



DISEÑO PARAMÉTRICO DE UN SISTEMA PLANETARIO DE TRANSMISIÓN DE POTENCIA MECÁNICA

Presentado por:

Autor: Jean Paul Cáceres Cano

Director: Guillermo Andrés Jaramillo Pizarro Ph.D.

Documento presentado como requisito para optar por el título de
Ingeniero Mecánico



**IMPETUS
INDOMITUS**

Research Team in energy conversion
& propulsion revolution

IMPETUS INDOMITUS

Research Team in energy conversion and propulsion revolution

Escuela de Ingeniería Mecánica

Universidad del Valle

Agosto 2025

Resumen

Este proyecto de grado presenta el desarrollo e implementación de un algoritmo orientado al diseño paramétrico automatizado de sistemas planetarios, considerando restricciones geométricas, espaciales y funcionales, así como criterios mecánicos de resistencia y seguridad. El algoritmo fue estructurado en módulos secuenciales basados en programación lineal, lo que permite una solución organizada y eficiente del problema de diseño, desde la determinación de relaciones de transmisión hasta la verificación estructural de componentes clave como engranajes, ejes y portaplanetas. Como resultado, se obtienen sistemas con configuraciones válidas que cumplen con las restricciones espaciales y funcionales establecidas, cuyas piezas son generadas y exportadas en formato CAD (Computer Aided Drawing). La validación analítica de un caso particular confirma la solidez de las soluciones propuestas, con factores de seguridad y deflexiones dentro de los límites aceptables. Este trabajo establece una base metodológica sólida para futuras aplicaciones e investigaciones en diseño asistido por computador y automatización del diseño mecánico.

Palabras clave: Diseño paramétrico, sistema planetario de transmisión de potencia, Programación lineal, métodos analíticos, criterios de diseño, restricciones espaciales, restricciones geométricas, restricciones funcionales, dibujo asistido por computador (CAD).

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo profundamente a mi abuela y a mi madre, quienes son las artífices fundamentales de la persona que soy hoy y mi inspiración diaria para seguir adelante. De manera especial, también agradezco a mi tío Andrés, por su constante motivación para que continuara mis estudios y por haberme guiado hacia la Ingeniería Mecánica como carrera; siempre has brindado consejos valiosos que han marcado mi camino. Asimismo, agradezco a mi abuelo, quien en estos últimos días de redacción y a lo largo de toda la carrera me impulsó a no rendirme y a dar ese último esfuerzo que, sin duda, siempre vale la pena.

Expreso mi sincero reconocimiento a la Universidad del Valle por la formación integral recibida durante estos años, que me permitió crecer como un profesional íntegro, con un espíritu de superación y constante curiosidad intelectual.

De igual forma, agradezco a la Escuela de Ingeniería Mecánica por proveerme las herramientas y conocimientos necesarios para enfrentar con éxito los retos del ámbito laboral. Su enseñanza ha reafirmado en mí que la dedicación y el esfuerzo son esenciales para alcanzar la excelencia profesional.

Al profesor Guillermo Jaramillo, le manifiesto mi profunda gratitud por su acompañamiento y orientación durante el desarrollo de este proyecto de grado. Es un honor contar con su apoyo, pues sabe cómo motivar y sacar lo mejor de sus estudiantes, siempre dispuesto a brindar su ayuda.

Finalmente, agradezco a mis compañeros Nicolás Valencia y Juan David Mosquera, quienes hicieron que este proceso fuera más llevadero. Gracias por no permitirme desfallecer y por motivarme durante estos últimos años de la carrera.

Contenido

Resumen	2
Agradecimientos	3
Lista de figuras	6
Lista de tablas	10
1. Introducción	13
1.1. Antecedentes	14
1.2. Planteamiento del problema	15
1.3. Justificación	16
1.4. Revisión de la literatura	16
1.4.1. Análisis bibliométrico	16
1.4.2. Estado del arte	17
1.5. Objetivos	20
1.5.1. Objetivo general	20
1.5.2. Objetivos específicos	20
1.6. Marco teórico	21
1.6.1. Sistemas planetarios	22
1.6.2. Componentes mecánicos de un sistema planetario	24
1.6.3. Consideraciones generales de materiales usados en componentes mecánicos	33
1.6.4. Diseño paramétrico en ingeniería mecánica	35
1.6.5. Programación lineal aplicada al diseño mecánico	35
1.6.6. Automatización del diseño y generación de geometría	38
1.7. Metodología	40
1.8. Impacto esperado	42
2. Criterios y restricciones para el diseño paramétrico de sistemas de transmisión de potencia planetarios	43
2.1. Requerimientos, restricciones y criterios para el diseño paramétrico de sistemas de transmisión de potencia planetarios	43
2.1.1. Requerimientos funcionales necesarios para el diseño paramétrico de sistemas planetarios	43
2.1.2. Descripción de la geometría de los componentes que conforman un sistema planetario	46
2.1.3. Restricciones geométricas de los componentes de los sistemas planetarios a diseñarse de manera paramétrica	54
2.1.4. Restricciones del sistema según su entorno de instalación	59
2.1.5. Restricciones asociadas a los materiales seleccionados para la fabricación de los componentes del sistema	61

2.1.6.	Restricciones relacionadas con piezas estandarizadas	62
2.1.7.	Criterios de diseño para las piezas que componen un sistema planetario . . .	63
2.1.8.	Restricciones generales	64
3.	Protocolo de parametrización para el diseño de sistemas planetarios	66
3.1.	Desarrollo del algoritmo para el cálculo de la geometría de un sistema planetario de manera paramétrica	66
3.1.1.	Propósito del algoritmo y alcance	67
3.1.2.	Estructura general del algoritmo	68
3.2.	Validación del cumplimiento de las restricciones y criterios del protocolo	74
3.2.1.	Descripción general del proceso	74
3.2.2.	¿Qué restricciones y criterios se deben tener en cuenta para la selección del ancho de cara?	75
3.2.3.	Aplicación de restricciones en el script	75
3.2.4.	El rol del bloque de programación lineal	75
3.2.5.	Interacción entre las restricciones y el script	76
4.	Evaluación del desempeño mecánico de un sistema planetario generado por el algoritmo, mediante una verificación analítica	77
5.	Conclusiones	85
6.	Recomendaciones y trabajos futuros	86
6.1.	Recomendaciones	86
6.2.	Trabajos futuros	86
	Referencias	87
	Anexos	90
A.	Fundamentos teóricos para el cálculo de los esfuerzos en componentes de sistemas de transmisión de potencia	90
A.1.	Fundamentos teóricos	90
A.2.	Fuerza hidrostática	94
A.3.	Transmisión de potencia mecánica	95
A.4.	Condiciones geométricas de compatibilidad en sistemas planetarios	96
A.5.	Cálculo de fuerzas sobre los dientes de los engranajes pertenecientes a un sistema planetario	97
B.	Materiales, dimensiones y propiedades utilizadas en la configuración paramétrica del sistema	103
C.	Presentación de fragmentos del código que implementa el algoritmo propuesto . . .	107
D.	Procedimiento detallado para calcular el factor de seguridad de las piezas generadas por el algoritmo en el caso de estudio	113
D.1.	Cálculo del factor de seguridad de manera analítica para los dientes de los engranajes del sistema	113
D.2.	Cálculo de los factores de seguridad en distintos puntos del árbol de entrada del sistema	116
D.3.	Cálculo de factores de seguridad para el portaplanetas	121
D.4.	Cálculo de factores de seguridad en las cuñas del sistema propuesto	130
D.5.	Cálculo de la vida útil de los rodamientos	132
D.6.	Diagramas de fuerzas para los demás arboles del sistema	133
E.	Magnitudes para el cálculo de factores de seguridad en la validación del algoritmo .	135
F.	Piezas del caso de estudio generadas por el algoritmo en formato CAD y ensamble del sistema	144

Lista de figuras

1.1.	Árbol del problema del proyecto de grado.	15
1.2.	a. Número de artículos publicados a través de los últimos 20 años. Información modificada y tomada de Scopus [10]. b. Relaciones entre otros términos encontrados en artículos relacionados con el tema y las palabras clave mencionadas.	17
1.3.	Árbol de objetivos del proyecto de grado.	21
1.4.	Montaje típico de un sistema de transmisión basado en trenes planetarios. Imagen modificada de [15]	22
1.5.	Ejemplo representativo de la geometría de un portaplanetas diseñado para el ensamblaje de cinco planetas. Los planetas pueden ser montados sobre vigas que faciliten su rotación, o bien sobre ejes, con el apoyo de rodamientos ubicados en los discos para garantizar su movimiento adecuado. Imagen tomada de [29].	32
1.6.	Código utilizado para la solución del ejemplo planteado. Implementado en el lenguaje de programación Python.	38
1.7.	Código utilizado para la construcción automática y paramétrica de un buje en Autodesk Inventor mediante su API	39
1.8.	Metodología presentada en el diagrama de bloques diseñada para asegurar el cumplimiento del proyecto.	40
2.1.	Organización de los requerimientos, restricciones y criterios considerados en el protocolo mediante un diagrama de bloques, en el cual se indica la sección correspondiente al desarrollo de cada uno de ellos, facilitando su identificación y trazabilidad dentro del documento.	44
2.2.	Descripción geométrica del lugar de instalación del sistema.	45
2.3.	Descripción geométrica del engranaje solar en un sistema planetario.	46
2.4.	Descripción geométrica del engranaje planetario en un sistema planetario.	47
2.5.	Descripción geométrica del engranaje anular en un sistema planetario.	48
2.6.	Descripción geométrica de los árboles en un sistema planetario. a. Sección transversal del árbol en la ubicación del cuñero. b. Vista en detalle de la sección transversal del cuñero. c. Vista en detalle de la ranura en la que se ubicará el anillo de retención del árbol, se aprecia el espesor del anillo y el radio de empalme entre diámetros. d. Vista en detalle de la ranura del anillo de retención, se aprecia una reducción del diámetro del árbol en dicha ubicación.	49
2.7.	Descripción geométrica de las cuñas utilizadas en el sistema planetario. Se muestra su sección transversal, considerando que la longitud es constante y de sección uniforme, por lo que no se representa en la figura.	50
2.8.	Descripción geométrica de los anillos utilizados en el sistema planetario. Se muestra su sección transversal, considerando que su espesor es constante y de sección uniforme, por lo que no se representa en la figura.	50
2.9.	Descripción geométrica de los tornillos prisioneros utilizados en el sistema planetario. Se presentan las vistas lateral y frontal del componente, con indicación de sus principales dimensiones normalizadas.	51

2.10. a. Descripción geométrica de los bujes utilizados en el sistema planetario. b. Descripción geométrica de los rodamientos utilizados en el sistema planetario.	52
2.11. Descripción geométrica del portaplanetas. Se incluyen vistas en sección y detalles ampliados con el fin de facilitar una comprensión de su geometría.	53
2.12. Descripción geométrica de las vigas encargadas de soportar y permitir el movimiento de los engranajes planetarios.	54
2.13. Bosquejo esquemático de un sistema con dos etapas. La representación no corresponde a la configuración final del diseño; se utiliza únicamente con fines ilustrativos para el desarrollo de la Ec.2.34.	60
3.1. Representación esquemática del funcionamiento del algoritmo de cálculo para sistemas planetarios, mediante un diagrama de flujo. Las líneas negras indican el flujo de información entre bloques, mientras que las líneas azules representan la transferencia de datos desde los bloques hacia la etapa encargada de la generación de las piezas en formato CAD.	69
4.1. Partes del sistema generado por el algoritmo para el caso de estudio.	77
4.2. Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en los árboles del sistema diseñado mediante el algoritmo.	78
4.3. Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en los discos pertenecientes a los portaplanetas del sistema diseñado mediante el algoritmo.	79
4.4. Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en las manzanas pertenecientes a los portaplanetas del sistema diseñado mediante el algoritmo.	79
4.5. Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en las cuñas a utilizarse en el sistema diseñado mediante el algoritmo.	80
4.6. Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de la vida útil de los rodamientos del sistema diseñado mediante el algoritmo.	80
4.7. Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en los engranajes del sistema diseñado mediante el algoritmo.	81
4.8. Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en las vigas pertenecientes a los portaplanetas del sistema diseñado mediante el algoritmo.	82
A.1. Representación del principio de presión y fuerza hidrostática.	95
A.2. Representación geométrica basada en los diámetros primitivos de los engranajes en un sistema planetario.	97
A.3. Vista lateral del portaplanetas de la primera etapa del sistema representado en diagrama de árbol.	98
A.4. Vista lateral de un engrane planetario de la primera etapa, mostrando las fuerzas que actúan sobre él.	99
A.5. Vista lateral del portaplanetas de la segunda etapa del sistema representado en diagrama de árbol.	100
A.6. Vista lateral de un engrane planetario de la segunda etapa, mostrando las fuerzas que actúan sobre él.	101
C.1. Sección del código donde se calcula la razón de velocidad m_V . Se usa un ciclo if que permite el cambio del numero de etapas dependiendo la razón deseada.	107
C.2. Módulo del código destinado al cálculo del diámetro primitivo y del número de dientes del engranaje, conforme a las restricciones establecidas.	107

C.3.	Módulo del código destinado al cálculo de factores geométricos asociados a los esfuerzos por fatiga de flexión y fatiga de contacto en los dientes de los engranajes. . .	108
C.4.	Parte del código orientado al cálculo del ancho de cara de los engranajes según la etapa de transmisión, así como a la selección de materiales para los mismos.	108
C.5.	Segmento del código orientado al cálculo del ancho y otras dimensiones geométricas del portaplanetas. Aunque se muestran pocas variables definidas, en el módulo se calculan más de 200 variables intermedias.	109
C.6.	Segmento del código orientado al cálculo de las fuerzas y pares torsores presentes en cada una de las etapas del sistema. En esta sección también se calcula y define la longitud máxima permitida para cada uno de los árboles, con el fin de cumplir con las restricciones de espacio.	109
C.7.	Segmento del código orientado al cálculo de la geometría del árbol de entrada del sistema. Son definidas mas de 300 variables para el calculo dicha geometría.	110
C.8.	Segmento del código orientado al cálculo de la geometría de los árboles intermedios del sistema, en caso de que estos existan. La función recibe como argumento N_{ET} , ya que la cantidad de etapas condiciona las fuerzas consideradas en el análisis de esfuerzos y, en consecuencia, la geometría resultante.	110
C.9.	Segmento del código orientado al cálculo de la geometría del árbol de salida del sistema.	111
C.10.	Segmento del modulo orientado a la selección de los rodamientos utilizados en el sistema.	111
C.11.	Segmento del código utilizado para la generación de las piezas que componen el sistema en formato CAD.	112
D.1.	Diagrama de fuerzas que actúan sobre un engrane cuando en este se da una transmisión de potencia.	116
D.2.	a. Bosquejo del árbol de entrada con algunas de sus medidas principales en terminos de variables. b. Diagrama de fuerzas correspondiente al árbol de entrada para el caso particular de análisis. Se identifican los puntos relevantes donde se evaluarán los factores de seguridad y las deflexiones, con el objetivo de caracterizar el comportamiento estructural del árbol bajo las condiciones de carga consideradas. . .	121
D.3.	a. Bosquejo de la viga perteneciente al portaplanetas. Se presentan las secciones transversales donde se realiza el análisis de esfuerzos, identificando los puntos específicos sobre la viga correspondiente a la primera etapa. Se destaca una vista en detalle que muestra una muesca, la cual justifica el análisis en esa ubicación. b. Diagrama de fuerzas donde se detallan las fuerzas externas a las que está sometida la viga, con el fin de caracterizar adecuadamente el estado de carga para el análisis estructural.	125
D.4.	Área de análisis sobre los discos, la cual estará sometida a fuerzas de aplastamiento. Las dimensiones de esta zona se muestran en la figura.	127
D.5.	Esquema de localización de puntos críticos adicionales en los portaplanetas que requieren un análisis detallado.	128
D.6.	Diagrama de fuerzas y pares torsores que actúan sobre la manzana del portaplanetas. Se considera una sección del portaplanetas, por lo que la reacción analizada corresponde a la generada internamente dentro del cuerpo del portaplanetas.	130
D.7.	a. Diagrama de fuerzas actuantes sobre la cuña. b. Áreas de aplicación de los esfuerzos: izquierda, esfuerzo cortante; derecha, esfuerzo de aplastamiento.	132
D.8.	a. Bosquejo del árbol intermedio con algunas de sus medidas principales en términos de variables, están son proporcionadas por el algoritmo. b. Diagrama de fuerzas aplicadas sobre el árbol intermedio del sistema utilizado para la validación del algoritmo. Se indican los puntos específicos en los que se verificará el factor de seguridad, realizando adicionalmente el cálculo de deflexiones en las secciones correspondientes a los puntos a, c y e.	133

D.9. a. Bosquejo del árbol de salida con algunas de sus medidas principales en términos de variables b. Diagrama de fuerzas aplicadas sobre el árbol intermedio del sistema utilizado para la validación del algoritmo. Se indican los puntos específicos en los que se verificará el factor de seguridad, realizando adicionalmente el cálculo de deflexiones en las secciones correspondientes a los puntos a, c y e. En este caso particular no se considera el punto g en el análisis, ya que dicho árbol cuenta únicamente con un cuñero, a diferencia de otros árboles evaluados.	134
F.1. Anillos de retención a ubicarse en el árbol de entrada del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.	144
F.2. Anillos de retención a ubicarse en el árbol de salida del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.	144
F.3. Anillos de retención a ubicarse en el árbol intermedio del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.	144
F.4. Árbol de entrada del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio. . .	145
F.5. Árbol intermedio del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio. . .	145
F.6. Buje a ubicarse en el segundo portaplanetas del sistema propuesto.	145
F.7. Buje a ubicarse en el primer portaplanetas del sistema propuesto.	145
F.8. Cuña a ubicarse sobre el árbol de salida del sistema propuesto.	145
F.9. Cuña a ubicarse sobre el extremo izquierdo del árbol intermedio del sistema propuesto.	146
F.10. Cuña a ubicarse sobre el extremo derecho del árbol intermedio del sistema propuesto.	146
F.11. Cuña a ubicarse sobre el extremo derecho del árbol de entrada del sistema propuesto.	146
F.12. Cuña que permite la transmisión de potencia entre la turbina y el árbol de entrada del sistema.	146
F.13. Engrane anular de la primera etapa del sistema propuesto.	146
F.14. Engrane anular de la segunda etapa del sistema propuesto.	147
F.15. Engrane planetario de la primera etapa del sistema propuesto.	147
F.16. Engrane planetario de la segunda etapa del sistema propuesto.	147
F.17. Engrane solar de la primera etapa del sistema propuesto.	147
F.18. Engrane solar de la segunda etapa del sistema propuesto.	147
F.19. Portaplanetas perteneciente a la primera etapa del sistema propuesto.	148
F.20. Portaplanetas perteneciente a la segunda etapa del sistema propuesto.	148
F.21. Tornillo prisionero a ubicarse en la manzana del portaplanetas de la primera etapa del sistema propuesto.	148
F.22. Tornillo prisionero a ubicarse en la manzana del portaplanetas de la segunda etapa del sistema propuesto.	148
F.23. Tornillo prisionero a ubicarse en las vigas de los portaplanetas.	148
F.24. Viga de sujeción de los engranajes planetarios pertenecientes a la primera etapa del sistema.	149
F.25. Viga de sujeción de los engranajes planetarios pertenecientes a la segunda etapa del sistema.	149
F.26. Sistema ensamblado a partir de las piezas generadas por el algoritmo para el caso de análisis.	149

Lista de tablas

1.1. Metodología de ejecución de este proyecto de grado.	41
4.1. Comparación de deflexiones obtenidas: obtenidas analíticamente y obtenidas con el algoritmo.	83
4.2. Comparación de vida útil de rodamientos: obtenida analíticamente y obtenida con el algoritmo.	84
4.3. Comparación de factores de seguridad: obtenido analíticamente y obtenido con el algoritmo.	84
B.1. Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados para los engranajes, árboles, portaplanetas y cuñas del sistema. Se define el módulo de elasticidad como E , la razón de Poisson como ν , la dureza del material como D , y la densidad como ρ . Además, $\sigma_{H \text{ lim}}$ representa la resistencia a la fatiga por contacto, $\sigma_{F \text{ lim}}$ la resistencia a la fatiga por flexión, y S_{ut} la resistencia última a tracción. El factor de acabado superficial que influye en el cálculo de las resistencias corregidas del material se denota como C_{sup} . La resistencia a la fatiga por flexión sin considerar el factor de tamaño se expresa como S'_e , mientras que $\sqrt{a}$ es la constante de Neuber, G es el módulo de elasticidad transversal, y S_y es la resistencia a la fluencia del material. .	103
B.3. Medidas estandarizadas de los anillos de retención según el diámetro del árbol, basadas en el estándar DIN 471 [26]. El diámetro d_E corresponde al diámetro nominal del eje, s es el espesor radial total del anillo, y d_3 es el diámetro interior del anillo. El parámetro a define el espesor radial de las orejetas de posicionamiento, y b el espesor radial en la región opuesta a la abertura. El diámetro d_5 corresponde a los orificios mecanizados en las orejetas. Además, d_2 representa el diámetro de la ranura maquinada en el árbol, ma es el espesor axial de la ranura, y t su profundidad. El radio r indica la curvatura mínima permitida en la base de la ranura. Finalmente, n_{abl} es la velocidad rotacional máxima admisible del anillo.	103
B.4. Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados para los bujes. Sea en esta tabla, ν la razón de Poisson del material, D su dureza y S_y su resistencia a la fluencia.	104
B.5. Características geométricas y operativas de rodamientos tipo Conrad comerciales. Valores tomados de catálogo [35]. Se presentan el diámetro interno d_r , el diámetro externo D_r , el espesor B , y el radio en las aristas r_r . Además, se incluye la carga límite de fatiga C_u , así como el límite de velocidad de operación. Finalmente, se muestran las dimensiones necesarias para el alojamiento del rodamiento: el diámetro máximo permitido del eje d_a , el diámetro máximo del alojamiento externo D_a , y el radio de empalme en el alojamiento r_{ar} para garantizar un montaje adecuado. . . .	104

B.6.	Características geométricas y operativas de rodamientos de bolas de contacto angular comerciales. Valores tomados de catálogo [36]. Se presentan el diámetro interno d_r , el diámetro externo D_r , el espesor B , y el radio en las aristas r_r del rodamiento seleccionado. Además, se incluye la carga límite de fatiga C_u , así como el límite de velocidad de operación. Se muestran las dimensiones necesarias para el alojamiento del rodamiento: el diámetro máximo permitido del eje d_a , el diámetro máximo del alojamiento externo D_a , y el radio de empalme en el alojamiento r_{ar} para garantizar un montaje adecuado. Por último se muestra el factor de comparación e y los factores de ajuste X y Y , utilizados en el cálculo de la vida útil del rodamiento angular.	104
B.7.	Aceites comerciales seleccionados para la lubricación de sistemas dentro del protocolo de diseño. En esta tabla se presentan la viscosidad dinámica η , la viscosidad cinemática a 40°C ν_v , y la densidad del aceite ρ	105
B.8.	Especificaciones de materiales y durezas para anillos de retención DIN 471.	105
B.9.	Tamaño de tornillo recomendado según el diámetro del árbol. Valores tomados de [37].	106
B.10.	Dimensiones características de tornillos según su clasificación. Valores tomados del estándar ISO 4028 [33].	106
E.1.	Cálculo de los factores geométricos necesarios para determinar los esfuerzos debido a fatiga por flexión y por contacto en los dientes de los engranes del sistema.	135
E.2.	Cálculo de los factores de carga necesarios para determinar los esfuerzos debido a fatiga por flexión y por contacto en los dientes de los engranes del sistema. El símbolo E_1 y E_2 hace referencia a en que etapa se realiza el cálculo.	135
E.3.	Cálculo de los factores de material necesarios para determinar las resistencias corregidas a la fatiga por flexión de los materiales que componen a los engranes del sistema.	136
E.4.	Cálculo del factor de carga en cara $K_{H\beta}$ necesario para determinar el esfuerzo de flexión en la raíz de los dientes de los engranes en las diferentes etapas.	136
E.5.	Cálculo de factores de carga Z necesarios para determinar el esfuerzo de fatiga por contacto en la cara de los dientes de los engranes en las diferentes etapas.	136
E.6.	Cálculo de los factores de material necesarios para determinar las resistencias corregidas a la fatiga por contacto de los materiales que componen a los engranes del sistema.	137
E.7.	Esfuerzos debido a fatiga por flexión en la raíces de los dientes de los engranes de la primera y segunda etapa del caso de estudio. Estos esfuerzos son calculados a partir de la Ec.1.9 y algunos de los factores calculados hasta el momento.	137
E.8.	Esfuerzos debido a fatiga por contacto en la cara de los dientes de los engranes de la primera y segunda etapa del caso de estudio. Estos esfuerzos son calculados a partir de las Ec.1.12 y 1.13, esto dependiendo de si se evalúa el piñón o el engrane del par, y algunos de los factores calculados hasta el momento.	138
E.9.	Valores de resistencias corregidas tanto para la fatiga por flexión S_b , como para la fatiga por contacto S_H de los materiales que componen los engranes del caso de estudio.	138
E.10.	Factores de seguridad frente a la fatiga por flexión en las raíces de los dientes de los engranajes del caso, utilizados para la validación del algoritmo. Calculados a partir de la Ec.1.11.	138
E.11.	Factores de seguridad frente a la fatiga por contacto en las caras de los dientes de los engranajes del caso, utilizados para la validación del algoritmo. Calculados a partir de la Ec.1.16.	139
E.12.	Fuerzas alternantes y medias debido a las fuerzas del peso de los engranes presentes en los portaplanetas de la primera y segunda etapa en el caso de estudio planteado. Calculadas a partir de la Ec.1.6.	139

E.13. Fuerzas alternantes y medias debido a las fuerzas de transmisión en los portaplanetas de la primera y segunda etapa en el caso de estudio planteado. Calculadas a partir de la Ec.1.6.	139
E.14. Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}), y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P1 de la viga del primer portaplanetas del sistema. Los esfuerzos de flexión se calculan mediante la Ec.A.6, los esfuerzos cortantes mediante la Ec.A.8, y los esfuerzos equivalentes de Von Mises mediante la Ec.A.13.	139
E.15. Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}), y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P2 de la viga del primer portaplanetas del sistema. Todos los esfuerzos presentes en esta tabla son calculados de manera similar a la tabla anterior.	140
E.16. Esfuerzos de flexión alternantes y medios ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$) debido a fuerzas de peso y fuerzas de transmisión, esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}) debido a fuerzas de transmisión y de peso, y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P3 de la viga del primer portaplanetas del sistema.	140
E.17. Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}), y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P4 de la viga del primer portaplanetas del sistema.	141
E.18. Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}) en la ubicación P5 de la viga del primer portaplanetas del sistema.	141
E.19. Esfuerzos de flexión alternantes y medios ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$) generados por las fuerzas de peso y transmisión, así como esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}) derivados de las mismas fuerzas, en la ubicación P6 de la viga correspondiente al primer portaplanetas del sistema.	141
E.20. Fuerzas y pares torsores alternantes y medios presentes en el árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.	142
E.21. Par torsor T , momentos M y esfuerzos de Von Mises σ' alternantes y medios presentes en el punto b del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.	142
E.22. Momentos inducidos por las fuerzas de peso y de transmisión, M , y esfuerzos equivalentes de Von Mises, σ' , tanto alternantes como medios, presentes en el punto c del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.	142
E.23. Momentos inducidos en la dirección radial $M_{\text{Radial } P_d}$ y en la dirección tangencial $M_{\text{Tangencial } P_d}$, junto con los momentos totales alternantes $M_{\text{Alternante } P_d}$ y medios $M_{\text{Medio } P_d}$, y los esfuerzos equivalentes de Von Mises, σ' , tanto alternantes como medios, presentes en el punto d del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.	143
E.24. Momentos totales alternantes $M_{\text{Alternante } P_f}$ y medios $M_{\text{Medio } P_f}$, y esfuerzos equivalentes de Von Mises, σ' , tanto alternantes como medios, presentes en el punto f del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.	143
E.25. Esfuerzos cortantes alternantes $\tau_{\text{Alternante}}$ y medios τ_{Medio} , junto con los esfuerzos equivalentes de Von Mises alternante $\sigma'_{\text{Alternante Portaplanetas}}$ y medio $\sigma'_{\text{Medio Portaplanetas}}$, calculados en las ubicaciones $PB1$ y $PB2$ del portaplanetas.	143

1. Introducción

La energía mecánica, relacionada con la posición y movimiento de un objeto respecto a un marco de referencia, se vincula con el concepto de trabajo, definido como la transferencia de energía que ocurre cuando una fuerza actúa sobre un objeto y lo mueve una cierta distancia. La potencia por otra parte, se define como el trabajo realizado en un intervalo de tiempo [1]. Este concepto de potencia es crucial al diseñar sistemas de transmisión, ya que determina la cantidad de trabajo que debe transferirse en un tiempo específico [1].

Un sistema de transmisión de potencia transfiere energía mecánica entre un componente de un sistema o máquina, a través de una gran variedad de piezas mecánicas como lo pueden ser: engranes, chavetas, árboles, etc. Entre los sistemas de transmisión se suelen destacar los basados en engranajes planetarios, usados en industrias como la automotriz y la aeroespacial debido a su alta relación de eficiencia y a su capacidad de trabajar en espacios reducidos, entre otras ventajas adicionales [2]. Estos sistemas suelen estar compuestos de un engrane solar, engranes planetarios y un engrane anular, formando un tren de engranajes de contacto interno y externo [2]. El comportamiento de cada uno de los engranes del sistema dependerá del tipo de salida que se desee obtener de este, pues al ser un sistema de dos grados de libertad, se hace necesario contar con dos entradas para obtener una salida predecible [3]. Este tipo de sistemas se utilizan cuando, para una potencia específica, es necesario cambiar su par torsor asociado, lo cual implica una variación en la velocidad angular correspondiente, en función de los requisitos de salida de potencia requeridos.

A pesar del amplio uso de los sistemas de transmisión, su complejidad en diseño y funcionamiento plantea desafíos significativos. El diseño de engranajes internos genera dificultad debido a la complejidad para lograr un engranaje adecuado con los engranes correspondientes. Además, el diseño de los trenes de engranajes externos presenta desafíos para garantizar la correcta transmisión de potencia y una distribución adecuada de los esfuerzos entre los dientes en contacto. Asimismo, el diseño de chavetas y ejes también representa un desafío adicional al momento de determinar en que parte de la pieza se generan los mayores esfuerzos. Considerando estos retos, un proceso de diseño constante de estos sistemas puede volverse repetitivo y propenso a errores. Esta complejidad subraya la necesidad de desarrollar herramientas avanzadas que faciliten tanto el diseño como el análisis de estos sistemas, asegurando su correcto funcionamiento.

Teniendo esto en cuenta, en este proyecto de grado se elaborará un algoritmo para el dibujo de sistemas de transmisión de potencia planetarios, basado en las condiciones espaciales definidas. Para asegurar la viabilidad del diseño propuesto, se diseñará de manera analítica con base en la norma AGMA 6123-B06, la norma ISO 6336, la norma DIN 471 y otras normativas que permiten el correcto diseño de componentes mecánicos asociados a sistemas de transmisión de potencia basado en engranes planetarios, se dibujará en un software de dibujo asistido por computador (CAD), y se verificará de manera analítica utilizando conceptos de diseño de máquinas, un caso específico de aplicación del algoritmo. Esto proporcionará una herramienta de diseño sistemático y confiable, permitiendo a la universidad convertirse en un centro de manufactura de estos sistemas de transmisión y vinculándose más estrechamente con la industria manufacturera.

Este documento está estructurado en varias secciones que abarcan el desarrollo procedimental de un algoritmo para el diseño de sistemas planetarios de transmisión de potencia. Comienza con la

contextualización del problema a partir de antecedentes relevantes, seguido por el planteamiento y justificación del problema. Se realiza una revisión de la literatura para orientar los objetivos del proyecto, seguida de la formulación del marco teórico y la metodología propuesta para alcanzar dichos objetivos. Se incluye también un cronograma detallado para la gestión temporal del proyecto. Se presenta también una sección de presupuestos que detalla los costos asociados a su implementación. Finalmente, se analizan los impactos esperados del proyecto.

1.1. Antecedentes

El diseño paramétrico de sistemas planetarios de transmisión de potencia (en adelante, referidos como “sistemas planetarios”) ha sido un área de interés creciente en la ingeniería mecánica. Este enfoque permite crear sistemas de transmisión altamente eficientes y adaptativos, capaces de cumplir con una amplia gama de requisitos de rendimiento. A diferencia de un proceso de diseño llevado a cabo por una sola persona, que enfrentará desafíos como la repetitividad, el tiempo invertido en el diseño, la mejora del rendimiento del sistema elaborado y su adaptabilidad a distintas condiciones operativas específicas en cada caso, el diseño paramétrico, llevado a cabo por una computadora, ofrece flexibilidad y capacidad de ajuste según las necesidades específicas de cada aplicación. Esto significa que los sistemas diseñados de manera paramétrica pueden adaptarse y recalcularse de manera más accesible debido a cambios en las condiciones de carga y operación, mejorando así el proceso de diseño.

En relación con los desafíos del diseño repetitivo, Li et al. en 2011 [4], encontraron que, aunque los sistemas planetarios se componen de modelos matemáticos y estructuras predefinidas y las diferencias entre ellos suelen ser solo las dimensiones de sus partes, no existía una forma de evitar la realización de dibujos reiterativos donde solo cambian las dimensiones. Esto disminuía la eficiencia del dibujante y causaba problemas con los diseños duplicados.

Respecto a la mejora del rendimiento del sistema elaborado, el diseño llevado a cabo por personas de sistemas planetarios también presenta desafíos. Esto se puede evidenciar en el correcto diseño de las diferentes partes que componen el sistema. Por ejemplo, la mejora en el diseño de la corona dentada, puede significar un aumento en la estabilidad y eficiencia del sistema [5]. Este tipo de situaciones no solo se presentan en los engranes del sistema, un mal diseño del portador de planetas, que soporta el mayor par torsor de entrada, puede causar deformaciones que afectan la distribución uniforme de la carga sobre los engranes planetarios, resultando en una división desigual de la potencia, vibraciones y ruidos, reduciendo el rendimiento y la vida útil del sistema [6]. Por otra parte, Tsai y Zhuang en 2023 [7], identificaron que los problemas en la mejora del diseño se basaban en la dificultad del ensamblaje correcto de los engranajes, la influencia del desfase del engrane, la cantidad de planetas y la necesidad de modificaciones del perfil del diente. Ellos subrayaron la necesidad de un enfoque sistemático para analizar y diseñar sistemas planetarios, considerando todos estos factores para mejorar el rendimiento de la transmisión.

Finalmente, Dong et al. en 2023 [8], enfrentaron problemas con la adaptabilidad de sistemas planetarios. Aunque estos ofrecen ventajas en eficiencia y capacidad de par torsor, diseñar configuraciones válidas sin desalineación e interferencia sigue siendo un reto. Métodos como el de expansión, que realiza cambios sutiles en configuraciones existentes, dependen de la experiencia del ingeniero. Nuevas metodologías, como el método de matrices, ofrecen más configuraciones, aunque pocas son válidas. Por lo tanto, se necesita un método sistemático y automático para la selección a fin de encontrar la mejor configuración del sistema que cumpla con las diversas restricciones de diseño.

1.2. Planteamiento del problema

En ingeniería mecánica, el diseño de sistemas de transmisión de potencia es crucial para el funcionamiento de dispositivos y maquinarias industriales. Los sistemas planetarios son populares debido a su capacidad para transmitir grandes cantidades de potencia con un tamaño compacto y sus relaciones de transmisión alcanzables. Sin embargo, dado que cada aplicación tiene condiciones de trabajo diferentes, se requiere un extenso proceso de diseño para definir las geometrías y relaciones de transmisión necesarias, con el fin de asegurar el correcto funcionamiento de estos sistemas.

A pesar de los avances globales en el desarrollo paramétrico de sistemas de transmisión de potencia, en Colombia la investigación en esta área es aún escasa. En el equipo de investigación, Impetus Indomitus, se han desarrollado varios modelos de turbinas que, debido a su geometría y restricciones espaciales, requieren sistemas de transmisión específicos basados en engranajes planetarios. Sin embargo, no existe una oferta local para estos sistemas. Hasta ahora, diferentes personas de este equipo han elaborado diseños para los sistemas de transmisión de estas turbinas, pero con la futura construcción de más turbinas, este proceso se tornará en una actividad de diseño y manufactura ineficiente consumiendo grandes cantidades de tiempo.

Ante esta situación y la falta de referencias locales, surge la necesidad de desarrollar un nuevo protocolo para diseñar sistemas planetarios de manera paramétrica. Por este motivo, es de interés para el autor responder la siguiente pregunta: ¿Cómo proponer un sistema planetario de transmisión de potencia que satisfaga condiciones de espacio reducido ante un rango determinado de variación de potencia?

Árbol del problema

Se presenta el árbol del problema relacionado con cómo proponer un sistema planetario que satisfaga condiciones de espacio reducido ante un rango de variación de potencia. Este problema fundamental guía este proyecto de grado. La Fig.1.1 ilustra el árbol del problema, destacando sus causas y consecuencias.

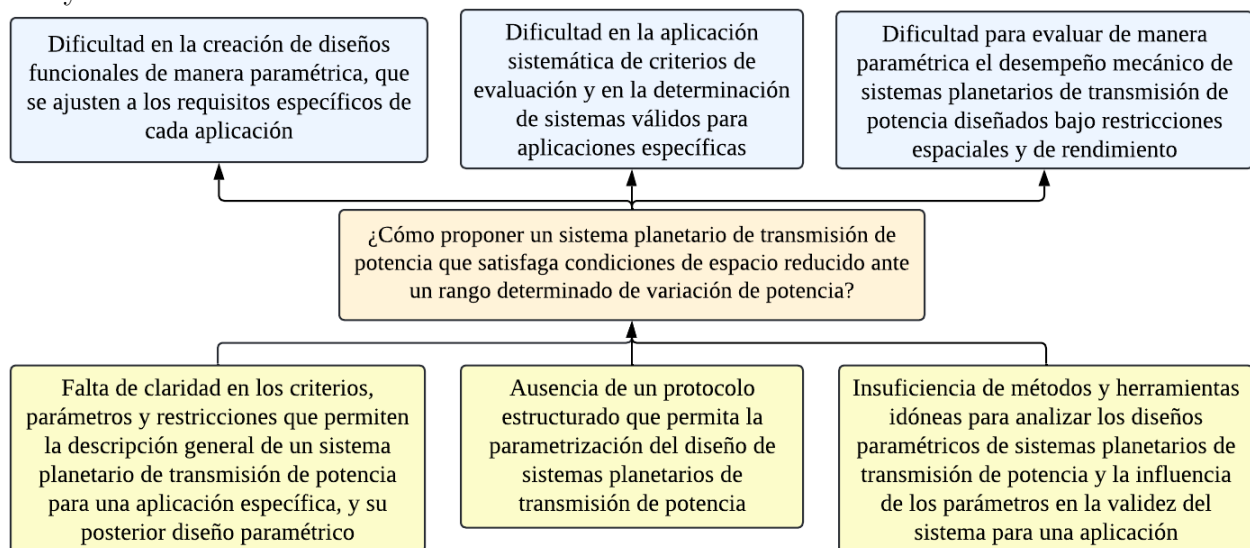


Figura 1.1: Árbol del problema del proyecto de grado.

1.3. Justificación

Aunque las cifras actuales aún no se conocen debido a que el año no ha terminado, Colombia mostró un crecimiento en su Producto Interno Bruto (PIB) del 0.6 % en 2023 con respecto al año 2022. De este crecimiento, aproximadamente el 6 % se atribuye a la producción del sector manufacturero en el Valle del Cauca, encargado la producción de equipos y maquinaria [9]. A pesar de la significativa presencia del sector manufacturero en esta región del país, la producción de sistemas de transmisión, especialmente los basados en engranajes planetarios, es casi inexistente debido al elevado costo y tiempo que requiere su correcto diseño, lo que hace que la industria local prefiera importarlos. Un diseño incorrecto puede causar una distribución desigual de la carga, vibraciones no deseadas y una reducción de la vida útil del sistema. Además, adaptar estos sistemas a diferentes condiciones de operación y requisitos específicos exige un análisis adicional para evitar problemas como desalineación e interferencia.

A pesar de que se pueden adquirir sistemas comerciales de transmisión de potencia, estos a menudo no cumplen con los requisitos específicos de aplicaciones particulares, como ocurre en el equipo de investigación Impetus Indomitus. En este equipo, los modelos de turbina desarrollados para la generación de potencia requieren sistemas planetarios con características específicas que los sistemas comerciales no ofrecen. Por lo tanto, cada nueva turbina implica diseñar un sistema de transmisión, diferenciándose principalmente en tamaño respecto a otros. Este proceso repetitivo y de alto consumo de tiempo en el diseño y la manufactura puede aumentar la probabilidad de errores, afectando negativamente el rendimiento del sistema final.

Por lo tanto, es necesario desarrollar un protocolo de diseño paramétrico para sistemas planetarios, con un enfoque flexible y adaptable que permita la generación automática de configuraciones válidas, considerando las condiciones específicas de funcionalidad y restricciones espaciales de cada aplicación. Este método busca superar las limitaciones de los métodos convencionales y proporcionar una solución más eficiente, sistemática y adaptable para el diseño de sistemas planetarios.

1.4. Revisión de la literatura

En esta sección se realizará un análisis bibliométrico de las palabras clave “Planetary Gear”, “Design” y “Parameter” en la base de datos Scopus y con la ayuda del software VosViewer para evaluar y cuantificar la producción científica en el diseño paramétrico de sistemas de transmisión de potencia. Este análisis identificará tendencias y áreas relacionadas, además de observar la evolución temporal del tema. También se revisarán artículos y estudios científicos con trazabilidad para analizar avances y enfoques en el diseño paramétrico de sistemas planetarios, proporcionando una comprensión profunda de las tendencias y prioridades actuales en esta área.

1.4.1. Análisis bibliométrico

La Fig.1.2.a muestra un aumento notable en el número de artículos con las palabras “Parametric Design” y “Planetary Gear” en los últimos 20 años, alcanzando un máximo de 11 artículos en 2012 según Scopus [10]. Esta tendencia sugiere que el interés en el diseño paramétrico de sistemas planetarios se mantiene con los años, buscándose configuraciones válidas que se adapten a necesidades específicas.

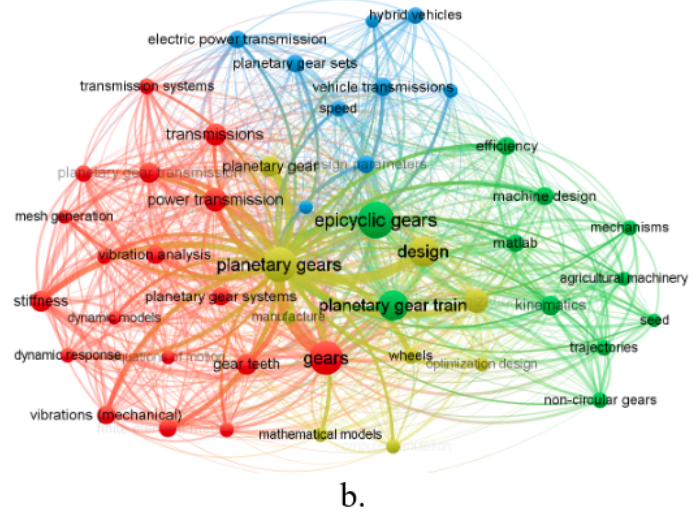
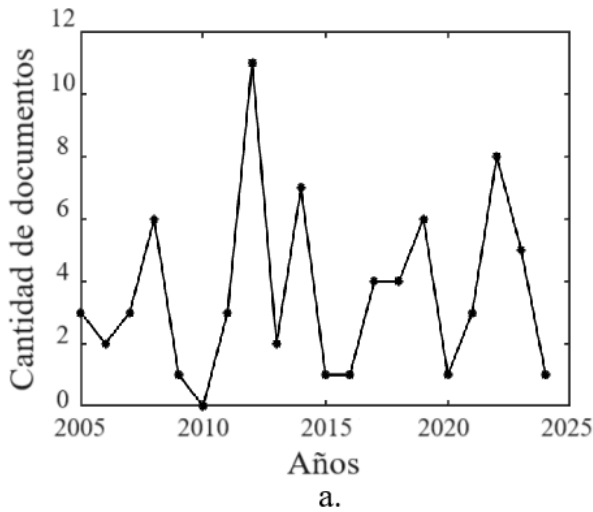


Figura 1.2: **a.** Número de artículos publicados a través de los últimos 20 años. Información modificada y tomada de Scopus [10]. **b.** Relaciones entre otros términos encontrados en artículos relacionados con el tema y las palabras clave mencionadas.

Por otra parte, la Fig.1.2.b. presenta algunos de los términos más relacionados con las palabras clave expuestas en el párrafo anterior, según un análisis realizado con el software VosViewer. En esta figura, las curvas más gruesas indican una relación más estrecha entre dos palabras. Se identificaron términos estrechamente relacionados con las palabras claves mencionadas, como “Optimization Design”, “Finite Element Analysis”, “Dynamic Response”, “Mesh Generation”, “Machine Design”, “Python” y “Matlab”. Estas asociaciones sugieren un enfoque multidisciplinario en el diseño paramétrico de engranes planetarios, que abarca desde el diseño optimizado y el análisis de elementos finitos hasta la respuesta dinámica del sistema. Este análisis nos ayuda a identificar términos adicionales para mejorar nuestra búsqueda de información relevante para el proyecto.

1.4.2. Estado del arte

En esta revisión literaria se presentan dos subtemas que estructuran la investigación del diseño de sistemas planetarios, y dentro de los cuales se clasificaron los artículos seleccionados para conformar esta sección del documento. Dichos subtemas son: La optimización en el diseño de sistemas planetarios y el diseño paramétrico de estos sistemas. El primer subtema se enfoca en estrategias seguidas por variedad de autores para mejorar el diseño de ciertas componentes que estructuran los sistemas planetarios, como lo pueden ser el estudio de la geometría de los engranes y el portaplanetas, el uso de métodos matriciales y algoritmos genéticos para la optimización de diversas componentes, entre otras estrategias. Por otro lado, en el segundo subtema se destaca el empleo de herramientas computacionales avanzadas en la creación de planos y diseños funcionales de sistemas planetarios, basados en criterios de diseño como análisis de contacto y otros métodos analíticos.

1.4.2.1. Optimización en el diseño de sistemas planetarios

En el primer artículo estudiado, Yang et al. en 2008 [11], presentaron un método sistemático para optimizar el diseño del Tren de Engranes de Satélite Cerrado (Closed-Satellite Gear Train, CSGT), que ofrece una estructura más compacta y una mayor relación de transmisión en comparación con los engranajes planetarios convencionales. Dicho método sistemático se basa en lo siguiente:

1. **Análisis de características de transmisión:** Se deducen formulas para calcular la relación

de transmisión, la distribución de relaciones entre engranajes acoplados y el par tursor en cada componente.

2. **Consideración de factores a usarse:** Se consideraron factores como el momento de inercia total del sistema (principal criterio de optimización), la selección del número de dientes y módulos de los engranajes, las condiciones de compacidad y no interferencia.
3. **Modelo de optimización:** Se formula un modelo matematico donde el objetivo principal es minimizar el momento de inercia, esto por mejoras en la eficiencia y la reducción del peso, en dicho modelo las restricciones incluyen: eficiencia de transmisión, resistencia a fatiga, peso, costo y proporciones geométricas factibles.
4. **Exploración de configuraciones:** Desarrollo un programa basado en las ecuaciones deducidas para explorar combinaciones de parámetros y encontrar la configuración óptima.

Los autores, aplicaron el método a un ejemplo real (con una relación de transmisión cercana a 100:1 y potencia de entrada de 30 kW), mostrando cómo el modelo selecciona los mejores números de dientes para cada engranaje con base en el criterio de mínima inercia.

Por otra parte, Dong et al. en 2014 [6] propusieron un método de optimización multiobjetivo para mejorar el rendimiento dinámico y reducir el peso del portador de planetas en una caja de engranajes de turbina eólica de 1.5 MW. Combinando análisis de superficie de respuesta, diseño compuesto central (Central Composite Design, CCD) y algoritmos genéticos multiobjetivo (Multi-Objective Genetic Algorithms, MOGA), lograron minimizar esfuerzos, deformaciones y masa. La metodología fue validada experimentalmente, mostrando una reducción del 9.3 % en masa y del 40 % en esfuerzos respecto al diseño original.

En 2018, Mandol et al. [5] modelaron y optimizaron paramétricamente la corona dentada en un sistema de engranajes planetarios utilizando la metodología de superficie de respuesta y análisis de elementos finitos. El objetivo fue desarrollar un sistema robusto y eficiente, reduciendo esfuerzos y mejorando la estabilidad del conjunto. Con simulaciones en el software de elementos finitos ANSYS y diseño de experimentos en Minitab, encontraron parámetros geométricos óptimos para minimizar esfuerzos. Los resultados obtenidos indicaron que esta metodología permitía predecir fallos potenciales en el sistema y también proporcionaba información crucial para el diseño de engranajes más eficientes mecánicamente.

De manera similar, Gu et al. en 2020 [12] propusieron un método sistemático para diseñar, analizar y seleccionar configuraciones de sistemas de transmisión de potencia híbridos multimodos basados en dos conjuntos de engranajes planetarios. El método sistemático mencionado se basa en los siguientes pasos:

1. **Establecimiento de condiciones básicas de ensamblaje:** Se establecen seis condiciones geométricas necesarias: engrane correcto solplaneta, engrane planetaanillo, coincidencia de centros, espacio suficiente para planetarios, distribución angular y no interferencia.
2. **Formulación matemática:** A partir de las condiciones establecidas anteriormente, los autores desarrollan ecuaciones de restricción que relacionan los números de dientes de sol, corona y planetas.
3. **Elección de parámetros iniciales:** Entre las que se encuentran una relación de transmisión deseada, número de planetarios y el módulo de los engranajes.
4. **Filtración de combinaciones:** Se aplican las reglas de diseño para filtrar las combinaciones posibles, mediante el uso de muestreo ortogonal (Design of Experiments Method, DOE) y optimización por enjambre de partículas (Particle Swarm Optimization, PSO) para ajustar parámetros clave. Además se valida con las ecuaciones geométricas que no haya interferencia y que la transmisión sea factible.

5. **Validación:** Se aplican ejemplos prácticos para mostrar cómo las reglas reducen el trabajo de prueba y error, asegurando que el diseño final cumpla tanto con la relación de transmisión deseada como con la condición de ensamblaje.

De este modo, mediante la aplicación de este método sistemático, los autores desarrollaron una herramienta de optimización automática que permitió alcanzar elevados niveles de eficiencia en el consumo de combustible y un rendimiento dinámico óptimo en un vehículo de prueba.

En el último artículo revisado, Westphal et al. en 2021 [13] diseñaron y optimizaron etapas de un sistema planetario escalonado para aplicaciones de alta potencia. Utilizaron algoritmos para identificar combinaciones óptimas de números de dientes y evaluaron el comportamiento mediante análisis de elementos finitos. Optimizaron 18 parámetros geométricos bajo distintas condiciones, aplicando el método en vehículos eléctricos. Compararon diez modelos y concluyeron que su proceso permite seleccionar las mejores opciones mediante simulaciones dinámicas, validando el método.

1.4.2.2. Diseño paramétrico de sistemas planetarios

En 2011, Xianzhi et al. [4] aplicaron la parametrización en el diseño de transmisiones de engranajes planetarios mediante AutoCAD y Visual Lisp. Desarrollaron un programa que genera automáticamente dibujos paramétricos al modificar parámetros predefinidos, eliminando dibujos repetitivos. Esto permitió iteraciones rápidas y un diseño adaptable a cambios, mejorando la eficiencia del equipo de diseño y facilitando la exploración de configuraciones para aplicaciones industriales variadas.

He et al. en 2016 [14] propusieron un enfoque para mejorar el rendimiento dinámico de engranajes helicoidales, abordando interferencias, golpes y desequilibrios mediante modelado paramétrico y análisis de contacto con alivios y modificaciones en los dientes. Desarrollaron un programa en MATLAB para generar superficies modificadas y aplicaron elementos finitos para evaluar el impacto dinámico. Este método permitió analizar efectos en el ruido y profundizar en factores que afectan el rendimiento dinámico, contribuyendo al diseño y optimización de estos engranajes.

Con el fin de mejorar el rendimiento dinámico y económico de los vehículos, Peng et al. en 2023 [8] desarrollaron un método basado en matrices de búsqueda para aumentar el número de engranes en trenes planetarios. Utilizaron matrices de engranes, conexiones y características cinemáticas para detectar configuraciones inválidas, y un algoritmo de detección de planos para simular interferencias estructurales. Además, aplicaron optimización por PSO para automatizar la generación y selección de configuraciones válidas, minimizando la pérdida de soluciones óptimas.

Por último, en 2023, Tsai y Zuang [7] abordaron el diseño y análisis de sistemas de engranajes planetarios compuestos escalonados para mejorar el rendimiento de transmisión. Propusieron ecuaciones y seis reglas de diseño para verificar el ensamblaje y la razón de contacto entre dientes. Dichas reglas se describen a continuación:

1. **Instalación específica:** Si el número de dientes del sol y de la corona son múltiplos del número de planetas, y el número de dientes de los dos engranajes planetarios del satélite son primos entre sí, solo existe una única forma de instalar los planetarios. Todos deben quedar alineados exactamente igual que el primer planeta.
2. **Instalación por intervalo:** Los engranes planetarios pueden colocarse en posiciones separadas por un número fijo de dientes.
3. **Instalación aleatoria total:** Los engrane planetarios pueden instalarse en cualquier posición sin restricción.

4. **Aleatoria por combinación:** Aunque el numero de dientes del sol y la corona no sean múltiplos del número de planetas, los planetarios pueden montarse libremente si la combinación de dientes lo permite.
5. **Aleatoria por múltiplos:** Si el numero de dientes del sol y la relación entre los planetarios cumplen ciertas condiciones de múltiplos, los planetarios también se pueden instalar sin restricción.
6. **Verificación especial:** Cuando no se cumplen las reglas anteriores, se debe calcular el ángulo exacto de montaje para que el conjunto engrane bien.

Asimismo, los autores Introdujeron un modelo modificado para analizar el contacto bajo carga y estudiaron seis casos de diseño con diversas combinaciones de números de dientes. Concluyeron que la reducción de errores y una distribución uniforme de carga se lograba con engranajes en fase secuencial, identificando combinaciones óptimas que mejoran el rendimiento.

Los estudios previos citados contribuyen a la comprensión del problema abordado en este trabajo de grado. Se centran en el análisis y diseño de sistemas planetarios, destacando la parametrización de características geométricas, y de funcionalidad del sistema, fundamentales para este proyecto. Además, se exploran las relaciones entre los parámetros mencionados y las respuestas del sistema, proporcionando al autor un punto de partida para el diseño paramétrico de sistemas similares, que también enfrentarán restricciones espaciales adicionales.

1.5. Objetivos

En esta sección se presentan el objetivo general y los objetivos específicos de este proyecto de grado.

1.5.1. Objetivo general

Diseñar paramétricamente un sistema planetario de transmisión de potencia.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Definir los criterios y las restricciones para el diseño paramétrico de un sistema planetario de transmisión de potencia, para potencias máximas de 50 W y velocidades máximas de 3600 rpm.
2. Proponer un protocolo de parametrización basado en los criterios y restricciones especificadas para el diseño de un sistema planetario de transmisión de potencia.
3. Evaluar el desempeño mecánico de un caso particular de un sistema planetario de transmisión de potencia que se ajuste a las restricciones establecidas previamente utilizando una verificación analítica.

Árbol de objetivos

Consecuentemente, en la Fig.1.3 se presenta el árbol de objetivos con las soluciones derivadas del análisis de causa y efecto del árbol del problema de la sección anterior.

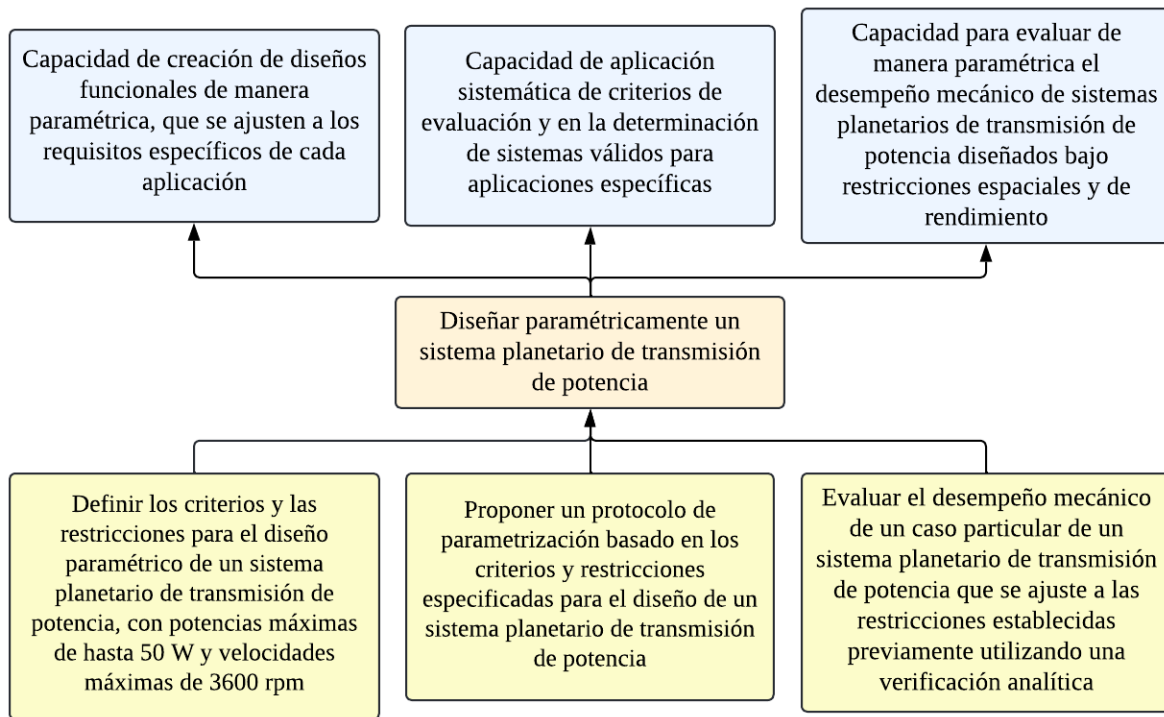


Figura 1.3: Árbol de objetivos del proyecto de grado.

1.6. Marco teórico

El presente capítulo reúne los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo del algoritmo propuesto y la validación de sus resultados. Inicialmente, se describe el funcionamiento de un sistema planetario, destacando sus características más relevantes, las fuerzas que actúan sobre los dientes de los engranajes y la determinación de la razón de velocidades del sistema. A continuación, se presentan los criterios de diseño y análisis de los componentes mecánicos más importantes, tales como engranajes, árboles, bujes, chavetas y portaplanetas, incluyendo aspectos relacionados con la selección de materiales adecuados para cada componente.

Seguidamente, se introduce el concepto de diseño paramétrico aplicado a la ingeniería mecánica, junto con una explicación detallada de la programación lineal como herramienta de optimización orientada a la identificación de soluciones factibles en el diseño mecánico. Finalmente, se abordan los principios de automatización del diseño y la generación asistida de geometría por computador, elementos clave para la integración del algoritmo con herramientas de modelado CAD. Esta estructura teórica permite contextualizar y justificar cada una de las decisiones adoptadas durante el desarrollo metodológico del proyecto.

Adicionalmente, en la sección A de los anexos se incluyen fundamentos teóricos básicos que, por su carácter introductorio, no se incorporan en el cuerpo principal del proyecto de grado, pero que resultan relevantes para el cálculo de variables necesarias en el análisis de esfuerzos. En dicha sección se abordan conceptos esenciales para la transmisión de potencia mecánica en componentes, así como definiciones de sistemas de transmisión de potencia mecánica y sus principales tipos.

1.6.1. Sistemas planetarios

Un sistema de transmisión de potencia basado en engranajes planetarios está compuesto por los siguientes elementos principales: el engranaje solar, que actúa como elemento central del sistema; el engranaje anular o corona, que rodea externamente a los engranajes planetarios; los engranajes planetarios, encargados de transmitir el movimiento entre el engranaje solar y la corona, caracterizados por poder trasladarse alrededor del engranaje solar según sea su aplicación; y el portaplanetas, que soporta y sincroniza el movimiento de los engranajes planetarios.

Además, dicho sistema incluye árboles y cuñas, que permiten la transmisión de potencia a través de distintos componentes del sistema; tornillos y anillos, que aseguran la fijación de otros componentes como lo pueden ser los árboles; y cojinetes y rodamientos, que reducen la fricción y garantizan el movimiento suave de las partes mecánicas, contribuyendo así a la eficiencia operativa del sistema. Adicionalmente, aunque no forman parte del sistema como tal, es fundamental considerar el papel de los lubricantes, los cuales se encargan de minimizar la fricción entre los componentes, prolongando así la vida útil del sistema y asegurando un buen rendimiento. Una vista representativa de este tipo de sistema se presenta en la Fig.1.4.

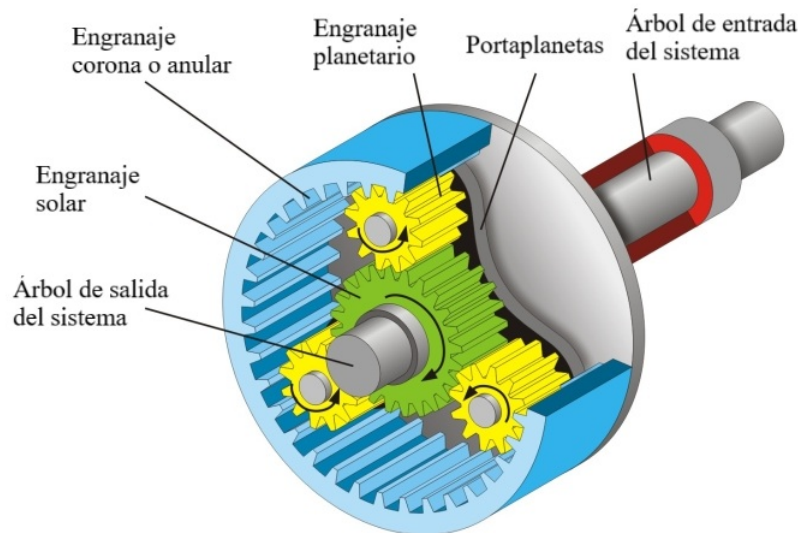


Figura 1.4: Montaje típico de un sistema de transmisión basado en trenes planetarios. Imagen modificada de [15] .

Este tipo de sistemas se emplean ampliamente en aplicaciones que requieren alta transmisión de potencia o grandes variaciones de velocidad en espacios reducidos, como ocurre en turbinas hidráulicas o eólicas. Esta característica constituye una de sus principales ventajas frente a los trenes de engranajes convencionales [3]. Sumado a lo mencionado con anterioridad, otra ventaja al uso de este tipo de trenes de engranajes, suele ser el presentar una mayor capacidad de carga debido a la naturaleza auto-equilibrante del tren, dependiendo de su configuración, lo que conlleva una reducción en las cargas sobre los cojinetes, menor peso total y menores requerimientos de espacio [16].

La variación de velocidad en los sistemas planetarios se logra principalmente mediante la interacción entre los engranajes y el portaplanetas, los cuales pueden configurarse de manera tal que permitan el aumento o la disminución de la velocidad. La función y configuración de los componentes engranaje solar, anular y portaplanetas depende directamente de la disposición del sistema, ya que algunos elementos pueden rotar alrededor de un punto fijo mientras otros se ubican sobre un centro móvil, permaneciendo ciertos componentes estacionarios según el diseño específico. En

configuraciones epicicloidales no diferenciales, al menos uno de los componentes debe permanecer fijo mientras los demás giran [17].

Los elementos que permanecerán fijos y los que serán móviles dependerán de la aplicación específica del tren planetario. Esta puede estar orientada, por ejemplo, a aumentar la velocidad de salida respecto a la velocidad de entrada al sistema, con su correspondiente disminución del par tursor, en virtud de la conservación de la potencia en sistemas ideales; o a reducir dicha velocidad, incrementando el par tursor. En el presente proyecto de grado, el algoritmo propuesto está orientado a incrementar la velocidad angular a partir de una potencia suministrada por una turbina de baja caída. Este tipo de turbinas operan con alturas de caída de hasta 3 metros o menos y se caracterizan por generar velocidades angulares reducidas [18]. Dado que los generadores eléctricos requieren superar una velocidad mínima de entrada para su correcto funcionamiento, resulta necesario emplear multiplicadores de velocidad, como los desarrollados en este trabajo, con el fin de posibilitar la conexión directa entre la turbina y el generador.

Para tal fin, el estándar AGMA 6123-B06 propone diversas configuraciones; una de ellas establece como componente fijo la corona, mientras que la entrada de velocidad angular se realiza a través del portaplanetas. Dadas estas dos condiciones, la velocidad de salida se obtiene mediante el engranaje solar, configuración que será adoptada en este proyecto.

En las dos subsecciones siguientes se presenta la formulación para el cálculo de la razón de velocidades en un tren planetario, así como el procedimiento para determinar las fuerzas actuantes en los dientes de los engranajes, en función del número de dientes de los engranajes anular, planetario y solar, del número de planetas, y de la potencia de entrada al sistema de transmisión.

1.6.1.1. Razón de velocidad de un tren planetario

Considerando que el punto de contacto entre dos engranajes posee la misma velocidad en ambos cuerpos, y teniendo en cuenta que, para el caso de análisis, el engranaje anular se encuentra fijo, mediante un análisis cinemático es posible determinar que la relación de velocidades m_V entre la entrada y la salida del sistema está dada por:

$$m_V = \frac{VelSal}{VelIn} = \frac{Z_C + Z_S}{Z_S} \quad (1.1)$$

Donde $VelSal$ representa la velocidad del eje de salida, $VelIn$ la velocidad de entrada, Z_C el número de dientes de la corona y Z_S el número de dientes del engranaje solar. Esta expresión evidencia que la razón de velocidad obtenida depende explícitamente de los parámetros geométricos del sistema, particularmente del número de dientes, los cuales al ser positivos y mayores que cero, lleva a que, bajo la configuración planteada, la velocidad de salida si será mayor que la de entrada.

En ciertas aplicaciones, la velocidad de salida obtenida mediante un solo tren de engranajes puede no ser suficiente, por lo que se requiere el uso de múltiples etapas para alcanzar la velocidad final deseada. En estos casos, la salida de una primera etapa se acopla a la entrada de una segunda etapa, de modo que el árbol de salida de la primera se convierte en el árbol de entrada de la siguiente. Para calcular la razón de velocidad total del sistema, se emplea la siguiente expresión, teniendo en cuenta que, según el estándar AGMA 6123-B06 [17], la razón máxima de velocidad alcanzable por etapa no debe superar 10:1:

$$m_V = m_{V E1} \cdot m_{V E2} \cdot \dots \cdot m_{V En} \quad (1.2)$$

Esta ecuación establece que la razón de velocidad total corresponde al producto de las razones de velocidad de cada etapa individual.

1.6.1.2. Fuerzas sobre los dientes de un engranaje perteneciente a un sistema planetario

De manera análoga al tratamiento de la razón de velocidades, es posible calcular las fuerzas de transmisión en los distintos componentes del sistema mediante un análisis dinámico, expuesto en la sección A.5 de los anexos, del cual se deduce que la fuerza sobre los dientes de los engranajes está dada por:

$$F = \frac{2 \cdot P \cdot Z_S^{N_{ET}-1}}{m \cdot VelIn \cdot NumPla \cdot (Z_S + Z_C)^{N_{ET}}} \quad (1.3)$$

En la Ec.1.3 P es la potencia de entrada, m el módulo de los engranajes, $NumPla$ el número de planetas en el tren, y N_{ET} la etapa que se está evaluando.

1.6.2. Componentes mecánicos de un sistema planetario

En esta sección se analizarán los componentes mecánicos que forman un sistema planetario, comenzando con los árboles, que son fundamentales para la transmisión de potencia, seguidos por los engranajes, cuñas y otros elementos mecánicos que permiten el funcionamiento del sistema. Además, se detallarán consideraciones de diseño y cálculos de esfuerzos para cada componente, garantizando su integridad estructural y desempeño bajo las condiciones operativas previstas.

1.6.2.1. Árboles

Un árbol es un elemento mecánico alargado, generalmente de sección circular, cuya función principal es transmitir potencia rotacional mediante el par torsor alrededor de su eje longitudinal [19]. Mediante elementos de fijación como cuñas, anillos y bujes, soporta componentes como engranajes y poleas [19]. Los árboles son esenciales en sistemas giratorios, permitiendo la transferencia de movimiento y par desde la fuente motriz al componente receptor [20].

Estructuralmente, los árboles están sujetos a esfuerzos combinados, principalmente flexión, causada por fuerzas transversales de los elementos montados, y torsión, debida al par transmitido, que condicionan su diseño [19].

Diseño de árboles

El diseño de árboles considera esfuerzos y deflexiones, siendo estas últimas críticas por su impacto en el desgaste de cojinetes y la alineación de componentes montados [20].

Diseño para resistencia a la fatiga: Dado que los ejes suelen estar sometidos a cargas variables a lo largo del tiempo, el fenómeno de fatiga adquiere una relevancia central en su diseño. Bajo estas condiciones, el eje debe verificarse no solo frente a las cargas estáticas, sino también en términos de su resistencia a la fatiga [20]. Para ello, es común emplear modelos basados en esfuerzos equivalentes de Von Mises que consideran tanto la componente media como la alternante del esfuerzo cíclico. Asumiendo que ambas componentes tienen una relación constante, puede utilizarse la siguiente expresión para estimar el factor de seguridad frente a fatiga en una sección crítica del árbol, según lo indicado en [20]:

$$N_f = \frac{S_e \cdot S_{ut}}{S_{ut} \cdot \sigma'_a + S_e \cdot \sigma'_m} \quad (1.4)$$

En la Ec.1.4, N_f representa el factor de seguridad frente a fatiga, S_e es la resistencia a la fatiga corregida del material, S_{ut} es la resistencia última a la tracción, y σ'_a y σ'_m corresponden a las componentes alternante y media del esfuerzo equivalente de Von Mises, respectivamente. Estas componentes se pueden determinar, para el caso particular del diseño de ejes sometidos a flexotorsión, mediante la siguiente expresión [20]:

$$\sigma'_a = \frac{1}{\pi d^3} \cdot \sqrt{(32 \cdot K_f \cdot M_a)^2 + 3(16 \cdot K_{fs} \cdot T_a)^2} \quad (1.5)$$

Donde d es el diámetro de la sección transversal del árbol en el punto de análisis, K_f es el factor de concentración de esfuerzos normales, y K_{fs} es el factor de concentración de esfuerzos cortantes. Ambos factores dependen de la geometría del componente y pueden obtenerse mediante tablas o correlaciones empíricas. M_a y T_a representan las componentes alternantes del momento flector y del par torsor en el punto de análisis, respectivamente. La misma ecuación puede emplearse para calcular la componente media del esfuerzo equivalente, reemplazando M_a y T_a por M_m y T_m , correspondientes a las componentes medias del momento y del par torsor.

Para determinar dichas componentes medias y alternantes de las cargas aplicadas se utiliza la siguiente relación general, esto según [21]:

$$F_{a,m} = \frac{F_{\max} \mp F_{\min}}{2} \quad (1.6)$$

En la Ec.1.6, F_a representa la componente alternante, y F_m la componente media de una carga variable (ya sea fuerza, momento o par torsor), mientras que $F_{\max}$ y $F_{\min}$ son sus valores máximo y mínimo durante el ciclo de carga. Se utiliza el signo $-$ para calcular la componente alternante y el signo $+$ para la componente media. Es importante establecer un sistema de referencia adecuado, ya que la dirección de aplicación de las cargas influye directamente en la magnitud de los esfuerzos generados, y por tanto, en el diseño del componente.

Diseño orientado a la minimización de la deflexión: Para evaluar la deflexión del árbol bajo un conjunto específico de condiciones de carga, este se modela como una viga estática. En este contexto, la relación fundamental entre el momento flector y la deflexión se expresa mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I(x)} \quad (1.7)$$

En la Ec.1.7, v es la deflexión del árbol en una dirección perpendicular a su eje longitudinal, $M(x)$ es el momento flector calculado respecto al eje perpendicular tanto al eje longitudinal del árbol como a la dirección de la deflexión, E es el módulo de elasticidad del material, e $I(x)$ es el momento de inercia de la sección transversal respecto a ese mismo eje, el cual puede variar según la geometría del árbol. De esta relación se desprende que, para una misma carga aplicada, una mayor rigidez del material (es decir, un mayor módulo de elasticidad E) y una sección con mayor inercia $I(x)$ resultan en una menor deflexión. Por este motivo, en aplicaciones donde la alineación y el funcionamiento preciso son críticos se prefiere el uso de materiales con alto módulo de elasticidad.

El momento de inercia de una sección circular sólida, común en ejes, se determina mediante la siguiente expresión:

$$I(x) = \frac{\pi \cdot d(x)^4}{64} \quad (1.8)$$

Donde $d(x)$ representa el diámetro de la sección del árbol en el punto de análisis.

1.6.2.2. Engranajes

Un engrane es un elemento mecánico con dientes distribuidos uniformemente a lo largo de su periferia, diseñado para transmitir movimiento rotatorio y par torsor de un eje a otro, mediante el acoplamiento con otro engrane montado en el eje receptor [22]. Existen distintos tipos de engranajes, entre los que destacan los engranajes rectos. Los engranajes rectos se utilizan para transmitir movimiento entre ejes paralelos, ya que sus dientes están orientados de forma paralela al eje del

engrane [22]. Este tipo de engranajes puede ser externo o interno, dependiendo de la ubicación de los dientes: en los engranes externos, los dientes apuntan hacia afuera del eje, mientras que en los internos, lo hacen hacia el centro del engrane.

Aunque los dientes de los engranajes pueden verse afectados por diversos modos de falla, hay dos que destacan por su alta frecuencia de ocurrencia: la fractura por fatiga en la raíz del diente, causada por las variaciones de esfuerzo de flexión; y la fatiga superficial en la cara del diente, producto del contacto repetido durante la operación [3]. Al diseñar un engranaje, como mínimo, deben considerarse ambos mecanismos de falla para garantizar su durabilidad y funcionamiento seguro.

Fractura por fatiga: La fractura por fatiga debido a esfuerzos flectores se puede prevenir mediante un diseño adecuado, manteniendo los niveles de esfuerzo dentro de los límites permisibles según el criterio de falla aplicado. Dado que un diente de engranaje actúa como una viga en voladizo con su sección más crítica en la raíz, y asumiendo que el diente no es puntiagudo, no hay interferencia entre las puntas y los filetes de los dientes acoplados, existe holgura entre los dientes, y las fuerzas de fricción son despreciables, se puede usar la ecuación propuesta por la ISO en el estándar 6336-3 para calcular los esfuerzos en dientes de engranajes [23]:

$$\sigma_b = \frac{W_t \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \cdot Y_{DT} \cdot Y_B \cdot K_A \cdot K_\gamma \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha}}{F \cdot m} \quad (si) \quad (1.9)$$

En la Ec.1.9, σ_b representa el esfuerzo de flexión equivalente desarrollado en la raíz del diente, W_t corresponde a la fuerza tangencial transmitida por el engranaje, F es el ancho de cara del diente, y m el módulo del engrane. Los factores de corrección usados en esta ecuación son: Y_F , el factor de forma del diente, que toma en consideración la forma del diente cuando la carga es aplicada en uno de los extremos de un solo par de dientes; Y_S , el factor de corrección del esfuerzo, que toma en cuenta la amplificación del esfuerzo en la raíz del diente debido al cambio de la geometría en su sección transversal; Y_β , el factor de hélice, que para el caso de estudio toma el valor de 1; Y_B , el factor de espesor del aro, que toma en cuenta el aumento en los esfuerzos en el caso de engranajes con aros delgados; y Y_{DT} , el factor asociado a la profundidad del diente, que ajusta el esfuerzo calculado para engranajes de alta precisión [23]. Estos factores de corrección son explicados y definidos en mayor medida en el estándar ISO 6336-3 [23].

Asimismo, se consideran modificadores del esfuerzo tales como K_A , factor de aplicación, que se encarga de considerar los casos donde la carga es incrementada debido a cambios en el par torsor de entrada o salida; K_γ , factor de carga en el engrane, que permite tener en cuenta la distribución desigual de la carga sobre el engrane; K_V , factor dinámico, que toma en cuenta los incrementos en la carga debido a efectos dinámicos; $K_{F\beta}$, factor de distribución de carga en la cara del diente, que toma en cuenta la distribución desigual de la carga sobre el ancho de cara; y $K_{F\alpha}$, factor de distribución de carga transversal, que toma en cuenta la distribución desigual de la carga a lo largo de la dirección transversal del diente. Estos factores modificadores son tratados en profundidad en el estándar ISO 6336-1 [24].

Una vez determinado el esfuerzo de flexión en la raíz del diente, es necesario compararlo con la resistencia a la fatiga por flexión del material con el que está fabricado el engrane. El estándar ISO 6336-5 proporciona valores publicados de resistencia a la flexión, σ_{Flim} , que ya incorporan ciertas correcciones prácticas. No obstante, para una evaluación más precisa, deben aplicarse factores adicionales que permiten obtener la resistencia corregida S_{FB} . Dichos factores adicionales se aplican de la siguiente manera [23]:

$$S_{FB} = \sigma_{Flim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta rel T} \cdot Y_{R rel T} \cdot Y_X \quad (1.10)$$

Donde Y_{ST} es el factor de corrección de esfuerzos, relacionado con las dimensiones estándar de los engranes sobre los cuales se realizaron las pruebas para determinar su valor; Y_{NT} es el factor de vida del diente, el cual considera que los engranes sometidos a un determinado número de ciclos de

carga pueden soportar mayores esfuerzos; $Y_{\delta rel T}$, el factor de sensibilidad a la muesca, que toma en cuenta la sensibilidad a la muesca del material con el que se está trabajando; $Y_{Rel T}$, el factor de superficie relativa, que permite considerar la influencia de la rugosidad superficial del redondeo en la raíz del diente; y Y_X , el factor de tamaño, que tiene en cuenta la influencia del tamaño del diente sobre el esfuerzo de flexión resultante [23]. Al igual que en el caso anterior, estos factores son definidos en el estándar ISO 6336-3 [23].

Una vez definidos el esfuerzo de flexión y la resistencia corregida a la flexión del material utilizado en el engranaje, se establece el factor de seguridad contra la fatiga, N_F , según la siguiente ecuación expresada en la norma ISO 6336-3 [23]:

$$N_F = \frac{S_{FB}}{\sigma_b} \quad (1.11)$$

Fatiga superficial: El cálculo del esfuerzo de contacto superficial en los dientes de los engranajes se realiza mediante las Ec.1.12 y 1.13, formuladas según los lineamientos establecidos por el estandar ISO 6336-2 [25]. El cálculo de los esfuerzos depende del componente con el que se esté trabajando, ya sea el piñón o el engranaje del par. Si se utiliza el engranaje del par, el esfuerzo de flexión en la raíz del diente, σ_{H2} , se calcula utilizando la Ec.1.13. En cambio, si se trabaja con el piñón del par, el esfuerzo de flexión en la raíz de su diente, σ_{H1} , se determina mediante la Ec.1.12.:

$$\sigma_{H1} = Z_B \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{W_t \cdot (u+1) \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta}}{F \cdot u \cdot d}} \quad (1.12)$$

$$\sigma_{H2} = Z_D \cdot Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{W_t \cdot (u+1) \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta}}{F \cdot u \cdot d}} \quad (1.13)$$

En estas ecuaciones, W_t es la fuerza tangencial que actúa sobre el diente, d es el menor diámetro de paso del acoplamiento, F es el ancho de la cara de los engranes. $K_{H\beta}$ es el factor de carga en la cara por esfuerzos de contacto, el cual considera la distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de la cara; $K_{H\alpha}$ es el factor de carga transversal por esfuerzos de contacto, que toma en cuenta la distribución desigual de la carga en la dirección tangencial [25]. K_A y K_V se definen de la misma manera que en la Ec.1.9. Estos factores modificadores del esfuerzo están definidos en el estándar ISO 6336-1 [24].

Por otra parte, Z_H es el factor de zona, que tiene en cuenta las curvaturas de los flancos en el punto de paso; Z_E es el factor elástico, que considera las diferencias entre los materiales empleados en el piñón y el engrane; Z_ϵ es el factor de relación de contacto, que refleja el contacto efectivo entre los dientes; y Z_β es el factor de ángulo de hélice, que representa la influencia de dicho ángulo sobre los esfuerzos, y para el presente caso de estudio, tiene un valor de 1 [25]. En la Ec.1.12, Z_B es el factor de contacto del diente del piñón, que convierte el esfuerzo en el punto de contacto en el esfuerzo de contacto del piñón. En la Ec.1.13, Z_D es el factor de contacto del diente del engrane, que cumple la misma función para el engrane. Ambos factores son explicados con mayor detalle en el estándar ISO 6336-2 [25].

Por último, u se define como la razón entre el número de dientes del engrane Z_2 y el número de dientes del piñón Z_1 , como se muestra en la Ec.1.14:

$$u = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1.14)$$

En caso de tratarse de un engrane interno, u se toma como negativo.

Una vez determinado el esfuerzo de contacto sobre la cara del diente, es necesario compararlo con la resistencia a la fatiga superficial del material con el que está fabricado el engrane. El estandar ISO 6336-5 proporciona valores publicados de resistencia a la fatiga superficial, $\sigma_{H lim}$, que deben ser corregidos mediante la aplicación de factores adicionales que permiten obtener la resistencia

corregida S_H . Dichos factores adicionales se aplican de la siguiente manera, esto según el estandar ISO 6336-2 [25]:

$$S_H = \sigma_{H \lim} \cdot Z_{NT} \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (1.15)$$

En la Ec.1.15, Z_{NT} hace referencia al factor de vida para esfuerzos de contacto, el cual considera los casos en los que, para una vida útil determinada, pueden presentarse mayores esfuerzos de contacto; Z_L es el factor asociado al lubricante, que contempla la influencia de su viscosidad sobre los esfuerzos de contacto; Z_V corresponde al factor de velocidad, que considera el efecto de la velocidad en la línea de paso sobre dichos esfuerzos; Z_R representa el factor de rugosidad superficial, encargado de reflejar la influencia de las condiciones superficiales de los flancos de los engranajes en contacto.

Por otra parte, en esta ecuación, Z_W es el factor de endurecimiento superficial, que considera el aumento en la dureza superficial debido al contacto entre un engrane con un piñón sustancialmente más duro; finalmente, Z_X es el factor de tamaño para esfuerzo de contacto, que tiene en cuenta la influencia del tamaño del diente sobre los esfuerzos admisibles por contacto [25]. Estos factores se tratan con mayor detalle en la norma ISO 6336-2, y su cálculo se realiza conforme a lo establecido en dicha normativa [25].

Una vez definidos el esfuerzo de contacto σ_H y la resistencia corregida S_H a la fatiga de contacto del material utilizado en el engranaje, se establece el factor de seguridad contra la fatiga de contacto, N_H , según la siguiente ecuación [25]:

$$N_H = \frac{S_H}{\sigma_H} \quad (1.16)$$

1.6.2.3. Cuñas

Una cuña es un elemento mecánico que permite la transmisión de par torsor entre un árbol y una maza, mediante su inserción en los cuñeros correspondientes. Estas pueden presentar diversas geometrías, tales como la cuña paralela, con sección transversal rectangular o cuadrada, dependiendo del diámetro del árbol, o la cuña cónica, cuya sección transversal varía en una de sus dimensiones [20]. Todas estas variantes, así como sus dimensiones, se encuentran normalizadas en estándares internacionales.

Debido a su geometría simple y amplia aplicación, en este trabajo de grado se utilizaron cuñas paralelas, las cuales son las más comúnmente empleadas. Su tamaño, sección transversal y el cuñero en el que serán montadas dependen directamente del diámetro del árbol. Los estándares definen secciones cuadradas para ejes de hasta 25 mm de diámetro y proponen secciones rectangulares para diámetros mayores [20]. Aunque la sección transversal está normalizada según el diámetro del árbol, la longitud de la cuña debe ser determinada a partir del análisis de esfuerzos, de modo que soporte adecuadamente las cargas transmitidas. En caso de que la longitud necesaria exceda significativamente sus otras dimensiones, se recomienda el uso de dos cuñas dispuestas en orientación ortogonal (90° entre sí) para aumentar la capacidad de carga.

Las cuñas pueden fallar principalmente por dos mecanismos: por presión de contacto o por esfuerzo cortante. La falla por contacto se manifiesta cuando la cuña se incrusta en la maza o en el árbol debido a las altas presiones generadas en la zona de contacto. Por otro lado, la falla por cortante ocurre cuando la cuña se fractura transversalmente en la región de acoplamiento entre la maza y el árbol [20].

Falla por cortante: El esfuerzo cortante en la cuña se define como, esto según lo expresado en [20]:

$$\tau = \frac{F}{A_{cortante}} \quad (1.17)$$

donde F representa la fuerza aplicada sobre la cuña y $A_{cortante}$ es el área sometida al esfuerzo cortante, que en este caso corresponde al producto entre la longitud y el ancho de la cuña. Dado que la fuerza transmitida por la cuña se deriva del par torsor aplicado al árbol según la Ec.A.19, presente en los anexos y que este par torsor puede variar con el tiempo, es posible que se presenten fallas por fatiga a cortante [20]. Por lo tanto, es necesario determinar las componentes media y alternante de la fuerza cortante, de manera similar a como se realiza en la Ec.1.6, así como los esfuerzos equivalentes de Von Mises asociados, con el fin de evaluar el factor de seguridad empleando el mismo criterio utilizado en la Ec.1.4.

Para el caso de las cuñas, y sin considerar los esfuerzos por aplastamiento, el esfuerzo equivalente de Von Mises en la región de análisis se determina mediante la siguiente expresión, derivada a partir de la Ec.A.13, presente en los anexos:

$$\sigma' = \sqrt{3} \cdot \tau \quad (1.18)$$

Esta ecuación se emplea tanto para el cálculo del esfuerzo equivalente de Von Mises medio como del alternante. Para obtener cada uno de ellos, debe utilizarse el valor correspondiente del esfuerzo cortante en el punto de análisis: el esfuerzo cortante alternante para el cálculo del esfuerzo equivalente alternante, y el esfuerzo cortante medio para el cálculo del esfuerzo equivalente medio.

Falla por presión de contacto: El esfuerzo de presión por contacto se calcula mediante [20]:

$$\sigma = \frac{F}{A_{\text{contacto}}} \quad (1.19)$$

Donde F es la fuerza aplicada y A_{contacto} es el área efectiva de contacto, que en este contexto corresponde a la mitad de la altura de la cuna multiplicada por su longitud. Debido a que los esfuerzos de compresión no suelen generar fallas por fatiga, este análisis se realiza bajo condiciones estáticas, utilizando la carga máxima prevista [20]. El factor de seguridad N_F se determina al comparar el esfuerzo calculado con la resistencia a la fluencia del material $S_{y\text{comp}}$ en compresión de la siguiente manera [20]:

$$N_F = \frac{S_{y\text{comp}}}{\sigma} \quad (1.20)$$

Consideraciones adicionales de diseño: Las cuñas deben dimensionarse de modo que sufra la falla antes que el eje o la maza, protegiendo así los componentes más críticos del sistema. Para garantizar este comportamiento, se recomienda fabricar las cuñas con materiales blandos y dúctiles, cuya resistencia sea inferior a la del eje. De esta forma, ante una posible falla por contacto, el daño se localizará primero en la cuna, facilitando su reemplazo sin comprometer los elementos principales del sistema [20].

1.6.2.4. Anillos de retención

Los anillos de retención aseguran la posición axial de un eje o fijan componentes como rodamientos mediante un ajuste por resorte en ranuras mecanizadas, generando concentraciones de esfuerzo localizadas [26]. Su geometría y dimensiones están normalizadas según el diámetro del eje y la fuerza axial a transmitir. En este trabajo, no se consideran fuerzas axiales significativas, por lo que la selección se basa únicamente en el diámetro, aunque se incluyen preventivamente para posibles esfuerzos axiales no calculados.

1.6.2.5. Rodamientos

Un rodamiento es un elemento mecánico que permite el movimiento relativo, generalmente de tipo rotacional, entre un árbol y su soporte, reduciendo la fricción gracias al uso de elementos

rodantes [27]. Estos se clasifican principalmente en rodamientos de bolas y de rodillos [28]. En este trabajo se emplearán dos tipos de rodamientos de bolas: los de contacto radial (Conrad), diseñados para resistir cargas radiales, y los de contacto angular, capaces de soportar simultáneamente cargas radiales y axiales. La elección de estos rodamientos responde a su amplia disponibilidad en el mercado y a su diseño estandarizado.

Selección y vida útil de rodamientos

En condiciones ideales, como la disponibilidad de una cantidad adecuada de lubricante limpio y libre de contaminantes, la falla de los rodamientos ocurre típicamente por fatiga superficial [28]. Se considera que un rodamiento ha fallado cuando se observan los primeros signos de picado en las pistas o en los elementos rodantes. Esta condición genera ruido y vibraciones, indicando el inicio del proceso de degradación. Aunque el rodamiento podría continuar operando, su uso prolongado en estas condiciones puede conducir a la fractura de los elementos rodantes y a daños en otros componentes asociados [28].

La vida útil de los rodamientos presenta una distribución estadística tipo Weibull. Para efectos de diseño, se emplea comúnmente el parámetro L_{10} , que representa el número de millones de revoluciones que el 90 % de los rodamientos en una muestra alcanzará o superará bajo una carga de diseño determinada. Este criterio, ampliamente adoptado por los fabricantes, permite estimar la durabilidad esperada en condiciones reales de servicio.

La vida L_p , correspondiente a otros niveles de confiabilidad, se obtiene multiplicando la vida L_{10} por un factor de confiabilidad K_R , derivado de la distribución de Weibull [28]:

$$L_p = K_R \cdot L_{10} \quad (1.21)$$

donde L_p se expresa en millones de revoluciones. En este estudio se considera un nivel de falla del 5 %, lo cual implica un valor de $K_R = 0.62$, según la curva de Weibull [28].

Criterio de selección de rodamientos

La selección del rodamiento depende principalmente de la vida útil deseada y de las magnitudes de las cargas estática y dinámica aplicadas [28]. Para rodamientos de bolas, la vida a fatiga L_{10} se determina mediante, esto según la referencia [28]:

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P} \right)^3 \quad (1.22)$$

De donde C es la carga dinámica básica, definida por el fabricante como la carga que proporciona una vida útil de un millón de revoluciones y P es la carga radial equivalente aplicada al rodamiento. Aunque C suele superar las cargas reales aplicadas al rodamiento, se utiliza como parámetro de referencia para estimar su vida útil [28]. Los catálogos de fabricantes incluyen este valor junto con la velocidad límite máxima admisible para cada rodamiento.

Sustituyendo la Ec.1.22 en la Ec.1.21, se obtiene:

$$L_p = 0.62 \cdot \left(\frac{C}{P} \right)^3 \quad (1.23)$$

Este valor representa la vida para la cual solo el 5 % de los rodamientos fabricados fallará, garantizando un 95 % de confiabilidad.

En condiciones donde el rodamiento está sometido simultáneamente a cargas radiales y axiales, es necesario determinar una carga equivalente que será empleada en la Ec.1.23. Dicha carga equivalente P se expresa como [28]:

$$P = X \cdot F_r + Y \cdot F_a \quad (1.24)$$

Donde F_r y F_a corresponden a las cargas radial y axial aplicadas al rodamiento, respectivamente; mientras que los coeficientes X y Y representan factores de ajuste que relacionan la capacidad

del rodamiento para soportar cargas radiales y de empuje, siendo dichos valores proporcionados por el fabricante. Adicionalmente, se introduce el factor e , también suministrado por el fabricante, el cual define una razón límite bajo la cual la componente axial puede considerarse despreciable [28]:

$$\text{Si } \frac{F_a}{F_r} \leq e \quad \Rightarrow \quad X = 1, Y = 0 \quad (1.25)$$

De esta manera, una vez obtenida la carga equivalente mediante la Ec.1.24, y considerando la condición establecida en la Ec.1.25, es posible proceder al cálculo de la vida nominal del rodamiento conforme a la Ec.1.23.

En consecuencia, el procedimiento de selección consiste en elegir un rodamiento con un diámetro interno igual al del árbol donde se posicionará, verificar que la velocidad de operación no supere la velocidad límite del rodamiento, y maximizar la vida útil seleccionando un rodamiento con el mayor valor de C posible.

1.6.2.6. Bujes y lubricación

Un buje es un elemento mecánico que se aloja dentro de una cavidad con el objetivo de brindar soporte a un componente giratorio, generalmente un eje. Su finalidad principal es permitir el desplazamiento relativo entre piezas móviles, reduciendo tanto la fricción como el desgaste. Si bien su forma puede ser tan sencilla como un anillo o una arandela, los diseños más utilizados corresponden a los bujes de casquete y de manguito, los cuales envuelven por completo la pieza en rotación. Estos componentes están fabricados con materiales compatibles en términos de fricción, por lo que es indispensable el uso de un sistema de lubricación que contribuya a disminuir el rozamiento, disipar el calor generado y aumentar la durabilidad del conjunto. A diferencia de los rodamientos, los bujes suelen diseñarse a medida según los requerimientos específicos de cada aplicación. [28].

Diseño de bujes

El diseño de bujes se fundamenta en la teoría de lubricación hidrodinámica, particularmente en la solución de la ecuación de Reynolds para cojinetes de espesor corto. En el contexto de este proyecto, el diseño se basa en dicha ecuación y en el número de Ocvirk, un parámetro adimensional que agrupa las principales variables del diseño.

El proceso de diseño inicia con la definición de las condiciones de operación, asumiendo que la carga que actúa sobre el cojinete y la velocidad de rotación relativa son conocidas. El diámetro del cojinete puede ser predeterminado o establecido a partir de consideraciones estructurales como el esfuerzo permitido o la deflexión del eje. A partir de esto, se debe seleccionar adecuadamente la longitud del cojinete, un lubricante con la viscosidad dinámica apropiada a la temperatura de operación, una razón de tolerancia diametral razonable y una razón de excentricidad que garantice la ausencia de contacto metálico entre el buje y el eje [28].

Todos estos factores se integran en el número de Ocvirk O_N , definido en la referencia [28] como:

$$O_N = \frac{P_{\text{prom}}}{\eta \cdot \omega} \left(\frac{d \cdot c_d}{l \cdot d} \right)^2 = \frac{P_{\text{prom}} \cdot c_d^2}{l^2 \cdot \eta \cdot \omega} \quad (1.26)$$

Donde P_{prom} es la presión, η la viscosidad absoluta del lubricante, ω la velocidad angular del eje que gira sobre el cojinete, d el diámetro del cojinete, l su longitud y c_d la holgura diametral. Fijando el valor del número de Ocvirk se pueden determinar una serie de combinaciones de parámetros que hacen que el número de Ocvirk tome dicho valor fijado. Con el uso de la siguiente relación:

$$\epsilon = 0.21394 + 0.38517 \cdot \log(O_N) - 0.0008 \cdot (O_N - 60) \quad (1.27)$$

El número de Ocvirk permite determinar la razón de excentricidad ϵ , que indica cuán cerca se encuentra el sistema del contacto metálico. A partir de este valor se calcula la película mínima de lubricante $h_{\min}$ como [28]:

$$h_{\min} = c_r \cdot (1 - \epsilon) \quad (1.28)$$

Siendo $c_r = c_d/2$ la holgura radial. Esta película mínima debe ser suficientemente grande para evitar el contacto directo entre superficies metálicas.

Para seleccionar un valor adecuado de O_N , se considera: para cargas moderadas para $O_N \approx 30$, para cargas pesadas hasta $O_N \approx 60$ y para condiciones severas para valores de hasta 90, aunque para la mayoría de las aplicaciones industriales, como es el caso de estudio de este proyecto de grado, se prefiere mantener el diseño por debajo de $O_N \leq 30$. Una vez definido un valor objetivo de O_N , se selecciona un lubricante candidato y se consulta su viscosidad dinámica a la temperatura de operación utilizando gráficos o tablas.

A continuación, se itera la Ec.1.26 para determinar el diámetro d y la longitud l óptimos, considerando que la razón de tolerancia típica c_d/d se encuentra entre 0.001 y 0.002, la cual afecta directamente al O_N al aparecer al cuadrado en su definición; razones de tolerancia mayores incrementan el flujo de lubricante, mejorando la capacidad de enfriamiento del sistema, pero también aumentando la presión y la excentricidad; en diseños con grandes razones l/d , puede ser necesario aumentar también la tolerancia diametral para compensar posibles deflexiones del árbol [28]; finalmente, una vez completado el diseño preliminar del cojinete, se recomienda realizar análisis complementarios de flujo de fluido y transferencia de calor para validar el comportamiento térmico del sistema y prever la temperatura de operación, sin embargo, dichos análisis exceden el alcance del presente proyecto, en el cual el diseño de cojinetes se limita al nivel preliminar descrito.

1.6.2.7. Portaplanetas

El portaplanetas es un componente mecánico fundamental en un sistema de engranajes planetarios, cuya función es sostener y permitir el giro de los engranajes planetarios alrededor del engranaje solar. La configuración más común consiste en dos discos paralelos ubicados a cada lado del conjunto de planetas. El disco primario se encuentra conectado directamente al eje que transmite el movimiento, mientras que el disco secundario se une al primero mediante brazos equiespaciados. La separación entre los discos suele ser ligeramente mayor al ancho de los planetas, con el fin de evitar el contacto o rozamiento entre estos y los discos. La Fig.1.5 muestra una configuración típica de portaplanetas propuesta en la norma AGMA 6123-B06 [29].

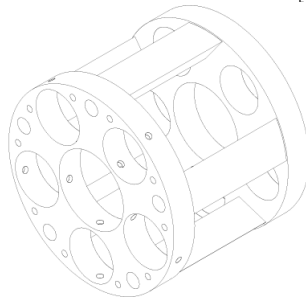


Figura 1.5: Ejemplo representativo de la geometría de un portaplanetas diseñado para el ensamblaje de cinco planetas. Los planetas pueden ser montados sobre vigas que faciliten su rotación, o bien sobre ejes, con el apoyo de rodamientos ubicados en los discos para garantizar su movimiento adecuado. Imagen tomada de [29].

Dicha norma contempla diversas formas de soportar la rotación de los planetas dentro del portaplanetas. En el presente proyecto, se emplearán bujes ubicados entre los planetas y las vigas que los soportan. Estas vigas están fijadas a ambos discos del portaplanetas a través de tornillos,

de manera que la carga debida al peso de cada planeta se distribuye equitativamente entre los dos discos. A su vez, el disco secundario transfiere su carga al disco primario a través de los brazos que los conectan. La sección transversal de estos brazos está condicionada por el número de planetas, el diámetro exterior de los mismos y el diámetro interior de la corona dentada, ya que el espacio disponible para el montaje disminuye con un mayor número de planetas, lo que puede aumentar la deflexión de los brazos [29].

Diseño del portaplanetas

Si bien la norma AGMA 6123-B06 no establece una metodología específica para el diseño del portaplanetas, sugiere modelar las vigas que soportan los planetas como vigas doblemente empotradas, y tratar de que su deflexión sea mínima. A partir de este criterio, y considerando aspectos como la fatiga en la manzana que permite la conexión entre el portaplanetas y el eje, así como esfuerzos de aplastamiento en los discos, se definirá una geometría adecuada mediante análisis teóricos.

1.6.3. Consideraciones generales de materiales usados en componentes mecánicos

Esta sección presenta un análisis detallado de los materiales empleados en la fabricación de los componentes mecánicos que forma un sistema planetario. Se abordará la selección de materiales basada en sus propiedades mecánicas, resistencia al desgaste y su comportamiento bajo cargas específicas.

1.6.3.1. Materiales usados para la fabricación de engranes

Los hierros fundidos, así como los hierros maleables y nodulares, junto con los aceros, son materiales adecuados para la fabricación de engranajes que transmiten una potencia significativa. Siempre que sea posible, se recomienda aplicar un tratamiento de endurecimiento superficial o total, con el fin de mejorar la resistencia tanto a los esfuerzos por flexión como a los esfuerzos por contacto. A continuación, se detallan las ventajas particulares de trabajar con hierros y con aceros [3].

Hierros fundidos: Los hierros grises presentan un bajo costo, buena resistencia al desgaste, facilidad de maquinado y una alta capacidad de amortiguamiento interno, lo que contribuye a la reducción del ruido en los engranajes en comparación con otros materiales. Su principal desventaja radica en su baja resistencia mecánica, lo que obliga a diseñar dientes de mayor tamaño respecto a los fabricados en acero, para garantizar una resistencia a la flexión adecuada. Por su parte, los hierros nodulares comparten las ventajas de los hierros fundidos, pero ofrecen una resistencia superior a la flexión; sin embargo, su principal limitación es el mayor costo relativo frente a los hierros grises.

Aceros: En comparación con los hierros fundidos, los aceros presentan una mayor resistencia mecánica. Aunque suelen requerir tratamientos térmicos para mejorar su resistencia al desgaste, en aplicaciones donde la vida útil no es crítica, la carga es baja y las velocidades son reducidas, es posible utilizar aceros sin tratar térmicamente. Para aplicaciones con cargas elevadas, es necesario recurrir a tratamientos de endurecimiento, ya sea superficial o total, dependiendo del tamaño del engranaje. Cuando se emplea un endurecimiento superficial, se obtiene una superficie dura combinada con un núcleo más resistente y dúctil, lo que resulta ventajoso en condiciones de servicio exigentes [3].

Dado que los modos de falla considerados en el diseño de los engranajes de este proyecto están relacionados con la fatiga, es indispensable contar con datos de resistencia a la fatiga del material, tanto para esfuerzos por flexión como por contacto [3]. Estos valores se encuentran especificados en la norma ISO 6336-5 [30], la cual proporciona los límites de resistencia para aceros y hierros

con distintas propiedades, aptos para la manufactura de engranajes. En este proyecto de grado se emplearán materiales que cumplen con los requisitos establecidos en dicha norma, de manera que las resistencias a la fatiga por flexión y por contacto no corregidas puedan ser utilizadas directamente.

1.6.3.2. Materiales para árboles

Uno de los principales objetivos en el diseño de un árbol es minimizar sus deflexiones máximas, idealmente llevándolas a valores cercanos a cero. Para lograr este propósito, es común emplear acero, debido a su elevado módulo de elasticidad; sin embargo, también se utilizan materiales como el hierro colado o el hierro nodular en ciertas aplicaciones. Dado que los ejes suelen operar en contacto con cojinetes, la dureza superficial del material se convierte en un factor crítico al momento de su selección. En estos casos, un acero sometido a un tratamiento de endurecimiento, ya sea superficial o integral, puede representar una opción adecuada [20].

Una proporción significativa de los árboles maquinados se fabrica a partir de aceros de bajo o medio contenido de carbono, ya sea laminados en caliente o en frío. Una misma aleación laminada en frío presenta mejores propiedades mecánicas en comparación con su contraparte laminada en caliente, debido al trabajo en frío al que es sometida; no obstante, este proceso introduce esfuerzos residuales de tracción en la pieza. Por otro lado, cuando se requieren niveles elevados de resistencia, se recurre al uso de aceros aleados [20]. En este proyecto de grado se emplean distintos tipos de aceros, tanto aleados como no aleados, cuya selección se realiza en función de las particularidades de cada problema específico.

1.6.3.3. Materiales para cuñas

Para la manufactura de cuñas se emplean materiales dúctiles, dado que estos elementos están sometidos a cargas cortantes. Generalmente, se utilizan aceros dulces con bajo contenido de carbono. La resistencia a la fluencia del material seleccionado para la cuña debe ser inferior a la del material del eje y a la del componente que ésta acopla al eje, de manera que, ante una posible superación de los esfuerzos permisibles, la cuña sea el primer elemento en fallar. Esta estrategia se justifica por la simplicidad en la fabricación y el bajo costo de reposición de la cuña, en comparación con el eje o el componente acoplado [20]. Los materiales utilizados para las cuñas provienen de la misma base de datos empleada para la selección de materiales en ejes y engranajes. Es el algoritmo de optimización el encargado de determinar la combinación de materiales más adecuada, de acuerdo con los criterios establecidos hasta el momento, garantizando así el cumplimiento de las restricciones funcionales y de diseño definidas.

1.6.3.4. Materiales para bujes

Los materiales empleados en la fabricación de cojinetes deben cumplir con una serie de requisitos funcionales, tales como una resistencia mecánica adecuada, alta capacidad de incrustación de partículas extrañas, facilidad de maquinado, buena resistencia a temperaturas elevadas, propiedades de lubricación (lubricidad) y, en ciertos casos, porosidad suficiente para absorber lubricantes. Además, el material del cojinete debe tener menos de un tercio de la dureza del material del árbol sobre el cual gira, con el fin de favorecer la incrustación de partículas abrasivas en el cojinete y no en el árbol. Entre los materiales más comúnmente utilizados para cojinetes se encuentran aquellos con base en plomo, estaño y cobre [28]. A continuación, se describen los materiales considerados en este proyecto de grado para la selección del material de cojinetes:

1. **Babbitts:** Los babbitts pertenecen a una familia de aleaciones con base en estaño o plomo. Su principal ventaja radica en su suavidad, lo que permite la incrustación de partículas diminutas en el cojinete, además de ofrecer la posibilidad de obtener un acabado superficial

con baja rugosidad. No obstante, cuando presentan un punto de fusión bajo, requieren una lubricación adecuada para evitar fallas térmicas. Los cojinetes fabricados con babbitt deben tener una dureza mínima de 150 a 200 HB [28].

2. **Bronces:** Los bronce ofrecen una buena resistencia general, aunque son menos duros que los materiales ferrosos comúnmente utilizados en los ejes de este proyecto. Son fáciles de maquinar y presentan un buen comportamiento frente a aleaciones ferrosas bajo condiciones de lubricación adecuada. Las aleaciones de cobre más comunes empleadas en cojinetes incluyen: cobre-berilio, cobre-plomo, bronce-plomo, bronce-aluminio y bronce-estaño. Su dureza varía ampliamente en función de la aleación específica, pudiendo situarse desde valores similares a los de un babbitt hasta igualar la dureza del acero. Se utilizan particularmente en aplicaciones donde se presentan temperaturas de operación elevadas [28].

1.6.4. Diseño paramétrico en ingeniería mecánica

El diseño paramétrico en ingeniería mecánica define la geometría y funcionalidad de una pieza mediante parámetros controlables, como dimensiones y propiedades de materiales, que determinan su configuración según criterios de diseño. La modificación de estos parámetros permite generar automáticamente variantes adaptadas a diferentes condiciones, manteniendo coherencia geométrica y funcionalidad.

Una ventaja clave del diseño paramétrico es la automatización del desarrollo, facilitando la exploración rápida de alternativas sin reconstruir el modelo desde cero, especialmente útil en las etapas conceptuales y de prototipado.

En entornos CAD, se implementa mediante relaciones matemáticas y restricciones geométricas que garantizan la coherencia al modificar parámetros clave, permitiendo generar geometrías complejas y familias de productos con múltiples configuraciones.

Sin embargo, la parametrización en CAD suele limitarse a dimensiones geométricas, constituyendo un dibujo paramétrico pero no un diseño completo. Un diseño paramétrico real requiere un sistema externo (algoritmo o solucionador) que, basado en criterios funcionales y de resistencia, determine dimensiones adecuadas para luego transferirlas al CAD.

En sistemas planetarios, el enfoque paramétrico controla las dimensiones de todos los componentes para cumplir criterios de resistencia, funcionalidad y ensamblabilidad. Parámetros como módulo, número de dientes, diámetros primitivos y relaciones de transmisión definen la geometría y comportamiento cinemático, ajustándose para satisfacer restricciones de espacio, velocidad, par torsor y carga según la aplicación.

1.6.5. Programación lineal aplicada al diseño mecánico

La programación lineal, también conocida como programación con restricciones, es una herramienta matemática fundamental para resolver problemas que requieren la asignación eficiente de recursos limitados. Se trata de una técnica que permite determinar la mejor solución, o una solución viable, a un problema representado mediante una función objetivo lineal sujeta a un conjunto de restricciones también lineales. Aunque las variables intermedias que generan las restricciones pueden no ser lineales, las relaciones finales se expresan como ecuaciones o desigualdades lineales. Las restricciones definen qué combinaciones de valores son válidas para las variables dependientes, y un problema de satisfacción de restricciones consiste en encontrar un conjunto de valores que cumplan todas las condiciones establecidas [31].

1.6.5.1. Fundamentos de la programación lineal

La programación lineal se basa en tres componentes principales:

1. **Variables de decisión:** Representan los parámetros del sistema que se desean determinar. En el caso del diseño mecánico, pueden corresponder a dimensiones, cantidades, esfuerzos, entre otros.
2. **Restricciones:** Son las condiciones que delimitan el espacio de soluciones factibles, tales como límites geométricos, propiedades del material, condiciones de carga o requisitos normativos.
3. **Función objetivo:** Es una expresión lineal que define el criterio a optimizar, como la minimización del peso, del costo de fabricación, o la maximización de la rigidez o la resistencia estructural. En problemas complejos, donde se desea optimizar múltiples variables, la función objetivo puede formularse como una combinación lineal de dichas variables:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar o minimizar: } Z &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \\ \text{Sujeto a: } a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n &\leq (=, \geq) b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.29)$$

En esta ecuación, Z representa la función objetivo que se busca maximizar o minimizar. En caso de utilizar una combinación de variables como función objetivo, c_i representa el peso o importancia relativa de cada variable x_i dentro de la función, de modo que a mayor valor de c_i , mayor será la influencia de x_i en Z . Las restricciones, indicadas en la segunda línea, están compuestas por coeficientes a_{ij} que definen cómo contribuye cada variable a una restricción específica, y por coeficientes b_i que representan los límites impuestos por cada condición.

El proceso de programación consta de dos fases principales [31]: la formulación del problema mediante un conjunto de restricciones y la resolución del modelo. Para resolver un problema mediante programación lineal, el primer paso es formularlo como un problema de satisfacción de restricciones. Para ello [31]:

1. Se definen las variables que representan lo que se desea calcular, especificando sus dominios o rangos posibles de valores.
2. Se establecen las restricciones y condiciones que dichas variables deben cumplir.
3. Se expresa el conjunto de reglas en un lenguaje que pueda ser interpretado por la herramienta o programa a utilizar (generalmente un lenguaje lógico-matemático básico).

A este proceso se le denomina modelado. La representación de un problema mediante restricciones es flexible, ya que estas pueden añadirse, modificarse o eliminarse sin alterar la lógica del enfoque [31]. Una vez representado el problema como uno de satisfacción de restricciones, se procede a resolverlo. En la práctica, los objetivos principales son [31]:

1. Determinar si el conjunto de restricciones admite solución.
2. Encontrar una solución viable o el conjunto de todas las soluciones.
3. Identificar una solución óptima o todas las soluciones óptimas respecto a la función objetivo.

Para resolver estos problemas, se puede recurrir a diversos métodos [31]:

1. Métodos específicos del dominio, los cuales son utilizados en este proyecto de grado.

2. Métodos generales.

Los métodos específicos del dominio suelen presentarse en forma de implementaciones especializadas de algoritmos diseñados para propósitos concretos. Un ejemplo de estos métodos puede ser [31]:

1. Un programa diseñado para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
2. Un paquete de programación lineal, como el solver Gurobi o el solver OR-Tools desarrollado por Google. En este proyecto de grado se hace uso del paquete Gurobi para resolver problemas formulados mediante restricciones, implementándose a través del lenguaje de programación Python.

1.6.5.2. Aplicación en la optimización de diseños mecánicos con múltiples condiciones

En el ámbito del diseño mecánico, la programación lineal permite optimizar configuraciones estructurales, seleccionar materiales o definir dimensiones óptimas o viables, considerando simultáneamente múltiples restricciones, como límites de esfuerzo, desplazamientos máximos, disponibilidad de materiales, costos y factores de seguridad. Este enfoque facilita la obtención de soluciones eficientes que cumplan con todos los criterios de diseño, promoviendo tanto la seguridad como la eficiencia económica del producto.

1.6.5.3. Ejemplo simple aplicado a la selección de dimensiones bajo restricciones

A continuación, se presenta un ejemplo básico del uso del paquete de programación lineal Gurobi, aplicado al diseño mecánico. Se plantea el caso de una varilla de sección transversal cuadrada, de longitud fija, sometida a una carga axial. El objetivo es minimizar su masa sin superar un límite de esfuerzo permitido. Las restricciones del problema son:

1. Longitud de la varilla: $L = 2 \text{ m}$
2. Carga axial aplicada: $F = 5000 \text{ N}$
3. Esfuerzo máximo permitido: $\sigma_{max} = 150 \text{ MPa}$
4. Densidad del material de la varilla: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
5. Altura mínima y máxima permitida: $0.005 \text{ m} \leq h \leq 0.05 \text{ m}$

Bajo estas condiciones, se propone un código utilizando Gurobi capaz de encontrar una solución que satisfaga simultáneamente el límite de esfuerzo y el objetivo de minimizar la masa. En la Fig.1.6 se muestra el código. En primer lugar, se define una función general para desarrollar y resolver el modelo, permitiendo su reutilización con distintos parámetros de entrada. Luego se definen las variables, especificando su naturaleza (continuas, enteras, binarias), lo cual orienta al solver sobre cómo buscar soluciones válidas. Además, se pueden definir los límites inferior y superior de cada variable, lo cual, aunque no obligatorio, ayuda a reducir el tiempo de cómputo.

Posteriormente, se definen las restricciones del modelo. En este caso, se formula el área de la sección transversal, el esfuerzo axial, y la masa de la barra, que será la función objetivo a minimizar. Una vez establecido el modelo, se llama al solver para resolverlo. Si existe una solución, se presentan los valores óptimos y la masa correspondiente; de lo contrario, se genera un archivo `.ilp` que identifica las restricciones que impiden la existencia de una solución.

Finalmente, se ejecuta la función con los parámetros del caso particular. El resultado del algoritmo fue una altura $h=0.00577 \text{ m}$, con una masa asociada de 0.5233 kg . Se verifica que con esta área se alcanza exactamente el esfuerzo máximo permitido de 150 MPa ; cualquier esfuerzo menor requeriría una mayor área, lo cual incrementaría la masa de la varilla.

```

1 from gurobipy import Model, GRB
2 def MasaViga(L,F,sigma,rho,hmin,hmax):
3     # Crear un nuevo modelo
4     m = Model()
5     h = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=hmin, ub=hmax, name='h')
6     Area = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=hmin**2, ub=hmax**2, name='Area')
7     Esfuerzo = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=F/(hmax**2), ub=F/(hmin**2), name='Esfuerzo')
8     Masa = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=(hmin**2)*L*rho, ub=(hmax**2)*L*rho, name='Masa')
9
10    m.addConstr( Area == h*h, name='c0')
11    m.addConstr( Area*Esfuerzo == F, name='c1')
12    m.addConstr( Esfuerzo <= sigma, name='c2')
13    m.addConstr( Masa == Area*L*rho, name='c3')
14
15    m.setObjective(Masa, GRB.MINIMIZE)
16
17    # Optimizar el modelo
18    m.optimize() # Se optimiza el modelo
19
20    if m.status == GRB.OPTIMAL:
21        print(f"h óptimo = {h.X} m")
22        print(f"Masa mínima = {Masa.X} kg")
23
24    elif m.status == GRB.INFEASIBLE:
25        m.computeIIS()
26        m.write("infeasible_constraints1.ilp")
27
28    return
29
30 MasaViga(2,5000,150000000,7850,0.001,0.01)

```

Definición de la función

Definición de variables

Definición de restricciones y relaciones

Definición de función objetivo

Solución del modelo

Presenta solución en caso de que exista

Presenta un .ilp en caso de no existir solución

Aplicación al caso de estudio

Figura 1.6: Código utilizado para la solución del ejemplo planteado. Implementado en el lenguaje de programación Python.

1.6.6. Automatización del diseño y generación de geometría

En esta sección se abordará la automatización del proceso de diseño asistido por computador (Computer Aided Design, CAD), con énfasis en las herramientas comúnmente utilizadas para automatizar el diseño y la integración de cálculos previos con la generación automática de geometría. Además, se presentará un ejemplo práctico de cómo generar geometrías simples mediante el uso de la interfaz de programación de aplicaciones (Application Programming Interface, API), la cual es un conjunto de herramientas que permite a los usuarios controlar el software Autodesk Inventor de manera programática, junto con el lenguaje de programación Python, demostrando así la flexibilidad y eficiencia de esta metodología en el diseño paramétrico.

1.6.6.1. Automatización CAD basada en parámetros

La automatización del CAD se basa en la definición paramétrica de geometrías, permitiendo la generación automática de modelos a partir de un conjunto de variables de entrada. Este enfoque resulta particularmente útil en entornos de diseño mecánico, donde las dimensiones y características geométricas de componentes como ejes, engranajes o bujes dependen de cálculos previos basados en requerimientos funcionales, condiciones de carga y restricciones geométricas. La parametrización permite adaptar el modelo de manera eficiente frente a cambios en los requisitos de diseño, minimizando la intervención manual, reduciendo el riesgo de errores y disminuyendo significativamente el tiempo requerido para la generación de modelos, ensambles y planos asociados.

1.6.6.2. Integración entre cálculo y generación automática de geometría

Una de las aplicaciones más relevantes de esta metodología es la integración directa entre los resultados de cálculo obtenidos mediante métodos analíticos o modelos de optimización, y la generación de la geometría correspondiente en un entorno CAD. Este proceso se logra mediante herramientas de automatización que permiten establecer una conexión entre el entorno de programación (por ejemplo, Python) y el software de modelado. De esta manera, los parámetros críticos del diseño, como diámetros, longitudes, ángulos o módulos, pueden ser transmitidos automáticamente al entorno CAD para crear el modelo tridimensional correspondiente, listo para análisis o fabricación.

1.6.6.3. Herramientas comunes para automatización CAD

Actualmente existen múltiples herramientas que facilitan la automatización del diseño CAD. Algunas de las más comunes incluyen:

1. **Inventor API:** Mediante el uso de los lenguajes de programación VBA (Visual Basic for Applications) o Python, permite controlar completamente el entorno de modelado, crear geometría, definir relaciones paramétricas, generar ensamblajes, presentaciones de desensamble, planos de piezas y demás funciones. Es esta herramienta la utilizada en este proyecto de grado para la generación de las piezas que componen los sistemas planetarios paramétricos.
2. **FreeCAD:** Incorpora un entorno de scripting basado en Python, ideal para automatización ligera o generación de modelos desde hojas de cálculo.

1.6.6.4. Ejemplo de generación de geometría paramétrica

A continuación, en la Fig.1.7 se presenta un ejemplo de cómo generar automáticamente un buje simple en Inventor utilizando su API. El modelo se define por el diámetro interno *DiaIn*, su diámetro externo *DiaEx* y su longitud *F*:

```
7 def dibujoBujes( F, DiaIn, DiaExter):
8
9     try:
10         invApp = GetActiveObject('Inventor.Application')
11     except:
12         invApp = Dispatch('Inventor.Application')
13         invApp.Visible = True
14
15     mod = gencache.EnsureModule('{D98A091D-3A0F-4C3E-B36E-61F62068D488}', 0, 1, 0)
16     invApp = mod.Application(invApp)
17     # invApp.SilentOperation = True
18
19     # Create a new part
20     invDoc = invApp.Documents.Add(constants.kPartDocumentObject, "", True)
21
22     # Casting Document to PartDocument
23     invPartDoc = mod.PartDocument(invDoc)
24
25     compdef = invPartDoc.ComponentDefinition
26
27     # Create a sketch
28     xyPlane = compdef.WorkPlanes.Item(3)
29     sketch = compdef.Sketches.Add(xyPlane)
30
31     # Set Geometry variables
32     tg = invApp.TransientGeometry
33     lines = sketch.SketchLines
34     points = sketch.SketchPoints
35     arcs = sketch.SketchArcs
36     circles = sketch.SketchCircles
37     GC = sketch.GeometricConstraints
38
39     GC.AddGround(circles.AddByCenterRadius(tg.CreatePoint2d(0,0),DiaIn/20))
40     GC.AddGround(circles.AddByCenterRadius(tg.CreatePoint2d(0,0),DiaExter/20))
41
42     profile = sketch.Profiles.AddForSolid()
43     extrudeDef = compdef.Features.ExtrudeFeatures.CreateExtrudeDefinition(
44         profile, constants.kJoinOperation)
45     extrudeDef.SetDistanceExtent(F, constants.kNegativeExtentDirection)
46     extrude = compdef.Features.ExtrudeFeatures.Add(extrudeDef)
47
48     return
```

Se define como una función para poder hacer paramétrico el dibujo

Se hace la conexión con Inventor, en caso de que inventor no este abierto

Se crea un nuevo documento y se decide que tipo de documento se va a crear, una pieza, un ensamble o un plano

Se hace que el documento creado sea modificable

Se define sobre que plano se trabajará, y se añade un boceto sobre dicho plano

Se definen algunas de las entidades que se pueden utilizar en el boceto: círculos, puntos, arcos y restricciones

Se crean dos círculos, el externo y el interno, que definen la sección transversal de un buje

Se realiza la extrusión de la pieza, dándole una magnitud de F, en la dirección negativa del plano z

Figura 1.7: Código utilizado para la construcción automática y paramétrica de un buje en Autodesk Inventor mediante su API

Lo primero que se realiza es la definición paramétrica de la geometría del componente, utilizando una función que toma como entrada un conjunto de variables. De esta manera, el dibujo generado dependerá directamente de dichos parámetros, permitiendo una automatización del diseño. A continuación, se establece la conexión con Autodesk Inventor; si la aplicación no está abierta o no existe una conexión previa, se inicia automáticamente y se crea una nueva instancia. Posteriormente, se genera un nuevo documento, especificando su tipo (pieza, ensamble o plano), y se selecciona el plano de trabajo donde se desarrollará la geometría.

Mediante el uso de la API de Inventor, se definen las entidades básicas necesarias para el diseño del buje, como círculos y puntos de referencia. En particular, se construyen dos círculos concéntricos que representan la sección transversal del buje, y se utiliza una operación de extrusión para generar un cilindro hueco a partir de esa sección. Como todo el modelo está expresado en función de variables, al momento de ejecutar la función y sustituir dichas variables por valores específicos, se genera automáticamente la geometría del buje, de forma totalmente paramétrica y reproducible.

Todos estos comandos, así como muchos otros utilizados para la manipulación de dibujos, piezas y ensamblajes, se encuentran disponibles en la documentación oficial de la API de Autodesk Inventor, lo cual permite una integración completa entre los cálculos y la generación automática de modelos CAD.

1.7. Metodología

La metodología para el desarrollo del presente proyecto de grado requirió una coordinación meticulosa entre la documentación, los cálculos analíticos, la programación y la redacción. Por ello, en la Fig.1.8 se presenta la metodología del proyecto en forma de diagrama de bloques, con el objetivo de identificar las actividades que se derivaron unas de otras y aquellas que debieron ejecutarse de manera simultánea. Asimismo, en la Tabla 1.1 se detallan las actividades secuenciales planificadas para alcanzar los objetivos específicos del proyecto y que permitieron su culminación exitosa. Para cada actividad se definieron los procedimientos de ejecución, así como los entregables correspondientes, los cuales sirvieron para evaluar el cumplimiento de cada objetivo específico.

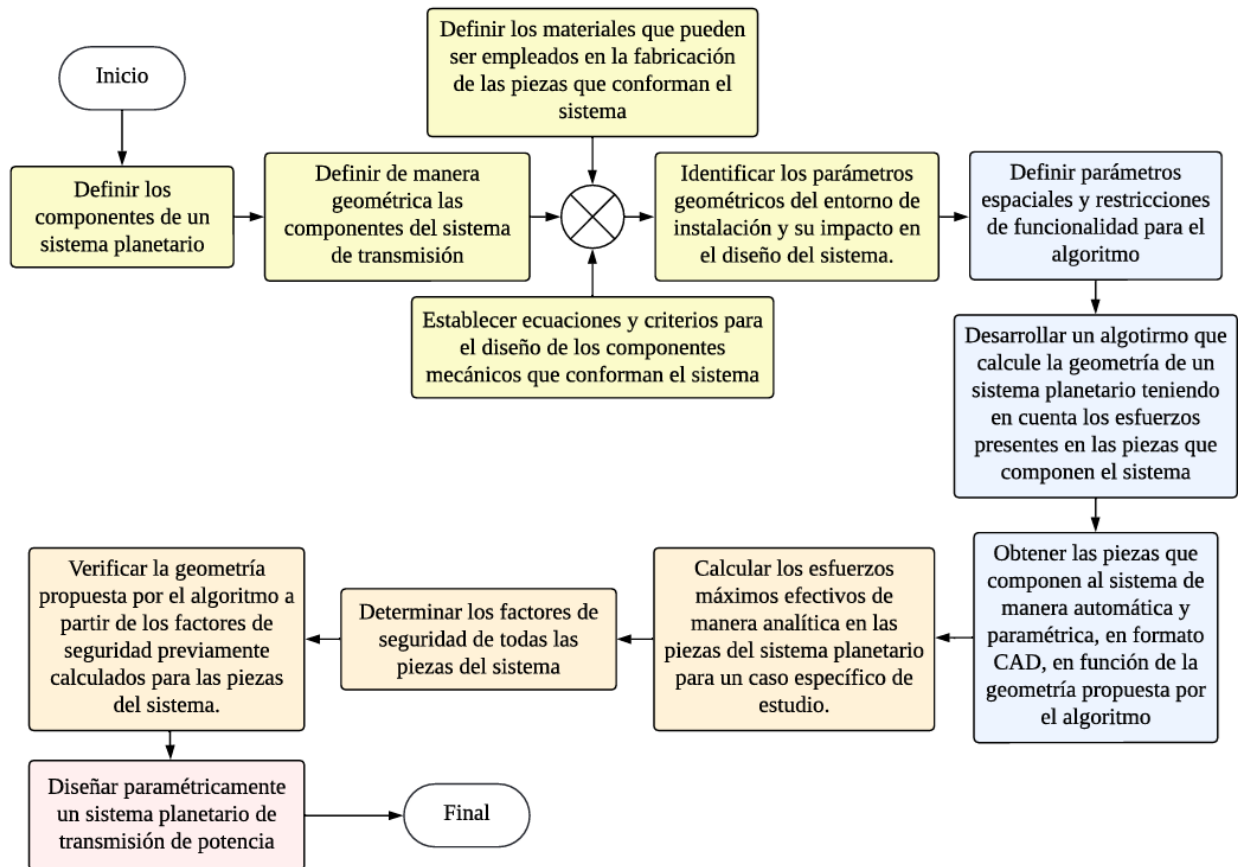


Figura 1.8: Metodología presentada en el diagrama de bloques diseñada para asegurar el cumplimiento del proyecto.

Tabla 1.1: Metodología de ejecución de este proyecto de grado.

Metodología			
Objetivos	Actividades	¿Cómo?	Entregable
General: Diseñar paramétricamente un sistema planetario de transmisión de potencia.	Establecer un protocolo que permita el diseño de sistemas planetarios de manera paramétrica.	Programación de código que permita el cálculo de sistemas de transmisión de potencia, basado en restricciones de funcionalidad y espaciales, y su validación analítica, numérica y experimental.	Documento final de trabajo de grado y algoritmo para cálculo de sistemas planetarios.
Definir los criterios y las restricciones para el diseño paramétrico de un sistema planetario de transmisión de potencia, con potencias máximas de hasta 50 W y velocidades máximas de 3600 rpm.	Definir los componentes de un sistema planetario y describir su geometría.	Revisión de la literatura inherente a sistemas de transmisión de potencia y diseño mecánico.	Lista de ecuaciones para calcular esfuerzos en componentes como ejes, engranes y chavetas; criterios de selección para rodamientos y materiales; constantes de diseño mecánico para materiales y procesos utilizados en componentes mecánicos.
	Establecer ecuaciones, criterios, métodos de manufactura y materiales para diseñar componentes mecánicos de un sistema planetario, basados en resistencia a la fatiga, resistencia última y otros factores relevantes.	Revisión de la literatura sobre materiales, métodos de fabricación y componentes mecánicos del sistema planetario.	
	Identificar los parámetros geométricos del entorno de instalación y su impacto en el diseño y los componentes del sistema.	Revisión in situ de un sistema de generación de potencia que requiere transmisión con engranajes planetarios.	
Proponer un protocolo de parametrización basado en los criterios y restricciones especificadas para el diseño de un sistema planetario de transmisión de potencia.	Definir parámetros espaciales y restricciones de funcionalidad a usarse en el algoritmo.	Definición de los parámetros de entrada que describen el sistema y sus necesidades funcionales para el algoritmo.	Algoritmo ejecutable para el diseño paramétrico de un sistema de engranajes planetarios, así como un algoritmo complementario para la generación de los componentes que conforman un sistema particular en formato CAD.
	Desarrollar un algoritmo que calcule con precisión y detalle la geometría de un sistema planetario, garantizando su funcionalidad adecuada y considerando las restricciones de espacio y entrada.	Usar un código establecido en un lenguaje de programación y solver de programación lineal para definir condiciones del diseño según consideraciones espaciales y funcionales. Desarrollo de una biblioteca con materiales para la fabricación de estos sistemas.	
	Obtener las piezas que componen al sistema de manera automática y paramétrica, en función de la geometría propuesta por el algoritmo.	Integración de las variables geométricas del sistema de transmisión obtenidas mediante un lenguaje de programación en el diseño individual de las piezas en un software CAD, a través de un algoritmo adicional encargado de la creación de dichas piezas en dicho formato.	
Evaluar el desempeño mecánico de un caso particular de un sistema planetario de transmisión de potencia que se ajuste a las restricciones establecidas previamente utilizando una verificación analítica.	Calcular los esfuerzos máximos efectivos de manera analítica en cada una de las piezas del sistema planetario para el caso específico de estudio.	Determinación de cargas sobre las piezas del sistema mediante diagramas de fuerzas, basado en las condiciones del caso particular de estudio. Cálculo de los diferentes tipos de esfuerzos presentes en las piezas de estudio y aplicación de concentradores de esfuerzos, según sea necesario.	Documento que incluye el cálculo analítico de esfuerzos y factores de seguridad para cada una de las piezas del sistema planetario, junto con la comparación entre los factores de seguridad calculados por el algoritmo y los determinados de manera analítica.
	Determinar los factores de seguridad de todas las piezas del sistema.	Determinación del esfuerzo equivalente de Von Mises en distintos puntos críticos de la pieza bajo análisis. Evaluación del factor de seguridad mediante la aplicación de distintos criterios de falla, tales como la resistencia a la fatiga y el esfuerzo de aplastamiento, entre otros.	
	Verificar la geometría propuesta por el algoritmo a partir de los factores de seguridad previamente calculados para todas las piezas del sistema.	Comparación de los factores de seguridad calculados de manera analítica para cada una de las piezas con los valores de factores de seguridad obtenidos mediante el algoritmo.	

1.8. Impacto esperado

El desarrollo de un protocolo paramétrico para el diseño de sistemas planetarios de transmisión permitirá mejorar significativamente la eficiencia del proceso de diseño al automatizar y parametrizar las etapas de generación de geometrías y configuraciones, reduciendo así el tiempo y el esfuerzo requeridos. Esta metodología minimizará errores y omisiones, asegurando la obtención de sistemas más confiables y con un desempeño óptimo. El algoritmo derivado del proyecto posibilita generar diseños de sistemas planetarios que se ajustan a diversas condiciones operativas y requerimientos funcionales específicos, reduciendo los tiempos de obtención de soluciones válidas y adaptables a distintos escenarios.

Su aplicación será especialmente beneficiosa en proyectos con características específicas, como las turbinas: Impetus Uribe, Impetus Prieto, Impetus Trujillo e Impetus Enriquez, desarrolladas por el equipo de investigación Impetus Indomitus, al eliminar la necesidad de incurrir en los costos habituales de diseño y rediseño, y al garantizar que las turbinas integren sistemas de transmisión que permitan la generación eficiente de energía. Asimismo, al proponer diseños estructuralmente válidos y adaptados a aplicaciones específicas, se incrementa la vida útil de los sistemas, contribuyendo indirectamente a la sostenibilidad mediante la reducción del desgaste, la frecuencia de reemplazo y el consumo de recursos materiales y energéticos.

2. Criterios y restricciones para el diseño paramétrico de sistemas de transmisión de potencia planetarios

Este capítulo expone las restricciones y criterios utilizados en el diseño paramétrico de sistemas planetarios de transmisión de potencia. Se definen los requisitos y criterios necesarios para asegurar tanto la funcionalidad como la viabilidad del sistema, abordando aspectos fundamentales como la geometría de los componentes, sus respectivas limitaciones y las condiciones impuestas por el entorno de instalación. Además, se analizan las restricciones asociadas a los materiales empleados en el protocolo propuesto, la incorporación de piezas con medidas estandarizadas, y los criterios específicos para un diseño adecuado de cada componente. Finalmente, se detallan las restricciones generales que guiarán el diseño paramétrico del sistema, garantizando que todas las piezas cumplan con la seguridad estructural mínima, minimizando sus dimensiones y, al mismo tiempo, satisfaciendo los requerimientos funcionales establecidos.

En la Fig.2.1 se muestra la organización de los requerimientos, restricciones y criterios a lo largo de las secciones, donde cada uno de ellos se desarrolla de manera detallada.

2.1. Requerimientos, restricciones y criterios para el diseño paramétrico de sistemas de transmisión de potencia planetarios

En la siguiente sección se presentarán los requerimientos, restricciones y criterios establecidos para el diseño de sistemas planetarios de transmisión de potencia.

2.1.1. Requerimientos funcionales necesarios para el diseño paramétrico de sistemas planetarios

Para determinar los requerimientos funcionales necesarios para el diseño de sistemas planetarios de manera paramétrica, es fundamental considerar los parámetros geométricos del entorno de instalación y su influencia en el diseño de dichos sistemas. En este contexto, se considera el entorno de ubicación del sistema como un paralelepípedo rectangular, como se muestra en la Fig.2.2, caracterizado por tener un ancho y un alto iguales, a_{ins} , y un largo L_{ins} , suponiéndose que la instalación del sistema se realizará a lo largo del eje x , también representado en dicha figura.

Una vez conocida la geometría del entorno, la cual influye directamente en la geometría del sistema, como se mostrará de manera más detallada más adelante, se debe considerar cuál será la fuente de potencia sobre la cual actuará el sistema de transmisión. Dado que, en este caso, se trabaja con las turbinas diseñadas por el equipo Impetus Indomitus, se sabe que la fuente de

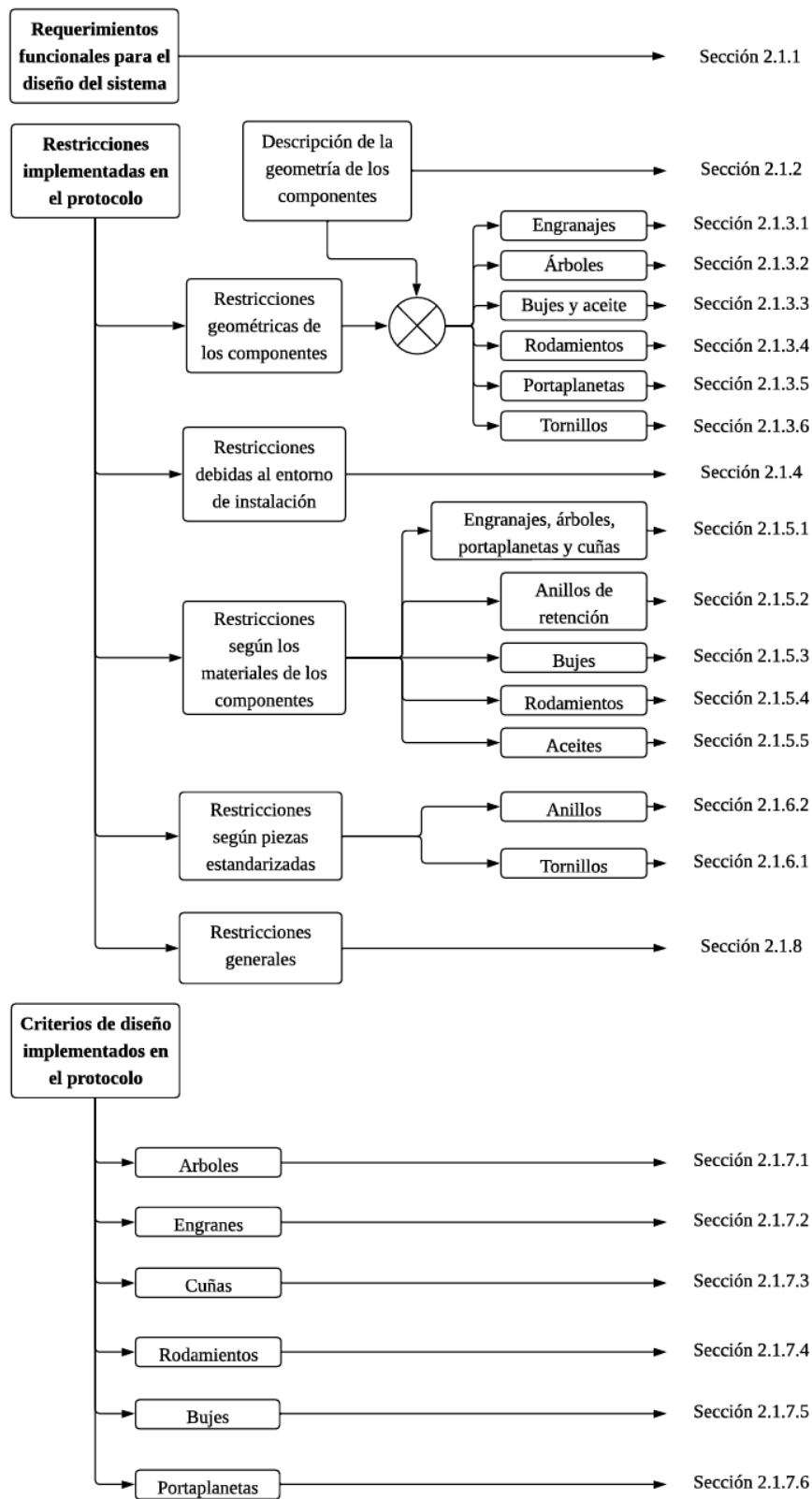


Figura 2.1: Organización de los requerimientos, restricciones y criterios considerados en el protocolo mediante un diagrama de bloques, en el cual se indica la sección correspondiente al desarrollo de cada uno de ellos, facilitando su identificación y trazabilidad dentro del documento.

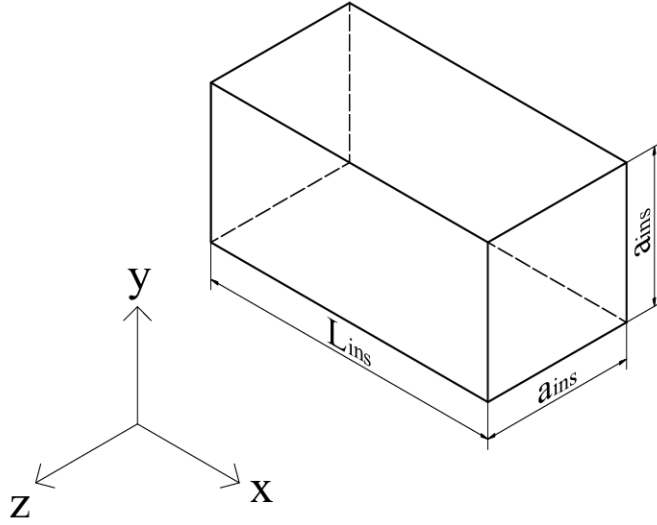


Figura 2.2: Descripción geométrica del lugar de instalación del sistema.

potencia serán dichas turbinas. Por lo tanto, es necesario conocer algunos de sus parámetros, como el peso de la turbina, que influirá directamente en los esfuerzos presentes en los componentes del sistema; el ancho de la turbina, que afecta a la geometría del árbol de entrada del sistema; el radio del rodete de la turbina, el cual incide en los momentos generados dentro del sistema; la potencia generada por dicha turbina, la cual genera parte de las fuerzas presentes en el sistema de transmisión; y la altura de la turbina que sobresale del nivel del agua, dado que esta magnitud permite, de manera indirecta, estimar la fuerza axial ejercida por el fluido sobre el sistema.

Con estos parámetros determinados y teniendo en cuenta que el objetivo principal de los sistemas paramétricos a diseñarse es el aumento de la velocidad de salida, a continuación se exponen todos los requerimientos funcionales necesarios para el diseño paramétrico de sistemas planetarios:

1. La velocidad de entrada generada por la turbina, $VelEn$, en rpm .
2. La velocidad de salida deseada, $VelOut$, en rpm .
3. El largo del espacio de ubicación, L_{ins} en cm .
4. El ancho o alto del espacio de ubicación, que, debido a las características del sistema resultante, se asume que son iguales, denotados como a_{ins} ; en caso contrario, se selecciona la medida menor de las dos, expresada en cm .
5. La potencia suministrada por la turbina, $Poten$, en W .
6. El peso de la turbina, $PesTur$, en kg .
7. El espesor de la turbina, $EspTur$ en cm .
8. El radio del rodete de la turbina, $rTur$ en cm .
9. La altura de la turbina que sobresale del nivel del agua $hTur$ en cm .

Las dimensiones L_{ins} y a_{ins} deben ser proporcionadas con el fin de establecer las medidas máximas que puede ocupar el sistema. En ausencia de estas restricciones, aunque el algoritmo lograra cumplir con los requisitos de velocidad de salida para una potencia determinada con una velocidad de entrada determinada, no sería posible garantizar que el sistema diseñado pudiera instalarse en el espacio disponible. De esta manera, dichas medidas permiten al protocolo conocer

el límite radial y longitudinal permitido: todas las dimensiones radiales del sistema estarán acotadas para no superar a_{ins} , mientras que, en la dirección longitudinal, se asegura que la longitud total no exceda L_{ins} .

2.1.2. Descripción de la geometría de los componentes que conforman un sistema planetario

Para definir adecuadamente las restricciones en el diseño paramétrico de sistemas planetarios, es fundamental contar con una descripción geométrica de los componentes que conforman dicho sistema. Por ello, esta sección se dedica a detallar la morfología de los componentes clave en un sistema planetario. Se tratarán aspectos esenciales de los engranajes solares, planetarios y anulares, así como de los árboles, cuñas, anillos de retención, tornillos y portaplanetas. La descripción se enfocará en parámetros críticos como el número de dientes, el módulo, los diámetros primitivos y el espacio disponible total, entre otros. Este análisis permitirá establecer las relaciones geométricas necesarias para el diseño de los componentes, proporcionando la base para las etapas posteriores de validación y ajuste del sistema planetario.

2.1.2.1. Engranaje solar

La geometría de este engranaje se ilustra en la Fig.2.3, y puede describirse principalmente mediante su número de dientes, Z_S , y su módulo, m . A partir de estos parámetros, se puede determinar su diámetro primitivo, D_S . Las dimensiones de los dientes están definidas por el módulo, considerando que el adendum se extiende hacia el exterior desde el diámetro primitivo, mientras que el dedendum se proyecta hacia el interior. Adicionalmente, este engranaje presenta un orificio central de diámetro D_{OS} , que permite su montaje sobre un eje para la transmisión de potencia. Este orificio forma parte integral de la geometría del componente.

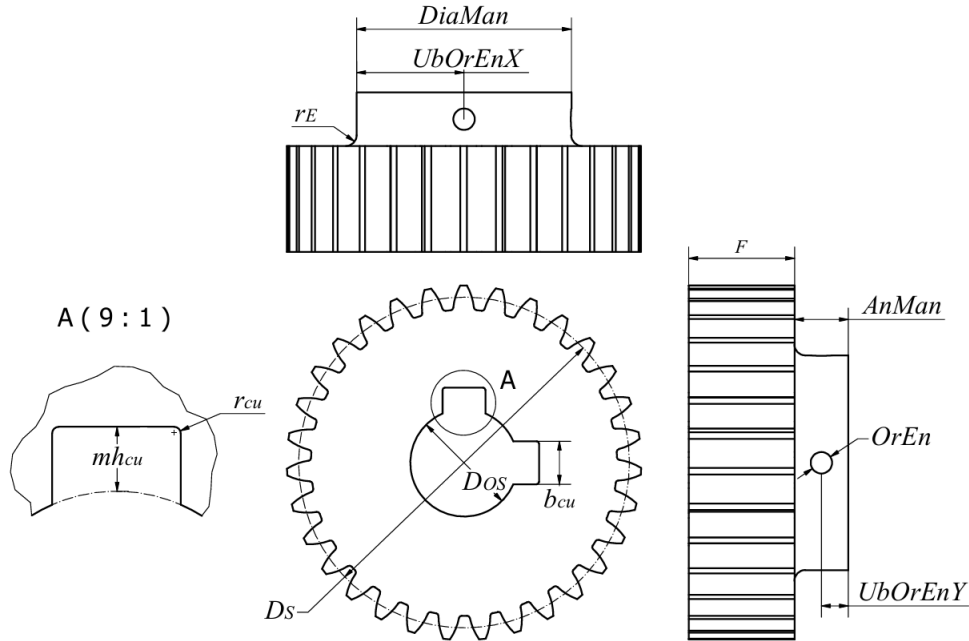


Figura 2.3: Descripción geométrica del engranaje solar en un sistema planetario.

El engranaje puede incorporar uno o dos chaveteros de geometría cuadrada, destinados a alojar una o dos chavetas, según los niveles de esfuerzo a transmitir. Estos chaveteros facilitan la conexión mecánica entre el eje y el engranaje solar. Cada chavetero se define por tres dimensiones principales: la mitad de la altura de la chaveta, mh_{cu} , el espesor dentro del engranaje, b_{cu} , y el radio de los

bordes interiores del chavetero, r_{cu} . Este último parámetro es clave para reducir las concentraciones de esfuerzos, evitando puntos críticos de tensión en el eje y el engranaje. En la Fig.2.3 se ilustra el caso con dos chaveteros, aunque si solo se requiere una chaveta, el chavetero lateral derecho puede omitirse.

Además, para garantizar la fijación axial del engranaje sobre el árbol, este incorpora una manzana de ancho $AnMan$ y diámetro $DiaMan$, como se observa en la figura correspondiente. La fijación se logra mediante tornillos de sujeción insertados en los orificios de diámetro $OrEn$, pudiendo haber uno o dos tornillos según el número de chavetas. La ubicación de estos orificios se define mediante las medidas $UbOrEnY$ (ubicación axial) y $UbOrEnX$ (ubicación radial). Finalmente, el ancho de cara del engrane, representado como F , es un parámetro determinante para la descripción completa del componente.

2.1.2.2. Engranaje planetario

La geometría de este engranaje se muestra en la Fig.2.4 y puede definirse mediante su número de dientes Z_P y su módulo m , que permite conocer su diámetro primitivo D_P y el tamaño de sus dientes, al igual que en el caso del engranaje solar. Además, el engranaje incluye un orificio interno que facilita su montaje sobre el portaplanetas, permitiendo la transmisión de potencia. Este orificio es un aspecto integral de su geometría y se caracteriza por su diámetro, D_{OP} . Finalmente, el ancho de cara del engranaje, F , constituye el último parámetro para su caracterización completa.

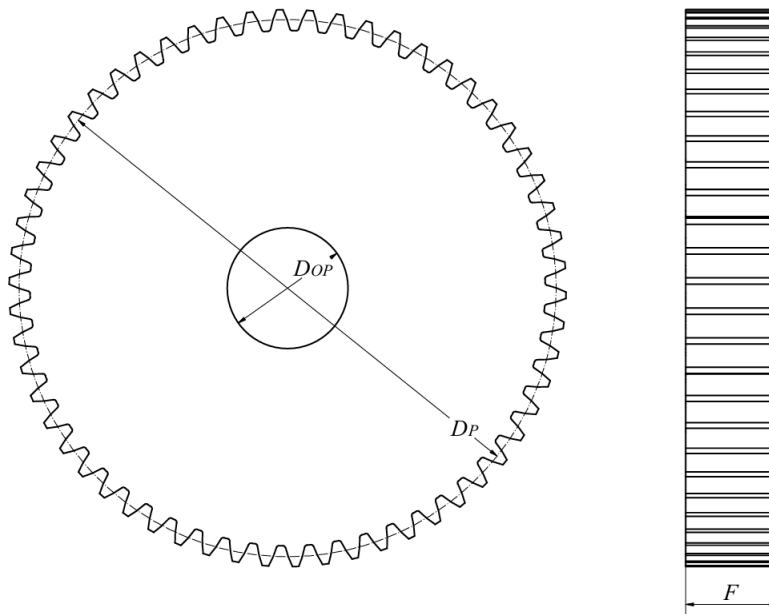


Figura 2.4: Descripción geométrica del engranaje planetario en un sistema planetario.

2.1.2.3. Engranaje anular

La geometría de este engranaje se ilustra en la Fig.2.5, y se define a partir de su número de dientes, Z_C , y su módulo, m , de forma análoga a los casos anteriores. Estos parámetros permiten determinar tanto su diámetro primitivo, D_C , como el tamaño de sus dientes. En el caso del engranaje anular, el addendum se orienta hacia el centro del engranaje, mientras que el dedendum se proyecta hacia el exterior.

A diferencia de los otros engranajes del sistema, el diámetro máximo del engranaje anular no está determinado exclusivamente por el módulo, sino por el espesor de la raíz del aro, t_C , una dimensión que es establecida por el diseñador. Aunque no existe una relación analítica precisa entre

estas variables, el estándar AGMA 6123-B06 [32] proporciona recomendaciones para su selección. En particular, se establece que el espesor mínimo debe ser al menos 3.5 veces el módulo. En este trabajo, se adopta un valor conservador de:

$$t_C = 5 \cdot m \quad (2.1)$$

Esto con el fin de evitar trabajar en el límite inferior recomendado. Esta decisión se fundamenta en que el estándar AGMA 6123-B06 únicamente proporciona una recomendación para el límite inferior de dicha medida, sin especificar un límite superior ni directrices adicionales. En consecuencia, al utilizar módulos de programación lineal, pueden generarse soluciones en las que t_C resulte significativamente mayor que el diámetro D_C . Si bien sería posible imponer restricciones adicionales para evitar este comportamiento, dichas restricciones incrementarían la complejidad del modelo y, por ende, el tiempo de cómputo requerido para encontrar soluciones válidas. Por lo tanto, con el fin de mantener la eficiencia del modelo y siguiendo la recomendación normativa disponible, se adopta como criterio que t_C sea únicamente 5 veces el módulo, evitando así consideraciones adicionales que compliquen el proceso de solución.

Finalmente, al igual que en los otros casos, el ancho de cara del engranaje, F , determina el espesor de dicho engrane.

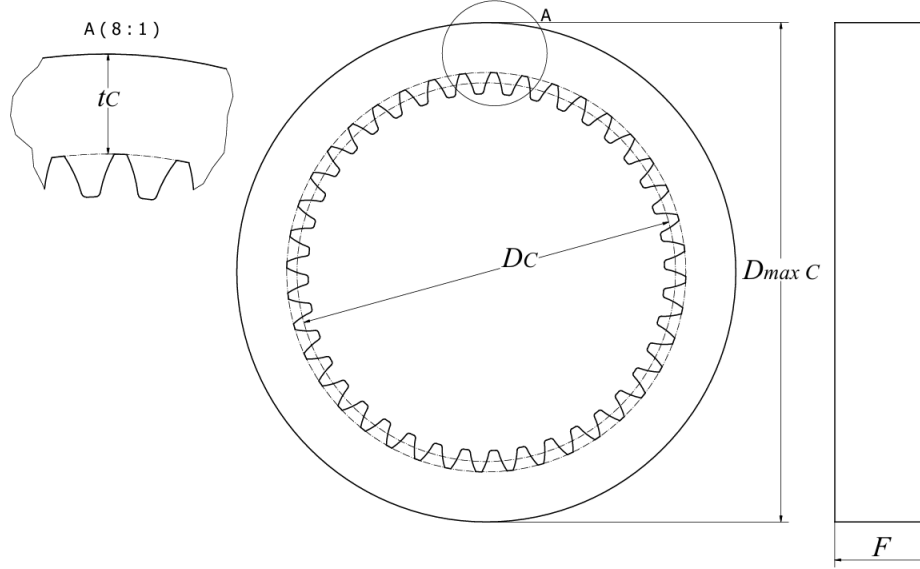


Figura 2.5: Descripción geométrica del engranaje anular en un sistema planetario.

2.1.2.4. Árboles

Para la definición geométrica de los árboles se consideran múltiples dimensiones. El diámetro nominal del árbol se representa como d_E , mientras que su longitud total se denota por L_T . Las posiciones L_1 y L_2 indican los puntos donde se instalarán los rodamientos que actúan como apoyos del eje. En estas ubicaciones también se colocarán anillos de retención para evitar desplazamientos axiales. La distancia entre ambos apoyos se define como L_R . Dichas medidas se pueden apreciar en la Fig.2.6.

Con el fin de evitar concentraciones excesivas de esfuerzos debidas a la ranura circunferencial donde se alojan los anillos de retención, se define una transición con un radio de empalme r , entre el diámetro mínimo de la ranura, d_2 , y el diámetro nominal del árbol, tal como se muestra en la Fig.2.6.b y c. El espesor del anillo de retención se representa como S .

Dado que existe transmisión de potencia entre los árboles y otros elementos del sistema, es necesario incorporar cuñas para asegurar el acoplamiento mecánico. Las dimensiones de la sección

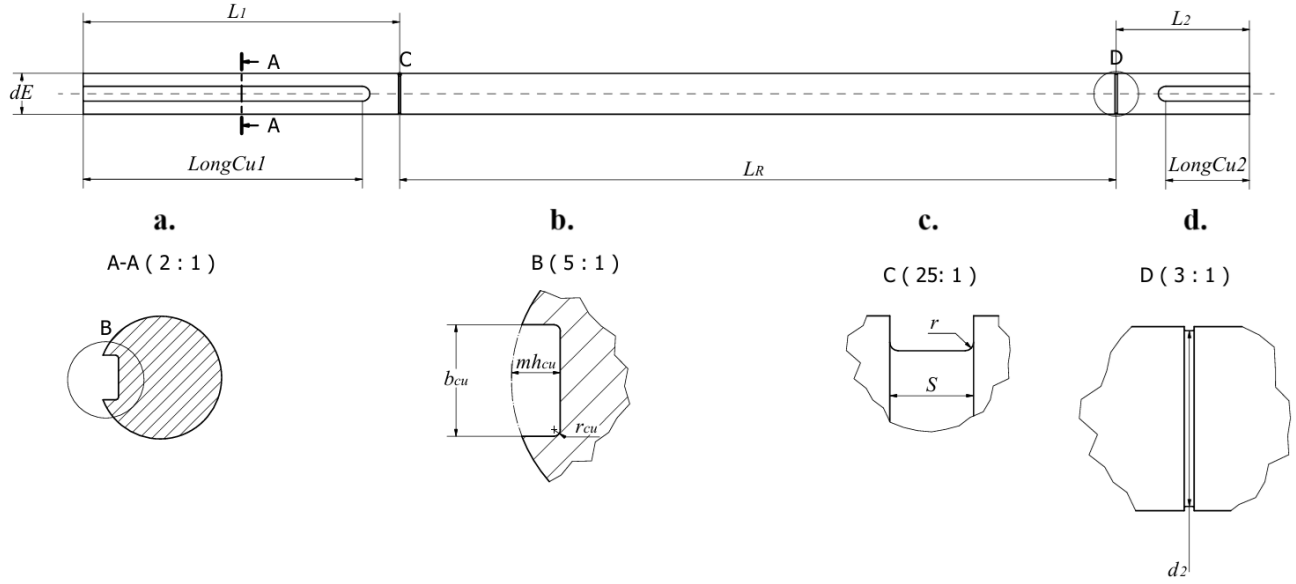


Figura 2.6: Descripción geométrica de los árboles en un sistema planetario. **a.** Sección transversal del árbol en la ubicación del cuñero. **b.** Vista en detalle de la sección transversal del cuñero. **c.** Vista en detalle de la ranura en la que se ubicará el anillo de retención del árbol, se aprecia el espesor del anillo y el radio de empalme entre diámetros. **d.** Vista en detalle de la ranura del anillo de retención, se aprecia una reducción del diámetro del árbol en dicha ubicación. transversal de la cuña, h_{cu} (altura) y b_{cu} (espesor), determinan las dimensiones del cunero, como se ilustra en la Fig.2.6.a, de donde mh_{cu} hace referencia a la mitad de la altura total de la cuña. Para reducir los concentradores de esfuerzo que se generan en esquinas vivas, el diseño del cunero incluye un radio de empalme r_{cu} en las esquinas internas. Este mismo radio se utiliza en todos los cuneros del eje.

Finalmente, para completar la descripción geométrica del eje, se especifica la longitud de las cunas ubicadas a la izquierda de L_1 , como $LongCu1$ y a la derecha de L_2 como $LongCu2$. En caso de ser necesario el uso de dos cunas en lugar de una, se contempla la posibilidad de mecanizar un segundo cuñero a 90° respecto al primero.

2.1.2.5. Cuñas

Las cuñas empleadas en el sistema se caracterizan geoméricamente por dos dimensiones principales visibles en la Fig.2.7, disponible en el capítulo de anexos: el ancho b_{cu} y la altura h_{cu} , correspondientes a su sección transversal. Aunque la longitud total de la cuña $LongCu$ no se representa en la figura, esta se considera constante a lo largo de su eje longitudinal, manteniendo una sección transversal uniforme. Para reducir concentraciones de esfuerzo en las interfaces de contacto, se incorpora un redondeo en las esquinas de la cuña, definido por el radio de empalme r_{cu} .

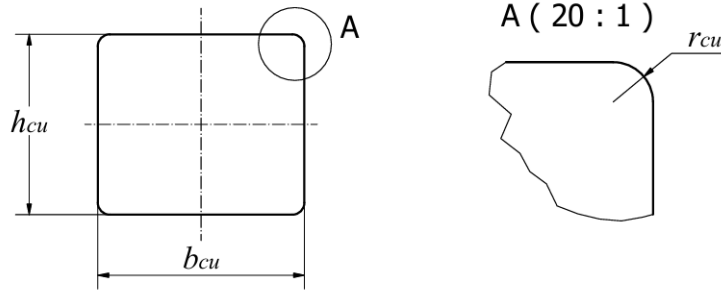


Figura 2.7: Descripción geométrica de las cuñas utilizadas en el sistema planetario. Se muestra su sección transversal, considerando que la longitud es constante y de sección uniforme, por lo que no se representa en la figura.

2.1.2.6. Anillos de retención

Para describir el anillo geoméricamente, se parte del diámetro interno libre del anillo, d_3 , este diámetro se acopla en la ranura dispuesta en el árbol. El diámetro d_5 representa el orificio presente en las orejetas, el cual permite la instalación del anillo mediante herramientas especiales (no abordadas en este trabajo de grado). El parámetro b indica el espesor del anillo en el extremo opuesto a su apertura y sirve como referencia para ubicar espacialmente el resto de los elementos del componente. El valor a corresponde al ancho de la orejeta, mientras que $UbOrX$ y $UbOrY$ definen la ubicación de los orificios de ajuste.

Por otra parte, la medida $EspAn$ representa la mitad del espacio entre orejeta y orejeta, y el radio de empalme $RaEmOr$ suaviza la transición entre el diámetro exterior del anillo y las orejetas. El diámetro exterior máximo, $DiaExAni$, no es concéntrico con d_3 , por lo que para su correcta ubicación es necesario considerar el espesor b . El parámetro $DiaExOr$ define el contorno redondeado exterior de las orejetas. Finalmente, el anillo presenta un espesor constante s . Estas medidas se pueden ver representadas en la Fig.2.8.

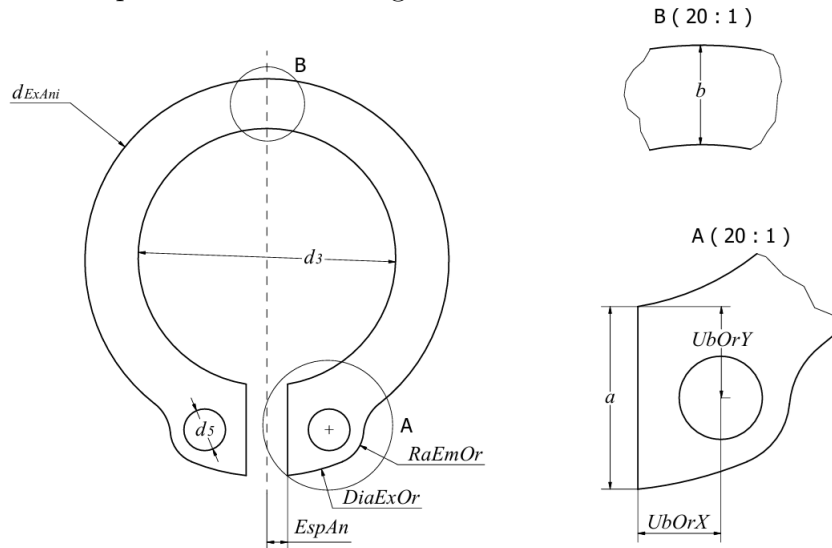


Figura 2.8: Descripción geométrica de los anillos utilizados en el sistema planetario. Se muestra su sección transversal, considerando que su espesor es constante y de sección uniforme, por lo que no se representa en la figura.

Algunas de estas dimensiones, como d_3 , d_5 y s , están estandarizadas en función del diámetro del eje y son expuestas en el estándar DIN 471 [26], lo que condiciona el diseño del resto de las

variables geométricas del anillo.

2.1.2.7. Tornillos

Los tornillos considerados en el protocolo corresponden al tipo tornillos prisioneros con punta plana y cabeza hexagonal interna, conforme a la norma ISO 4028 [33]. La geometría de este tipo de tornillo se muestra en la Fig.2.9, donde se detallan sus principales dimensiones normalizadas.

En dicha figura, d_f representa el diámetro de fondo de rosca, es decir, el diámetro medido entre los valles del filete. Por otro lado, d corresponde al diámetro nominal o mayor, medido entre las crestas de los filetes del tornillo. Ambos valores están estandarizados y, en este estudio, se considerarán tornillos en el rango de M5 a M24, lo cual implica diámetros nominales entre 5 mm y 24 mm.

Esta restricción en el diámetro nominal mínimo y máximo de los tornillos se fundamenta en lo presentado en la Tabla B.9. En dicha tabla se recomienda emplear un tornillo con diámetro nominal de 5 mm para un árbol de 8 mm de diámetro, mientras que para un árbol de 300 mm se sugiere un tornillo con diámetro nominal de 24 mm. Sin embargo, la tabla no contempla valores para árboles de diámetro inferior a 8 mm ni superior a 300 mm. Dado que esta misma tabla es empleada por el algoritmo para determinar el diámetro del tornillo en función del diámetro del árbol, esto en sí mismo establece una restricción para el diámetro nominal mínimo y máximo que podrán presentar los tornillos.

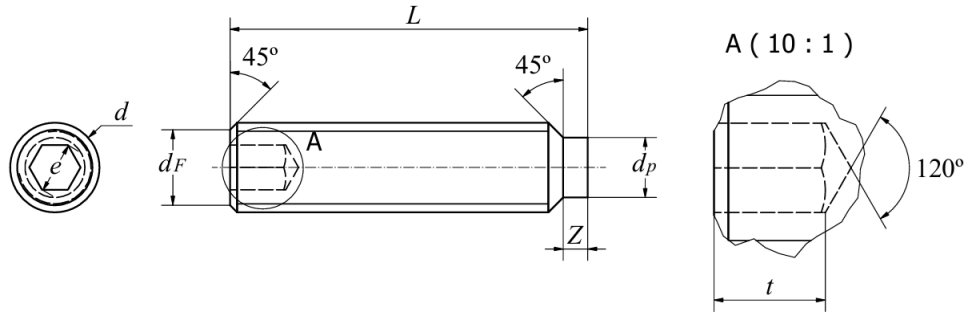


Figura 2.9: Descripción geométrica de los tornillos prisioneros utilizados en el sistema planetario. Se presentan las vistas lateral y frontal del componente, con indicación de sus principales dimensiones normalizadas.

El diámetro d_p corresponde al diámetro de la punta plana, encargada de ejercer la función de fijación axial entre las piezas acopladas. La longitud total del tornillo se denota como l , mientras que z indica la longitud del tramo sin rosca correspondiente a la punta plana. La profundidad t especifica el alcance máximo de inserción de la llave hexagonal, y e representa el diámetro del círculo circunscrito sobre el que se inscribe el hexágono interior, donde se inserta la herramienta de accionamiento.

Todas estas dimensiones dependen del diámetro del tornillo seleccionado y están reguladas por los estándares definidos en la norma ISO 4028, garantizando compatibilidad y repetibilidad en aplicaciones mecánicas.

2.1.2.8. Bujes y rodamientos

La descripción geométrica de los bujes considerados en este proyecto de grado se fundamenta en tres dimensiones principales: el diámetro interno db_{in} , el diámetro externo db_{ex} y el espesor del buje L_{buj} . Dado que presentan una sección transversal constante a lo largo de su eje, no se requiere la inclusión de una vista lateral adicional en la Fig.2.10.a, donde se representa su geometría.

A diferencia de los bujes, cuya geometría puede describirse de manera relativamente simple,

una caracterización completa de un rodamiento de bolas tipo Conrad o de contacto angular requiere la consideración de múltiples parámetros. Sin embargo, en el presente proyecto se emplearán exclusivamente rodamientos de disponibilidad comercial, por lo que no se contempla su rediseño. En consecuencia, únicamente se consideran tres dimensiones principales para su integración en los sistema: el diámetro interno dr_{in} , el diámetro externo dr_{ex} y el espesor L_{rod} . Dado que estas dimensiones se mantienen constantes a lo largo del eje longitudinal, en la Fig.2.10.b no se incluye una vista lateral adicional, asumiendo una sección transversal uniforme. La figura referida permite representar geoméricamente tanto un rodamiento tipo Conrad como uno de contacto angular, en concordancia con los requerimientos del proyecto.

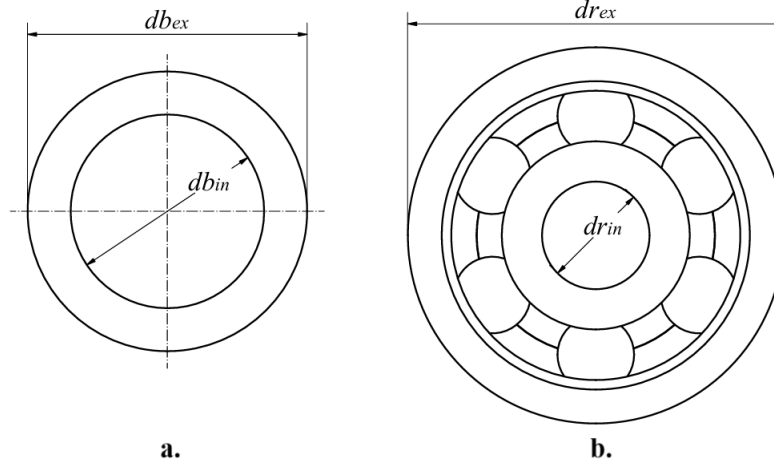


Figura 2.10: a. Descripción geométrica de los bujes utilizados en el sistema planetario. b. Descripción geométrica de los rodamientos utilizados en el sistema planetario.

2.1.2.9. Portaplanetas y vigas de soporte

El portaplanetas se divide en dos componentes principales: el cuerpo del portaplanetas y las vigas que sostienen los engranajes planetarios. En la Fig.2.11 se representa la geometría del cuerpo del portaplanetas. En dicha figura, la dimensión $EspDis$ representa el espesor de las dos secciones encargadas de soportar las vigas sobre las cuales se montan los engranajes planetarios.

El parámetro d_{Viga} corresponde al diámetro del orificio sobre el cual se monta cada viga que sostiene un engranaje planeta. Por su parte, r_{uo} es la distancia radial entre el centro del portaplanetas y el centro de los orificios donde se ubican las vigas. El diámetro del brazo que permite el montaje del portaplanetas sobre el eje se denota como d_{Brazo} , mientras que el diámetro máximo del portaplanetas se representa mediante $d_{Portaplanetas}$. El diámetro del eje sobre el cual se monta esta estructura se indica como d_{Eje} .

Para asegurar la transmisión de par torsor entre el árbol y el portaplanetas, se utiliza una cuña cuya geometría está definida por su ancho b_{cu} y la mitad de su altura total mh_{cu} . Además, el radio del cuñero, r_{cu} , se incorpora para facilitar el acoplamiento sin concentraciones de esfuerzos. El parámetro r_{Brazo} representa el radio de transición entre el diámetro máximo del portaplanetas $d_{Portaplanetas}$ y el diámetro de la manzana d_{Brazo} . Esta transición se diseña con el fin de evitar concentraciones de esfuerzos en dicha zona. La longitud efectiva de la manzana, que permite la unión entre el árbol y el portaplanetas, se representa mediante $MedBra$.

El ángulo de desarrollo de los brazos del portaplanetas, indicado como $Angulo$, varía dependiendo de la cantidad de engranajes planetarios. Este parámetro también determina la cantidad y disposición de los orificios para las vigas de soporte, con el objetivo de permitir un movimiento adecuado de los engranajes sin interferencias. Por otra parte, el orificio de salida de potencia del portaplanetas, que se conecta con el eje del engranaje sol, tiene un diámetro D_S igual al diámetro

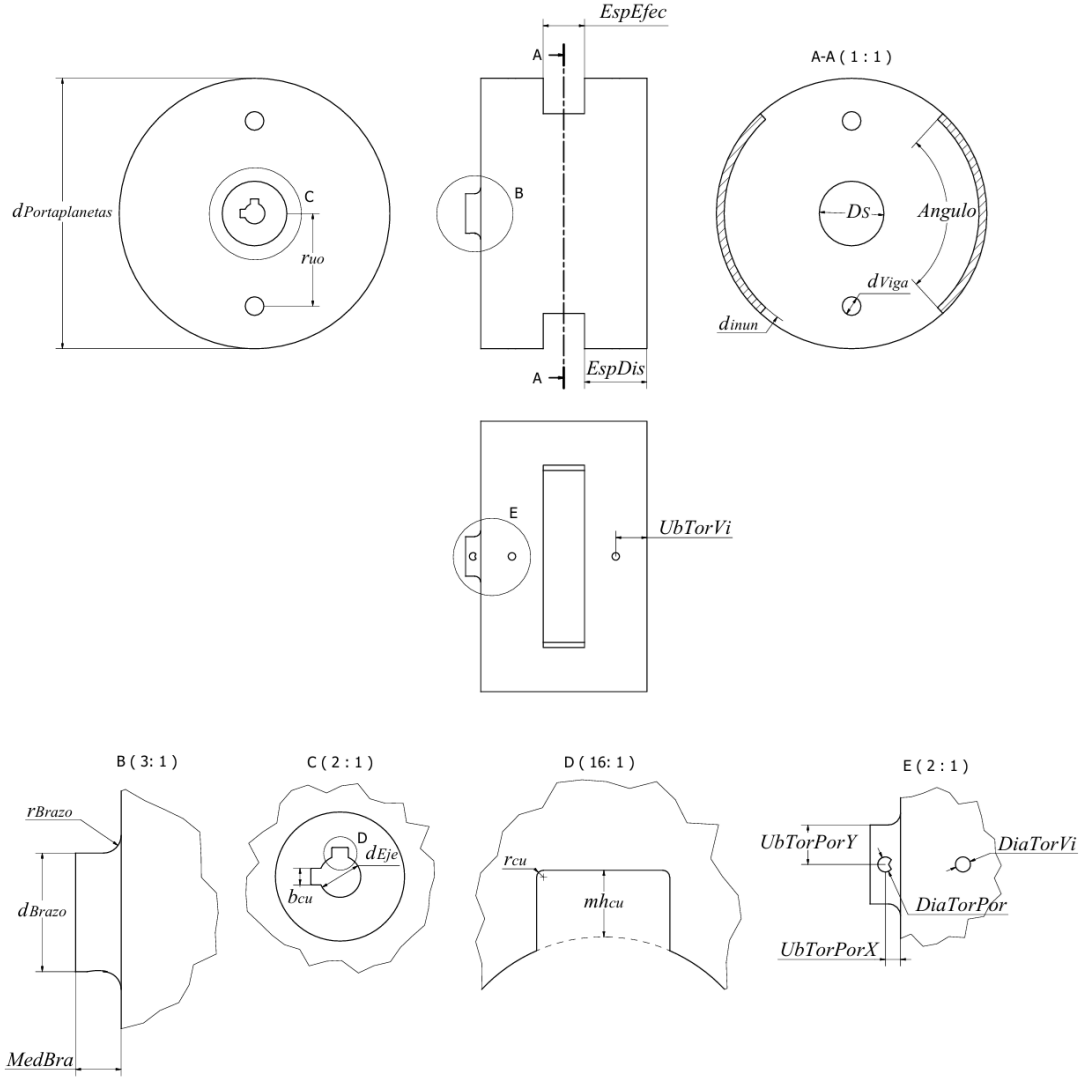


Figura 2.11: Descripción geométrica del portaplanetas. Se incluyen vistas en sección y detalles ampliados con el fin de facilitar una comprensión de su geometría.

primitivo del engranaje solar. Esto se hace para garantizar compatibilidad dimensional, ya que el eje no puede exceder dicho valor.

En cuanto a la fijación axial del portaplanetas al eje de entrada, los orificios para los tornillos se ubican en coordenadas $UbTorPorX$ (axial) y $UbTorPorY$ (radial). Los orificios para los tornillos que aseguran las vigas al portaplanetas se disponen en ubicaciones definidas por $UbTorVi$, cuya cantidad depende del número de engranajes planetarios. De la misma manera, el diámetro de los orificios para los tornillos de fijación de las vigas se denota como $DiaTorVi$, mientras que el diámetro de los orificios para los tornillos de fijación del portaplanetas al árbol es $DiaTorPor$.

Por último, en la Fig.2.12, se representa la geometría de la viga. En ella, $LongVi$ es la longitud total de la viga, $EspDis$ representa la longitud bajo la cual la viga está en contacto con el portaplanetas, y $EspEfe$ es la longitud sobre la cual el engranaje está apoyado, definida de forma análoga al caso del portaplanetas. Finalmente, el radio r_{aco} se incorpora como transición geométrica entre la viga y el portaplanetas para evitar concentraciones de esfuerzos. Este radio permite una conexión suave entre el diámetro de la viga en la sección de los engranajes $d_{EfeViga}$ y el diámetro de la viga en su zona de apoyo sobre el portaplanetas d_{Viga} .

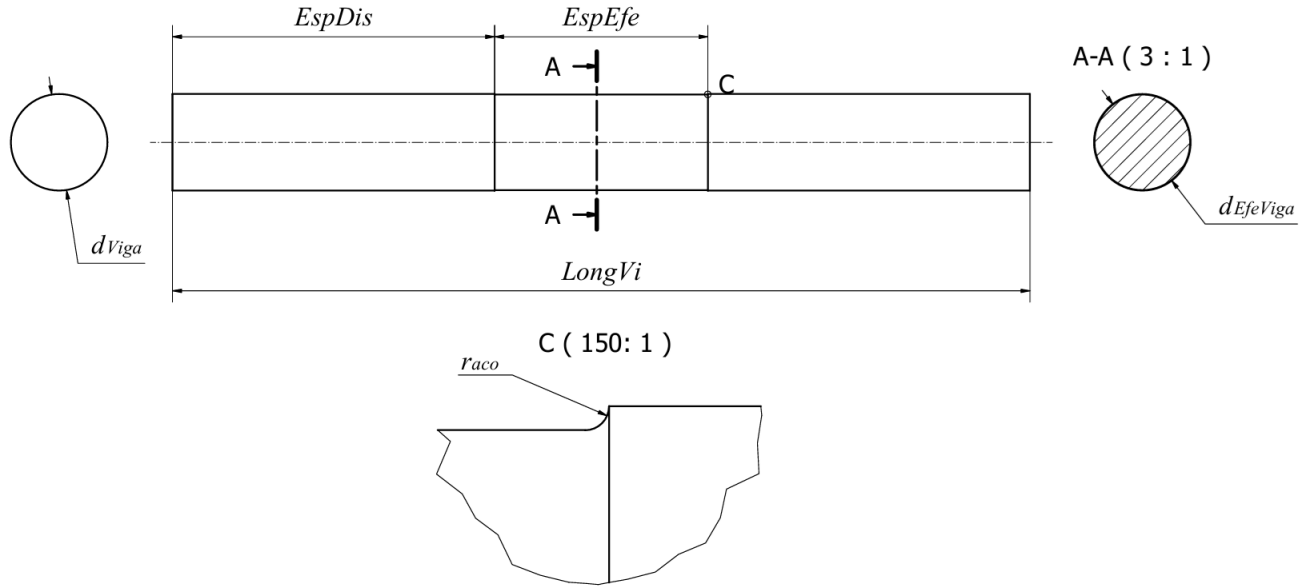


Figura 2.12: Descripción geométrica de las vigas encargadas de soportar y permitir el movimiento de los engranajes planetarios.

2.1.3. Restricciones geométricas de los componentes de los sistemas planetarios a diseñarse de manera paramétrica

En esta sección se presentan las restricciones geométricas asociadas a los componentes de un sistema planetario, organizadas según el tipo de pieza. Cada tipo de componente, como engranajes, árboles o rodamientos, tiene un conjunto específico de restricciones formuladas a partir de las descripciones geométricas de los mismos, establecidas en la sección 2.1.2. Estas restricciones se formulan con el propósito de garantizar un ensamblaje correcto y eficiente entre los componentes del sistema. Las restricciones se definieron a partir de los métodos sistemáticos de diseño descritos en [11] y [12], los cuales orientan el análisis de aspectos como las características de transmisión y los factores a considerar en el proceso de diseño; sin embargo, su aplicación no se limita de manera estricta a la secuencia de pasos establecidos en dichos métodos.

En cada subsección de esta sección, el título identifica la pieza en estudio y, de manera inmediata, se detallan las restricciones geométricas específicas asociadas a la misma.

2.1.3.1. Engranajes

1. Con el fin de asegurar el correcto ensamble entre el engrane solar, los engranes planetarios y el engrane anular, un sistema planetario debe cumplir que:

$$D_C = D_S + 2 \cdot D_P \quad (2.2)$$

La razón de esta condición es expuesta en la sección A.4 de los anexos.

2. El protocolo puede utilizar únicamente los siguientes módulos enteros: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20 y 25 mm, para la construcción de la geometría de los engranajes.
3. Se debe asegurar un igual distanciamiento entre los planetas de cada una de las etapas del sistema, esto para evitar una distribución desigual en la carga de los planetas.
4. El protocolo puede seleccionar un máximo de 8 engranajes planetarios, ya que, aunque es posible utilizar más planetas, los diámetros de paso de los planetas son significativamente más

pequeños que el del engranaje solar, lo que puede generar problemas durante el ensamblaje. Esto según lo indicado en la norma AGMA 6123-B06 [34].

5. No debe existir contacto entre los diferentes engranes planetarios de una misma etapa, para esto se debe asegurar que:

$$(D_P + D_S) \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{NumPla}\right) > D_P + 2 \cdot m \quad (2.3)$$

Donde $NumPla$ representa el número de planetas en una de las etapas. Esta ecuación se obtiene de la norma AGMA 6123-B06 [34].

6. Tanto D_{OP} como D_{OS} deben cumplir la siguiente condición:

$$D_{OP} \leq D_P - 7.9 \cdot m \quad D_{OS} \leq D_S - 7.9 \cdot m \quad (2.4)$$

Esta restricción se establece con el fin de evitar fallas por fatiga a la flexión en la dirección radial del engrane. Además, garantiza que el factor Y_B , descrito en la secciones anteriores, se mantenga en un valor de 1.0. Dado que esta restricción impone un límite superior al diámetro del eje, también condiciona las dimensiones máximas admisibles para la sección transversal de la cuña.

7. En un par de engranajes, se establece que el piñón, componente que generalmente presenta un menor número de dientes y, por ende, mayor número de ciclos de carga, debe poseer una dureza superior a la del engranaje con el que engrana. Esta diferencia en dureza tiene como finalidad mejorar la distribución del desgaste, reducir la probabilidad de falla por fatiga superficial en el piñón y extender la vida útil del conjunto.
8. La dimensión máxima del engranaje anular en dirección radial D_{maxC} , se debe calcular de la siguiente manera:

$$D_{maxC} = D_C + 12.5 \cdot m \quad (2.5)$$

Esto teniendo en cuenta lo establecido en la Ec.2.1, y en la definición del dedendum de un engrane, que se relaciona directamente con su modulo.

2.1.3.2. Árboles

1. Dado que la longitud de la cuña abarca toda la porción del sistema que transmite potencia y que no corresponde al árbol, y considerando que en el extremo derecho de cada árbol se encuentra dispuesto el portaplanetas, mientras que en el extremo izquierdo se conecta, dependiendo del caso ya sea la turbina (en el árbol de entrada) o el engrane solar de una de las etapas, se establece lo siguiente:

En el lado derecho del árbol, la longitud de la cuña debe cumplir:

$$LongCu_2 = EspDisc + r_b + MedBra \quad (2.6)$$

En el lado izquierdo, la longitud de la cuña depende del tipo de árbol considerado:

Para árboles intermedios:

$$LongCu_1 = F \quad (2.7)$$

Para el árbol de entrada:

$$LongCu_1 = EspTur \quad (2.8)$$

2. Debido a que la cuña debe dejar espacio suficiente para la instalación de los rodamientos, así como para la correcta ubicación del anillo de retención, se establece:

$$L_1 > LongCu_1 + 10 \quad (2.9)$$

Todas las medidas se expresan en milímetros (mm), y el término adicional de $10\ mm$ se introduce con el fin de evitar que el algoritmo proponga soluciones en las que la cuña invada el espacio reservado para el anillo de retención.

3. Los árboles tienen un diámetro máximo de $300\ mm$, ya que para diámetros mayores no se especifica en la normativa DIN 471 el tamaño correspondiente del anillo de sujeción axial.
4. De manera análoga, para el lado derecho del árbol se impone la siguiente condición:

$$L_2 > LongCu_2 + 10 \quad (2.10)$$

Esta restricción responde a la misma necesidad descrita anteriormente, añadiendo también un margen de $10\ mm$ para asegurar la separación adecuada entre la cuña y los elementos de fijación en ese extremo.

5. Para garantizar que el sistema respete completamente la longitud máxima disponible, se establece la siguiente restricción:

$$L_1 + L_2 + L_R \leq L_{max\ eje} \quad (2.11)$$

En el caso del árbol de entrada, la restricción se modifica de la siguiente manera para tener en cuenta el espesor de la turbina:

$$L_1 + L_2 + L_R = L_{max\ eje} + EspTur \quad (2.12)$$

Este árbol debe ser más largo que los demás debido a que aloja la turbina.

6. Para mejorar el rendimiento del protocolo, se establece que todos los árboles, excepto el de entrada, tengan la misma longitud.
7. Se establece que las dimensiones de los anillos sean seleccionadas por el protocolo en función del diámetro del árbol, conforme a lo estipulado en el estándar DIN 471 [26], que define dichas dimensiones a partir del diámetro correspondiente.
8. El radio de redondeo de las cuñas r_{cu} , el cual es el mismo radio de empalme que presentan los cuñeros de los árboles, debe ser lo más grande posible sin comprometer el rendimiento de la cuña. En aras de minimizar la concentración de esfuerzos en esos lugares críticos.
9. Las deflexiones a lo largo de los árboles, tanto angulares γ , como transversales δ , respecto a su eje longitudinal deben minimizarse en la medida de lo posible con el fin de preservar la alineación geométrica del sistema y garantizar su correcto funcionamiento:

$$\delta \longrightarrow 0 \quad \gamma \longrightarrow 0 \quad (2.13)$$

2.1.3.3. Bujes y aceite

1. El diámetro interior del buje, d_{bin} , debe ser mayor que el diámetro efectivo de la viga en la sección donde se ubican los engranajes, $d_{EfeViga}$, y mayor o igual que el diámetro del orificio sobre el cual se monta cada viga que sostiene los engranajes planetarios, d_{Viga} . Esta condición garantiza la viabilidad del montaje adecuado:

$$d_{bin} \geq d_{EfeViga} \quad d_{bin} \geq d_{Viga} \quad (2.14)$$

2. A su vez, el diámetro exterior del buje, d_{bex} , debe ser menor o igual al diámetro del orificio en el que será montado, D_{OP} , garantizando un ajuste adecuado entre ambas superficies:

$$d_{bex} = D_{OP} \quad (2.15)$$

3. El aceite a ser seleccionado para el sistema resultante debe ser uno de los listados de la Tabla B.7, presente en los anexos.

2.1.3.4. Rodamientos

1. El diámetro interior del rodamiento, ya sea un rodamiento tipo Conrad o un rodamiento de contacto angular, d_{rin} , debe ser igual al diámetro del árbol sobre el cual será montado, d_{Eje} , con el fin de garantizar un correcto ajuste :

$$d_{rin} = d_{Eje} \quad (2.16)$$

2. Los rodamientos seleccionados deben provenir de las bases de datos descritas en la subsección 2.1.5.4, de las cuales se incluye una muestra representativa en las Tablas B.5 y B.6, ubicadas en el capítulo de anexos.

2.1.3.5. Portaplanetas

1. El diámetro máximo del portaplanetas, $d_{Portaplanetas}$, debe ser menor que el diámetro mínimo interno disponible de la corona, D_{Cmin} , con el fin de evitar interferencias con los dientes de esta:

$$d_{Portaplanetas} < D_{Cmin} \quad (2.17)$$

De donde el valor de D_{Cmin} se define como:

$$D_{Cmin} = D_C - (2 \cdot m) \quad (2.18)$$

Esta condición garantiza el espacio necesario entre el portaplanetas y los dientes de la corona, evitando así contactos no deseados durante la operación.

2. Con el fin de garantizar la rotación adecuada de los engranajes planetarios montados sobre el portaplanetas, los extremos de los brazos del mismo deben mantener una configuración geométrica que no interfiera con el movimiento de dichos componentes. Para ello, el ángulo de desarrollo de los brazos, denotado como *Angulo*, debe ser menor o igual al ángulo de tangencia permitido, $Angulo_{Tangencia}$, el cual asegura que no se produzca interferencia entre los extremos de los brazos y el diámetro máximo de los planetas:

$$Angulo \leq Angulo_{Tangencia} \quad (2.19)$$

El diámetro máximo de los planetas, D_{AP} , se define como:

$$D_{AP} = D_P + (2 \cdot m) \quad (2.20)$$

Esta condición geométrica es fundamental para evitar colisiones durante el funcionamiento del sistema entre el portaplanetas y los dientes de los planetas.

3. La distancia radial entre el centro del engrane solar y el centro de los engranajes planetarios, denotada como r_{uo} , se encuentra directamente relacionada con los diámetros de los engranajes planeta D_P y el engranaje sol D_S , y se determina mediante la expresión:

$$r_{uo} = \frac{D_P + D_S}{2} \quad (2.21)$$

4. La medida disponible para la ubicación de los engranajes planetarios se estima como:

$$EspEfe = F + 1 \quad (2.22)$$

Esto según el criterio del autor.

5. El diámetro mínimo que tendrán los brazos que permiten la unión entre los dos discos que conforman el portaplanetas se estima como:

$$d_{inun} = \frac{d_{Portaplanetas}}{1.20} \quad (2.23)$$

6. Con el objetivo de asegurar la integridad estructural del componente, $DiaTorVi$, que es el diámetro máximo que presenta el tornillo de sujeción de la viga, deberá ser menor que $EspDis$, que es el espesor de los discos que componen al portaplanetas, de manera que se garantice un espesor mínimo de material en los laterales del orificio:

$$DiaTorVi \leq EspDis - 4 \quad (2.24)$$

Ambas magnitudes están expresadas en mm . Esta restricción asegura que, como mínimo, se mantenga un espesor de 2 mm a cada lado del orificio.

7. El tornillo que permite fijar las vigas del portaplanetas deberá ubicarse en la mitad del espesor del disco, lo que se expresa mediante la siguiente relación:

$$UbTorVi = \frac{EspDis}{2} \quad (2.25)$$

8. Con el objetivo de garantizar una fijación adecuada, el diámetro del tornillo que permite la fijación axial de los portaplanetas a los ejes deberá ser menor a la longitud de la manzana de unión entre el eje y el portaplanetas:

$$DiaTorPor < MedBra \quad (2.26)$$

9. La ubicación del tornillo que permite la fijación axial del portaplanetas al eje deberá disponerse de manera que quede centrado tanto en la longitud efectiva de la manzana como en su sección transversal. Por lo tanto, se imponen las siguientes condiciones:

$$UbTorPorX = \frac{MedBra}{2} \quad (2.27)$$

$$UbTorPorY = \frac{d_{brazo}}{2} \quad (2.28)$$

10. El radio de transición entre d_{Brazo} y $d_{Portaplanetas}$ debe ser lo suficientemente grande para minimizar las concentraciones de esfuerzos en esa sección de la pieza, contribuyendo a la integridad del componente.
11. El radio de acople r_{aco} entre el diámetro utilizado para el apoyo de la viga, d_{Viga} , y el diámetro que permite el posicionamiento de los engranajes, $d_{efeViga}$, debe ser lo más grande posible para evitar concentraciones de esfuerzos en esa zona crítica.

2.1.3.6. Tornillos

1. El largo del tornillo utilizado para la fijación de las vigas en los portaplanetas debe cumplir con la siguiente relación, con el objetivo de garantizar un correcto posicionamiento del tornillo:

$$L \leq \frac{D_{Portaplanetas} - d_{Viga}}{2} - r_{uo} \quad (2.29)$$

Esta restricción asegura que el espacio entre la viga y el diámetro máximo del portaplanetas coincida con la longitud del tornillo, evitando que su tamaño sea excesivo y cause interferencias con los dientes de la corona.

2. De manera similar, el tornillo utilizado para fijar el portaplanetas al eje debe cumplir con la siguiente relación:

$$L \leq \frac{d_{Brazo} - d_{Eje}}{2} \quad (2.30)$$

Esta relación asegura que el tornillo se ajuste correctamente entre el diámetro del brazo y el eje, garantizando un posicionamiento adecuado.

3. La selección del tamaño del tornillo se realizará en función del árbol o de la viga sobre los cuales se posicione, basándose el algoritmo en los criterios establecidos en la Tabla B.9, presente en los anexos, para dicha selección.
4. Las dimensiones del tornillo seleccionado, conforme al tamaño determinado por el protocolo, se establecerán en función de los valores especificados en la Tabla B.10, presente también en los anexos.

2.1.4. Restricciones del sistema según su entorno de instalación

En la siguiente sección se presentarán las restricciones que deberán cumplir los sistemas a diseñar, en función de la geometría del entorno de instalación:

1. La pieza de mayor dimensión en dirección radial es el engranaje anular, cuya dimensión máxima se denota como D_{maxC} . Dado que el sistema no debe exceder el espacio disponible, y considerando la Fig.2.2, se establece la siguiente restricción:

$$a_{ins} \geq D_{maxC} \quad (2.31)$$

2. La longitud total del sistema no debe superar la longitud disponible para su instalación, excluyendo el espesor de la turbina. Esta restricción se expresa como:

$$L_t \geq L_{\text{total sistema}} \quad (2.32)$$

Donde L_t se define como:

$$L_t = L_{ins} - EspTur \quad (2.33)$$

Siendo L_{ins} la longitud total del espacio disponible para la instalación, y $EspTur$ el espesor de la turbina.

Se debe tener en cuenta que, dependiendo de la relación de velocidades entre la entrada y la salida del sistema, se requerirá una o varias etapas de reducción. Con el fin de acotar el alcance del algoritmo a desarrollar, se considerarán únicamente relaciones de velocidad de hasta 150:1. En consecuencia, el número máximo de etapas permitidas por sistema será de tres.

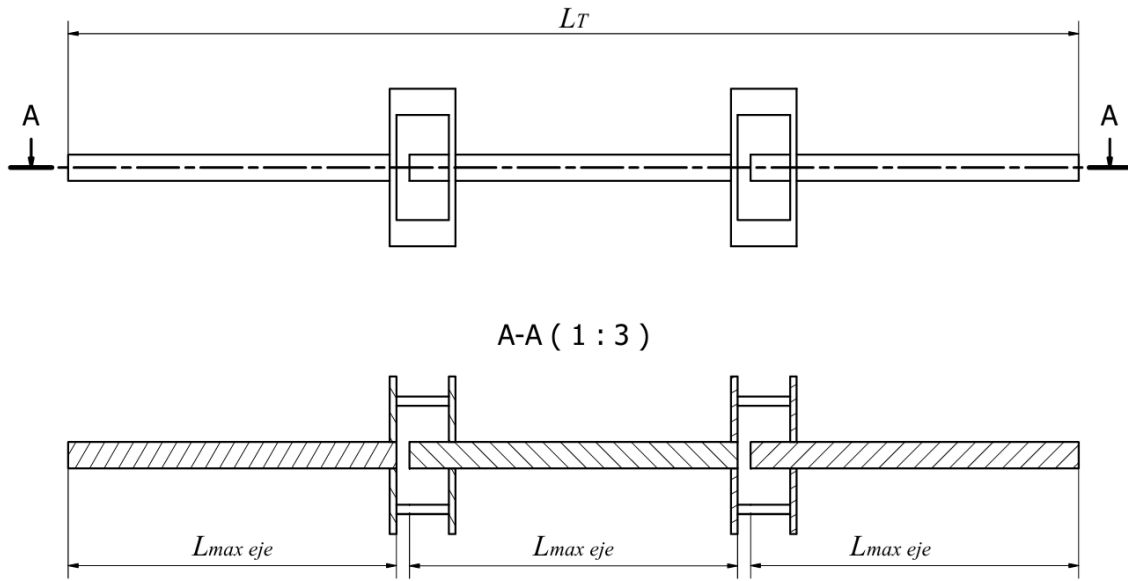


Figura 2.13: Bosquejo esquemático de un sistema con dos etapas. La representación no corresponde a la configuración final del diseño; se utiliza únicamente con fines ilustrativos para el desarrollo de la Ec.2.34.

Como ejemplo ilustrativo, la Fig.2.13 presenta un sistema de dos etapas. A partir de este ejemplo, se desarrolla una ecuación que permite estimar el largo máximo de los ejes que puede admitir el sistema $L_{max\ eje}$, de forma que la longitud total del conjunto no exceda la longitud disponible para la instalación. La expresión correspondiente se presenta a continuación:

$$L_{max\ eje} = \frac{L_t - N_{ET}}{1 + N_{ET}} \quad [cm] \quad (2.34)$$

Donde N_{ET} representa el número de etapas que conforman el sistema. Para garantizar la coherencia dimensional en los cálculos, todas las magnitudes utilizadas en la ecuación deben expresarse en centímetros (cm).

Esta expresión permite determinar la distancia máxima admisible para cada eje, teniendo en cuenta los espacios axiales entre ellos, los cuales se encuentran implícitamente considerados en la Ec.2.22.

En el caso particular del eje de entrada, denotado como $L_{Eje\ entrada}$, debe tenerse en cuenta que la Ec.2.34 no contempla el espesor de la turbina. Por tanto, dicho espesor debe ser sumado a la longitud calculada para este eje:

$$L_{max\ eje\ entrada} = L_{max\ eje} + EspTur \quad (2.35)$$

Las dos restricciones anteriormente expuestas representan las únicas condiciones impuestas por el entorno de instalación. Sin embargo, estas limitaciones tienen un impacto significativo sobre el diseño del sistema, ya que al restringir dimensiones clave como el diámetro máximo del conjunto D_{maxC} y la longitud máxima por eje $L_{max\ eje}$, condicionan directamente las características geométricas del resto de los componentes.

2.1.5. Restricciones asociadas a los materiales seleccionados para la fabricación de los componentes del sistema

En la subsección 1.6.3 se definieron las propiedades y requisitos que los materiales deben cumplir para su aplicación en componentes específicos del sistema. En consecuencia, en esta sección se presentan únicamente los materiales que cumplen con dichas características y que serán considerados para su inclusión en el protocolo propuesto, lo cual constituye una restricción en sí misma, ya que el protocolo solo trabajará con los materiales listados en las tablas correspondientes. Cabe destacar que todas las tablas mencionadas en esta sección se encuentran en el capítulo de anexos, debido a las limitaciones de espacio del documento.

2.1.5.1. Selección de materiales para engranes, árboles, portaplanetas y cuñas

La selección de los materiales para los componentes del sistema se fundamentó en los criterios establecidos en la sección 1.6.3, así como en las especificaciones técnicas contenidas en la norma ISO 6336-5 [30]. Esta norma define los requisitos de calidad que deben cumplir los materiales empleados en la fabricación de engranajes, así como su impacto en los límites de resistencia mecánica, particularmente en relación con la resistencia a la fatiga de contacto y a la fatiga por flexión.

En función de estos criterios, se elaboró la Tabla B.1, presentada en los anexos, que incluye diez materiales que cumplen tanto con las condiciones estipuladas por la ISO 6336-5 como con los lineamientos establecidos en la sección 1.6.3. Esta tabla resume las propiedades mecánicas clave de los materiales seleccionados. Aunque existen otros materiales que también cumplen con ambos conjuntos de requisitos, se eligió este subconjunto representativo con el objetivo de mantener la tabla concisa y optimizar el proceso de selección. Por lo tanto, el protocolo establecido solo considera como materiales disponibles aquellos que se encuentran en la tabla mencionada.

2.1.5.2. Selección de materiales para la fabricación de anillos de retención

La selección de los anillos de retención se basa en los criterios presentados en la sección 1.6.3 y en los lineamientos del estándar DIN 471 [26]. Dicho estándar establece una relación entre el diámetro nominal del anillo y la dureza mínima que debe cumplir el material. Además, especifica que los materiales deben ser aceros para resortes del tipo C67, C75 o Ck 75. Con base en esto, se seleccionaron tres materiales representativos de cada uno de los tipos permitidos, los cuales se presentan en la Tabla B.8, dispuesta en los anexos. El protocolo solo considerará estos tres materiales como materiales válidos para los anillos.

En la Tabla B.8 se observa que, según el rango de tamaño del anillo de retención, se emplean diferentes materiales, lo cual obedece a los requisitos de dureza mínima establecidos por el estándar. La primera columna muestra el tipo de material, mientras que la segunda y tercera indican,

respectivamente, el diámetro mínimo y máximo del anillo para el cual debe emplearse dicho material. La cuarta columna presenta la dureza mínima exigida para cumplir con el estándar, y la quinta columna muestra la dureza máxima alcanzable para ese material.

2.1.5.3. Selección de materiales para la fabricación de bujes

De acuerdo con los criterios de selección de materiales expuestos en la sección 1.6.3, se identificaron aquellos materiales que poseen las propiedades mecánicas necesarias para garantizar un desempeño óptimo de los bujes en condiciones operativas generales. En la Tabla B.4, que es dispuesta en los anexos, se presentan seis materiales que cumplen con los requisitos establecidos para este tipo de componentes y que son con los que trabajará el protocolo propuesto, asegurando su adecuada funcionalidad y durabilidad en servicio. En dicha tabla se presentan las propiedades mecánicas relevantes de los materiales seleccionados, las cuales son fundamentales para determinar la opción más adecuada según los requerimientos funcionales y condiciones de operación específicas.

2.1.5.4. Selección de rodamientos comerciales

Como se mencionó previamente, la selección de los rodamientos empleados en el sistema se basa en referencias comerciales disponibles en el mercado. En las Tablas B.5 y B.6, incluidas en los anexos, se presentan muestras representativas de los rodamientos de bolas de contacto radial (Conrad) y de contacto angular más utilizados, extraídas de dos bases de datos construidas por el autor a partir de los catálogos técnicos [35] y [36]. Estas bases de datos fueron depuradas con el fin de conservar únicamente la información pertinente al caso de estudio. La base correspondiente a rodamientos tipo Conrad recopila un total de 254 referencias, mientras que la de rodamientos de contacto angular contiene 360 referencias. No obstante, en este documento se muestran únicamente seis referencias de cada tipo, con el propósito de optimizar el espacio y resaltar sus dimensiones principales junto con las características clave requeridas para el proceso de selección. A partir de estas bases de datos, el protocolo de diseño determina los rodamientos a implementar en el sistema.

2.1.5.5. Selección de aceites comerciales

Para la lubricación del sistema, se seleccionaron diferentes tipos de aceites industriales de grado comercial, todos clasificados bajo la norma de viscosidad ISO. Esta elección se fundamenta en las características operativas de los componentes que integraran los sistemas resultantes. En la Tabla B.7, disponible en la sección de anexos, se presentan los aceites considerados, los cuales están disponibles para su evaluación y selección por parte del protocolo de diseño. La tabla incluye las propiedades fisicoquímicas relevantes que influyen directamente en el desempeño de la lubricación.

2.1.6. Restricciones relacionadas con piezas estandarizadas

Algunas de las piezas que conforman un sistema planetario están estandarizadas para garantizar su replicabilidad y un diseño adecuado. Muchas de estas dimensiones dependen de las medidas de otros componentes del sistema, como es el caso de los tornillos, cuyo tamaño está determinado por el tipo de rosca que tienen, que a su vez, como se mostró en la sección anterior, el tipo de rosca depende del árbol sobre el cual trabajarán. En esta sección se exponen las restricciones correspondientes a los tornillos prisioneros y los anillos del sistema, en función del árbol en el que se ubican. Es importante destacar que el protocolo podrá determinar de manera completa la geometría de estos componentes para su fabricación únicamente a partir de las tablas presentadas.

2.1.6.1. Selección de las medidas de los anillos

En la Tabla B.3, presentada en la sección de anexos, se detallan las medidas estandarizadas de los anillos de retención en función del diámetro del árbol, según lo especificado por el estándar DIN 471. A partir de las medidas presentadas en esta tabla y del diámetro del árbol sobre el cual actuará el anillo, el protocolo seleccionará las dimensiones correspondientes del anillo. Este estándar incluye un total de 85 medidas para diámetros de árboles que oscilan entre 3 mm y 300 mm. Sin embargo, para optimizar el espacio en este documento, se han seleccionado y presentado únicamente 10 valores representativos.

2.1.6.2. Selección de tornillos

Para asegurar una fijación axial adecuada de los componentes sobre el árbol, la selección del tornillo prisionero se realiza en función del diámetro del árbol. La Tabla B.9, presentada en el capítulo de anexos, muestra esta correspondencia, especificando los rangos de diámetros para los cuales es adecuado utilizar un tipo determinado de tornillo con rosca métrica. Esta información garantiza la compatibilidad geométrica y mecánica entre el tornillo y el árbol, conforme al estándar ASME B17.1 [37]. A través de esta tabla, el protocolo selecciona el tipo de rosca que presentara el tornillo prisionero según el diámetro del árbol.

En la Tabla B.10, también presentada en el capítulo de anexos, se muestran las dimensiones correspondientes a cada tipo de tornillo, de acuerdo con las variables geométricas definidas en la subsección 2.1.2.7, según el estándar ISO 4028 [33]. A partir de esta tabla y del tipo de rosca obtenido en la tabla anterior, el protocolo determina las dimensiones restantes del tornillo prisionero, excepto su longitud total, la cual el protocolo establece en función de las restricciones geométricas planteadas en la sección 2.1.3.6, aunque en esta tabla si se mencionan las medidas mínima y máxima que puede tener dicho valor según el tipo de rosca, lo cual es una restricción adicional en sí.

2.1.7. Criterios de diseño para las piezas que componen un sistema planetario

Los criterios de diseño mecánico y las ecuaciones para el dimensionamiento de los componentes del sistema planetario fueron tratados en la subsección 1.6.2 del marco teórico. En esta sección, se exponen los criterios específicos a seguir para validar el diseño de cada pieza del sistema, conforme al procedimiento establecido en el marco teórico para los componentes de un sistema planetario.

En cada subsección de esta sección, el título identifica la pieza en estudio y, de manera inmediata, se detallan los criterios a tener en cuenta al diseñar las piezas que componen el sistema.

2.1.7.1. Árboles

1. El árbol debe ser capaz de resistir tanto las cargas estáticas como los esfuerzos combinados que generan fatiga. La evaluación de la resistencia a la fatiga se realizará siguiendo el enfoque detallado en la subsección 1.6.2.1.
2. El árbol debe ser diseñado para minimizar la deflexión bajo las cargas aplicadas, asegurando que el momento de inercia y el módulo de elasticidad sean adecuados para mantener la correcta alineación. La deflexión será calculada con base en lo expuesto en la subsección 1.6.2.1.

2.1.7.2. Engranés

1. Los engranajes deben ser diseñados para resistir tanto los esfuerzos por fatiga de flexión en la raíz de los dientes como la fatiga superficial en la cara de los mismos. Para evaluar el comportamiento del diseño propuesto, se seguirá el procedimiento detallado en la subsección 1.6.2.2, que permite calcular el factor de seguridad para ambos modos de falla.

2.1.7.3. Cuñas

1. Las cuñas deben ser diseñadas para resistir tanto la fatiga por esfuerzos cortantes como la presión de contacto. Para verificar que cumple con ambos criterios, el cálculo del factor de seguridad frente a la fatiga por esfuerzos cortantes y los esfuerzos de presión por contacto se realiza siguiendo el procedimiento descrito en la subsección 1.6.2.3.
2. La cuña debe diseñarse de manera que falle antes que el engranaje o el árbol, garantizando así que la transmisión de potencia no cause daños mayores a estos componentes críticos.

2.1.7.4. Rodamientos

1. Los rodamientos seleccionados por el protocolo deben elegirse de manera que se maximice su vida útil, teniendo en cuenta las condiciones de carga y operación del sistema. El cálculo de su vida útil, así como los criterios de selección, se basan en el procedimiento descrito en la subsección 1.6.2.5 del marco teórico.
2. La velocidad de operación del árbol en el que se instala el rodamiento no debe exceder la velocidad límite especificada para dicho componente, valor indicado en las bases de datos previamente mencionadas.

2.1.7.5. Bujes

1. Se debe seleccionar una combinación adecuada de variables, tanto en el buje, incluyendo sus tolerancias, como en el aceite utilizado para la lubricación del sistema. El objetivo es que el número de Ocvirk, O_N , no sea superior a 30, ya que, según las recomendaciones para aplicaciones de bujes, se considera óptimo mantener este valor por debajo de dicho umbral [28]. Para el cálculo del número de Ocvirk se sigue el procedimiento expuesto en la subsección 1.6.2.6 del marco teórico.

2.1.7.6. Portaplanetas

1. El portaplanetas debe ser diseñado para minimizar la deflexión en las vigas que soportan los engranajes planetarios. La manzana del portaplanetas debe ser capaz de resistir la fatiga ocasionada por esfuerzos cortantes, mientras que los discos deben estar diseñados para soportar los esfuerzos de aplastamiento generados por el peso de la viga, los engranajes planetarios y la fuerza transmitida. Este criterio se determina con base en el apartado de diseño presente en la subsección 1.6.2.7.

2.1.8. Restricciones generales

En la siguiente sección se presentan las restricciones que son comunes a todas las piezas que conforman el sistema diseñado de manera paramétrica:

1. Todas las piezas del sistema deben, presentar un factor de seguridad superior a 1.1 frente a los distintos modos de falla: fatiga por flexión, fatiga por contacto, aplastamiento y esfuerzo cortante.
2. Las dimensiones de los componentes deben minimizarse en la medida en que lo permitan los criterios de resistencia, rigidez, funcionalidad del sistema y otras restricciones que puedan entrar en contraposición.
3. Se establece que, en la medida de lo posible, las piezas diseñadas deben ser elaboradas de forma que la velocidad de salida generada por el protocolo se aproxime a la velocidad de salida especificada como requisito funcional.

3. Protocolo de parametrización para el diseño de sistemas planetarios

En este capítulo se presenta la implementación de un protocolo para el diseño paramétrico de sistemas planetarios de transmisión de potencia. Dicho protocolo se desarrolla utilizando el lenguaje de programación Python, junto con la librería de programación lineal Gurobipy. Para la generación paramétrica de las piezas en formato CAD, se emplea la API de Autodesk Inventor, también controlada mediante Python.

Como parámetros de entrada, el protocolo, representado a través de un algoritmo utiliza los requerimientos funcionales establecidos en la sección 2.1.1 del capítulo anterior. A partir de estos datos y mediante la aplicación de las restricciones y criterios definidos previamente, el algoritmo propuesto genera un conjunto de componentes que, una vez ensamblados, conforman un sistema de transmisión de potencia que cumple con los requerimientos funcionales establecidos.

El protocolo asegura que el diseño respete las restricciones geométricas, garantice la resistencia frente a los diferentes tipos de esfuerzos presentes en los componentes del sistema planetario, y cumpla con las limitaciones espaciales y demás restricciones impuestas en el capítulo anterior.

3.1. Desarrollo del algoritmo para el cálculo de la geometría de un sistema planetario de manera paramétrica

En esta sección se presenta el desarrollo del algoritmo diseñado para calcular la geometría de los componentes de un sistema planetario, teniendo en cuenta tanto los criterios de diseño establecidos para cada pieza del sistema como los requerimientos funcionales generales. Además, el algoritmo considera las restricciones geométricas de cada componente, las limitaciones derivadas del entorno de instalación, las restricciones asociadas a la selección de materiales para los componentes del sistema y las restricciones relacionadas con el uso de piezas con medidas estandarizadas.

El algoritmo se organiza en una serie de bloques interconectados, cada uno con el propósito específico de obtener la geometría o parte de la geometría de las piezas que componen el sistema. Para garantizar un ensamblaje adecuado de los componentes y que se tenga en cuenta la geometría de las piezas previamente determinadas, algunos bloques reciben información de la salida de otros. Esta entrada suele consistir en las variables geométricas y de materiales de las piezas ya definidas hasta ese momento. Además, el algoritmo realiza los cálculos necesarios para generar un diseño que cumpla con las velocidades de entrada y salida especificadas, las limitaciones estructurales de los componentes y las condiciones de carga a las que estarán sometidos. A través de este enfoque modular y secuencial, el algoritmo establece las relaciones geométricas entre los componentes, evalúa la viabilidad del diseño bajo las condiciones predefinidas y proporciona como resultado una configuración válida para su posterior implementación.

3.1.1. Propósito del algoritmo y alcance

El algoritmo desarrollado tiene como objetivo calcular la geometría de todos los componentes de un sistema planetario, asegurando un ensamblaje adecuado y la funcionalidad del conjunto, así como proponer los materiales más adecuados para cada una de las piezas. Una característica distintiva de este algoritmo es que su ejecución se basa en condiciones de entrada definidas por el usuario, como la velocidad angular de entrada al sistema y la velocidad de salida deseada. Además, el algoritmo tiene en cuenta los parámetros espaciales del entorno de instalación, lo que permite generar una propuesta de diseño que no solo se ajusta a las restricciones geométricas del espacio disponible, sino que también busca cumplir con la relación de transmisión requerida por el usuario.

El algoritmo propone la geometría de las piezas basándose en criterios de resistencia a la fatiga por flexión, fatiga de contacto, aplastamiento y esfuerzos cortantes, con el objetivo de minimizar el tamaño de los componentes por razones de peso, sin embargo, siempre garantizando factores de seguridad superiores a 1.1. Para lograrlo, se realiza un análisis estructural detallado de los elementos principales que componen el sistema, y dicho análisis, enfocado en el factor de seguridad de cada pieza frente a los diferentes tipos de esfuerzo, se lleva a cabo mediante un script en Python. De esta manera, a través de la selección de parámetros con la ayuda de programación lineal, el algoritmo genera un conjunto de valores que cumplen con todos los requerimientos establecidos por el usuario, así como con los criterios y restricciones previas.

Es importante destacar que el algoritmo no realiza simulaciones dinámicas avanzadas ni considera efectos térmicos, limitándose al análisis estructural bajo condiciones de carga estacionaria.

Los requerimientos funcionales del sistema a diseñarse deben ser proporcionados por el usuario a través de una interfaz gráfica diseñada para este fin, o alternativamente mediante un script, si se desea operar sin interfaz visual. Como salida, el algoritmo entrega los modelos CAD de cada componente del sistema, en formato `.ipt` (Autodesk Inventor), y Adicionalmente, la interfaz gráfica proporciona información detallada sobre los materiales asignados a cada componente, así como la selección de los rodamientos y el tipo de rosca presente en los tornillos utilizados en el sistema. No se muestran explícitamente todas las cotas generadas por el algoritmo, debido a su cantidad y a que estas se encuentran definidas directamente en los archivos CAD generados.

Entre los supuestos considerados para el desarrollo del algoritmo se encuentran:

1. Se trabaja exclusivamente con engranajes rectos.
2. Se asume contacto perfecto entre dientes, con transmisión únicamente de fuerza tangencial.
3. Se presupone que la carga transmitida, aunque variable en el tiempo, posee valores máximos y mínimos constantes.
4. Se asume el uso de materiales ideales.
5. No se consideran cargas radiales sobre los engranajes, ya que, en su efecto compresivo, se asumen como beneficiosas para el comportamiento de los mismos.
6. Se considera que los árboles son los únicos encargados de soportar el peso del sistema, descartando contribuciones estructurales del resto de los componentes.
7. La fuerza tangencial transmitida por la turbina al sistema se determina a partir de la potencia generada, de su velocidad angular y del radio de su rodete.
8. La fuerza radial transmitida por la turbina se considera equivalente a la tangencial, con el fin de que el protocolo de diseño contemple el dimensionamiento del sistema bajo condiciones desfavorables.

9. La fuerza axial ejercida sobre el sistema se determina a partir de la presión hidrostática generada por el agua sobre la turbina. Para este cálculo se asume que la sección transversal de la turbina, en dirección de su eje axial, es circular, lo que permite simplificar la estimación de la inercia de la porción sumergida de la turbina, sobre la cual actúa directamente dicha presión.
10. La fuerza radial ejercida sobre la turbina se asume en la misma dirección y sentido que su peso, con el fin de diseñar el sistema bajo condiciones desfavorables.

En cuanto a las limitaciones, el algoritmo está diseñado para trabajar con relaciones de transmisión de hasta 150:1. No se contempla su aplicación para sistemas que requieran relaciones mayores, dado que se requeriría un estudio adicional para asegurar que el suministro de par torsor sea suficiente para operar una cuarta etapa, por ejemplo. Finalmente, los resultados generados son validados únicamente de manera analítica; la validación experimental del sistema queda fuera del alcance de este proyecto de grado, por lo que se establece su validez exclusivamente en el ámbito teórico.

3.1.2. Estructura general del algoritmo

El algoritmo diseñado para el cálculo de sistemas planetarios se organiza en distintos bloques o etapas. En esta sección se presenta la implementación de dicho algoritmo mediante un código desarrollado en un script en Python, cuyo comportamiento refleja lo descrito en la metodología del algoritmo.

Las figuras que contienen fragmentos del código, las cuales ilustran la implementación del algoritmo, han sido ubicadas en el capítulo de anexos, en la sección C, debido a las restricciones de espacio del documento. En dicha sección, las figuras corresponden a las diferentes etapas y bloques del algoritmo, cada una representando la ejecución de funciones específicas, como la determinación de la cantidad de etapas, el cálculo de los engranajes del sistema, el cálculo de los portaplanetas del sistema, y otros aspectos clave del diseño estructural del sistema. Estas ilustraciones permiten visualizar cómo cada bloque contribuye a la creación de distintos componentes.

En la Fig.3.1 se presenta un diagrama de flujo que presenta la lógica general del algoritmo propuesto. En dicha figura puede observarse cómo las salidas de un bloque se utilizan como entradas de otros, y cómo el sistema no se resuelve en su totalidad de forma simultánea, sino que se divide por componentes. Esto se hace con el fin de no sobrecargar los bloques de programación lineal, los cuales podrían no ser capaces de encontrar una solución debido a la alta cantidad de variables involucradas.

El procedimiento computacional se basa en técnicas de programación lineal para la determinación de las geometrías que conforman el sistema, como se mencionó con anterioridad. La herramienta desarrollada permite generar configuraciones factibles que satisfacen los distintos requerimientos y restricciones propuestos.

A continuación se procede a explicar en brevedad cada una de las etapas y los bloques que componen al algoritmo propuesto:

1. El primer bloque determina cuántas etapas son necesarias, en función de las velocidades de entrada y salida especificadas por el usuario. A partir de esta información, se calcula la razón de velocidad que debe lograrse en cada etapa para alcanzar la velocidad final deseada. Este proceso se ilustra en la Fig.C.1, donde se muestra cómo el código ajusta la razón de velocidad por etapa según las condiciones de entrada y salida.
2. En el segundo bloque, una vez conocida la razón de velocidades por etapa, se asume que dicha razón es igual en cada una de ellas. Esta razón se define como la relación entre la

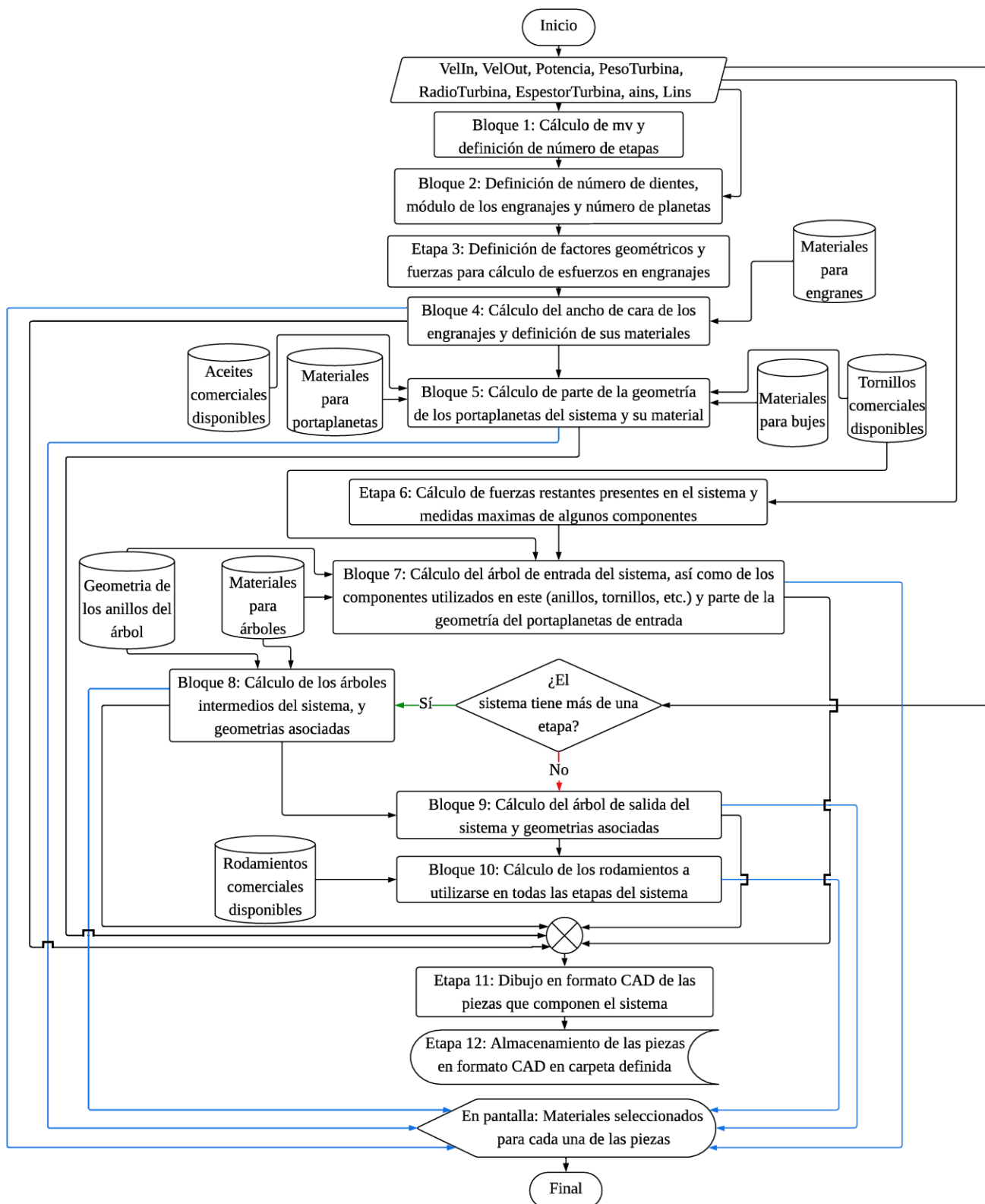


Figura 3.1: Representación esquemática del funcionamiento del algoritmo de cálculo para sistemas planetarios, mediante un diagrama de flujo. Las líneas negras indican el flujo de información entre bloques, mientras que las líneas azules representan la transferencia de datos desde los bloques hacia la etapa encargada de la generación de las piezas en formato CAD.

velocidad de entrada y la de salida en una etapa individual. Si se requiere una sola etapa, la razón es simplemente:

$$m_V = \frac{VelSal}{VelIn} \quad (3.1)$$

En caso de necesitar más etapas, la razón de velocidad por etapa se calcula como:

$$m_V = \left(\frac{VelSal}{VelIn} \right)^{\frac{1}{N_{ET}}} \quad (3.2)$$

De donde N_{ET} representa el numero de etapas requeridas por el sistema, de esta manera se cumple que, al final el producto de todas las etapas llega a:

$$\left(\left(\frac{VelSal}{VelIn} \right)^{\frac{1}{N_{ET}}} \right)^{N_{ET}} = \frac{VelSal}{VelIn} \quad (3.3)$$

Una vez definida esta razón por etapa, el código busca combinaciones de números de dientes para el engranaje solar Z_S , el planetario y la corona Z_C que permitan aproximarse a dicha razón, utilizando la relación expuesta en la Ec.1.1. Dado que los números de dientes deben ser enteros, no siempre se puede alcanzar exactamente la razón deseada, pero el sistema selecciona combinaciones que se aproximen lo máximo posible.

Establecidos los números de dientes, el siguiente paso consiste en seleccionar un módulo adecuado para los engranajes, de modo que el diámetro máximo de la corona D_{Cmax} no supere la dimensión disponible en el espacio de instalación a_{ins} . Esta relación se evalúa mediante la Ec.A.1, presente en los anexos.

Este procedimiento se encuentra contenido en una función cuyo objetivo es determinar una configuración válida de engranajes. Como entradas, la función recibe la velocidad de entrada $VelIn$, la razón de velocidades por etapa m_V , la potencia entregada por el sistema y la dimensión disponible a_{ins} . Como salidas, se obtiene la cantidad de dientes de la corona, el sol y los planetas; el módulo seleccionado; el número de planetas; y los diámetros correspondientes de la corona, el sol y los planetas.

El número de planetas $NumPla$ también se determina en esta sección, adoptando valores entre: $2 \leq NumPla \leq 8$ donde $NumPla \in \mathbb{N}$, esto según las necesidades del diseño. La selección de esta cantidad está influenciada por diversos factores operativos y de diseño, tales como la naturaleza de las cargas que el sistema deberá soportar y la existencia de variaciones en la velocidad de operación.

En la Fig.C.2 se muestra un fragmento del código correspondiente, donde primero se definen las variables involucradas y los rangos permitidos para cada una. Posteriormente, se imponen las restricciones que estructuran el sistema. Cabe destacar que en este módulo se abordan exclusivamente los aspectos relacionados con los engranajes.

3. Una vez superado el segundo bloque, se pasa a una tercera sección en la cual, utilizando los resultados obtenidos previamente, se calculan diversos factores geométricos necesarios para evaluar los esfuerzos por fatiga de flexión y por fatiga de contacto en los dientes de los engranajes. Adicionalmente, se determinan las fuerzas presentes en los engranajes según la etapa en la que se encuentren.

Estos factores no fueron abordados directamente en el bloque anterior debido a que los bloques implementados mediante programación lineal no permiten el uso directo de funciones trigonométricas, y su incorporación de forma indirecta complicaría significativamente el código. Por este motivo, el diseño del algoritmo se plantea de forma modular, resolviendo el problema por etapas. Así, al salir de los módulos de programación lineal, se emplean los valores obtenidos para continuar con los cálculos que requieren operaciones más complejas.

En la Fig.C.3, presente en los anexos, se muestra un fragmento del código correspondiente a esta sección, donde se observa el cálculo del factor Y_F para los engranajes. Este factor depende de la geometría de los dientes y es necesario para la evaluación de los esfuerzos presentes en los engranajes.

4. Con factores como lo podrían ser Y_S , Z_W y Z_R , entre otros, se ingresa al cuarto bloque, en el cual se realiza la selección del ancho de cara de los engranes para cada una de las etapas del sistema, así como de sus materiales correspondientes. En este bloque se determina dicho ancho de cara procurando siempre que sea lo menor posible, pero asegurando que los factores de seguridad tanto por fatiga de flexión como por fatiga de contacto cumplan la restricción de un factor de seguridad mayor a 1.1.

Dado que algunos factores en el cálculo de los esfuerzos dependen directamente del material seleccionado para los engranajes, y del ancho de cara de los engranes, dichos factores, así como el esfuerzo de flexión y de contacto en si mismo, deben ser calculados dentro del bloque. Esto puede implicar un mayor tiempo de ejecución, ya que los bloques basados en programación lineal no manejan eficientemente expresiones cuadráticas u otras no lineales, como ocurre con el cálculo de factores tales como K_{HB} y K_{FB} .

Una vez seleccionados los materiales, la salida de este módulo incluye los materiales escogidos para los engranes junto con sus propiedades relevantes, así como el ancho de cara correspondiente a cada etapa. Al generar esta salida, el algoritmo garantiza que todos los factores de seguridad sean mayores a 1.1, pues el bloque encuentra un conjunto de parámetros que cumplen con todas las restricciones impuestas para todas las variables que representan al problema de manera matemática.

La Fig.C.4 muestra una parte de este bloque, incluyendo algunas de las restricciones aplicadas. Debido a las limitaciones de los métodos de programación lineal para manejar expresiones no lineales, es común que una sola restricción deba expresarse mediante múltiples condiciones distintas. Además, todas las salidas de los bloques y etapas anteriores sirven como entradas para este bloque, ya que los esfuerzos calculados aquí dependen también de la geometría de los engranajes y de los factores determinados previamente.

5. En el quinto bloque se calcula parcialmente la geometría de los portaplanetas del sistema, ya que la otra parte se determina más adelante en el bloque encargado del diseño de los árboles. Esto se debe a que ciertos subcomponentes del portaplanetas, como la manzana, dependen directamente del tamaño del árbol. El cálculo de la geometría se basa en criterios como la minimización de la deflexión transversal en las vigas del portaplanetas y criterios de fatiga. Además, se considera un espesor mínimo para el disco, con el fin de evitar el aplastamiento debido a las fuerzas transmitidas a través de la viga y al peso de los componentes involucrados.

La entrada de información en este quinto módulo incluye los materiales de los engranajes y su respectivo ancho de cara, ya que esto permite calcular el peso de dichos elementos, el cual influye directamente en el diseño de las vigas que los soportan.

En este bloque, primero se diseña la geometría de las vigas, calculando los esfuerzos en seis puntos críticos diferentes y asegurando que el factor de seguridad en todos ellos sea mayor a 1.1. Esto se logra mediante la selección adecuada del material de la viga, así como del

diámetro correspondiente. Posteriormente, se calculan las deflexiones en los puntos donde es más probable que estas alcancen su valor máximo, haciendo que estas tiendan a cero para garantizar la rigidez estructural.

Adicionalmente, se determina el diámetro de los bujes, así como se selecciona el tipo de aceite que servirá como lubricante del sistema y se realiza la selección de los tornillos que fijarán las vigas al portaplanetas.

Como salida de este bloque, se obtiene el material de la viga, que será el mismo utilizado para el portaplanetas, junto con sus dimensiones, así como algunas de las dimensiones del portaplanetas en sí. En la Fig.C.5, exhibida en los anexos, se presenta una parte de este bloque, donde se observan algunas de las restricciones implementadas.

6. Antes de proceder al séptimo bloque, se incluye una etapa, denominada como sexta etapa, dedicada al cálculo de todas las fuerzas y pares torsores restantes presentes en el sistema. Este paso es fundamental para asegurar que las cargas transmitidas entre componentes se encuentren completamente caracterizadas.

Adicionalmente, en esta etapa se calcula la longitud máxima permisible para cada uno de los árboles, según la Ec.2.34. En la Fig.C.6 se muestra una parte del código correspondiente a este cálculo.

7. En el séptimo bloque se realiza el cálculo de los tornillos, los anillos y el árbol de entrada al sistema. Este árbol se diseña de manera distinta a los demás, ya que su geometría está condicionada por el hecho de que la turbina se monta directamente sobre él.

La turbina se monta directamente sobre el árbol debido a que esta transforma la energía hidráulica en energía mecánica rotacional, la cual se transmite como par torsor al sistema. El árbol de entrada recibe dicho par y lo conduce hacia las etapas posteriores, donde la potencia se adapta mediante el aumento de la velocidad angular y la reducción del torque. Este árbol se diseña de manera particular respecto a los demás, ya que debe albergar la turbina de forma longitudinal y, al mismo tiempo, soportar el portaplanetas de la primera etapa; por ello, presenta una mayor longitud que el resto de los ejes del sistema.

Por lo tanto, en este bloque se calcula la geometría completa del árbol, así como la de los tornillos encargados de fijar el portaplanetas al árbol y los anillos que aseguran la fijación axial del mismo.

Se calculan los esfuerzos de flexión en seis puntos críticos del árbol, ubicados en zonas donde se asume que habrá concentraciones significativas de esfuerzos, como los alojamientos de anillos, cuñeros y puntos de apoyo. Posteriormente, se identifican tres puntos donde, por condiciones de borde, se prevé que ocurran las mayores deflexiones. Con base en ello, se selecciona un material y un diámetro de eje tales que se minimicen tanto las deflexiones transversales como las angulares, y se obtengan factores de seguridad mayores a 1.1 debidos a fatiga por esfuerzos combinados.

Dado que no era posible completar el diseño del portaplanetas sin conocer las dimensiones finales del árbol de entrada, una vez definida dicha geometría se terminan de calcular parámetros como r_{Bra} y d_{Bra} , los cuales a su vez permiten determinar el tamaño del tornillo requerido para la fijación.

Finalmente, se calcula también la geometría y el material de las cuñas que se utilizarán en el árbol, teniendo en cuenta restricciones como la necesidad de que la cuña fluya antes que el árbol en caso de sobrecargas, con el fin de evitar daños estructurales en este último.

Este bloque entrega como salida todas las dimensiones asociadas al árbol de entrada, así como las medidas restantes del portaplanetas usado en este árbol. En la Fig.C.7, expuesta en la sección C de los anexos,, se muestra parte del código empleado en este módulo.

8. En el octavo bloque se realiza el cálculo de la geometría del árbol intermedio, de forma similar al procedimiento descrito para el árbol de entrada. La principal diferencia radica en que este árbol no soporta directamente la turbina, sino que lleva ensamblado el engranaje solar correspondiente a su etapa. Además, su geometría tiende a unificar con la de los demás árboles intermedios del sistema, por lo que para diferentes árboles intermedios se utiliza el mismo bloque, esto se logra dejando todas las entradas del bloque en términos de variables.

Todos los cálculos realizados para el árbol de entrada también se repiten en este bloque: esfuerzos de flexión en puntos críticos, deflexiones máximas, selección del material del árbol y de sus elementos complementarios, como los anillos de retención y los tornillos de unión. Al igual que antes, una vez definida la geometría del árbol, se completan las dimensiones pendientes del portaplanetas asociado a este árbol.

Este bloque también entrega como salida: la geometría completa del árbol, el tipo y geometría de los anillos utilizados, los materiales de los elementos mencionados, así como la geometría y especificación de los tornillos necesarios. Además, se calculan las reacciones en los apoyos del árbol, información fundamental para el posterior proceso de selección de rodamientos.

Cabe destacar que una de las entradas clave de este bloque es el número de etapa al que corresponde el árbol, ya que las fuerzas que actúan sobre él dependen directamente de la posición del árbol dentro del sistema planetario. En la Fig.C.8 se presenta parte del código asociado con el octavo bloque.

9. En el noveno bloque se realiza, mediante programación lineal, el cálculo completo de la geometría del árbol de salida, así como de los anillos y tornillos que lo componen. Este árbol se diferencia de los demás debido a que, al tratarse del árbol de salida, no presenta elementos ensamblados en su extremo derecho. Esta condición modifica la distribución del esfuerzo flector a lo largo del árbol, por lo que las fórmulas empleadas para el cálculo de esfuerzos deben adaptarse a esta configuración específica.

Al igual que en los bloques anteriores, se busca garantizar que los factores de seguridad en todos los puntos críticos sean mayores a 1.1, y que las deflexiones, tanto transversales como angulares, en los puntos de máxima deflexión, tiendan a valores mínimos aceptables.

En la Fig.C.9, presente en la sección C de los anexos, se expone parte del código empleado para esta sección. Es importante aclarar que todas las restricciones abordadas en el capítulo anterior corresponden a las que se implementan dentro de los módulos de programación lineal. Cada restricción se asocia directamente con la pieza que le corresponde en el sistema.

10. El décimo y último bloque, resuelto mediante programación lineal, está destinado a la selección de los rodamientos. Este bloque requiere como datos de entrada la reacción en el punto de apoyo donde se instalará el rodamiento y el diámetro de la sección transversal del árbol correspondiente. En el caso de los rodamientos de bolas de contacto radial (Conrad), dichos parámetros son suficientes para realizar la selección. Sin embargo, cuando se trata de un rodamiento de contacto angular empleado exclusivamente en el árbol de entrada del sistema para resistir las fuerzas axiales generadas en dicha sección se requiere, adicionalmente, la fuerza axial ejercida sobre el árbol, asociada a la presión hidrostática. Estos valores son obtenidos en los bloques previos correspondientes al diseño de los árboles del sistema.

Con esta información, el bloque consulta la base de datos de rodamientos y selecciona aquel que cumpla con el diámetro interno requerido por el árbol, asegurando además que maximice

la vida útil del componente. Este procedimiento es análogo al seguido en bloques anteriores para la selección de materiales.

De esta forma, la salida de este bloque consiste en el rodamiento seleccionado, el cual se obtiene directamente desde las bases de datos relacionadas con estos componentes. En la Fig.C.10 se muestra parte del código que permite la selección automatizada de los rodamientos.

11. Finalmente, la última sección del código está dedicada a la generación de los modelos CAD de todos los engranes, bujes, cunas, anillos, portaplanetas y tornillos de cada una de las etapas del sistema. Esta sección recibe como entrada las salidas de los bloques anteriores.

Cabe resaltar que, dependiendo del número de etapas del sistema, se generará un número variable de componentes. Asimismo, ciertos bloques podrán ser descartados en función de este número. Por ejemplo, si el sistema cuenta con una sola etapa, no será necesario calcular los árboles intermedios, por lo que el módulo correspondiente se omite.

Para evitar que el código principal se vuelva excesivamente extenso, la definición del CAD en términos de las variables geométricas de cada pieza se implementó en scripts separados. Estos scripts se llaman desde el código principal según sea necesario. Para ello, estos códigos auxiliares deben guardarse en la misma carpeta que el código principal, que contiene todos los bloques descritos hasta el momento.

En la Fig.C.11 se muestra la sección del código encargada de la generación CAD de las piezas, así como la definición de una de las funciones utilizadas para el dibujo de engranajes, con el fin de ilustrar al lector, dicho dibujo de manera paramétrico se realiza con la ayuda de la API de inventor.

De manera complementaria a esta etapa, se incorpora un proceso adicional en el cual todas las piezas generadas en formato CAD son almacenadas en un directorio especificado por el usuario, con el fin de facilitar su posterior utilización.

12. Todos los bloques que lo requieren tienen asociadas las bases de datos correspondientes para la selección de materiales de anillos, arboles, entre otros componentes, así como las dimensiones disponibles de anillos y tornillos. De este modo, cada módulo puede realizar sus respectivas selecciones con base en las tablas referenciadas en este documento de grado.

3.2. Validación del cumplimiento de las restricciones y criterios del protocolo

En esta sección se expone cómo el algoritmo, representando el protocolo, garantiza el cumplimiento de las restricciones y criterios establecidos para el diseño de sistemas planetarios paramétricos. Para esto, como ejemplo, se toma el diseño paramétrico de los engranajes, describiendo de manera general el proceso, las restricciones aplicadas a los engranajes y cómo estas son incorporadas al algoritmo. Además, se detalla la interacción de estas restricciones con los modelos de programación lineal, dentro del algoritmo y el papel de estos modelos en la validación de dichas restricciones.

3.2.1. Descripción general del proceso

Para ilustrar cómo el algoritmo valida los criterios establecidos en la sección anterior, se utiliza como ejemplo el diseño paramétrico de los engranajes. Considerese el cuarto bloque del algoritmo desarrollado, cuyo objetivo es determinar el ancho de cara de los engranajes en cada etapa del

sistema, así como los materiales de fabricación correspondientes. Para ello, este bloque toma como parámetros de entrada datos relacionados con la geometría de los engranajes, tales como el número de dientes y el módulo de cada engranaje, así como las fuerzas presentes en los dientes de los engranajes en cada etapa del sistema. Con base en estos parámetros, el script asociado al bloque calcula el ancho de cara de los engranajes para cada etapa y selecciona el material adecuado para garantizar que se cumplan los criterios de resistencia a la flexión en la raíz del diente y resistencia a la fatiga de contacto en la cara del diente.

3.2.2. ¿Qué restricciones y criterios se deben tener en cuenta para la selección del ancho de cara?

A continuación, se exponen algunas de las restricciones y criterios que deben cumplirse al diseñar los engranajes del sistema planetario de manera paramétrica. Aunque existen otras restricciones adicionales, con estas es posible demostrar cómo el algoritmo asegura el cumplimiento de las restricciones impuestas en el protocolo:

1. El factor de seguridad respecto a la fatiga por flexión en la raíz de los dientes de los engranajes deberá ser superior a 1.1.
2. El factor de seguridad respecto a la fatiga de contacto entre los dientes de los engranajes deberá ser superior a 1.1.
3. Es necesario considerar si el engranaje corresponde al piñón o al engranaje del par, para seleccionar un material con la dureza adecuada, acorde a las exigencias de cada caso.
4. Se debe elegir un material de los listados en la Tabla B.1 que cumpla con los criterios de resistencia y durabilidad bajo las cargas y condiciones operativas, y que permita obtener factores de seguridad superiores a 1.1.

3.2.3. Aplicación de restricciones en el script

Estas restricciones se pueden traducir en ecuaciones matemáticas y desigualdades dentro del script. Por ejemplo, la fórmula para el cálculo de los esfuerzos debidos a la fatiga por flexión, presentada en la Ec.1.9 de la subsección 1.6.2.2, relaciona variables geométricas del engranaje, tales como el módulo y el ancho de cara. De igual manera, la fórmula para calcular la resistencia corregida a la fatiga por flexión de un material, mostrada en la Ec.1.10 de la misma subsección, emplea propiedades características del material, como su resistencia a la flexión. Al determinar el factor de seguridad, se obtiene una ecuación que, de forma indirecta, vincula la geometría del engranaje con las propiedades del material de fabricación, tal como se indica en la Ec.1.11 de la subsección mencionada. Esta relación se considera indirecta debido a que los modelos de programación lineal no manejan adecuadamente ecuaciones no lineales entre dos variables. Por lo tanto, para correlacionar el esfuerzo por flexión y la resistencia corregida, se emplean variables intermedias.

3.2.4. El rol del bloque de programación lineal

El bloque de programación lineal se emplea para determinar el ancho de cara y el material de los engranajes, de manera que se cumplan todas las restricciones establecidas en el diseño.

Como se indicó en la sección 1.6.5 del marco teórico, para un uso adecuado del bloque de programación lineal, es necesario definir una función objetivo, que en este caso corresponde al ancho de cara del engranaje. El objetivo de esta función es minimizar los anchos de cara de los

engranajes. Si el sistema tiene más de una etapa, la función objetivo será la suma de los anchos de cara de todas las etapas; en caso contrario, si es una sola etapa, la función se enfocará en minimizar el ancho de cara de esa única etapa.

Según lo expuesto la sección mencionada en el párrafo anterior, las variables que se emplean en el bloque, con el fin de maximizar o minimizar un parámetro, deben estar definidas dentro de un intervalo, estableciendo límites superior e inferior. Esto permite que el bloque busque dentro de los rangos definidos para cada variable y encuentre un conjunto que cumpla con las restricciones impuestas. Si no se define un límite inferior, el bloque asumirá un valor de cero, y si no se especifica un límite superior, la búsqueda tenderá hacia infinito.

Aunque es una buena práctica definir ambos límites para todas las variables, ya que esto acota los rangos de búsqueda y reduce el tiempo computacional, en algunos casos no es posible establecer límites para todas las variables intermedias. En tales situaciones, los límites se definen indirectamente a través de las variables a las cuales sí se les ha asignado límites. Por ejemplo, para garantizar que el factor de seguridad sea superior a 1.1, se define este valor como límite inferior para todos los factores de seguridad de los engranajes.

El algoritmo toma las variables de diseño, como el material y los factores geométricos relacionados con los engranajes, y ajusta sus valores para cumplir con las restricciones impuestas, tanto de manera directa a través de las igualdades y desigualdades dentro del script, como indirecta mediante los límites definidos en el modelo y la base de datos en la cual se encuentra las propiedades de los materiales que el algoritmo puede escoger, mientras que al mismo tiempo, busca minimizar la suma de los anchos de cara de los engranajes, en el caso de que haya más de una etapa. El modelo de programación lineal busca las combinaciones de parámetros y variables que permitan modificar estos valores de manera que todas las condiciones impuestas en el modelo sean cumplidas.

3.2.5. Interacción entre las restricciones y el script

El script verifica si, para cada conjunto de parámetros de entrada, se cumplen las restricciones, expresadas de manera matemáticas. Si no se cumplen, el algoritmo vuelve a ajustar los parámetros dentro de los límites de las restricciones. El modelo de programación lineal minimiza o maximiza la función objetivo mientras mantiene las restricciones de resistencia a la fatiga de contacto y por flexión dentro de los valores permisibles, hasta que encuentra una solución que satisface todos los requerimientos impuestos.

En resumen, el script toma las restricciones del diseño, expresadas como ecuaciones (como la resistencia a la fatiga por flexión, la resistencia a la fatiga de contacto y la selección de material), y las integra en el modelo de programación lineal. Este modelo optimiza las variables de diseño (parámetros geométricos) del engranaje para cumplir con dichas restricciones, ajustándolas hasta encontrar una solución factible que maximice o minimice la función objetivo.

4. Evaluación del desempeño mecánico de un sistema planetario generado por el algoritmo, mediante una verificación analítica

Para probar el algoritmo, se selecciona un caso particular. El lugar de instalación cuenta con unas dimensiones de $L_{ins} = 160$ cm y $a_{ins} = 161$ mm. Se requiere que el sistema maneje una potencia proveniente de la turbina de 50 W, con una velocidad angular de entrada de 10 rpm, y una velocidad de salida deseada de 333 rpm. Por su parte, la turbina tiene un peso de 8 kg, un espesor de $EspTur = 15$ cm, un radio de rodete de $rTur = 15$ cm y una altura de turbina que sobresale del nivel del agua de $hTur = 28$ cm. Cabe resaltar que estos valores no corresponden a un caso real ni son representativos; han sido seleccionados únicamente con el propósito de verificar la validez del algoritmo.

Todas las figuras mencionadas que no se encuentran en este capítulo están disponibles en el capítulo de anexos, en la sección D. Asimismo, todas las tablas mencionadas en este capítulo y que no se presentan en él, también están incluidas en el capítulo de anexos, en la sección E, esto debido a razones de espacio disponible.

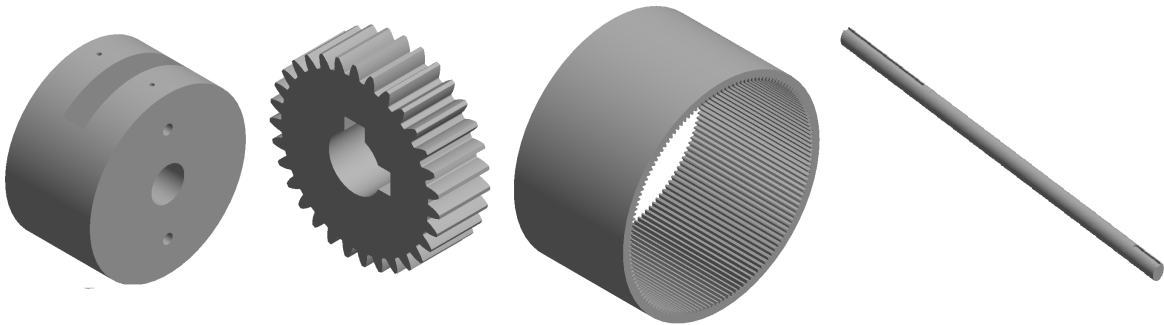


Figura 4.1: Partes del sistema generado por el algoritmo para el caso de estudio.

Una vez ingresados los parámetros de diseño, el algoritmo propone un sistema capaz de operar dentro de las dimensiones establecidas y cumpliendo los requerimientos funcionales especificados. Adicionalmente, el algoritmo genera las piezas correspondientes en formato CAD, como se ilustra en la Fig.4.1. La totalidad de las piezas en formato CAD se encuentra disponible en la sección F del capítulo de anexos.

El objetivo principal de este capítulo es validar la funcionalidad de las piezas generadas median-

te el algoritmo. Para ello, se evalúan los factores de seguridad de cada componente, las deflexiones en el caso de árboles o vigas, y la vida útil estimada en el caso de rodamientos. Esta validación se realiza mediante un análisis comparativo entre los factores de seguridad calculados por el algoritmo y aquellos obtenidos mediante análisis analítico.

Con el fin de sistematizar el procedimiento de cálculo, desde las Fig.4.2 hasta la Fig.4.8 se presenta la metodología empleada para determinar los esfuerzos en los distintos componentes del sistema de manera analítica. De manera particular, en la Fig.4.6 ilustra el procedimiento aplicado para estimar la vida útil de los rodamientos de forma analítica. Esta metodología sirve como base para el cálculo de los factores de seguridad de todas las piezas que conforman el sistema.

De manera complementaria, la sección D del capítulo de anexos presenta el procedimiento previamente ilustrado en las figuras mencionadas, pero con un nivel de detalle más profundo. En esta sección se expone de manera sistemática cada paso requerido para calcular los factores de seguridad de las piezas generadas por el algoritmo, incluyendo el planteamiento y representación de diagramas de fuerzas sobre los diferentes componentes del sistema analizado, con el fin de garantizar una comprensión completa de la metodología aplicada. En esta sección se ejemplifica el procedimiento mediante el cálculo detallado de las fuerzas presentes en componentes específicas, como los engranajes de la primera etapa y el árbol de entrada del sistema. Adicionalmente, en la sección E, presente en los anexos, se presentan los esfuerzos asociados a cada pieza generada, así como los parámetros clave utilizados para el cálculo de dichos esfuerzos.

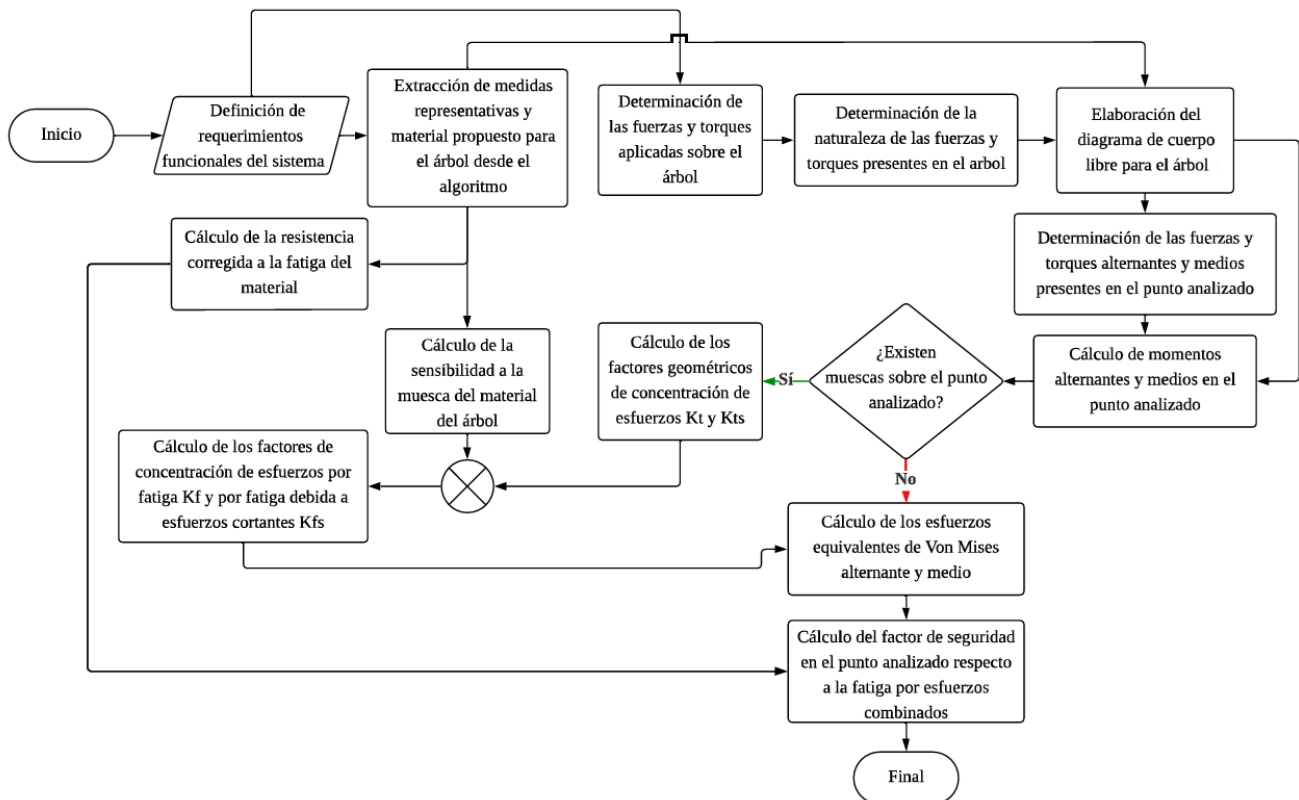


Figura 4.2: Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en los árboles del sistema diseñado mediante el algoritmo.

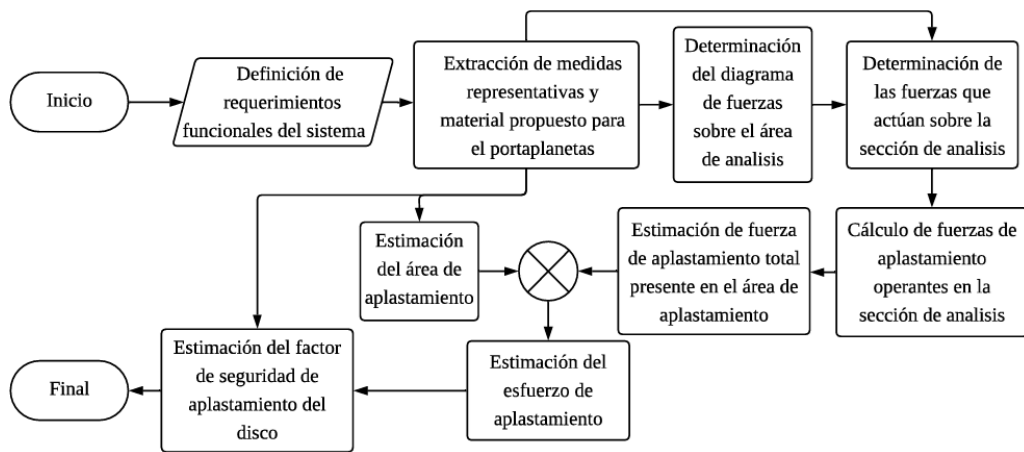


Figura 4.3: Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en los discos pertenecientes a los portaplanetas del sistema diseñado mediante el algoritmo.

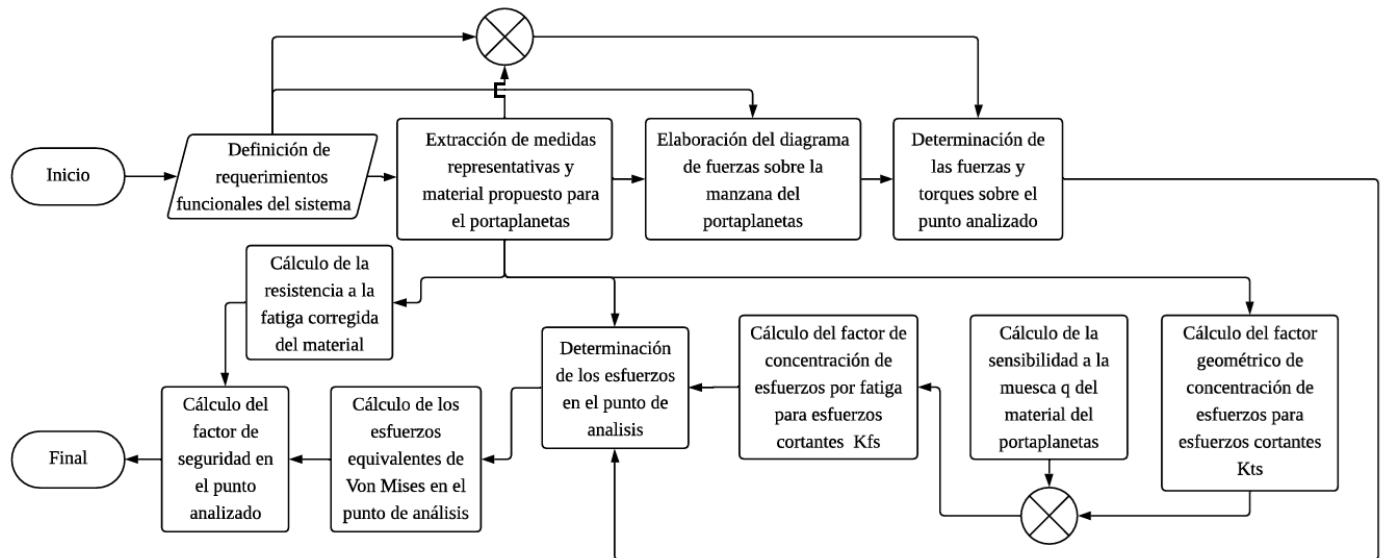


Figura 4.4: Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en las manzanas pertenecientes a los portaplanetas del sistema diseñado mediante el algoritmo.

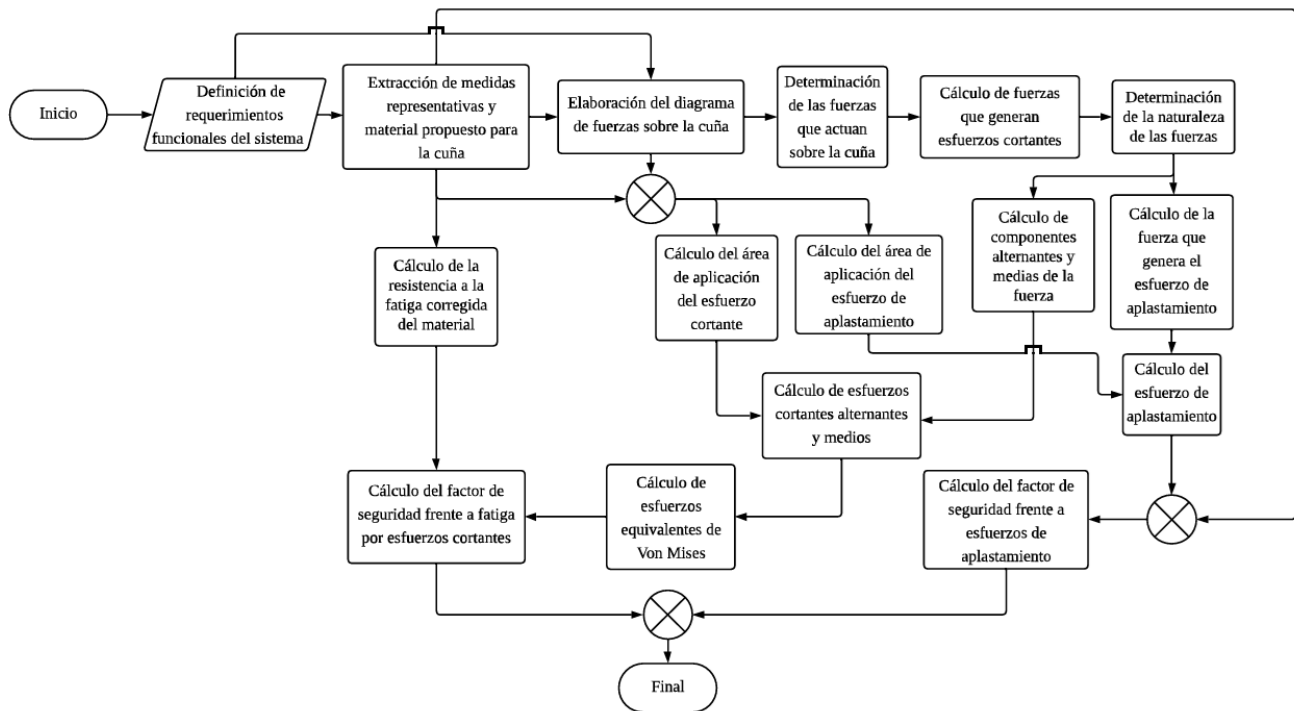


Figura 4.5: Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en las cuñas a utilizarse en el sistema diseñado mediante el algoritmo.

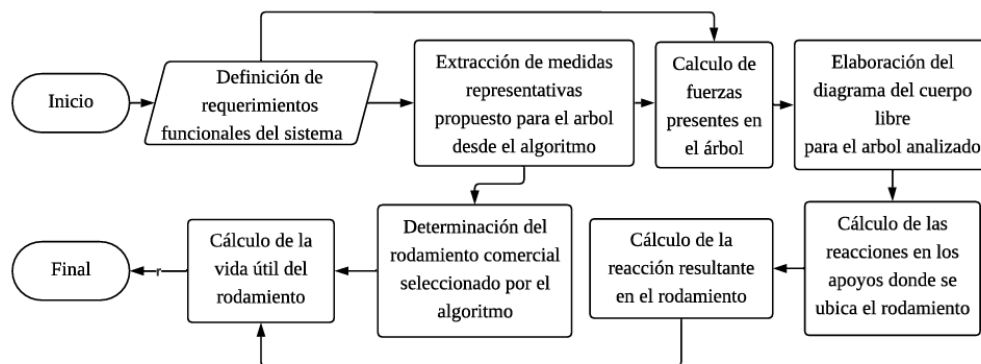


Figura 4.6: Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de la vida útil de los rodamientos del sistema diseñado mediante el algoritmo.

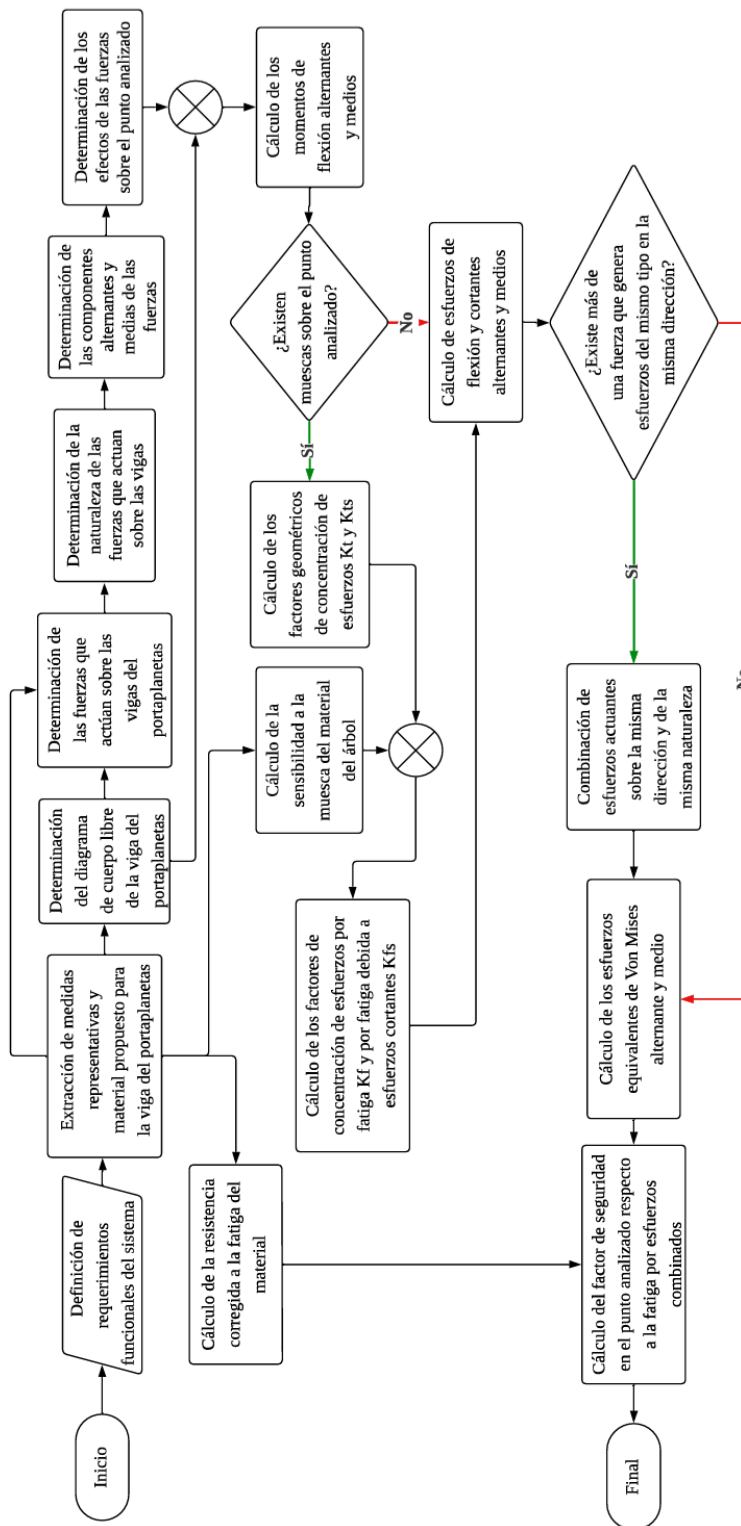


Figura 4.8: Diagrama de flujo que representa de manera sistemática el procedimiento utilizado para el análisis y cálculo de los esfuerzos en las vigas pertenecientes a los portaplanetas del sistema diseñado mediante el algoritmo.

A partir de las figuras mencionadas y de la información contenida en las secciones D y E, presentes en los anexos, se procedió al cálculo de los factores de seguridad, las deflexiones de los árboles y las vidas útiles de los rodamientos. Los resultados obtenidos se consolidan en tres tablas

principales: la Tabla 4.1 resume las deflexiones calculadas para los árboles; la Tabla 4.2 compila las vidas útiles estimadas de los rodamientos seleccionados; y la Tabla 4.3 presenta los factores de seguridad de los componentes analizados.

Cada una de estas tablas incluye los valores calculados por el algoritmo para los factores de seguridad, deflexiones y vida útil, los cuales se comparan con los valores obtenidos mediante análisis realizado por el autor. Esta comparación permite evaluar la precisión del algoritmo en términos de seguridad estructural, rigidez y durabilidad. Para cuantificar la diferencia entre los resultados del algoritmo y los calculados analíticamente, se aplica la Ec.4.1 para determinar el porcentaje de discrepancia:

$$\text{Porcentaje de diferencia} = \left| \frac{\text{Valor analítico} - \text{Valor algoritmo}}{\text{Valor algoritmo}} \right| \cdot 100 \quad (4.1)$$

Para obtener un porcentaje de diferencia que represente la variación entre los valores de los factores de seguridad, deflexiones y vida útil calculados por el algoritmo y aquellos obtenidos analíticamente por el autor, se procede al cálculo de un valor medio de diferencia. Este cálculo se realiza utilizando los porcentajes de diferencia presentados en las Tablas 4.1, 4.3 y 4.2, mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Diferencia media porcentual} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Diferencia porcentual}_i \quad (4.2)$$

Donde n representa el número de datos para los cuales se calcula el porcentaje de diferencia, en este caso, $n = 65$. Utilizando esta fórmula y los porcentajes de diferencia presentados en las tablas mencionadas, se obtiene un valor medio de diferencia porcentual de 0.308 %.

A partir de estas tablas y del valor medio de diferencia porcentual estimado se concluye que el algoritmo permite obtener valores analíticos confiables para los factores de seguridad de cada componente, siendo útil como herramienta de predicción sin requerir un análisis detallado componente a componente. Las diferencias encontradas entre los resultados del algoritmo y los del análisis manual se deben, principalmente, a las cifras significativas utilizadas en cada procedimiento.

Tabla 4.1: Comparación de deflexiones obtenidas: obtenidas analíticamente y obtenidas con el algoritmo.

Pieza	Ubicación	Deflexión [mm]		Porcentaje de diferencia
		Analítica	Algoritmo	
Viga del portaplanetas	Deflexión en la mitad de la viga	0.136	0.1355	0.338 %
Árbol de entrada	Punto a	0.252	0.2512	0.318 %
	Punto c	0.006	0.0060	0.000 %
	Punto e	0.480	0.4868	0.041 %
Árbol intermedio	Punto a	0.350	0.3313	5.341 %
	Punto c	0.310	0.3070	0.977 %
	Punto e	0.260	0.2588	0.475 %
Árbol de salida	Punto a	0.032	0.0319	0.269 %
	Punto c	0.026	0.0263	1.025 %
	Punto e	0.030	0.0295	1.654 %

Tabla 4.2: Comparación de vida útil de rodamientos: obtenida analíticamente y obtenida con el algoritmo.

Ubicación general	Ubicación específica	Rodamiento seleccionado	Vida [rev]		Porcentaje de diferencia
			Analítica	Algoritmo	
Árbol de entrada	Extremo izquierdo	7406	16900000000	16928573282.13914	0.168787 %
	Extremo derecho	63/28	7430000000	7438005894.33	0.107634 %
Árbol intermedio	Extremo izquierdo	6300	2506402000	2506401971.1871	0.000011 %
	Extremo derecho	6300	615500	615500.2341	0.000038 %
Árbol de salida	Extremo izquierdo	6300	1572550000000	1572545070081.4100	0.000000 %
	Extremo derecho	6300	135922000000000	135921558950805.0000	0.000000 %

Tabla 4.3: Comparación de factores de seguridad: obtenido analíticamente y obtenido con el algoritmo.

Esfuerzo al que se somete la pieza	Pieza	Punto específico	Factor seguridad		Porcentaje de diferencia
			Analítico	Algoritmo	
Esfuerzos debido a fatiga por flexión	Engranés	Solar E1	5.27	5.2792	0.174 %
		Planetario por sol-planeta E1	1.11	1.1140	0.386 %
		Planetario por planeta-corona E1	1.44	1.4319	0.566 %
		Corona E1	1.64	1.6311	0.540 %
		Solar E2	5.39	5.3968	0.126 %
		Planetario por sol-planeta E2	1.14	1.389	0.100 %
		Planetario por planeta-corona E2	1.42	1.4255	0.386 %
		Corona E2	1.62	1.6239	0.239 %
Esfuerzos debido a fatiga de contacto	Engranés	Solar E1	1.07	1.0751	0.479 %
		Planetario E1	1.36	1.3521	0.579 %
		Corona E1	1.25	1.2484	0.130 %
		Solar E2	1.07	1.0757	0.528 %
		Planetario E2	1.41	1.4195	0.673 %
		Corona E2	1.31	1.3106	0.043 %
Esfuerzos debido a fatiga por cargas combinadas	Viga del portaplanetas	Punto 1	14.58	14.5828	0.019 %
		Punto 2	1.64	1.6475	0.464 %
		Punto 3	2.20	2.2082	0.375 %
		Punto 4	18.26	18.2593	0.004 %
		Punto 5	3.29	3.2949	0.149 %
		Punto 6	4.40	4.3964	0.082 %
	Árbol de entrada	Punto b	1.18	1.1753	0.399 %
		Punto c	4.72	4.7170	0.063 %
		Punto d	2.36	2.3612	0.051 %
		Punto f	2.12	2.1254	0.254 %
		Punto g	2.49	2.4871	0.117 %
	Árbol intermedio	Punto b	3.91	3.9142	0.107 %
		Punto c	5.50	5.5011	0.019 %
		Punto d	1.88	1.8774	0.137 %
		Punto f	3.51	3.5155	0.156 %
		Punto g	2.44	2.4375	0.103 %
	Árbol de salida	Punto b	11.86	11.8585	0.012 %
		Punto c	19.91	19.9139	0.020 %
		Punto d	12.04	12.0445	0.037 %
		Punto f	11.49	11.4945	0.039 %
Esfuerzos de aplastamiento	Árbol de entrada	Cuña 1	17.24	17.2569	0.098 %
		Cuña 2	1.72	1.7199	0.008 %
	Árbol intermedio	Cuña 1	1.10	1.1000	0.000 %
		Cuña 2	5.45	5.4450	0.092 %
	Árbol de salida	Cuña	1.65	1.6486	0.083 %
	Portaplanetas	Espesor del disco	318.65	318.6341	0.001 %
Esfuerzos debido a fatiga por cargas cortantes	Portaplanetas	PB1 E1	30.30	30.2783	0.071 %
		PB2 E1	15.83	15.8358	0.036 %
		PB1 E2	11.28	11.2900	0.089 %
		PB2 E2	19.26	19.2691	0.047 %
	Árbol de entrada	Cuña 1	22.08	22.0745	0.025 %
		Cuña 2	1.92	1.9243	0.223 %
	Árbol intermedio	Cuña 1	2.00	2.0052	0.261 %
		Cuña 2	6.69	6.6923	0.035 %
	Árbol de salida	Cuña 1	1.90	1.9140	0.734 %

5. Conclusiones

Se llevó a cabo el desarrollo de un protocolo orientado al diseño paramétrico de sistemas planetarios, de donde se pudo concluir lo siguiente:

1. **Criterios y restricciones para el diseño paramétrico:** Se definieron los criterios y restricciones de diseño necesarios para la parametrización de un sistema planetario de transmisión de potencia. Estas restricciones se clasificaron según distintos ámbitos: los requerimientos funcionales del sistema, las limitaciones geométricas asociadas a los componentes, las restricciones derivadas del entorno de instalación, las propiedades y limitaciones de los materiales a utilizar, y los criterios relacionados con la resistencia estructural de las piezas frente a esfuerzos de fatiga, contacto y aplastamiento, entre otros. La estructuración de estas restricciones y criterios permitió establecer una base sólida para el desarrollo del protocolo de parametrización, asegurando la generación de diseños paramétricos confiables y reproducibles, con componentes que cumplen de manera verificable los requisitos de seguridad, geometría y rigidez establecidos para el sistema.
2. **Protocolo de parametrización:** Se desarrolló un protocolo sistemático que permite el diseño paramétrico de sistemas planetarios. Este protocolo fue implementado mediante un algoritmo estructurado en módulos de programación lineal, capaz de proponer configuraciones geoméricamente viables que cumplen simultáneamente con restricciones espaciales, geométricas, funcionales y criterios de resistencia previamente establecidos. Adicionalmente, el algoritmo permite la generación automática de los componentes del sistema planetario en formato CAD, facilitando la verificación preliminar de la geometría y ensamblaje de las piezas, e integrando así el diseño paramétrico con herramientas digitales de modelado y documentación técnica. La implementación de este protocolo, basada en programación lineal y herramientas de modelado digital, asegura que el diseño pueda adaptarse a diferentes requerimientos funcionales sin comprometer la integridad estructural ni la viabilidad del sistema.
3. **Evaluación analítica del desempeño mecánico:** El desempeño mecánico de un caso particular del sistema planetario fue verificado de manera analítica, evaluando factores de seguridad, deflexiones de los árboles y vida útil de los rodamientos. El análisis detallado demostró que las piezas generadas por el algoritmo cumplen con los criterios establecidos en términos de resistencia a esfuerzos de aplastamiento, cortante y torsión, así como de fatiga por flexión y por contacto, respetando los límites de deflexión y las restricciones geométricas. La diferencia media entre los valores calculados por el autor y los proporcionados por el algoritmo fue de 0.308 %, evidenciando la precisión y confiabilidad del algoritmo en la determinación de los factores de seguridad de cada componente. Estos resultados confirman que el diseño paramétrico generado es funcional, estructuralmente viable y capaz de operar dentro de los requerimientos establecidos del sistema planetario.

6. Recomendaciones y trabajos futuros

6.1. Recomendaciones

1. Se sugiere realizar un análisis de sensibilidad para identificar cómo pequeños cambios en los parámetros de entrada afectan la viabilidad de la solución encontrada. Esto permitiría identificar variables críticas, mejorar la robustez general del sistema y reconocer restricciones problemáticas.
2. Refinar los dominios de búsqueda de variables intermedias: Para evitar que el algoritmo falle en encontrar soluciones válidas cuando sí existen, es recomendable definir con mayor precisión los límites y restricciones de variables intermedias, especialmente aquellas relacionadas con dimensiones críticas o factores de diseño.
3. Dado que la implementación actual se basa en módulos de programación lineal, es importante establecer mecanismos que permitan detectar rápidamente casos en los que no se encuentra solución, proponiendo alternativas como la relajación de restricciones no prioritarias o el ajuste de variables clave.
4. Aunque el algoritmo ha sido validado satisfactoriamente en un caso específico, se recomienda su aplicación a una gama más diversa de escenarios con distintas relaciones de velocidad, dimensiones de instalación y condiciones de carga para asegurar su aplicabilidad general.
5. Se recomienda contemplar tanto el uso de dimensiones estandarizadas, como en el caso de la longitud de los tornillos, como la posibilidad de fabricación personalizada de ciertos componentes. Incluir esta dualidad en el algoritmo permitiría ampliar el espacio de búsqueda y aumentar la cantidad de soluciones viables, al no limitarse únicamente a dimensiones comerciales previamente definidas.

6.2. Trabajos futuros

1. Implementar un algoritmo, utilizando la API de Autodesk Inventor, que permita automatizar el ensamblaje de las piezas generadas por el modelo, así como la elaboración de los planos técnicos individuales de cada componente.
2. Realizar la fabricación de un sistema planetario, bajo condiciones específicas de espacio y funcionalidad. Posteriormente, llevar a cabo una evaluación experimental de su rendimiento. Los resultados deben ser contrastados con los obtenidos de manera analítica, verificando también el cumplimiento de las restricciones geométricas impuestas durante el diseño.
3. Desarrollar de manera paramétrica la carcasa sobre la cual se monta el sistema, generando su correspondiente modelo en formato CAD. Este aspecto no fue abordado en el presente trabajo debido a la falta de criterios analíticos robustos que permitieran establecer una metodología de diseño precisa para dicha pieza.

Referencias

- [1] Russell Hibbeler. «Ingeniería Mecánica-Dinámica». En: 14.^a ed. Pearson Educación, 2016. Cap. 14, pág. 204. ISBN: 978-0133915389.
- [2] Yaguo Lei, Dong Han, Jing Lin y He Zhengjia. «Planetary gearbox fault diagnosis using an adaptive stochastic resonance method». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 38 (2013), págs. 113-124. ISSN: 08883270. DOI: 10.1016/j.ymssp.2012.06.021.
- [3] Robert Norton. «Diseño de Máquinas». En: 4.^a ed. Pearson Educación, 2011. Cap. 8, págs. 543-600. ISBN: 978-607-32-0589-4.
- [4] Xianzhi Li, Xin Zhou, Lijuan Wang y Chunshan Liu. «Study on parametric drawing of planetary gear transmission». En: *Advanced Materials Research* 308 (2011), págs. 2215-2219. ISSN: 10226680. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.308-310.2215.
- [5] Sourabh Mandol, Pranab Dan y Kumar Mondal. «Modeling for Optimality in Design of Planetary Ring Gear to Reduce Stress Development». En: *2018 3rd International Conference for Convergence in Technology (I2CT)* (2018), págs. 1-4. DOI: 10.1109/I2CT.2018.8529716.
- [6] Pengxing Yi, Lijian Dong y Tielin Shi. «Multi-objective genetic algorithms based structural optimization and experimental investigation of the planet carrier in wind turbine gearbox». En: *Frontiers of Mechanical Engineering* 9 (2014), págs. 354-367. ISSN: 20950241. DOI: 10.1007/s11465-014-0319-5.
- [7] Shyi-Jeng Tsai y Qi-You Zhuang. «Design and analysis of compound stepped planetary gear drives for better transmission performances». En: *Forschung im Ingenieurwesen/Engineering Research* 87 (2023), págs. 1037-1056. ISSN: 14340860. DOI: 10.1007/s10010-023-00702-6.
- [8] Dong Peng, Zuo Shumiao, Liu Tianyan, Xu Xiangyang, Guo Wei, Liu Yanfang, Wu Hongchao y Wang Shuhan. «A matrix-based method for searching configurations of planetary gear trains». En: *Mechanism and Machine Theory* 180 (2023), págs. 105-161. ISSN: 0094114X. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2022.105161.
- [9] Departamento Administrativo Nacional de Estadística. *Cuentas Departamentales - Producto Interno Bruto por Departamento-2023 preliminar*. 2023. URL: <https://www.dane.gov.co/files/operaciones/PIB/bol-PIBDep-2023pr.pdf>.
- [10] *Scopus - Planetary Gear Design Parametric*. Accessed: 2024-06-18. URL: <https://www.scopus.com/term/analyzer.uri?sort=plf-f&src=s&sid=7717487e5f84ca46d9fd7f47d%203c2965f&sot=a&sdt=a&sl=55&s=TITLE-ABS-KEY%28%22Planetary+Gear%22+AND+%22Parametric+Design%22%29&origin=resultslist&count=10&analyzeResults=Analyze+results>.
- [11] Yang Bing, Ping Yang y Tiaosheng Xiao. «Optimum model and parametric matching selection for closed-satellite gear trains». En: *Int. J. Materials and Structural Integrity* 1 (2008), págs. 323-333. DOI: 10.1504/IJMSI.2008.019615.

- [12] Jiading Gu, Zhiguo Zhao, Yi Chen, Lu He y Xiaowen Zhan. «Integrated optimal design of configuration and parameter of multimode hybrid powertrain system with two planetary gears». En: *Mechanism and Machine Theory* 143 (2020). ISSN: 0094114X. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103630.
- [13] Christian Westphal, Jens Brimmers y Christian Brecher. «Algorithm-Based Optimization of Gear Mesh Efficiency in Stepped Planetary Gear Stages for Electric Vehicles». En: *Gear Technology Magazine* (2021), págs. 136-151.
- [14] Zeyin He, Tengjiao Lin, Tianhong Luo, Tao Deng y Qiguo Hu. «Parametric modeling and contact analysis of helical gears with modifications». En: *Journal of Mechanical Science and Technology* 30 (2016), págs. 4859-4867. ISSN: 1738494X. DOI: 10.1007/s12206-016-1004-x.
- [15] GÜNT GmbH. *Comportamiento dinámico del engranaje planetario multietapa*. <https://www.gunt.de/es/productos/comportamiento-dinamico-del-engranaje-planetario-multietapa/030.21200/gl212/glct-1:pa-150:pr-382>. Último acceso: 28 de agosto de 2025. 2025.
- [16] Stephen. Radzevich. «Dudley's Handbook of practical gear design and manufacture». En: 2.^a ed. 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300 Boca Raton: CRC Press, 2012. Cap. 7, pág. 609. ISBN: 978-1-4398-6601-6.
- [17] *Design Manual for Enclosed Epicyclic Gear Drives*. AGMA 6123-B06. Reaffirmed 2015. American Gear Manufacturers Association. Alexandria, VA, 2006.
- [18] O. D. Thapar. «Low Head Small Hydro Turbines: State of Art». En: Director: Alternate Hydro Energy Centre, University of Roorkee. Roorkee, India, 1995. Cap. 1, p. 1-3.
- [19] Robert C. Juvinall y Kurt M. Marshek. «Fundamentals of Machine Component Design». En: 6.^a ed. Wiley, 2016. Cap. 17, p. 653-661. ISBN: 978-111-83-2458-5.
- [20] Robert Norton. «Diseño de Máquinas». En: 4.^a ed. Pearson Educación, 2011. Cap. 6, págs. 411-474. ISBN: 978-607-32-0589-4.
- [21] Robert Norton. «Diseño de Máquinas». En: 4.^a ed. Pearson Educación, 2011. Cap. 4, págs. 233-333. ISBN: 978-607-32-0589-4.
- [22] Robert C. Juvinall y Kurt M. Marshek. «Fundamentals of Machine Component Design». En: 6.^a ed. Wiley, 2016. Cap. 15, p. 565. ISBN: 978-111-83-2458-5.
- [23] *ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears Part 3: Calculation of tooth bending strength*. International Organization for Standardization, 2019.
- [24] *ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*. International Organization for Standardization, 2019.
- [25] *ISO 6336: Calculation of load capacity of spur and helical gears Part 2: Calculation of surface durability (pitting)*. International Organization for Standardization, 2019.
- [26] Deutsches Institut für Normung. *DIN 471: Retaining rings for shafts - Normal type - Heavy duty*. <https://www.din.de>. Standard in German and English. Defines dimensions, tolerances and technical requirements for retaining rings for shafts. 1981.
- [27] *Rolling bearings Vocabulary*. Ginebra, Suiza, 2023.
- [28] Robert Norton. «Diseño de Máquinas». En: 4.^a ed. Pearson Educación, 2011. Cap. 7, págs. 485-532. ISBN: 978-607-32-0589-4.

- [29] *Design Manual for Enclosed Epicyclic Gear Drives*. AGMA 6123-B06. Reaffirmed 2015. American Gear Manufacturers Association. Alexandria, VA, 2006.
- [30] International Organization for Standardization. *ISO 6336-5:2003 - Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 5: Strength and quality of materials*. Standard No. ISO 6336-5:2003. Geneva, Switzerland, 2003. URL: <https://www.iso.org/standard/28307.html>.
- [31] Krzysztof R. Apt. «Principles of Constraint Programming». En: CWI, Amsterdam, The Netherlands: Cambridge University Press, 2003. Cap. 1, págs. 1-3. ISBN: 978-0-511-05616-1.
- [32] *Design Manual for Enclosed Epicyclic Gear Drives*. AGMA 6123-B06. Reaffirmed 2015. American Gear Manufacturers Association. Alexandria, VA, 2006.
- [33] *ISO 4028:1993 - Hexagon socket set screws with dog point*. Standard. Specifies the characteristics of hexagon socket set screws with dog point, metric series, with product grade A. Geneva, Switzerland: International Organization for Standardization, 1993.
- [34] *Design Manual for Enclosed Epicyclic Gear Drives*. AGMA 6123-B06. Reaffirmed 2015. American Gear Manufacturers Association. Alexandria, VA, 2006.
- [35] KOYO. *Rodamientos rígidos de bolas*. Disponible bajo solicitud o en línea. KOYO. Osaka, Japón, 2023.
- [36] KOYO. *Rodamientos de bolas de contacto angular*. Disponible bajo solicitud o en línea. KOYO. Osaka, Japón, 2023.
- [37] American Society of Mechanical Engineers. *Keys and Keyseats*. Reaffirmed in 2013. New York, NY, 1967.
- [38] R.C. Hibbeler. «Mecánica de materiales». En: 8.^a ed. México: Pearson Educación, 2017. Cap. 6, págs. 255-326.
- [39] R.C. Hibbeler. «Mecánica de materiales». En: 8.^a ed. México: Pearson Educación, 2017. Cap. 5, págs. 179-237.
- [40] R.C. Hibbeler. «Mecánica de materiales». En: 8.^a ed. México: Pearson Educación, 2017. Cap. 1, págs. 24-47.
- [41] J. E. Shigley. «Mechanical Engineering Design». En: 10.^a ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015. Cap. 5, págs. 235-237. ISBN: 978-0-07-339820-4.
- [42] Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston Jr., David F. Mazurek y Elliot R. Eisenberg. «Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática». Spanish. En: 8.^a ed. McGraw-Hill, 2008. Cap. 3, págs. 95-100.
- [43] Frank White. «Mecánica de Fluidos». En: 6.^a ed. McGraw-Hill, 2008. Cap. 2, págs. 63-76.
- [44] Richard G. Budynas y J. Keith Nisbett. «Shigley's Mechanical Engineering Design». En: 9th. New York: McGraw-Hill Education, 2012. Cap. 18, págs. 900-902. ISBN: 978-607-15-0771-6.
- [45] J. L. Meriam y L. G. Kraige. «Engineering Mechanics: Dynamics». En: 7th. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2012. Cap. 6, p.443-445.
- [46] Robert Norton. «Diseño de Máquinas». En: 4.^a ed. Pearson Educación, 2011. Cap. Anexos, págs. 998-1000. ISBN: 978-607-32-0589-4.
- [47] Walter D. Pilkey y Deborah F. Pilkey. «Peterson's Stress Concentration Factors». En: 2.^a ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2020. Cap. 5, pág. 408. ISBN: 0-471-53849-3.

Anexos

A. Fundamentos teóricos para el cálculo de los esfuerzos en componentes de sistemas de transmisión de potencia

A.1. Fundamentos teóricos

En este apartado se abordarán algunos fundamentos teóricos relacionados con los cálculos de esfuerzos en componentes mecánicos, las relaciones geométricas de los engranajes y las relaciones básicas entre par torsor, fuerza y potencia en sistemas de transmisión de potencia, entre otros conceptos, con el fin de proporcionar una base sólida necesaria para el análisis y diseño de sistemas planetarios.

A.1.1. Relaciones geométricas de engranes

El diámetro primitivo de un engranaje puede determinarse a partir de su número de dientes Z y su módulo m , donde el módulo se define como la razón entre el diámetro primitivo D y el número de dientes del engranaje. Esta magnitud se expresa en milímetros (mm) y su relación se presenta mediante la siguiente ecuación:

$$D = m \cdot z \quad (\text{A.1})$$

El módulo no solo define el tamaño general del engranaje, sino que también determina las dimensiones características de sus dientes. Un diente puede dividirse en dos partes fundamentales: el adendum (ad) y el dedendum (dd). El adendum corresponde a la porción del diente comprendida entre el diámetro primitivo y la punta del diente, mientras que el dedendum se extiende desde el diámetro primitivo hasta la base del diente o raíz.

Por razones relacionadas con la prevención de interferencias entre engranajes durante el engrane, las herramientas de corte utilizadas en su manufactura están diseñadas para generar un dedendum ligeramente mayor que el adendum. Esta relación geométrica estándar se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

$$ad = m \quad (\text{A.2})$$

$$dd = 1.25 \cdot m \quad (\text{A.3})$$

A partir de estas definiciones, es posible calcular la altura total del diente (h_t) como la suma del adendum y el dedendum:

$$h_t = ad + dd = 2.25 \cdot m \quad (\text{A.4})$$

A.1.2. Cálculo de esfuerzos

En esta sección se analizarán algunos de los diferentes tipos de esfuerzos presentes en componentes mecánicos, centrándose en: los esfuerzos de flexión generados en secciones transversales circulares sólidas, los esfuerzos cortantes en secciones transversales circulares huecas y los esfuerzos derivados de fuerzas de aplastamiento. Estos conceptos son fundamentales para el diseño y análisis estructural de elementos sometidos a cargas diversas.

Esfuerzos en secciones transversales circulares sólidas

Los esfuerzos generados por momentos flectores σ_F en componentes con sección transversal constante pueden determinarse mediante la siguiente expresión [38]:

$$\sigma_F = K_f \cdot \frac{M \cdot y}{I} \quad (\text{A.5})$$

Donde K_f representa el factor de concentración de esfuerzos por fatiga, el cual toma un valor unitario cuando no existen concentradores geométricos; M es el momento flector aplicado en la sección analizada; y es la distancia desde el eje neutro hasta la fibra donde se desea calcular el esfuerzo; e I es el momento de inercia de la sección transversal. Esta ecuación permite observar que los esfuerzos de flexión aumentan con la distancia desde el eje neutro, por lo tanto, las fibras exteriores del componente son las que experimentan los mayores esfuerzos de flexión.

Para el caso específico de una sección transversal circular maciza, el esfuerzo máximo flexionante σ_{max} puede reescribirse considerando que la distancia y hasta la fibra más alejada (denotada como c) es igual a $d/2$, siendo d el diámetro de la sección. Así, la ecuación puede expresarse como:

$$\sigma_{max} = K_f \cdot \frac{M \cdot c}{I} = K_f \cdot \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot d^3} \quad (\text{A.6})$$

Esta forma es especialmente útil en el análisis de ejes circulares sujetos a flexión, donde la geometría simplifica el cálculo del momento de inercia y permite evaluar directamente el esfuerzo máximo en las zonas críticas.

Por otra parte, los momentos flectores no solo producen esfuerzos de flexión, sino que, al estar vinculados con las fuerzas internas, también originan esfuerzos cortantes en la sección transversal de la pieza. Cabe destacar que dichos esfuerzos son nulos en los puntos donde el esfuerzo flector alcanza su valor máximo [38]. El cálculo de los esfuerzos cortantes τ se realiza a partir de la siguiente expresión:

$$\tau = K_{fs} \cdot \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} \quad (\text{A.7})$$

En esta ecuación, K_{fs} representa el factor de concentración de esfuerzos por fatiga en cortante, el cual toma un valor de 1 en ausencia de concentradores de esfuerzo. V es la fuerza cortante obtenida a partir del equilibrio interno de la estructura; Q es el primer momento de área respecto al eje neutro de la sección analizada; I es el momento de inercia de dicha sección transversal; y t corresponde al espesor en el punto específico donde se desea evaluar el esfuerzo cortante.

En el caso particular de una sección circular maciza, el esfuerzo cortante máximo τ_{max} ocurre en el eje neutro. Conociendo esta condición, la expresión puede simplificarse como:

$$\tau_{max} = K_{fs} \cdot \frac{64 \cdot V}{24 \cdot \pi \cdot d^2} \quad (\text{A.8})$$

Donde d es el diámetro de la sección circular bajo análisis.

Esfuerzos cortantes en secciones transversales circulares huecas

La transmisión de par torsor a través de elementos mecánicos implica que las piezas encargadas de dicha transferencia estén sometidas a esfuerzos cortantes producto de la torsión. Para secciones

transversales circulares, estos esfuerzos cortantes pueden estimarse mediante la siguiente expresión [39]:

$$\tau = K_{fs} \cdot \frac{T \cdot \rho}{J} \quad (\text{A.9})$$

Donde τ representa el esfuerzo cortante resultante, K_{fs} es el factor de concentración de esfuerzos debido a cargas cortantes, T es el par torsor aplicado, ρ es la distancia desde el centro de la sección hasta el punto de análisis, y J es el momento polar de inercia. Esta relación muestra que el esfuerzo cortante aumenta con la distancia desde el eje, alcanzando su valor máximo en las fibras exteriores de la sección circular.

En el caso de trabajar con secciones transversales circulares huecas, la ecuación anterior sigue siendo válida, aunque el valor del momento polar de inercia cambia. Para calcular el esfuerzo cortante máximo en estas secciones, puede utilizarse la siguiente expresión derivada de la Ec.A.9 [39]:

$$\tau = K_{fs} \cdot \frac{16 \cdot T \cdot D_m}{\pi \cdot (D_m^4 - d^4)} \quad (\text{A.10})$$

De donde D_m es el diámetro exterior de la sección hueca y d es su diámetro interior. Como en el caso sólido, el esfuerzo máximo se presenta en las fibras exteriores de la sección transversal.

Esfuerzos debido a fuerzas de aplastamiento

El esfuerzo de aplastamiento en una pieza puede determinarse mediante la siguiente expresión [40]:

$$\sigma_{\text{Aplastamiento}} = \frac{F_{\text{Aplastamiento}}}{A_{\text{Aplastamiento}}} \quad (\text{A.11})$$

Donde $F_{\text{Aplastamiento}}$ corresponde a la fuerza aplicada que produce el aplastamiento, y $A_{\text{Aplastamiento}}$ es el área sobre la cual actúa dicha fuerza. Este tipo de esfuerzo es de naturaleza compresiva y, por tanto, no suelen estar asociados a fallas por fatiga. En consecuencia, el cálculo del factor de seguridad frente al aplastamiento se realiza considerando únicamente la resistencia a la fluencia del material, mediante la siguiente ecuación [40]:

$$N_{F \text{ Aplastamiento}} = \frac{S_y}{\sigma_{\text{Aplastamiento}}} \quad (\text{A.12})$$

Donde S_y representa la resistencia a la fluencia del material bajo carga de compresión.

Esfuerzo equivalente de Von Mises

El criterio de Von Mises establece que la fluencia en materiales dúctiles se inicia cuando la energía de distorsión por unidad de volumen alcanza un valor crítico, equivalente al que causa la fluencia en un ensayo de tracción uniaxial [41]. A partir de esta teoría, es posible obtener un valor de esfuerzo equivalente, o de pseudotensión, que resume el efecto de un estado multiaxial de esfuerzos, y que puede ser directamente comparado con el límite de fluencia del material determinado en condiciones uniaxiales. Esto permite evaluar la seguridad de componentes sometidos a esfuerzos complejos, utilizando como referencia resultados de ensayos simples.

Para el caso de un estado plano de esfuerzos, el esfuerzo equivalente de Von Mises se puede calcular mediante [41]:

$$\sigma' = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (\text{A.13})$$

Donde σ' representa el esfuerzo equivalente, σ_x y σ_y son los esfuerzos normales en las direcciones de los ejes coordenados de un plano cartesiano tridimensional, y τ_{xy} el esfuerzo cortante en el plano analizado.

A.1.3. Cálculo del factor de concentración de esfuerzos K_f

Un material puede presentar mayor o menor sensibilidad a la concentración de esfuerzos; esta propiedad se conoce como sensibilidad a la muesca. Dicha sensibilidad depende principalmente de la resistencia y la dureza del material, así como del radio de la muesca, el cual representa qué tan aguda es dicha discontinuidad. Esta sensibilidad q puede definirse mediante la siguiente expresión [21]:

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (\text{A.14})$$

En donde K_t es el factor teórico de concentración de esfuerzos asociado únicamente a la geometría, y K_f es el factor de concentración de esfuerzos en condiciones de fatiga. A partir de esta ecuación, despejando K_f , se obtiene:

$$K_f = 1 + q \cdot (K_t - 1) \quad (\text{A.15})$$

Por otra parte, el factor q puede calcularse en función del radio de la muesca r y de la constante a de Neuber, la cual es una propiedad empírica del material. Esta relación se expresa como [21]:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}} \quad (\text{A.16})$$

En esta ecuación, tanto el parámetro a como el radio r deben estar expresados en pulgadas (in) [21].

A.1.4. Relaciones básicas de par torsor, fuerza y potencia en sistemas mecánicos

En esta sección se abordarán las relaciones fundamentales entre par torsor, fuerza y potencia en sistemas mecánicos, conceptos esenciales para el análisis de la transmisión de energía en sistemas de transmisión de potencia.

Definición de momento y par torsor

Considérese una fuerza que actúa sobre un cuerpo rígido. El efecto de dicha fuerza dependerá del punto en el que se aplique, generando una tendencia del cuerpo a girar respecto a un punto o eje. Esta tendencia se conoce como momento de una fuerza y se define vectorialmente como [42]:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{A.17})$$

Donde $\vec{M}$ es el vector momento, $\vec{F}$ es la fuerza aplicada, y $\vec{r}$ es el vector de posición desde el punto o eje de referencia hasta el punto de aplicación de la fuerza.

En el caso particular en que el vector de posición sea perpendicular a la dirección de la fuerza, la magnitud del momento se simplifica a la expresión escalar:

$$M = F \cdot l \quad (\text{A.18})$$

De donde M es el momento, F la magnitud de la fuerza, y l la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y el punto o eje respecto al cual se calcula el momento.

El par torsor, por definición, es un caso particular del momento de una fuerza. Bajo la condición de que la fuerza aplicada sea perpendicular al vector de posición, es posible determinar la magnitud de dicha fuerza a partir del par torsor generado mediante la siguiente expresión:

$$F = \frac{T}{r} \quad (\text{A.19})$$

Donde F es la magnitud de la fuerza aplicada, T representa la magnitud del par torsor o momento de torsión generado, y r es la distancia perpendicular entre el eje de rotación y el punto de aplicación de la fuerza.

Relación entre potencia y par torsor

El par torsor generado por una potencia suministrada a un sistema rotacional se define mediante la siguiente relación fundamental [39]:

$$T = \frac{P}{\omega} \quad (\text{A.20})$$

En esta ecuación P es la potencia transmitida al sistema, y ω corresponde a la velocidad angular del árbol.

A.2. Fuerza hidrostática

Una superficie sumergida en un líquido está sujeta a presiones ejercidas sobre todas las caras en contacto con el fluido. Si el fluido se considera homogéneo y en reposo, la presión depende únicamente de la coordenada vertical medida desde la superficie libre, siendo independiente de la geometría del recipiente que lo contiene y aumentando linealmente con la profundidad [43]. La relación entre la presión y la profundidad respecto a la superficie libre se expresa de la siguiente manera:

$$P = \rho \cdot g \cdot h \quad (\text{A.21})$$

Donde ρ corresponde a la densidad del fluido, g a la aceleración de la gravedad y h a la profundidad medida desde la superficie libre. Esta presión puede asociarse a una fuerza hidrostática F aplicada en el centro de presión del área sumergida, cuya expresión se muestra a continuación:

$$F = \rho \cdot g \cdot h_{CG} \cdot A \quad (\text{A.22})$$

En la que A representa el área sumergida y h_{CG} la profundidad del centroide de dicha área, medida desde la superficie libre. Asimismo, la ubicación del centro de presiones, donde actúa la fuerza hidrostática resultante, se determina mediante la siguiente relación:

$$y_{CP} = -\rho \cdot g \cdot \frac{I_{xx}}{F} \quad (\text{A.23})$$

De donde I_{xx} es el momento de inercia centroidal del área sumergida respecto al eje x (véase Fig.A.1). El signo negativo se introduce debido a que la distancia se mide desde el centroide, y el centro de presiones, por efecto de la distribución lineal de la presión, se encuentra ubicado por debajo de este. En consecuencia, para determinar la profundidad del centro de presiones medida desde la superficie libre, es necesario sumar el valor absoluto de y_{CP} a h_{CG} .

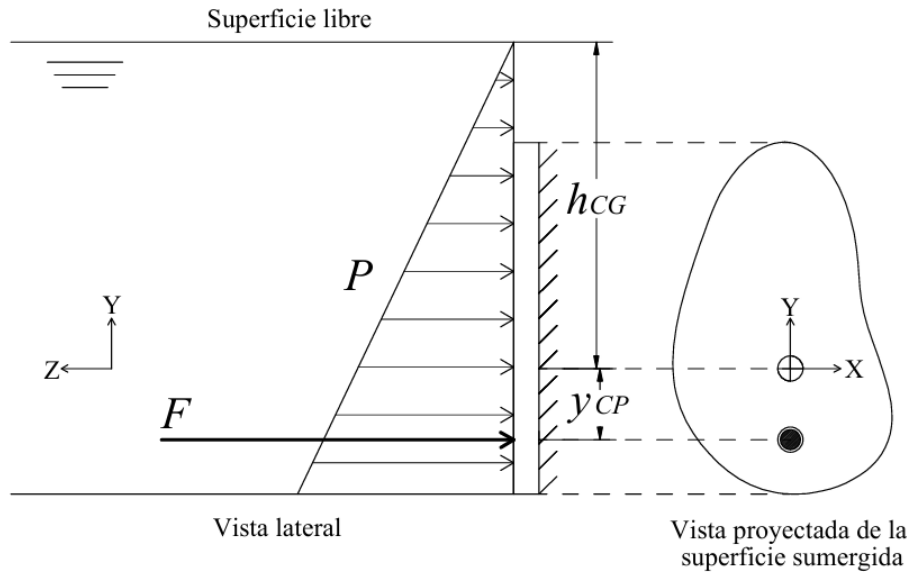


Figura A.1: Representación del principio de presión y fuerza hidrostática.

A.3. Transmisión de potencia mecánica

La transmisión de potencia mecánica es el proceso mediante el cual se transfiere energía desde una fuente impulsora, como un motor, una turbina o cualquier otro generador de movimiento, hacia un sistema accionado, como una máquina, un mecanismo o un sistema de transmisión. Este proceso permite convertir dicha energía en una forma útil para el usuario, facilitando así la ejecución de trabajo mecánico. La transferencia de potencia puede realizarse mediante el movimiento rotacional de un eje, e incorporar elementos mecánicos como engranajes, bandas, poleas y acoplamientos, los cuales están diseñados específicamente para modificar la velocidad, la dirección del movimiento y el par de torsión entre los componentes del sistema transmisor [44].

A.3.1. Principio de conservación de la energía

La transmisión de potencia está regida por el siguiente principio: En casos ideales, la potencia de entrada será igual a la potencia de salida, de modo que se puede considerar que la potencia transmitida a través de todo el sistema, esta la misma. Aunque en realidad esto no es así, pues en distintas componentes como lo pueden ser los cojinetes o los engranes, existirán pérdidas debido a diferentes factores como lo puede ser la fricción [44]. Para el caso de estudio, se considera que se trabaja en condiciones ideales, diseñando los sistemas asumiendo que no existen pérdidas de potencia a través de las piezas que lo componen.

A.3.2. Tipos de sistemas de transmisión de potencia

Existen distintos tipos de sistemas que permiten la transmisión de potencia mecánica, los cuales se seleccionan en función de diversos criterios, como la eficiencia del sistema (es decir, las pérdidas que este presenta), la relación de transmisión requerida, las condiciones de operación, la necesidad de mantenimiento y el nivel de compacidad deseado. A continuación, se presentan algunos de los tipos de sistemas más comunes y sus características más relevantes:

1. **Sistemas por correas y poleas:** Se emplean cuando es necesario transmitir potencia a través de grandes distancias entre ejes, utilizando elementos flexibles como las correas, las cuales transmiten el movimiento entre poleas acopladas a los ejes. Su principal desventaja

radica en su menor eficiencia comparada con otros sistemas, debido al deslizamiento que en ocasiones puede producirse entre la correa y la polea, lo cual puede generar desfases en la sincronización del movimiento de los ejes.

2. **Sistemas de engranajes:** En estos sistemas, la transmisión de potencia se produce por contacto directo entre los dientes de los engranajes. Dado que los engranajes estandarizados están diseñados para cumplir con la ley fundamental del engranaje, la cual establece que la razón de velocidad angular en el punto de contacto debe permanecer constante [3], estos sistemas ofrecen razones de fase y de velocidad constantes, además de una alta eficiencia y precisión en la transmisión de movimiento. Son especialmente útiles cuando se requiere mantener la fase entre ejes, lograr una elevada eficiencia y transmitir altos pares de torsión.

Dentro de los sistemas de transmisión basados en engranajes, estos pueden clasificarse según la disposición relativa de los árboles de entrada y salida de potencia. Si los ejes son paralelos entre sí, se utilizan engranajes rectos o helicoidales, según los requerimientos específicos de la aplicación. Por otro lado, si los árboles son perpendiculares, se emplean comúnmente engranajes cónicos. Además de esta clasificación, los trenes de engranajes también pueden diferenciarse según la configuración de los engranajes montados sobre los árboles que conforman el sistema.

En este sentido, se distinguen los trenes simples, donde cada árbol soporta un solo engranaje; los trenes compuestos, en los cuales un mismo árbol porta más de un engranaje, permitiendo alcanzar una razón de velocidad específica en un espacio más reducido; y finalmente, los trenes epicíclicos o planetarios. Estos últimos poseen dos grados de libertad, por lo que requieren de dos entradas conocidas para obtener una salida predecible. Su principal ventaja respecto a los otros tipos de trenes radica en que permiten obtener relaciones de velocidad elevadas en espacios compactos, así como lograr salidas bidireccionales, simultáneas o concéntricas, a partir de una única entrada unidireccional [3]. Este tipo de trenes puede emplear engranajes rectos o helicoidales. En el presente proyecto de grado se opta por engranajes rectos, ya que, si bien la selección del tipo de engrane debería depender principalmente de la velocidad de operación, el cálculo de los esfuerzos por fatiga a la flexión en la raíz del diente y de los esfuerzos por fatiga de contacto en engranajes helicoidales incluyen factores adicionales que complicarían el desarrollo de los módulos de programación lineal implementados en el algoritmo.

A.4. Condiciones geométricas de compatibilidad en sistemas planetarios

De acuerdo con lo estipulado por el estándar AGMA 6123-B06 [17], para garantizar un correcto contacto entre todos los engranajes que conforman un sistema planetario, y asegurar que los planetas engranen simultáneamente con el sol y la corona sin interferencias ni juegos indebidos, debe cumplirse la siguiente relación geométrica fundamental:

$$D_C = D_S + 2 \cdot D_P \quad (\text{A.24})$$

La interpretación geométrica de esta condición se observa en la Fig.A.2, donde el diámetro primitivo de la corona resulta de la suma del diámetro del engranaje solar y el doble del diámetro de los planetas. Dado que para el correcto funcionamiento del sistema todos los engranajes deben compartir el mismo módulo, y empleando la Ec.A.1, la relación anterior puede expresarse en términos del número de dientes como:

$$Z_C = Z_S + 2 \cdot Z_P \quad (\text{A.25})$$

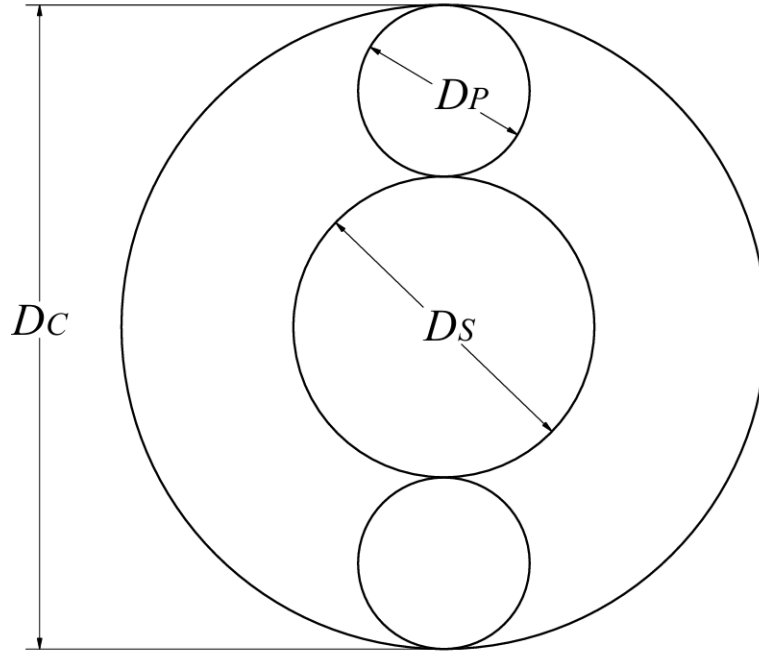


Figura A.2: Representación geométrica basada en los diámetros primitivos de los engranajes en un sistema planetario.

A.5. Cálculo de fuerzas sobre los dientes de los engranajes pertenecientes a un sistema planetario

Para determinar las fuerzas que actúan en los dientes del sistema planetario, se analiza cada etapa de la transmisión hasta obtener una expresión general. Tal como se indicó previamente, el movimiento ingresa por el portaplanetas y se transmite hasta el engrane solar. En la primera etapa, acoplada a la turbina y representada en la Fig.A.3, se inicia el análisis considerando el portaplanetas como elemento de entrada. Dado que su velocidad angular permanece constante, según la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación, la cual establece que la sumatoria de momentos respecto a un eje fijo es igual al producto del momento de inercia por la aceleración angular [45], y puesto que en este caso $\alpha = 0$, se cumple que:

$$\sum M = I \cdot \alpha = 0 \quad (\text{A.26})$$

Por lo tanto, la sumatoria de momentos alrededor del eje longitudinal del portaplanetas se expresa como:

$$T_{En} - F_{PPE1} \cdot r = 0 \quad (\text{A.27})$$

Considerando que la potencia de entrada *Potencia* y la velocidad angular *VelIn* son parámetros funcionales del sistema, el torque de entrada se obtiene de la relación:

$$T_{En} = \frac{\text{Potencia}}{\text{VelIn}} \quad (\text{A.28})$$

Finalmente, de acuerdo con la Fig.A.3, la distancia entre el eje del portaplanetas y el punto de aplicación de la fuerza F_{PPE} , ejercida por los engranajes planetarios sobre el portaplanetas, puede estimarse como:

$$r = r_P + r_S = \frac{D_P + D_S}{2} \quad (\text{A.29})$$

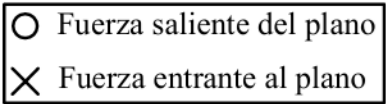


Figura A.3: Vista lateral del portaplanetas de la primera etapa del sistema representado en diagrama de árbol.

A partir de los diámetros primitivos D_P (planetario) y D_S (solar), y mediante la Ec.A.1, se obtiene:

$$r = m \cdot \frac{Z_P + Z_S}{2} \quad (\text{A.30})$$

Donde m es el módulo de los engranajes. Sustituyendo la Ec.A.30 y la Ec.A.28 en la Ec.A.27, resulta:

$$\frac{Potencia}{VelIn} + F_{PPEC1} \cdot m \cdot \frac{Z_P + Z_S}{2} = 0 \quad (A.31)$$

De lo cual se despeja:

$$F_{P P C E 1} = \frac{2 \cdot Potencia}{m \cdot VelIn \cdot (Z_P + Z_S)} \quad (\text{A.32})$$

Esta es la fuerza total ejercida por los engranajes planetarios sobre el portaplanetas. Considerando que dicha carga se distribuye de manera uniforme entre el numero de planetas $NumPla$, se tiene:

$$F_{P_{PC E1}} = \frac{2 \cdot Potencia}{m \cdot VelIn \cdot (Z_P + Z_S) \cdot NumPla} \quad (A.33)$$

Dado que de la Ec.A.25 se cumple:

$$Z_P = \frac{Z_C - Z_S}{2}, \quad (\text{A.34})$$

Al reemplazar en la Ec.A.33 se obtiene finalmente:

$$F_{P P C E1} = \frac{4 \cdot \text{Potencia}}{m \cdot \text{VelIn} \cdot (Z_C + Z_S) \cdot \text{NumPla}} \quad (\text{A.35})$$

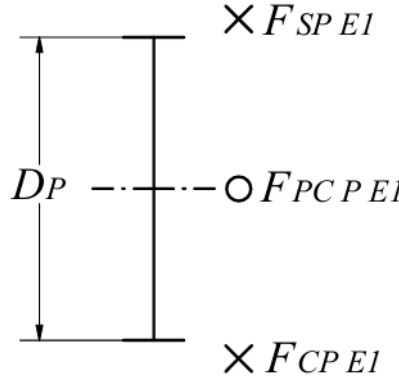


Figura A.4: Vista lateral de un engrane planetario de la primera etapa, mostrando las fuerzas que actúan sobre él.

Para obtener la fuerza que actúa sobre los dientes de los engranes del sistema, se analiza un planeta del sistema con base en la Fig.A.4. En esta figura se muestran las fuerzas que actúan sobre dicho planeta, actuando en este la fuerza ejercida por el portaplanetas sobre el planeta $F_{P C P E1}$ (reacción de $F_{P P C E1}$), la fuerza ejercida por los dientes de la corona sobre los dientes del planeta $F_{C P E1}$ y la fuerza ejercida por los dientes del sol sobre los dientes del planeta $F_{S P E1}$. Al realizar la sumatoria de momentos sobre el eje longitudinal del planeta y considerando $\alpha = 0$ (Ec.A.26), se cumple:

$$F_{S P E1} \cdot r_P - F_{C P E1} \cdot r_P = 0 \Rightarrow F_{S P} = F_{C P} \quad (\text{A.36})$$

Asimismo, de la sumatoria de fuerzas tangenciales, y teniendo en cuenta que en esta dirección el planeta no presentará aceleraciones:

$$F_{P C P E1} - F_{S P E1} - F_{C P E1} = 0, \quad (\text{A.37})$$

Y con la Ec.A.36 resulta:

$$F_{C P E1} = \frac{F_{P C P E1}}{2} \quad (\text{A.38})$$

Sustituyendo $F_{P C P E1}$ de la Ec.A.35, teniendo en cuenta que esta fuerza tiene la misma magnitud que la fuerza $F_{P P C E1}$, al ser su reacción, se llega a:

$$F_{C P E1} = \frac{2 \cdot \text{Potencia}}{m \cdot \text{VelIn} \cdot (Z_C + Z_S) \cdot \text{NumPla}} \quad (\text{A.39})$$

Esta fuerza es igual y opuesta a la que los planetas transmiten al engrane anular; por acciónreacción, también corresponde a la ejercida sobre el sol en la primera etapa, esto según lo expuesto en la Ec.A.36. Bajo la hipótesis de potencia constante (sin pérdidas), la potencia de entrada debe igualar la de salida:

$$\text{Potencia} = T_{Sol E1} \cdot \omega_{S E1} \quad (\text{A.40})$$

De acuerdo con la Ec.1.1, la relación de velocidades angulares es:

$$\frac{\omega_{S E1}}{\omega_{P C E1}} = \frac{Z_S + Z_C}{Z_S} \Rightarrow \omega_{S E1} = \frac{Z_S + Z_C}{Z_S} \cdot \omega_{P C E1} \quad (\text{A.41})$$

Siendo $\omega_{P C E1} = VelIn$. Finalmente, sustituyendo en la Ec.A.40 se obtiene el torque de salida de la primera etapa:

$$T_{Sol E1} = \frac{Potencia \cdot Z_S}{VelIn \cdot (Z_S + Z_C)} \quad (\text{A.42})$$

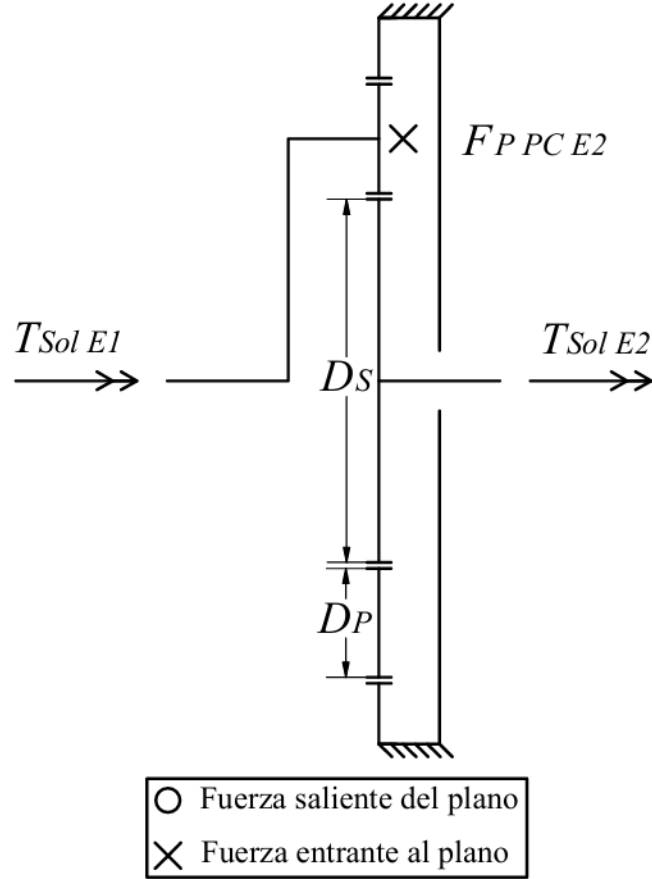


Figura A.5: Vista lateral del portaplanetas de la segunda etapa del sistema representado en diagrama de árbol.

Para el cálculo de fuerzas en los dientes de la segunda etapa del sistema se sigue un procedimiento similar al realizado en la primera etapa. Por lo que considerando el portaplanetas de la segunda etapa (Fig.A.5), y asumiendo que no presenta aceleración angular respecto a su eje longitudinal, la Ec.A.26 permite establecer el equilibrio de momentos entre el par torsor de entrada, que resulta siendo el par torsor de salida de la primera etapa del sistema $T_{Sol E1}$, y la fuerza ejercida por los planetas de la segunda etapa sobre el portaplanetas de la segunda etapa:

$$T_{Sol E1} - F_{P P C E2} \cdot r = 0 \quad (\text{A.43})$$

Dado que la geometría de los portaplanetas y engranajes es análoga a la de la primera etapa, se emplea nuevamente la definición de r de la Ec.A.30. Sustituyendo la expresión del par torsor de salida de la primera etapa (Ec.A.42) en la Ec.A.43, resulta:

$$F_{P P C E 2} = \frac{2 \cdot Potencia \cdot Z_S}{m \cdot VelIn \cdot (Z_S + Z_C) \cdot (Z_S + Z_P)} \quad (A.44)$$

Aplicando la relación entre el número de dientes de los engranajes (Ec.A.34), la expresión puede reescribirse como:

$$F_{P P C E 2} = \frac{4 \cdot Potencia \cdot Z_S}{m \cdot VelIn \cdot (Z_S + Z_C)^2} \quad (A.45)$$

Esta corresponde a la fuerza total ejercida por los engranajes sobre el portaplanetas. Para obtener la contribución individual de cada planeta, se considera que la fuerza se distribuye de manera uniforme entre $NumPla$, de forma que:

$$F_{P P C E 2} = \frac{4 \cdot Potencia \cdot Z_S}{m \cdot VelIn \cdot NumPla \cdot (Z_S + Z_C)^2} \quad (A.46)$$

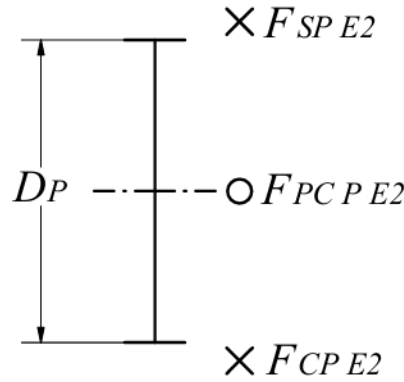


Figura A.6: Vista lateral de un engrane planetario de la segunda etapa, mostrando las fuerzas que actúan sobre él.

Se analiza un planeta de la segunda etapa con base en la Fig.A.6. Sobre él actúan la fuerza transmitida desde el portaplanetas $F_{P C P E 2}$ (reacción de $F_{P P C E 2}$), la fuerza de los dientes de la corona sobre los dientes del planeta $F_{C P E 2}$ y la fuerza de los dientes del sol sobre los dientes del planeta $F_{S P E 2}$. Al realizar la sumatoria de momentos respecto al eje del planeta y considerando $\alpha = 0$ (Ec.A.26), se cumple:

$$F_{S P E 2} \cdot r_P - F_{C P E 2} \cdot r_P = 0 \Rightarrow F_{S P E 2} = F_{C P E 2} \quad (A.47)$$

De la sumatoria de fuerzas tangenciales, y sabiendo que en esta dirección no existe aceleración, se obtiene:

$$F_{P C P E 2} - F_{S P E 2} - F_{C P E 2} = 0, \quad (A.48)$$

Y, empleando la Ec.A.47, resulta:

$$F_{C P E 2} = \frac{F_{P C P E 2}}{2} \quad (A.49)$$

Sustituyendo $F_{P C P E 2}$ a partir de la Ec.A.46, se deduce:

$$F_{C P E 2} = \frac{2 \cdot Potencia \cdot Z_S}{m \cdot VelIn \cdot NumPla \cdot (Z_S + Z_C)^2} \quad (A.50)$$

Esta fuerza es igual y opuesta a la ejercida por los dientes del planeta sobre los dientes del engrane anular, esto por acciónreacción. Corresponde también a la fuerza transmitida a los dientes

del sol en la segunda etapa por parte de los dientes de los planetas, quedando así definidas las fuerzas que actúan sobre los dientes en esta fase del sistema.

Bajo la suposición de potencia constante a lo largo del sistema, al no considerarse pérdidas, la potencia de entrada a la segunda etapa debe ser igual a la de salida de la segunda etapa, de modo que:

$$Potencia = T_{Sol\ E2} \cdot \omega_{S\ E2} \quad (A.51)$$

De acuerdo con la relación de la Ec.1.1, la velocidad angular del sol de la segunda etapa se vincula con la del sol de la primera mediante:

$$\frac{\omega_{S\ E2}}{\omega_{S\ E1}} = \frac{Z_S + Z_C}{Z_S} \Rightarrow \omega_{S\ E2} = \frac{Z_S + Z_C}{Z_S} \cdot \omega_{S\ E1} \quad (A.52)$$

Sustituyendo la expresión de $\omega_{S\ E1}$ obtenida en la Ec.A.41, se establece la relación directa entre la velocidad de entrada y la de salida de la segunda etapa:

$$\omega_{S\ E2} = \left(\frac{Z_S + Z_C}{Z_S} \right)^2 \cdot VelIn \quad (A.53)$$

Finalmente, reemplazando la Ec.A.53 en la Ec.A.51, se obtiene el torque de salida de la segunda etapa:

$$T_{Sol\ E2} = \frac{Potencia}{VelIn} \cdot \left(\frac{Z_S}{Z_S + Z_C} \right)^2 \quad (A.54)$$

Con el torque de salida de la segunda etapa, que a su vez constituye el torque de entrada a la tercera etapa, se obtiene que la fuerza generada sobre el portaplanetas está dada por:

$$F_{P\ PC\ E2} = \frac{4 \cdot Potencia \cdot Z_S^2}{m \cdot VelIn \cdot NumPla \cdot (Z_S + Z_P)^3} \quad (A.55)$$

Siguiendo el mismo procedimiento descrito previamente, para los dientes se obtiene:

$$F_{CP\ E3} = \frac{2 \cdot Potencia \cdot Z_S^2}{m \cdot VelIn \cdot NumPla \cdot (Z_S + Z_P)^3} \quad (A.56)$$

De la observación de las Ec.A.35, A.46 y A.56, se plantea una expresión general para las fuerzas sobre los portaplanetas de un sistema planetario en función del número de etapas, de la forma:

$$F_{P\ PC\ NEta} = \frac{4 \cdot Potencia \cdot Z_S^{(NEta-1)}}{m \cdot VelIn \cdot NumPla \cdot (Z_S + Z_P)^{NEta}} \quad (A.57)$$

Donde $NEta$ representa el número de la etapa considerada. Asimismo, considerando las Ec.A.39, A.50 y A.46, se generaliza la expresión de la fuerza transmitida en los dientes de los engranajes como:

$$F_{S,P,C} = \frac{2 \cdot Potencia \cdot Z_S^{(NEta-1)}}{m \cdot VelIn \cdot NumPla \cdot (Z_S + Z_P)^{NEta}} \quad (A.58)$$

B. Materiales, dimensiones y propiedades utilizadas en la configuración paramétrica del sistema

Tabla B.1: Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados para los engranajes, árboles, portaplanetas y cuñas del sistema. Se define el módulo de elasticidad como E , la razón de Poisson como ν , la dureza del material como D , y la densidad como ρ . Además, $\sigma_{H\lim}$ representa la resistencia a la fatiga por contacto, $\sigma_{F\lim}$ la resistencia a la fatiga por flexión, y S_{ut} la resistencia última a tracción. El factor de acabado superficial que influye en el cálculo de las resistencias corregidas del material se denota como C_{sup} . La resistencia a la fatiga por flexión sin considerar el factor de tamaño se expresa como S'_e , mientras que $\sqrt{a}$ es la constante de Neuber, G es el módulo de elasticidad transversal, y S_y es la resistencia a la fluencia del material.

Material	E	ν	D	ρ	$\sigma_{H\lim}$	$\sigma_{F\lim}$	S_{ut}	C_{sup}	S'_e	$\sqrt{a}$	G	S_y
	[MPa]	[-]	[HB]	[kg/m ³]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]	[MPa]	[$\sqrt{in}$]	[MPa]	[MPa]
AISI 1045	206000	0.290	163	7870	353	143	565	0.922	196	0.078	79844	310
AISI 1050	200000	0.290	197	7870	542	210	667	0.909	228	0.065	77519	384
AISI 1060	200000	0.290	241	7870	582	220	820	0.893	275	0.050	77519	427
AISI 1030	206000	0.290	156	7870	346	139	540	0.926	188	0.082	79844	345
AISI 1020	186000	0.290	131	7870	321	128	445	0.941	157	0.101	72093	325
AISI 1015	200000	0.290	121	7870	311	124	425	0.946	151	0.106	77519	300
AISI 4140	205000	0.290	255	7850	707	295	931	0.884	309	0.041	79457	793
AISI 4340	200000	0.290	352	7850	835	336	1207	0.864	392	0.026	77519	1145
AISI 8620	205000	0.290	260	7850	714	297	1157	0.868	377	0.028	79457	1010
Hierro clase 40 (fundición gris)	124000	0.290	235	7150	374	68	293	0.936	107	0.130	48062	248
Hierro ASTM A536 65-45-12 (nodular)	172500	0.275	173	6920	459	179	496	0.932	174	0.090	67647	345

Tabla B.3: Medidas estandarizadas de los anillos de retención según el diámetro del árbol, basadas en el estándar DIN 471 [26]. El diámetro d_E corresponde al diámetro nominal del eje, s es el espesor radial total del anillo, y d_3 es el diámetro interior del anillo. El parámetro a define el espesor radial de las orejetas de posicionamiento, y b el espesor radial en la región opuesta a la abertura. El diámetro d_5 corresponde a los orificios mecanizados en las orejetas. Además, d_2 representa el diámetro de la ranura maquinada en el árbol, ma es el espesor axial de la ranura, y t su profundidad. El radio r indica la curvatura mínima permitida en la base de la ranura.

Finalmente, n_{abl} es la velocidad rotacional máxima admisible del anillo.

d_E	s	d_3	a	b	d_5	d_2	ma	t	r	d_4	n_{abl}
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[1/min]
8	0.8	7.4	3.2	1.5	1.2	7.6	0.9	0.2	0.08	14.7	96000
9	1	8.4	3.3	1.7	1.2	8.6	1.1	0.2	0.1	16	85000
25	1.2	23.2	4.4	3	2	23.9	1.3	0.55	0.12	34.2	25000
26	1.2	24.2	4.5	3.1	2	24.9	1.3	0.55	0.12	35.5	24000
100	3	94.5	9.6	9	3.5	96.5	3.15	1.75	0.3	120.2	4180
105	4	98	9.9	9.3	3.5	101	4.15	2	0.4	125.8	4740
200	4	190.5	14.2	14	4	195	4.15	2.5	0.4	230	1770
210	5	198	14.2	14	4	204	5.15	3	0.5	240	1835
290	5	275	16.2	16	5	282	5.15	4	0.5	324	1005
300	5	285	16.2	16	5	292	5.15	4	0.5	334	930

Tabla B.4: Propiedades mecánicas de los materiales seleccionados para los bujes. Sea en esta tabla, ν la razón de Poisson del material, D su dureza y S_y su resistencia a la fluencia.

Material	Descripción	ν [-]	D [HB]	S_y [MPa]
UNS C93800	Aleación de bronce con plomo (Cu 75 %, Sn 6-7 %, Pb 14-17 %)	0.3	60	95
UNS C93700	Bronce con alto contenido de plomo (SAE 64) (Cu 78 %, Sn 7 %, Pb 13 %)	0.3	60	125
UNS C18700	Bronce con un bajo contenido de cadmio (Cu 98.8-99.3 %, Cd 0.91.2 %)	0.3	55	380
UNS C93200	Bronce para cojinetes (Cu 83 %, Sn 6-7 %, Pb 6- %) (SAE 660)	0.3	65	125
UNS C62300	Aleación de cobre al aluminio (Cu 82-89 %, Al 8.5-11 %)	0.3	80	241
UNS C17000	Aleación de cobre al berilio (Cu 97.598 %, Be 1.82.0 %)	0.3	62	280

Tabla B.5: Características geométricas y operativas de rodamientos tipo Conrad comerciales. Valores tomados de catálogo [35]. Se presentan el diámetro interno d_r , el diámetro externo D_r , el espesor B , y el radio en las aristas r_r . Además, se incluye la carga límite de fatiga C_u , así como el límite de velocidad de operación. Finalmente, se muestran las dimensiones necesarias para el alojamiento del rodamiento: el diámetro máximo permitido del eje d_a , el diámetro máximo del alojamiento externo D_a , y el radio de empalme en el alojamiento r_{ar} para garantizar un montaje adecuado.

Número de rodamiento	Dimensiones principales				Carga límite de fatiga	Límite de velocidad	Dimensiones de montaje		
	d_r	D_r	B	r_r	C_u	Lubricación con aceite	d_a	D_a	r_{ar}
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[kN]	[1/min]	[mm]	[mm]	[mm]
6800	10	19	5	0.3	0.03	43000	12	17	0.3
6801	12	21	5	0.3	0.04	39000	14	19	0.3
6802	15	24	5	0.3	0.05	33000	17	22	0.3
6803	17	26	5	0.3	0.06	30000	19	24	0.3
6804	20	32	7	0.3	0.1	25000	22	30	0.3
60/22	22	44	12	0.6	0.35	20000	26	40	0.6

Tabla B.6: Características geométricas y operativas de rodamientos de bolas de contacto angular comerciales. Valores tomados de catálogo [36]. Se presentan el diámetro interno d_r , el diámetro externo D_r , el espesor B , y el radio en las aristas r_r del rodamiento seleccionado. Además, se incluye la carga límite de fatiga C_u , así como el límite de velocidad de operación. Se muestran las dimensiones necesarias para el alojamiento del rodamiento: el diámetro máximo permitido del eje d_a , el diámetro máximo del alojamiento externo D_a , y el radio de empalme en el alojamiento r_{ar} para garantizar un montaje adecuado. Por último se muestra el factor de comparación e y los factores de ajuste X y Y , utilizados en el cálculo de la vida útil del rodamiento angular.

Número de rodamiento	Dimensiones principales				Carga límite de fatiga	Límite de velocidad	Dimensiones de montaje			e	X	Y
	d_r	D_r	B	r_r	C_u	Lubricación con aceite	d_a	D_a	r_{ar}			
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[kN]	[1/min]	[mm]	[mm]	[mm]			
7200	10	30	9	0.6	0.11	37000	14.5	25.5	0.6	0.80	0.39	0.76
7304B	20	52	15	1.1	0.61	17000	27	45	1	1.14	0.35	0.57
7006	30	55	13	1	0.61	18000	35.5	49.5	1	0.80	0.39	0.76
7008C	40	68	15	1	0.94	20000	45.5	62.5	1	0.38	0.44	1.47
7310C	50	110	27	2	3.85	13000	60	100	2	0.43	0.44	1.30
7912C	60	85	13	1	1.15	16000	65.5	79.5	1	0.50	0.44	1.12

Tabla B.7: Aceites comerciales seleccionados para la lubricación de sistemas dentro del protocolo de diseño. En esta tabla se presentan la viscosidad dinámica η , la viscosidad cinemática a 40°C ν_v , y la densidad del aceite ρ .

Aceite	ν_v	ρ	η
	[mm ² /s]	[kg/L]	[cP]
ISO VG 2	2.2	0.8	1.76
ISO VG 3	3.2	0.8	2.56
ISO VG 5	4.6	0.8	3.68
ISO VG 7	6.8	0.8	5.44
ISO VG 10	10	0.8	8
ISO VG 15	15	0.8	12
ISO VG 22	22	0.8	17.6
ISO VG 32	32	0.8	25.6
ISO VG 46	46	0.8	36.8
ISO VG 68	68	0.8	54.4
ISO VG 100	100	0.8	80
ISO VG 150	150	0.8	120
ISO VG 220	220	0.8	176
ISO VG 320	320	0.8	256
ISO VG 460	460	0.8	368
ISO VG 680	680	0.8	544
ISO VG 1000	1000	0.8	800
ISO VG 1500	1500	0.8	1200

Tabla B.8: Especificaciones de materiales y durezas para anillos de retención DIN 471.

Material	Diámetro nominal del anillo		Dureza	
	Mínimo	Máximo	Mínima	Máxima
	[mm]	[mm]	[HRC]	[HRC]
SAE 1075 Hardened and tempered (C75)	0	48	47	54
SAE 1070 Hardened and tempered (C70)	48	200	44	53
AISI 1080 Steel, oil quenched from 815°C (1500°F), tempered at 480°C (900°F) (Ck 75)	200	300	40	47

Tabla B.9: Tamaño de tornillo recomendado según el diámetro del árbol. Valores tomados de [37].

Diámetro del árbol		Tornillo
Mínimo	Máximo	
[in]	[in]	
5/16	7/16	M5
7/16	9/16	M5
9/16	7/8	M6
7/8	1 1/4	M8
1 1/4	1 3/8	M10
1 3/8	1 3/4	M10
1 3/4	2 1/4	M12
2 1/4	2 3/4	M12
2 3/4	3 1/4	M16
3 1/4	3 3/4	M20
3 3/4	4 1/2	M20
4 1/2	5 1/2	M24
5 1/2	11 13/16	M24

Tabla B.10: Dimensiones características de tornillos según su clasificación. Valores tomados del estándar ISO 4028 [33].

Tornillo	d	d_P	d_f	z	t	e	L_{min}	L_{max}
	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
M1.6	1.6	0.675	1.25	0.525	1.5	0.809	2	8
M2	2	0.875	1.6	0.625	1.7	1.011	2.5	10
M2.5	2.5	1.375	2.05	0.755	2	1.454	3	12
M3	3	1.875	2.5	0.875	2	1.733	4	16
M4	4	2.375	3.3	1.125	2.5	2.303	5	20
M5	5	3.35	4.2	1.375	3	2.873	6	25
M6	6	3.85	5	1.625	3.5	3.443	8	30
M8	8	5.35	6.75	2.125	5	4.583	8	40
M10	10	6.82	8.5	2.625	6	5.723	10	50
M12	12	8.32	10.25	3.125	8	6.863	12	60
M16	16	11.785	14	4.15	10	9.149	16	60
M20	20	14.785	17.5	5.15	12	11.429	20	60
M24	24	17.785	21	6.15	15	13.716	25	60

C. Presentación de fragmentos del código que implementa el algoritmo propuesto

```

30 def CalculoPrograma(base path, VelIn, VelOut, Diametro, Poten, Factor, Caza, L, PesoTurbina, EspesorTurbina, RadioTurbina):
48     #####
49
50     # Definicion de relacion de velocidad total del tren:
51     mv = VelOut/VelIn
52
53     # Definicion de relacion de velocidades parcial dependiendo del numero de etapas:
54     if 1 < mv <= 10:
55         mv = mv
56         Etapa= 'Etapas requeridas: 1'
57         nEta=1 # Variable utilizada para el calculo de las fuerzas en cada etapa
58     elif 10 < mv <= 100:
59         mv=round(math.pow(mv, 1/2), 1)
60         Etapa= 'Etapas requeridas: 2'
61         print(Etapa)
62         nEta=2 # Variable utilizada para el calculo de las fuerzas en cada etapa
63     elif 100 < mv <= 150:
64         mv = math.pow(mv, 1/3)
65         Etapa= 'Etapas requeridas: 3'
66         nEta=3 # Variable utilizada para el calculo de las fuerzas en cada etapa
67     else:
68         raise ValueError("Relación se sale del alcance del programa")
69     return

```

Figura C.1: Sección del código donde se calcula la razón de velocidad m_V . Se usa un ciclo if que permite el cambio del numero de etapas dependiendo la razón deseada.

```

77 def CalculoDiametros(VelIn, Diametro, Poten, Factor, Caza, mv):
78
79     # Crear un nuevo modelo
80     m = Model()
81     #####
82     # Este vector contiene los modulos industriales enteros mas utilizados:
83     valores=[1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 25]
84     # Definicion de cantidad del componentes del vector de entrada, relacionado con los modulos disponibles
85     n= len(valores)
86
87     # Definicion de variables a encontrarse:
88
89     Zc      = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, name='Zc', lb=17, ub=1309) # Numero de dientes de la corona
90     Zs      = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, name='Zs', lb=21, ub=135) # Numero de dientes del sol
91     Zp      = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, name='Zp', lb=21, ub=135) # Numero de dientes de los planetarios
92     Dc      = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, name='Dc', lb=0, ub=2000 * 1309) # Diametro de paso de la corona
93     Ds      = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, name='Ds', lb=0, ub=2000 * 1309) # Diametro de paso del sol
94     Dp      = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, name='Dp', lb=0, ub=2000 * 1309) # Diametro de paso de los planetas
95     SRSol   = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name='SRSol')
96     SRPla   = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name='SRPla')
97
98     # Restricciones impuestas al modelo:
99
100    # Restricciones geometrica:
101    m.addConstr( Zc == Zs + ( 2 * Zp ), name='c0') # Restriccion de diametro de la corona, segun diametro de los planetas y
102    m.addConstr( Dc == Zc * m_value, name='c1') # Diametro de paso de la corona
103
104    # Restriccion razon de velocidad de etapa:
105    exact_constraint = m.addConstr( ( Zc + Zs ) == ( mv * Zs ), name='c2') # Restriccion de cumplimiento de razon de velocidad
106
107    # Restricciones usadas para el calculo del seno de un angulo en funcion del numero de planetas, se usa para el calculo d
108    m.addConstr( b2 + b3 + b4 + b5 + b6 + b7 + b8 == 1, name='c3 binary_sum') # Restriccion usada para el calculo del seno d
109    # Restricciones dependientes del numero de planetas, en cuanto el numero de planetas tome un valor, las demas exceptuand
110
111    m.addConstr( NPlanetas == ( 2*b2 ) + ( 3*b3 ) + ( 4*b4 ) + ( 5*b5 ) + ( 6*b6 ) + ( 7*b7 ) + ( 8*b8 ) , name='c4 planetas')
112    m.addConstr( Seno == ( 1 * b2 ) + ( 0.8660 * b3 ) + ( 0.7071 * b4 ) + ( 0.5878 * b5 ) + ( 0.5 * b6 ) + ( 0.4339 * b7 ) +
113

```

Figura C.2: Módulo del código destinado al cálculo del diámetro primitivo y del número de dientes del engranaje, conforme a las restricciones establecidas.

```

30 def CalculoPrograma(base_path, VelIn, VelOut, Diametro, Poten, Factor, Caza, L, PesoTurbina, EspesorTurbina, RadioTurbina):
701     hfS=hfe(dens, YS, gammaES, AlfaFenS)
702     hfPSP=hfe(denPSP, YP, gammaEPSP, AlfaFenPSP)
703     hfPPC=hfe(denPPC, YP, gammaEPPC, AlfaFenPPC)
704     hfC=hfe(denC, YC, gammaEC, AlfaFenC)
705
706     print('hfs: ',hfS)
707     print('hfPSP: ',hfPSP)
708     print('hfPPC: ',hfPPC)
709     print('hfC: ',hfC)
710
711     def YFE(hf,Modul,alfaFen, fe, sfen):
712         YF=((6*hf/Modul)*(math.cos(alfaFen)))/(((sfen/Modul)**2)*math.cos(math.radians(20)))*fe
713         return YF
714
715     YFS=YFE(hfS,Modulo,AlfaFenS,feSP,SfnS)
716     YFPSP=YFE(hfPSP,Modulo,AlfaFenPSP,feSP,SfnP)
717     YFPPC=YFE(hfPPC,Modulo,AlfaFenPPC,fePC,SfnP)
718     YFC=abs(YFE(hfC,Modulo,AlfaFenC,fePC,SfnC))
719
720     print('YFS: ',YFS)
721     print('YFPSP: ',YFPSP)
722     print('YFPPC: ',YFPPC)
723     print('YFC: ',YFC)

```

Figura C.3: Módulo del código destinado al cálculo de factores geométricos asociados a los esfuerzos por fatiga de flexión y fatiga de contacto en los dientes de los engranajes.

```

30 def CalculoPrograma(base_path, VelIn, VelOut, Diametro, Poten, Factor, Caza, L, PesoTurbina, EspesorTurbina, RadioTurbina):
1156     def seleccionMateriales(cPSPS,cPPCS,Indica,psemPl,psemSo,NumPl,Wt1KAKG,Wt2KAKG,Wt3KAKG,DientSol,DientCor,DientPl,vLin,nEt,CV
1181         numMate = len(modulos_elasticidad) # Número de materiales
1182         # Variables binarias: xi y yi indican la selección de materiales para engrane (g) y piñón (p)
1183         pinMat = m.addVars(numMate, vtype=GRB.BINARY, name="pinMat") # Para el piñón
1184         engMat = m.addVars(numMate, vtype=GRB.BINARY, name="engMat") # Para el engrane
1185         # Relacionar las propiedades seleccionadas para el piñón (p) y el engrane (g)
1186         EPiSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="EPiSP")
1187         ESP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="ESP")
1188         EPC = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="EPC")
1189         vPiSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="vPiSP")
1190         DurezaPiSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="DurezaPiSP")
1191         DensidadPiSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="DensidadPiSP")
1192         EEnSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="EEnSP")
1193         vEnSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="vEnSP")
1194         DurezaEnSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="DurezaEnSP")
1195         DensidadEnSP = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, name="DensidadEnSP")
1196         MMATE = 250000
1197         MMATV = 2
1198         MMATD = 500
1199         MMATDEN = 15000
1200         MMATSH = 1000
1201         MMATSHd160 = 2
1202         MMATSF = 500
1203
1204         ##### Restricciones de selección de materiales para sol-planetes #####
1205         m.addConstr(gp.quicksum(pinMat[i] for i in range(numMate)) == 1, name="Seleccion material pinon")
1206         m.addConstr(gp.quicksum(engMat[i] for i in range(numMate)) == 1, name="Seleccion material engrane")
1207         m.addConstr(gp.quicksum(corMat[i] for i in range(numMate)) == 1, name="Seleccion material corona")
1208
1209         # Asociar las propiedades seleccionadas a las variables continuas una a una
1210
1211         for i in range(numMate):
1212             m.addConstr(pinMat[i] + engMat[i] + corMat[i] <= 1, name=f"Materiales_Diferentes_{i}")
1213
1214             m.addConstr(EPiSP >= modulos_elasticidad[i] - MMATE * (1 - pinMat[i]), name=f"Ep_Upper_{i}")
1215             m.addConstr(EPiSP <= modulos_elasticidad[i] + MMATE * (1 - pinMat[i]), name=f"Ep_Lower_{i}")
1216             m.addConstr(vPiSP >= razon_poisson[i] - MMATV * (1 - pinMat[i]), name=f"vp_Upper_{i}")
1217             m.addConstr(vPiSP <= razon_poisson[i] + MMATV * (1 - pinMat[i]), name=f"vp_Lower_{i}")
1218             m.addConstr(DurezaPiSP >= dureza[i] - MMATD * (1 - pinMat[i]), name=f"Durezap_Upper_{i}")

```

Figura C.4: Parte del código orientado al cálculo del ancho de cara de los engranajes según la etapa de transmisión, así como a la selección de materiales para los mismos.

```

30 def CalculoPrograma(base_path, VelIn, VelOut, Diametro, Poten, Factor, Caza, L, PesoTurbina, EspesorTurbina, RadioTurbina):
3122 def PortaPlanetas(DiaPla):
3123     Ccarga=1
3124     Ctemp=1
3125     Cconfiabilidad=0.753
3126     m = Model()
3127     resultadosMatricesMateriales= MatrizMateriales()
3128     nombres = resultadosMatricesMateriales[0] # Nombres de los materiales
3129     DurezaEje = resultadosMatricesMateriales[3] # DurezaEje
3130     Sut = resultadosMatricesMateriales[15] # Sut
3131     SeP = resultadosMatricesMateriales[16] # SeP
3132     Sy = resultadosMatricesMateriales[19] # Sy
3133     Raiza = resultadosMatricesMateriales[17] # Raiza
3134     modulos_elasticidad = resultadosMatricesMateriales[1] # Modulo de elasticidad (E)
3135     densidad = resultadosMatricesMateriales[4] # Densidad
3136     d = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=8, ub= 250, name="d")
3137     Aceites = MatrizAceites()
3138     def EsfuerzosCortantesCaso2(FuerAlter,FuerMedi):
3139
3140         EsfuerzosCortantes=(4/(3*pi))
3141         EsfuerzosAlternanteCortante=EsfuerzosCortantes*FuerAlter
3142         EsfuerzosMediosCortante=EsfuerzosCortantes*FuerMedi
3143
3144         return EsfuerzosAlternanteCortante, EsfuerzosMediosCortante
3145
3146     ##### Calculo del espesor de los discos a partir de la fuerza de aplastamiento #####
3147
3148     m.addConstr(AreaEspesor==EspesorDisco*d, name="td1")
3149     FuerzasPorPeso=abs(FuerzasDePeso(F1,DiametroPlaneta,DensidadPlaneta)[0]+FuerzasDePeso(F1,DiametroPlaneta,DensidadPlaneta
3150     FuerzasPorTransmision=2*abs(FuerzasTransmitidas(Wt1)[0]+FuerzasTransmitidas(Wt1)[1])
3151     m.addConstr(sum(SM[i] for i in range(len(SeP))) == 1, name="td2")
3152     m.addConstr( DenS== sum(densidad[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="td3")
3153     m.addConstr( FuerzaPesoEje==9.81*DenS*(dal2/4)*pi*(F1+10)*0.000000001,name="td4")
3154     m.addConstr( FuerzaPesoTotal==FuerzasPorPeso+FuerzaPesoEje,name="td5")
3155     m.addConstr( FuerzaPesoTotalA12==FuerzaPesoTotal*FuerzaPesoTotal,name="td6")
3156     m.addConstr( FuerzaTotalAplastamientoA12==FuerzaPesoTotalA12+(FuerzasPorTransmision**2),name="td7")
3157     m.addConstr( FuerzaTotalAplastamientoA12==FuerzaTotalAplastamiento*FuerzaTotalAplastamiento,name="td8")
3158     m.addConstr( AreaEspesor*EsfuerzoAplastamiento==FuerzaTotalAplastamiento, name="td9")
3159     m.addConstr( Sys== sum(Sy[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="td10")
3160     m.addConstr( nFaplastamiento*EsfuerzoAplastamiento==Sys, name="td11")

```

Figura C.5: Segmento del código orientado al cálculo del ancho y otras dimensiones geométricas del portaplanetas. Aunque se muestran pocas variables definidas, en el módulo se calculan más de 200 variables intermedias.

```

3771 PesosTurbina=FuerzasVariables(PTEE,-PTEE)
3772 PesoPortaPlanetasTotal=FuerzasDePesoPlanetaPortaPlaneta(F1, DiametroPlaneta, DensidadPlaneta, NumPla,d, densidadSel,Diametro
3773 FuerzasPortaPlanetas=FuerzasVariables(PesoPortaPlanetasTotal,-PesoPortaPlanetasTotal)
3774 TorqueEntrada=(Poten/VelIn)*1000 # En Nmm
3775 FuerzasTransmitidasPorTurbina=TorqueEntrada/(RadioTurbina*10)
3776 FuerzasTorqueEntrada=FuerzasVariables(1.35*FuerzasTransmitidasPorTurbina,-FuerzasTransmitidasPorTurbina)
3777 TorquesEntrada=FuerzasVariables(1.35*TorqueEntrada,TorqueEntrada)
3778
3779 print('##### Fuerzas aqui #####')
3780 print('Lt: ',Lt)
3781 print('DistanciaPorEtapas: ',DistanciaPorEtapas)
3782 print('DistanciaEjeEntrada: ',DistanciaEjeEntrada)
3783 print('MinimoD1EE: ',MinimoD1EE)
3784 print('PTEE: ',PTEE)
3785 print('PesosTurbina: ',PesosTurbina)
3786 print('FuerzasPortaPlanetas: ',FuerzasPortaPlanetas)
3787 print('FuerzasTransmitidasPorTurbina: ',FuerzasTransmitidasPorTurbina)
3788 print('FuerzasTorqueEntrada: ',FuerzasTorqueEntrada)
3789 print('TorquesEntrada: ',TorquesEntrada)
3790 print('#####')

```

Figura C.6: Segmento del código orientado al cálculo de las fuerzas y pares torsores presentes en cada una de las etapas del sistema. En esta sección también se calcula y define la longitud máxima permitida para cada uno de los árboles, con el fin de cumplir con las restricciones de espacio.

```

3792 def EjeEntrada():
3837     VelMaxConAceite = Rodamientos[9]
3838     D = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=8, ub= 250, name="D")
3839     re = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=4, ub= 125, name="re")
3840     Dal2 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=64, ub= 62500, name="Dal2")
3841     Dal3 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=512, ub= 15625000, name="Dal3")
3842     Dal4 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=4096, ub= 3906250000, name="Dal4")
3843     Se = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1000, name="Se")
3844     SyE = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1500, name="SyE")
3845     RaA = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1, name="RaA")
3846     Suts = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1000, name="Suts")
4172     m.addConstr(quicksum(SM[i] for i in range(len(SM))) == 1, name="cd1")
4173     m.addConstr(Se == sum(SeP[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="cd2")
4174     m.addConstr(Suts == sum(Sut[i] * SM[i] for i in range(len(Sut))), name="cd3")
4175     m.addConstr(quicksum(MAn[i] for i in range(len(KtA))) == 1, name="cd4")
4176     m.addConstr(KtAn == sum(KtA[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="cd5")
4177     m.addConstr(KtsAn == sum(KtsA[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="cd6")
4178     m.addConstr(D == sum(DiaEje[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="cd7")
4179     m.addConstr(VelMaxEjeVar == sum(VelMaxEje[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="cd8")
4180     m.addConstr(dm==0.3*D, name="cd9")
4181     m.addConstr(dm==2*rm, name="cd10")
4182     m.addConstr(((DiametroSol-(Modulo*7.9))/2)>=(D/2), name="cd11") # Para asegurar que el radio no se salga
4183     m.addConstr(RaA == sum(Raiza[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="cd12")

```

Figura C.7: Segmento del código orientado al cálculo de la geometría del árbol de entrada del sistema. Son definidas mas de 300 variables para el calculo dicha geometría.

```

4823 def EjeIntermedio(n):
4871     NombreRodamientos = Rodamientos[10]
4872     VelMaxConAceite = Rodamientos[9]
4873     D = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=8, ub= 250, name="D")
4874     re = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=4, ub= 125, name="re")
4875     Dal2 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=64, ub= 62500, name="Dal2")
4876     Dal3 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=512, ub= 15625000, name="Dal3")
4877     Dal4 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER,lb=4096, ub= 3906250000, name="Dal4")
4878     Se = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1000, name="Se")
4879     SyE = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1500, name="SyE")
4880     RaA = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1, name="RaA")
4881     Suts = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS,lb=0, ub= 1000, name="Suts")
4882     SM = m.addVars(len(SeP), vtype=GRB.BINARY, name="SM") # Variables binarias para selección
4883     MAn = m.addVars(len(KtA), vtype=GRB.BINARY, name="MAn") # Variables binarias para selección
4884     MatAn = m.addVars(len(MaterAnillo), vtype=GRB.BINARY, name="MatAn") # Variables binarias para selección
4885     PTTorSe = m.addVars(len(PTTorn), vtype=GRB.BINARY, name="PTTorSe")
4886     RodSe = m.addVars(len(dInRod), vtype=GRB.BINARY, name="RodSe")
4887     RodSe2 = m.addVars(len(dInRod), vtype=GRB.BINARY, name="RodSe2")
5165     m.addConstr(quicksum(SM[i] for i in range(len(SM))) == 1, name="qd1")
5166     m.addConstr(Se == sum(SeP[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="qd2")
5167     m.addConstr(Suts == sum(Sut[i] * SM[i] for i in range(len(Sut))), name="qd3")
5168     m.addConstr(quicksum(MAn[i] for i in range(len(KtA))) == 1, name="qd4")
5169     m.addConstr(KtAn == sum(KtA[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="qd5")
5170     m.addConstr(KtsAn == sum(KtsA[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="qd6")
5171     m.addConstr(D == sum(DiaEje[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="qd7")
5172     m.addConstr(VelMaxEjeVar == sum(VelMaxEje[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="qd8")
5173     m.addConstr(dm==0.3*D, name="qd9")
5174     m.addConstr(dm==2*rm, name="qd10")
5175     m.addConstr(((DiametroSol-(Modulo*7.9))/2)>=(D/2), name="qd11") # Para asegurar que el radio no se salga
5176     m.addConstr(RaA == sum(Raiza[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="qd12")

```

Figura C.8: Segmento del código orientado al cálculo de la geometría de los árboles intermedios del sistema, en caso de que estos existan. La función recibe como argumento N_{ET} , ya que la cantidad de etapas condiciona las fuerzas consideradas en el análisis de esfuerzos y, en consecuencia, la geometría resultante.

```

5814 def EjeFinal():
5869     Dal3 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=512, ub= 15625000, name="Dal3")
5870     Dal4 = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=4096, ub= 3906250000, name="Dal4")
5871     Se = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, ub= 1000, name="Se")
5872     SyE = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, ub= 1500, name="SyE")
5873     RaA = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, ub= 1, name="RaA")
5874     Suts = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, ub= 1000, name="Suts")
5875     SM = m.addVars(len(SeP), vtype=GRB.BINARY, name="SM") # Variables binarias para selección
5876     MAn = m.addVars(len(KtA), vtype=GRB.BINARY, name="MAn") # Variables binarias para selección
5877     MatAn = m.addVars(len(MaterAnillo), vtype=GRB.BINARY, name="MatAn") # Variables binarias para selección
5878     PTTorSe = m.addVars(len(PTTorn), vtype=GRB.BINARY, name="PTTorSe")
5879     RodSe = m.addVars(len(dInRod), vtype=GRB.BINARY, name="RodSe")
5880     RodSe2 = m.addVars(len(dInRod), vtype=GRB.BINARY, name="RodSe2")
5881     KtAn = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=2.5, ub= 4.2, name="KtAn")
6159     m.addConstr(quicksum(SM[i] for i in range(len(SM))) == 1, name="sd1")
6160     m.addConstr(Se == sum(SeP[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="sd2")
6161     m.addConstr(Suts == sum(Sut[i] * SM[i] for i in range(len(Sut))), name="sd3")
6162     m.addConstr(quicksum(MAn[i] for i in range(len(KtA))) == 1, name="sd4")
6163     m.addConstr(KtAn == sum(KtA[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="sd5")
6164     m.addConstr(KtsAn == sum(KtsA[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="sd6")
6165     m.addConstr(D == sum(DiaEje[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="sd7")
6166     m.addConstr(VelMaxEjeVar == sum(VelMaxEje[i] * MAn[i] for i in range(len(KtA))), name="sd8")
6167     m.addConstr(dm==0.3*D, name="sd9")
6168     m.addConstr(dm==2*rm, name="sd10")
6169     m.addConstr(((DiametroSol-(Modulo*7.9))/2)>=(D/2), name="sd11") # Para asegurar que el radio no se salga
6170     m.addConstr(RaA == sum(Raiza[i] * SM[i] for i in range(len(SeP))), name="sd12")
6171     m.addConstr(rmIn == rm*0.0393701, name="sd13")
6172     m.addConstr(rmIn == rmInR*rmInR, name="sd14")
6173     m.addConstr(qP1*rmInR == RaA, name="sd15")
6174     m.addConstr(qP2 == 1+qP1, name="sd16")

```

Figura C.9: Segmento del código orientado al cálculo de la geometría del árbol de salida del sistema.

```

6776 def SeleccionDeRodamientos(Dj,R, VelCompara):
6782     NombreRodamientos = Rodamientos[10]
6783     VelMaxConAceite = Rodamientos[9]
6784     RodSe = m.addVars(len(dInRod), vtype=GRB.BINARY, name="RodSe")
6785     cRoda = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, name="cRoda")
6786     L10SE = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, name="L10SE")
6787     L10SEAL2 = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, name="L10SEAL2")
6788     L10SEAL3 = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, name="L10SEAL3")
6789     DinterRoda = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=8, ub=310, name="DinterRoda")
6790     VidaRod1 = m.addVar(vtype=GRB.CONTINUOUS, lb=0, name="VidaRod1")
6791     DExterRoda = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=10, ub=650, name="DExterRoda")
6792     VelocidadRodamiento = m.addVar(vtype=GRB.INTEGER, lb=0, ub=44000, name="VelRod")
6793     m.addConstr(quicksum(RodSe[i] for i in range(len(dInRod))) == 1, name="sepd1")
6794     m.addConstr(DinterRoda == Dj, name="sepd3")
6795     m.addConstr(DinterRoda == sum(dInRod[i] * RodSe[i] for i in range(len(dInRod))), name="sepd2")
6796     m.addConstr(cRoda == sum(cRP[i] * RodSe[i] for i in range(len(dInRod))), name="sepd4")
6797     m.addConstr(L10SE == cRoda*1000/R, name="sepd5")
6798     m.addConstr(L10SEAL2==L10SE*L10SE, name="sepd6")
6799     m.addConstr(L10SEAL3==L10SEAL2*L10SE, name="sepd7")
6800     m.addConstr(VidaRod1==0.62*L10SEAL3, name="sepd8")
6801     m.addConstr(DExterRoda == sum(dExRod[i] * RodSe[i] for i in range(len(dInRod))), name="sepd9")
6802     m.addConstr(VelocidadRodamiento == sum(VelMaxConAceite[i] * RodSe[i] for i in range(len(dInRod))), name="sepd10")
6803     m.addConstr(VelCompara <= 0.8*VelocidadRodamiento, name="sepd11")

```

Figura C.10: Segmento del modulo orientado a la selección de los rodamientos utilizados en el sistema.

```

6862 ##### Dibujos CAD #####
6863
6864 ##### Engranés #####
6865 OrificioP1=d+cdE+4
6866 Orificio=OrificioP1*(1+0.0015)
6867
6868
6869 if nEta==1:
6870     dibujoEngranésExternos(new_folder_path,DientesSol,Modulo,1,F1/10,1,DF, bcuF, hcuF, rCunaF, nCunasF)
6871     dibujoEngranésExternos(new_folder_path,DientesPlaneta,Modulo,2,F1/10,1,Orificio, bcuF, hcuF, rCunaF, nCunasF)
6872     dibujoEngranésInternos(new_folder_path,DientesCorona,Modulo,F1/10,1)
6873
6874 elif nEta==2:
6875     dibujoEngranésExternos(new_folder_path,DientesSol,Modulo,1,F1/10,1,DI1, bcuI1, hcuI1, rCunaI1, nCunasI1)
6876     dibujoEngranésExternos(new_folder_path,DientesPlaneta,Modulo,2,F1/10,1,Orificio, bcuI1, hcuI1, rCunaI1, nCunasI1)
6877     dibujoEngranésInternos(new_folder_path,DientesCorona,Modulo,F1/10,1)
6878
6879     dibujoEngranésExternos(new_folder_path,DientesSol,Modulo,1,F2/10,2,DF, bcuF, hcuF, rCunaF, nCunasF)
6880     dibujoEngranésExternos(new_folder_path,DientesPlaneta,Modulo,2,F2/10,2,Orificio, bcuF, hcuF, rCunaF, nCunasF)
6881     dibujoEngranésInternos(new_folder_path,DientesCorona,Modulo,F2/10,2)

```

Figura C.11: Segmento del código utilizado para la generación de las piezas que componen el sistema en formato CAD.

D. Procedimiento detallado para calcular el factor de seguridad de las piezas generadas por el algoritmo en el caso de estudio

En la siguiente sección se describe el procedimiento seguido para el cálculo de las diferentes piezas que conforman el sistema planetario generado por el algoritmo, de acuerdo con los requerimientos funcionales establecidos. Este procedimiento profundiza lo presentado en el Capítulo 4 de este proyecto de grado.

Todas las tablas mencionadas en esta sección, están incluidas en la sección E, esto debido a razones de espacio disponible.

D.1. Cálculo del factor de seguridad de manera analítica para los dientes de los engranajes del sistema

Para calcular el factor de seguridad en los dientes de los engranajes del sistema propuesto para el caso de estudio, se siguen los siguientes pasos:

1. **Definición del número de dientes de los engranajes y su respectivo módulo:** El algoritmo determina el número de dientes de los engranajes solar, planetarios y anular, para cada una de las dos etapas que componen el sistema generado, así como su respectivo módulo. Los valores definidos son: $Z_S = 31$, $Z_P = 58$, $Z_C = 137$, con un módulo de $m = 1$ mm.
2. **Cálculo de la razón de velocidad:** Se calcula la razón de velocidad del sistema utilizando la Ec.3.1, obteniendo $m_V \text{ Sistema} = 33.3$, lo que da como resultado que para cada etapa se cumple $m_V \text{ Etapa} = 5.77$.
3. **Cálculo de fuerzas aplicadas sobre los dientes de los engranajes:** El cálculo de las fuerzas sobre los dientes de los engranajes en cada etapa se realiza utilizando la Ec.1.3, y siguiéndose el diagrama de fuerzas sobre los dientes de los engranes expuesto en la Fig.D.1. Obteniendo para la primera etapa una fuerza de $F_1 = 268.24$ N y para la segunda etapa una fuerza de $F_2 = 46.72$ N.
4. **Cálculo de factores geométricos para el posterior cálculo de esfuerzos:** Se calculan los factores geométricos que permiten determinar los esfuerzos por fatiga de flexión y de contacto en los dientes. Los valores de estos factores, calculados según el estándar ISO 6336-3 [23], se exponen en la Tabla E.1.

Debido a que los planetas engranan tanto con el sol como con la corona, se calculan dos factores para algunos de los parámetros relacionados con los planetas: uno para el par sol-planeta (SP) y otro para el par planeta-corona (PC).

5. **Cálculo de los factores de aplicación K_A y el factor de carga K_γ :** El valor de $K_A = 1.35$ se toma del estándar AGMA 6123-B6 [17], el cual depende directamente de las condiciones de entrada del sistema. Para turbinas, se utiliza el valor 1.35. Para K_γ , se asigna un valor de 1.
6. **Definición del ancho de cara de los engranajes del sistema propuesto por el algoritmo:** El algoritmo propone un ancho de cara de 88.61 mm para la primera etapa y de 9.86 mm para la segunda etapa.

7. **Definición de los materiales que propone el algoritmo para los engranajes:** El algoritmo propone como material para el engranaje anular de todas las etapas, un acero AISI 1030; para los planetas de las distintas etapas, un hierro clase 40 (fundición gris, con grafito en una matriz en ferrítico-perlítica); y para los engranajes solares, un acero AISI 4340.
8. **Cálculo de valores del factor dinámico K_V , el factor de carga $K_{F\beta}$, y el factor de carga transversal $K_{F\alpha}$:** Estos factores para ambas etapas y para ambos pares SP y PC son calculados de acuerdo al estándar ISO 6336-1, y son expuestos en la Tabla E.2.
9. **Cálculo de la resistencia corregida a la flexión:** Dicho cálculo se realiza mediante la Ec.1.10. Para ello es necesario determinar el valor de la resistencia nominal a la flexión $\sigma_{F\lim}$ para los materiales de los engranajes según el estándar ISO 6336-5 [30], obteniéndose: $\sigma_{F\lim\text{ Planeta}} = 68.16 \text{ MPa}$, $\sigma_{F\lim\text{ Corona}} = 139.98 \text{ MPa}$ y $\sigma_{F\lim\text{ Sol}} = 336.6 \text{ MPa}$.
10. **Cálculo del factor relativo superficial $Y_{R\text{rel T}}$, el factor de sensibilidad relativa a la muesca $Y_{\delta\text{rel T}}$, y el factor de tamaño Y_X :** El cálculo de dichos factores se realiza de acuerdo al estándar ISO 6336-1, y sus valores se exponen en la Tabla E.3. Para los tres materiales dispuestos por el algoritmo, Y_X toma el mismo valor en este caso.
11. **Cálculo del factor de carga transversal $K_{H\alpha}$, y el factor de carga en cara $K_{H\beta}$:** Según los criterios expuestos en el estándar ISO 6336, para este caso de estudio los valores de $K_{H\alpha}$ son equivalentes a los de $K_{F\alpha}$. Asimismo, siguiendo las especificaciones del estándar ISO 6336-1 [24], se calcula el factor de carga en cara $K_{H\beta}$ para los pares planeta-sol y planeta-corona, tanto en la primera como en la segunda etapa, obteniéndose los resultados expuestos en la Tabla E.4.
12. **Cálculo del diámetro de referencia d_1 y la relación de transmisión u :** El diámetro de referencia es el diámetro primitivo del engranaje que actúa como piñón en cada par: para el contacto sol-planeta, d_1 es el diámetro del sol; y para el contacto planeta-corona, d_1 es el diámetro del planeta.

Por su parte, la relación de transmisión u se calcula según la Ec.1.14, dando como resultado $u_{SP} = 1.87$ para el par sol-planeta y $u_{PC} = -2.53$ para el par planeta-corona.

13. **Cálculo de factores de contacto para un par de dientes del piñón Z_B y para un par de dientes del engranaje Z_D , y el factor de relación de contacto Z_ϵ :** Los factores de contacto para un par de dientes, tanto del piñón como del engranaje, se calculan para los pares sol-planeta y planeta-corona, sin diferenciar entre etapas. Estos factores dependen de la geometría de los engranajes y se calculan con base en el estándar ISO 6336-2 [25]. Los valores de estos factores, así como el factor de relación de contacto Z_ϵ para cada par, se muestran en la Tabla E.5.
14. **Cálculo del factor de zona Z_H , el factor de hélice Z_β y el factor elástico Z_E :** El factor de zona Z_H , que depende del tipo de engranaje, tiene un valor de $Z_H = 2.49$ cuando se utilizan engranajes rectos, según el estándar ISO 6336-2.

El factor de hélice Z_β toma un valor de $Z_\beta = 1$ al trabajar con engranajes rectos [25].

El factor Z_E depende del par de materiales en contacto. Para el par sol-planeta se obtiene $Z_{ESP} = 153086 \text{ MPa}$, y para el par planeta-corona, $Z_{EPC} = 154812 \text{ MPa}$, el cálculo de todos estos factores es detallado en el estándar ISO 6336-2 [25].

15. **Cálculo de la resistencia corregida por contacto:** Este cálculo se realiza mediante la Ec.1.15. Para ello, se determina la resistencia nominal a la fatiga de contacto $\sigma_{H\lim}$ para cada uno de los tres materiales de los engranajes, basándose en el estándar ISO 6336-5

[30], obteniéndose los siguientes valores: $\sigma_{H \text{ lim Planeta}} = 374 \text{ MPa}$, $\sigma_{H \text{ lim Corona}} = 346 \text{ MPa}$ y $\sigma_{H \text{ lim Sol}} = 835 \text{ MPa}$.

16. **Cálculo de los factores de aspereza Z_R , de lubricante Z_L , y de velocidad Z_V :** Estos factores son calculados conforme al estándar ISO 6336-2 [25]. El factor Z_R se determina para los pares sol-planeta y planeta-corona, y dado que se emplean la misma cantidad de dientes y materiales a lo largo de las etapas, se calcula una única vez por par, lo cual también aplica para el factor Z_L .

Por otro lado, el factor Z_V se calcula de forma individual para cada par de contacto y para cada etapa. Los valores de estos factores para el presente caso de estudio se presentan en la Tabla E.6 en el capítulo de anexos.

17. **Cálculo del factor de endurecimiento Z_W :** Este factor se evalúa para el sol, la corona y el planeta en cada etapa. Dado que este factor depende del par en contacto, el planeta posee dos valores distintos: uno correspondiente al contacto con el sol y otro al contacto con la corona, como se explicó previamente. Los valores de este factor para el caso de estudio se encuentran también en la Tabla E.6.

18. **Cálculo de los esfuerzos debidos a fatiga por flexión σ_b :** Con todos los factores determinados hasta el momento, así como las características geométricas y la fuerza presente en los engranajes, se procede al cálculo de los esfuerzos debidos a fatiga por flexión, en la raíz de los dientes de los engranajes mediante la Ec.1.9. Las magnitudes obtenidas de estos esfuerzos, tanto para la primera etapa como para la segunda etapa, son expuestas en la Tabla E.7 presente en los anexos.

19. **Cálculo de los esfuerzos debidos a fatiga por contacto σ_H :** De manera análoga al caso de la fatiga por flexión, con los factores previamente determinados, se calculan los esfuerzos debidos a fatiga superficial en la cara de los dientes σ_H , utilizando las Ec.1.12 y 1.13. Los valores de dichos esfuerzos son expuestos en la Tabla E.8.

Se usa una u otra ecuación dependiendo de cuál sea el piñón y el engranaje en cada par. En el caso del contacto sol-planeta, el engranaje considerado es el planeta, mientras que para el contacto planeta-corona, el engranaje es la corona. Esta asignación corresponde al análisis de verificación actual, aunque en otros contextos puede variar en el par sol-planeta.

20. **Cálculo de la resistencia corregida a la fatiga por flexión S_F :** La resistencia corregida a la fatiga por flexión S_F de los materiales de los engranajes es calculada a partir del estándar ISO 6336-3 [23] y sus valores se encuentran en la Tabla E.9 dispuesta en los anexos.

21. **Cálculo de la resistencia corregida a la fatiga por contacto S_H :** Se calcula dicha resistencia corregida con base en el estándar ISO 6336-2 [25]. Esta resistencia varía según el par de engranajes y la etapa en que se encuentren, debido a distintos efectos no abordados en este documento. Sus valores son expuestos también en la Tabla E.9.

22. **Cálculo de factores de seguridad frente a los esfuerzos debidos a fatiga por flexión:** Con los esfuerzos y las resistencias frente a la fatiga por flexión calculados, se calculan los factores de seguridad frente a los esfuerzos por fatiga de flexión utilizando la Ec.1.11, cuyos resultados se presentan en la Tabla E.10.

23. **Cálculo de factores de seguridad frente a los esfuerzos debidos a fatiga por contacto:** De manera similar al caso anterior, se calculan los factores de seguridad frente a la fatiga por contacto utilizando también la Ec.1.11. Los valores obtenidos para estos factores de seguridad se muestran en la Tabla E.11.

A partir de estos resultados, se concluye que los engranajes propuestos por el algoritmo son seguros tanto frente a la fatiga por contacto como a la fatiga por flexión en ambas etapas. En consecuencia, se puede afirmar que los engranajes cumplen con los requisitos para ambos tipos de fallas considerados, lo que valida su diseño. Además, la razón de velocidad alcanzada es muy cercana a la que se establece indirectamente en este caso de estudio.

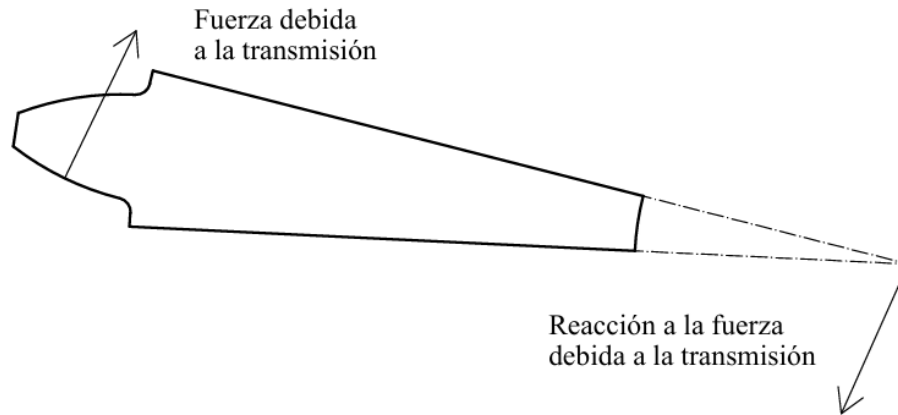


Figura D.1: Diagrama de fuerzas que actúan sobre un engrane cuando en este se da una transmisión de potencia.

D.2. Cálculo de los factores de seguridad en distintos puntos del árbol de entrada del sistema

Con el fin de verificar analíticamente la idoneidad del diseño del árbol de entrada, se aplica un procedimiento estructurado para determinar los factores de seguridad asociados. Este mismo procedimiento puede replicarse de manera análoga para los árboles intermedio y de salida del sistema, y se presenta a continuación:

1. Determinación de las fuerzas aplicadas sobre el árbol:

- a) **Peso de la turbina:** La turbina se encuentra ubicada en el extremo izquierdo del árbol y tiene un peso de 78.48 N. Dado el comportamiento dinámico del árbol, esta fuerza se considera variable, descomponiéndose en componentes alternante y media, cuyas magnitudes se presentan en la Tabla E.20, ubicada en la sección E de los anexos.
- b) **Fuerzas generadas por el par torsor de entrada:** El par torsor transmitido por la turbina, con un valor de 47.75 N·m, se calcula a partir de los requerimientos funcionales del sistema utilizando la Ec.A.20.

Dado que este par torsor puede variar hasta un 35 %, se aplica un factor de carga $K_A = 1.35$, conforme al estándar ISO 6336-1, que establece una variabilidad de las fuerzas transmitidas por las turbinas en dicho porcentaje respecto a su valor nominal.

Se asume que el par torsor mínimo es el valor nominal, mientras que el valor máximo se obtiene multiplicando el valor nominal por K_A . Con esta información, se calculan las componentes alternante y media del par torsor, cuyas magnitudes se detallan en la Tabla E.20.

A partir de estas componentes, se pueden obtener las partes alternantes y medias de la fuerza radial F_r y de la fuerza tangencial F_T transmitidas al sistema como resultado de la potencia generada por la turbina, utilizando la Ec.A.19 y los supuestos establecidos

en la sección 3.1.1. Las magnitudes correspondientes de estas fuerzas se presentan en la Tabla E.20.

Con el propósito de diseñar el árbol para las condiciones más críticas de operación, se asume que la fuerza radial generada por la turbina actúa en la misma dirección que su peso.

- c) **Fuerza axial generada por la presión hidrostática del agua sobre la turbina:** La presión ejercida por el agua sobre la turbina origina una fuerza hidrostática que, a su vez, induce un momento flector sobre el árbol de entrada al sistema. El cálculo de dicha fuerza se realiza con base en los supuestos establecidos en la Sección 3.1.1 del Capítulo 3 y en la Sección A.2, considerando el radio del rodete de la turbina y la altura de la porción no sumergida. El valor resultante de esta fuerza se presenta en la Tabla E.20.

Asimismo, se determina la distancia entre el centro de presión y la ubicación radial del árbol de entrada, situado en la mitad de la turbina, con el fin de calcular el momento flector generado por esta fuerza sobre dicho árbol. El valor correspondiente de este momento también se reporta en la Tabla E.20.

- d) **Peso de la turbina:** La turbina se estima con una masa de 8 kg, lo que equivale a una fuerza radial de $P_T = 78.48$ N. Dadas las características rotacionales del árbol de entrada, esta fuerza se considera variable: su valor máximo corresponde al peso de la turbina, mientras que el mínimo se asume como el mismo valor con signo negativo. A partir de estas condiciones, se determinan las componentes alternantes y media de la fuerza radial empleando la Ec.1.6. Los valores obtenidos se presentan en la Tabla E.20.
- e) **Peso del portaplanetas y componentes asociados:** Para el cálculo de las fuerzas de peso total es necesario considerar tanto el peso del portaplanetas como el de los engranajes planetarios. En este sentido, el algoritmo proporciona la geometría de cada planeta, con un ancho de cara de $F = 88.61$ mm y un diámetro de paso de $D_P = 58$ mm. Adicionalmente, se requiere conocer el número de planetas definido para la primera etapa del sistema, el cual corresponde a 2, así como la densidad del material seleccionado por el algoritmo para los engranajes, cuyo valor es 7150 kg/m^3 . Considerando a cada engranaje como un cilindro sólido, se obtiene un peso total de $P_{En} = 32.84$ N.

De manera análoga, a partir de la geometría del portaplanetas y de la densidad del material escogido para su fabricación, igual a 6920 kg/m^3 , se calcula un peso de $P_{Por} = 79.79$ N.

En consecuencia, el peso total asociado al portaplanetas resulta de la suma de ambos aportes, dando como resultado $P_{Portaplanetas} = 112.63$ N.

Debido a las características rotacionales del árbol de entrada, esta fuerza se modela como una carga variable: su valor máximo corresponde al peso total del portaplanetas, mientras que su valor mínimo se asume como el mismo en magnitud pero con signo negativo. A partir de estas condiciones se determinan las componentes alternante y media de dicha fuerza, de acuerdo con la Ec.1.6. Los valores obtenidos se presentan en la Tabla E.20.

2. **Elaboración del diagrama de cuerpo libre para el árbol de entrada:** Se elabora un diagrama de cuerpo libre con el fin de identificar las fuerzas actuantes y su impacto en los esfuerzos del árbol. El diagrama resultante se muestra en la Fig.D.2.b, ubicada en la sección de anexos.

Con esta información, se procede al cálculo de los factores de seguridad en los puntos b , c , d , f y g , como se definidos en la Fig.D.2.b. Para realizar este cálculo, se utilizan las dimensiones representativas del árbol de entrada proporcionadas por el algoritmo, las cuales son: $d_{Eje} = 28$ mm,

$L_1 = 170.21$ mm, $L_2 = 393.30$ mm y $L_R = 63.16$ mm. Las medidas correspondientes se detallan en la Fig.D.2.a. Además, se obtiene del algoritmo que el árbol está fabricado en acero AISI 1030.

D.2.1. Cálculo del factor de seguridad frente a fatiga debido a esfuerzos combinados en el punto b

1. **Determinación de las magnitudes del par torsor en el punto b:** El análisis del par torsor de entrada y salida indica que tanto la componente media como la alternante del par torsor se mantienen constantes respecto a lo largo del árbol, con un valor igual al valor del par torsor generado por la turbina, este valor es expuesto en la Tabla E.21.
2. **Cálculo de momentos en el punto b:** Utilizando un diagrama de momento flector en el árbol, se calculan los momentos alternantes y medios generados por las distintas fuerzas presentes en el árbol. Debido a que hay momentos actuando en la dirección radial y en la dirección tangencial, se combinan las componentes de la función del momento en estos planos, usando el teorema de Pitágoras, para obtener la magnitud máxima de la función del momento en el punto analizado. Así, realizando esta combinación se calculan los momentos alternante $M_{\text{Alternante } P_b}$ y medio $M_{\text{Medio } P_b}$ en el punto b. Las magnitudes de estos momentos se presentan en la Tabla E.21.
3. **Cálculo de los factores geométricos de concentración de esfuerzos K_t y K_{ts} :** Los factores de concentración de esfuerzos en este punto, debido a la presencia de los anillos, son $K_t = 3.49$ y $K_{ts} = 2.27$, según las tablas de la referencia [46].
4. **Cálculo de la sensibilidad a la muesca del material del árbol, debido a la ranura del anillo:** Conociendo que el radio de la muesca corresponde al radio del anillo, y que este valor, proporcionado por el algoritmo, es $r = 4.2$ mm, se calcula la sensibilidad a la muesca q del material utilizando la Ec.A.16 y siendo conocido el material del árbol, obteniendo su constante de Neuber de la Tabla B.1. Para este caso, $q = 0.83$.
5. **Cálculo de los factores de concentración de esfuerzos por fatiga K_f y por fatiga debida a esfuerzos cortantes K_{fs} :** Con el valor de la sensibilidad a la muesca q , se determinan los factores efectivos de concentración de esfuerzos, resultando en $K_f = 3.07$ y $K_{fs} = 2.05$ a través de la Ec.A.15.
6. **Cálculo de los esfuerzos equivalentes de Von Mises alternante y medio:** Con los valores determinados hasta el momento, se procede al cálculo de los esfuerzos equivalentes de Von Mises en el punto b, utilizando la Ec.1.5. Las magnitudes obtenidas de estos esfuerzos alternantes y medios se presentan en la Tabla E.21.
7. **Cálculo de la resistencia corregida a la fatiga del material:** En la Tabla B.1 se presenta la resistencia a la fatiga corregida del material sin considerar el factor de tamaño c_t en su cálculo. Para incorporar dicho factor, es necesario multiplicar la resistencia a la fatiga corregida sin este factor por el factor de tamaño, según lo indicado en [21]. El procedimiento para el cálculo de este factor no se incluye en este documento debido a limitaciones de espacio, pero se sigue el procedimiento descrito en la referencia mencionada.
8. **Cálculo del factor de seguridad en el punto b respecto a la fatiga por esfuerzos combinados:** Utilizando la Ec.1.4, y con los valores calculados hasta el momento, junto con la resistencia última del material, que se encuentra en la Tabla B.1, se determina el factor de seguridad en el punto b, el cual resulta ser $N_{F P_b EE} = 1.18$.

D.2.2. Cálculo del factor de seguridad frente a fatiga debido a esfuerzos combinados en el punto c

1. **Determinación de los momentos flectores debidos a las fuerzas de peso y transmisión en el punto c:** A partir de los diagramas de momento flector, se determinan los momentos inducidos por las fuerzas de peso y de transmisión en el punto c .
2. **Determinación de las magnitudes del par torsor en el punto c:** El análisis del par torsor de entrada y salida indica que tanto la componente media como la alternante del par torsor se mantienen constantes respecto al punto b , ya que el par torsor se conserva a lo largo del árbol.
3. **Determinación de los momentos flectores totales en el punto c:** En este punto, las cargas de peso y transmisión generan momentos flectores en las direcciones radial y tangencial, respectivamente. Para obtener la magnitud máxima del momento resultante, estos se combinan mediante el teorema de Pitágoras.

Se calculan los momentos alternantes y medios en ambas direcciones: $M_{\text{Radiales Alternante } P_c}$ y $M_{\text{Radiales Medio } P_c}$ en la radial, así como $M_{\text{Tangenciales Entrada Alternante } P_c}$ y $M_{\text{Tangenciales Entrada Medio } P_c}$ en la tangencial. Los valores correspondientes se presentan en la Tabla E.22. Obteniendo finalmente la magnitud de los momentos alternantes y medios totales presentes en el punto c , el valor de dicho momento esta expuesto también en la mencionada tabla.

4. **Cálculo del factor de concentración de esfuerzos K_f y del factor de concentración de esfuerzos por fatiga debida a esfuerzos cortantes K_{fs} :** En el análisis del punto c , no se identifican concentradores de esfuerzo adicionales, por lo que se adoptan los factores de concentración estándar $K_f = 1$ y $K_{fs} = 1$.
5. **Cálculo de los esfuerzos equivalentes de Von Mises alternante y medio en el punto c:** Utilizando los valores calculados previamente, se determina el esfuerzo equivalente de Von Mises mediante la Ec.1.5, obteniendo los esfuerzos alternante $\sigma'_{\text{Alternante } P_c}$ y medio $\sigma'_{\text{Medio } P_c}$. Las magnitudes de estos esfuerzos se presentan en la Tabla E.22.
6. **Cálculo del factor de seguridad en el punto c:** Dado que se trabaja con el mismo árbol y material que en el punto b , los valores de la resistencia corregida a la fatiga y la resistencia última del material, definidos para el punto b , son los mismos para este punto. Utilizando estos valores y la Ec.1.4, se calcula el factor de seguridad en el punto c , el cual resulta ser $N_{F P_c EE} = 4.72$.

D.2.3. Cálculo del factor de seguridad frente a fatiga debido a esfuerzos combinados en el punto d

1. **Determinación de las magnitudes del par torsor en el punto d:** Se establece que las condiciones de par torsor, tanto en su componente alternante como media, son equivalentes a las del punto anterior, manteniéndose constantes en los puntos siguientes.
2. **Determinación de los momentos flectores totales en el punto d:** En este punto, las fuerzas de peso y de transmisión generan momentos flectores en las direcciones radial y tangencial. El procedimiento seguido para obtener los momentos alternantes y medios es análogo al descrito previamente, y todos los valores correspondientes, incluidos los momentos flectores totales en el punto d , se presentan en la Tabla E.23.
3. **Cálculo del factor de concentración de esfuerzos K_f y el factor de concentración de esfuerzos cortantes K_{fs} :** En el análisis del punto d , se identifican concentradores de

esfuerzos equivalentes a los del punto b . Por lo tanto, se adoptan los factores de concentración $K_f = 3.07$ y $K_{fs} = 2.05$.

4. **Cálculo de los esfuerzos equivalentes de Von Mises alternante y medio en el punto d :** Con los valores calculados hasta el momento, se determina el esfuerzo equivalente de Von Mises mediante la Ec.1.5, obteniendo los esfuerzos alternante $\sigma'_{\text{Alternante } P_d}$ y medio $\sigma'_{\text{Medio } P_d}$. Las magnitudes de estos esfuerzos se presentan en la Tabla E.23.
5. **Cálculo del factor de seguridad en el punto d :** Dado que se utiliza el mismo árbol y el mismo material que en el punto b , los valores de la resistencia corregida a la fatiga y la resistencia última del material, definidos previamente, son los mismos para este punto. Utilizando estos valores y aplicando la Ec.1.4, se calcula el factor de seguridad en el punto d , resultando en $N_{F P_d EE} = 2.36$.

D.2.4. Cálculo del factor de seguridad frente a fatiga debido a esfuerzos combinados en los puntos f y g

En el punto f , se calcula el factor de seguridad considerando que, aunque las componentes de fuerza son las mismas que en el punto b , la longitud sobre la cual se aplican varía. En este caso, la longitud es igual al ancho de la turbina, $EspTur = 15$ cm.

1. **Determinación de las magnitudes del par torsor en el punto f :** El par torsor se mantiene igual que en el punto b , tal como se mencionó anteriormente.
2. **Determinación de los momentos flectores totales en el punto f :** Al igual que en los puntos anteriores, las fuerzas debido al peso de la turbina y las fuerzas generadas por la transmisión del par torsor a través del árbol generan momentos flectores en las direcciones radial y tangencial. Estos momentos se calculan a partir de los diagramas de momento flector y se combinan mediante el teorema de Pitágoras. Así, se obtienen los momentos alternante $M_{\text{Alternante } P_f}$ y medio total $M_{\text{Medio } P_f}$ en dicho punto, cuyos valores se presentan en la Tabla E.24.
3. **Cálculo del factor concentrador geométrico de esfuerzos K_t y el factor concentrador geométrico de esfuerzo debido a esfuerzos cortantes K_{ts} :** En este punto, dado que existe una cuña, es necesario calcular estos factores considerando este efecto. Según la referencia [47], y conociendo el radio del cuñero $r_{cu} = 0.58$ mm, el factor geométrico de concentración es $K_t = 2.17$ y el factor para esfuerzos cortantes es $K_{ts} = 2.59$.
4. **Cálculo de la sensibilidad a la muesca del material del árbol debido a la muesca por cuñero:** Conociendo que el radio de la muesca corresponde al radio del cuñero, y que dicho valor es proporcionado por el algoritmo, se calcula la sensibilidad a la muesca q del material utilizando la Ec.A.16. De donde se obtiene $q = 0.65$.
5. **Cálculo de los factores de concentración de esfuerzos por fatiga K_f y por fatiga debida a esfuerzos cortantes K_{fs} :** Con el valor de la sensibilidad a la muesca q , se determinan los factores efectivos de concentración de esfuerzos, resultando en $K_f = 1.76$ y $K_{fs} = 2.03$, los cuales se calculan a través de la Ec.A.15.
6. **Cálculo de los esfuerzos equivalentes de Von Mises alternante y medio en el punto f :** Considerando los momentos calculados y los valores constantes del par torsor alternante y medio en el árbol, se calcula el esfuerzo equivalente de Von Mises utilizando la Ec.1.5, cuyos valores se presentan en la Tabla E.24.

7. **Cálculo del factor de seguridad en el punto f :** Siguiendo el mismo procedimiento que en los otros puntos, y teniendo en cuenta que se trabaja con el mismo material, se calcula un factor de seguridad de $N_{F P_f EE} = 2.12$.
8. **Cálculo del factor de seguridad en el punto g :** Aplicando el mismo procedimiento mostrado hasta el momento en esta subsección, se puede concluir que el factor de seguridad en el punto g es $N_{F P_g EE} = 2.48$.

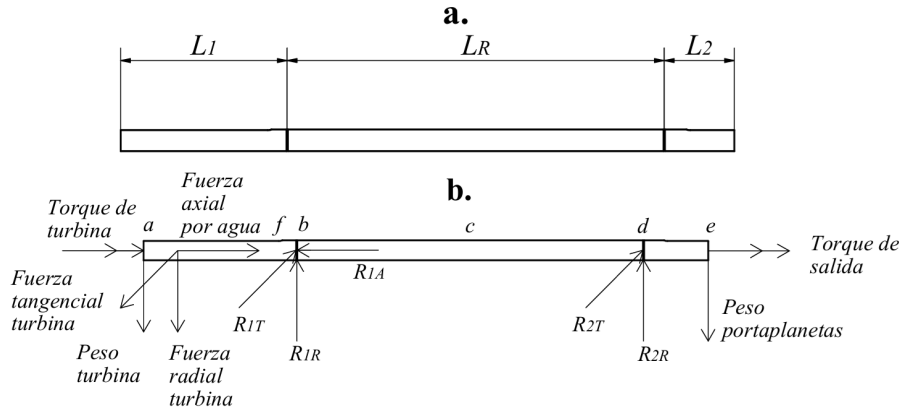


Figura D.2: **a.** Bosquejo del árbol de entrada con algunas de sus medidas principales en terminos de variables. **b.** Diagrama de fuerzas correspondiente al árbol de entrada para el caso particular de análisis. Se identifican los puntos relevantes donde se evaluarán los factores de seguridad y las deflexiones, con el objetivo de caracterizar el comportamiento estructural del árbol bajo las condiciones de carga consideradas.

Deflexiones en el árbol: Una vez determinados los factores de seguridad en los puntos críticos del árbol, se procede al cálculo de las deflexiones en las regiones donde, según suposiciones del autor, se espera una mayor deformación. Utilizando la Ec.1.7 y conociendo las funciones de momento flector en las direcciones radial y tangencial, generadas por el peso y el par torsor de entrada respectivamente, se obtiene la deflexión total mediante la suma pitagórica de ambas componentes. Los resultados son: $\delta_a = 0.25$ mm, $\delta_c = 0.06$ mm y $\delta_e = 0.48$ mm.

D.3. Cálculo de factores de seguridad para el portaplanetas

1. **Determinación de las fuerzas que actúan sobre los portaplanetas:** Se identifica que sobre las vigas de los portaplanetas actúan dos tipos de fuerzas: la primera corresponde al peso de los engranajes planetarios, y la segunda a la transmisión de fuerzas entre los engranajes planetarios, el engranaje solar y el anular.
2. **Determinación de la naturaleza de las fuerzas:** Debido al comportamiento de la viga durante la operación, se considera que estas fuerzas son variables en el tiempo.
3. **Determinación de las componentes alternantes y medias de las fuerzas:** Para el análisis de fatiga, las fuerzas se descomponen en sus componentes alternante y media utilizando la Ec.1.6.

Para las fuerzas debidas al peso, se considera que la fuerza máxima corresponde al peso del engranaje y la mínima al mismo valor con signo opuesto, basándose en el comportamiento del engranaje sobre la viga de soporte. El peso del engranaje se estima aproximadamente a partir de su diámetro primitivo y del material del componente, obteniéndose un valor de 16.42 N para la primera etapa.

De forma análoga, se calcula el peso de los engranajes para la segunda etapa. Las fuerzas alternantes y medias correspondientes a ambas etapas se presentan en la Tabla E.12.

Para las fuerzas debidas a la transmisión de potencia entre etapas, también se aplica la Ec.1.6. En la primera etapa, la fuerza máxima se determina como el producto del factor de carga $K_A = 1.35$ y la fuerza nominal $F_1 = 268.24 \text{ N}$, mientras que la fuerza mínima se iguala a F_1 . Este factor se obtiene según la norma ISO 6336-1, que establece que las fuerzas transmitidas a través de una turbina pueden variar hasta un 35 % respecto a su valor nominal.

Para la segunda etapa, se sigue un procedimiento análogo, obteniéndose $F_2 = 46.72 \text{ N}$. Los valores de las fuerzas alternantes y medias para cada etapa se muestran en la Tabla E.13.

4. **Determinación del diagrama de cuerpo libre de la viga del portaplanetas:** Con el fin de obtener los diagramas de momento flector y otras características relevantes para el diseño de la viga, se realiza un análisis de cuerpo libre de la misma. El diagrama correspondiente se presenta en la Fig.D.3.b.

Una vez determinadas las fuerzas actuantes, se procede al cálculo de los esfuerzos en seis puntos distribuidos a lo largo de la viga, con el objetivo de evaluar el factor de seguridad en cada uno de ellos. El análisis se centra en regiones representativas, tales como la zona media de la viga y en el inicio de la condición de empotramiento asumida. Solo se analiza uno de los empotramientos, dado que la viga presenta simetría en su geometría y condiciones de carga. Los puntos evaluados se ilustran en la Fig.D.3.a, denominándose como P_1 hasta P_6 .

Para el cálculo de los factores de seguridad es necesario conocer la geometría completa de la viga. Los valores obtenidos del algoritmo indican un diámetro nominal de viga $d_{Viga} = 9 \text{ mm}$ y un diámetro efectivo $d_{EfeViga} = 8.91 \text{ mm}$. Se define además que tanto la viga como el portaplanetas están fabricados en acero AISI 1060, aplicable tanto para la primera como para la segunda etapa.

A continuación, se procede con el análisis específico correspondiente al portaplanetas ubicado en el árbol de entrada:

D.3.1. Cálculo del factor de seguridad en el punto P_1

1. **Determinación de los efectos de las fuerzas sobre el punto P_1 :** En el punto P_1 , ubicado en la transición entre el diámetro efectivo $d_{EfeViga}$ y el diámetro nominal d_{Viga} (ver Fig. D.3.a), la fuerza debida al peso del engranaje actúa como carga flectora, mientras que la fuerza de transmisión se comporta como carga cortante.
2. **Cálculo de los momentos de flexión alternantes y medios:** Con las variables calculadas hasta este momento y calculando el diagrama de momentos flectores, para estimar el momento flector sobre la sección analizada, se calculan los momentos flectores alternantes y medios.
3. **Cálculo de los factores de concentración geométrica de esfuerzos:** Se determina el factor de concentración geométrica de esfuerzos K_t y el factor de concentración para esfuerzos cortantes K_{ts} a partir de las tablas presentadas en la referencia [46].
4. **Cálculo de la sensibilidad a la muesca q en el punto analizado:** Conociendo que el radio de la muesca corresponde al radio de transición entre d_{Viga} y $d_{EfeViga}$, $r = 0.045 \text{ mm}$, se calcula la sensibilidad a la muesca q del material usando la Ec.A.16, considerando las propiedades del acero AISI 1060, expuestas en la Tabla B.1.
5. **Cálculo de los factores de concentración de esfuerzos por fatiga:** Utilizando la Ec.A.15 y los valores de K_t , K_{ts} y q , se determinan los factores de concentración de esfuerzos por fatiga K_f y K_{fs} , obteniéndose $K_f = 1.40$ y $K_{fs} = 1.39$.

6. **Cálculo de esfuerzos de flexión y cortantes alternantes y medios:** Con los factores de concentración por fatiga, el diámetro de la viga y los momentos flectores alternante y medio en el punto, se calculan los esfuerzos de flexión σ utilizando la Ec.A.6.

De forma análoga, se calculan los esfuerzos cortantes alternante $\tau_{\text{Alternante}}$ y medio τ_{Medio} mediante la Ec.A.8. Los resultados se presentan en la Tabla E.14.

7. **Cálculo del esfuerzo equivalente de Von Mises alternante y medio:** Con los valores de esfuerzos por flexión y cortantes, se calcula el esfuerzo equivalente de Von Mises tanto para la componente alternante $\sigma'_{\text{Alternante}}$ como para la media σ'_{Medio} , utilizando la Ec.A.13. Los resultados se presentan en la Tabla E.14.
8. **Cálculo de la resistencia a la fatiga corregida del material:** En la Tabla B.1 se presentan las resistencias a la fatiga corregidas para los materiales seleccionables por el algoritmo, sin tener en cuenta el factor de tamaño. Para tener en cuenta el factor de tamaño c_t en la resistencia corregida, se multiplica la resistencia sin este factor por c_t , siguiendo lo indicado en [21].
9. **Cálculo del factor de seguridad en el punto P1:** Finalmente, utilizando la Ec.1.4 y considerando las propiedades del material definido (acero AISI 1060), se obtiene el factor de seguridad en el punto $P1$ como $N_{FP1 E1} = 14.58$.

D.3.2. Cálculo del factor de seguridad en el punto P2

1. **Determinación de los efectos de las fuerzas sobre el punto P2:** En el punto $P2$, ubicado en la transición entre $d_{EfeViga}$ y d_{Viga} (ver Fig.D.3.a), la fuerza debida al peso actúa como carga cortante, mientras que la fuerza de transmisión se manifiesta como carga flectora.
2. **Cálculo de esfuerzos de flexión y cortantes alternantes y medios:** Dado que el punto $P2$ se encuentra en la misma sección transversal y sobre la misma muesca que el punto $P1$, los factores de concentración de esfuerzos por fatiga K_f y K_{fs} son iguales a los calculados previamente. Siguiendo el procedimiento descrito para $P1$, se determinan los esfuerzos flectores σ y cortantes τ alternantes y medios, cuyos valores se presentan en la Tabla E.15.
3. **Cálculo del esfuerzo equivalente de Von Mises alternante y medio:** Con los esfuerzos de flexión y cortantes calculados, se obtiene el esfuerzo equivalente de Von Mises para las componentes alternante $\sigma'_{\text{Alternante}}$ y media σ'_{Medio} en el punto $P2$. Los resultados se muestran en la Tabla E.15.
4. **Cálculo del factor de seguridad en el punto P2:** Aplicando la Ec.1.4 y considerando que se emplea el mismo material y sección transversal que en el punto $P1$, se utiliza la resistencia corregida a la fatiga obtenida anteriormente. Con las variables calculadas hasta este momento y la resistencia última del material (ver Tabla B.1), se determina el factor de seguridad en $P2$, obteniéndose $N_{FP2 E1} = 1.64$.

D.3.3. Cálculo del factor de seguridad en el punto P3

1. **Determinación de los efectos de las fuerzas sobre el punto P3:** En el punto $P3$, ubicado en la transición entre $d_{EfeViga}$ y d_{Viga} (ver Fig.D.3.a), tanto la fuerza de peso como la fuerza de transmisión generan esfuerzos de flexión y cortantes sobre la sección analizada.
2. **Cálculo de esfuerzos de flexión y cortantes alternantes y medios:** Dado que $P3$ se encuentra en la misma sección transversal y sobre la misma muesca que $P1$, los factores

de concentración de esfuerzos por fatiga K_f y K_{fs} toman los mismos valores calculados previamente.

Se realiza un análisis separado de los esfuerzos generados por cada fuerza (peso y transmisión) y posteriormente se suman sus componentes respectivas, ya que ambas fuerzas actúan en la misma dirección a lo largo del eje de la viga.

Los esfuerzos generados por la fuerza de peso se calculan utilizando las Ec. A.6 y A.8, y los resultados se presentan en la Tabla E.16.

De manera análoga, se calculan los esfuerzos debidos a la fuerza de transmisión, cuyos valores también se encuentran en la Tabla E.16. Finalmente, al combinar los esfuerzos de ambas fuerzas, se obtienen los esfuerzos flectores alternantes y medios, así como los esfuerzos cortantes.

3. **Cálculo del esfuerzo equivalente de Von Mises alternante y medio:** Con los esfuerzos flectores y cortantes totales, dispuestos en la Tabla E.16, se determina el esfuerzo equivalente de Von Mises para las componentes alternante $\sigma'_{\text{Alternante}}$ y media σ'_{Medio} mediante la Ec.A.13. Los valores obtenidos se presentan en la Tabla E.16.
4. **Cálculo del factor de seguridad en el punto P3:** Aplicando la Ec.1.4 y considerando que se utiliza el mismo material y la misma sección transversal que en $P1$ y $P2$, se emplea la resistencia corregida a la fatiga calculada previamente. Con todas las variables conocidas y la resistencia última del material (ver Tabla B.1), se determina el factor de seguridad en $P3$, obteniéndose $N_{F P3 E1} = 2.20$.

D.3.4. Cálculo del factor de seguridad en los puntos $P4$, $P5$ y $P6$

1. **Cálculo del factor de seguridad en el punto P4:** En el punto $P4$, ubicado en la sección media de la viga (ver Fig.D.3.a), la fuerza de peso genera esfuerzos de flexión y la fuerza de transmisión produce esfuerzos cortantes.

En este punto no existen concentradores de esfuerzo, por lo que se consideran $K_f = 1$ y $K_{fs} = 1$.

Siguiendo el procedimiento descrito para $P1$, se calculan los esfuerzos flectores y cortantes alternantes y medios, cuyos valores se presentan en la Tabla E.17 (ver anexos).

A partir de estos resultados, se determina el factor de seguridad en $P4$, obteniéndose $N_{F P4 E1} = 18.26$.

2. **Cálculo del factor de seguridad en el punto P5:** En el punto $P5$, la fuerza de peso actúa como carga cortante y la de transmisión como carga flectora. Dado que no existen concentradores de esfuerzo, se toman $K_f = 1$ y $K_{fs} = 1$.

Siguiendo un procedimiento análogo al de $P1$, se calculan los esfuerzos alternantes y medios, y los resultados se presentan en la Tabla E.18.

Con base en estos esfuerzos, se determina el factor de seguridad en $P5$, obteniéndose $N_{F P5 E1} = 3.29$.

3. **Cálculo del factor de seguridad en el punto P6:** En el punto $P6$, ambas fuerzas (peso y transmisión) generan simultáneamente esfuerzos flectores y cortantes, por lo que se sigue un procedimiento similar al expuesto en el punto $P3$.

Se realiza un análisis separado de los esfuerzos debidos a la fuerza de peso y los debidos a la fuerza de transmisión, cuyos resultados se presentan en la Tabla E.19.

Al combinar adecuadamente las componentes, se obtienen los esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios.

Finalmente, con estos valores y considerando la resistencia última del material (ver Tabla B.1) y la resistencia corregida a la fatiga, se calcula el factor de seguridad en P_6 , obteniéndose $N_{FP6E1} = 4.40$.

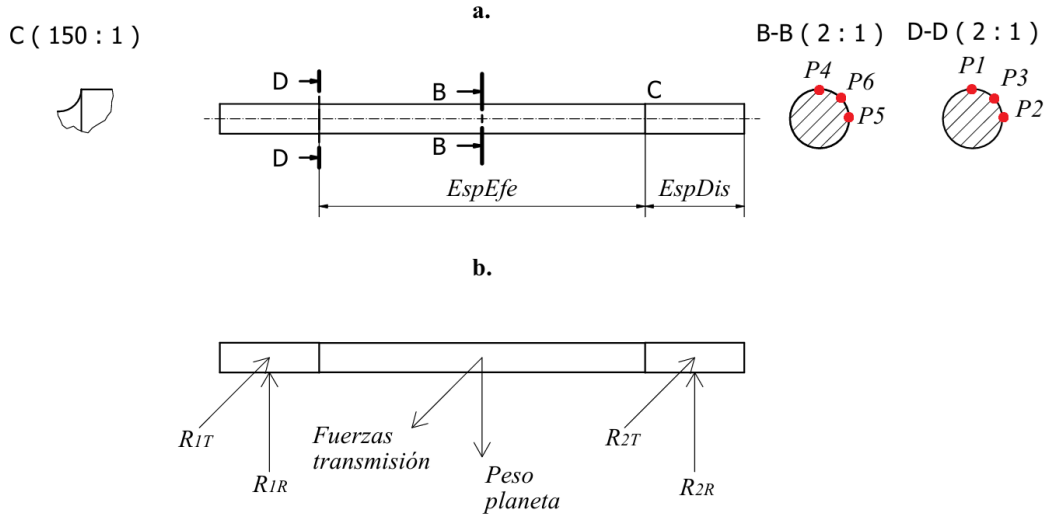


Figura D.3: a. Bosquejo de la viga perteneciente al portaplanetas. Se presentan las secciones transversales donde se realiza el análisis de esfuerzos, identificando los puntos específicos sobre la viga correspondiente a la primera etapa. Se destaca una vista en detalle que muestra una muesca, la cual justifica el análisis en esa ubicación. b. Diagrama de fuerzas donde se detallan las fuerzas externas a las que está sometida la viga, con el fin de caracterizar adecuadamente el estado de carga para el análisis estructural.

Deflexiones en la viga: Por otra parte, como se observa en la Fig. D.3, es correcto asumir que la deflexión máxima se presenta en la sección media de la viga, al modelarse ésta como una viga doblemente empotrada. Con la ayuda de la Ec.1.7, se calcula la deflexión generada por las fuerzas de transmisión y por las fuerzas de peso. Dado que estas fuerzas actúan en direcciones perpendiculares, la deflexión total se determina mediante el teorema de Pitágoras. Las fuerzas de peso producen una deflexión de $\delta_{Peso} = 3.07 \times 10^{-3} \text{ mm}$ mientras que las fuerzas de transmisión generan una deflexión de $\delta_{Transmision} = 1.36 \times 10^{-1} \text{ mm}$. Por lo tanto, la deflexión total de la viga resulta $\delta = 1.36 \times 10^{-1} \text{ mm}$.

Los seis factores de seguridad calculados en esta sección fueron todos mayores a 1.1, cumpliendo con los requisitos establecidos por el protocolo. Por consiguiente, se puede afirmar que las vigas fueron diseñadas correctamente para soportar la fatiga ocasionada por esfuerzos combinados.

D.3.5. Cálculo del factor de seguridad frente a esfuerzos de aplastamiento de los discos del portaplanetas

Para el cálculo del factor de seguridad frente al aplastamiento de los discos del portaplanetas, se procede de la siguiente manera:

1. **Determinación de diagramas de fuerza sobre área de análisis:** En la Fig.D.4 se muestra el diagrama de todas las fuerzas que actúan sobre el área de análisis, destacándose el área de interés, mediante sombreado en la figura correspondiente. Permitiendo esto determinar el factor de seguridad frente al aplastamiento del disco.
2. **Calculo de fuerzas de aplastamiento operantes en la sección de análisis:** Sobre la sección de análisis actúan las fuerzas de peso generadas por el peso de los engranajes, el peso de la viga que soporta los engranajes y las fuerzas debidas a la transmisión de par tursor a lo largo de los engranajes.

Realizándose un análisis dinámico sobre el subsistema planetario compuesto solo de los engranajes y el portaplanetas, se puede determinar que la fuerza de transmisión debida al par tursor sobre las vigas de soporte de los engranes es igual al doble de la fuerza presente en los engranajes de los dientes, calculada mediante la Ec.1.3.

Debido a que el factor de seguridad debido a esfuerzos de aplastamiento se calcula con las fuerzas máximas que se presentan en el componente, y sabiendo que el par tursor puede variar hasta en un 35 %, se calcula la fuerza máxima debida a fuerzas de transmisión para la primera etapa, obteniéndose $F_{\text{transmisión E1}} = 724.24 \text{ N}$, cuyo valor debe ser dividido por 2, pues son dos áreas idénticas las que soportan los esfuerzos de aplastamiento, cómo se observa en la Fig.D.4, así $F_{\text{Aplastamiento Disco E1}} = 362.12 \text{ N}$.

Por otro lado, en las fuerzas de peso, no solo se considera el peso del engranaje planetario, sino también el peso de la viga. Esta última tiene un peso de 0.6 N, calculada a partir de la geometría y la densidad del material de la viga. Dicho valor debe ser dividido entre 2, por las cuestiones ya mencionadas anteriormente, teniéndose un peso de 0.3 N soportado por el área de aplastamiento.

Asimismo, el peso del engranaje planetario, calculado a través de su diámetro primitivo y su ancho, se puede determinar como $F_{\text{Peso Engrane}} = 33.48 \text{ N}$, valor que es dividido por dos, obteniéndose 16.44 N.

Dado que el peso de la viga y el engranaje van en la misma dirección, se pueden sumar obteniéndose una fuerza de peso total sobre el área del disco a evaluarse de $F_{\text{Peso Disco}} = 16.74 \text{ N}$.

3. **Estimación de fuerza de aplastamiento total presente en el área de aplastamiento:** Para la obtención de esta fuerza, se deben sumar de manera pitagórica la fuerza generada por los pesos $F_{\text{Peso Disco}}$ y la fuerza generada por la transmisión $F_{\text{Transmisión Disco}}$, obteniéndose una fuerza de aplastamiento sobre el disco de $F_{\text{Aplastamiento Disco}} = 362.506 \text{ N}$.
4. **Estimación del área de aplastamiento:** El área de contacto se estima como el producto entre el diámetro del orificio donde se posiciona la viga y el espesor del disco. El algoritmo propone un espesor de 30 mm, y debido a que el diámetro del orificio es el mismo diámetro de la viga, se obtiene un área de aplastamiento de $A_{\text{Aplastamiento}} = 270 \text{ mm}^2$.
5. **Estimación del esfuerzo de aplastamiento:** Con la Ec.A.11, se determina un esfuerzo de aplastamiento de $\sigma_{\text{Aplastamiento}} = 1.34 \text{ MPa}$.
6. **Estimación del factor de seguridad de aplastamiento del disco:** Conocido el material del portaplanetas, que es el mismo del material de la viga de sujeción, se puede determinar de la Tabla B.1 la resistencia a la fluencia del material. Utilizando la Ec.A.12, se obtiene un factor de seguridad frente al aplastamiento de $N_{F \text{ Aplastamiento}} = 318.65$.

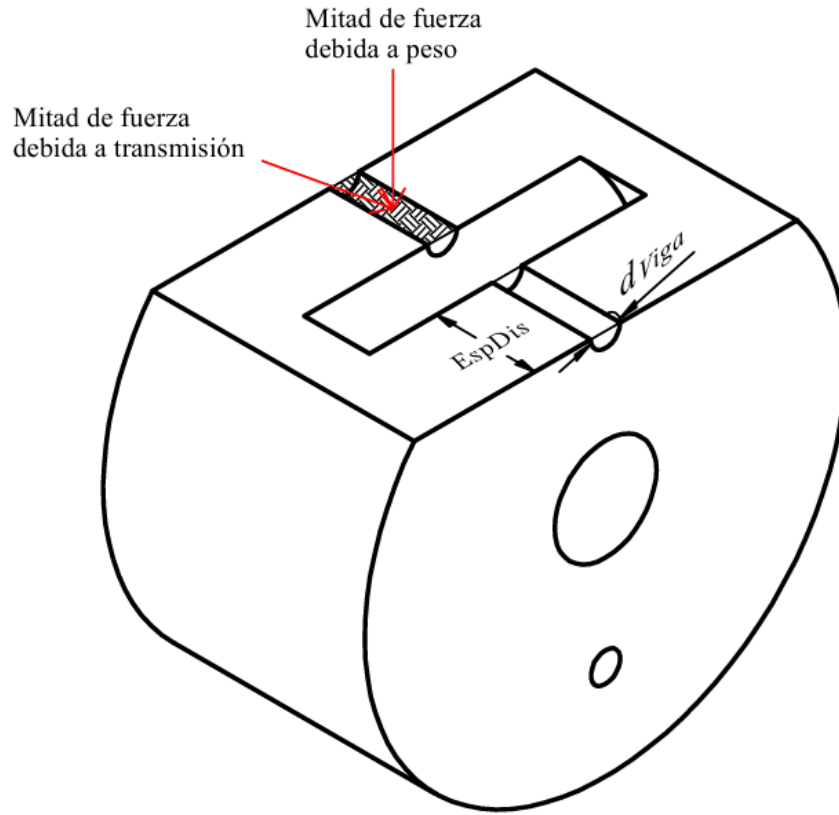


Figura D.4: Área de análisis sobre los discos, la cual estará sometida a fuerzas de aplastamiento. Las dimensiones de esta zona se muestran en la figura.

D.3.6. Cálculo del factor de seguridad en la manzana del portaplanetas

Cálculo del factor de seguridad en el punto $PB1$ perteneciente a la manzana del portaplanetas

El cálculo del factor de seguridad sobre la manzana del portaplanetas se realiza en los puntos $PB1$ y $PB2$ representados en la Fig.D.5. Estos puntos se seleccionan debido a que presentan las mayores concentraciones de esfuerzos provocadas por cambios abruptos en la geometría; por tanto, su correcto dimensionamiento asegura que la manzana no falle bajo las condiciones de operación previstas.

1. **Elaboración del diagrama de fuerzas sobre la manzana del portaplanetas:** En la Fig.D.6 se representan las fuerzas y pares torsores que actúan sobre la manzana del portaplanetas de la primera etapa. Este diagrama permite la evaluación precisa de los esfuerzos en los puntos críticos $PB1$ y $PB2$.
2. **Determinación de las fuerzas y pares torsores sobre el punto $PB1$:** De la Fig.D.6 se identifica que el punto $PB1$ está sometido exclusivamente a esfuerzos torsionales generados por el par torsor de entrada proveniente de la turbina.
3. **Cálculo del factor geométrico de concentración de esfuerzos cortantes K_{ts} :** Considerando las dimensiones propuestas por el algoritmo, $d_{Brazo} = 42$ mm y $r_{Brazo} = 6.3$ mm (ver Fig.2.11), y mediante la referencia [46], se determina el factor geométrico de concentración de esfuerzos cortantes, obteniéndose $K_{ts} = 1.36$.

4. **Cálculo de la sensibilidad a la muesca q :** En el punto $PB1$, la muesca corresponde a la transición de diámetro entre la manzana y el portaplanetas. Con un radio de muesca $r_{Brazo} = 6.3\text{mm}$ y considerando el material acero AISI 1060, la sensibilidad a la muesca se determina a partir de la Tabla B.1 y la Ec.A.16, resultando $q = 0.85$.
5. **Cálculo del factor de concentración de esfuerzos debido a fatiga K_{fs} :** Mediante la Ec.A.15 y con los valores de K_{ts} y q previamente calculados, se obtiene $K_{fs} = 1.30$.
6. **Determinación de los esfuerzos en el punto $PB1$:** Considerando la manzana como un cilindro hueco de diámetro externo $d_{Brazo} = 42\text{ mm}$ e interno $d_{Eje} = 28\text{mm}$, los esfuerzos cortantes generados por el par tisor se calculan mediante la Ec.A.10. Los valores de esfuerzos alternantes $\tau_{\text{Alternante Portaplanetas PB1}}$ y medios $\tau_{\text{Medio Portaplanetas PB1}}$ se presentan en la Tabla E.25.
7. **Cálculo de los esfuerzos equivalentes de Von Mises en el punto de análisis:** Aplicando la Ec.1.18, se obtienen los esfuerzos de Von Mises alternantes $\sigma'_{\text{Alternante Portaplanetas PB1}}$ y medios $\sigma'_{\text{Medio Portaplanetas PB1}}$ en la ubicación analizada, cuyos valores se muestran en la Tabla E.25.
8. **Cálculo de la resistencia a la fatiga corregida del material:** La Tabla B.1 presenta la resistencia a la fatiga de los materiales que puede seleccionar el algoritmo para la asignación de piezas, sin considerar el factor de tamaño c_t . Para tener en cuenta este factor, se multiplica la resistencia a la fatiga del acero AISI 1060 por c_t , según lo indicado en [21].
9. **Cálculo del factor de seguridad en el punto $PB1$:** Con base en la Ec.1.4 y considerando las propiedades del material y los esfuerzos de Von Mises calculados, se determina el factor de seguridad frente a fatiga por esfuerzos cortantes en esta zona del portaplanetas, obteniéndose $N_{F\text{ PB1}} = 30.30$.

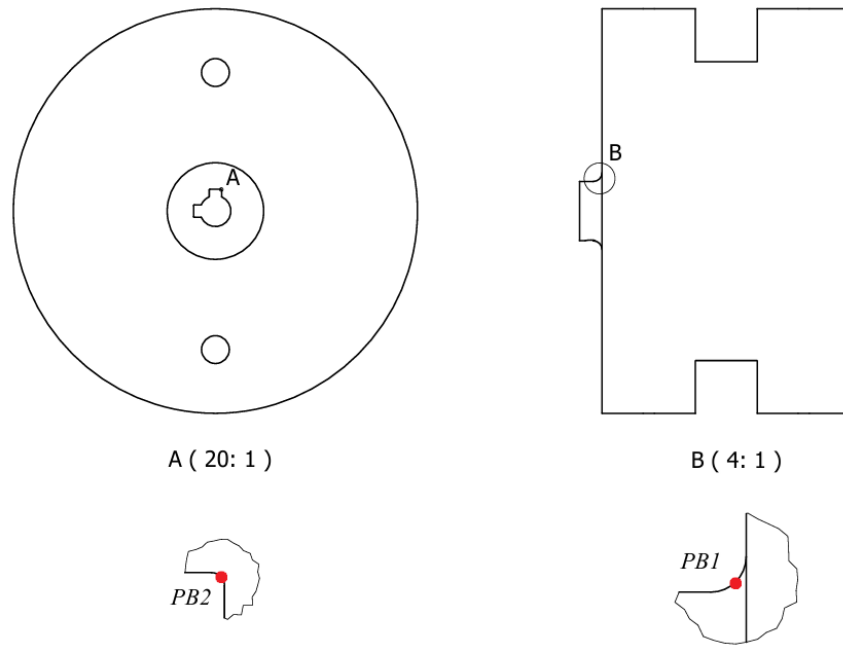


Figura D.5: Esquema de localización de puntos críticos adicionales en los portaplanetas que requieren un análisis detallado.

Cálculo del factor de seguridad en el punto $PB2$ perteneciente a la manzana del portaplanetas

De manera análoga al análisis del punto $PB1$, se evalúa la zona de transmisión de par torsor mediante la cuña, denominada $PB2$:

1. **Determinación de las fuerzas y pares torsores sobre el punto $PB2$:** De la Fig.D.6 se observa que el punto $PB2$ está sometido únicamente a esfuerzos torsionales generados por el par torsor de entrada proveniente de la turbina.
2. **Cálculo del factor geométrico de concentración de esfuerzos cortantes K_{ts} :** Conociendo las dimensiones propuestas por el algoritmo para el radio de cuñero r_{cu} (ver Fig.2.11), con $r_{cu} = 0.58$ mm, y utilizando la referencia [47], se determina un factor de concentración de esfuerzos cortantes $K_{ts} = 3.37$.
3. **Cálculo de la sensibilidad a la muesca q :** En $PB2$, la muesca corresponde al radio del cuñero que permite la transmisión de par torsor entre el árbol y la manzana del portaplanetas. Con $r_{cu} = 0.58$ mm y considerando el material AISI 1060, se obtiene la sensibilidad a la muesca $q = 0.63$, según la Tabla B.1 y la Ec.A.16.
4. **Cálculo del factor de concentración de esfuerzos debido a fatiga K_{fs} :** Mediante la Ec.A.15, utilizando los valores de K_{ts} y q calculados previamente, se obtiene un factor de concentración de esfuerzos debido a fatiga $K_{fs} = 2.49$.
5. **Determinación de los esfuerzos presentes en el punto $PB2$:** Al igual que en $PB1$, se considera la manzana como un cilindro hueco de diámetro externo $d_{Brazo} = 42$ mm e interno $d_{Eje} = 28$ mm. Los esfuerzos cortantes generados por el par torsor se calculan mediante la Ec.A.10. Los valores de los esfuerzos alternantes $\tau_{\text{Alternante Portaplanetas PB2}}$ y medios $\tau_{\text{Medio Portaplanetas PB2}}$ se presentan en la Tabla E.25.
6. **Cálculo de los esfuerzos equivalentes de Von Mises en el punto de análisis:** Aplicando la Ec.1.18, se obtienen los esfuerzos de Von Mises alternantes $\sigma'_{\text{Alternante Portaplanetas PB2}}$ y medios $\sigma'_{\text{Medio Portaplanetas PB2}}$ en la ubicación analizada. Sus valores se muestran en la Tabla E.25.
7. **Cálculo del factor de seguridad en el punto $PB2$:** Con base en la Ec.1.4, considerando las propiedades del material AISI 1060 y los esfuerzos de Von Mises calculados, se determina el factor de seguridad frente a fatiga por esfuerzos cortantes en esta zona del portaplanetas, obteniéndose $N_F \text{ PB2} = 15.83$.

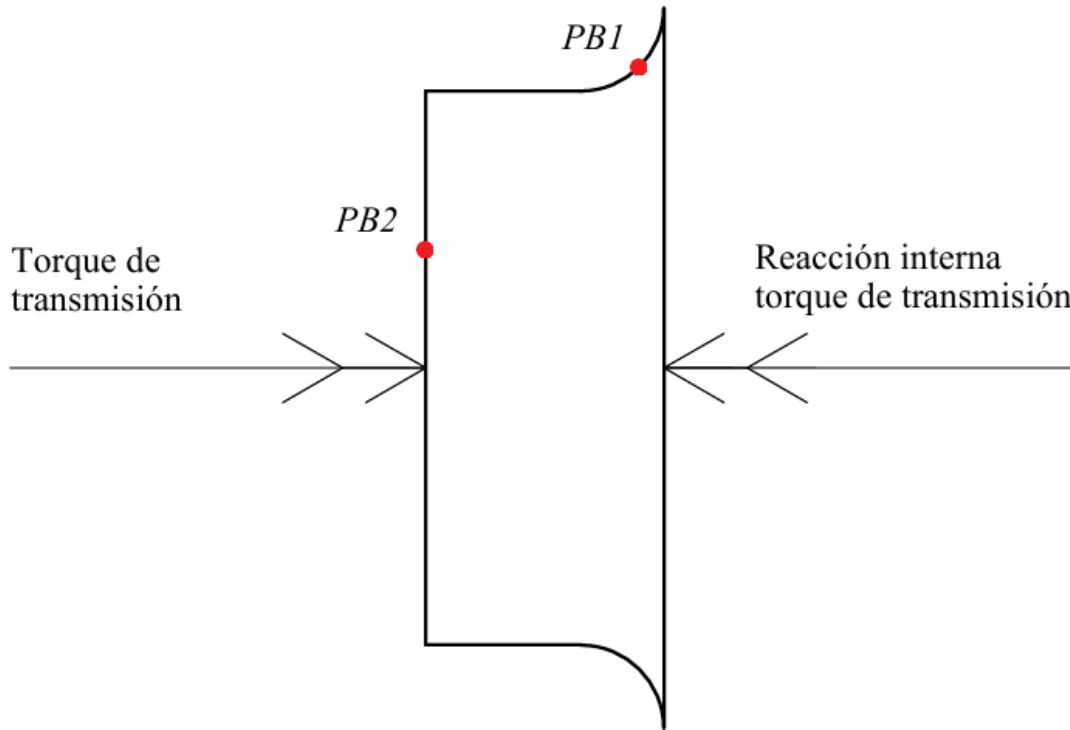


Figura D.6: Diagrama de fuerzas y pares torsores que actúan sobre la manzana del portaplanetas. Se considera una sección del portaplanetas, por lo que la reacción analizada corresponde a la generada internamente dentro del cuerpo del portaplanetas.

D.4. Cálculo de factores de seguridad en las cuñas del sistema propuesto

La primera cuña, ubicada en el extremo izquierdo del árbol de entrada del sistema, está fabricada en hierro clase 40 (fundición gris), material seleccionado mediante el algoritmo de diseño, y presenta dimensiones $b_{cu} = 8$ mm, $h_{cu} = 7$ mm y $L_{ngCu1} = 150$ mm. Su función principal es la transferencia de par torsor entre la turbina y el sistema. Con estas características, se procederá al cálculo del factor de seguridad frente a fatiga por esfuerzos cortantes y de aplastamiento mediante el siguiente procedimiento:

D.4.1. Cálculo del factor de seguridad frente a esfuerzos cortantes en la primera cuña

1. **Diagrama de fuerzas sobre la cuña:** En la Fig.D.7.a se presenta el diagrama de fuerzas que actúan sobre la cuña, lo cual permite identificar las magnitudes y direcciones de las fuerzas presentes, así como las áreas donde se generan los distintos tipos de esfuerzos.
2. **Cálculo del área de aplicación del esfuerzo:** El área sobre la que actúan los esfuerzos cortantes se obtiene como el producto de la base y la longitud de la cuña. Con $b_{cu} = 8$ mm y $L_{ngCu1} = 150$ mm, se obtiene $A_{Cortante} = 1200$ mm² (Fig.D.7.b).
3. **Cálculo de fuerzas que generan esfuerzos cortantes:** La fuerza cortante sobre la cuña se produce por el par torsor transmitido por la turbina al árbol de entrada, el cual no se mantiene constante en el tiempo y puede variar hasta un 35 % respecto a su valor nominal.

Por lo tanto, se determina que $T_{\text{máx}} = 64.46 \text{ N}\cdot\text{m}$ y $T_{\text{mín}} = 47.75 \text{ N}\cdot\text{m}$, calculados a partir de la Ec.A.20 según los requerimientos funcionales expuestos Capítulo 4.

Con un diámetro del árbol $d = 17 \text{ mm}$, la fuerza máxima y mínima que actúan sobre la cuña se obtienen mediante la Ec.A.19, resultando $F_{\text{máx}} = 7551 \text{ N}$ y $F_{\text{mín}} = 5589 \text{ N}$.

4. **Cálculo de componentes alternantes y medias de la fuerza:** A partir de $F_{\text{máx}}$ y $F_{\text{mín}}$, la componente media y alternante de la fuerza se calcula mediante la Ec.1.6, obteniéndose $F_{\text{Media}} = 6570 \text{ N}$ y $F_{\text{Alternante}} = 981 \text{ N}$.
5. **Cálculo de esfuerzos cortantes alternantes y medios:** Considerando el área de aplicación $A_{\text{Cortante}} = 1200 \text{ mm}^2$, los esfuerzos cortantes alternante y medio se calculan mediante la Ec. 1.17, obteniendo $\tau_{\text{Alternante}} = 0.82 \text{ MPa}$ y $\tau_{\text{Medio}} = 5.48 \text{ MPa}$.
6. **Cálculo de esfuerzos equivalentes de Von Mises:** A partir de los esfuerzos cortantes alternantes y medios, los esfuerzos equivalentes de Von Mises se calculan mediante la Ec.1.18, resultando $\sigma'_{\text{Alternante}} = 1.42 \text{ MPa}$ y $\sigma'_{\text{Medio}} = 9.49 \text{ MPa}$.
7. **Cálculo de la resistencia a la fatiga corregida del material:** La resistencia corregida a la fatiga del hierro clase 40 (fundición gris) se presenta en la Tabla B.1, pero dicho valor no considera el efecto del tamaño de la pieza analizada. Para incorporar el efecto del tamaño, se aplica el factor c_t multiplicando la resistencia nominal, según lo indicado en [21], donde también se indica el procedimiento para calcular dicho factor.
8. **Cálculo del factor de seguridad frente a fatiga por esfuerzos cortantes:** Utilizando la Ec.1.4 y la resistencia última corregida del hierro clase 40 (fundición gris), dispuesta en la Tabla B.1, se obtiene un factor de seguridad $N_{F \text{ Cortante Cuña 1}} = 22.08$.
9. **Factor de seguridad de la segunda cuña:** Siguiendo un procedimiento análogo, se calcula que la segunda cuña ubicada en el extremo derecho del árbol de entrada presenta un factor de seguridad frente a fatiga por esfuerzos cortantes de $N_{F \text{ Cortante Cuña 2}} = 1.92$.

D.4.2. Cálculo del factor de seguridad frente a esfuerzos de aplastamiento en la cuña

1. **Cálculo de la fuerza que genera el esfuerzo de aplastamiento:** De la Fig.D.7.a se observa que la fuerza responsable del aplastamiento de la cuña es la misma fuerza generada por el par tursor de entrada al sistema. Según lo explicado en la subsección 1.6.2.3, para el cálculo de los esfuerzos de aplastamiento se debe considerar la fuerza máxima aplicada sobre la cuña, la cual se obtuvo en la subsección anterior como $F_{\text{máx}} = 7551 \text{ N}$.
2. **Cálculo del área de aplicación del esfuerzo de aplastamiento:** El área efectiva sobre la que actúa el esfuerzo de aplastamiento se determina como el producto entre la mitad de la altura de la cuña y su longitud. Considerando las dimensiones $h_{cu} = 7 \text{ mm}$ y $L_{ngCu1} = 150 \text{ mm}$, se obtiene $A_{\text{Aplastamiento}} = 525 \text{ mm}^2$.
3. **Cálculo del esfuerzo de aplastamiento:** Utilizando la fuerza máxima $F_{\text{máx}}$ y el área de aplicación $A_{\text{Aplastamiento}}$, y con el uso la Ec.1.19, se determina que el esfuerzo de aplastamiento presente en la cuña es $\sigma = 14.38 \text{ MPa}$.
4. **Cálculo del factor de seguridad frente a esfuerzos de aplastamiento:** Conociendo el esfuerzo de fluencia del material del que está fabricada la cuña (ver Tabla B.1) y aplicando la Ec.1.20, se obtiene el factor de seguridad frente a aplastamiento de la primera cuña: $N_{F \text{ Aplastamiento Cuña 1}} = 17.24$.

5. **Factor de seguridad de la segunda cuña:** Siguiendo el mismo procedimiento, se determina que el factor de seguridad frente a esfuerzos de aplastamiento de la segunda cuña ubicada en el árbol de entrada es $N_F \text{ Aplastamiento Cuña 2} = 1.72$.

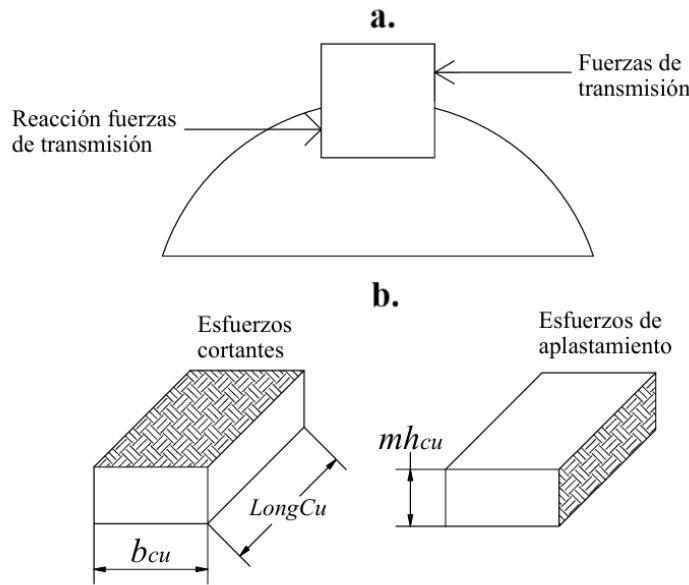


Figura D.7: a. Diagrama de fuerzas actuantes sobre la cuña. b. Áreas de aplicación de los esfuerzos: izquierda, esfuerzo cortante; derecha, esfuerzo de aplastamiento.

D.5. Cálculo de la vida útil de los rodamientos

En esta sección se describe el procedimiento seguido para estimar la vida útil de todos los rodamientos del sistema. Como ejemplo, se calcula paso a paso la vida útil del rodamiento que soporta el extremo izquierdo del árbol de entrada, según se muestra en la Fig.D.2.b, ubicado en la posición de las reacciones R_{1T} , R_{1R} y R_{1A} . Este procedimiento es aplicable de manera general a todos los rodamientos del sistema.

1. **Cálculo de las reacciones en los apoyos:** A partir del diagrama de cuerpo libre del árbol de entrada mostrado en la Fig.D.2.b y considerando las dimensiones del árbol descritas en la sección de diseño y los requerimientos funcionales del capítulo 4, se calculan las reacciones en el rodamiento, obteniéndose $R_{1R} = 1176.31 \text{ N}$, $R_{1T} = 1597.65 \text{ N}$ y $R_{1A} = 0.16 \text{ N}$
2. **Cálculo de la reacción resultante en el rodamiento:** Dado que las reacciones R_{1T} y R_{1R} son perpendiculares, la reacción resultante en el rodamiento se determina mediante el teorema de Pitágoras, obteniéndose $R_1 = 1975.94 \text{ N}$. Por otra parte, la fuerza axial sobre el rodamiento, que aunque también es una reacción, debe ser tomada en cuenta aparte por la dirección en la que actúa, tiene un valor de $R_{1A} = 0.16 \text{ N}$
3. **Determinación del rodamiento comercial seleccionado:** El algoritmo sugiere emplear un rodamiento tipo 7406, el cual presenta una carga límite de fatiga de $C = 59,500 \text{ N}$, según la referencia [36]. Esta fuente incluye los rodamientos de contacto angular y sus características, a partir de las cuales se seleccionaron los utilizados en el protocolo junto con sus respectivos datos. En caso de trabajar con rodamientos tipo Conrad, la referencia [35] proporciona la información correspondiente.

Cálculo de la vida útil del rodamiento: Dado que en este caso se emplean rodamientos de contacto angular, es necesario calcular la fuerza equivalente para aplicar en la Ec.1.23. En contraste, si se utilizaran rodamientos tipo Conrad, dicha fuerza correspondería directamente a la resultante entre la componente radial y la tangencial.

Para este rodamiento, el factor de comparación es $e = 0.80$ según [36]. De acuerdo con la Ec.1.25, este valor es mayor que la razón entre la fuerza axial R_{1A} y la fuerza resultante R_1 , por lo que en la Ec.1.24 se adoptan $X = 1$ y $Y = 0$. En consecuencia, la fuerza equivalente resulta $P = 1975.94$ N. En caso de que no se cumpla la condición establecida en la Ec.1.25, los valores de X y Y deberán obtenerse de la base de datos presentada en [36].

Finalmente, al aplicar la Ec.1.23 con el valor de P , se estima que la vida útil del rodamiento es de 1.69×10^{10} revoluciones.

D.6. Diagramas de fuerzas para los demás arboles del sistema

Siguiendo la misma metodología descrita previamente en la subsección D.2, se calcularon los factores de seguridad para los dos árboles restantes, considerando los puntos de evaluación indicados en las Fig.D.8.b y D.9.b, donde también se proporcionan los diagramas de las fuerzas a las que están sometidos estos árboles. Además, en las Fig.D.8.a y D.9.a se muestran los bosquejos de las piezas bajo análisis, con algunas de sus medidas principales en términos de variables, las cuales son necesarias para el cálculo de momentos y, por consiguiente, los esfuerzos asociados, utilizándose los resultados obtenidos por el algoritmo para las variables geométricas mostradas en dichas figuras.

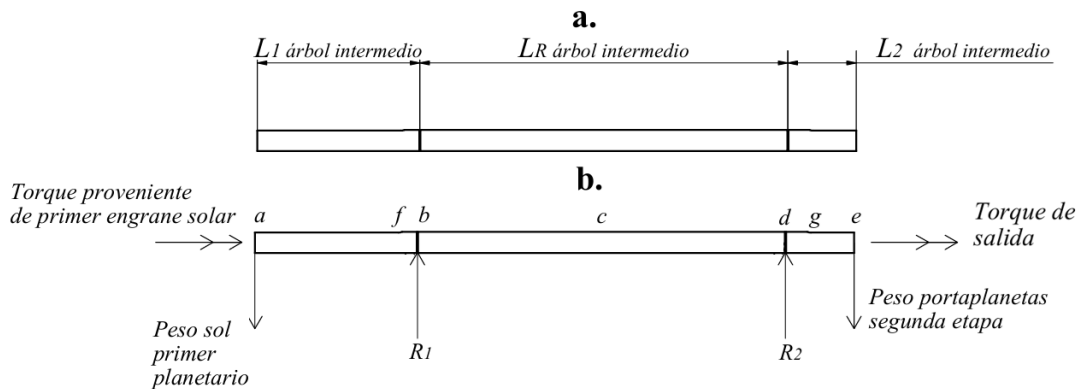


Figura D.8: **a.** Bosquejo del árbol intermedio con algunas de sus medidas principales en términos de variables, están proporcionadas por el algoritmo. **b.** Diagrama de fuerzas aplicadas sobre el árbol intermedio del sistema utilizado para la validación del algoritmo. Se indican los puntos específicos en los que se verificará el factor de seguridad, realizando adicionalmente el cálculo de deflexiones en las secciones correspondientes a los puntos a , c y e .

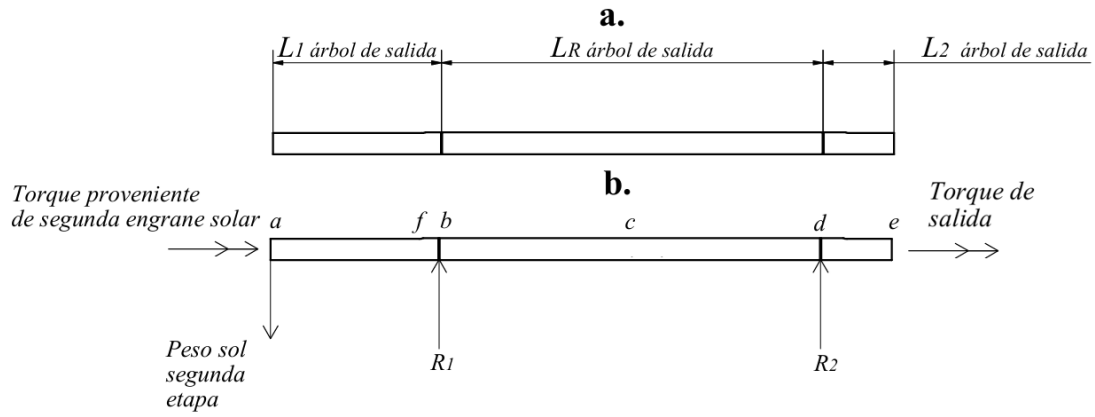


Figura D.9: **a.** Bosquejo del árbol de salida con algunas de sus medidas principales en términos de variables **b.** Diagrama de fuerzas aplicadas sobre el árbol intermedio del sistema utilizado para la validación del algoritmo. Se indican los puntos específicos en los que se verificará el factor de seguridad, realizando adicionalmente el cálculo de deflexiones en las secciones correspondientes a los puntos a , c y e . En este caso particular no se considera el punto g en el análisis, ya que dicho árbol cuenta únicamente con un cuñero, a diferencia de otros árboles evaluados.

E. Magnitudes para el cálculo de factores de seguridad en la validación del algoritmo

Tabla E.1: Cálculo de los factores geométricos necesarios para determinar los esfuerzos debido a fatiga por flexión y por contacto en los dientes de los engranes del sistema.

Factor geométrico	Valor
	[-]
Y_{DT}, Y_{β}, Y_B	1
$Y_{F Sol}$	1.27
$Y_{F Planeta-SP}$	1.24
$Y_{F Planeta-PC}$	1.03
$Y_{F Corona}$	1.90
$Y_{S Sol}$	1.92
$Y_{S Planeta-SP}$	1.91
$Y_{S Planeta-PC}$	2.03
$Y_{S Corona}$	2.10

Tabla E.2: Cálculo de los factores de carga necesarios para determinar los esfuerzos debido a fatiga por flexión y por contacto en los dientes de los engranes del sistema. El símbolo E_1 y E_2 hace referencia a en que etapa se realiza el cálculo.

Factor de carga	Valor
	[-]
$K_{V SP E1}$	1.20
$K_{V PC E1}$	1.13
$K_{V SP E2}$	1.79
$K_{V PC E2}$	1.50
$K_{F\beta SP E1}$	6.05
$K_{F\beta PC E1}$	3.69
$K_{F\beta SP E2}$	2.87
$K_{F\beta PC E2}$	2.07
$K_{F\alpha SP E1}$	1.71
$K_{F\alpha PC E1}$	2.59
$K_{F\alpha SP E2}$	1.51
$K_{F\alpha PC E2}$	2.25

Tabla E.3: Cálculo de los factores de material necesarios para determinar las resistencias corregidas a la fatiga por flexión de los materiales que componen a los engranes del sistema.

Factor de material	Valor
	[-]
$Y_{Rrel T Sol}$	1.001
$Y_{Rrel T Corona}$	1.001
$Y_{Rrel T Planeta}$	1.001
$Y_{\delta rel T Sol}$	0.969
$Y_{\delta rel T Corona}$	1.032
$Y_{\delta rel T Planeta}$	0.977
Y_X	1

Tabla E.4: Cálculo del factor de carga en cara $K_{H\beta}$ necesario para determinar el esfuerzo de flexión en la raíz de los dientes de los engranes en las diferentes etapas.

Factor de carga	Valor
	[-]
$K_{H\beta SP E1}$	6.34
$K_{H\beta PC E1}$	3.81
$K_{H\beta SP E2}$	3.85
$K_{H\beta PC E2}$	2.54

Tabla E.5: Cálculo de factores de carga Z necesarios para determinar el esfuerzo de fatiga por contacto en la cara de los dientes de los engranes en las diferentes etapas.

Factor de carga	Valor
	[-]
$Z_{B SP}$	1.02
$Z_{D SP}$	1
$Z_{B PC}$	1
$Z_{D PC}$	1
$Z_{\epsilon PC}$	0.85
$Z_{\epsilon SP}$	0.87

Tabla E.6: Cálculo de los factores de material necesarios para determinar las resistencias corregidas a la fatiga por contacto de los materiales que componen a los engranes del sistema.

Factor de material	Valor [-]
Z_{RSP}	1.20
Z_{RPC}	1.42
Z_{LSP}	0.795
Z_{LPC}	0.795
$Z_{VSP E1}$	0.86
$Z_{VPC E1}$	0.77
$Z_{VSP E2}$	0.89
$Z_{VPC E2}$	0.81
$Z_{WSol E1}$	0.86
$Z_{WCorona E1}$	1.03
$Z_{WPlaneta SP E1}$	0.92
$Z_{WPlaneta PC E1}$	1.00
$Z_{WSol E2}$	0.94
$Z_{WCorona E2}$	1.13
$Z_{WPlaneta SP E2}$	1.00
$Z_{WPlaneta PC E2}$	1.08

Tabla E.7: Esfuerzos debido a fatiga por flexión en la raíces de los dientes de los engranes de la primera y segunda etapa del caso de estudio. Estos esfuerzos son calculados a partir de la Ec.1.9 y algunos de los factores calculados hasta el momento.

Esfuerzos de fatiga por flexión	Valor [MPa]
$\sigma_b Sol E1$	123.94
$\sigma_b Planeta SP E1$	120.00
$\sigma_b Planeta PC E1$	92.27
$\sigma_b Corona E1$	175.67
$\sigma_b Sol E2$	121.28
$\sigma_b Planeta SP E2$	117.41
$\sigma_b Planeta PC E2$	93.67
$\sigma_b Corona E2$	178.35

Tabla E.8: Esfuerzos debido a fatiga por contacto en la cara de los dientes de los engranes de la primera y segunda etapa del caso de estudio. Estos esfuerzos son calculados a partir de las Ec.1.12 y 1.13, esto dependiendo de si se evalúa el piñón o el engrane del par, y algunos de los factores calculados hasta el momento.

Esfuerzos de fatiga por contacto	Valor [MPa]
$\sigma_H \text{ Sol } E1$	590.04
$\sigma_H \text{ Planeta SP } E1$	575.48
$\sigma_H \text{ Planeta PC } E1$	239.77
$\sigma_H \text{ Corona } E1$	239.77
$\sigma_H \text{ Sol } E2$	660.98
$\sigma_H \text{ Planeta SP } E2$	644.67
$\sigma_H \text{ Planeta PC } E2$	263.12
$\sigma_H \text{ Corona } E2$	263.12

Tabla E.9: Valores de resistencias corregidas tanto para la fatiga por flexión S_b , como para la fatiga por contacto S_H de los materiales que componen los engranes del caso de estudio.

Resistencias corregidas	Valor [MPa]
$S_F \text{ Sol}$	653.69
$S_F \text{ Planeta}$	133.42
$S_F \text{ Corona}$	289.65
$S_H \text{ Sol } E1$	634.21
$S_H \text{ Planeta SP } E1$	284.58
$S_H \text{ Planeta PC } E1$	325.90
$S_H \text{ Corona } E1$	300.90
$S_H \text{ Sol } E2$	710.46
$S_H \text{ Planeta SP } E2$	318.80
$S_H \text{ Planeta PC } E2$	373.50
$S_H \text{ Corona } E2$	344.84

Tabla E.10: Factores de seguridad frente a la fatiga por flexión en las raíces de los dientes de los engranajes del caso, utilizados para la validación del algoritmo. Calculados a partir de la Ec.1.11.

Factores de seguridad	Valor [-]
$N_{Fb} \text{ Sol } E1$	5.27
$N_{Fb} \text{ Planeta SP } E1$	1.11
$N_{Fb} \text{ Planeta PC } E1$	1.44
$N_{Fb} \text{ Corona } E1$	1.64
$N_{Fb} \text{ Sol } E2$	5.39
$N_{Fb} \text{ Planeta SP } E2$	1.14
$N_{Fb} \text{ Planeta PC } E2$	1.42
$N_{Fb} \text{ Corona } E2$	1.62

Tabla E.11: Factores de seguridad frente a la fatiga por contacto en las caras de los dientes de los engranajes del caso, utilizados para la validación del algoritmo. Calculados a partir de la Ec.1.16.

Factores de seguridad	Valor [-]
$N_{F H Sol E1}$	1.07
$N_{F H Planeta E1}$	1.36
$N_{F H Corona E1}$	1.25
$N_{F H Sol E2}$	1.07
$N_{F H Planeta E2}$	1.41
$N_{F H Corona E2}$	1.31

Tabla E.12: Fuerzas alternantes y medias debido a las fuerzas del peso de los engranes presentes en los portaplanetas de la primera y segunda etapa en el caso de estudio planteado. Calculadas a partir de la Ec.1.6.

Fuerzas peso portaplanetas	Valor [N]
$F_{\text{Alternante Peso E1}}$	16.42
$F_{\text{Media Peso E1}}$	0
$F_{\text{Alternante Peso E2}}$	1.83
$F_{\text{Media Peso E2}}$	0

Tabla E.13: Fuerzas alternantes y medias debido a las fuerzas de transmisión en los portaplanetas de la primera y segunda etapa en el caso de estudio planteado. Calculadas a partir de la Ec.1.6.

Fuerzas transmisión portaplanetas	Valor [N]
$F_{\text{Alternante Transmitida E1}}$	93.88
$F_{\text{Media Transmitida E1}}$	630.36
$F_{\text{Alternante Transmitida E2}}$	16.35
$F_{\text{Media Transmitida E2}}$	109.78

Tabla E.14: Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}), y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P1 de la viga del primer portaplanetas del sistema. Los esfuerzos de flexión se calculan mediante la Ec.A.6, los esfuerzos cortantes mediante la Ec.A.8, y los esfuerzos equivalentes de Von Mises mediante la Ec.A.13.

Esfuerzos ubicación P1	Valor [MPa]
$\sigma_{\text{Flexión Alternante P1 E1}}$	5.44
$\sigma_{\text{Flexión Media P1 E1}}$	0
$\tau_{\text{Alternante P1 E1}}$	1.40
$\tau_{\text{Media P1 E1}}$	9.44
$\sigma'_{\text{Alternante P1 E1}}$	5.96
$\sigma'_{\text{Medio P1 E1}}$	16.35

Tabla E.15: Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}), y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P2 de la viga del primer portaplanetas del sistema. Todos los esfuerzos presentes en esta tabla son calculados de manera similar a la tabla anterior.

Esfuerzos ubicación P2	Valor
	[MPa]
$\sigma_{\text{Flexión Alternante P2 E1}}$	31.12
$\sigma_{\text{Flexión Media P2 E1}}$	208.92
$\tau_{\text{Alternante P2 E1}}$	0.24
$\tau_{\text{Media P2 E1}}$	0
$\sigma'_{\text{Alternante P2 E1}}$	31.12
$\sigma'_{\text{Medio P2 E1}}$	208.92

Tabla E.16: Esfuerzos de flexión alternantes y medios ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$) debido a fuerzas de peso y fuerzas de transmisión, esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}) debido a fuerzas de transmisión y de peso, y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P3 de la viga del primer portaplanetas del sistema.

Esfuerzos ubicación P3	Valor
	[MPa]
$\sigma_{\text{Flexión Alternante Peso P3 E1}}$	3.85
$\sigma_{\text{Flexión Media Peso P3 E1}}$	0
$\tau_{\text{Alternante Peso P3 E1}}$	0.12
$\tau_{\text{Media Peso P3 E1}}$	0
$\sigma_{\text{Flexión Alternante Transmisión P3 E1}}$	22.00
$\sigma_{\text{Flexión Media Transmisión P3 E1}}$	147.73
$\tau_{\text{Alternante Transmisión P3 E1}}$	0.70
$\tau_{\text{Media Transmisión P3 E1}}$	4.72
$\sigma_{\text{Flexión Alternante P3 E1}}$	25.85
$\sigma_{\text{Flexión Media P3 E1}}$	147.96
$\tau_{\text{Alternante P3 E1}}$	0.82
$\tau_{\text{Media P3 E1}}$	4.72
$\sigma'_{\text{Alternante P3 E1}}$	25.89
$\sigma'_{\text{Medio P3 E1}}$	147.96

Tabla E.17: Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}), y esfuerzos equivalentes de Von Mises alternantes y medios ($\sigma'_{\text{Alternante}}$ y σ'_{Medio}) en la ubicación P4 de la viga del primer portaplanetas del sistema.

Esfuerzos ubicación P4	Valor [MPa]
$\sigma_{\text{Flexión Alternante P4 E1}}$	2.72
$\sigma_{\text{Flexión Media P4 E1}}$	0
$\tau_{\text{Alternante P4 E1}}$	1.40
$\tau_{\text{Media P4 E1}}$	9.44
$\sigma'_{\text{Alternante P4 E1}}$	3.65
$\sigma'_{\text{Medio P4 E1}}$	16.35

Tabla E.18: Esfuerzos de flexión alternante y media ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$), esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}) en la ubicación P5 de la viga del primer portaplanetas del sistema.

Esfuerzos ubicación P5	Valor [MPa]
$\sigma_{\text{Flexión Alternante P5 E1}}$	15.56
$\sigma_{\text{Flexión Media P5 E1}}$	104.46
$\tau_{\text{Alternante P5 E1}}$	0.25
$\tau_{\text{Media P5 E1}}$	0

Tabla E.19: Esfuerzos de flexión alternantes y medios ($\sigma_{\text{Flexión Alternante}}$ y $\sigma_{\text{Flexión Media}}$) generados por las fuerzas de peso y transmisión, así como esfuerzos cortantes alternantes y medios ($\tau_{\text{Alternante}}$ y τ_{Media}) derivados de las mismas fuerzas, en la ubicación P6 de la viga correspondiente al primer portaplanetas del sistema.

Esfuerzos ubicación P6	Valor [MPa]
$\sigma_{\text{Flexión Alternante Peso P6 E1}}$	1.92
$\sigma_{\text{Flexión Media Peso P6 E1}}$	0
$\tau_{\text{Alternante Peso P6 E1}}$	0.12
$\tau_{\text{Media Peso P6 E1}}$	0
$\sigma_{\text{Flexión Alternante Transmisión P6 E1}}$	11.00
$\sigma_{\text{Flexión Media Transmisión P6 E1}}$	73.87
$\tau_{\text{Alternante Transmisión P6 E1}}$	0.70
$\tau_{\text{Media Transmisión P6 E1}}$	4.72

Tabla E.20: Fuerzas y pares torsores alternantes y medios presentes en el árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.

Fuerzas y pares torsores árbol entrada	Valor
$F_{\text{Peso Alternante Turbina}}$	78.48 N
$F_{\text{Peso Medio Turbina}}$	0 N
$T_{\text{Alternante Entrada}}$	8355.63 N-mm
$T_{\text{Medio Entrada}}$	56102.12 N-mm
$F_{\text{Tangencial Media Par Torsor}}$	374.01 N
$F_{\text{Tangencial Alternante Par Torsor}}$	55.70 N
$F_{\text{Radial Media Par Torsor}}$	374.01 N
$F_{\text{Radial Alternante Par Torsor}}$	55.70 N
$P_{\text{Portaplanetas Alternante}}$	112.63 N
$P_{\text{Portaplanetas Media}}$	0 N
$P_{\text{Turbina Alternante}}$	78.48 N
$P_{\text{Turbina Media}}$	0 N
$F_{\text{Axial Agua}}$	0.16 N
$M_{\text{Fuerza Agua}}$	141.46 N-mm

Tabla E.21: Par torsor T , momentos M y esfuerzos de Von Mises σ' alternantes y medios presentes en el punto b del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.

Fuerzas, momentos y esfuerzos	Valor
$T_{\text{Alternante } P_b}$	8355.63 N-mm
$T_{\text{Medio } P_b}$	56102.12 N-mm
$M_{\text{Alternante } P_b}$	99920.93 N-mm
$M_{\text{Medio } P_b}$	13408.46 N-mm
$\sigma'_{\text{Alternante } P_b}$	307.36 MPa
$\sigma'_{\text{Medio } P_b}$	108.14 MPa

Tabla E.22: Momentos inducidos por las fuerzas de peso y de transmisión, M , y esfuerzos equivalentes de Von Mises, σ' , tanto alternantes como medios, presentes en el punto c del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.

Momentos y esfuerzos	Valor
$M_{\text{Radial Alternante } P_c}$	60657.39 N-mm
$M_{\text{Radial Medio } P_c}$	4740.61 N-mm
$M_{\text{Tangencial Alternante } P_c}$	31829.75 N-mm
$M_{\text{Tangencial Medio } P_c}$	4740.60 N-mm
$M_{\text{Alternante } P_c}$	68501.47 N-mm
$M_{\text{Medio } P_c}$	6704.23 N-mm
$\sigma'_{\text{Alternante } P_c}$	68.88 MPa
$\sigma'_{\text{Medio } P_c}$	49.04 MPa

Tabla E.23: Momentos inducidos en la dirección radial $M_{\text{Radial } P_d}$ y en la dirección tangencial $M_{\text{Tangencial } P_d}$, junto con los momentos totales alternantes $M_{\text{Alternante } P_d}$ y medios $M_{\text{Medio } P_d}$, y los esfuerzos equivalentes de Von Mises, σ' , tanto alternantes como medios, presentes en el punto d del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.

Momentos y esfuerzos	Valor
$M_{\text{Radial Alternante } P_d}$	44297.50 N-mm
$M_{\text{Radial Medio } P_d}$	0 N-mm
$M_{\text{Tangencial Alternante } P_d}$	0 N-mm
$M_{\text{Tangencial Medio } P_d}$	0 N-mm
$M_{\text{Alternante } P_d}$	44297.50 N-mm
$M_{\text{Medio } P_d}$	0 N-mm
$\sigma'_{\text{Alternante } P_d}$	136.91 MPa
$\sigma'_{\text{Medio } P_d}$	99.98 MPa

Tabla E.24: Momentos totales alternantes $M_{\text{Alternante } P_f}$ y medios $M_{\text{Medio } P_f}$, y esfuerzos equivalentes de Von Mises, σ' , tanto alternantes como medios, presentes en el punto f del árbol de entrada del sistema propuesto para su análisis.

Momentos y esfuerzos	Valor
$M_{\text{Alternante } P_f}$	88058.74 N-mm
$M_{\text{Medio } P_f}$	11816.66 N-mm
$\sigma'_{\text{Medio } P_f}$	155.64 MPa
$\sigma'_{\text{Alternante } P_f}$	100.90 MPa

Tabla E.25: Esfuerzos cortantes alternantes $\tau_{\text{Alternante}}$ y medios τ_{Medio} , junto con los esfuerzos equivalentes de Von Mises alternante $\sigma'_{\text{Alternante Portaplanetas}}$ y medio $\sigma'_{\text{Medio Portaplanetas}}$, calculados en las ubicaciones $PB1$ y $PB2$ del portaplanetas.

Esfuerzos en diferentes puntos del portaplanetas	Valor [MPa]
$\tau_{\text{Alternante Portaplanetas PB1}}$	0.71
$\tau_{\text{Medio Portaplanetas PB1}}$	4.80
$\sigma'_{\text{Alternante Portaplanetas PB1}}$	1.59
$\sigma'_{\text{Medio Portaplanetas PB1}}$	10.80
$\tau_{\text{Alternante Portaplanetas PB2}}$	0.47
$\tau_{\text{Medio Portaplanetas PB2}}$	3.20
$\sigma'_{\text{Alternante Portaplanetas PB2}}$	2.02
$\sigma'_{\text{Medio Portaplanetas PB2}}$	13.74

F. Piezas del caso de estudio generadas por el algoritmo en formato CAD y ensamble del sistema

A continuación, se presentan, desde la Fig.F.1 hasta la Fig.F.25, las representaciones gráficas de las piezas generadas por el algoritmo para el caso de estudio, mostrando su geometría y características principales en formato CAD. Por otra parte, en la Fig.F.26 se muestra el sistema correspondiente al caso de estudio, ensamblado a partir de las piezas previamente mostradas.



Figura F.1: Anillos de retención a ubicarse en el árbol de entrada del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.



Figura F.2: Anillos de retención a ubicarse en el árbol de salida del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.



Figura F.3: Anillos de retención a ubicarse en el árbol intermedio del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.

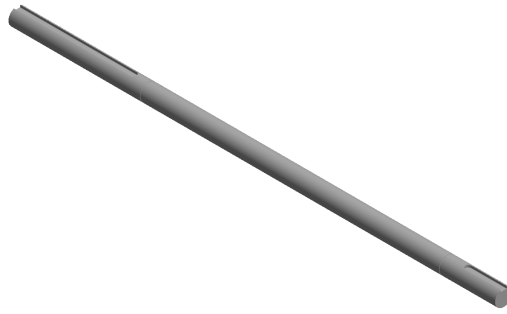


Figura F.4: Árbol de entrada del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.

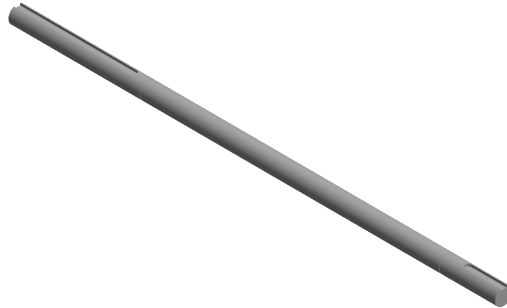


Figura F.5: Árbol intermedio del sistema propuesto por el algoritmo para el caso de estudio.

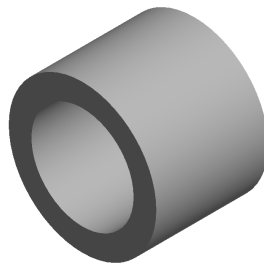


Figura F.6: Buje a ubicarse en el segundo portaplanetas del sistema propuesto.

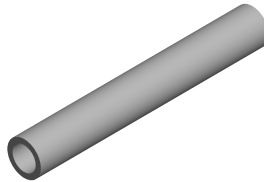


Figura F.7: Buje a ubicarse en el primer portaplanetas del sistema propuesto.

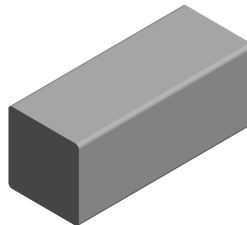


Figura F.8: Cuña a ubicarse sobre el árbol de salida del sistema propuesto.

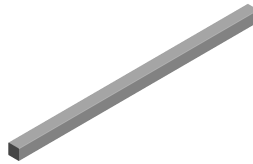


Figura F.9: Cuña a ubicarse sobre el extremo izquierdo del árbol intermedio del sistema propuesto.

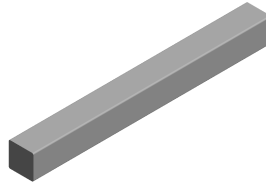


Figura F.10: Cuña a ubicarse sobre el extremo derecho del árbol intermedio del sistema propuesto.

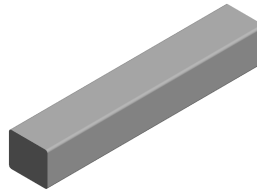


Figura F.11: Cuña a ubicarse sobre el extremo derecho del árbol de entrada del sistema propuesto.

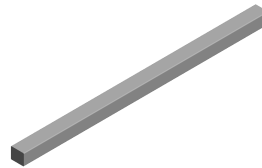


Figura F.12: Cuña que permite la transmisión de potencia entre la turbina y el árbol de entrada del sistema.

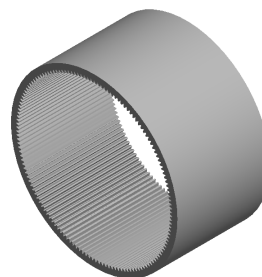


Figura F.13: Engrane anular de la primera etapa del sistema propuesto.

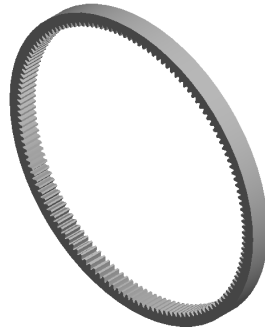


Figura F.14: Engrane anular de la segunda etapa del sistema propuesto.

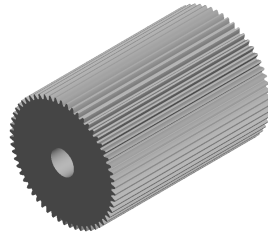


Figura F.15: Engrane planetario de la primera etapa del sistema propuesto.

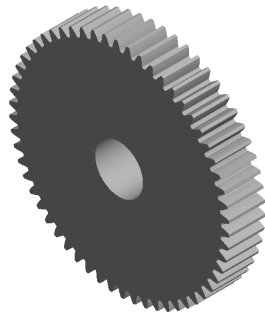


Figura F.16: Engrane planetario de la segunda etapa del sistema propuesto.

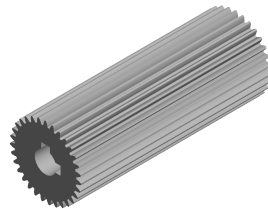


Figura F.17: Engrane solar de la primera etapa del sistema propuesto.

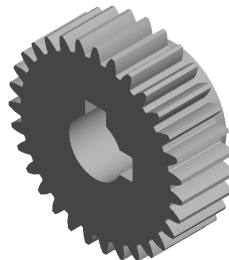


Figura F.18: Engrane solar de la segunda etapa del sistema propuesto.

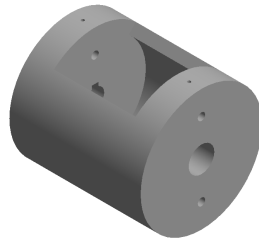


Figura F.19: Portaplanetas perteneciente a la primera etapa del sistema propuesto.

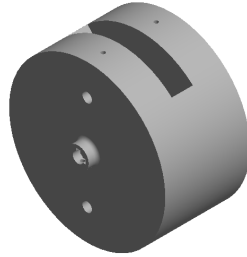


Figura F.20: Portaplanetas perteneciente a la segunda etapa del sistema propuesto.

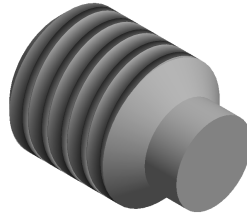


Figura F.21: Tornillo prisionero a ubicarse en la manzana del portaplanetas de la primera etapa del sistema propuesto.

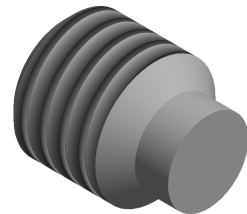


Figura F.22: Tornillo prisionero a ubicarse en la manzana del portaplanetas de la segunda etapa del sistema propuesto.

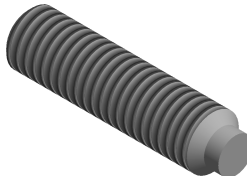


Figura F.23: Tornillo prisionero a ubicarse en las vigas de los portaplanetas.

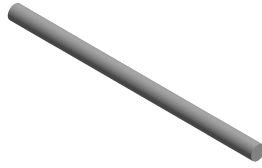


Figura F.24: Viga de sujeción de los engranajes planetarios pertenecientes a la primera etapa del sistema.

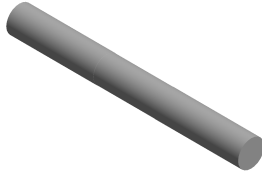


Figura F.25: Viga de sujeción de los engranajes planetarios pertenecientes a la segunda etapa del sistema.

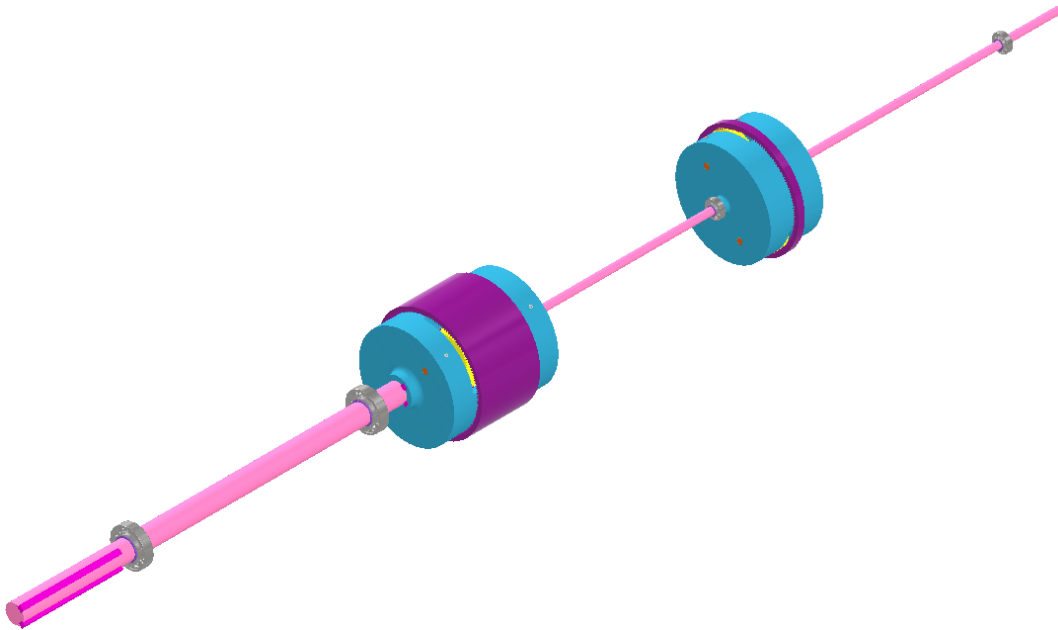


Figura F.26: Sistema ensamblado a partir de las piezas generadas por el algoritmo para el caso de análisis.