

Ejemplos de familias proyectivas de medidas que carecen de límite proyectivo.

Michell Andrés Gómez Leiva.

Resumen

En general no existe el límite proyectivo de una familia proyectiva de medidas. En este trabajo se presentan dos ejemplos en los que ocurre esta situación. El primer ejemplo conocido en la literatura que guarda relación con el tema fue construido por E.S. Andersen y B. Jessen en [1].

Palabras y frases claves: Familia proyectiva de medidas, límite proyectivo de una familia proyectiva de medidas, medidas probabilísticas, medidas en espacios de dimensión infinita

1. Preliminares

Sea $(\Gamma, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $(E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ una familia de espacios medibles. Para cada pareja $(\alpha, \beta) \in \Gamma \times \Gamma$ tal que $\alpha \preceq \beta$ supondremos que existe una función medible $f_{\alpha\beta} : (E_\beta, \mathcal{A}_\beta) \rightarrow (E_\alpha, \mathcal{A}_\alpha)$. Diremos que $\{(E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_{\alpha\beta})\}$ es un *sistema proyectivo* de espacios medibles si

(sp1) $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$ implica $f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$.

(sp2) $f_{\gamma\gamma} = 1_{E_\gamma}$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Diremos que el espacio medible $(E, \mathcal{A})$ es un *límite proyectivo* del sistema proyectivo de espacios medibles $\{(E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_{\alpha\beta})\}$ si

(lp1) Existen funciones medibles $f_\gamma : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$ para cada γ tales que $f_{\alpha\beta} \circ f_\beta = f_\alpha$ si $\alpha \preceq \beta$.

(lp2) Si $(Y, \mathcal{B})$ es otro espacio medible con funciones medibles $\phi_\gamma : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$ que satisfacen $f_{\alpha\beta} \circ \phi_\beta = \phi_\alpha$ cuando $\alpha \preceq \beta$, entonces existe una función medible única $h : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (E, \mathcal{A})$ tal que $f_\gamma \circ h = \phi_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Teorema 1.1. Todo sistema proyectivo de espacios medibles tiene un límite proyectivo único salvo isomorfismos.

Demostración. Sea $\{(E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_{\alpha\beta})\}$ un sistema proyectivo de espacios medibles y demosremos la existencia de un límite proyectivo. Consideremos el conjunto E de los $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$ tales que $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ si $\alpha \preceq \beta$ y sea $\mathcal{A} = \{M \cap E : M \in \bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma\}$ donde $\bigotimes_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{A}_\gamma$ es la σ -álgebra producto, es decir, la menor σ -álgebra que hace medibles las proyecciones $p_\gamma : \prod_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma \rightarrow E_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Entonces $(E, \mathcal{A})$ es un espacio medible y al hacer $f_\gamma = p_\gamma|_E$ tenemos que f_γ es medible para todo γ y $f_{\alpha\beta} \circ f_\beta = f_\alpha$ cuando $\alpha \preceq \beta$. Si $(Y, \mathcal{B})$ es otro espacio medible con funciones medibles $\phi_\gamma : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$ tales que $f_{\alpha\beta} \circ \phi_\beta = \phi_\alpha$ si $\alpha \preceq \beta$, entonces $h : Y \rightarrow E$ definida por $h(y) = (\phi_\gamma(y))_{\gamma \in \Gamma}$ es la única función medible que satisface $f_\gamma \circ h = \phi_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

Ahora demosremos la unicidad salvo isomorfismos de espacios medibles. Sean $(E, \mathcal{A})$ y $(E', \mathcal{A}')$ dos límites proyectivos del sistema proyectivo $\{(E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_{\alpha\beta})\}$. Entonces existen funciones medibles $f_\gamma : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$ y $f'_\gamma : (E', \mathcal{A}') \rightarrow (E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)$ para cada γ tales que $f_{\alpha\beta} \circ f_\beta = f_\alpha$ y $f'_{\alpha\beta} \circ f'_\beta = f'_\alpha$ si $\alpha \preceq \beta$. También existen funciones medibles únicas $u : E \rightarrow E'$ y $v : E' \rightarrow E$ tales que $f'_\gamma \circ u = f_\gamma$ y $f_\gamma \circ v = f'_\gamma$ para todo γ . Es claro que $v \circ u = h$ es una función medible de E en E que satisface $f_\gamma \circ h = f_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces por unicidad $v \circ u = 1_E$. En forma similar $u \circ v = 1_{E'}$. $\square$

Denotaremos por $(\lim_{\leftarrow} E_\gamma, \lim_{\leftarrow} \mathcal{A}_\gamma)$ el límite proyectivo del sistema proyectivo de espacios medibles $\{(E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_{\alpha\beta})\}$ y a las funciones medibles $(f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de (lp1) las llamamos funciones canónicas. Es posible verificar entonces, que $\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}_\gamma$ es la menor σ -álgebra en $\lim_{\leftarrow} E_\gamma$ que hace medibles las funciones canónicas.

Sea $\{(E_\gamma, \mathcal{A}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_{\alpha\beta})\}$ un sistema proyectivo de espacios medibles y μ_γ una medida definida en $\mathcal{A}_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Diremos que $(\mu_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ es una *familia proyectiva* de medidas si $\alpha \preceq \beta$ implica $f_{\alpha\beta}(\mu_\beta) = \mu_\alpha$ (la medida μ_α es la imagen de la medida μ_β por la función $f_{\alpha\beta}$ si $\alpha \preceq \beta$). Una medida μ definida en $\lim_{\leftarrow} \mathcal{A}_\gamma$ es un *límite proyectivo* de la familia proyectiva $(\mu_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ si $f_\gamma(\mu) = \mu_\gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos en $P(X)$ la *medida interior* μ_* inducida por μ así $\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \in \mathcal{A}\}$ para todo $E \in P(X)$. Diremos que un subconjunto X_0 de X es *grueso* si $\mu_*(X - X_0) = 0$.

A continuación daremos dos ejemplos de familias proyectivas de medidas que no tienen límite proyectivo.

2. Ejemplo A

Para este ejemplo nos basamos en un ejercicio de Halmos [2, p.214, ejercicio 3].

Proposición 2.1. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y M un subconjunto grueso de X . Si $\mathcal{M} = \mathcal{A} \cap M = \{A \cap M : A \in \mathcal{A}\}$ y $\nu(A \cap M) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces ν es una medida en el espacio medible $(M, \mathcal{M})$.

Demostración. No es difícil ver que $\mathcal{M}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de M llamada la traza de $\mathcal{A}$ en M . Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tales que $A_1 \cap M = A_2 \cap M$ y demostremos que $\nu(A_1 \cap M) = \nu(A_2 \cap M)$. Puesto que $(A_1 \Delta A_2) \cap M = \emptyset$ entonces $(A_1 \Delta A_2) - M = A_1 \Delta A_2$ y $\mu_*(A_1 \Delta A_2) = \mu_*((A_1 \Delta A_2) - M) \leq \mu_*(X - M) = 0$ porque M es grueso. Así que $\mu(A_1 \Delta A_2) = 0$ y por tanto $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. En otras palabras, ν está bien definida.

Supongamos que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta de elementos de $\mathcal{M}$ y sea A_n un elemento en $\mathcal{A}$ tal que $F_n = A_n \cap M$. Si $\tilde{A}_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ entonces $(\tilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión disjunta en $\mathcal{A}$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n$. Además $(\tilde{A}_n \Delta A_n) \cap M = \emptyset$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{A}_n \Delta A_n) \cap M &= (A_n - \tilde{A}_n) \cap M \\
 &= (A_n \cap M) - (\tilde{A}_n \cap M) \\
 &= (A_n \cap M) - [(A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap M] \\
 &= (A_n \cap M) - (A_n \cap M - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cap M) \\
 &= F_n - (F_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i) = F_n - F_n = \emptyset
 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente

$$\mu_*(\tilde{A}_n \Delta A_n) = \mu_*((\tilde{A}_n \Delta A_n) - M) \leq \mu_*(X - M) = 0$$

por ser M grueso. Luego

$$\mu(\tilde{A}_n \Delta A_n) = 0 \quad \text{y} \quad \mu(\tilde{A}_n) = \mu(A_n).$$

Por último

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(F_n) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n \cap M) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n\right) \\
 &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \nu\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap M\right) = \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap M\right) \\
 &= \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right)
 \end{aligned}$$

Luego ν es σ -aditiva y por tanto una medida en $(M, \mathcal{M})$. $\square$

Consideremos el espacio de probabilidad $([0, 1], \text{bor}([0, 1]), \nu)$ donde ν es la medida de Lebesgue en $\text{bor}([0, 1])$. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos gruesos de $[0, 1]$ tales que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{A}_n = \text{bor}([0, 1]) \cap X_n$ y si $E \in \mathcal{A}_n$, es decir, si $E = F \cap X_n$ con $F \in \text{bor}([0, 1])$, definimos $\nu_n(E) = \nu(F)$. Por la proposición anterior tenemos que ν_n es una medida en el espacio medible $(X_n, \mathcal{A}_n)$, más aún, ν_n es una medida probabilística.

Si $n \in \mathbb{N}$ definimos $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $X_{J_n} = \prod_{i=1}^n X_i$, $\mathcal{A}_{J_n} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ y $f_{J_m J_n} : X_{J_n} \rightarrow X_{J_m}$ dada por $f_{J_m J_n}((x_i)_{1 \leq i \leq n}) = (x_i)_{1 \leq i \leq m}$ si $m \leq n$. Para $J_1 = \{1\}$ hacemos $X_{\{1\}} = X_1$, $\mathcal{A}_{\{1\}} = \mathcal{A}_1$ y $f_{\{1\} J_n}((x_i)_{1 \leq i \leq n}) = x_1$ si $n \geq 1$. Entonces $\{(X_{J_n}, \mathcal{A}_{J_n})_{n \in \mathbb{N}}, (f_{J_m J_n})\}$ es un sistema proyectivo de espacios medibles y su límite proyectivo es $(\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i, \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i)$, con funciones canónicas $p_{J_n} : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow X_{J_n}$ dadas por $p_{J_n}((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n : (X_n, \mathcal{A}_n) \rightarrow (X_{J_n}, \mathcal{A}_{J_n})$ definida por $g_n(x) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ donde $z_i = x$, $i = 1, 2, \dots, n$ es medible. Por lo tanto $\mu_n = g_n(\nu_n)$ es una medida probabilística definida en $\mathcal{A}_{J_n}$ por la fórmula $\mu_n(A) = \nu_n(g_n^{-1}(A))$ para todo $A \in \mathcal{A}_{J_n}$. Además tenemos que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia proyectiva de medidas probabilísticas en el sistema proyectivo $\{(X_{J_n}, \mathcal{A}_{J_n})_{n \in \mathbb{N}}, (f_{J_m J_n})\}$. En efecto, sea $m < n$. Si $A \in \mathcal{A}_{J_m}$ entonces $g_m^{-1}(A) = E \cap X_m$ con $E \in \text{bor}([0, 1])$ y $g_n^{-1}(B) = E \cap X_n$ donde $B = f_{J_m J_n}^{-1}(A)$. Así que $\mu_m(A) = \nu_m(g_m^{-1}(A)) = \nu_m(E \cap X_m) = \nu(E)$ y $\mu_n(f_{J_m J_n}^{-1}(A)) = \mu_n(B) = \nu_n(g_n^{-1}(B)) = \nu_n(E \cap X_n) = \nu(E)$ y por tanto $f_{J_m J_n}(\mu_n) = \mu_m$.

Demostremos que la familia proyectiva de medidas probabilísticas $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene límite proyectivo.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ y E_k el conjunto de los $(x_1, x_2, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ cuyas primeras k coordenadas son iguales.

El conjunto $D_k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 = \dots = x_k = x \in [0, 1]\}$ es cerrado y por tanto $D_k \in \bigotimes_{i=1}^k \text{bor}([0, 1])$. Luego $D_k \cap X_{J_k} \in \mathcal{A}_{J_k}$. Puesto que $E_k = p_{J_k}^{-1}(D_k \cap X_{J_k})$ entonces $E_k \in \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ para todo k . Si existiera una medida μ definida en $\bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ tal que $p_{J_n}(\mu) = \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mu(E_k) = \mu_k(D_k \cap X_{J_k}) = \nu_k(g_k^{-1}(D_k \cap X_{J_k})) = \nu_k(X_k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pero $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k = \emptyset$ lo cual no puede ser. $\square$

3. Ejemplo B

En esta parte nos basamos en un ejemplo de Skorohod [3, pag.8] en el cual muestra una distribución débil que no posee una medida correspondiente. Las medidas de la familia proyectiva que construiremos están definidas en subálgebras de conjuntos borelianos.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real separable y $\mathcal{F}$ la colección de todos sus subespacios de dimensión finita ordenado por la inclusión. Para cada $F \in \mathcal{F}$ denotaremos por p_F la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre F . Si $F, G \in \mathcal{F}$ con $F \subseteq G$, denotaremos por p_{FG} la proyección ortogonal de G sobre F . Notemos que $p_{FG} \circ p_G = p_F$ si $F \subseteq G$. La colección $\mathcal{C}_F = p_F^{-1}(\text{bor}(F)) = \{p_F^{-1}(A) : A \in \text{bor}(F)\}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de $\mathcal{H}$ llamados cilindros basados en los borelianos de F . Si $A \in \text{bor}(F)$ es una base de T y si $F \subseteq G$ entonces $B = p_{FG}^{-1}(A)$ es también una base de T pues $p_G^{-1}(B) = p_G^{-1}(p_{FG}^{-1}(A)) = (p_{FG} \circ p_G)^{-1}(A) = p_F^{-1}(A) = T$. Así que $\mathcal{C}_F \subseteq \mathcal{C}_G$ si $F \subseteq G$.

Proposición 3.1. El conjunto $\mathcal{C} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{C}_F$ de los cilindros es un álgebra que genera a $\text{bor}(\mathcal{H})$.

Demostración. Demostremos que $\mathcal{C}$ es un álgebra. Sean C y D cilindros. Entonces existen subespacios de dimensión finita F y G tales que $C \in \mathcal{C}_F$ y $D \in \mathcal{C}_G$. Sea M un subespacio de dimensión finita tal que $F, G \subseteq M$. Entonces $C, D \in \mathcal{C}_M$ y por tanto $C - D, C \cup D \in \mathcal{C}_M \subseteq \mathcal{C}$.

Ahora demostremos que $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \text{bor}(\mathcal{H})$. Puesto que $\mathcal{H}$ es separable, posee una base ortonormal numerable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Sean $F_n = \text{lin}\{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ y p_n la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre F_n . Es claro que $\lim_n p_n(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Si $B = \{x \in \mathcal{H} : \|x - a\| \leq r\}$ es la bola cerrada de centro a y radio r , entonces $T_n = \{x \in \mathcal{H} : \|p_n(x) - p_n(a)\| \leq r\} \in \mathcal{C}_{F_n}$ y $B \subseteq T_n$ para todo n . Luego $B \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Para demostrar la inclusión inversa supongamos que $y \notin B$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\|y - a\| = r + \delta$. Como $\lim_n p_n(y - a) = y - a$ entonces $\|p_n(y) - p_n(a)\| \rightarrow \|y - a\|$. Por consiguiente $\|p_n(y) - p_n(a)\| > r$ si n es suficientemente grande, lo que significa que $y \notin T_n$ para n grande, es decir, $y \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$.

Como $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{F_n} \subset \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{A}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{F_n}) \subset \mathcal{A}(\mathcal{C})$. Hemos mostrado que $\mathcal{A}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{F_n})$ contiene cualquier bola cerrada y por tanto cualquier bola abierta pues puede verse como unión numerable de bolas cerradas. Así que $\text{bor}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{A}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{F_n})$. Luego $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \text{bor}(\mathcal{H})$. $\square$

Si F es un subespacio de $\mathcal{H}$ de dimensión n entonces

$$\mu_F(A) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_A e^{-\frac{1}{2}(x|x)} d\lambda^n(x)$$

donde λ^n es la medida de Lebesgue n -dimensional, es una medida probabilística en $\text{bor}(F)$. Mostremos que si $L \subseteq M$ entonces $p_{LM}(\mu_M) = \mu_L$. Sean L y M subespacios de dimensión finita l y m respectivamente, $L \subseteq M$ y $L^\perp$ el subespacio ortogonal de L en M . Entonces $M = L \oplus L^\perp$ y podemos encontrar una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_l, \dots, e_m\}$ de M donde los primeros l elementos están en L y los restantes en $L^\perp$. Si $A \in \text{bor}(L)$ entonces

$$\begin{aligned} \mu_M(p_{LM}^{-1}(A)) &= \mu_M(A \times L^\perp) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_M \chi_{A \times L^\perp} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_m^2)} d\lambda^m(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_A \int_{L^\perp} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_m^2)} d\lambda^m(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_A e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_l^2)} d\lambda^l(x) \cdot \\ &\quad \int_{L^\perp} e^{-\frac{1}{2}(x_{l+1}^2 + \dots + x_m^2)} d\lambda^{m-l}(x) \\ &= \frac{(2\pi)^{l/2} (2\pi)^{(m-l)/2} \mu_L(A)}{(2\pi)^{m/2}} \\ &= \mu_L(A) \end{aligned}$$

En consecuencia $\mu_L = p_{LM}(\mu_M)$ si $L \subseteq M$.

Demostremos que no existe ninguna medida μ en $\text{bor}(\mathcal{H})$ tal que $p_F(\mu) = \mu_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demostración. Para ello consideremos la función $f(x) = e^{-\epsilon(x|x)}$ donde $\epsilon > 0$. Esta función es continua, positiva y mayorada por la función unitaria $x \mapsto 1$. Si L es un subespacio de dimensión finita l entonces $f_L = f \circ \iota_L \circ p_L$ ($\iota_L : L \rightarrow \mathcal{H}$ la inclusión) es la función $f_L(x) = e^{-\epsilon(p_L(x)|p_L(x))}$. Observemos que

$$\begin{aligned} \int_L (f \circ \iota_L)(x) \, d\mu_L(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_L e^{-\epsilon(x|x)} e^{-\frac{1}{2}(x|x)} \, d\lambda^l(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{l/2}} \int_L e^{-\frac{1}{2}(1+2\epsilon)(x|x)} \, d\lambda^l(x) \\ &= \frac{(1+2\epsilon)^{-l/2}}{(2\pi)^{l/2}} \int_L e^{-\frac{1}{2}(y|y)} \, d\lambda^l(y) \\ &= (1+2\epsilon)^{-l/2} \end{aligned}$$

donde hicimos el cambio de variable $x = (1+2\epsilon)^{-1/2}y$.

Sea $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita tal que la dimensión de L_n es n y $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{L_n}(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Entonces si hacemos $f_{L_n} = f \circ \iota_{L_n} \circ p_{L_n}$ tenemos que f_{L_n} es positiva y mayorada por la función $x \mapsto 1$, f_{L_n} converge puntualmente a f y $\int_{L_n} f \circ \iota_{L_n}(x) d\mu_{L_n}(x) = (1+2\epsilon)^{-n/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si existiera una medida probabilística μ en $\text{bor}(\mathcal{H})$ tal que $p_F(\mu) = \mu_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$ entonces

$$\begin{aligned} \int f(x) \, d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{L_n}(x) \, d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f \circ \iota_{L_n}) \circ p_{L_n} \, d\mu(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} (f \circ \iota_{L_n}) \, d\mu_{L_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+2\epsilon)^{-n/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto no puede ser porque

$$f(x) = e^{-\epsilon(x|x)} > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

□

Teniendo en mente lo anterior procedemos a dar el ejemplo. Puesto que $F \subseteq G$ implica $\mathcal{C}_F \subseteq \mathcal{C}_G$, entonces $\{(\mathcal{H}, \mathcal{C}_F)_{F \in \mathcal{F}}, (1_{FG})\}$ es un sistema proyectivo de espacios medibles donde $1_{FG} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es la identidad

si $F \subseteq G$. El límite proyectivo de dicho sistema proyectivo es el espacio medible $(\mathcal{H}, \text{bor}(\mathcal{H}))$ y las funciones canónicas son las identidades $1_F : (\mathcal{H}, \text{bor}(\mathcal{H})) \rightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{C}_F)$ las cuales son medibles porque

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \text{bor}(\mathcal{H}).$$

Sea $T \in \mathcal{C}_F$ de la forma $T = p_F^{-1}(A)$ con $A \in \text{bor}(F)$. Si definimos $\nu_F(T) = \mu_F(A)$ entonces ν_F es una medida probabilística en el espacio medible $(\mathcal{H}, \mathcal{C}_F)$ para cada $F \in \mathcal{F}$. Obtenemos así una familia proyectiva $(\nu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ de medidas probabilísticas sobre el sistema proyectivo $\{(\mathcal{H}, \mathcal{C}_F)_{F \in \mathcal{F}}, (1_{FG})\}$. Para comprobar esta afirmación debemos demostrar que $1_{FG}(\nu_G) = \nu_F$ si $F \subseteq G$. Sea $T \in \mathcal{C}_F$ y $F \subseteq G$. T es de la forma $T = p_F^{-1}(A)$ con $A \in \text{bor}(F)$ y si $B = p_{FG}^{-1}(A)$ entonces $p_G^{-1}(B) = T$. Ahora, como $p_{FG}(\mu_G) = \mu_F$ entonces $\mu_F(A) = \mu_G(p_{FG}^{-1}(A)) = \mu_G(B)$. Luego $\nu_G(1_{FG}^{-1}(T)) = \nu_G(T) = \mu_G(B) = \mu_F(A) = \nu_F(T)$. Entonces $(\nu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ es una familia proyectiva.

La familia proyectiva $(\nu_F)_{F \in \mathcal{F}}$ de medidas probabilísticas no tiene límite proyectivo. En efecto, si existiera una medida probabilística ν en el espacio medible $(\mathcal{H}, \text{bor}(\mathcal{H}))$ que fuera el límite proyectivo de $(\nu_F)_{F \in \mathcal{F}}$, tendríamos que $1_F(\nu) = \nu_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$ por la definición de límite proyectivo y si $A \in \text{bor}(F)$ y $T = p_F^{-1}(A)$ entonces

$$\nu(p_F^{-1}(A)) = \nu(T) = \nu_F(T) = \mu_F(A).$$

Así que $p_F(\nu) = \mu_F$ para todo $F \in \mathcal{F}$ lo cual hemos mostrado que no puede ocurrir.

Reconocimiento: Este artículo hace parte de la tesis de grado presentada por el autor para optar al grado de matemático en el Departamento de Matemáticas de la universidad del Valle y dirigida por el profesor Guillermo Restrepo. El autor está agradecido con el profesor Restrepo y con quienes hicieron posible este trabajo.

Referencias

- [1] E. Andersen, B. Jessen. *On the Introduction of Measures in Infinite Product Sets*, Danske Vid, Selsk.Mat.-Fys. Medd.25, no.4, 1948.
- [2] P. R. Halmos. *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1950.
- [3] A. V. Skorohod. *Integration in Hilbert space*, Springer-Verlag, 1974.
- [4] M. Gómez. *Límites proyectivos de medidas*, Tesis de pregrado. Departamento de Matemáticas. Universidad del Valle, 2002.

Dirección del autor: Michell Andrés Gómez Leiva. Departamento de Matemáticas,
Universidad del Valle, Cali, Colombia.