

elaboró un diseño de RP, para la primera y segunda sesión comprende los objetivos de las dos primeras etapas y en la tercera sesión, los de las tres etapas. Así se determina como conjetura de cada sesión lo siguiente:

Conjetura sesión 1 y 2: El desarrollo de las actividades organizadas en las dos primeras etapas descritas por Duval (Exploración de propiedades, construcción de grafo proposicional), haciendo énfasis en lo que constituye: conocer, comprender y construir un grafo proposicional; el trabajo colectivo y el uso de una ficha de trabajo como RP en el marco del Laboratorio, favorece a los estudiantes en la construcción de pruebas de proposiciones de congruencia de triángulos.

Para la formulación de la conjetura de la sesión 3, cabe mencionar que se fue elaborando a partir de lo evidenciado en el transcurso de las dos primeras sesiones, teniendo como conjetura: El desarrollo de las actividades organizadas en las tres etapas descritas por Duval (Exploración de propiedades, construcción de grafo proposicional y explicación o descripción del grafo), favorece en los estudiantes el paso de la construcción de un grafo proposicional a un registro en doble columna de la prueba, y no se constituye como un paso difícil de comprender y realizar.

### **Situación de enseñanza**

La situación de enseñanza desde el marco curricular se entiende como “el conjunto de problemas, proyectos, investigaciones, construcciones, instrucciones y relatos que se elaboran basados en las matemáticas, en otras ciencias y en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes” (MEN, 2006), que se podría expresar en otros términos como, todo aquello que intencionalmente se propone para la enseñanza y que en su tratamiento genera aprendizaje en el estudiante. Esto parece provocar una tensión entre lo que se refiere a situación y RP, como si respondieran a lo mismo.

Hay que considerar que la noción y el tipo de recurso que se pone en juego en este trabajo, tiene en cuenta tareas a desarrollar que responden a una THA, y que a su vez entran a constituir la situación. Así la situación no se considera como recurso en tanto que, se considera como un elemento que lo constituye, lo cual puede dar cuenta de que se tienen diferentes niveles, tipos y matices en lo que se podría considerar como RP.

En general, el diseño del recurso comprende todos los elementos que conforman la primera fase del experimento de enseñanza. Visto desde la perspectiva instrumental en que se apoya la noción de RP, correspondería a la orquestación instrumental, que involucra de manera similar al experimento, cada uno de los elementos de diseño y planeación.

Entre las acciones a realizar para la preparación del experimento, diseño y planeación, Molina y otros (2011), consideran la evaluación del conocimiento inicial de los estudiantes junto con obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, como punto de partida para el diseño y la posterior interpretación con los resultados al final del experimento. Para este trabajo no se desarrolló una evaluación inicial, en lugar de esto se discutió con los estudiantes acerca de sus experiencias en geometría, desde sus primeros grados de escolaridad hasta lo que actualmente habían desarrollado en el curso de geometría en la Licenciatura.

### ***De las experiencias de los estudiantes en geometría.***

Los estudiantes en su paso por la educación primaria y secundaria refieren no haber trabajado con demostraciones, tampoco reconocen en sus experiencias que el profesor hiciera uso de la demostración en las asignaturas de matemáticas. Destacan que el trabajo en geometría se centró en el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas y trigonometría, sin reconocer que

desarrollaron aplicación de algún tipo de geometría en otros cursos, con excepción de una estudiante que menciona los vectores en física como conocimiento geométrico.

Con esas bases, el paso del colegio a la universidad lo describen como complejo, identifican la demostración como una de sus mayores dificultades, al no comprender en qué consisten, no tener dominio del tipo de rigurosidad que se requiere y cómo desarrollarlas. Sobre este aspecto Montoya (2011, 2014) afirma que constituye un obstáculo al existir una brecha entre las pruebas en la escuela y las que se exigen en la educación superior, y que en este caso los estudiantes no dieron cuenta de esta en el colegio, que resulta preocupante y más cuando se quiere responder a la pregunta que propone esta autora, ¿cómo puede un profesor debutante transponer este saber si él mismo no ha tenido este proceso en su formación inicial?

Los estudiantes consideran que las demostraciones se hacen para convencer con argumentos a otros, sobre generalidades, y que esos argumentos deben ser coherentes entre sí. No refieren que las demostraciones se hacen para convencerse de la veracidad de la proposición antes que a otros. No siempre tienen certeza sobre el desarrollo de una demostración, y les inquieta que no corresponda con las expectativas del docente.

Por último, respecto al curso de Geometría I que se encontraban cursando, los estudiantes afirman que han trabajado en las sesiones de clase congruencia de segmentos, congruencia de ángulos, congruencia de triángulos y han avanzado hasta lo que corresponde a rectas paralelas y perpendiculares. En cuanto a las demostraciones unos utilizan el registro en doble columna y otros hacen su redacción en forma de párrafo, lo que finalmente podría llevar a estos estudiantes en formación al estar en ejercicio, desarrollar su práctica profesional en términos de Montoya (2014), de una forma particular y personal que no necesariamente se constituya en una transposición de la prueba para ser enseñada en la escuela.

### Diseño del Recurso Pedagógico

En la Tabla 1.5 se presenta de forma general, las tareas en las fichas de trabajo aplicadas en cada una de las sesiones y las actividades asociadas que se concibió, el estudiante podía desarrollar.

Tabla 1.5

Tareas propuestas en las fichas de trabajo correspondiente a cada sesión de la experimentación.

| Sesión | Grupos | Tareas propuestas en los diseños de ficha de trabajo                                                   |                                                                                                                                                                                                    | Actividades divididas en tres etapas                                                                          |
|--------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|        |        | Hoja 1                                                                                                 | Hoja 2                                                                                                                                                                                             |                                                                                                               |
| 1      | 4      | Introducir a la construcción de grafos proposicionales (GP) (Reglas de construcción de GP y ejemplo)   | Construir una figura congruente con una inicial.<br>Construir GP de una proposición relacionada con la figura construida.                                                                          | 1) Explorar,<br>2) Construir GP<br>3) Describir, Explicar GP                                                  |
| 2      | 3      | Construir el GP de una prueba con 2 pasos de deducción (tarea aplicando Reglas de construcción de GP ) | Construir una figura congruente con una inicial.<br>Construir GP de una proposición relacionada con la figura construida. (La figura requiere una construcción auxiliar, que sirve para la prueba) | 1) Explorar,<br>2) Construir GP<br>3) Describir, Explicar GP                                                  |
| 3      | 2      | Comparar y describir entre el registro de una prueba en doble columna y el registro en un GP           | Completar la construcción de una figura.<br>Construir GP de una relacionada con la figura construida.<br>Construir la prueba en doble columna.                                                     | 1) Explorar,<br>2) Construir GP<br>3) Describir, Explicar GP<br>3.1) Paso del GP al registro de doble columna |

En una primer instancia, en el diseño se proponen tareas para introducir a la construcción de GP, las tareas de construcción de figuras tienen como propósito que los procesos de construcción apoyen el proceso de visualización, y aporte elementos para la construcción de una trayectoria hipotética de la prueba (THP), posible camino que guiará la construcción de la prueba. Luego se busca que el estudiante realice un GP que daría cuenta de la prueba. Los diseños de las fichas de trabajo para los estudiantes se presentan en las figuras 19, 20 y 21.

En la Tabla 1.6 se presenta la descripción del proceso hipotético de aprendizaje asociado a cada tarea propuesta en la ficha de trabajo en cada sesión.

Tabla 1.6

Descripción del proceso hipotético de aprendizaje del estudiante para cada tarea propuesta en las fichas de trabajo (Hoja 1)

|                                   |        | Ficha 1                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Ficha 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Ficha 3                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Proceso hipotético de aprendizaje | Hoja 1 | Identifica en la figura las hipótesis de la proposición y escribe la respectiva correspondencia de la congruencia.                                                                                                                                                                           | Identifica la premisa o hipótesis y la conclusión a partir de la proposición.                                                                                                                                                                                                                                        | Identifica similitudes y diferencias entre el registro de la prueba en un GP y en uno de doble columna. |                                                                                                                                                                                                               |
|                                   |        | 1. Identifica y determina proposiciones que permiten llegar a la conclusión partiendo de las hipótesis iniciales.                                                                                                                                                                            | Identifica y determina las proposiciones que permiten llegar a la conclusión partiendo de las hipótesis iniciales.                                                                                                                                                                                                   | Similitud                                                                                               | Diferencia                                                                                                                                                                                                    |
|                                   |        | 2. Se presentan las reglas de construcción del GP y se ejemplifica con la proposición de la congruencia entre las dos figuras de triángulos. El estudiante verifica que cada una de las reglas se satisface, identifica y compara las proposiciones utilizadas con las de la tarea anterior. | 1. Se presentan las reglas de construcción del GP y luego el estudiante construye el GP de la congruencia de segmentos.<br>2 Construye un triángulo rectángulo con instrumentos de trazado.<br><br>Con los instrumentos reconoce información de la figura y determina que el triángulo $\triangle ABD$ es isósceles. | Número de proposiciones.<br><br>No son registros discursivos                                            | Presentación de los tres elementos de los pasos de deducción. Identificación de las relaciones entre proposiciones de una THP. Identificación de baches o saltos. Se observa que las pruebas no son lineales. |

Tabla 1.7

Descripción del proceso hipotético de aprendizaje del estudiante para cada tarea propuesta en las fichas de trabajo (Hoja 2)

|                                   |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Proceso hipotético de aprendizaje |  | Ficha 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Ficha 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Ficha 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| Hoja 2                            |  | <p>1. Construye un triángulo congruente al inicial utilizando los instrumentos de trazado no convencionales. Ubica el instrumento sobre la figura y determina qué parte de éste usar, así utiliza información de la figura por medio del instrumento. Terminada la construcción, apoyándose en la información que permite el instrumento y proposiciones de la axiomática de la geometría euclidiana, describe y explica porqué su construcción resulta congruente con la inicial.</p> <p>En el trazado del punto interior del triángulo, uno de los ángulos del instrumento coincide con el del triángulo, esto permite la traza del segmento que pasa por el punto. Luego busca repetir el procedimiento y tendrá que reflejar o “voltar” instrumento.</p> <p>Puede encontrar otras formas de construir el punto interior, la validez de la construcción se determina por cada paso de construcción sustentado en conocimientos geométricos (no necesariamente vistos en su curso de geometría)</p> <p>2. Determina la conclusión de la proposición reconociendo en la figura qué otro triángulo es congruente con el que se da, teniendo presente las hipótesis dadas. Con la construcción de la figura ve e identifica una subconfiguración que le permite la elaboración la prueba de la proposición.</p> <p>Lista las proposiciones que podría emplear en la construcción de la prueba. En caso de no contar con todas las proposiciones o errar en la elección de las mismas, la elaboración del GP apoya la aceptación o rechazo de las proposiciones en los pasos deductivos.</p> | <p>3. Con los instrumentos verifica si el segmento AD es una mediana del <math>\triangle ABD</math> con los mismos instrumentos de la actividad anterior.</p> <p>El estudiante identifica y determina las proposiciones que permiten llegar a la conclusión partiendo de las hipótesis iniciales.</p> <p>En este caso la proposición a probar a partir de la figura requiere, en comparación a la sesión anterior este problema es más exigente al requerir una construcción auxiliar.</p> <p>4. Construye el GP para probar que AD es una mediana del <math>\triangle ABD</math>, utilizando las reglas de construcción de GP y su lista de proposiciones.</p> <p>Con el GP el estudiante comparará las proposiciones en éste con las de la lista.</p> <p>5. Se presentan las hipótesis de una proposición que satisface el triángulo <math>\triangle ABC</math>. Se propone un interrogante que podría ser una conclusión. Sin contar con los instrumentos para medir, el estudiante determina una lista de proposiciones las cuales podría utilizar para probar que la conclusión se satisface.</p> <p>El estudiante podría utilizar el resultado de la prueba anterior para la construcción de esta prueba.</p> <p>6. El estudiante construye un GP para probar que los dos segmentos que se piden, son congruentes.</p> | <p>Identifica las premisas, la conclusión se propone como un interrogante. El estudiante lo toma como posible y no como un hecho solo porque se ve en la figura.</p> <p>1. Completa la construcción de la figura utilizando como instrumentos subconfiguraciones que ayudará más adelante en la construcción de la THP de la congruencia de los segmentos.</p> <p>2. Verifica que con cada uno de los instrumentos se puede completar la construcción de la figura inicial. Primero intenta superponer y comparar el instrumento con la figura inicial, y luego la lleva hacia la figura a completar.</p> <p>3 Logra identificar que cada una de las subconfiguraciones que permiten los instrumentos evidenciar, determina una THP para probar la congruencia de los segmentos.</p> <p>4. Lista las proposiciones que describen la THP encontrada para la posterior construcción de la prueba.</p> <p>5. Construye el GP y luego hace el paso al registro en doble columna sin recurrir a la figura.</p> |

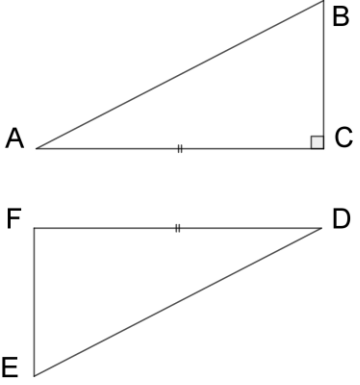
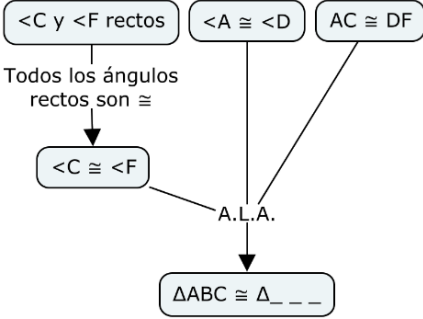
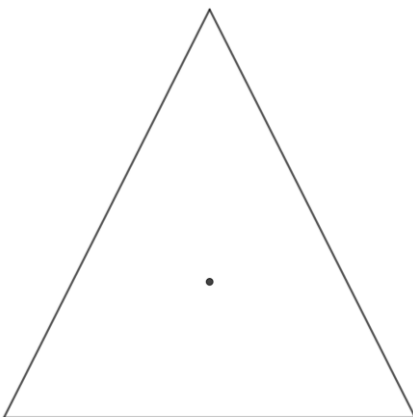
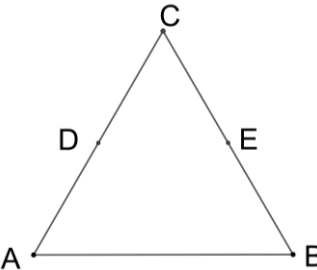
| Exploración (Introducción)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Construcción I                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Geometría                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>A continuación se presentan dos triángulos que satisfacen las hipótesis dadas, completar la conclusión.</p>  <p>Hipótesis: Los triángulos rectángulos ABC y DEF con <math>\angle A \cong \angle D</math>. catetos <math>\overline{AC} \cong \overline{DF}</math>, <math>\angle C</math> y <math>\angle F</math> son ángulos rectos.</p> <p>Conclusión: <math>\triangle ABC \cong \triangle \_\_\_\_\_</math>.</p> <p><b>Pasos para construir una Prueba de la conclusión por medio de grafo proposicional</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>[Primer paso]. Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>[Segundo Paso].</li> </ol> <p>Un grafo proposicional es una organización deductiva de las proposiciones.</p> <p>A continuación se presentan las reglas para construir un grafo proposicional.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha.</li> <li>Una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él.</li> <li>Una o varias flechas llegan a la conclusión buscada y ninguna flecha sale de ella.</li> </ol> <p>Grafo proposicional</p>  <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> | <ol style="list-style-type: none"> <li>Usa el instrumento entregado para construir el triángulo que se muestra (incluido su punto interior):</li> </ol>  | <ol style="list-style-type: none"> <li><b>Hipótesis:</b> <math>\triangle ABC</math> con los ángulos de la base congruentes; D es el punto medio de <math>\overline{AC}</math>; E es el punto medio de <math>\overline{BC}</math>; <math>\angle AEC \cong \angle BDC</math>.<br/><b>Conclusión:</b> <math>\triangle \_\_\_\_\_ \cong \triangle BDC</math>.</li> </ol>  <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Cuál es la conclusión?</li> <li>Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</li> </ol> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Construye el grafo proposicional.</li> </ol> <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> |

Figura 19. Diseño de Ficha de Trabajo para la Primera Sesión

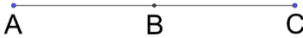
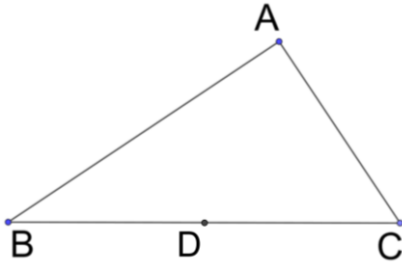
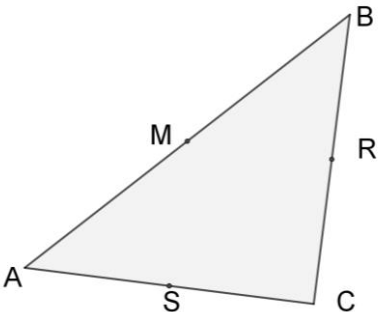
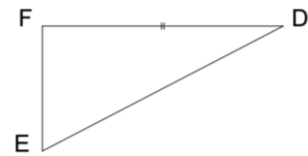
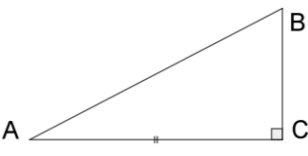
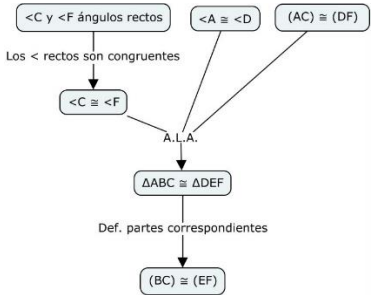
| Exploración y Construcción II A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Construcción II B                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>Punto Medio de un Segmento</p> <p>Sea B el punto medio del segmento <math>\overline{AC}</math>, los segmentos <math>\overline{AB}</math> y <math>\overline{BC}</math> son congruentes.</p>  <p>Hipótesis:</p> <p>Conclusión:</p> <p>Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>Un grafo proposicional es una organización deductiva de las proposiciones.</p> <p>A continuación se presentan las reglas para construir un grafo proposicional.</p> <p>I. Desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha.</p> <p>II. Una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él.</p> <p>III. Una o varias flechas llegan a la conclusión buscada y ninguna flecha sale de ella.</p> | <p>1. Construir el grafo proposicional de la Prueba de Punto medio de un Segmento, utilizando los elementos entregados.</p> <p>2. Usa los instrumentos entregados para construir el triángulo rectángulo que se muestra y determina qué tipo de triángulo es el <math>\triangle ABD</math>.</p>   <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> | <p>3. ¿AD es una mediana del <math>\triangle ABC</math>?</p> <p>Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>4. Construir el grafo proposicional para probar la conclusión.</p> <p>5. El triángulo rectángulo ABC con <math>\angle ACB</math> recto; M, R, S son los puntos medios de <math>\overline{AB}</math>, <math>\overline{BC}</math> y <math>\overline{AC}</math> respectivamente.</p>  | <p>¿Los segmentos <math>\overline{MC}</math> y <math>\overline{RS}</math> son congruentes?</p> <p>• Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>-</p> <p>6. Construir el grafo proposicional de la Prueba de los segmentos que unen los puntos medios del triángulo rectángulo, utilizando los elementos entregados.</p> <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> |

Figura 20. Diseño de Ficha de Trabajo para la Segunda Sesión

| Del Grafo a la doble Columna                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                          |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------|---------|--------------------------------|---------------|------------------------------------------------|---------------|------------------------------------------|---------------|--------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------|----------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                          |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
| <p>Sean los triángulos rectángulos <math>\triangle ABC</math> y <math>\triangle DEF</math> con <math>\angle A \cong \angle D</math>, catetos <math>\overline{AC} \cong \overline{DF}</math>, <math>\angle C</math> y <math>\angle F</math> son ángulos rectos. Se puede concluir que <math>\overline{BC} \cong \overline{EF}</math>.</p> <p>A continuación se presentan los dos triángulos que satisfacen las hipótesis dadas:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin: 20px 0;">   </div> <p>Se presenta a continuación el grafo proposicional que permite la prueba de la congruencia <math>\overline{BC} \cong \overline{EF}</math>, y se presenta la respectiva prueba en doble columna, revísalos con detalle y comprueba que satisfacen lo que se desea probar.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p style="text-align: center;"><b>Grafo Proposicional</b></p>  </div> <div style="width: 50%;"> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left; padding: 5px;">Proposiciones</th> <th style="text-align: left; padding: 5px;">Razones</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">1. <math>\angle A \cong \angle D</math>.</td> <td style="padding: 5px;">1. Hipótesis.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">2. <math>\angle C</math> y <math>\angle F</math> son ángulos rectos.</td> <td style="padding: 5px;">2. Hipótesis.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">3. <math>\overline{AC} \cong \overline{DF}</math>.</td> <td style="padding: 5px;">3. Hipótesis.</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">4. <math>\angle C \cong \angle F</math>.</td> <td style="padding: 5px;">4. Los ángulos rectos son congruentes (2)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">5. <math>\triangle ABC \cong \triangle DEF</math>.</td> <td style="padding: 5px;">5. A.L.A. (1, 3, 4)</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">6. <math>\overline{BC} \cong \overline{EF}</math></td> <td style="padding: 5px;">6. Def. Partes (5)<br/>Correspondientes <math>\triangle \cong</math></td> </tr> </tbody> </table> </div> </div> <p style="margin-top: 20px;">Encuentra las similitudes y diferencias entre el Grafo Proposicional y la Prueba en dos Columnas. Discútelo con tus compañeros y escríbelas.</p> <p style="text-align: right; margin-top: 20px;">Hansbert Delgado (2019 -I)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> |                                                          | Proposiciones | Razones | 1. $\angle A \cong \angle D$ . | 1. Hipótesis. | 2. $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos. | 2. Hipótesis. | 3. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ . | 3. Hipótesis. | 4. $\angle C \cong \angle F$ . | 4. Los ángulos rectos son congruentes (2) | 5. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . | 5. A.L.A. (1, 3, 4) | 6. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ | 6. Def. Partes (5)<br>Correspondientes $\triangle \cong$ |
| Proposiciones                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Razones                                                  |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
| 1. $\angle A \cong \angle D$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1. Hipótesis.                                            |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
| 2. $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2. Hipótesis.                                            |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
| 3. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 3. Hipótesis.                                            |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
| 4. $\angle C \cong \angle F$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 4. Los ángulos rectos son congruentes (2)                |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
| 5. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 5. A.L.A. (1, 3, 4)                                      |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |
| 6. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 6. Def. Partes (5)<br>Correspondientes $\triangle \cong$ |               |         |                                |               |                                                |               |                                          |               |                                |                                           |                                          |                     |                                        |                                                          |

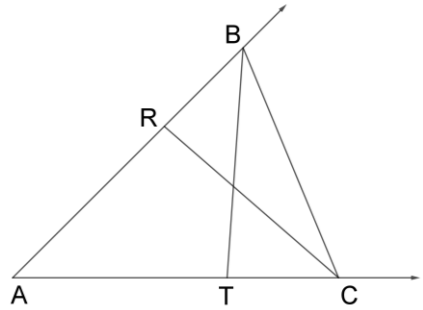
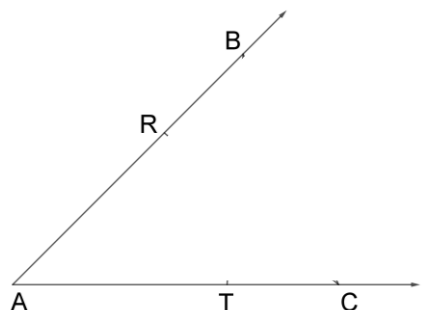
| Construcción y Prueba                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| <p><b>¿<math>\overline{RC} \cong \overline{BT}</math>?</b></p> <p>Dado el triángulo <math>\triangle ABC</math> con <math>\overline{AB} \cong \overline{AC}</math> y <math>\angle AEC \cong \angle BDC</math>, ¿<math>\overline{RC} \cong \overline{BT}</math>?</p>  <p>1. Con el instrumento entregado completa la construcción de la figura<br/>(No se vale hacer marcas sobre el instrumento)</p>  <p>2. Verifica y discute con tus compañeros si se puede completar la construcción de la figura con cada uno de los instrumentos.</p> | <p>3. Cada uno de los instrumentos permite trazar un triángulo diferente entre sí. Dibuja cada uno de los triángulos y determina cuál te sirve para probar que <math>\overline{RC} \cong \overline{BT}</math>.</p> <p>4. Haz una lista con todas las proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas) que se podrían usar para la prueba.</p> <p>5. Construye un grafo proposicional y la prueba en doble columna.</p> <p style="text-align: right; margin-top: 20px;">Hansbert Delgado (2019 -I)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> |

Figura 21. Diseño de Ficha de Trabajo para la Tercera Sesión.

## Experimentación

En lo que corresponde esta fase del experimento de enseñanza se describen las acciones que se tuvieron en cuenta antes, durante y después de la implementación del RP e intervención con los estudiantes. Molina y otros (2011) por ejemplo, presenta una lista de estas acciones en cada uno de los momentos de la experimentación, (ver Tabla 1.6).

Tabla 1.8

Acciones a realizar en la fase de experimentación.

| Momentos                     | Acciones                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Antes de cada intervención   | <ul style="list-style-type: none"> <li>•Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos.</li> <li>•Identificar los objetivos instruccionales de la intervención.</li> <li>•Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible.</li> <li>•Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención.</li> <li>•Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos.</li> <li>•Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.</li> </ul> |
| En cada intervención         | <ul style="list-style-type: none"> <li>•Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención.</li> <li>•Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| Después de cada intervención | <ul style="list-style-type: none"> <li>•Analizar los datos recogidos en la intervención.</li> <li>•Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/conjeturas de investigación.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

Fuente: Molina, M. y Otros (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. En: *Enseñanza de las ciencias*. 29(1), pp. 075–088.

En síntesis, se consideró en este trabajo: Previo a la experimentación, se revisó cada uno de los elementos resultado del diseño y planificación, por ejemplo objetivos, desarrollo y tiempo de duración. En la aplicación se observa las intervenciones de los estudiantes en relación con el recurso y sus posibles dificultades que requieran de una sugerencia o explicación. Posterior a la aplicación se registra las orientaciones y observaciones que se dieron y se analizan, para el refinamiento en el diseño.

### **Análisis local**

Este análisis se realiza después de la puesta en práctica de la ficha en cada sesión, se recogen los registros de videgrabación y audio de las intervenciones de los estudiantes en la sesión y sus tareas escritas. Luego se evalúan las decisiones tomadas en relación con la forma de actuar, con las intervenciones que se deben realizar y lo observado en el momento en que los estudiantes realizaban las tareas.

En Correa (2017), sobre este análisis afirma que da lugar a la realización de ajustes al diseño para la siguiente implementación y obliga a una revisión constante de la conjetura. Los resultados que se obtienen sustentan y plantean modificaciones necesarias para el diseño propuesto, esto exige el refinamiento de la conjetura, aplicando ajustes que den cuenta de los procesos reales de la actividad matemática de los estudiantes.

### **Refinamiento**

Correa (2017) destaca que el refinamiento se concibe como un avance progresivo de la conjetura, describiendo los ajustes tanto de diseño como de la conjetura, que no requieren esperar al final del experimento, posibilitando al final del trabajo investigativo obtener un diseño que ha sido filtrado y ajustado en distintos momentos, aunque según las condiciones del contexto, este diseño siempre podrá, y deberá, ser revisado.

Confrey y Lachance (2000), citados en Correa 2017, señalan la importancia de proponer un experimento previo, con el propósito de enriquecer la conjetura; para esto se recogen elementos, se precisa y ajusta la conjetura en términos de la teoría y el contexto en que se desarrolla el trabajo investigativo. En el presente trabajo esto se tuvo en consideración, aplicando el diseño a uno de los grupos, destacando la posibilidad de mejorar en el diseño y avanzar en la investigación.

### **Análisis Retrospectivo**

La tercera fase del experimento de enseñanza consiste en realizar un análisis de todo lo acontecido en las dos fases anteriores. En este análisis, a través de los datos e información obtenida durante la experimentación, describe cómo se desarrolló la trayectoria de aprendizaje, la evolución de la conjetura a partir de los datos obtenidos y los sustentos para establecer los avances de los estudiantes en cuanto a su actividad matemática, Correa (2017). También se analizan los datos recolectados en función de, o guiada por los objetivos de instigación del estudio.

Aspecto a resaltar en esta última fase y que sugieren Molina y otros (2011): Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención (que se desarrollan en la fase del diseño y planeación), para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad.

## **Capítulo 2. Experimentación, Análisis Local y Refinamiento**

En el presente capítulo se hace una síntesis de la experiencia con la implementación de las fichas de trabajo y los desarrollos de los estudiantes. La obtención de datos para el análisis se hizo por medio de registro de video de las sesiones, los registros de los estudiantes en las fichas de trabajo y anotación de las intervenciones que en el momento se consideraron pertinentes en cada sesión. Principalmente se centra la atención en lo que concierne a la construcción de GP, y todo aquello que favoreciera la construcción de pruebas.

### **Experimentación**

La intervención y participación en cada una de las sesiones como investigador y orientador buscaba favorecer el trabajo colaborativo entre estudiantes, elemento característico en el contexto del Laboratorio. Las orientaciones a los estudiantes en el desarrollo de las tareas, se planteó que fuera el menor número de veces posible, dejando la responsabilidad a los estudiantes entre pares de resolver sus inquietudes o dificultades y avanzar en el desarrollo de las tareas.

En el mejor de los casos los estudiantes lograron adaptarse rápidamente al tipo de trabajo conforme iban desarrollando cada una de las tareas, no es objeto de interés mostrar cuan significativo puede ser esto en el diseño. Se resalta este aspecto en el sentido de que la participación en conjunto, logró favorecer en algunos casos el refinamiento de algunos conocimientos que habían desarrollado en su curso de geometría, esto desde lo que se observó como investigador observador y participante, también el hecho de que las discusiones y puestas en común les permitieron dar cuenta de razones, explicaciones y pasos deductivos, útiles en la construcción de las pruebas.

En el caso que se pudiese cualificar como poco favorable en términos de trabajar en colectivo, se dio en la primera sesión con uno de los grupos, quienes pese a mencionarles en repetidas ocasiones discutir cada una de las tareas, no lo hicieron. Solo al final cuando se propuso exponer algunos de los grafos que construyeron, se dio la oportunidad de que discutieran, explicaran y describieran lo que correspondería a su THP y su grafo proposicional.

El tiempo de duración que se consideró podría tomar cada una de las sesiones, se estableció conforme a un estimado de lo que podrían tardar en lograr las tareas y hacer la discusión de las mismas. Esto se cumplió, siendo el promedio de duración entre cada una de las sesiones de 1 hora 15 minutos. Por sesión se trabajó con un solo grupo, buscando que a medida que se aplicaran los diseños se hicieran ajustes y mejoras, las cuales mediante la observación parecían ser pertinente a la luz de los objetivos y todos los elementos orquestados para el diseño que se tenían presentes hasta el momento.

En el siguiente apartado se describen más elementos que se pudieron analizar con más detalle de cada una de las sesiones, principalmente en lo que se refiere a las tareas y los registros de los estudiantes.

### **Análisis Local y Refinamiento**

El tiempo para el análisis local de la información recogida de cada una de las sesiones fue corto, a razón de que se trabajó con los grupos durante tres semanas seguidas, se priorizó lo observado en el momento en el que los estudiantes interactuaban entre sí y con la ficha de trabajo, fijando la atención en aspectos que pudieran ser significantes y pertinentes para hacer ajustes en los diseños de las tareas.

En la primera sesión, no se ha mencionado antes, se asumió que los estudiantes no conocían acerca de la construcción de GP y que mediante este se pudiera hacer el registro de una

prueba, así que se introdujo con una proposición de pocos pasos deductivos las reglas de construcción del GP en la primera hoja de la ficha de trabajo.

Luego de que los estudiantes avanzaran en la introducción, realizaron las tareas de construcción de figuras. Se logró observar que los estudiantes utilizaron los instrumentos para construir cada una de las figuras que se le propusieron, sin embargo, conforme hicieron la construcción con los instrumentos entregados, los estudiantes no dieron cuenta de afirmaciones que sustentaran (en el caso del grupo piloto y primer grupo para la primer sesión), que la figura construida fuera congruente con la figura inicial.

Lo anterior conllevó que para la siguiente aplicación con los otros grupos, la tarea de determinar una vez terminada la construcción, los criterios que hacían válida la construcción garantizando la congruencia de las dos figuras.

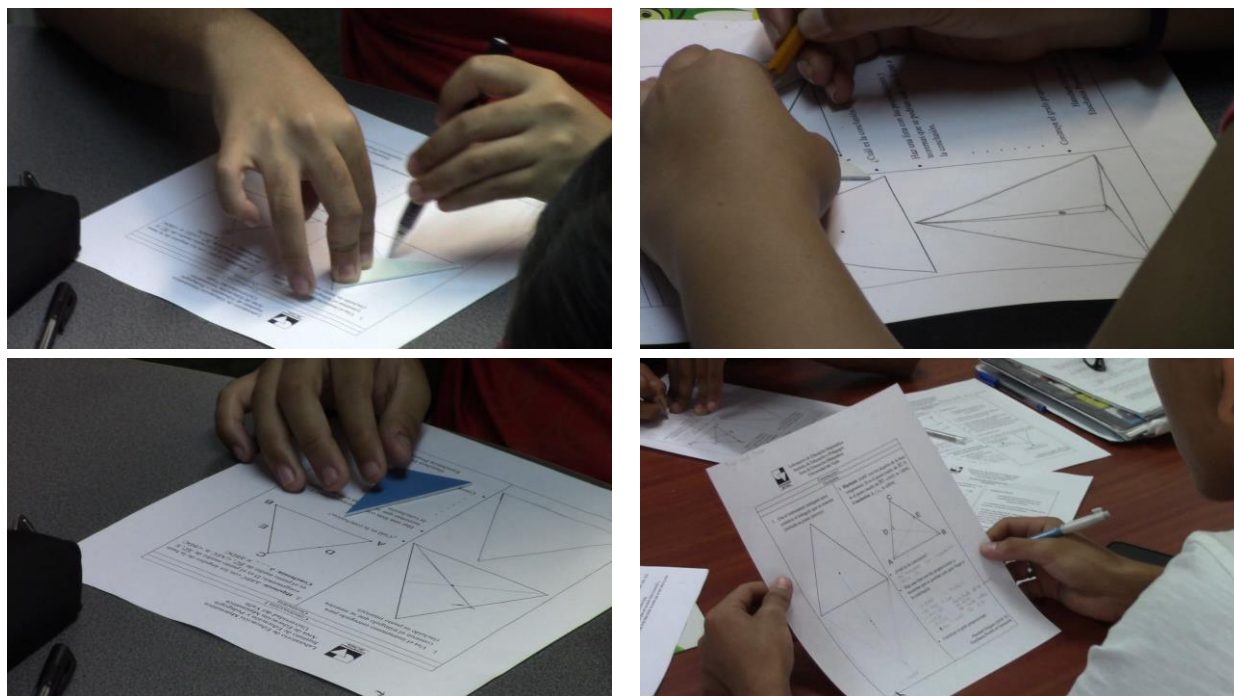
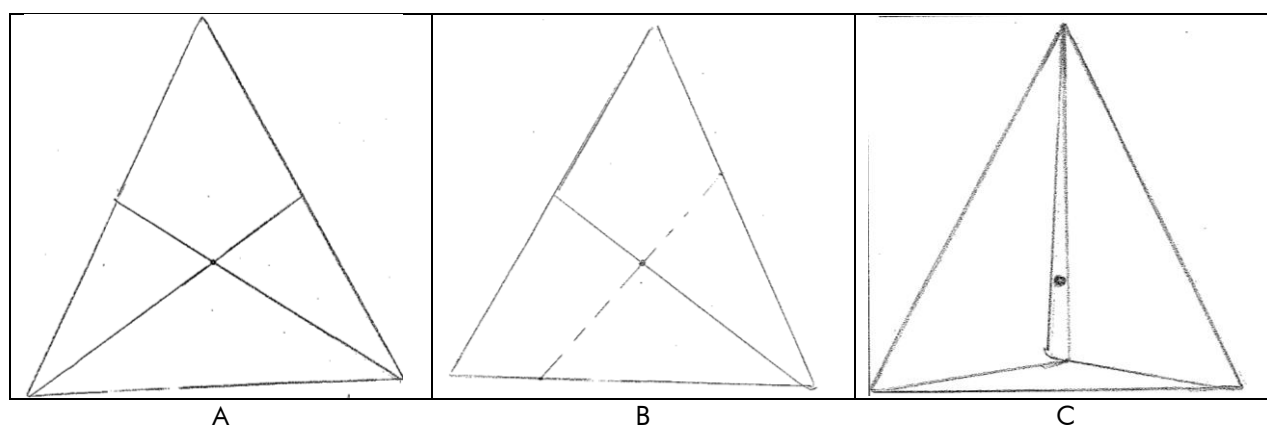


Figura 22. Estudiantes realizando construcciones de una figura mediante procesos diferentes.

Frente a la variedad de pasos y formas que los estudiantes presentaron de la reproducción de la figura, en los casos en los que los estudiantes hicieron la construcción sin tener un sustento geométrico explícito que lo apoyara, la discusión entre el grupo acerca del proceso realizado, condujo a que pudieran reconocer y determinar la validez de la construcción a la luz de sus conocimientos geométricos sobre congruencia de triángulos. En la *Fig. 23* se muestran los resultados de algunas de las construcciones de la figura (Tarea 1 en la hoja 2 de la ficha de trabajo), mediante pasos de construcción diferentes al contemplado como solución en los referentes pp. 32-33.



*Figura 23.* Construcciones de la figura de la tarea de construcción 1 en la primer Ficha de Trabajo realizada por los estudiantes.

En A y B las figuras son congruentes a la inicial, en C la estudiante refiere haber puesto el punto a mano alzada, lo mismo que la ubicación de los dos triángulos que permite el instrumento trazar.

En la figura construida B, el estudiante logró ubicar el triángulo y hacer el trazado para reproducir parte del triángulo, sin embargo para reproducir el otro lado le fue difícil encontrar cómo ubicar el instrumento, por lo que recurrió a otro tipo de tratamiento con el instrumento para

determinar el punto en el interior del triángulo. Esto posiblemente se dio puesto que acomodarlo requería en términos de transformación geométrica, una reflexión respecto al eje de simetría del triángulo.

La tarea 2 en la segunda Ficha de Trabajo con respecto a las otras tareas de construcción, tiene la característica que la figura reproducida se encontraba reflejada y rotada con respecto a la figura inicial, lo que hizo la tarea más compleja, puesto que no bastaba con poner el instrumento sobre la figura y luego hacer su reproducción inmediata sobre el segmento que se daba, sino que requería de la identificación de características de la figura en relación con el instrumento para poder transferir por ejemplo un lado o un ángulo.

Las afirmaciones sobre la figura que reconocieron por medio del instrumento y sus conocimientos geométricos, permitió a los estudiantes describir un tipo de prueba, sin ser rígida, que daba cuenta de las condiciones para aplicar los teoremas de correspondencia de triángulos (A.L.A, L.L.L, L.A.L), lo que condujo a: 1) la validez de los pasos de construcción, y por ende, 2) que la figura inicial y la figura construida fuesen congruentes. Al poner en evidencia este hecho, aquellos estudiantes que hicieron la construcción guiados por la percepción y los tratamientos figurales que el instrumento favorecía, afirmaron no tener certeza de la congruencia entre las figuras que se requería.

La relación entre la construcción de la figura, la identificación de subconfiguraciones relevantes y descripción de una THP para la construcción de un GP que prueba una proposición, resultó ser uno de los interrogantes presente para el diseño. En Duval (2016) se afirma la posibilidad de trabajar la visualización, del tipo de tareas que describe en Duval (2010) se tomó como referente y se adaptó para proponer las construcciones, no obstante se encontró dificultad y

tensión al relacionar la proposición que satisface la construcción de la figura y la que se busca que el estudiante pruebe.

### **¿Cómo los estudiantes encuentran la conclusión de la proposición a probar?**

Determinar la conclusión de la proposición que se pone a probar al estudiante, puede ser determinada 1) como conjetura a partir de lo que se deja ver de manera perceptiva en la figura, 2) a partir de una serie de pasos de deducción que parten desde las premisas.

Los estudiantes inicialmente cuando se les presentaba una proposición en la que debían completar la conclusión, utilizaron la percepción sobre la figura. Determinaron la conclusión de la proposición, reconociendo en la figura el triángulo faltante de la congruencia. De lo que se tiene registro parece que completan la conclusión viendo solo la figura, buscando otra que perceptivamente sea congruente.

En sesiones posteriores o al finalizar se dejó de ver la figura desde la percepción, en el sentido que el estudiante sin tener información sobre la figura no asumía que la figura cumpliera alguna característica, es decir, no le atribuía información a la figura de ser triángulo rectángulo, isósceles, segmentos congruentes sin haber pasado primero al menos por una THP que diera cuenta de ello. [HADV2]

La discusión de una THP entre estudiantes posibilitó en algunas ocasiones que estudiantes refinaran sus conocimientos geométricos del curso, como por ejemplo las premisas para aplicación de un teorema, nombrar la correspondencia de triángulos congruentes. Esto se pone en evidencia en las líneas 79 a 89 del segmento 3, ver Anexo 6.

En el tercer diseño de Ficha de Trabajo (para la tercera sesión) se logró que la proposición que satisface la construcción y la proposición a probar coincidieran. Así se propuso una construcción que diera cuenta explícitamente de las subconfiguraciones, aspecto que se

desarrolló de manera implícita en las tareas anteriores, y que en la última sesión al ponerlas en evidencia, favoreció en la identificación y elaboración de THP para la prueba de la proposición.

La lista de proposiciones que se propuso a los estudiantes realizar antes de la construcción del grafo, no sólo da cuenta de las proposiciones que el estudiante reconoce que podrían ser de ayuda para probar, sino que también da cuenta de manera implícita la identificación de una THP. En este sentido se consideró pertinente buscar que la THP se hiciera explícita, con lo cual las proposiciones requeridas aparecen unas por aprehensión operativa y las otras como resultado del trabajo con la figura, con lo que luego se pasaría a construir el GP.

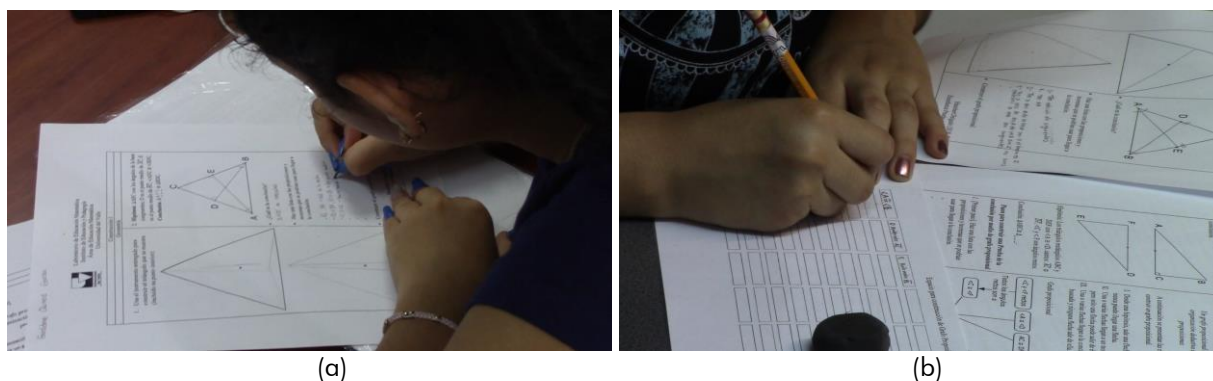


Figura 24. (a) Estudiante listando proposiciones para la posterior construcción del GP de la prueba. (b) Estudiante que toma la figura, las reglas de construcción de GP y la hoja en la que lo elabora.

El tratamiento de los GP elaborados por los estudiantes para el análisis, se hizo a partir de la construcción digital de cada uno, conservando sus características para que fueran lo más fiel posible con la versión original registrada. En los grafos se identificó algunos de los indicadores de incomprensión en la organización de los pasos de deducción que refiere Duval (2016) (ver tabla 1.2, p.7), por ejemplo premisa y tercer enunciado con un mismo estatus (ver figura 25). Un análisis más detallado sobre los GP construidos por los estudiantes se presenta en el próximo capítulo.

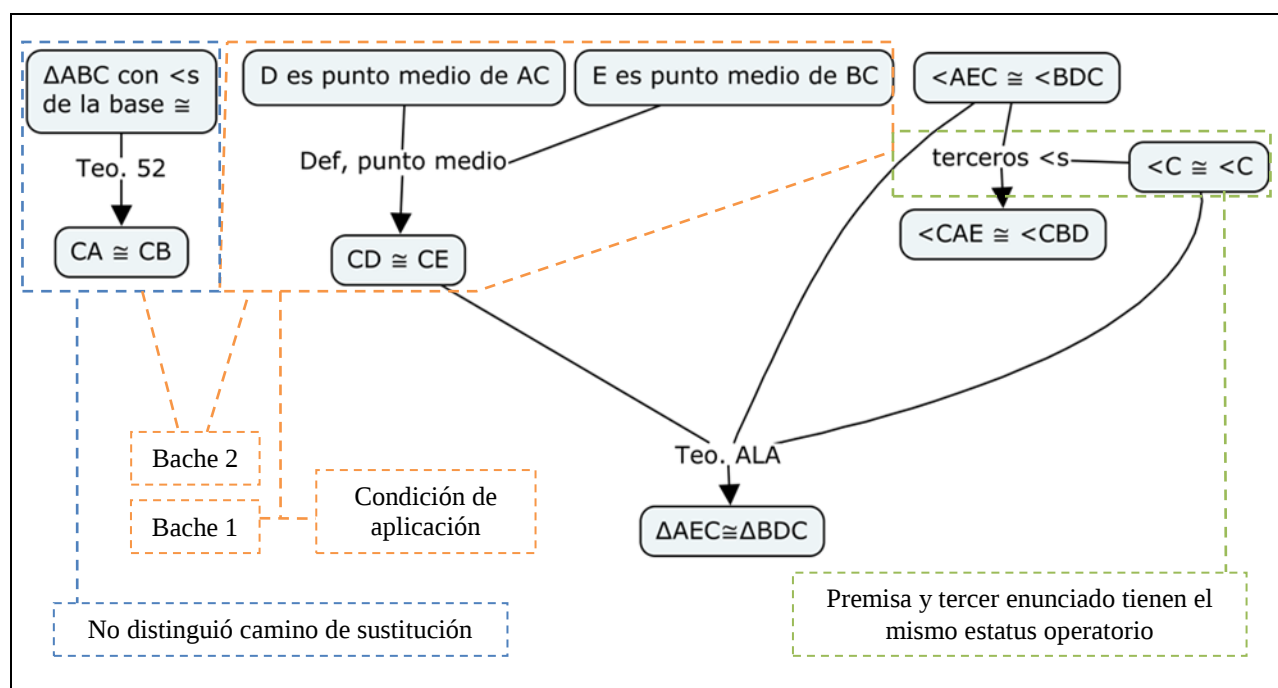


Figura 25. Grafo Proposicional en el que se logran identificar baches y saltos en la prueba.

En la primera sesión del grupo 1 se obtuvo que de los 4 estudiantes, una estudiante logró construir un GP que daba cuenta de la prueba (ver Figura 26), en los otros estudiantes en un caso se logró evidenciar que no habían pasos deductivos y sí terceros enunciados entrelazados, y dos casos en los que los estudiantes no lograron establecer ningún paso deductivo (ver Figura 27), lo que conllevó a preguntarse porqué había ocurrido tal situación con los estudiantes. Si bien era la primer vez que los estudiantes interactuaron e hicieron construcción de grafos, en un grupo anterior se había trabajado y se había logrado construcción tanto de pasos deductivos como cadenas de estos.

La revisión del registro de video permitió evidenciar que el grupo 1 tuvo poca interacción entre sí, la discusión de las tareas no se dio pese a que se le propuso al inicio. Así que en los siguientes grupos se enfatizó en que discutieran la realización de cada una de las tareas, se logró

que los estudiantes construyeran pasos y cadenas deductivas, y se presentó en menor medida lo experimentado con el Grupo 1.

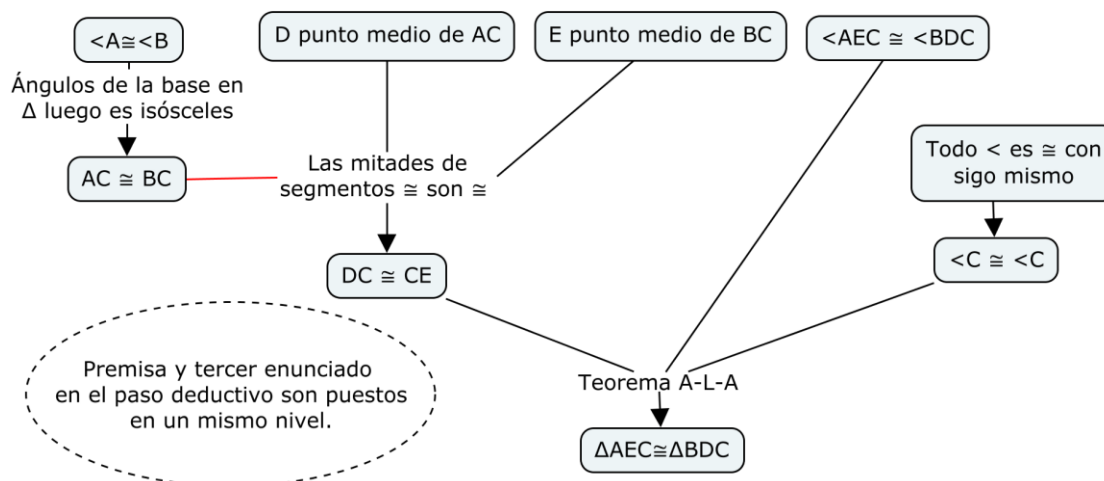


Figura 26. Grafo Proposicional para la Prueba de la Proposición 2 realizada por una estudiante durante la primera sesión.

| Lista de Proposiciones                                                                                                                                                                                                            | Grafo Proposicional                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Def. de segmentos $\cong$<br>- Teo A.L.A<br>- Teo reflexivo de $\angle$<br>- Teo dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los catetos de uno de ellos son $\cong$ a sus correspondientes              | <div> <math>\angle A \cong \angle B</math> <math>\overline{BD} \cong \overline{BD}</math> <math>\overline{DE} \cong \overline{DA}</math> </div> <div>           Teo reflexivo <math>\angle</math> </div> <div>           A.L.A         </div> <div> <math>\Delta BDC \cong \Delta AEC</math> </div>                                                                                              |
| Teo adición de segmentos<br>Post LAL<br>Def. partes correspondientes<br>Teo reflexivo de ángulos<br>Todos los $\angle$ de lados colineales son $\cong$<br>Si 2 $\angle$ de un $\Delta$ son $\cong$ los lados opuestos son $\cong$ | <div> <math>\overline{DC} \cong \overline{EC}</math> <math>\angle A \cong \angle B</math> <math>\overline{AC} \cong \overline{BC}</math> </div> <div>           Teo adición de segmentos         </div> <div> <math>\angle C \cong \angle C</math> </div> <div>           Todos los <math>\angle</math> de lados colineales son <math>\cong</math> </div> <div>           Teo LAL         </div> |

Figura 27. Lista de Proposiciones y Grafos Proposicionales elaborados por estudiantes que no lograron obtener pasos deductivos.

Se reconoció que los estudiantes al desarrollar la lista de proposiciones, describen una THP, lo que llevó a plantear la pregunta de cómo se podría hacer para que los estudiantes hicieran explícita la trayectoria y así obtener una lista e incluso pasos deductivos que serían puestos luego en el GP y conducir a la prueba de la proposición. Esto condujo a que en las tareas de construcción y las tareas auxiliares estuvieran relacionadas con las subconfiguraciones, y que con los datos de las hipótesis e información en las figuras el estudiante determinara si la configuración podría constituirse en un camino para la prueba.

En la presentación del GP hay proposiciones que no se deducen de las hipótesis iniciales, y que se caracterizan como datos de la figura, en la descripción del GP, una estudiante refiere que la naturaleza de la proposición “*todo < es  $\cong$  consigo mismo*” es distinta a las que aparecen en las reglas de construcción, no obstante logró ubicar en el registro la proposición de tal manera que las reglas se cumplieran (Líneas 54 a 58 en Segmento 2, Anexo 6; el GP corresponde al de la figura 26).

En la tercera sesión la construcción de los GP por los estudiantes no es ordenado y no satisface en la ubicación el estatus de las proposiciones, sin embargo su construcción se piensa en términos de las reglas, al hacer el cambio al registro en doble columna se hace bien, los estudiantes del G1 refieren que fue difícil la construcción de los GP pues al construirlo no lo hicieron de forma ordenada.

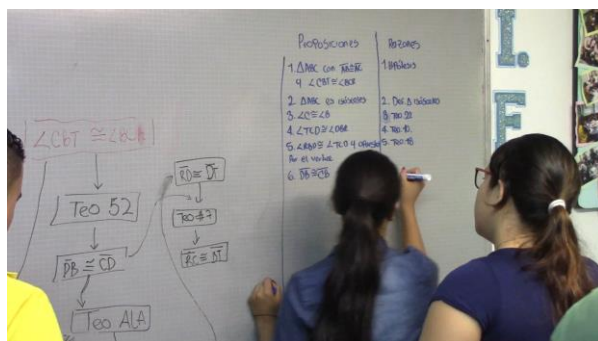


Figura 28. Estudiantes realizando la construcción de la prueba en el Registro de doble columna.

### Prueba en dos Columnas

| (DF)                                                                              | Proposiciones                                  | Razones                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
|  | 1. $\angle A \cong \angle D$ .                 | 1. Hipótesis.                             |
|                                                                                   | 2. $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos. | 2. Hipótesis.                             |
|                                                                                   | 3. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ .       | 3. Hipótesis.                             |
|                                                                                   | 4. $\angle C \cong \angle F$ .                 | 4. Los ángulos rectos son congruentes (2) |
|                                                                                   | 5. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .       | 5. A.L.A. (1, 3, 4)                       |

Figura 29. En un registro de la Prueba los estudiantes conciben que solo debe presentarse una sola línea en la que aparecen las hipótesis.

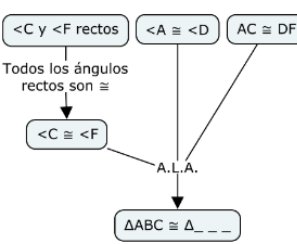
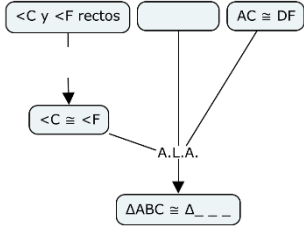
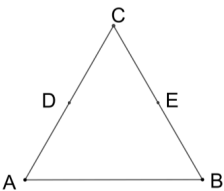
En la figura 29 se muestra lo que para los estudiantes resultó diferente con respecto al registro en doble columna que conocen, la presentación de las hipótesis por separado, a las que consideran debía presentarse juntas y no de forma separada. Al contrastar la forma en que aparecen las hipótesis en los dos tipos de registros se tiene que, no necesariamente las proposiciones puestas como hipótesis conllevan a un mismo paso deductivo, lo que hace que tomarlas por separado sea una buena opción con la que pueden operar. Tanto el grafo como en el registro en doble columna se puede observar que las hipótesis son utilizadas no necesariamente en los mismos pasos deductivos.

En la Tabla 2.1 se resumen las modificaciones y ajustes de las tareas en los diseños de ficha de trabajo, resultado de lo evidenciado en las sesiones con los dos primeros grupos y lo evidenciado, al ponerlas en juego para la sesión con los dos grupos restantes (grupos 2 y 3).

En las figuras 30, 31 y 32 se presentan los diseños de fichas de trabajo con los ajustes en las tareas que se refirió en la tabla 2.1.

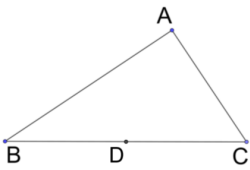
Tabla 2.1

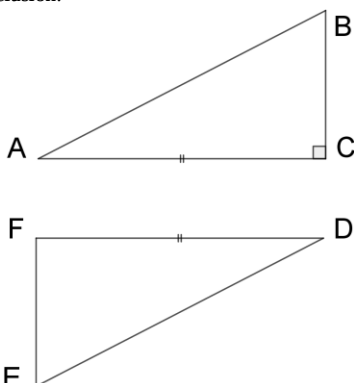
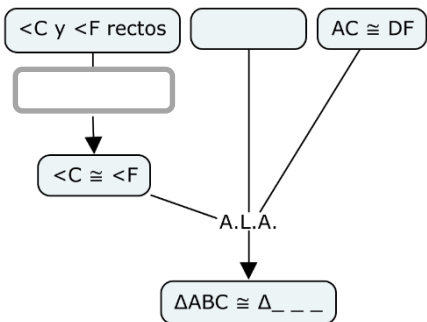
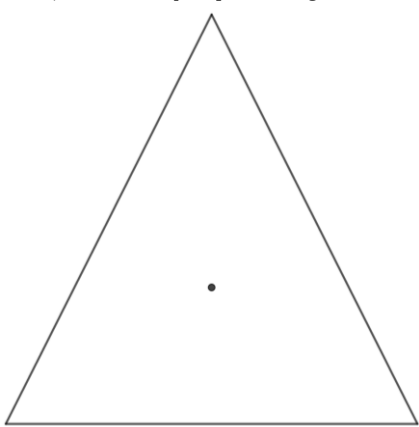
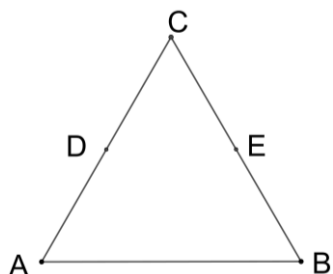
## Modificaciones y ajuste de las tareas en los diseños de ficha de trabajo

|                    | Tarea inicial                                                                                                    | Modificaciones y Ajuste                                                                                                                                                                                                                                                        | Justificación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ficha de Trabajo 1 | 1. [Primer paso]. Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión | En pruebas que no requiere de subconfiguraciones, se le indica al estudiante que describa su THP a los otros. Luego hace la lista de las proposiciones.<br>Si se requiere, se asigna tareas de construcción para identificar la subconfiguración que permite describir una THP | La tarea de realizar la lista de las proposiciones se favorece cuando se "traza" una THP, que se puede apoyar en la aprehensión discursiva y operatoria.                                                                                                                                                                                   |
|                    | 2. [Segundo paso]                                                                                                | Se propone verificar si en el ejemplo se satisface las reglas de construcción del grafo proposicional.                                                                                                                                                                         | Los estudiantes pueden tener un primer acercamiento más allá de la lectura, verificando el cumplimiento de las reglas de construcción del GP.                                                                                                                                                                                              |
|                    | Tarea 1 y Tarea 2, (Ver figura 19, p. 48).                                                                       | La tarea de construcción a partir de las subconfiguraciones que favorece la identificación de una THP resulta ser una alternativa, permite que el teorema que sustenta la construcción de la figura sea el mismo que se quiere probar en la siguiente tarea.                   | Los estudiantes no relacionan la construcción en la tarea 1 con lo que se propone en la tarea 2, utilizan una figura que satisface la misma subconfiguración pero la conclusión de la proposición difiere.                                                                                                                                 |
|                    |                               | <p>Opción 1. Se propone que en el grafo de ejemplo el estudiante lo pueda completar.</p>                                                                                                   | Esta tarea introductoria se puede enriquecer haciendo que la participación de los estudiantes vaya más allá de la verificación, se podría incluso no poner un trazo que conecte dos proposiciones. Entre cómo se hace un GP y la tarea para hacerlo hay tareas intermedias como las de construcción de figuras que hace que haya un salto. |
|                    | Usa el instrumento entregado para construir el triángulo que se muestra (incluido su punto interior):            | Preguntar qué determina que la nueva construcción es congruente con la figura original.<br>¿Por qué la figura construida es congruente con la figura inicial?                                                                                                                  | Los estudiantes hicieron la construcción, pasan a la siguiente tarea y no se preguntaban si la figura construida era congruente con la inicial.                                                                                                                                                                                            |
|                    |                               | La figura permite hacer subconfiguraciones, proponer en el rediseño que los estudiantes puedan ver y dibujar estas subconfiguraciones, que sirvan para la construcción de la prueba como parte de la aprehensión operatoria                                                    | El estudiante no logra ver las subconfiguraciones aun cuando hizo la construcción de la figura a partir de estas. Tiene sentido la construcción de la figura a través de las subconfiguraciones.                                                                                                                                           |

|                                                        |                                                                                                                                      |                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| No estaba en la tarea 1 de construcción del triángulo. | Se sugiere al emplear el molde (instrumento de construcción) hacer todo el trazado del perímetro de éste y no solo lo que necesitan. | Se busca que se pueda seguir las huellas o rastros de los pasos de construcción del estudiante para poder replicarlos y reconocer cómo opero el estudiante |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Tabla 2.1 (continuación)

|                    | Tarea Inicial                                                                                                                                             | Modificaciones y Ajuste                                                                                                                                                                                      | Justificación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ficha de Trabajo 2 |                                                                          | Modificar la presentación de la figura del triángulo por la de un rectángulo que incluye la figura.                                                                                                          | Se puede presentar la figura como un rectángulo con su diagonal y el punto D. luego se propone hacer la construcción, el material que se entrega es una escuadra semejante más grande que ABC.                                                                                                                                    |
|                    | El triángulo rectángulo ABC con $\angle ACB$ recto; M, R, S son los puntos medios de $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. | Se quitó la última tarea de construcción del grafo de una prueba                                                                                                                                             | El nivel de dificultad de la tarea anterior hizo que los estudiantes tomaran más tiempo en encontrar una THP                                                                                                                                                                                                                      |
|                    | 1ª tarea                                                                                                                                                  | Se incorporó la plantilla para construir el GP en esta lo estudiantes construyeron el GP utilizando las reglas de construcción                                                                               | Se tenía dispuesta una plantilla aparte para que los estudiantes ubicaran las proposiciones, una vez eliminada una tarea de construcción de grafo se pudo incorporar                                                                                                                                                              |
|                    | ¿AD es una mediana del $\triangle ABC$ ?                                                                                                                  | <p>Se hace el cambio en la pregunta sobre la Mediana AD por: 3. El triángulo <math>\triangle ADC</math> es</p> <p>Se agrega explícitamente las hipótesis de la proposición con la que se desea trabajar.</p> | <p>Para no tener mayor extensión de la lista de proposiciones a utilizar. Y que no tome mayor tiempo la construcción del GP.</p> <p>Las dos hipótesis de la proposición se presentan en dos momentos diferentes, no necesariamente reconocen ambas, también porque una de ellas se obtiene como resultado de la construcción.</p> |
| Ficha de Trabajo 3 | No estaba la tarea                                                                                                                                        | 4. Determina e indica cuál triángulo te sirve para probar que $\overline{RC} \cong \overline{BT}$ .                                                                                                          | No está indicación en la tarea para que el estudiante identifique cuál de las subconfiguraciones podría tener en cuenta para la elaborar una THP, movilizand cada una de las proposiciones que podría usar                                                                                                                        |
|                    | Dado el triángulo $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\angle AEC \cong \angle BDC$ , ¿ $\overline{RC} \cong \overline{BT}$ ?       | En la pregunta de los segmentos congruentes RC y BT, se puede dejar un espacio para que el estudiante escriba a una primera respuesta.                                                                       | Los estudiantes dan una primer respuesta, no queda en el registro de la ficha, si en el registro de video.                                                                                                                                                                                                                        |

| Exploración (Introducción)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Construcción I                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Geometría                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <p>A continuación se presentan dos triángulos que satisfacen las hipótesis dadas, completar la conclusión.</p> <div></div> <p>Hipótesis: Los triángulos rectángulos ABC y DEF con <math>\angle A \cong \angle D</math>. catetos <math>\overline{AC} \cong \overline{DF}</math>, <math>\angle C</math> y <math>\angle F</math> son ángulos rectos.</p> <p>Conclusión: <math>\triangle ABC \cong \triangle \_\_\_</math>.</p> <p><b>Pasos para construir una Prueba de la conclusión por medio de grafo proposicional</b></p> <p>1. [Primer paso]. Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>-</li><li>-</li><li>-</li><li>-</li><li>-</li></ul> | <p>2. [Segundo Paso].</p> <p>Un grafo proposicional es una organización deductiva de las proposiciones.</p> <p>A continuación se presentan las reglas para construir un grafo proposicional.</p> <p>I. Desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha.</p> <p>II. Una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él.</p> <p>III. Una o varias flechas llegan a la conclusión buscada y ninguna flecha sale de ella.</p> <p>Grafo proposicional</p> <div></div> <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> | <p>1. Usa el instrumento entregado para construir el triángulo que se muestra (incluido su punto interior)</p> <p>a) Determinar qué tipo de triángulo es.</p> <div></div> | <p>b)¿Por qué la figura construida es congruente con la figura inicial?</p> <p>2. <b>Hipótesis:</b> <math>\triangle ABC</math> con los ángulos de la base congruentes; D es el punto medio de <math>\overline{AC}</math>; E es el punto medio de <math>\overline{BC}</math>; <math>\angle AEC \cong \angle BDC</math>.<br/><b>Conclusión:</b> <math>\triangle \_\_\_ \cong \triangle BDC</math>.</p> <div></div> <p>3. Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>-</li><li>-</li><li>-</li><li>-</li><li>-</li></ul> <p>4. Construye el grafo proposicional.</p> <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> |

*Figura 30. Diseño de Ficha de Trabajo para la Primera Sesión*

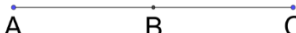
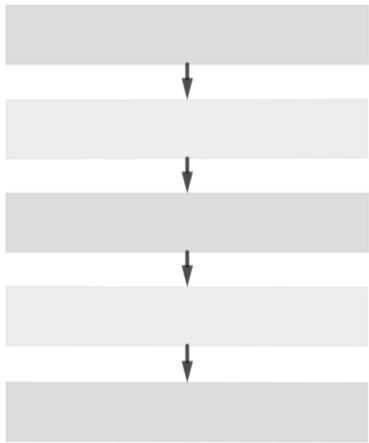
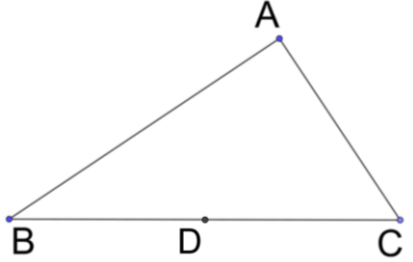
| Exploración y Construcción II A                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Construcción II B                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Geometría                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
| <p><b>Punto Medio de un Segmento</b></p> <p>Sea B el punto medio del segmento <math>\overline{AC}</math>, los segmentos <math>\overline{AB}</math> y <math>\overline{BC}</math> son congruentes.</p>  <p>Hipótesis:</p> <p>Conclusión:</p> <p>Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <p>-<br/>-<br/>-<br/>-</p> <p>Un grafo proposicional es una organización deductiva de las proposiciones.</p> | <p>A continuación se presentan las reglas para construir un grafo proposicional.</p> <p>I. Desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha.<br/>II. Una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él.<br/>III. Una o varias flechas llegan a la conclusión buscada y ninguna flecha sale de ella.</p> <p>1. Construir el grafo proposicional de la Prueba de Punto medio de un Segmento.</p>  <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> | <p>2. Usa los instrumentos entregados para:</p> <p>a) Determinar qué tipo de triángulo es <math>\triangle ABD</math><br/>b) construir el triángulo rectángulo que se muestra</p>   <p>3. El triángulo <math>\triangle ADC</math> es</p> <p>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-</p> <p>4. Considerando cómo hipótesis que el triángulo <math>\triangle ABC</math> es rectángulo y que el triángulo <math>\triangle ABD</math> tiene los ángulos de la base congruentes, haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para probar que <math>\triangle ADC</math> es</p> <p>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-<br/>-</p> <p>6. Construir el grafo proposicional para probar la conclusión.</p> <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> |  |

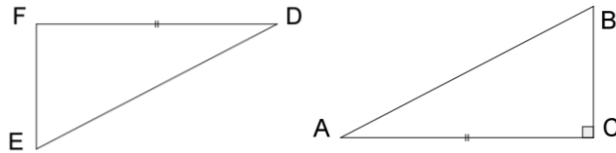
Figura 31. Diseño de Ficha de Trabajo para la Segunda Sesión

### Del Grafo a la doble Columna

#### Geometría

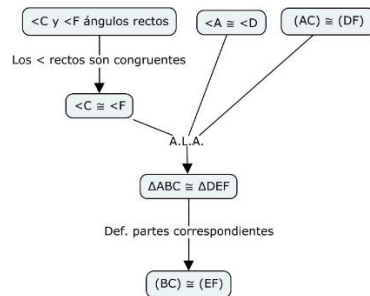
Sean los triángulos rectángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$  con  $\angle A \cong \angle D$ , catetos  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ,  $\angle C$  y  $\angle F$  son ángulos rectos. Se puede concluir que  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ .

A continuación se presentan los dos triángulos que satisfacen las hipótesis dadas:



Se presenta a continuación el grafo proposicional que permite la prueba de la congruencia  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ , y se presenta la respectiva prueba en doble columna, revísalos con detalle y comprueba que satisfacen lo que se desea probar.

#### Grafo Proposicional



#### Prueba en dos Columnas

| Proposiciones                                  | Razones                                                  |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 7. $\angle A \cong \angle D$ .                 | 1. Hipótesis.                                            |
| 8. $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos. | 2. Hipótesis.                                            |
| 9. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ .       | 3. Hipótesis.                                            |
| 10. $\angle C \cong \angle F$ .                | 4. Los ángulos rectos son congruentes (2)                |
| 11. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .      | 5. A.L.A. (1, 3, 4)                                      |
| 12. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$        | 6. Def. Partes (5)<br>Correspondientes $\triangle \cong$ |

Encuentra las similitudes y diferencias entre el Grafo Proposicional y la Prueba en dos Columnas. Discútelo con tus compañeros y escríbelas.

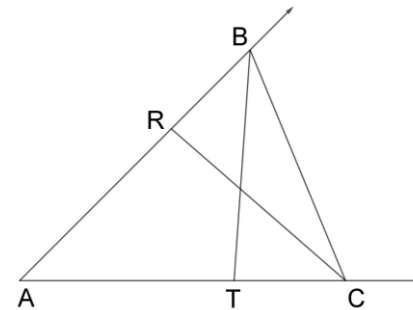
Hansbert Delgado (2019 -I)  
Enseñanza Prueba en Geometría

### Construcción y Prueba

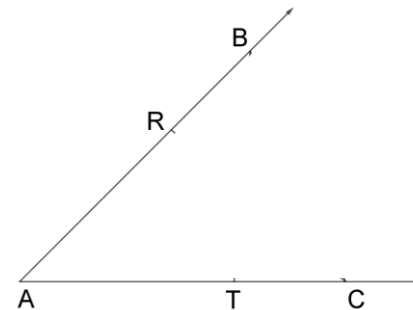
#### Geometría

¿ $\overline{RC} \cong \overline{BT}$ ?

Dado el triángulo  $\triangle ABC$  con  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  y  $\angle AEC \cong \angle BDC$ , ¿ $\overline{RC} \cong \overline{BT}$ ?



1. Con el instrumento entregado completa la construcción de la figura  
(No se vale hacer marcas sobre el instrumento)



2. Verifica y discute con tus compañeros si se puede completar la construcción de la figura con cada uno de los instrumentos.

3. Cada uno de los instrumentos permite trazar un triángulo diferente entre sí. Dibuja cada uno de los triángulos.

4. Determina e indica cuál triángulo te sirve para probar que  $\overline{RC} \cong \overline{BT}$ .  
5. Haz una lista con todas las proposiciones (definiciones, axiomas, teoremas) que se podrían usar para la prueba.  
6. Construye un grafo proposicional y la prueba en doble columna.

Hansbert Delgado (2019 -I)  
Enseñanza Prueba en Geometría

Figura 32. Diseño de Ficha de Trabajo para la Tercera Sesión.

### **Capítulo 3. Análisis Retrospectivo y Conclusiones**

En este tercer capítulo se presenta un contraste entre lo que desarrollaron los estudiantes y el proceso hipotético de aprendizaje que se previó en el diseño, se describe con base en los registros de las Fichas de trabajo de los estudiantes, aspectos que se consideran relevantes y que permitieron evidenciar cómo lo estudiantes conciben los pasos deductivos en una Prueba en Geometría elemental, también se describen las características del RP puesto en juego en la experimentación.

#### **La THA para la prueba en geometría elemental**

Resultado del diseño y planeación, se obtuvo un diseño de fichas de trabajo y la descripción del proceso hipotético de aprendizaje del estudiante para cada tarea propuesta (tabla 1.5). En la tabla 3.1 se presenta, apoyado en el registro de video, una breve descripción de lo realizado en cada una de las tareas por los estudiantes, como sustento para el contraste entre lo previsto y lo desarrollado.

En la primera parte o primera hoja de las fichas de trabajo, en las tareas introductorias para el trabajo con GP, lo que desarrollaron los estudiantes y lo que se propuso en la descripción de su proceso de aprendizaje, buena parte se satisface y aquello que se consideró que podría mejorar o ajustar se logró identificar en el análisis local, con lo cual se hizo el refinamiento de las tareas propuestas.

El contraste con respecto a la segunda hoja de la ficha de trabajo es amplio, se hace en torno a la construcción de figuras, la identificación de una subconfiguración, la descripción de una THP y el proceso de los estudiantes en la construcción de GP. En la tabla 3.2 se describe lo

que desarrollaron los estudiantes, contrario a lo que se previó en la tabla 1.5, asumiendo que podría identificarse como una variable que no se logró reconocer en la fase de análisis anterior ni en la fase de diseño y planeación, lo que finalmente podría llevar a un último ajuste y refinamiento en el diseño hasta lo que permitió el experimento desarrollar.

Tabla 3.1

Descripción de lo realizado por los estudiantes en cada una de las tareas de las fichas de trabajo.

| Ficha 1 (4 grupos)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Ficha 2 (3 grupos)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Ficha 3 (2 grupos)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Hicieron marcas en la figura correspondientes a las hipótesis de la proposición. Luego escribieron la respectiva correspondencia de la congruencia.</p> <p><b>En 1:</b> Con base en la hipótesis y la figura identificaron proposiciones para obtener la conclusión. En todos los casos escriben el teorema ALA en la lista de proposiciones, central en la prueba pues de éste en el último paso deductivo se desprende la conclusión.</p> <p><b>En 2:</b> Leyeron las reglas de construcción, se indicó verificar las reglas de construcción en los grupos. En G2 se propuso la tarea de completar el grafo que tenía dos proposiciones faltantes y una incompleta, pero en su lista de proposiciones no estaba presente la que faltaba en el GP, así que en principio no la lograron identificar.</p> <p>De los 13, solo 3 lograron escribir todas las proposiciones en la lista, constatando que se requerían en el grafo.</p> | <p>9 estudiantes trabajaron en esta sesión, organizados en sus respectivos grupos. Dos de ellos trabajaron solos, pues los integrantes de sus grupos no podían asistir, esto hizo complejo el trabajo puesto que no tenían un par para las discusiones. Se trabajó con ellos orientando hacia qué podían interpretar en las tareas y cómo podrían desarrollarlas.</p> <p>Los estudiantes escribieron lo que correspondía a la hipótesis y conclusión. Al hacer la lista de proposiciones tuvieron en cuenta los terceros enunciados y las proposiciones que se desprenden de estos, no aparece en la lista la hipótesis como una proposición.</p> <p>Los estudiantes construyen el grafo proposicional, la trayectoria de prueba es lineal y sólo requirió de la aprehensión discursiva.</p> | <p>Al leer las hipótesis de la proposición, hacen marcas para anclarlas en la figura. Identificaron similitudes y diferencias entre el registro de la prueba en un GP y en uno de doble columna:</p> <p><b>Similitud que encontraron</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Utilizan las mismas razones y proposiciones para llegar a la tesis. (G1y G3)</li> <li>Encuentran una relación binaria entre proposiciones definida como razón-proposición, que en el registro doble columna la refieren proposición-razón.</li> </ul> <p>Intentaron asociar los números de la doble columna a las proposiciones en el grafo, no encontraron coincidencia en el orden que aparecen las proposiciones de la doble columna al grafo.</p> <p><b>Diferencias que encontraron</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El grafo es más explícito que la prueba doble columna. (G1)</li> <li>En el grafo está implícito lo que es: las razones y proposiciones, a diferencia de la prueba doble columna que se ve explícito.</li> <li>Es más complejo de entender la doble columna que el grafo, en la doble columna se debe remitir a la figura (G3)</li> <li>Plantear el grafo es más difícil que hacerlo en doble columna, porque cuando se intenta demostrar se construye un grafo en la mente.</li> <li>Las proposiciones del registro en doble columna se desprenden de la estructura del grafo.</li> </ul> <p>En la doble columna conciben en G1 y G3 que solo debe aparecer una hipótesis en lugar de varias.</p> |

Tabla 3.2

Descripción de lo realizado por los estudiantes contrario a lo previsto en las tareas.

| Ficha 1 (13 estudiantes, 4 grupos)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Ficha 2 (9 estudiantes, 3 grupos)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Ficha 3 (6 estudiantes, 2 grupos)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1.</b> Una vez construyen la figura, no dan cuenta si la figura construida es congruente con la inicial, se les dificultad referir porqué lo son. (Gp y G1)</p> <p>En la construcción, el instrumento primero lo superponen en la figura inicial, sin un análisis previo, de forma intuitiva (ensayo y error) hacen que coincida con alguna parte de la figura.</p> <p>4 estudiantes trazan el punto en el interior del triángulo si utilizar instrumentos, considerando que no necesariamente tiene relación con la figura.</p> <p><b>2.</b> Determinaron la conclusión de la proposición reconociendo en la figura el triángulo faltante de la congruencia. De lo que se tiene registro parece que completan la conclusión viendo solo la figura, buscando otra que perceptivamente sea congruente. En el G3 los estudiantes terminada la construcción pudieron revisar entre ellos los GP, no obstante en el momento no lograron reconocer baches y pequeños errores en los grafos contruidos por sus compañeros.</p> | <p><b>2.</b> Se dificultó la construcción de la figura, puesto que como se dispuso uno de los lados obligaba a que la figura construida estaba rotada y reflejada, con lo que al poner el instrumento sobre la figura inicial y trasladarlo no satisfacía lo que observaban en la figura inicial.</p> <p>En la tarea de construcción del GP, presentaron la dificultad de que con la información obtenida no se podía concluir lo que con el instrumento habían constatado. En el G1 avanzaron en la construcción de un GP, con una THP que tenía un bache, y no lo habían identificado.</p> <p>La THP que se desarrolló fue orientada, una vez definida los estudiantes realizaron la construcción del GP. El G1 lo hizo en conjunto guiado por una de las estudiantes, no obstante su construcción se hizo de forma lineal sin que se cumpliera parte de las reglas de construcción de GP, presentando varios saltos y fallas en la sustitución de proposiciones, que hacen que la prueba no sea correcta en cuanto a lo deductivo</p> | <p><b>3</b> dibujaron cada uno de los triángulos utilizando los instrumentos (moldes de la figura) y determinaron que con cada instrumento se podía encontrar un camino para probar la proposición, esto con el G1, en el G3 señalaron solo 2, pese a que en la discusión refirieron que se podía con 3.</p> <p><b>4.</b> En G1 uno de los moldes que parecía un triángulo rectángulo, la estudiante lo asumió como proposición verdadera, no obstante, se indicó tener en cuenta las hipótesis. Después de que los estudiantes hicieron varios intentos, se explicó cómo se podría utilizar el instrumento para describir la THP. En la descripción de la THP del G1 tomaron en consideración una subconfiguración y terminaron utilizando otra.</p> <p>En el G1 refieren que no es fácil el paso al registro de la doble, sin embargo, dan cuenta de que su grafo estaba desordenado por lo que hizo que la tarea se dificultad.</p> <p>En el G3 un estudiante construyó un grafo en el que presentó algunos baches, en la revisión se hicieron las correcciones</p> |

Nota: GP, G1, G3, Grupo de estudiantes piloto, 1 y 3 respectivamente.

### Sobre la construcción de figuras.

En la tarea de construcción de figuras, tanto el instrumento como la figura no resultan ser informativos por si solos, adquieren información geométrica cuando se establece una relación directa entre ellos mediante la superposición o yuxtaposición del instrumento sobre la figura. El

tipo de información geométrica que se moviliza al construir es implícita, permitiendo a los estudiantes en las tareas de construcción de las dos primeras sesiones conseguir reproducciones congruentes de la figura, pero sin dar cuenta de este tipo de información que permite determinar la congruencia

Lo anterior conllevó a la pregunta, cómo hacer que los estudiantes identificaran información sobre la figura por medio de los instrumentos de construcción. La exigencia de una prueba de congruencia entre las figuras, por lo menos en la experimentación, llevó a que los estudiantes hicieran el esfuerzo para reconocer qué conocimiento geométrico movilizaron cuando hicieron la construcción de las figuras.

Una vez lograron los estudiantes obtener información sobre la figura surgió como interrogante, en qué podría favorecer esto a la construcción de una prueba. Inicialmente lo que los estudiantes lograron alcanzar con estas tareas, fue determinar hipótesis frente al problema de cómo determinar si los dos triángulos eran congruentes, que resultaría ser la conclusión, luego lo que encontraron es una proposición (tercer enunciado) que permite relacionar hipótesis y conclusión, lo que implica la obtención de una prueba mediante uno o dos pasos de deducción.

Como ejemplo, en la Figura 33 se logra identificar dos pasos deductivos, el primer paso relaciona la igualdad de los ángulos (información obtenida con el instrumento, hipótesis), la definición de congruencia de ángulos (tercer enunciado) y la congruencia de los dos ángulos (conclusión). En el segundo paso recicla la proposición sobre la congruencia de los ángulos y concluye que el triángulo es isósceles, el cual tendría como tercer enunciado el recíproco del teorema del triángulo isósceles, que no es mencionado.

Este tipo de tareas de construcción de figuras deja abierta la posibilidad, para un diseño en el que la figura a construir dé cuenta de pasos deductivos y cadenas de estos, con la

característica de que las hipótesis resulten como datos que se pueden obtener a partir de las restricciones que el instrumento impone sobre la figura, y que no necesariamente la conclusión corresponda a la congruencia de triángulos.

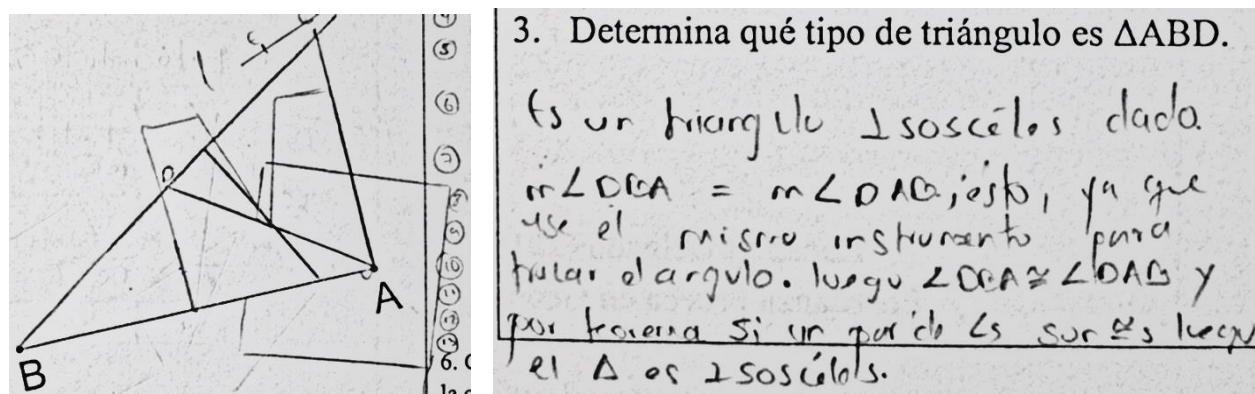


Figura 33. Descripción de la prueba realizada por un estudiante sobre el triángulo ABD, en la tarea de construcción de la sesión 2. Fuente: ejemplo de lo registrado por un estudiante en la ficha de trabajo, figura 66 (a) en Anexo 8.

Ampliando el uso de estas tareas se presentó el interrogante de si era posible favorecer el reconocimiento de subconfiguraciones relevantes para la prueba de una proposición y de serlo, cómo se podía establecer una tarea de construcción para lograrlo.

Los estudiantes hicieron las construcciones con instrumentos que resultan ser subconfiguraciones de la figura, sin embargo, no garantizó que los estudiantes las reconocieran para identificar una THP, solo un estudiante en la discusión relacionó la construcción de la figura de la sesión 1 con la subconfiguración que determina su THP.

Al desarrollar una lista de proposiciones implícito operaba una THP en los estudiantes, que no se tuvo presente en el transcurso de las dos primeras sesiones, presentaban su lista, y aun así no todos lograron construir la prueba de la proposición, lo que conllevó preguntarse sobre cómo se podía asociar la lista de proposiciones a la realización de una THP por medio de las

subconfiguraciones. En la figura 27 se muestra el caso de dos estudiantes que dispusieron en su lista, las proposiciones centrales que les permitiría llegar a la conclusión, y sin embargo no lograron avanzar o completar la construcción del GP.

En el registro de video para la sesión del grupo 1, no se observa una discusión de la lista de proposiciones requeridas ni sobre la THP. Este hecho motivó a resaltar en las sesiones de los grupos posteriores la discusión en grupo, puesto que con los grupos que lo hicieron se obtuvo un mejor resultado al establecer pasos deductivos en los GP construidos. También se destaca de este hecho la posibilidad que en los estudiantes no se tenga aún la habilidad, para el trabajo con la figura que permita reconocer una subconfiguración y una THP.

En la segunda tarea de construcción se tuvo presente que la construcción y proposición estuvieran relacionadas, pero el instrumento de construcción no se constituyó como una subconfiguración que fuera relevante para describir una THP, además la prueba exigía una construcción auxiliar que los estudiantes no lograron reconocer. Se logró por medio de las tareas auxiliares que los estudiantes determinaran información sobre la figura construida con el instrumento, un dato hacía referencia a una hipótesis y el otro a una conclusión. No obstante, para la prueba de esta proposición es relevante el uso de una red de rectas sobre la cual se pueda encontrar la subconfiguración, de lo contrario no sería posible describir una trayectoria sin que hayan baches.

En síntesis, para la construcción de la trayectoria se partió de la conclusión, identificar en la figura que subconfiguración podía dar cuenta de la congruencia o igualdad de los segmentos que se requería, luego buscar cuáles proposiciones debían cumplirse para poder probar que las dos subconfiguraciones eran congruentes, y seguir el proceso de partir de una conclusión y asociar un tercer enunciado a premisas que ya estuvieran en el problema.

En la tarea de la sesión 3 al igual que la de la sesión 1, se empleó como instrumento una subconfiguración. Lo que las diferenció es que en la tercera se logró que la proposición a probar estuviera relacionada con la construcción, además comprendía tareas auxiliares que aseguraron (tareas 2 y 3 en ficha 3, p. 50) o ayudaron a reconocer que el instrumento permite no sólo el trazado sino una subconfiguración, la cual se pudo determinar como relevante cuando se intentó identificar si podría considerarse para construir la prueba.

En la identificación de la subconfiguración como relevante, los estudiantes utilizaron las marcas que habían hecho en la figura inicial correspondientes a las hipótesis, las asociaron con la subconfiguración, luego identificaron información por medio de: 1) la aprehensión discursiva y, 2) la aprehensión operativa, sin una reorganización de la figura, reconocieron proposiciones en relación con: lado común, ángulo común, opuestos por el vértice. Y de la aprehensión discursiva derivaron proposiciones respecto a definiciones y teoremas.

Conforme iban encontrando proposiciones hacían nuevas marcas en la figura que las aseguraban (ver figura 35), el instrumento junto con la figura ya no necesariamente eran los que permitían reconocer información, sino a través de la subconfiguración y los resultados de las aprehensiones de las hipótesis marcadas inicialmente, hasta el punto en el que se lograba describir gran parte de una THP

Una vez considerada la subconfiguración y convencidos de que era una posible trayectoria de la prueba, los estudiantes procedieron a escribir su lista de proposiciones, incluso en el orden en el que podría decirse “aparecían” en la prueba. En el caso del Grupo 1 sólo especificaron los terceros enunciados, y en el Grupo 3 listaron todas las proposiciones a usar para la construcción del GP.

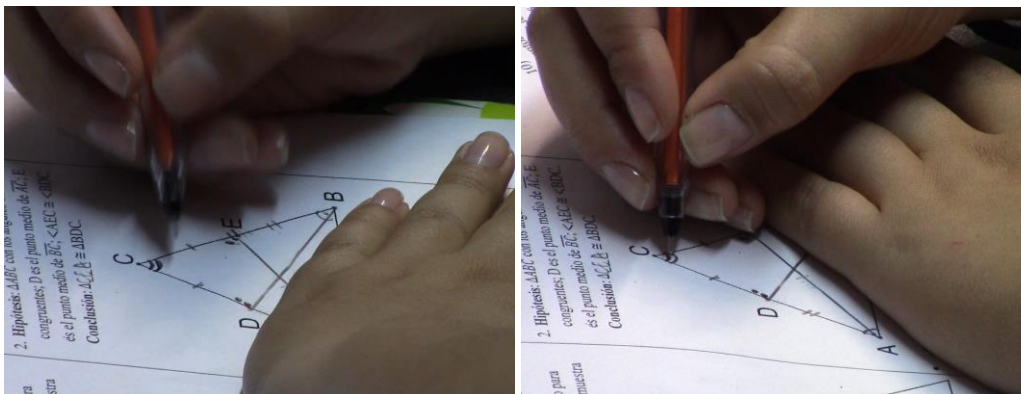


Figura 34. La identificación de una subconfiguración relevante para la construcción de una prueba. En el Anexo 2 se muestra las marcas sobre las figuras realizadas por los estudiantes.

En síntesis la evolución en las tareas de construcción y su importancia para la construcción de la prueba de una proposición, se pone en términos del descubrimiento de una subconfiguración relevante. En la tarea de construcción para la sesión 3 se buscó hacer explícitas las subconfiguraciones y que a partir de estas los estudiantes determinaran si se podían desarrollar THP, lo cual tuvo un buen resultado puesto que lograron una lista de proposiciones con buena parte de lo que se constituye la ruta de prueba, y además lograron que la construcción del GP diera cuenta de esto.

En relación con las submetas de las actividades que se organizan en la etapa de exploración, los estudiantes lograron identificar información en tanto, sirvieran como datos para pasar a la construcción del GP, incluso encontrando en las listas de proposiciones de los estudiantes, por ejemplo, versiones análogas al registro en doble columna (Ver tarea 5 en la figura 66 (a) y (b), Anexo 8). La pertinencia en la aplicación de un teorema en términos de que se cumpliera con las premisas o hipótesis para su uso, en las líneas 76 a 86 (segmento 3, en anexo 5) por ejemplo, la estudiante Lina (los nombres que en este trabajo se citan no

corresponden con los nombres propios de los estudiantes participantes) describe su THP y su compañera le hizo la corrección sobre las premisas para la aplicación del teorema ALA.

### Descripción de la trayectoria hipotética para la prueba y construcción de los GP en cada una de las sesiones

En este apartado se pretende poner en evidencia algunos aspectos que se reconocieron, a partir de los datos obtenidos con relación a la descripción de una THP y la construcción de un GP en cada una de las sesiones.

#### Primera sesión

En la primera sesión con el grupo 1 dos estudiantes describieron su THP, la primer descripción de la THP expuesta por la estudiante Lina se presenta en el segmento 1 del anexo 5, tiene las siguientes características: aplica un teorema incompleto (Teorema 51, en Anexo 3) para determinar la congruencia de un ángulo consigo mismo, y las condiciones del teorema que indica como 2 en su lista no se satisfacen (ver figura 36). Propuso la aplicación del teorema ALA, pero no satisface las condiciones para su aplicación, en consideración le faltó referir el otro ángulo utilizando el teorema que intentó referir en el ítem 2 de su lista de proposiciones.

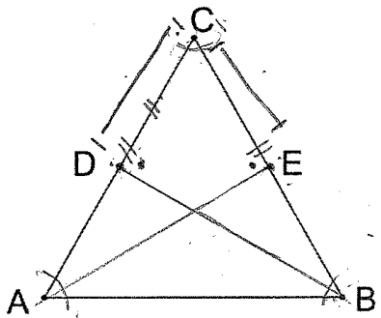
|                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</li> </ul> <p>3- Teo. adición de segmentos<br/> 4- Teo. A10<br/> 2- Teo. si dos <math>\angle</math> de la base son <math>\cong</math> el tercero es <math>\cong</math><br/> 1- Teo. si dos de los <math>\angle</math> de un <math>\Delta</math> son <math>\cong</math> los lados opuestos a ella son congruentes</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Figura 35. Lista de las proposiciones que reconoce la estudiante Lina para probar la congruencia de los triángulos  $\triangle AEC$  y  $\triangle BDC$ .

De la descripción de su THP pese al bache y el teorema que consideró aplicar, en la construcción del GP sólo dio cuenta de las hipótesis y los terceros enunciados, estableciendo relaciones entre ellos como se muestra en la figura 37, este resultado junto con el que se presenta en la figura motivó a resaltar el trabajo en colectivo para la discusión y construcción de los GP.

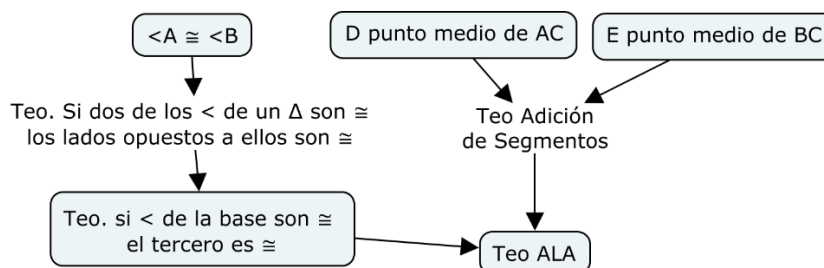


Figura 36. Grafo realizado por la estudiante Lina en el que relaciona terceros enunciados entre sí, y no consigue obtener pasos deductivos.

En el GP de la estudiante (figura 37), el ángulo que refirió en su trayectoria (líneas 1-3 del Segmento 1, Anexo 6) no lo presenta, al igual que las otras proposiciones que se desprenden de los teoremas. Con esto, la tarea introductoria que define las reglas de construcción de un GP, no se logra evidenciar su aplicación y tampoco lo que correspondería a un paso deductivo.

En contraste con el anterior caso, en el mismo grupo el resultado con la estudiante Andrea fue muy diferente, la descripción de su THP se constituye como una prueba de la proposición (Líneas 21 a 42 del Segmento 2, Anexo 6), obteniendo como resultado un GP que satisface las reglas de construcción, exceptuando el bache del paso deductivo en el que la flecha que sale de  $AC \cong BC$  llega directamente a la conclusión  $DC \cong CE$  y no al tercer enunciado “*Teo. Las mitades de segm  $\cong$  son  $\cong$* ” (Ver figura 38).

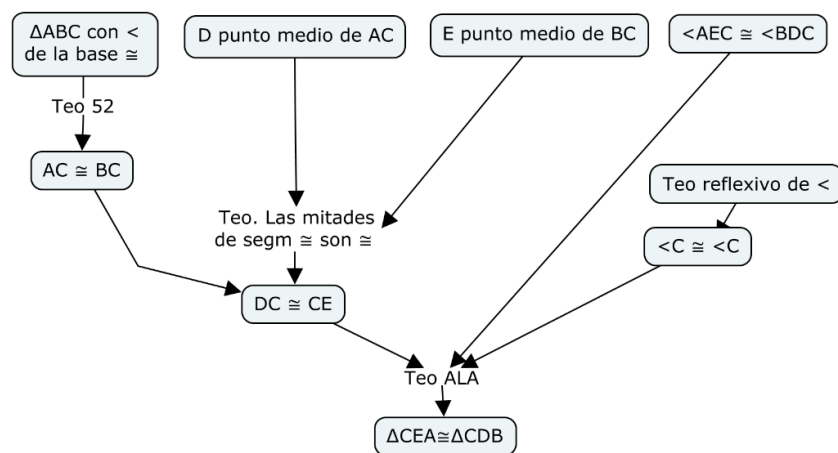


Figura 37. Grafo Proposicional de la estudiante Andrea para la Prueba de la Proposición 2.

La presentación de la THP de Lina a Andrea, tuvo como resultado que Andrea advirtiera a su compañera de las condiciones de aplicación del teorema ALA, (líneas 81 a 91 del Segmento 3, Anexo 6), aspecto que se considera importante en el sentido, que los estudiantes pueden refinar sus conocimientos geométricos, otros casos como este se logró evidenciar con los otros grupos, específicamente sobre las condiciones que se debían satisfacer para la aplicación de los teoremas.

La construcción de los GP de los estudiantes del segundo grupo, también toma en cuenta una lista de proposiciones organizadas en relación con la THP que encontraron, no obstante en los GP no se satisfacen las reglas de construcción, el estatus de cada hipótesis se pone al mismo nivel que otras proposiciones o incluso es inferior a otras proposiciones. En la figura se pueden observar las hipótesis resaltadas y cómo están dispuestas las otras proposiciones (ver figura 39).

Los estudiantes inicialmente no dieron cuenta de cómo se obtuvo la congruencia de los segmentos  $CE$  y  $CD$ . Al caer en cuenta de este hecho hicieron el paso deductivo que determina que  $AC$  y  $BC$  son congruentes, sin embargo, hay un bache porque no se desprende de forma

directa como lo presentan, no se da cuenta del teorema (tercer enunciado) del cual se desprende la congruencia de CE y CD.

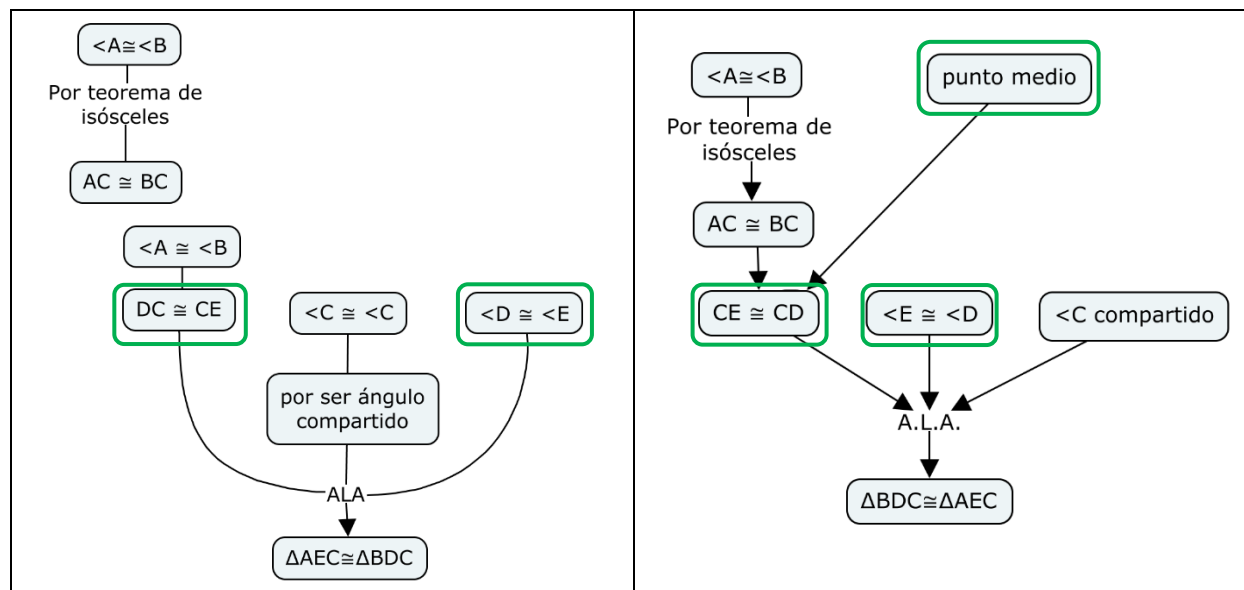


Figura 38. Dos grafos en los que el estatus de las hipótesis no se satisface según la regla de construcción de GP.

En la parte inferior del GP, se observa que los estudiantes logran un paso deductivo en el que se identifican las 3 condiciones para aplicar el teorema A.L.A, este paso deductivo es el que aparecería al final de la prueba, solo que no debería incluir el ángulo C compartido al mismo nivel que el de las hipótesis.

En la primera sesión con los estudiantes del tercer grupo se destaca la discusión entre ellos de cada una de las tareas, cuando se discutió la lista de proposiciones y algunas THP, esto se vio reflejado en la lista de proposiciones y pasos de prueba que quedaron registrados, en estos se encuentra similitud tanto en las listas como en el GP. (Ver figura 58 Anexo 5).

En la segunda sesión los estudiantes del primer grupo trabajaron en colectivo para realizar la construcción del GP. En la figura 40 se presenta una construcción realizada por una

estudiante del primer grupo, en la que se puede evidenciar no solo una trayectoria lineal de la prueba en la que los pasos sólo cuentan con una premisa resultado de reciclar la conclusión del paso deductivo anterior, sino que emerge una característica particular que empieza a ser notoria en cada uno de los registros de los estudiantes, que corresponde a una relación binaria entre el tercer enunciado y la conclusión.

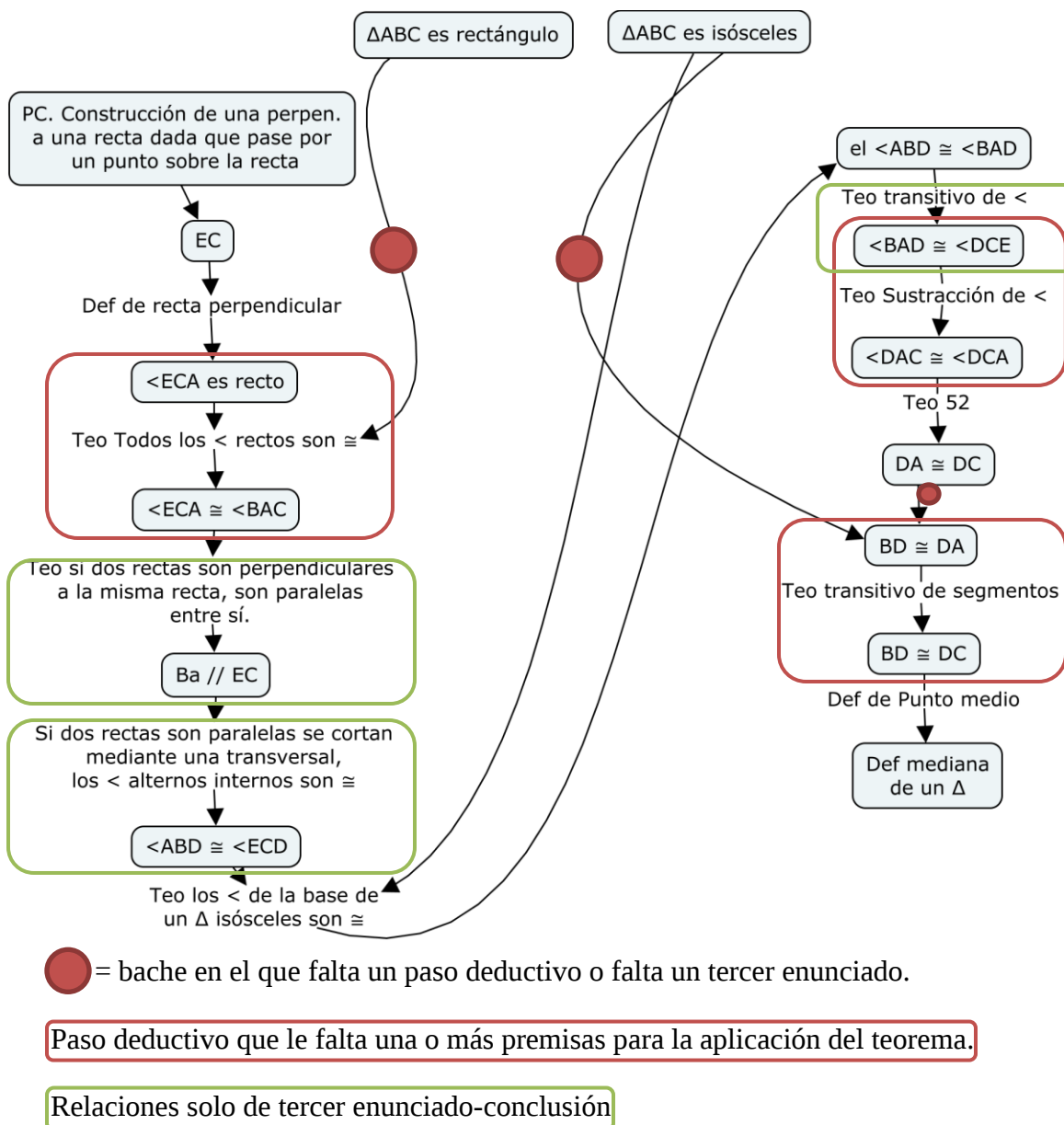


Figura 39. Algunos errores y baches en la construcción de un GP realizado por el grupo 1 en la segunda sesión.

En los registros de la segunda sesión del tercer grupo en lo que corresponde a las tareas introductorias de la primer ficha de trabajo, se hace igualmente notoria la relación tercer enunciado – conclusión, en el GP que los estudiantes debían construir se dejaron los espacios para ubicar las proposiciones y dos estudiantes ubicaron dos proposiciones por espacio como se muestra en la figura 41.

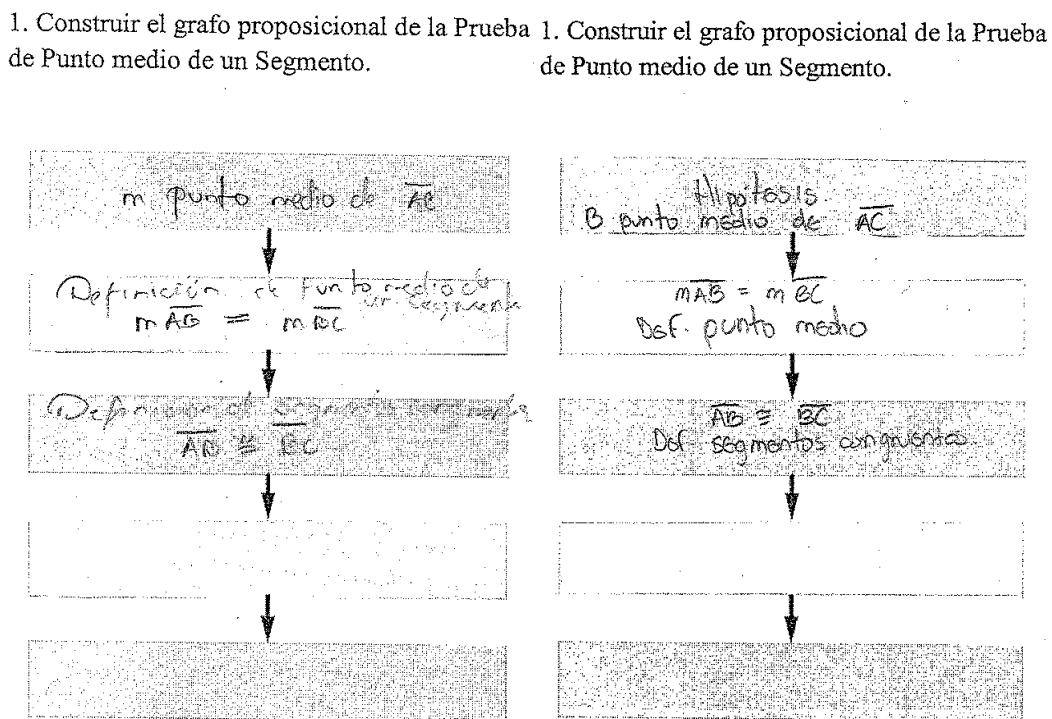


Figura 40. Los estudiantes establecen una relación binaria entre proposiciones, estas corresponden a tercer enunciado – conclusión. Tarea introductoria Ficha de Trabajo sesión 2. G3.

En la tarea 5 la lista de proposiciones realizada por estudiantes del tercer grupo, asocian a cada proposición vista como conclusión su correspondiente tercer enunciado, lo que les permitió describir no sólo la THP sino también una presentación análoga a la de un registro en doble columna de la prueba. (Ver Figura 66 (a) y (b), Anexo 8)

En la tercera sesión los estudiantes establecieron las relaciones y diferencias entre los registros de doble columna y GP. Se les preguntó si podían encontrar una relación entre lo que conocían como proposición-razón y plasmarlo en el GP, indicando que hicieran marcas en el GP.

En la figura 42 se puede observar que a las premisas y conclusiones se les asigna la letra P para referir que son proposiciones y la letra R se asigna a los terceros enunciados, lo cual podría considerar como aquello que favorece el paso del registro en el GP al registro en doble columna. No obstante, se podría establecer una relación más estrecha en la que se podría ver los elementos que constituyen un paso deductivo en el registro de doble columna, los cuales los estudiantes pareciera no alcanzaron a reconocer (Ver figura 64, Anexo 7).

Pese al dominante tipo de relación entre las proposiciones que los estudiantes reconocen, lograron en la última sesión obtener la construcción de pasos deductivos, incluso llegando a obtener la prueba de la proposición.

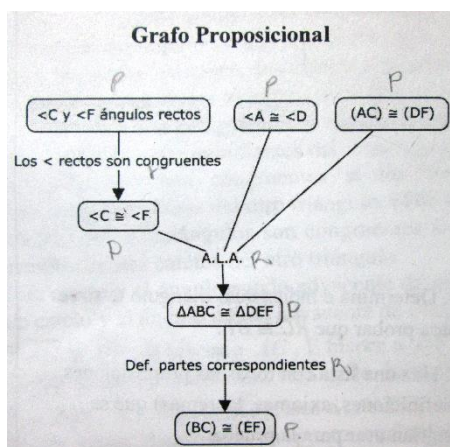


Figura 41. Marcas en el GP de las razones (R) y proposiciones (P), que asocia una estudiante en la tarea de encontrar diferencias y similitudes en los dos tipos de registros.

Los GP construidos en esta última sesión fueron tres, se hicieron correcciones en dos de ellos en cuanto a las premisas en unos pasos deductivos. (Ver Anexo 4 y 5)

Se reconoce que podría ser relevante para la actividad de los estudiantes en cuanto a la construcción de GP, también contar con la posibilidad de desarrollar tareas para revisar grafos contruidos y analizar la organización deductiva de los mismos, con la intencionalidad de verificar las reglas de construcción e identificar baches en las pruebas. Este aspecto sería de utilidad, porque a pesar de que reconocen una THP y en el registro logran llegar a la conclusión, es posible que se presenten baches que no logran identificar entre ellos, por ejemplo que se cumpla con las condiciones para la aplicación de un teorema.

Además de la relación proposición-razón que asocian los estudiantes a tercer enunciado-conclusión en un GP, no se tienen otros elementos que se puedan analizar y que ayuden a determinar el tipo de comprensión de los estudiantes sobre la prueba. Se considera que no se logra hacer explícita la comprensión de en qué consiste y cómo opera una prueba en términos de Duval, en tanto, faltó avanzar en la explicación y descripción de las pruebas en el registro de la lengua natural. Duval (2017) refiere que esto permite explicitar los componentes del sentido de una proposición (valores epistémicos y valor de verdad) y que en relación con el GP, permite descubrir el funcionamiento de un paso deducción e identificarlo como una forma de organización distinta a la de una argumentación, explicación o descripción.

### **Evolución de la Conjetura y THA**

La interpretación que se hizo de la propuesta de Duval en cuanto al desarrollo de las actividades organizadas en las 3 etapas, llevó a presentar de manera general lo que se consideró como conjetura del experimento, sin embargo el desarrollo de los análisis locales y el análisis retrospectivo, pone en evidencia elementos característicos que se pusieron en juego para el diseño y que a su vez, dan un sentido particular a la conjetura frente a las actividades que se organizaron en la primera y tercera etapa.

En lo que corresponde a la etapa de exploración, la conjetura se puede describir así:

Las tareas de construcción de figuras con instrumentos no estándar que permiten el trazado de una subconfiguración de la figura, favorecen en la identificación de subconfiguraciones relevantes y puede apoyar a la descripción de una THP, que puesta a discusión en grupo, conlleva a la obtención de datos pertinentes para la posterior tarea de construcción del GP.

En la construcción del GP y su explicación, se sostiene la posibilidad de que los estudiantes logren el paso a un registro en doble columna de la prueba, el cual no se constituye como un paso difícil de comprender y realizar. A esto se podría sumar que los estudiantes redacten la prueba en lengua natural con base en el GP que han elaborado, con lo cual, según Duval (2017), los estudiantes podrían descubrir el funcionamiento de un paso de deducción y el de la prueba.

La formulación de estas características particulares en la conjetura inicial constituye lo que se refiere al refinamiento de la conjetura, evolución que se podría evidenciar con base en la evolución de los diseños de cada una las tareas que se propusieron en este trabajo.

### **Recursos Pedagógicos**

Las características que el RP podría tomar para la Enseñanza de la Prueba en Geometría elemental, particularmente sobre la congruencia de triángulos, se podría poner en términos de la secuencia de tareas disponibles para lograr las actividades organizadas en las tres etapas: exploración, construcción de GP y descripción o explicación del GP propuestas por Duval.

Cada una de estas tareas se podrían tomar como un tipo de RP, en el sentido que éstas en el experimento de enseñanza fueron evolucionando en respuesta al desarrollo de las actividades de los estudiantes, sin embargo sobre el tipo de RP que se quiere mostrar es aquel en el que se

orquestan un conjunto de RP en los que se encuentran las tareas, teniendo como resultado material una Ficha de Trabajo del estudiante en la que se pone en juego la articulación de los diseños que el docente ha tenido posibilidad de orquestar, y que en la experimentación busca favorecer la actividad del estudiante.

La interacción del estudiante con el RP y entre estudiantes puede ser observada, con lo cual se puede hacer correcciones directamente sobre la marcha de la experimentación, y resulta significativo en cuanto al refinamiento del recurso. Así se toma como otra característica el tipo de participación que se tiene en la puesta en juego, en los estudiantes se busca el trabajo en colectivo y del docente se busca la menor participación posible, y solo la necesaria para intervenir en las discusiones de los estudiantes o a la reorientación en el desarrollo de las tareas.

El diseño de las tareas en el marco de las actividades organizadas en la etapa de exploración, dio cuenta en el análisis la posibilidad de desarrollar tareas que respondan a las submetas referidas en esta etapa que permiten al nivel del estudiante: 1) hacer explícita información de la figura mediante el uso de instrumentos no convencionales que permiten su reproducción, 2) reconocer subconfiguraciones en una figura, y 3) la determinación de una THP, que daría cuenta de una lista de proposiciones y los datos en términos de proposiciones para construir pasos deductivos. Al nivel del docente el interés se centraría en el diseño y refinamiento de este tipo de tareas para favorecer y potenciar la actividad del estudiante.

Sobre la tarea de construcción de GP, en el análisis local se determinó la posibilidad de refinar la forma como se introduce a los estudiantes la utilización de este tipo de registro, al punto de considerarla como un recurso del mismo tipo que las otras tareas, la búsqueda y diseño de tareas auxiliares que se podría proponer, puede contemplar aquellas en las que los estudiantes analicen este tipo de registros con base en las reglas de construcción de GP, y así mismo puedan

verificar los pasos deductivos que ellos mismos construyen en sus GP, pudiendo identificar saltos y baches en la Prueba, que en principio podrían no percibir.

En la etapa que corresponde a la explicación o descripción del GP por parte de los estudiantes, no se consideró la posibilidad de constituirse como RP del tipo que son las tareas, aunque de centrar el análisis en ésta, podría ser objeto de observación y análisis para establecer cómo evoluciona la construcción de pruebas de los estudiantes. Se puede tomar las consideraciones de Duval (2017) respecto a la redacción en lengua natural, en la que propone una rejilla de análisis para cualificar los registros de los estudiantes, con esto se obtendrían datos para determinar su evolución en términos, por ejemplo, de la construcción de pasos deductivos, reciclar la conclusión para un nuevo paso, establecer la conexión entre pasos deductivos, las condiciones de aplicación de los teoremas.

El tipo de prueba que se exigió a los estudiantes durante las sesiones buscaba no ser rígida, así los estudiantes podrían utilizar teoremas incluso sin haberlos probado, sin seguir la linealidad de la axiomática y las proposiciones como se presentan en la lista de teoremas (Anexo 3), puesto que el interés estaba centrado en la posibilidad de que los estudiantes construyeran pasos deductivos mediante el uso de GP como registro no discursivo de la Prueba.

La propuesta desarrollada favorece el uso de la prueba directa, no se puede extender a pruebas indirectas, reducción al absurdo o contra recíproca, pues Duval (2017) afirma que se requiere otro tipo de restricciones cognitivas sobre las que habría que trabajar. Sobre este tipo de pruebas se podría desarrollar una propuesta de trabajo, utilizando también el tipo de registro de GP, el paso al registro en lengua natural y el tipo de tareas sobre la figura, éste último que podría no ser necesario dependiendo del tipo de proposiciones a probar.

En síntesis, se considera como característica que todo aquello que se propone en términos de RP para el docente, puede ser objeto de estudio, observación y análisis. El carácter de que se pueda tomar como objeto de estudio depende del interés particular como investigador, quien en términos de un experimento de enseñanza es quien determina el conjunto de posibles variables a observar en el fenómeno de enseñanza, entre estas considerar las tareas o tipos de tareas como una variable que permite al estudiante el desarrollo de actividades que promueven el uso de la Prueba, también el tipo de intervención y el uso de instrumentos que cuidadosamente haya planeado y anticipado el docente de lo que podrían realizar los estudiantes.

Otro aspecto que se podría tener en cuenta es que los estudiantes participantes, eran grupos pequeños y entre ellos desarrollaban las actividades, resultando favorable como mínimo el trabajo con dos estudiantes, para favorecer la discusión de las tareas a desarrollar entre ellos, también se tiene presente que los estudiantes tenían en común que compartían un mismo curso de geometría al cual asistían.

En relación con el experimento de enseñanza, en las fases de análisis permitió descubrir una invariante característica de cómo los estudiantes conciben los pasos deductivos en una Prueba, como una relación binaria en el que sólo reconocen terceros enunciados y conclusiones, dejando implícito las premisas e hipótesis que se debe satisfacer para la aplicación de un teorema, un tercer enunciado. Posiblemente esto se debe al tipo de registro con el que los estudiantes se acostumbraron para el desarrollo de las pruebas, al respecto se podría considerar primero el trabajo con el registro de GP y luego pasar al registro o redacción en lengua natural,

El registro de doble columna al igual que el registro de GP, constituyen registros no discursivos de la Prueba, sin embargo, Duval (2017) afirma la necesidad de pasar al registro de la lengua natural, con el interés de hacer explícita en qué consisten los pasos de deducción y

cadenas de estos para conformar una prueba. Del registro del GP al registro de doble columna no se constituyen un paso difícil de realizar, podría interesar el estudio del paso de estos dos tipos de registros al de la lengua natural y contrastarlos.

En síntesis, la propuesta de caracterizar un diseño de RP para la Enseñanza de la Prueba en Geometría Elemental dirigido a estudiantes en formación inicial, permitió poner en juego diseños de tareas que buscaron movilizar los procesos cognitivos Construcción, Visualización y Razonamiento, y apoyado en la metodología de experimentos de enseñanza, permitió poner en evidencia una aproximación de cómo los estudiantes conciben el uso de la Prueba, también permitió el desarrollo de una posible forma en la que se puede hacer la transposición de la Prueba para ser enseñada, tema de mucha discusión y sobre el que Montoya (2014) en su investigación, afirma que se deja implícito en la educación superior y que a la escuela es llevado por lo estudiantes egresados sin tener una visión amplia, una reflexión y capacidades para el desarrollo de ambientes propicios para uso en el aula .

El diseño del RP se dispuso para un contexto de Laboratorio en el cual junto con el desarrollo de la experimentación, los estudiantes hicieron parte activa en la construcción de figuras y la construcción de pruebas, y que con el trabajo en colectivo permitió no solo el desarrollo de pruebas sino el refinamiento de sus conocimientos geométricos. Lo que podría constituirse como una aproximación a lo que refiere Gellert (2005), aprender matemáticas de manera similar a las que se consideraría sería deseable como práctica escolar, y que se podría seguir desarrollando para responder a la pregunta: ¿Cómo podemos diseñar oportunidades para que los estudiantes para maestros adquieran el conocimiento (habilidades, entendimientos y disposiciones) necesario para proporcionar una enseñanza efectiva sobre la prueba y la demostración? (Hanna y otros, 2012)

## Referencias

- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. Universidad de los Andes. Traducción de Pedro Gómez. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/675/>
- Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. En: *Bolema: Boletim de Educação Matemática*. v. 31, núm. 57, p. 497 – 516. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/316712135>
- Clements, D. y Sarama, J. (2009). Young Children and Mathematics Learning. En *Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach*. pp. 1-8. Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. En: American Educational Research Association. 32(1), pp. 9-13. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/3699928>
- Confrey y Lachance (2000). Experimentos de enseñanza transformadores y orientados a la conjetura. Kelly & Lesh (Eds.) *Hanbook of research Design in mathematics and science education*, cap 10, pp. 261 -235.
- Correa, M. (2017). Un experimento de enseñanza para la introducción al álgebra. Análisis del discurso para la comprensión de la construcción de significado de las expresiones algebraicas. (Tesis de Maestría), Universidad del Valle, Cali.
- Duval, R. (2001). *La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo*. Trad. Hernández, Víctor y Villalba, Martha. PMME-UNISON. Recuperado de <http://studylib.es/doc/7101593/la-geometr%C3%ADa-desde-un-punto-de-vista-cognitivo>
- Duval, R. (2010). Los cambios de mirada necesarios sobre las figuras. En: *Tecné, Episteme y Didaxis*. Trad. Acosta Gempeler, M. (2010). (27), 108-129. doi: 10.17227
- Duval, R. (2016). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En: *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas*

- seleccionadas*. Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. pp. 95-125.
- Duval, R. (2017). El Razonamiento. En *Semiosis y Pensamiento Humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Peter Lang S.A. Editions scientifiques européennes, 1995.
- Myriam Vega Restrepo (Trad). Universidad del Valle. pp. 229-329
- Garzón, D., Vega, M. (2011). Los recursos pedagógicos en la enseñanza de la Geometría: estudio de casos. (Trabajo no publicado)
- Garzón, D., Pabón, A., Vega, M. (2013). Recursos pedagógicos y gestión didáctica del profesor de matemáticas. En I CEMACYC. Santo Domingo, República Dominicana.
- Gellert, U. (2005). La formación docente entre lo teórico y lo práctico. En: Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica. Gómez I. y Planchart E. (Eds.). Capítulo 4, pp. 73 – 83. Universidad de Deusto Bilbao.
- Hanna, G., de Villiers M. (2012). Aspects of Proof in Mathematics Education. En Hanna, G., de Villiers M. (eds), *Proof and Proving in Mathematics Education*. The 19th ICMI Study, 1-10. doi: 10.1007/978-94-007-2129-6
- Hanna, G. y otros (2012). ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education: Discussion Document. En Hanna, G., de Villiers M. (eds), *Proof and Proving in Mathematics Education*. The 19th ICMI Study, 443 – 452. Doi: 10.1007/978-94-007-2129-6
- Hemmerling, E. (2002). *Geometría Elemental*. En José Perez (Trad.). Editorial Limusa. México.
- Ibargüen, Y. (2016). Diseño de un recurso pedagógico en una comunidad de práctica que integra un AGD para la enseñanza de la geometría. (Tesis de Maestría), Universidad del Valle, Cali. pp. 53-55. Recuperado de <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co>
- Lourido, D. y Melan, C. (2012). La enseñanza inicial de la demostración en geometría desde una perspectiva cognitiva: un manual para docentes en ejercicio. (Trabajo de grado para optar el título de Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y Licenciado en

- Matemáticas y Física), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co>
- Maschietto, M. y Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM Mathematics Education* (2010) 42, pp. 33–47.
- Maschietto M. (2015) Teachers, Students and Resources in Mathematics Laboratory. In: Cho S. (eds) Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. Springer, Cham. pp. 527-546.
- MEN (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, D.C.
- Moise, E., Downs, F. (1989). Congruencias, problemas suplementarios. En *Geometría Moderna*. Garcia, M. (Trad.), Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, México p. 148.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J., Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. En: *Enseñanza de las ciencias*. 29(1), pp. 075–088.
- Montoya, E. (2011). Los paradigmas geométricos en la formación inicial de profesores de Matemática. En: XIII Conferencia Interamericana De Educación Matemática. CIAEM. Recife, Brasil.
- Montoya, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), pp. 227-247.
- Morales, S. y Samper, C. (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea. En: *Revista Amazonia Investiga*. Vol. 4 Núm. 6: 55– 68. Enero-Junio 2015. Colombia.
- Pabón, Arce, Vega y Garzón (2011). El Laboratorio de Matemáticas: una estrategia de producción y uso de *recursos pedagógicos* en la clase de matemáticas. Trabajo presentado en XII CIAEM de, Recife –Brasil.

- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, O. (2007). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En: XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática, Toluca, Estado de México.
- Samper, C., Leguizamón, C., Camargo, L. y Donado, A. (2001). Hacia la construcción de un currículo para el área de geometría de la licenciatura en matemáticas. Recuperado de <https://www.researchgate.net>
- Samper, C., Camargo, L., y Leguizamón, C. (2003). Cuaderno No. 6 Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Grupo Editorial Gaia. pp. 25, 26. ASOCOLME, Bogotá, Colombia.
- Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. En Hanna, G., de Villiers M. (eds), *Proof and Proving in Mathematics Education*. The 19th ICMI Study, 391 – 420. Doi: 10.1007/978-94-007-2129-6
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Steffe, L., Thompson, P. (2000) Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. Kelly & Lesh (Eds.) *Handbook of research Design in mathematics and science education*, Cap. 11. pp. 267 -306
- Trouche, L. (2014). Instrumentation in Mathematics Education. En: *Encyclopedia of Mathematics Education*, S. Lerman (ed.), 301 – 313. doi: 10.1007/978-94-007-4978-8,

## Anexos

### Anexo 1. Pruebas en Registro de Doble Columna

#### Prueba de la proposición 1

Hipótesis: Los triángulos rectángulos ABC y DEF con  $\angle A \cong \angle D$ . catetos  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ,  $\angle C$  y  $\angle F$  son ángulos rectos. Conclusión:  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

| Proposiciones                                  | Razones                                   |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1. $\angle A \cong \angle D$ .                 | 1. Hipótesis.                             |
| 2. $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos. | 2. Hipótesis.                             |
| 3. $\angle C \cong \angle F$ .                 | 3. Los ángulos rectos son congruentes (2) |
| 4. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ .       | 4. Hipótesis.                             |
| 5. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .       | 5. A.L.A.                                 |

Figura 42. Registro en doble columna de la prueba de la **proposición 1**.

#### Prueba de la proposición 2

Hipótesis:  $\triangle ABC$  con  $\angle ABC \cong \angle BAC$ ; D es el punto medio de  $\overline{AC}$ ; E es el punto medio de  $\overline{BC}$ ;  $\angle AEC \cong \angle BDC$ . Conclusión:  $\triangle AEC \cong \triangle BDC$ .

| Proposiciones                                                                | Razones                                                |
|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| 1. $\angle AEC \cong \angle BDC$                                             | 1. Hipótesis                                           |
| 2. $\angle ABC \cong \angle BAC$                                             | 2. Hipótesis                                           |
| 3. D punto medio de $\overline{AC}$ ;                                        | 3. Hipótesis                                           |
| 4. E punto medio de $\overline{BC}$                                          | 4. Hipótesis                                           |
| 5. $\triangle ABC$ Isósceles                                                 | 5. Recíproco Teorema $\triangle$ Isósceles (2) [HADV3] |
| 6. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$                                       | 6. Def. $\triangle$ Isósceles (5)                      |
| 7. $m\overline{CD} = m\overline{DA}$ ; $m\overline{CE} = m\overline{EB}$     | 7. Def. Punto medio ( 3; 4)                            |
| 8. $\overline{CE} \cong \overline{EB}$ ; $\overline{CD} \cong \overline{DA}$ | 8. Def. $\cong$ de segmentos (6)                       |
| 9. $\overline{CE} \cong \overline{CD}$                                       | 9. Teorema sustracción de segmentos (6, 8)             |
| 10. $\angle C \cong \angle C$                                                | 10. Teorema reflexivo de $\angle$                      |
| 11. $\triangle AEC \cong \triangle BDC$                                      | 11. T. L.A.L. (9, 10, 6)                               |

Figura 43. Registro en doble columna de la prueba de la **proposición 2**.

Otra Prueba sin utilizar el recíproco del teorema del triángulo isósceles.

| Proposiciones                                                                  | Razones                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1. $\angle AEC \cong \angle BDC$                                               | 1. Hipótesis                                                 |
| 2. $\angle ABC \cong \angle BAC$                                               | 2. Hipótesis                                                 |
| 3. D punto medio de $\overline{AC}$ ;                                          | 3. Hipótesis                                                 |
| 4. E punto medio de $\overline{BC}$                                            | 4. Hipótesis                                                 |
| 5. $\angle AEC$ y $\angle AEB$ ; $\angle BDC$ y $\angle BDA$<br>suplementarios | 5. Def. $\angle$ suplementarios                              |
| 6. $\angle AEB \cong \angle BDA$                                               | 6. T. Suplementos de $\angle \cong$ 's son $\cong$ 's (1, 5) |
| 7. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$                                         | 7. T. Reflexivo de segmentos                                 |
| 8. $\triangle AEB \cong \triangle BDA$                                         | 8. T. L.A.A.[HADV4] (7, 2, 6)                                |
| 9. $\overline{DA} \cong \overline{EB}$                                         | 9. Def. partes correspondientes de $\triangle \cong$ 's (8)  |
| 10. $\overline{DA} \cong \overline{DC}$ ; $\overline{EB} \cong \overline{EC}$  | 10. Punto medio[HADV5] (3, 4)                                |
| 11. $\overline{DC} \cong \overline{CE}$                                        | 11. T. transitivo de segmentos (9, 10)                       |
| 12. $\angle C \cong \angle C$                                                  | 12. Teorema reflexivo de $\angle$                            |
| 13. $\triangle AEC \cong \triangle BDC$                                        | 13. A.L.A (13, 14, 2)                                        |

Figura 44. Registro en doble columna de la prueba de la proposición 2.

### Prueba de la proposición 4

Hipótesis: AD mediana de ABC; ABC triángulo rectángulo, recto en CAB. Conclusión:  
el triángulo ABD es isósceles.

| Proposiciones                                                                            | Razones                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\triangle ABC$ con $\angle CAB$ recto;<br>$\overline{AD}$ mediana de $\triangle ABC$ | 1. Hipótesis                                                                    |
| 2. $k$ perpendicular a $\overline{AB}$ en B                                              | 2. Construcción de recta perpendicular                                          |
| 3. Prolongar AD                                                                          | 3. Postulado de la recta                                                        |
| 4. Trazar H, intersección de $k$ y AD                                                    | 4. postulado, dos rectas se intersectan a lo más en un punto                    |
| 5. $\overline{CA}$ perpendicular a $\overline{AB}$                                       | 5. Def. recta perpendicular (1)                                                 |
| 6. $\overline{HB} \parallel \overline{CA}$                                               | 6. T. dos rectas perpendiculares a una tercera son $\parallel$ entre sí. (2, 5) |
| 7. $\angle C$ y $\angle B$ alternos internos                                             | 7. Def. Ángulos alternos internos entre $\parallel$ .                           |

|                                                 |                                                               |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 8. $\angle C \cong \angle B$                    | 8. T. ángulos alternos internos entre // son $\cong$ (7)      |
| 9. $\angle ADC$ y $\angle BDH$ opuestos vértice | 9. Def. ángulos opuestos por el vértice                       |
| 10. $\angle ADC \cong \angle BDH$               | 10. Ángulos opuestos por el vértice son $\cong$ (9)           |
| 11. D punto medio de $\overline{CB}$            | 11. Def. mediana (1)                                          |
| 12. $\overline{CD} \cong \overline{DB}$         | 12. Segmentos de igual medida son congruentes.                |
| 13. $\triangle CDA \cong \triangle BDH$         | 13. A.L.A. (10, 12, 8)                                        |
| 14. $\overline{CA} \cong \overline{HB}$         | 14. Def. partes correspondientes de $\triangle \cong$ 's (13) |
| 15. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$         | 15. T. reflexivo de segmentos                                 |
| 16. $\angle HBA$ recto                          | 16. Def. recta perpendicular (2)                              |
| 17. $\angle HBA \cong \angle CAB$               | 17. Ángulos rectos son congruentes.                           |
| 18. $\triangle CAB \cong \triangle HBA$         | 18. L.A.L. (14, 15, 17)                                       |
| 19. $\angle DAB \cong \angle DBA$               | 19. Def. partes correspondientes de $\triangle \cong$ 's (18) |
| 20. $\triangle ADB$ isósceles                   | 20. T. Recíproco de $\triangle$ isósceles                     |

Figura 45. Registro en doble columna de la prueba de la proposición 4.

### Prueba de la proposición 5

Hipótesis: El triángulo rectángulo ABC con  $\angle ACB$  recto; M, R, S son los puntos medios de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ .

Conclusión:  $\overline{MC} \cong \overline{RS}$

| Proposiciones                                                                        | Razones                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. $\triangle ABC$ con $\angle ACB$ recto;                                           | 1. Hipótesis                                    |
| 2. M, R, S puntos medios de $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$      | 2. Hipótesis                                    |
| 3. $m\overline{BR} = m\overline{RC}$ ; $m\overline{AS} = m\overline{SC}$             | 3. Def. punto medio (2)                         |
| 4. $\overline{BR} \cong \overline{RC}$ ; $\overline{AS} \cong \overline{SC}$         | 4. T. $\cong$ segmentos (3)                     |
| 5. Trazar $\overline{MS}$ ; Trazar $\overline{MR}$                                   | 5. Postulado de la Recta                        |
| 6. $\overline{MR} \cong \overline{SC}$ ; $\overline{MS} \cong \overline{RC}$         | 6. T. de la base media de un $\triangle$ (5, 2) |
| 7. $\overline{MR} \parallel \overline{SC}$ ; $\overline{MS} \parallel \overline{RC}$ | 7. T. de la base media de un $\triangle$ (5, 2) |
| 8. MRCS paralelogramo                                                                | 8. Def. Paralelogramo (6, 7)                    |
| 9. MRCS Rectángulo                                                                   | 9. Def Rectángulo (7, 1)                        |
| 10. $\overline{MC} \cong \overline{RS}$                                              | 10. T. Diagonales de un rectángulo son $\cong$  |

Figura 46. Registro en doble columna de la prueba de la proposición 5.

| Proposiciones                                                                                                              | Razones                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 1. $\triangle ABC$ con $\angle ACB$ recto;<br>M, R, S puntos medios de $\overline{AB}$ , $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ | 1. Hipótesis                                              |
| 2. $\overline{CM}$ es una mediana                                                                                          | 2. Def. mediana de un $\triangle$ (1)                     |
| 3. $\triangle CMB$ isósceles                                                                                               | 3. T. anterior de mediana en $\triangle$ rectángulo       |
| 4. $\overline{CM} \cong \overline{MB}$                                                                                     | 4. Def. $\triangle$ isósceles                             |
| 5. SR mitad de $m\overline{AM}$                                                                                            | 5. T. sobre segmento que une puntos medios de $\triangle$ |
| 6. $\overline{MB} \cong \overline{SR}$                                                                                     | 6. Def. $\cong$ de segmentos                              |
| 7. $\overline{CM} \cong \overline{SR}$                                                                                     | 7. T. transitivo de segmentos                             |

Figura 47. Registro en doble columna de la prueba de la proposición 5.

## Anexo 2. Ejemplos de marcas sobre las figuras que aseguran las hipótesis

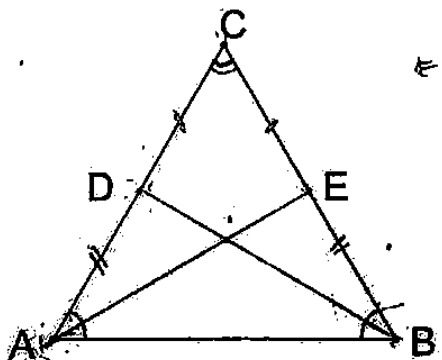
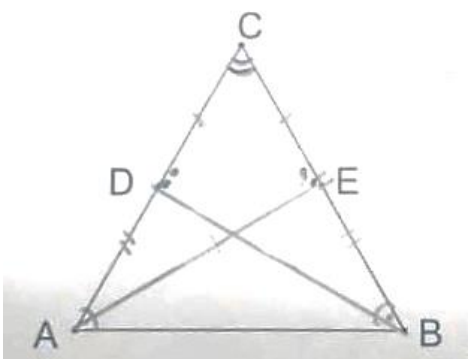
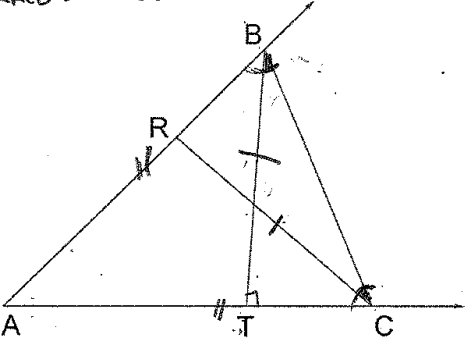
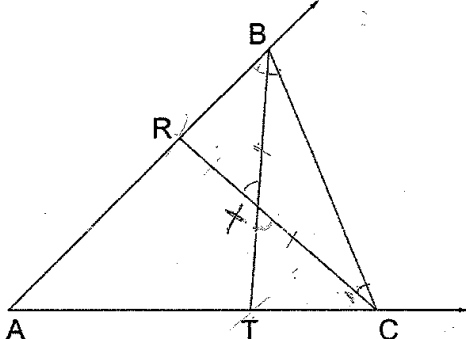
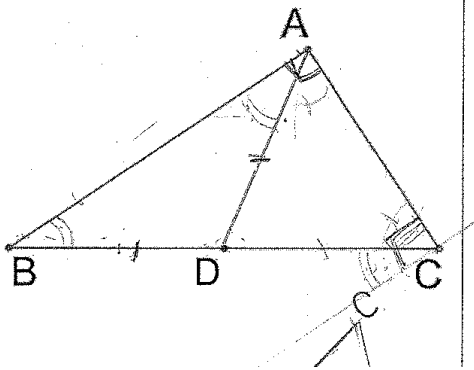
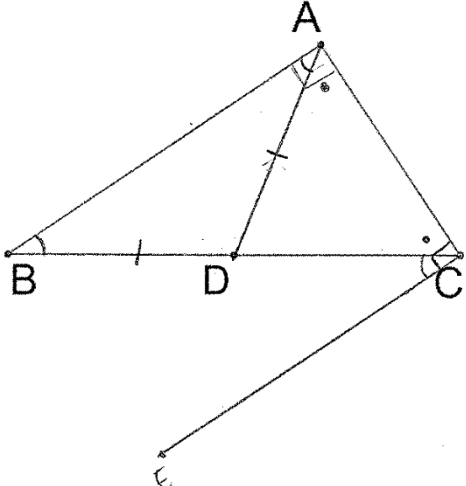
| Marcas que asocian las hipótesis de la proposición 4 sobre las figuras en la sesión 1                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Conclusión:</b> <math>\triangle AEC \cong \triangle BDC</math>.</p>                                                                                                                                                                                | <p><b>Conclusión:</b> <math>\triangle AEC \cong \triangle BDC</math>.</p>                                                                                                                                  |
| Marcas que asocian las hipótesis de la proposición 4 sobre las figuras en la sesión 2                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>Dado el triángulo <math>\triangle ABC</math> con <math>\overline{AB} \cong \overline{AC}</math> y<br/> <math>\angle AEC \cong \angle BDC</math>, ¿<math>\overline{RC} \cong \overline{BT}</math>?<br/> <math>\angle RCB \cong \angle TBC</math></p>  | <p>Dado el triángulo <math>\triangle ABC</math> con <math>\overline{AB} \cong \overline{AC}</math> y<br/> <math>\angle RCB \cong \angle TBC</math>, ¿<math>\overline{RC} \cong \overline{BT}</math>?</p>  |
| Marcas que asocian las hipótesis de la proposición 6 sobre las figuras en la sesión 3                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                          |

Figura 48. Marcas sobre las figuras, anclaje discursivo sobre el anclaje figural.

### Anexo 3. Lista de Teoremas utilizada por los estudiantes en su curso de Geometría y durante las sesiones.

#### Teoremas (Teo.)

- 1) Todo segmento es congruente con sí mismo.  $\overline{AB} \cong \overline{AB}$  (Teo. reflexivo de segmentos)
- 2) Si  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ , entonces  $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ . (Teo. simétrico de segmentos)
- 3) Si  $\overline{AB} \cong \overline{CD}$  y  $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ , entonces  $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ . (Teo. transitivo de segmentos)
- 4) Todo ángulo es congruente con sí mismo.  $\angle A \cong \angle A$  (Teo. reflexivo de ángulos)
- 5) Si  $\angle A \cong \angle B$ , entonces  $\angle B \cong \angle A$ . (Teo. simétrico de ángulos)
- 6) Si  $\angle A \cong \angle B$  y  $\angle B \cong \angle C$ , entonces  $\angle A \cong \angle C$ . (Teo. transitivo de ángulos)
- 7) Si B está entre A y C, E está entre D y F, y si  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$  y  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ , entonces  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ . (Teo. de la adición de segmentos)
- 8) Si B está entre A y C, E está entre D y F, y si  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ , y  $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ , entonces  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$  (Teo. de la sustracción de segmentos)
- 9) Si D está en el interior de  $\angle ABC$ , P está en el interior de  $\angle RST$ ,  $\angle ABD \cong \angle RSP$  y  $\angle DBC \cong \angle PST$ , entonces  $\angle ABC \cong \angle RST$  (Teo. de la adición de ángulos).
- 10) Si D está en el interior de  $\angle ABC$ , P está en el interior de  $\angle RST$ ,  $\angle ABC \cong \angle RST$  y  $\angle ABD \cong \angle RSP$ , entonces  $\angle DBC \cong \angle PST$  (Teo. de la sustracción de ángulos).
- 11) Todos los ángulos rectos son congruentes.
- 12) Todos los ángulos de lados colineales son congruentes
- 13) Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.
- 14) Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
- 15) Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.
- 16) Si dos ángulos forman par lineal y uno de ellos es recto, entonces el otro es también recto.
- 17) Si dos ángulos forman par lineal y son congruentes, entonces ambos son ángulos rectos.
- 18) Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
- 19) Si dos rectas distintas en un plano se intersectan, entonces su intersección es cuando más un punto.
- 20) Las rectas perpendiculares forman cuatro ángulos rectos.
- 21) La bisectriz del ángulo vértice de un triángulo isósceles, lo divide en dos triángulos congruentes.
- 22) En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los dos lados congruentes, son congruentes (los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes)
- 23) Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos y el lado incluido, congruentes a dos ángulos y el lado incluido correspondientes del otro triángulo. (Teo. Congruencia de triángulos ALA)
- 24) Dos triángulos son congruentes si los tres lados de uno de ellos son congruentes a los correspondientes lados del otro triángulo. (Teo. Congruencia de triángulos LLL)
- 25) Dos triángulos rectángulos son congruentes si los dos catetos de uno de ellos son congruentes a los correspondientes catetos del otro triángulo.
- 26) Si un cateto y el ángulo agudo adyacente de un triángulo rectángulo son respectivamente congruentes a un cateto y el ángulo agudo adyacente de otro, los triángulos son congruentes.
- 27) Si  $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ , B biseca a  $\overline{AC}$ , E biseca a  $\overline{DF}$ , entonces  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ .
- 28) \*Construcción de la bisectriz un ángulo dado. PC (Problema de construcción)
- 29) Si  $\angle ABC \cong \angle RST$ ,  $\overline{BD}$  biseca a  $\angle ABC$ ,  $\overline{SP}$  biseca a  $\angle RST$ , entonces  $\angle ABD \cong \angle RSP$
- 30) En un plano dado, por un punto cualquiera de una recta puede pasar una y sólo una, recta perpendicular a la recta dada.
- 31) Por un punto externo dado pasa una y solo una perpendicular a una recta dada.
- 32) \*Construcción de una perpendicular a una recta dada que pase por un punto sobre la recta. (PC)
- 33) \*Construcción de una recta perpendicular a una recta dada desde un punto que no esté sobre la recta. (PC)

- 34) \*Construcción del punto medio de un segmento dado. (PC)
- 35) \*Construcción de la mediatriz de un segmento dado. (PC)
- 36) Si dos rectas en un plano son perpendiculares a la misma recta, son paralelas entre sí.
- 37) \*Construcción de la recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ella. (PC)
- 38) Dos rectas paralelas a la misma recta son paralelas entre sí.
- 39) Si  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  y  $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ , entonces  $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ . (teorema transitivo de rectas paralelas)
- 40) En un plano que contiene dos rectas paralelas, si una recta es perpendicular a una de las dos paralelas, también es perpendicular a la otra.
- 41) La medida de un ángulo externo de un triángulo es mayor que la medida de cualquiera de los dos ángulos interiores no adyacentes.
- 42) Si dos rectas forman ángulos alternos internos congruentes cuando son cortadas por una transversal, son paralelas.
- 43) Si dos rectas se cortan mediante una transversal de tal manera que formen una pareja de ángulos correspondientes congruentes, las rectas son paralelas.
- 44) Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes.
- 45) Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos correspondientes son congruentes.
- 46) Si dos rectas se cortan mediante una transversal de tal manera que los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces son paralelas.
- 47) Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios.
- 48) Si dos rectas se cortan mediante una transversal de tal manera que formen una pareja de ángulos alternos externos congruentes, las rectas son paralelas.
- 49) Si dos rectas paralelas se cortan mediante una transversal, los ángulos alternos externos son congruentes.
- 50) La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ .
- 51) Si dos de los ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a dos de los ángulos de otro triángulo, los terceros ángulos son congruentes.
- 52) Si dos de los ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a ellos son congruentes, es decir, el triángulo es isósceles.
- 53) \*Construcción de un triángulo equilátero sobre un segmento dado. (PC)
- 54) Un triángulo equilátero también es equiángulo.
- 55) Un triángulo equiángulo también es equilátero.
- 56) \*Construcción de un cuadrado sobre un segmento dado. (PC)
- 57) Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los ángulos agudos de uno de ellos son congruentes a sus correspondientes en el otro triángulo.
- 58) Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y uno de los catetos de uno de ellos son congruentes a sus correspondientes en el otro triángulo.
- 59) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
- 60) La medida de uno de los ángulos externos de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes a él.
- 61) Todo punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos del segmento.
- 62) Todo punto que equidista de los dos extremos de un segmento, está sobre la mediatriz de dicho segmento.
- 63) En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo formado por los lados congruentes es perpendicular al tercer lado en su punto medio, es decir, es una mediatriz.

#### Anexo 4. Versión digital de los GP realizados por los estudiantes en las tres sesiones.

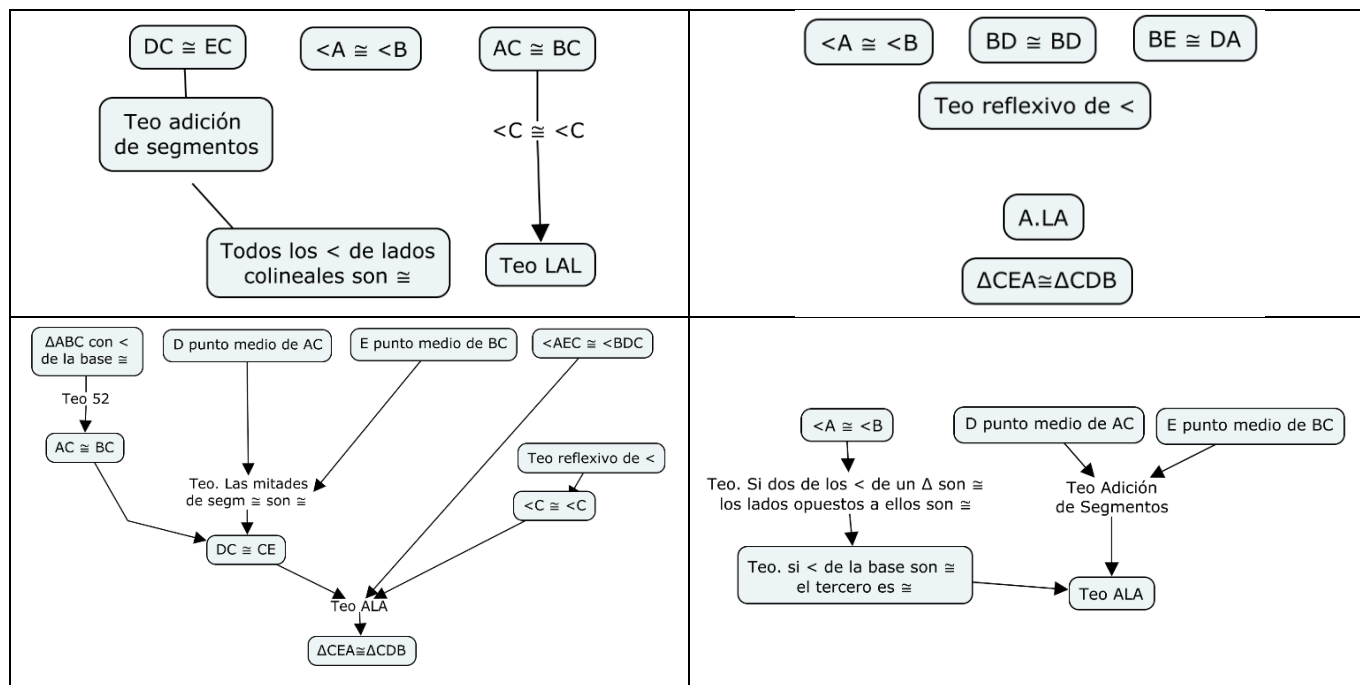


Figura 49. Versión digital de los Grafos Proposicionales construidos por los Estudiantes del Grupo 1, Sesión 1.

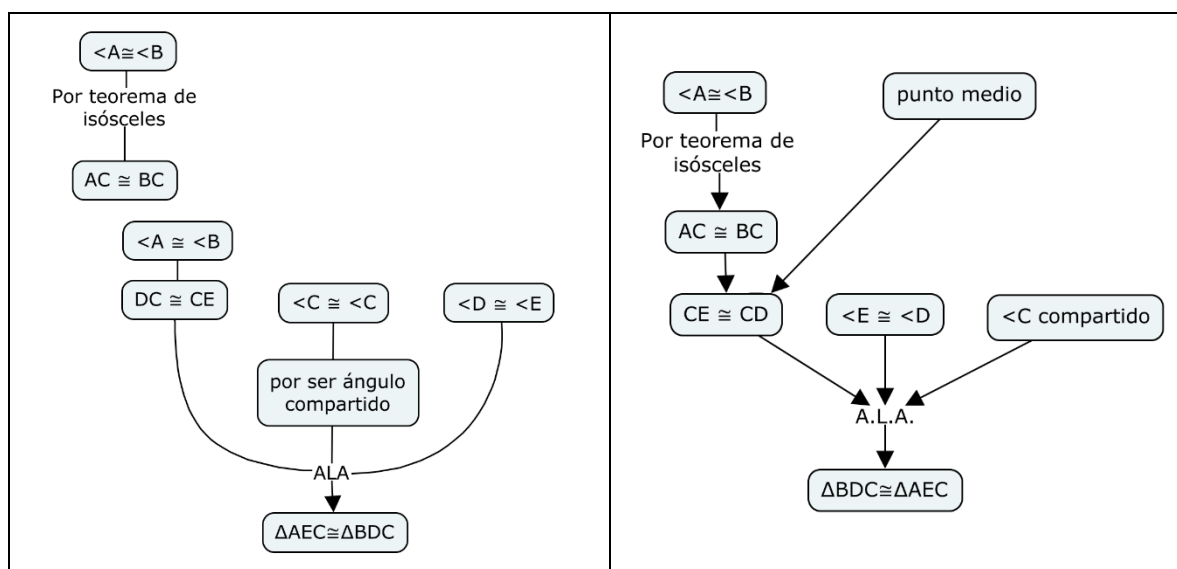


Figura 50. Versión digital de los Grafos Proposicionales construidos por los Estudiantes del Grupo 2, Sesión 1.

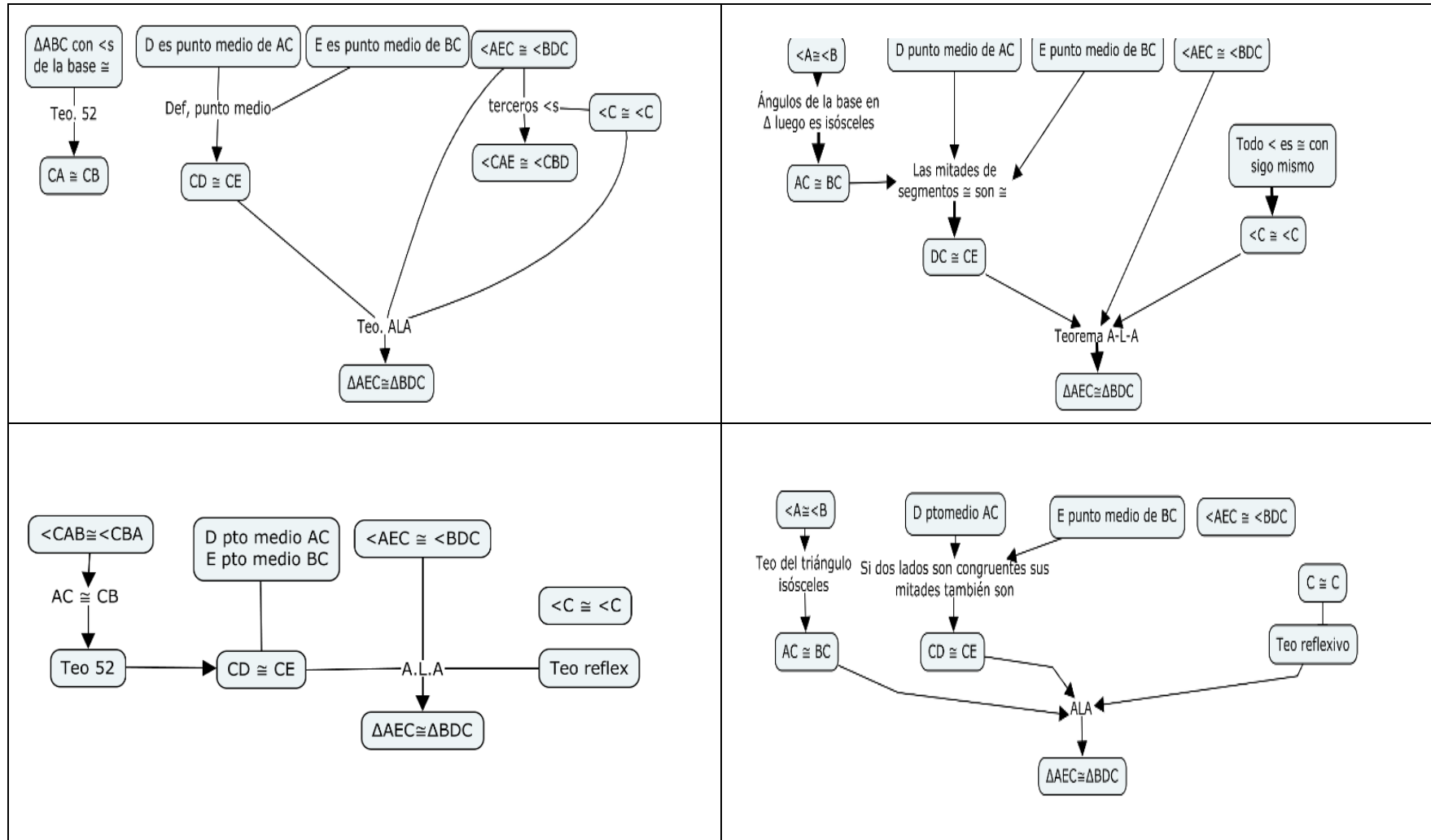


Figura 51. Versión digital de los Grafos Proposicionales construidos por los estudiantes del Grupo 3, Sesión 1.

## Prueba de la proposición en la ficha 2

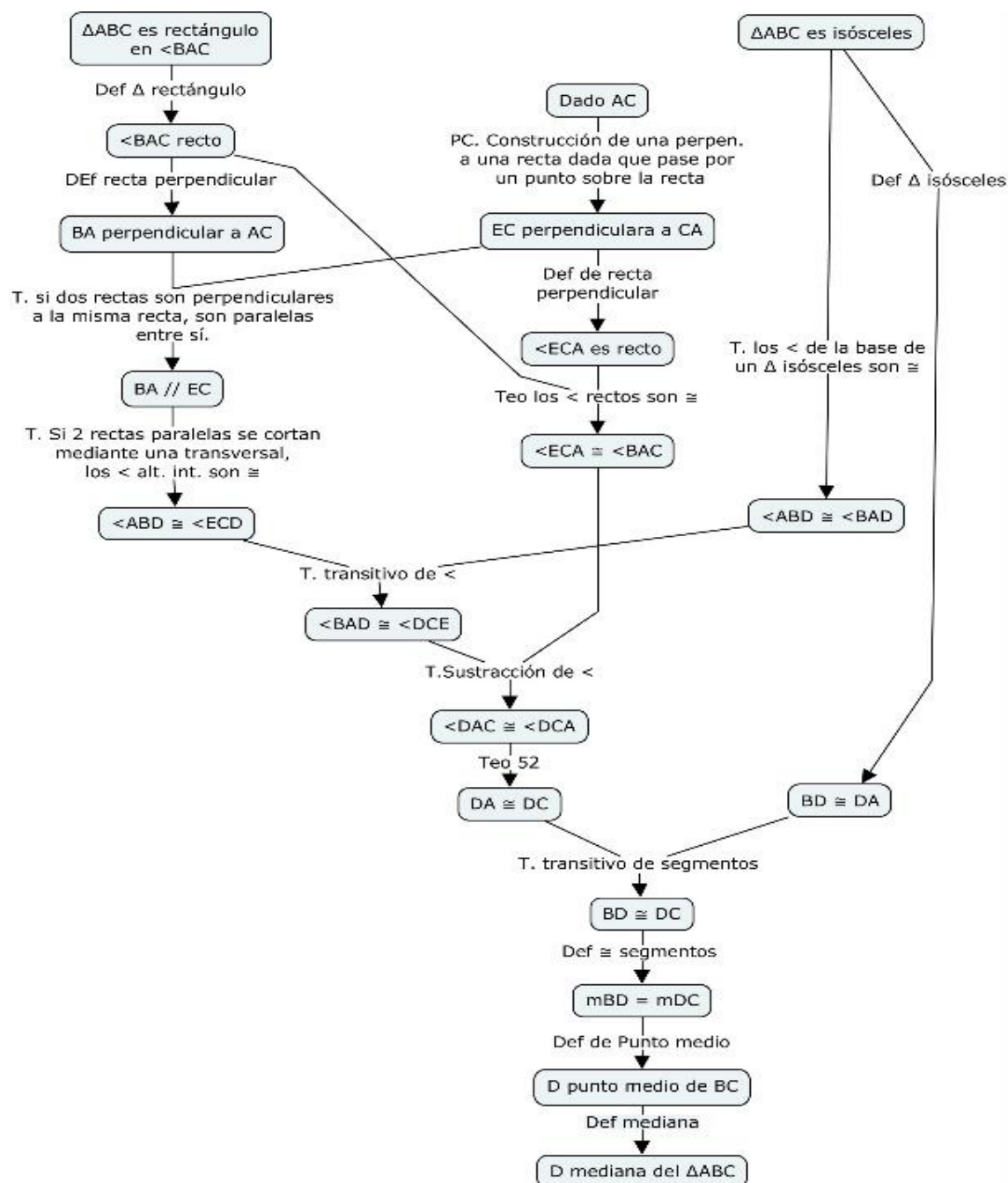


Figura 52. Grafo Proposicional de la Prueba de la Proposición en la Ficha de Trabajo del estudiante para la sesión 2.

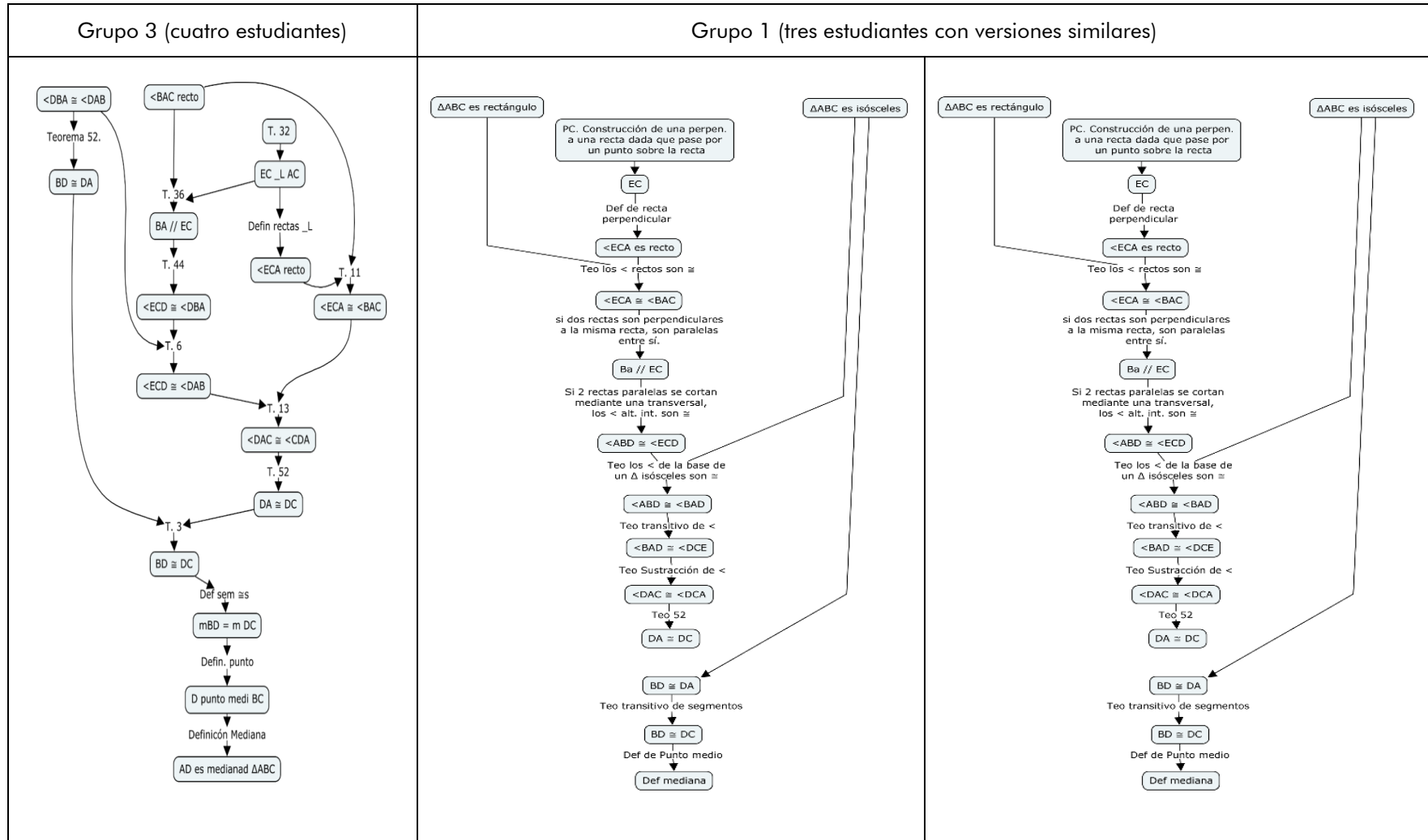


Figura 53. Versión digital de los Grafos Proposicionales construidos por los estudiantes del Grupo 1 y Grupo 3, Sesión 2.

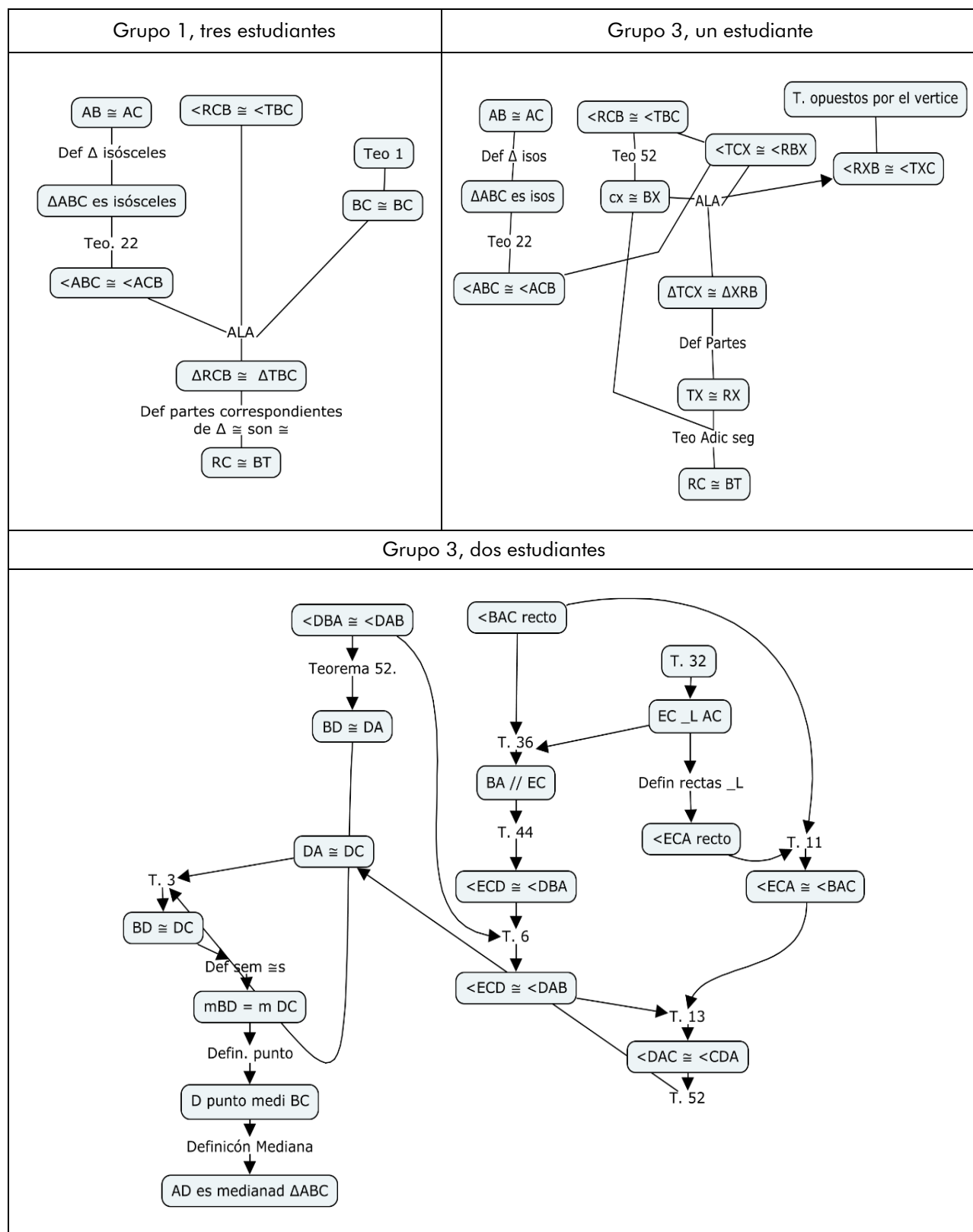


Figura 54. Versión digital de los Grafos Proposicionales construidos por los estudiantes del Grupo 1 y 3, Sesión 3.



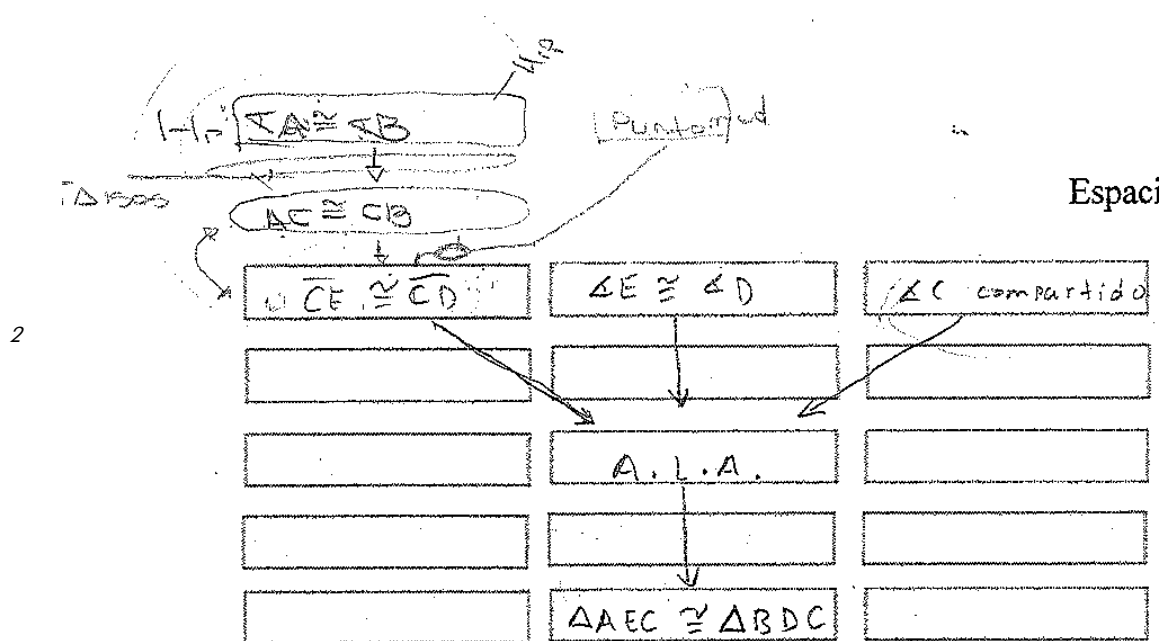
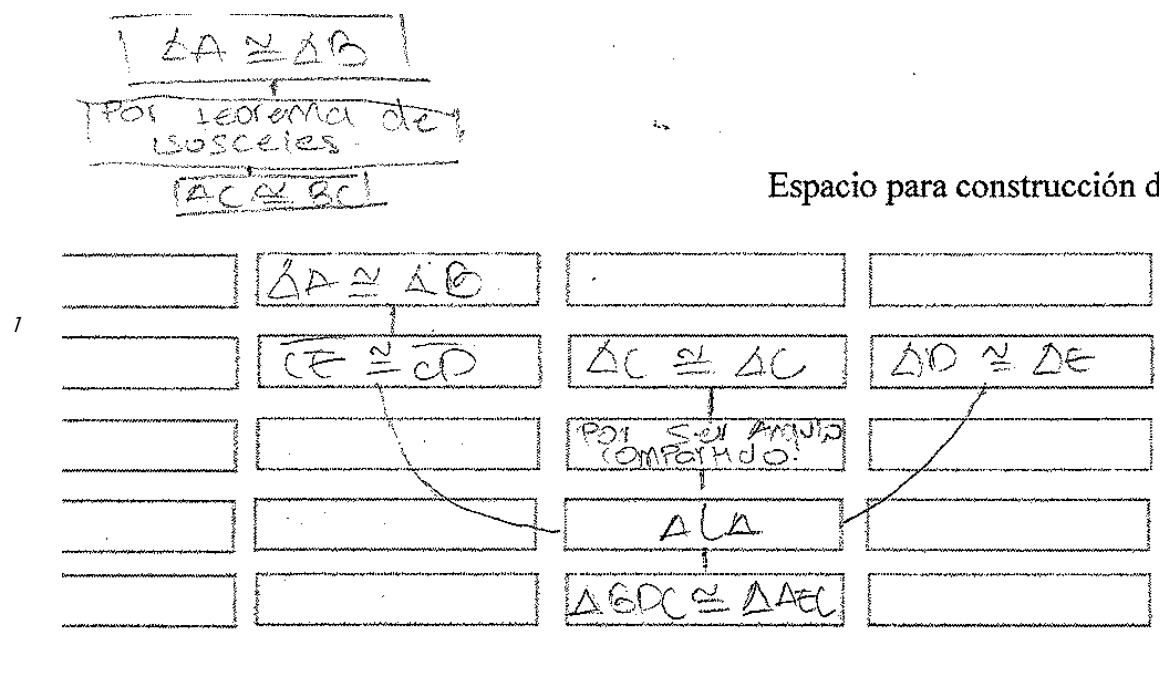


Figura 56. Grafos Proposicionales construidos por los estudiantes del Grupo 2, Sesión 1.

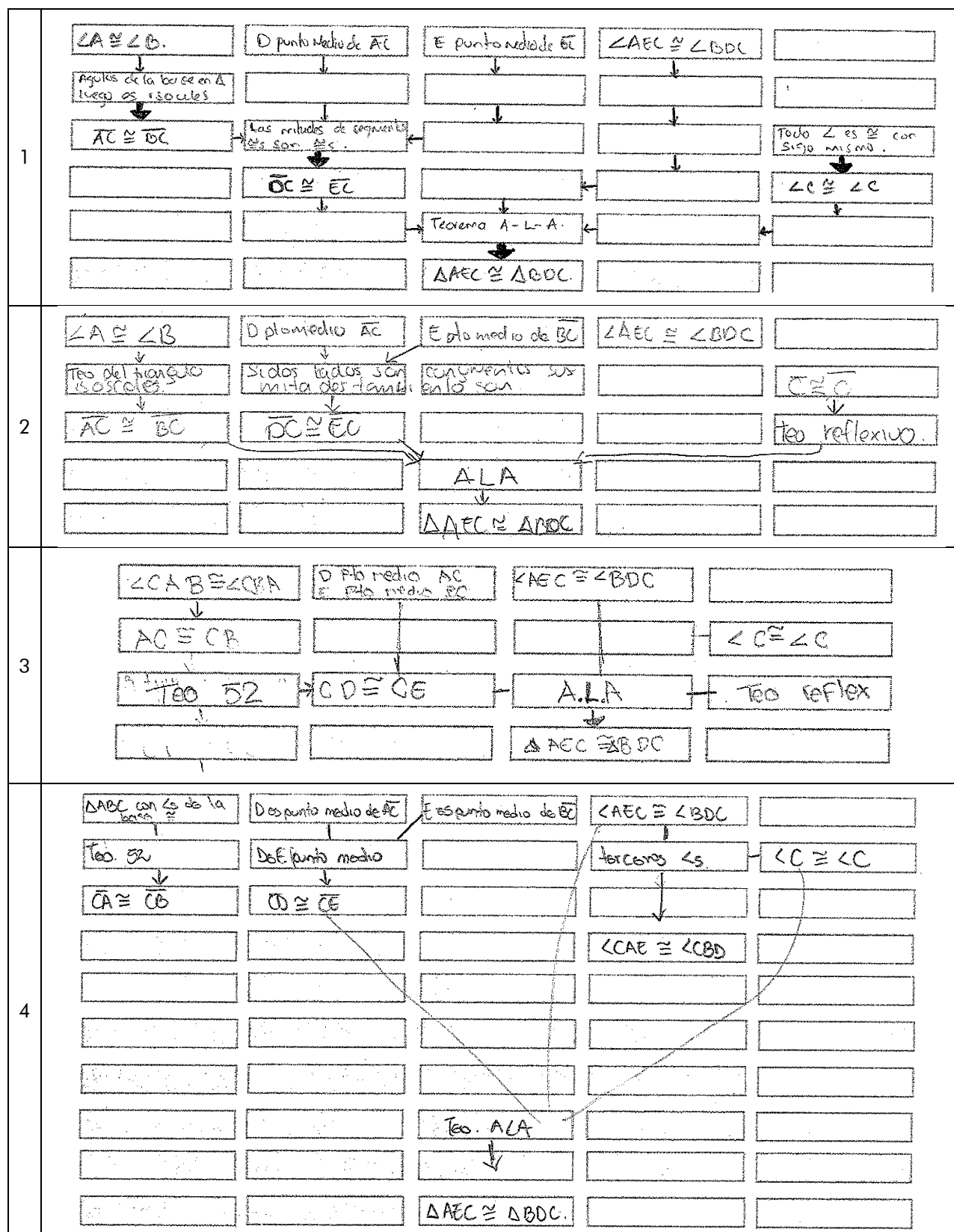


Figura 57. Grafos Proposicionales construidos por los estudiantes del Grupo 3, Sesión 1.

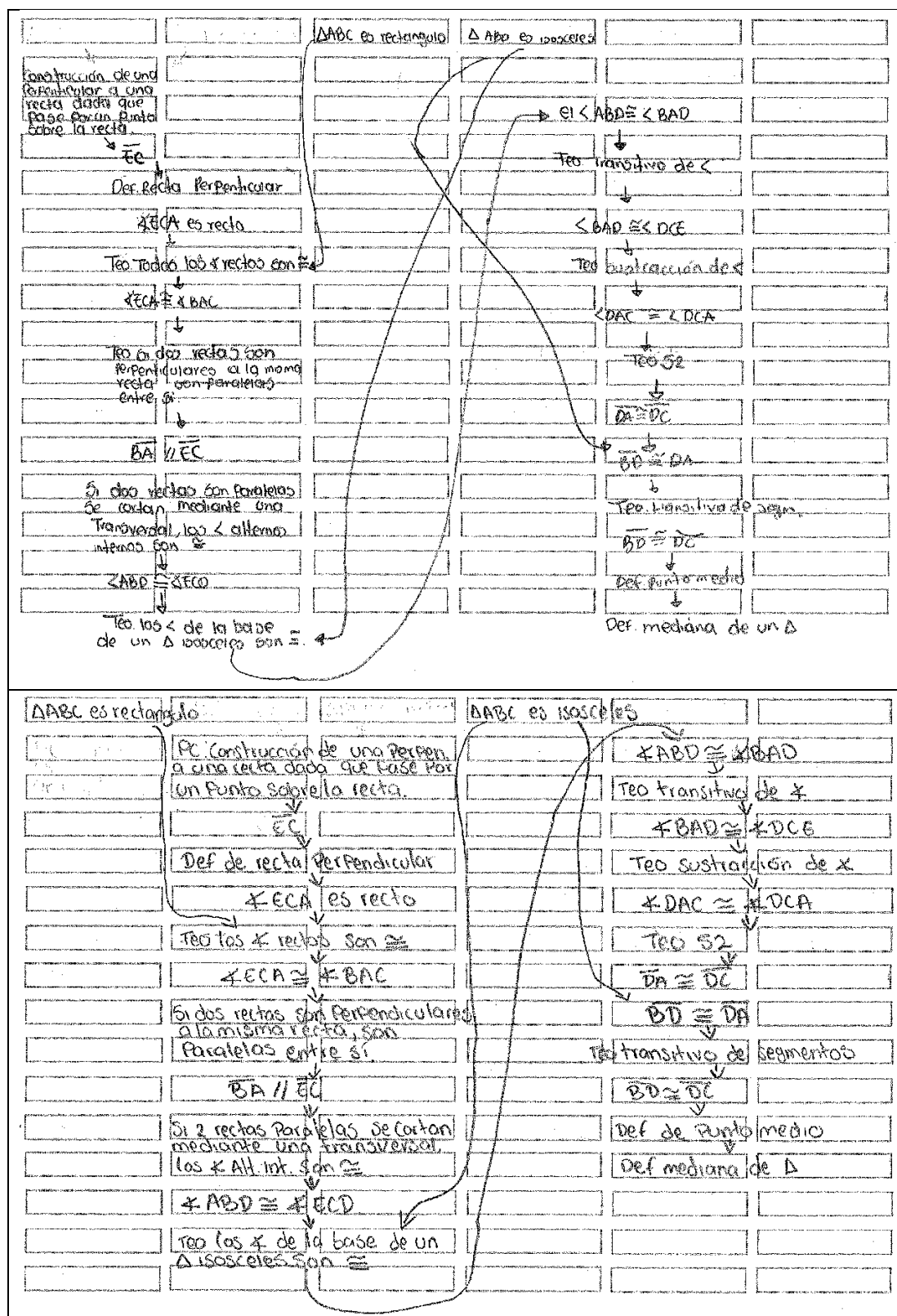


Figura 58. Grafos Proposicionales construidos por los estudiantes del Grupo 1, Sesión 2.



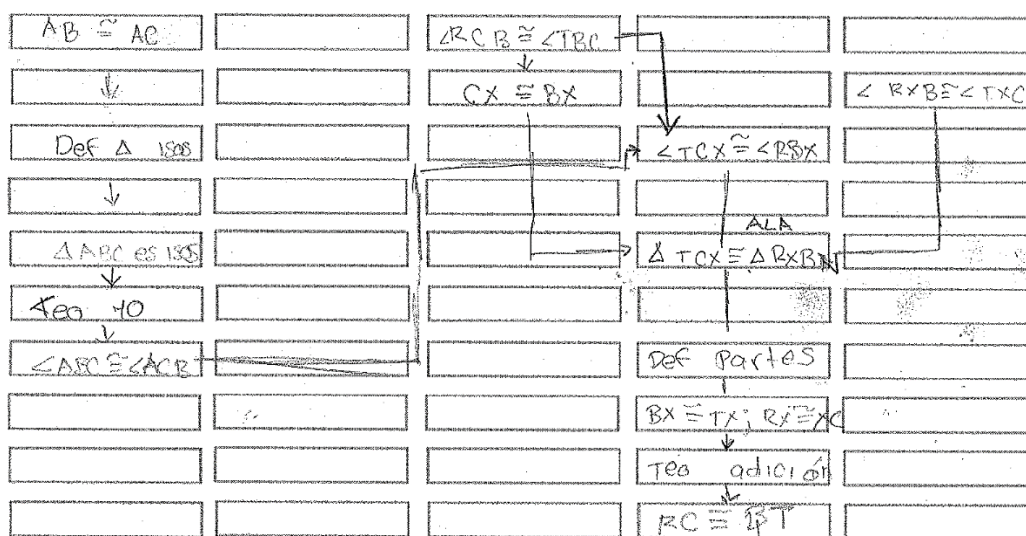


Figura 61. Grafos Proposicionales construidos por los estudiantes del Grupo 3, Sesión 3.

| Proposiciones                                           |                                             | Razones                                            |  |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------|--|
| 1. $\Delta ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ | 4. $\angle CBT \cong \angle BCR$            | 1. Hipótesis                                       |  |
| 2. $\Delta ABC$ es isósceles                            | 3. $\angle C \cong \angle B$                | 2. Def. $\Delta$ isósceles                         |  |
| 4. $\angle TCD \cong \angle OBR$                        | 5. $\angle RBO \cong \angle TCO$ y opuestos | 3. Teo. 22                                         |  |
| 6. $\overline{DB} \cong \overline{CB}$                  | 7. $\Delta RDB \cong \Delta OTC$            | 4. Teo. 10                                         |  |
| 8. $\overline{BO} \cong \overline{OT}$                  | 9. $\overline{RC} \cong \overline{BT}$      | 5. Teo. 10                                         |  |
|                                                         |                                             | 6. Teo. 52                                         |  |
|                                                         |                                             | 7. Teo. 44                                         |  |
|                                                         |                                             | 8. Def. partes corresp. $\Delta \cong$ son $\cong$ |  |
|                                                         |                                             | 9. Teo. 7                                          |  |

|                                        |                     |
|----------------------------------------|---------------------|
| 1. H <sub>1</sub> D                    | 1. H <sub>1</sub> P |
| 2. $\Delta ABC$ es isós                | 2. Def. isós        |
| 3. $\angle ACB \cong \angle ABC$       | 3. Teo. 22          |
| 4. $\overline{XC} \cong \overline{BX}$ | 4. Teo. 52          |
| 5. $\angle RXB \cong \angle TXC$       | 5. Teo. 18          |
| 6. $\angle XCR \cong \angle XBT$       | 6. Teo. 40          |
| 6'. $\angle TXC \cong \angle RXB$      | 6'. Teo. ALA        |
| 7. $\overline{RX} \cong \overline{XC}$ | 7. Def. partes      |
| 8. $\overline{TX} \cong \overline{XB}$ | 8. Teo. adic. seg.  |
| 9. $\overline{TB} \cong \overline{RC}$ |                     |

| Proposiciones                                           |                                  | Razones                                                           |  |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--|
| 1. $\Delta ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ | 2. $\angle RCB \cong \angle TBC$ | 1. Hipótesis                                                      |  |
| 3. $\Delta ABC$ es isósceles                            | 4. $\angle ABC \cong \angle ACB$ | 2. Hipótesis                                                      |  |
| 5. $\overline{BC} \cong \overline{BC}$                  | 6. $\Delta RCB \cong \Delta TBC$ | 3. Def. $\Delta$ isósceles (1)                                    |  |
| 7. $\overline{RC} \cong \overline{BT}$                  |                                  | 4. Teo. 22 (3)                                                    |  |
|                                                         |                                  | 5. Teo. 1                                                         |  |
|                                                         |                                  | 6. Teo. ALA (2, 4, 5)                                             |  |
|                                                         |                                  | 7. Def. partes correspondientes de $\Delta \cong$ son $\cong$ (6) |  |

Figura 62. Registros de los Estudiantes de la Prueba en Doble Columna, Sesión 3.

### Anexo 6. Segmentos de las sesiones registradas en la experimentación

Segmento 1. Episodio en el que la estudiante Lina describe su trayectoria hipotética para la prueba de una proposición sobre congruencia de triángulos.

|    | Lo que dice                                               | Lo que hace                                                                                                         |
|----|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | Lina: [54:08] hay un teorema que dice: que si dos         | Señala los ángulos CBA y CAB, luego el ángulo C.                                                                    |
| 2  | ángulos de la base son congruentes, el tercero por        |                                                                                                                     |
| 3  | definición es congruente                                  |                                                                                                                     |
| 4  | Lina: pero hay otro, muy parecido, que fue que me lo      | Señala los ángulos CBA y ABC, y luego señala en la figura los lados AC y BC                                         |
| 5  | dijo A, y no sé si yo lo estoy confundiendo y es: que si  |                                                                                                                     |
| 6  | dos ángulos de la base son congruentes, los lados         |                                                                                                                     |
| 7  | opuestos son congruentes                                  |                                                                                                                     |
| 8  | H. ¿Cuál de los dos creerías tu que te serviría?          | Señala los ángulos de las hipótesis en la figura; señala recíproco del teorema del triángulo isósceles en su lista. |
| 9  | Lina: pues el de los lados opuestos, y conocemos los dos  |                                                                                                                     |
| 10 | ángulos pero yo no estoy segura con este                  |                                                                                                                     |
| 11 | H: de ahí encontraste los lados opuestos                  |                                                                                                                     |
| 12 | Lina: Entonces tengo estos lados opuestos, y encontrar el | Señala los puntos medios en la figura, D y E punto medio de AC y BC respectivamente                                 |
| 13 | punto medio que es adición de segmentos, entonces         |                                                                                                                     |
| 14 | como ya tengo este ángulo por el teorema que yo creo      |                                                                                                                     |
| 15 | que existe.                                               |                                                                                                                     |
| 16 | Por el teorema ALA yo tengo...                            | señala el ángulo C en la figura<br>recorre los lados del triángulo BDC                                              |
| 17 | H: ¿y ALA entre quienes?                                  |                                                                                                                     |
| 18 | Lina: BDC y AEC                                           |                                                                                                                     |
| 19 | H: y qué más...                                           |                                                                                                                     |
| 20 | Lina: ¡y ya!, ¡ya acabe! [000:55:11]                      | Señala recorriendo los lados del triángulo BDC y luego los de AEC                                                   |

Fuente: Registros de la sesión 1 con el Grupo 1. Los nombres de los estudiantes que aparecen este segmento no corresponden al nombre real de los estudiantes que participaron durante las sesiones.

Segmento 2. La estudiante Andrea describe su trayectoria hipotética para la prueba de la proposición sobre congruencia de triángulos, de la hoja de trabajo 2 sesión 1.

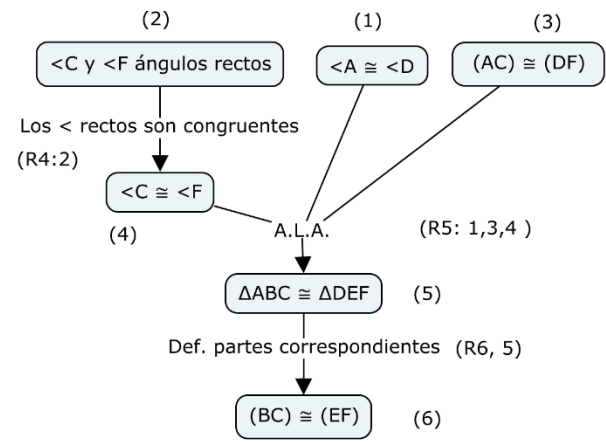
| Lo que dice                                            | Lo que hace                                        |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 21 Andrea: [57:50] Tengo que estos dos son             | (marca un punto en los ángulos AEC y BDC)          |
| 22 congruentes, D y E son puntos medios y estos dos    |                                                    |
| 23 son congruentes, entonces por el teorema 52,        |                                                    |
| 24 que dice que los ángulos de un triángulo son        |                                                    |
| 25 congruentes los lados opuestos.                     | (señala los segmentos AC y BC)                     |
| 26 entonces ya tendría que todo el segmentos AC        |                                                    |
| 27 con todo el segmento BC, pero necesito solo         | (indica los segmentos EC y DC)                     |
| 28 estos dos pedacitos                                 |                                                    |
| 29 entonces con los puntos medios,                     | (señala D y E)                                     |
| 30 por teorema de las mitades de segmentos             |                                                    |
| 31 congruentes son congruentes puedo sacar, este       |                                                    |
| 32 pedazo con este pedazo                              | (señala DC y EC)                                   |
| 33 entonces allí yo tendría un ángulo, el lado, y este |                                                    |
| 34 con el mismo.                                       | (señala el ángulo D, DC y el ángulo C)             |
| 35 H: este ángulo de aquí es dado...                   | Señala el ángulo C                                 |
| 36 Andrea: No, este ángulo con éste. entonces yo       | repinta las marcas de los puntos de los ángulo     |
| 37 veo el triángulo de esta manera y este, el ángulo   | CDB y CEA                                          |
| 38 C con sigo mismo (resalta la marca)                 | sobrepone la mano sobre la figura dejando solo     |
| 39 por el teorema de reflexión, entonces yo tendría    | ver el triángulo CEA)                              |
| 40 ángulo-lado-ángulo                                  | (señala ángulo C- lado CE - ángulo E)              |
| 41 y el otro triángulo sería así y serían ángulo-      | (sobrepone la mano dejando solo ver el triángulo   |
| 42 lado-ángulo. [59:06]                                | CDB)                                               |
| 43 H: en el grafo pudiste verificar                    | (señala el ángulo C - lado CD - ángulo D)          |
| 44 Andrea: [59:42] De aquí del triángulo, que los      | (señala la hipótesis del triángulo isósceles)      |
| 45 ángulos de la base son congruentes,                 |                                                    |
| 46 sale el teorema 52, y de ese teorema sale que AC    | (señala las dos hip de punto medio)                |
| 47 es congruente con BC, Pero acá en punto medio       |                                                    |
| 48 necesito el mismo teorema las mitades son           |                                                    |
| 49 congruentes, entonces este pedazo de acá            | (AC congruente con BC)                             |
| 50 con toda esta línea de acá                          | (las dos hipótesis punto medio)                    |
| 51 DC congruente con CE.                               |                                                    |
| 52 entonces de acá sale de estos ángulos               | (señala hip del ángulo AEC y BDC congruentes)      |
| 53 sale pa acá,                                        | (indicando que la flecha llega a Teo ALA)          |
| 54 y este sale de la nada... y se conecta estos tres   | (señala que las tres flechas que llega a la        |
| 55 con el ALA                                          | proposición Teo ALA)                               |
| 56 entonces uno no sabe si ponerlo por acá afuera,     | en la posiciones que ubicó el teorema reflexivo de |
| 57 o por aquí, si lo pone por aquí se conecta con la   | ángulos                                            |
| 58 hipótesis. [1:01:10]                                |                                                    |

Segmento 3. La estudiante Lina describe a Andrea su trayectoria hipotética de prueba, y que luego la estudiante Andrea advierte a su compañera de las condiciones de aplicación del teorema ALA.

|    |                                                              |                                       |
|----|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
|    |                                                              |                                       |
| 59 | [1:02:15]<br>Lina: bueno yo primero saque las proposiciones, | Refiriéndose a Andrea.                |
| 60 | no?!, en base a las hipótesis, pero no hice así              |                                       |
| 61 | como tú, que la que iba de primero la puse de                |                                       |
| 62 | primero, yo deduje las que podía sacar y las puse            |                                       |
| 63 | en desorden, luego las organice, entonces como               |                                       |
| 64 | tengo ángeles en la base los lados opuestos son              |                                       |
| 65 | congruentes, de aquí yo saque el supuesto                    |                                       |
| 66 | teorema de que si tengo dos ángulos congruentes              |                                       |
| 67 | el tercero es congruente, pero ese es consigo                |                                       |
| 68 | mismo,                                                       |                                       |
| 69 | Andrea: pero ese teorema también esta, o sea                 |                                       |
| 70 | que sí lo habrías sacado por ahí mismo no                    |                                       |
| 71 | habría problema,                                             |                                       |
| 72 | Lina: bueno entonces tengo el ángulo C, pero                 |                                       |
| 73 | entonces lo que no capte fue que hice la de                  |                                       |
| 74 | adición de segmentos para sacar el punto medio               |                                       |
| 75 | D y E aunque ya lo teníamos, pero se me olvido               |                                       |
| 76 | sacar este pequeño pedazo entonces de aquí de                |                                       |
| 77 | este ángulo salte a este lado-ángulo lado sino               | (señala DC)                           |
| 78 | que yo nunca mire el ángulo que tu viste                     | (señala ángulo B, lado BC y ángulo C) |
| 79 | Andrea: sino que tengo entendido que para que                |                                       |
| 80 | sea ALA, tiene que estar consecutivo todo, el                |                                       |
| 81 | ángulo, el lado y el ángulo, o sea no puede ser              |                                       |
| 82 | como que                                                     |                                       |
| 83 | Lina: mmmm                                                   |                                       |
| 84 | Andrea: un ángulo de acá, un lado de acá y otro              |                                       |
| 85 | ángulo de otro lado.                                         |                                       |
| 86 | Lina: ah                                                     |                                       |
| 87 | P: o sea, yo tengo que tener como dice A, el                 |                                       |
| 88 | ángulo... y no por acá otro ángulo                           |                                       |
| 89 | Lina: mmm, entiendo [1:04:04]                                |                                       |

Anexo 7. Ejemplo de la relación entre un registro de Doble Columna y un GP

Grafo Proposicional



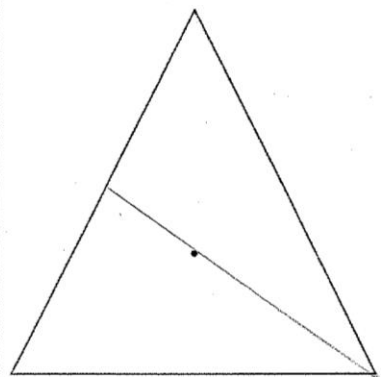
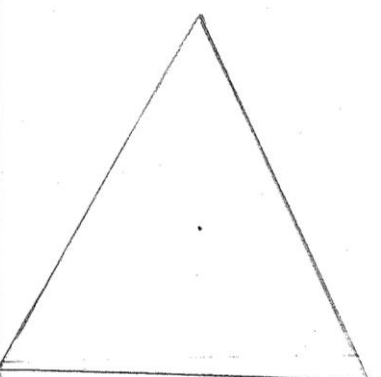
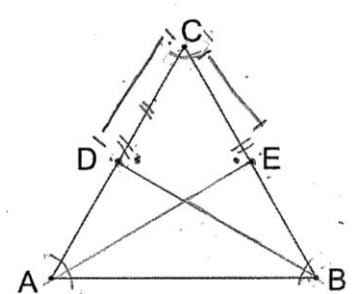
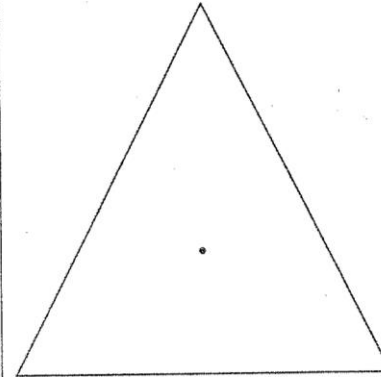
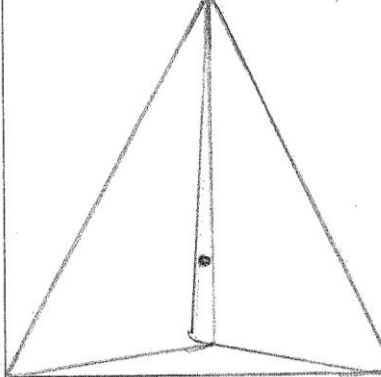
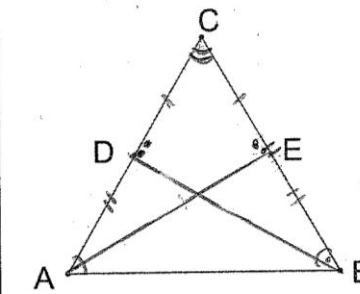
Prueba en Dos Columnas

| Proposiciones                                  | Razones                                                  |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 1. $\angle A \cong \angle D$ .                 | 1. Hipótesis.                                            |
| 2. $\angle C$ y $\angle F$ son ángulos rectos. | 2. Hipótesis.                                            |
| 3. $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ .       | 3. Hipótesis.                                            |
| 4. $\angle C \cong \angle F$ .                 | 4. Los ángulos rectos son congruentes (2)                |
| 5. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .       | 5. A.L.A. (1, 3, 4)                                      |
| 6. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$         | 6. Def. Partes (5)<br>Correspondientes $\triangle \cong$ |

(R4:2) = Razón de la proposición 4: que cumple la(s) premisa(s) 2.

Figura 63. Marcas en el GP asociadas al registro de representación en doble columna

### Anexo 8. Ejemplos de lo registrado en las Fichas de Trabajo por los estudiantes en la Sesión 1.

| Construcción I<br>Geometría                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Construcción I<br>Geometría                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1. Usa el instrumento entregado para construir el triángulo que se muestra (incluido su punto interior):</p>   | <p>2. <b>Hipótesis:</b> <math>\triangle ABC</math> con los ángulos de la base congruentes; D es el punto medio de <math>\overline{AC}</math>; E es el punto medio de <math>\overline{BC}</math>; <math>\angle AEC \cong \angle BDC</math>.<br/><b>Conclusión:</b> <math>\triangle AEC \cong \triangle BDC</math>.</p>  <p>• ¿Cuál es la conclusión? <math>\angle C \cong \angle C</math></p> <p>• Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <p>3- Teo. adición de segmentos<br/>4- Teo. ALA<br/>2- Teo. Si dos de los ángulos de un <math>\triangle</math> son <math>\cong</math> al tercero es <math>\cong</math><br/>1- Teo. Si dos de los lados de un <math>\triangle</math> son <math>\cong</math> los lados opuestos a ellos son congruentes</p> <p>• Construye el grafo proposicional.</p> <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> | <p>1. Usa el instrumento entregado para construir el triángulo que se muestra (incluido su punto interior):</p>   | <p>2. <b>Hipótesis:</b> <math>\triangle ABC</math> con los ángulos de la base congruentes; D es el punto medio de <math>\overline{AC}</math>; E es el punto medio de <math>\overline{BC}</math>; <math>\angle AEC \cong \angle BDC</math>.<br/><b>Conclusión:</b> <math>\triangle AEC \cong \triangle BDC</math>.</p>  <p>• ¿Cuál es la conclusión?<br/><math>\triangle CEA \cong \triangle BDC</math></p> <p>• Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.</p> <p>Teo Si 2 de los <math>\angle</math> de un <math>\triangle</math> son <math>\cong</math><br/>- los lados opuestos a ellos son <math>\cong</math>, el <math>\triangle</math> es isósceles.<br/>- Teo las mitades de segm <math>\cong</math> son <math>\cong</math><br/>- Teo reflexivo de <math>\angle</math><br/>- Teo ALA</p> <p>• Construye el grafo proposicional.</p> <p>Hansbert Delgado (2018 -II)<br/>Enseñanza Prueba en Geometría</p> |

(a)

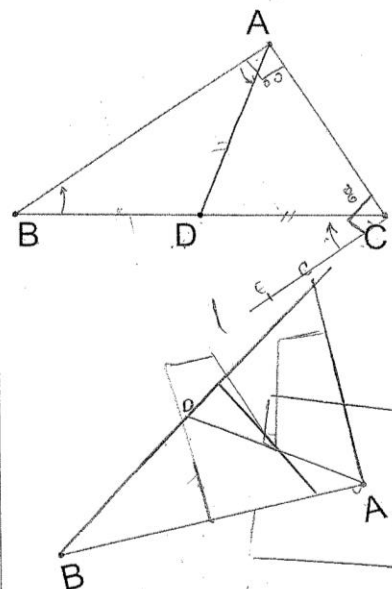
(b)

Figura 64. Registros en las Fichas de Trabajo, Sesión 1.

## Ejemplos de lo registrado en las Fichas de Trabajo por los Estudiantes en la Sesión 2.

**Construcción II B**  
**Geometría**

2. Usa los instrumentos entregados para construir el triángulo rectángulo que se muestra



3. Determina qué tipo de triángulo es  $\triangle ABD$ .

Es un triángulo isósceles dado  $m\angle DBA = m\angle DAB$ , justo, ya que usé el mismo instrumento para trazar el ángulo. luego  $\angle DBA \cong \angle DAB$  y por lema si un par de  $\angle$ s son  $\cong$ s, luego el  $\Delta$  es isósceles.

4. ¿AD es una mediana del  $\triangle ABC$ ?

Tengo que  $m\overline{BD} = m\overline{DC}$  luego por ello D es el punto medio de BC, y como AD, que sale del vértice opuesto a BC contiene el punto D, luego AD divide al lado BC en 2 segmentos congruentes, entonces es mediana.

5. Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.

- ① -  $\angle DBA \cong \angle DAB$ ,  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ,  $\angle BAC$  recto, (Hipótesis)
- ② - Construir  $\overline{CE}$  recto tal que  $\overline{CE} \perp \overline{AC}$  (Teorema construido - dar punto dado)
- ③ -  $\angle ECA$  recto. (Def. de rectos perpendiculares)
- ④ -  $\overline{BA} \parallel \overline{EC}$  (T. si 2 rectas son  $\perp$  a una tercera luego son paralelas)
- ⑤ -  $\angle ECD \cong \angle CBA$  (T. los  $\angle$ s alt. internos de  $\overline{BA} \parallel \overline{EC}$ )
- ⑥ -  $\angle BAC \cong \angle ECA$  (T. los  $\angle$ s rectos son  $\cong$ s)
- ⑦ -  $\angle ECD \cong \angle CAD$  (T. transitivo de  $\angle$ s) ⑥ y ⑤
- ⑧ -  $\angle DAC \cong \angle DCA$  (T. los complementos de  $\angle$ s  $\cong$ s son  $\cong$ s)
- ⑨ -  $\overline{AD} \cong \overline{DC}$  (T. si 2 ángulos de un  $\Delta$  son  $\cong$ s los lados opuestos son  $\cong$ s)
- ⑩ -  $\overline{BD} \cong \overline{AD}$  (Dado ①)
- ⑪ -  $\overline{BD} \cong \overline{DC}$  (T. transitivo) ⑩ y ⑨
- ⑫ -  $m\overline{BD} = m\overline{DC}$ , Definición de Segmentos congruentes
- ⑬ - D es punto medio de BC. (Def. punto medio)

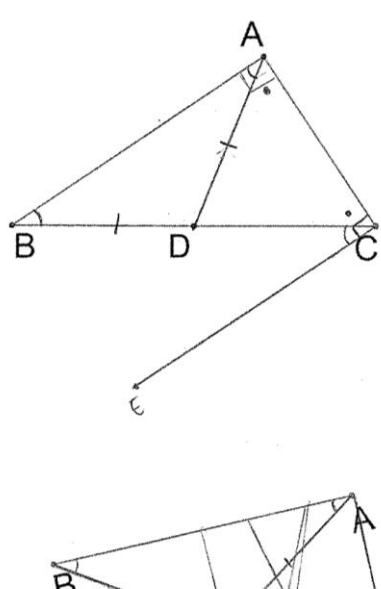
6. Construir el grafo proposicional para probar la conclusión.

(14)  $\overline{AD}$  es mediana. (Definición de mediana)

Hansbert Delgado (2018 -II)  
Enseñanza Prueba en Geometría

**Construcción II B**  
**Geometría**

2. Usa los instrumentos entregados para construir el triángulo rectángulo que se muestra



3. Determina qué tipo de triángulo es  $\triangle ABD$ .

$\triangle ABD$  es isósceles.

4. ¿AD es una mediana del  $\triangle ABC$ ?

$m\overline{BD} = m\overline{DC}$   
SI ES mediana.

5. Haz una lista con las proposiciones y teoremas que se podrían usar para llegar a la conclusión.  $\angle A$  recto.

1. - Hip.  $\triangle ABC$  es rectángulo;  $\triangle ABD$  y  $\triangle ADC$  son isósceles;  $\angle B \cong \angle BAD$
2. - Teo.  $\angle$ s de la base  $\cong$   $\rightarrow$  lados opuestos  $\cong$   
4  $\overline{BD} \cong \overline{AD}$
3. - Teo. construcción de una  $\perp$  a una recta dada  $\overline{CE} \perp \overline{AC}$
4. - Teo. dos rectas  $\perp$  a la misma recta son  $\parallel$  entre si  $\overline{BA} \parallel \overline{EC}$
5. - Def. rectos  $\perp$  a  $\angle C$  es recto.
6. - Teo. todas  $\angle$  rectos son  $\cong$
7. - Teo.  $\angle$ s alt. int. son  $\cong$   $\rightarrow \angle ABD \cong \angle ECD$  ② y ⑤
8. - Teo. transitivo de  $\angle$ s  $\rightarrow \angle BAD \cong \angle ECD$  ② y ⑦
9. - Teo. complementos de  $\angle$ s  $\cong$  son  $\cong$   $\rightarrow \angle DAC \cong \angle DCA$
10. - Razon  $\neq$  2  $\rightarrow \overline{AD} \cong \overline{DC}$
11. - Teo. transitivo de segmentos  $\rightarrow \overline{BD} \cong \overline{DC}$  ④ y ⑩
12. - Def. congruencia  $\rightarrow m\overline{BD} = m\overline{DC}$

6. Construir el grafo proposicional para probar la conclusión.

13. Def. punto medio  $\rightarrow$  D punto medio de BC

Hansbert Delgado (2018 -II)  
Enseñanza Prueba en Geometría

(a)

(b)

Figura 65. Registros en las Fichas de Trabajo, Sesión 2.

### **Anexo 9. Ficha del Docente para el uso del RP.**

En forma general, la descripción de la ficha del docente se sustenta en la descripción del proceso hipotético de aprendizaje de los estudiantes, descrito en las tablas 1.6 y 1.7 (pp. 46 y 47), a esto se suma el refinamiento en el diseño de las tareas y de la formulación de la conjetura. En el tercer diseño se encuentra la versión del Diseño que se quería alcanzar en la propuesta, en esta se logra articular la construcción y reproducción de la figura, para determinar información como datos para determinar la congruencia no solo de la figura construida con la inicial, también determinar prueba de proposiciones en relación con la figura, y además la posibilidad de determinar subconfiguraciones, que apoyan en la determinación de una THP de la proposición.

El diseño elaborado se podría desarrollar con estudiantes con conocimientos básicos sobre congruencia de segmentos, ángulos y triángulos, el número mínimo con el que se propone la aplicación es de dos estudiantes, para favorecer la discusión en cada una de las tareas propuestas. El interés se centra en la construcción de pruebas, toma en cuenta las proposiciones y teoremas de la Geometría Elemental Euclidiana sobre congruencia de triángulos.

Para la realización de las tareas de construcción se debe poner a disposición del estudiante una figura e instrumentos no convencionales, estos últimos asociados a la figura, particularmente a una o varias subconfiguraciones de ésta. Esto para favorecer luego con tareas auxiliares el reconocimiento de subconfiguraciones, que permitan la elaboración de THP y así mismo obtener tanto pasos deductivos como cadenas o secuencias de estos para la posterior construcción del GP. Algunos de las posibles construcciones como la posible utilización de los instrumentos se presentan en las figuras 13 a 17 (pp. 33 -36), recordando que la validez de la reproducción de la figura se pone en términos de la información que se explicita por medio del instrumento y que luego se pone en juego bajo los conocimientos geométricos del estudiante para determinar la congruencia entre las dos figuras.

Para la construcción de los grafos se podría utilizar un tablero en el que los estudiantes puedan presentar la construcción de su GP favoreciendo la posibilidad de editarlo. También se puede emplear software desarrollado para construcción de mapas conceptuales, en el que los estudiantes inicialmente listarían sus proposiciones en tanto premisas, terceros enunciados y conclusiones, y luego los organicen en pasos deductivos.

Se considera que para el trabajo con los estudiantes no es suficiente con una sola sesión, por esta razón se pusieron a disposición tres diseños en tres sesiones, entre las metas se quiere que el estudiante logre realizar, la construcción de GP mediante el desarrollo de tareas auxiliares que le permitan apoyar en la identificación de los baches y saltos en los pasos deductivos y cadenas de estos, y así mismo poderlos corregir. Para lograr la comprensión de en qué consiste una Prueba y su funcionamiento, Duval (2017), afirma que se deberían desarrollar como mínimo en ocho sesiones.

Las orientaciones a los estudiantes en el desarrollo de las tareas, se propone que sea el menor número de veces posible, dejando la responsabilidad a los estudiantes entre pares de resolver sus inquietudes o dificultades y avanzar en el desarrollo de las tareas. Durante la planeación, se recomienda tener a disposición la construcción de los GP (pp. 27-32) con base a cada una de las THP posibles, lo que podría favorecer en la identificación del camino para la prueba elegido por los estudiantes y así mismo favorecer el apoyo que se pueda brindar.

Finalmente en la última tarea que se propone al estudiante, se busca que pueda pasar del Grafo al registro en lengua natural, la redacción de la Prueba, Duval (2016, 2017) refiere que favorece en la comprensión de en qué consisten y cómo funcionan los pasos deductivos, el reciclaje de una conclusión para desarrollar un nuevo paso deductivo, poniendo en juego para la descripción actitudes proposicionales (frases cortas provistas de un verbo, como: puedo concluir, ya demostré que, tengo que...) que marcan el estatus operatorio de las proposiciones.