

Movimiento browniano e integración estocástica

Natalia Agudelo Zapata



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2024

Movimiento browniano e integración estocástica

Natalia Agudelo Zapata

Proyecto de trabajo de grado presentado como requisito
para optar al título de Matemática

Directora:

Liliana Katherine Esquivel Mora, Ph.D

Codirectora:

Ivonne Rivas Triviño, Ph.D

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2024

Resumen

En este documento se estudia el movimiento browniano como base fundamental para presentar la integral de Itô y sus aplicaciones en las ecuaciones diferenciales estocásticas. El movimiento browniano es un tipo de proceso estocástico que modela ciertos fenómenos aleatorios como el recorrido de partículas en un fluido o las fluctuaciones en los precios de activos. El cálculo estocástico, basado en procesos de Wiener, extiende la teoría del cálculo a funciones aleatorias. Este trabajo está motivado en comprender de manera rigurosa el cálculo de Itô. Para ello, es fundamental estudiar la teoría de la probabilidad. Además, se explica con un alto nivel de detalle la integral de Itô y se estudia el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales estocásticas.

PALABRAS CLAVE: Cálculo estocástico, Ecuaciones diferenciales estocásticas, Integral de Itô, Probabilidad, Proceso de Wiener.

Abstract

In this paper, Brownian motion is studied as a fundamental basis for presenting the Itô integral and its applications in stochastic differential equations. Brownian motion is a type of stochastic process that models certain random phenomena such as particle travel in a fluid or fluctuations in asset prices. Stochastic calculus, based on Wiener processes, extends the theory of calculus to random functions. This work is motivated by a rigorous understanding of Itô calculus. For this purpose, it is essential to study probability theory. In addition, the Itô integral is explained in a high level of detail and the existence and uniqueness theorem of stochastic differential equations is studied.

KEY WORDS: Stochastic calculus, Stochastic differential equations, Itô integral, Probability, Wiener process.

Agradecimientos

Han sido muchas las personas que, a lo largo de mi vida, han contribuido de manera significativa a mi formación académica, profesional y personal. A cada una de ellas, mis más sinceras gracias.

Quiero agradecer a mis padres Luz y Octavio, a mis hermanos Juan Esteban y Andrés Felipe, y a mi abuela Martha. Sin su apoyo incondicional y amor, este gran sueño, que alguna vez fue lejano, no sería posible... A Luis, por su amor, por estar siempre acompañándome en las batallas y por su cuidado.

A las profesoras Liliana Esquivel e Ivonne Rivas, gracias por acogerme como su estudiante, por su paciencia, apoyo y dedicación. Sin sus sugerencias y aportes, este trabajo no sería lo que es.

Al Departamento de Matemáticas y a todos los profesores y compañeros que me guiaron, muchas gracias.

Índice general

Introducción	VII
1. Movimiento browniano	1
1.1. Procesos estocásticos y filtraciones	3
1.1.1. Definiciones y propiedades básicas	3
1.1.2. Stopping times	11
1.1.3. Martingalas	14
1.2. Propiedades básicas del movimiento browniano	18
1.3. Propiedades deterministas del movimiento browniano	25
1.3.1. Demostraciones a los teoremas 1.33 y 1.37	39
2. Integración estocástica	53
2.1. Ideas preliminares	55
2.2. Integral de Itô	56
2.3. Integral de Wiener	87
2.4. Integral para procesos en $M_{\text{loc}}^2[a, b]$	93
3. Ecuaciones diferenciales estocásticas	102
3.1. Procesos de Itô y Fórmula de Itô	103
3.2. Teorema de existencia y unicidad para EDE's	114
A. Elementos básicos de probabilidad	123
A.1. Espacios de probabilidad y variables aleatorias	123
A.2. Convergencias para sucesiones de variables aleatorias	132
A.3. Independencia de variables aleatorias	136
A.4. Esperanza condicional	143

B. Fundamentos de análisis	151
B.1. Integral de Riemann- Stieltjes	151
B.2. Elementos de análisis funcional	155
B.3. Elementos de teoría de la integración	158
B.3.1. Espacios L^p	158
B.3.2. Medidas producto	161
B.3.3. Teorema de Radon-Nikodym	162
B.4. Resultados auxiliares	163
Referencias	166

Índice de figuras

1.1. Proceso estocástico de estado y tiempo discreto.	4
1.2. Proceso estocástico de estado y tiempo continuo. Tomado de Trading Economics (2024).	5
1.3. Equivalencias de la definición de movimiento browniano.	23
1.4. Trayectoria de un movimiento browniano en el tiempo $[0, 1]$	27
1.5. Comportamiento asintótico del movimiento browniano en un intervalo pequeño de tiempo.	28
1.6. Comportamiento oscilatorio del movimiento browniano en un intervalo pequeño de tiempo.	37
3.1. Trayectoria del movimiento browniano geométrico.	116
3.2. Trayectoria del proceso descrito por la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck. . .	117
3.3. Trayectoria del proceso descrito por la EDE (3.2.5)	119
3.4. Trayectoria del puente browniano para $\beta = 1$, $T = 1$	120
A.1. Construcción ley de una v.a.	124
A.2. Construcción función de distribución de una v.a., siendo g la función $a \rightarrow (-\infty, a]$	126
A.3. Funciones de densidad de variables aleatorias con ley normal.	131
A.4. Relaciones entre los distintos tipos de convergencia	137

Introducción

“Es notable que una ciencia, que comenzó con la consideración de los juegos de azar, se haya convertido en el objeto más importante del conocimiento humano”.

Pierre Simon De Laplace.

Théorie Analytique des Probabilités, 1812.

Si bien la axiomatización de la teoría de la probabilidad se estableció en la primera mitad del siglo XX, sus inicios se remontan a la antigua Grecia. Las incertidumbres de la vida diaria y, en particular, el análisis de los juegos de azar, impulsaron el estudio de lo que hoy se conoce como probabilidad (Debnath y Basu, 2015). Preguntas como ¿Qué tanto aumentará el tamaño de la población en un determinado tiempo?, ¿Cómo será el clima mañana?, ¿Qué tan a menudo una persona puede enfermarse?, entre otras, fueron el punto de partida en el desarrollo de esta área.

En los siglos XVII y XVIII hubo avances significativos en la teoría de la probabilidad, entre los cuales se destaca la ley de los grandes números y el teorema del límite central. A pesar de esto, no se tenía una base matemática sólida en la cual se fundamentara la teoría. Fue hasta el siglo XX que se axiomatizó la probabilidad mediante el uso de teoría de la medida, gracias al matemático Andréi Kolmogórov, en su monografía (Kolmogoroff, 1933). Es en este documento donde quedan por primera vez totalmente definidos conceptos tales como espacio de probabilidad y variables aleatorias. Además, es aquí donde se establecieron las bases para el desarrollo de la teoría de procesos estocásticos, los cuales sirven para modelar sistemas que evolucionan en el tiempo aleatoriamente.

El movimiento browniano, descubierto por el botánico Robert Brown en 1827, es un ejemplo de un proceso estocástico. Para dar una idea intuitiva de esto, imagine que está en una habitación oscura en donde entra un tenue rayo de luz, a través del cual puede ver

pequeñas partículas de polvo moviéndose de manera errática. Si se fija en alguna de estas partículas, encontraría que no siguen un patrón específico y que su recorrido parece ser aleatorio. Originalmente, dicho movimiento fue observado mientras se estudiaban las partículas de polen en el agua (Brown, 2022). Este fenómeno fue explicado por el físico Albert Einstein en 1905, con base en la teoría del calor (Einstein, 1905); y posteriormente, Norbert Wiener lo describió matemáticamente.

El desarrollo formal de la teoría de la probabilidad por Kolmogórov y la definición del movimiento browniano por Wiener, permitieron al matemático Kiyoshi Itô construir el cálculo estocástico. Itô, interesado en modelar procesos de difusión de Márkov, formuló directamente estos procesos como soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas en su artículo *Stochastic Integral* publicado en 1944 (Itô, 1944). Allí introdujo la integral estocástica y mostró algunas propiedades como la fórmula que ahora lleva su nombre, la cual es la regla de la cadena en el cálculo estocástico, que no se considera en el sentido diferencial, sino solamente en el sentido integral, cuyo motivo se explica más adelante.

El cálculo estocástico y, en particular, las ecuaciones diferenciales estocásticas (EDE) tienen amplias aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento, como en finanzas, biología, física e ingeniería. En el caso de biología, es útil para estudiar las interacciones depredador-presa. Las ecuaciones de Lotka-Volterra fueron el primer modelo para describirlas, no obstante, consideran únicamente parámetros deterministas como la capacidad de carga y la tasa de crecimiento de las especies. Recientemente, Muhammad y colaboradores (Yasin y cols., 2023), han desarrollado un modelo estocástico que tiene en cuenta el efecto del comportamiento aleatorio del medio ambiente, perturbando las ecuaciones por un ruido aleatorio como el movimiento browniano. Por otro lado, las EDE también se han aplicado para analizar la evolución del clima. Según se afirma en (Grigoriu, 2013), se ha probado que el clima terrestre está fuertemente relacionado con la concentración de calcio en los depósitos de hielo. Para ello, se desarrolló un modelo que describe el cambio en las condiciones atmosféricas mediante una ecuación diferencial estocástica.

Asimismo, en física, el proceso Ornstein-Uhlenbeck es una EDE que permite describir la velocidad de una partícula sujeta a colisiones aleatorias en un fluido. En dicha ecuación, se tiene en cuenta parámetros como la volatilidad, la media del proceso y la tasa de reversión a la media (Ornstein, 1930). Inicialmente, este modelo fue usado para estudiar el comportamiento de los gases, específicamente la velocidad de una partícula individual.

Sin embargo, no está limitado a la física, ya que también fue uno de los primeros modelos aplicados en finanzas para medir la desviación de una tasa de interés respecto a una tasa fija dada (Steele, 2001). Adicionalmente, una de las aplicaciones más importantes en este ámbito es el modelo de Black-Scholes, el cual se empleó para calcular el valor de una opción de compra europea. Este descubrimiento les otorgó a Robert C. Merton y Myron S. Scholes el Premio Nobel de Economía en 1997 (Black y Scholes, 1973).

Este documento está motivado en comprender de manera rigurosa el cálculo estocástico basado en procesos de Wiener, sustentado en una sólida base analítica. Para ello, resulta fundamental el estudio de la teoría de la probabilidad. Conceptos como espacios de probabilidad, variables aleatorias, procesos estocásticos, filtraciones, entre otros, fundamentan el trabajo realizado. Se busca que las definiciones y resultados presentados, aunque inicialmente puedan ser complejos de entender, se vuelvan intuitivos a través de explicaciones apoyadas en ejemplos, observaciones y discusiones breves, que en ocasiones involucran nociones de cursos como análisis o ecuaciones diferenciales. Se recomienda al lector que, antes de analizar los capítulos principales de este texto, revise los apéndices A y B, ya que en estos apartados se expone la teoría de probabilidad y los fundamentos de análisis necesarios para su estudio.

La tesis se distribuye en tres capítulos, que se detallan a continuación.

En el capítulo 1, se estudia el *movimiento browniano*. Para ello, se introducen algunos conceptos preliminares como procesos estocásticos, filtraciones, martingalas y stopping times. A continuación, se presenta el movimiento browniano, comenzando con el análisis de algunas ideas generales del proceso y mostrando implicaciones de su definición. Esto motiva a pensar bajo qué condiciones el recíproco de dichas implicaciones son válidas. El trabajo las analiza, dando lugar a dos caracterizaciones de la definición. Asimismo, se explican detalladamente las propiedades deterministas del proceso, con el propósito de mostrar su comportamiento a lo largo del tiempo. En esta parte del capítulo, se hace hincapié en exhibir las consecuencias de cada uno de los teoremas, mostrando imágenes que ayuden en aclarar o precisar algunas de las ideas. Teoremas fundamentales, como el teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy y la ley del logaritmo iterado, proporcionan información valiosa sobre la regularidad de las trayectorias del proceso (como la Hölder continuidad) y explican su comportamiento altamente oscilatorio. Estas propiedades tienen pruebas extensas y no triviales, y el trabajo busca demostrarlas de manera

exhaustiva, facilitando al lector su comprensión, dado que en algunos libros las pruebas son simplificadas. Otras características clave, como la no diferenciabilidad casi segura de sus trayectorias, su variación cuadrática no nula y su variación infinita, son importantes para definir posteriormente la integral de Itô.

En el capítulo 2 se analiza la *integral de Itô*. Un teorema de análisis funcional permite conceptualizar esta integral estocástica como un operador lineal acotado, facilitando la demostración directa de algunas propiedades clave, como que el operador integral es una variable aleatoria en el espacio $\mathbf{L}^2(\Omega)$, donde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad. Dicha propiedad puede resultar un poco menos intuitiva en un enfoque probabilista. Esta definición alternativa y *equivalente* a la integral presentada por Itô destaca la dualidad entre el análisis y la probabilidad, subrayando la importancia de comprender ambas teorías. En este capítulo, se explican además detalladamente algunas características de la integral estocástica, incluyendo aquellas similares a las de las integrales que se estudian en cursos de cálculo y teoría de la integración, así como propiedades más específicas del ámbito probabilístico, como la isometría de Itô y la propiedad de martingala. Se aborda también la dificultad de calcular integrales mediante su definición, y se presentan condiciones que facilitan este proceso, algunas análogas a los límites de sumas de la integral de Riemann. Asimismo, se ilustran ejemplos de integrales de Itô, tanto en términos de cálculo como de propiedades.

En el capítulo 3 se estudian las *ecuaciones diferenciales estocásticas*. El propósito aquí es presentar exhaustivamente las aplicaciones de los capítulos 1 y 2. Para ello, se introduce la teoría necesaria sobre los procesos de Itô y se presenta un resultado fundamental: la fórmula de Itô, la cual tiene amplios usos tanto en el cálculo de integrales estocásticas y el estudio de sus propiedades, como en la resolución de ecuaciones diferenciales estocásticas. Se exponen una gran cantidad de ejemplos de las aplicaciones mencionadas y se estudian algunas ecuaciones diferenciales estocásticas, centrándose en su existencia, unicidad y encontrando su solución explícita. Por último, se presenta el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas.

Capítulo 1

Movimiento browniano

En 1827 el botánico Robert Brown observó que las trayectorias recorridas por partículas de polen en agua se comportaban de manera aleatoria y con fuertes cambios de dirección, fenómeno que no pudo explicar, pero se convirtió en uno de los problemas científicos más importantes de inicios del siglo XX. Si bien en un principio se pensó que este tipo de movimiento se debía a que el polen provenía de materia viva, Brown probó que cualquier partícula pequeña suspendida en un fluido seguía estas características en su recorrido, incluso si procede de materia inorgánica (Brown, 2022). Fue por ello que a este efecto se le denominó movimiento browniano en su honor.

El primero en describir matemáticamente el movimiento browniano fue el astrónomo Thorvald Thiele en 1880, en un documento sobre el método de mínimos cuadrados (Thiele, 1880). En 1900 el matemático Louis Bachelier, en su intento de predecir las fluctuaciones de las acciones de la bolsa de valores en el mercado de París, creó un modelo de movimiento browniano (Bachelier, 1900). En su trabajo, Bachelier usando ideas del teorema del límite central, la propiedad de Markov y conectando el movimiento con la ecuación del calor, dedujo que los incrementos en los precios de las acciones debían ser independientes y estar normalmente distribuidos; propiedades que, en particular, satisface el movimiento browniano como se conoce actualmente. Sin embargo, a pesar de los aportes que ellos realizaron, no tuvieron gran influencia en su momento. Fue en 1905 cuando el físico Albert Einstein explicó en su artículo (Einstein, 1905) que, gracias a la cinética molecular de la teoría del calor, las partículas se movían aleatoriamente. De manera más precisa, Einstein a través de una foto de microscopio afirmó que, debido al calor que producen las fluctuaciones cinéticas de los átomos, las partículas brownianas al sufrir un número grande de

choques entre ellas, producían el movimiento observado por Brown. La verificación experimental que hizo el químico físico Jean Baptise Perrin sobre la teoría de Einstein logró demostrar la naturaleza atómica de la materia, que había estado en disputa hasta dicho momento, obteniendo por ello el Premio Nobel de Física en 1926. La definición formal del movimiento browniano se debe al matemático Norbert Wiener, pero fue tiempo después que el matemático Paul Lévy, quien hizo contribuciones significativas en el desarrollo de la probabilidad, mostró algunas de sus propiedades más importantes. Dada la gran contribución de Wiener, el movimiento browniano es también llamado proceso de Wiener. Un desarrollo histórico más detallado se puede encontrar en (Jarrow y Protter, 2004).

A continuación se describe la forma en la que Einstein de manera teórica probó que el movimiento browniano tiene distribución normal. Si $f(x, t)$ denota la función de densidad de una partícula browniana en el tiempo t , se dedujo que debido al calor que produce el choque aleatorio, se satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.0.1)$$

siendo D el coeficiente de difusión de la partícula. Si dicho objeto está en el origen en el tiempo $t = 0$, la solución de (1.0.1) está dada por

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

la cual corresponde a la distribución gaussiana de media cero y varianza $2Dt$. Una descripción detallada del desarrollo que tuvo la modelación del movimiento browniano a través de su historia se puede consultar en (Bian, Kim, y Karniadakis, 2016). En dicho artículo se presenta, entre otros, el modelo de Langevin (Langevin y cols., 1908), el cual considera la inercia de la partícula browniana.

Si bien el estudio inicial del movimiento browniano estuvo motivado en comprender el movimiento de partículas en un fluido, sus aplicaciones no se reducen únicamente a analizar este tipo de fenómenos. En el mercado de valores y de divisas, en donde el cambio de estado de los activos se ve afectado por cantidades aleatorias, se suponen que siguen un movimiento browniano, y la teoría matemática que los describe, permite modelar la fijación de activos financieros y de precios (Ermogenous, 2006). Por ejemplo, un avance importante que se obtuvo en la valuación de opciones sobre las acciones fue el modelo de Black- Scholes Merton, el cual fue condecorado al Premio Nobel de Economía en 1997. De igual manera, el movimiento browniano es usado en la clasificación de imágenes médicas,

con el fin de determinar la estructura y textura de tejidos específicos, lo cual contribuye a la toma de decisiones respecto a la normalidad o no de dichas imágenes (Duncan, 2007).

En este capítulo se estudia el movimiento browniano que será fundamental en la comprensión del cálculo de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Para ello, en la sección 1.1 se presenta la teoría necesaria sobre procesos estocásticos y filtraciones. En la sección 1.2 se define el movimiento browniano como un proceso estocástico, y se exponen algunas generalidades sobre este. Por último, en la sección 1.3 se explica de manera detallada algunas características de regularidad y comportamiento asintótico de las trayectorias del movimiento browniano.

1.1. Procesos estocásticos y filtraciones

En el apéndice A se estudian algunos conceptos fundamentales de la teoría de la probabilidad, entre estos, el de variable aleatoria (v.a.), el cual permite modelar ciertos fenómenos aleatorios de interés. Surge ahora la necesidad de describir sistemas que se comportan también de manera no determinista, pero que evolucionan a lo largo del tiempo. Es así, como se introduce el término de proceso estocástico, el cual será objeto de estudio en esta sección junto con sus propiedades.

1.1.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.1. *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$ definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde $T \subseteq \mathbb{R}^+$. El conjunto de valores que toman las v.a. X_t , es llamado el espacio de estados del proceso, y se le denota por S . En general, T se interpreta como el tiempo y la función $t \rightarrow X_t(\omega)$ como la trayectoria o camino recorrido por la partícula ω .*

Un proceso $\{X_t\}_{t \in T}$ se dice *continuo* si para todo $\omega \in \Omega$, la función $t \rightarrow X_t(\omega)$ es continua. De la misma forma, el proceso es *continuo c.s.*, si para casi todo $\omega \in \Omega$, la función $t \rightarrow X_t(\omega)$ es continua. Análogamente, se definen los procesos *continuos a derecha* y *continuos a derecha c.s.* El concepto de casi seguramente (c.s.) es explicado en el apéndice A.2.

Un proceso $\{X_t\}_{t \in T}$ se dice *acotado*, si existe una constante $M > 0$, tal que

$$P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \sup_{t \in T} |X_t(\omega)| \leq M \right\} \right] = 1.$$

Las variables aleatorias según el conjunto de valores que toman en $\mathbb{R}$, pueden ser discretas o continuas, ver apéndice A.1. Es natural entonces clasificar los procesos estocásticos dependiendo si su espacio de estados y conjunto de parámetros T es discreto o continuo. El siguiente ejemplo se muestran procesos de estado y tiempo discretos y continuos.

Ejemplo 1.2.

- En un casino se quiere analizar el número de caras que acumula un apostador al lanzar una moneda t veces. Para esto, se considera el espacio de probabilidad $(\Omega, 2^\Omega, P)$, en el cual $\Omega = \{\text{cara}, \text{sello}\}$, y $P(\{\text{cara}\}) = P(\{\text{sello}\}) = 0,5$. Se define la v.a. X_t en $(\Omega, 2^\Omega, P)$ como el número de caras acumuladas hasta el lanzamiento t . Se sigue que la familia $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico de estado y tiempo discretos, donde el conjunto de parámetros es $T = \{0, 1, 2, \dots\}$. En la figura 1.1 se observa una trayectoria del proceso.

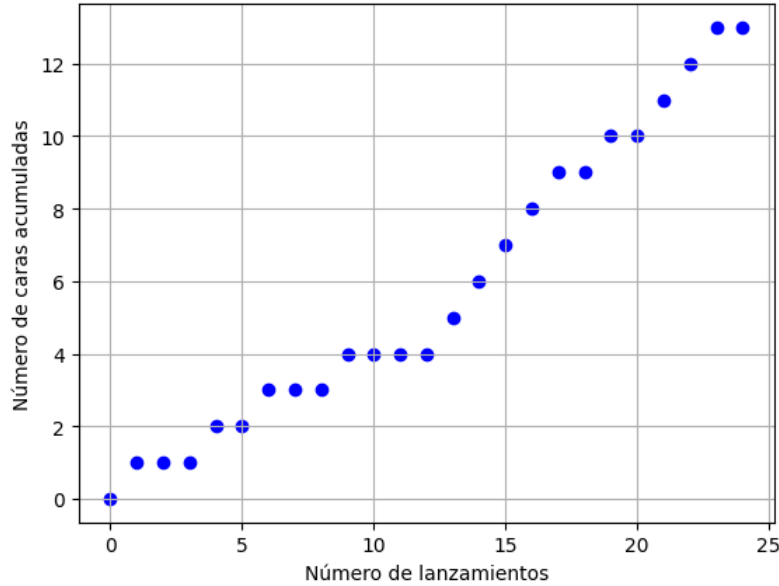


Figura 1.1: Proceso estocástico de estado y tiempo discreto.

- En una compañía telefónica se reciben en promedio λ llamadas por hora. Defina X_t como el número de llamadas que entran a una línea en el intervalo de tiempo $[0, t]$, medido en horas. Entonces $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico de estado discreto $S = \mathbb{N}$ y tiempo continuo $T = [0, \infty)$. En este caso, se considera el espacio de probabilidad $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, donde $\mu(A) = \sum_{\omega \in A} \frac{e^{-\lambda} \lambda^\omega}{\omega!}$, para $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, y $X_t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $X_t(\omega) = \omega$.

- Defina la v.a. X_t como la distancia total recorrida por un automóvil al final del día t . Entonces $\{X_t\}_t$ es un proceso estocástico de estado continuo y tiempo discreto.
- Considere el proceso estocástico $\{X_t\}_t$, donde la v.a. X_t representa el precio en dólares del galón de gasolina en Estados Unidos en el tiempo t . Note entonces que los conjuntos de estado y tiempo son continuos. En la figura 1.2 se muestra una trayectoria del proceso entre mayo de 2020 y mayo de 2024.



Figura 1.2: Proceso estocástico de estado y tiempo continuo. Tomado de Trading Economics (2024).

Observación 1.3. En ocasiones es necesario considerar procesos estocásticos tales que toda colección finita de estas variables aleatorias tengan distribución normal conjunta. A este tipo de familias se les conoce como procesos gaussianos. Se puede demostrar que $\{X_t\}_t$ es un proceso gaussiano si y solo si para todas $X_{t_1}, \dots, X_{t_n} \in \{X_t\}_t$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la v.a. $\alpha_1 X_{t_1} + \dots + \alpha_n X_{t_n}$ tiene ley normal, ver (Baldi, 2017), pp. 19-20.

A continuación, se introducen los conceptos de filtración y adaptación de un proceso estocástico a una filtración. Estas nociones fueron introducidas por primera vez por el matemático Joseph L. Doob en su libro *Stochastic processes* publicado en 1953 (Doob, 1953). Como se verá, las filtraciones son familias de σ -álgebras crecientes, cuyo propósito será guardar información del proceso a lo largo del tiempo. De igual manera, la adaptación de un proceso a una filtración, indica que la dicha familia de variables aleatorias es compatible con la información acumulada. Más precisamente,

Definición 1.4. Una familia de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T} \subseteq \mathcal{F}$ es una filtración en $T \subseteq \mathbb{R}^+$, si $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, para todo $s \leq t$. Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, si la v.a. X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Observación 1.5. A todo proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ se le puede adaptar una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. En efecto, tome $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$, esto es, la σ -álgebra generada por las variables aleatorias X_s , para $s \leq t$, $s, t \in T$. Esta familia se conoce como la filtración natural, es de notar que cualquier otra filtración adaptada al proceso, contiene a la filtración natural.

Debido a que a todo proceso $\{X_t\}_{t \in T}$ se le puede asociar una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, es usual utilizar la notación $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \{X_t\}_{t \in T}, P)$, con el fin de enfatizar el espacio de probabilidad en donde está definido y la filtración al cual está adaptado.

Ejemplo 1.6. Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad. Defina para cada $A \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset, \Omega\}$, $t \in [a, b]$, la familia $\{X_t\}_{t \in [a, b]}$ por

$$X_t(\omega) = \begin{cases} f(t)\chi_{\{t > (a+b)/2\}}(t), & \omega \in A \\ -f(t)\chi_{\{t > (a+b)/2\}}(t), & \omega \notin A \end{cases}$$

siendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces para todo $t \in [a, b]$, X_t es una v.a. ya que $X_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \{\emptyset, \Omega, A, A^c\} \subseteq \mathcal{F}$.

Considere $t \in [a, b]$ fijo. Si $t \leq (a+b)/2$, se tiene que $X_t(\omega) = 0$, $\omega \in \Omega$. Entonces, si se toma la σ -álgebra $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$, X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible. Por otro lado, si $t > (a+b)/2$ se sigue que

$$X_t(\omega) = \begin{cases} f(t), & \omega \in A \\ -f(t), & \omega \notin A \end{cases}$$

Note que X_t es $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ -medible. Por tanto, la colección creciente de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_t$ dada por

$$\mathcal{F}_t = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\}, & t \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}, & t \in (\frac{a+b}{2}, b] \end{cases}$$

es una filtración para la cual $\{X_t\}_t$ está adaptado. Más aún, de la misma construcción, $\{\mathcal{F}_t\}_t$ es la filtración más pequeña que hace que el proceso satisfaga esta condición.

Observación 1.7. *En ocasiones, es necesario considerar filtraciones más grandes que la natural, ya que puede brindar más información sobre el proceso u obtener mayores propiedades sobre este. Por ejemplo,*

- *si se considera la colección de eventos insignificantes de $\mathcal{F}$, $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = 0\}$, una filtración que a menudo es usada es la filtración natural aumentada $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_t$, la cual es obtenida de añadir los eventos de probabilidad cero a la filtración natural asociada al proceso, $\{\mathcal{F}_t\}$. De manera más específica, $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(\mathcal{F}_t, \mathcal{N})$. Con el fin de mostrar una aplicación de tomar la filtración $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_t$, suponga que $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{X_t\}_t, P)$ es un proceso estocástico y $\{Y_t\}_t$ es una familia de variables aleatorias definidas en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $X_t = Y_t$, c.s. Es natural preguntarse bajo qué condiciones $\{Y_t\}_t$ es un proceso adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_t$, es decir, cuándo Y_t es $\mathcal{F}_t$ -medible, para cada t . Se sabe que esto es cierto si $\mathcal{F}_t$ contiene a $\mathcal{N}$ (ver (Folland, 1999), p. 47). Así mismo, si $\{X_t^{(n)}\}_n$ es una sucesión de variables aleatorias $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -medibles, que converge puntualmente a X_t , X_t es $\tilde{\mathcal{F}}_t$ -medible; propiedad que en particular no necesariamente se satisface en caso de considerar a la filtración natural $\{\mathcal{F}_t\}_t$.*
- *si $\{\mathcal{F}_t\}_t$ es una filtración, $\bigcup_t \mathcal{F}_t$ no es necesariamente una σ -álgebra. Denote por $\mathcal{F}_\infty$ a la menor σ -álgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ que contiene a $\bigcup \mathcal{F}_t$. Observe que $\bigcup \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, y por tanto, $\mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{F}$. En particular, esto significa que $\mathcal{F}_\infty$ no contiene más información que la dada por $\mathcal{F}$. Sin embargo, incluye la información completa disponible a lo largo del tiempo. Es decir, $\mathcal{F}_\infty$ es la menor σ -álgebra que contiene toda la información.*
- *sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ una filtración. Para cada $t \in T$ considere la σ -álgebra*

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}.$$

Note que para todo $t \in T$ y $\varepsilon > 0$, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$, puesto que $\{\mathcal{F}_t\}_t$ es una familia creciente. Esto implica que $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+}$. En caso de que $\{\mathcal{F}_t\}_t$ también satisfaga $\mathcal{F}_{t+} \subseteq \mathcal{F}_t$, a la filtración se le conoce como continua a derecha. Intuitivamente, una familia de σ -álgebra con dichas propiedades puede interpretarse como que $\mathcal{F}_t$ contiene los eventos mínimos que han ocurrido hasta el tiempo t .

En la observación 1.7 se explica la importancia de considerar filtraciones como la filtración natural aumentada. Este tipo de familias de σ -álgebras que contienen los eventos insignificantes de $\mathcal{F}$ son llamadas *completas*, y tienen las mismas aplicaciones que las expuestas en dicha observación. Una suposición que a menudo es considerada cuando se trabaja con

procesos estocásticos es que las filtraciones a las cuales están adaptados cumplan con propiedades como la mencionada. Como ejemplo de esto, se introduce el concepto de *proceso estándar*.

Definición 1.8. *Un proceso estocástico $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \{X_t\}_{t \in T}, P)$ se dice estándar si*

1. *la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ es continua a derecha,*
2. *para cada t , $\mathcal{F}_t$ contiene los eventos insignificantes de $\mathcal{F}$.*

A continuación, se define cuándo dos procesos son modificaciones uno del otro.

Definición 1.9. *Sean $\{X_t\}_{t \in T}$, $\{Y_t\}_{t \in T}$ dos procesos estocásticos adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_t$. $\{X_t\}_t$ se dice una modificación o una versión de $\{Y_t\}_t$ si para todo $t \in T$, $X_t = Y_t$ c.s.*

Ejemplo 1.10. *Considere el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$, donde P denota la medida de Lebesgue en $\mathcal{B}([0, 1])$. Defina los procesos estocásticos $\{X_t\}_{t \in T}$ y $\{X'_t\}_{t \in T}$ por*

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega\}}(t), \quad X'_t(\omega) = 0.$$

Para $t \in T$ fijo, $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)\} = \{\omega = t\}$, y $P(\{\omega = t\}) = 0$. Por tanto, $P(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega)\}) = 1$. Esto muestra que $\{X_t\}_t$ es una modificación de $\{X'_t\}_t$. Observe sin embargo que $\{Y_t\}_t$ es un proceso continuo y $\{X_t\}_t$ no lo es. En consecuencia, la propiedad de continuidad, en general, no es preservada por modificaciones.

El siguiente teorema da un criterio que asegura cuándo un proceso acepta una modificación continua. Su demostración puede ser consultada en (Baldi, 2017), pp. 35-37.

Teorema 1.11. *(Teorema de continuidad de Kolmogorov). Considere un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in D}$ definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde $D \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Suponga que existen $\alpha, \beta, c > 0$, tales que el proceso cumple que*

$$E[|X_t - X_s|^\beta] \leq c|t - s|^{1+\alpha}.$$

Entonces existe una familia de variables aleatorias $\{\tilde{X}_t\}_{t \in D}$ tal que

$$X_t = \tilde{X}_t \text{ c.s. para todo } t \in D.$$

Además, para todo $\omega \in \Omega$, la función $t \rightarrow \tilde{X}_t(\omega)$ es continua e incluso Hölder continua con exponente γ , para todo $\gamma < \alpha/\beta$ en todo subconjunto compacto de D .

En la teoría de procesos estocásticos, es fundamental estudiar cómo se relacionan y caracterizan distintos procesos, ya que permiten describir y analizar su comportamiento a lo largo del tiempo u obtener propiedades sobre estos. Entre los conceptos importantes están los de medibilidad y medibilidad progresiva, equivalencia e indistinguibilidad, los cuales se precisan a continuación.

Definición 1.12.

Sean $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \{X_t\}_{t \in T}, P)$ y $X' = (\Omega', \mathcal{F}', \{\mathcal{F}'_t\}_{t \in T}, \{X'_t\}_{t \in T}, P')$ procesos estocásticos. Entonces

1. X y X' son equivalentes si para todos $t_1, \dots, t_m \in T$, las v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ y $(X'_{t_1}, \dots, X'_{t_m})$ tienen la misma ley o distribución. (La definición de ley puede consultarse en el apéndice [A.1](#)).
2. X y X' se dicen indistinguibles si $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, P) = (\Omega', \mathcal{F}', \{\mathcal{F}'_t\}_t, P')$ y $P(\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega) \text{ para todo } t \in T\}) = 1$.
3. X es medible si la función $(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ es $\mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F}$ -medible.
4. X es progresivamente medible si para cada $u \in T$, la función $X : [0, u] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{B}([0, u]) \otimes \mathcal{F}_u$ -medible.

Observación 1.13. Se exponen a continuación algunas relaciones entre los conceptos descritos en la definición [1.12](#).

- Suponga que X y X' son procesos indistinguibles. Entonces X es una modificación de X' . Para esto, bastaría probar que para cada $t \in T$, $X_t = X'_t$ c.s. En efecto, note que para cada $t \in T$, se tiene que

$$\{\omega \in \Omega : X_s(\omega) = X'_s(\omega), \text{ para todo } s \in T\} \subseteq \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega)\},$$

por tanto,

$$\begin{aligned} 1 &= P[\{\omega \in \Omega : X_s(\omega) = X'_s(\omega), \text{ para todo } s \in T\}] \\ &\leq P[\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega)\}], \end{aligned}$$

de esto se concluye que X es una modificación de X' . Sin embargo, el recíproco no siempre es válido. Para ilustrar esto, considere los procesos $\{X_t\}_t$ y $\{X'_t\}_t$, definidos por $X_t(\omega) = 1_{\{\omega\}}(t)$ y $X'_t(\omega) = 0$. Note que $\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega) \text{ para todo } t \in T\} = \emptyset$ y $P(\emptyset) = 0$. Por tanto, X y X' no son indistinguibles, pero si son modificaciones uno del otro por lo presentado en el ejemplo [1.10](#).

- Si X y X' son procesos estocásticos tales que X es una modificación de X' , entonces X y X' son equivalentes. Para la prueba, considere $t \in T$. Entonces el evento $A = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega)\}$ es tal que $P(A^c) = 0$. Ahora bien, si P_{X_t} y $P_{X'_t}$ denotan las leyes de las v.a. X_t y X'_t , respectivamente, para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se satisface que

$$\begin{aligned}
P_{X_t}(B) &= P[X_t^{-1}(B)] = P[(X_t^{-1}(B) \cap A) \cup (X_t^{-1}(B) \cap A^c)] \\
&= P[X_t^{-1}(B) \cap A] + P[X_t^{-1}(B) \cap A^c] \\
&= P[X_t^{-1}(B) \cap A] \\
&= P[\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B\} \cap \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = X'_t(\omega)\}] \\
&= P[\{\omega \in \Omega : X'_t(\omega) \in B\}] \\
&= P_{X'_t}(B).
\end{aligned}$$

En el razonamiento anterior se ha usado el hecho que $P[X_t^{-1}(B) \cap A^c] = 0$, puesto que $X_t^{-1}(B) \cap A^c \subseteq A^c$. Se concluye entonces que $P_{X_t} = P_{X'_t}$.

Ahora bien, si $t_1, t_2 \in T$, al ser X y X' modificaciones, se sigue que $X_{t_1} = X'_{t_1}$ y $X_{t_2} = X'_{t_2}$ c.s. Sean $A_1 = \{\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) = X'_{t_1}(\omega)\}$ y $A_2 = \{\omega \in \Omega : X_{t_2}(\omega) = X'_{t_2}(\omega)\}$. Entonces para cualesquier $B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&P[X_{t_1}^{-1} \in B, X_{t_2}^{-1} \in C] \\
&= P[(X_{t_1}^{-1}(B) \cap A_1) \cup (X_{t_1}^{-1}(B) \cap A_1^c)] \cap [(X_{t_2}^{-1}(C) \cap A_2) \cup (X_{t_2}^{-1}(C) \cap A_2^c)].
\end{aligned}$$

Denote por $D_1 = X_{t_1}^{-1}(B) \cap A_1$, $D_2 = X_{t_1}^{-1}(B) \cap A_1^c$, $D_3 = X_{t_2}^{-1}(C) \cap A_2$ y $D_4 = X_{t_2}^{-1}(C) \cap A_2^c$. Entonces como $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = \emptyset$ por propiedades de la medida se cumple

$$\begin{aligned}
P[X_{t_1}^{-1} \in B, X_{t_2}^{-1} \in C] &= P[(D_1 \cap D_3) \cup (D_1 \cap D_4) \cup (D_2 \cap D_3) \cup (D_2 \cap D_4)] \\
&= P[D_1 \cap D_3] + P[D_1 \cap D_4] + P[D_2 \cap D_3] + P[D_2 \cap D_4] \\
&= P[D_1 \cap D_3] \\
&= P[(X_{t_1}^{-1}(B) \cap A_1) \cap (X_{t_2}^{-1}(C) \cap A_2)] \\
&= P[X'_{t_1}(B), X'_{t_1}(C)],
\end{aligned}$$

donde $P[D_1 \cap D_4] = P[D_2 \cap D_3] = P[D_2 \cap D_4] = 0$, ya que $D_1 \cap D_4 \subseteq D_4 \subseteq A_2^c$, y $D_2 \cap D_3 \subseteq D_2 \subseteq A_1^c$, con $P[A_1^c] = P[A_2^c] = 0$. Esto muestra que (X_{t_1}, X_{t_2}) y (X'_{t_1}, X'_{t_2}) tienen la misma ley. Por un argumento inductivo, se concluye que las v.a. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ y $(X'_{t_1}, \dots, X'_{t_m})$ tienen la misma distribución, para todos $t_1, \dots, t_m \in T$.

- Si $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}, \{X_t\}_{t \in [a,b]}, P)$ es progresivamente medible, entonces X es medible.

Las proposiciones 1.14 y 1.15 proporcionan propiedades adicionales de los procesos estocásticos continuos a derecha y equivalentes. Sus demostraciones pueden ser consultadas en (Baldi, 2017), pp. 33-34, 452-453.

Proposición 1.14. Si $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{X_t\}_t, P)$ es un proceso estocástico continuo a derecha, entonces es progresivamente medible.

Proposición 1.15. Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \{X_t\}_{t \in T}, P)$ y $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t \in T}, \{\tilde{X}_t\}_{t \in T}, \tilde{P})$ son procesos equivalentes.

- Sea $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq T$. Suponga que existe $\ell \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{t_n} = \ell \quad c.s.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_{t_n} = \ell \quad c.s.$$

- Si para $t \in T$ el límite

$$\lim_{s \rightarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s = \ell$$

existe para algún $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{s \rightarrow t, s \in \mathbb{Q}} \tilde{X}_s = \ell.$$

1.1.2. Stopping times

En ocasiones, es de interés conocer la primera vez en que ocurre cierto fenómeno aleatorio, ya que puede brindar información útil para gestionar recursos, optimizar procesos o mejorar modelos predictivos. Por ejemplo, en finanzas, la detección temprana de una caída del mercado puede conducir a decisiones de inversión de manera más eficiente; en epidemiología, el reporte del primer caso de infección es esencial para desplegar medidas de control y contención de la enfermedad. Si τ representa la variable aleatoria que mide la primera aparición de un suceso, resulta natural pensar que el evento $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\}$ ocurre si y solo si forma parte de la información acumulada hasta ese momento.

Definición 1.16. Considere una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. Una v.a. $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ es llamada un *stopping time* si, para cada $t \in T$, el evento $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Asociada al *stopping time* τ , se define la σ -álgebra

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{ para todo } t \in T\},$$

donde $\mathcal{F}_\infty$ denota la menor σ -álgebra de $\mathcal{P}(\Omega)$ que contiene a $\bigcup_t \mathcal{F}_t$ (ver observación 1.13).

La condición $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ garantiza que no es de relevancia lo que suceda a futuro y que la decisión de parar un suceso, τ , en el tiempo t o antes de t debe estar determinada por la información dada por $\mathcal{F}_t$. De igual manera, la σ -álgebra $\mathcal{F}_\tau$ en la definición 1.16 contiene los eventos para los cuales en el tiempo τ se puede decir que se han satisfecho o no.

Ejemplo 1.17.

- Toda v.a. $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ definida por $\tau := t_0 \in \mathbb{R}$ es un stopping time. Para mostrar esto, observe que para cada $t \in T$,

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} = \begin{cases} \Omega, & t_0 \leq t, \\ \emptyset & t_0 > t, \end{cases}$$

En cualquier caso, se tiene que $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

- Considere un proceso estocástico $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, P)$. Defina la v.a. $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, por $\tau(\omega) = \inf \{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) = 0\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} &= \{\omega \in \Omega : \inf \{m \in \mathbb{N} : X_m(\omega) = 0\} \leq n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \exists k \in \mathbb{N}, X_k(\omega) = 0, \tau(\omega) < k \leq n\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \exists k \leq n, X_k(\omega) = 0\} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) = 0\} \in \mathcal{F}_n, \end{aligned}$$

puesto que X_k es v.a., para $k = 1, \dots, n$. Por tanto, τ es un stopping time.

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de los stopping times y sus σ -álgebras asociadas. Para la demostración ver (Karatzas y Shreve, 2014), p.7. y (Baldi, 2017), pp. 63-64.

Proposición 1.18. Sean τ_1, τ_2 stopping times y $\mathcal{F}_{\tau_1}, \mathcal{F}_{\tau_2}$ sus σ -álgebras asociadas. Entonces

1. $\tau_1 + \tau_2$, $\min\{\tau_1, \tau_2\}$, y $\max\{\tau_1, \tau_2\}$ son stopping times.
2. τ_1 es $\mathcal{F}_{\tau_1}$ -medible.
3. Si $\tau_1 \leq \tau_2$, entonces $\mathcal{F}_{\tau_1} \leq \mathcal{F}_{\tau_2}$.
4. $\mathcal{F}_{\min\{\tau_1, \tau_2\}} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Con el fin de facilitar la demostración que una v.a. es un stopping time, e incluso visualizar mejor algunos resultados, es importante caracterizar dichas v.a. En la proposición 1.19 se establecen condiciones bajo las cuales se puede garantizar que una v.a. es un stopping time.

Proposición 1.19. *Suponga que $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\infty\}$ es una v.a y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ es una filtración. Entonces*

1. τ es un stopping time respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_t$ si y solo si el proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t \in T}$, dado por

$$X_t := 1_{\{t < \tau\}} = \begin{cases} 1, & t < \tau, \\ 0, & t \geq \tau. \end{cases}$$

es adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$.

2. Si $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ es continua a derecha, τ es un stopping time si y solo si $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \in T$. La definición de filtraciones continuas a derecha se encuentra en la observación 1.13.

Demostración.

1. Suponga que τ es un stopping time respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ y considere $A \in \mathcal{B}(T \cup \{\infty\})$. Entonces se dan uno de los siguientes casos:
 - a) $X_t^{-1}(A) = \Omega \in \mathcal{F}_t$, si $0, 1 \in A$.
 - b) $X_t^{-1}(A) = \{t < \tau\} = \{\tau \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$, siempre que $0 \notin A, 1 \in A$.
 - c) $X_t^{-1}(A) = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, cuando $0 \in A, 1 \notin A$.
 - d) $X_t^{-1}(A) = \emptyset$, siempre que $0, 1 \notin A$.

Esto muestra que $X_t = 1_{\{t < \tau\}}$ es un proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$.

Ahora bien, si $\{X_t\}_{t \in T}$ es tal que X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible, para cada $t \in T$, entonces $X_t^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}_t$. Pero, $X_t^{-1}(\{0\}) = \{\tau \leq t\}$. Por tanto, τ es un stopping time.

2. Sea τ un stopping time. Entonces

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t.$$

Por otro lado, si para cada $t \in T$, $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$. Entonces

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) < t + \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon},$$

para todo $\varepsilon > 0$. Pero, al ser $\{\mathcal{F}_t\}_t$ continua a derecha se tiene que $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Así, $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Por tanto, τ es un stopping time.

□

Tome $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ y considere las v.a. τ_A, ρ_A con valores en $[0, \infty]$, definidas por

$$\begin{aligned}\tau_A &= \inf\{t \geq 0 : X_t \notin A\}, \\ \rho_A &= \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}.\end{aligned}$$

Entonces τ_A y ρ_A son llamadas el *tiempo de salida* de A y el *tiempo de entrada* en A , respectivamente. Se asume la convención que el ínfimo del conjunto vacío es igual a ∞ . En particular, esto indica que $\tau_A = \infty$, si $X_t \in A$, para todo $t \geq 0$. De manera intuitiva, τ_A y ρ_A son stopping times. Sin embargo, se deben añadir condiciones al conjunto A para que se satisfaga esta propiedad, como lo afirma la proposición 1.20. El lector interesado puede consultar la prueba en (Revuz y Yor, 2013), p.43.

Proposición 1.20. *Suponga que $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{X_t\}_t, P)$ es un proceso estocástico continuo.*

1. *Si A es un conjunto abierto, τ_A es un stopping time.*
2. *Si A es un conjunto cerrado y $\{X_t\}_t$ es continua a derecha, entonces τ_A es un stopping time.*

Observe que, a partir de la proposición anterior, se deduce que ρ_{A^c} es un stopping time, siempre que A sea un conjunto abierto o A sea cerrado y $\{X_t\}_t$ sea continua a derecha. Estas propiedades se deben a que $\tau_A = \rho_{A^c}$.

1.1.3. Martingalas

En esta sección, T denota un intervalo de $\mathbb{R}$ o el conjunto de los enteros positivos. Así mismo, se asume que las v.a. están definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definición 1.21. *Considere un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, tal que $E[|X_t|] < \infty$ para todo $t \in T$. Si para cualquier $s \leq t$, con $s, t \in T$,*

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \text{ c.s.,}$$

entonces $\{X_t\}_{t \in T}$ es llamado una martingala con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. Si $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$ o $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$ c.s., $\{X_t\}_{t \in T}$ es llamado una submartingala o una supermartingala, respectivamente.

La definición de esperanza condicional de X_t dado $\mathcal{F}_s$, $E[X_t|\mathcal{F}_s]$, así como algunas de sus propiedades, se explican en la sección A.4 del apéndice A. De manera intuitiva, una martingala puede interpretarse como un proceso en el cual la información suministrada por la v.a. X_t , dada la σ -álgebra $\mathcal{F}_s$, está completamente determinada por la v.a. X_s , para cualquier $s \leq t$.

En caso que no se especifique cuál es la filtración asociada al proceso $\{X_t\}_t$, se asume que $\{\mathcal{F}_t\}_t$ es la natural. Si $\{X_t\}_t$ es una martingala (supermartingala, submartingala), se dice que $\{X_t\}_t$ está en $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $p \geq 1$, si $X_t \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ para todo t (ver definición en la sección B.3.1). En caso que $p = 2$, la martingala (supermartingala, submartingala) es llamada *cuadrado integrable*.

Con el fin de ilustrar los conceptos de la definición 1.21, se muestra en lo que sigue algunos ejemplos. En particular, un movimiento browniano (ver definición en 1.25) es una martingala respecto a cualquier filtración a la cual el proceso esté adaptado.

Ejemplo 1.22.

- Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. independientes e idénticamente distribuidas con esperanza finita y tome $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Entonces $\{Y_n\}_n$ es una submartingala si $E[X_1] \geq 0$, una supermartingala si $E[X_1] \leq 0$ y una martingala si $E[X_1] = 0$. Para demostrar esto, considere la filtración $\{\mathcal{F}_n\}_n$ dada por $\mathcal{F}_n = \sigma(X_m : m \leq n)$. Observe entonces que Y_n es $\mathcal{F}_n$ -medible y $E[|Y_n|] < \infty$, ya que cada X_i es $\mathcal{F}_n$ -medible y $E[|X_i|] < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Sea $m \leq n$. Entonces para $i = 1, \dots, m$, la v.a. X_i es $\mathcal{F}_m$ -medible. Así, por la proposición A.38, se tiene que

$$\begin{aligned} E[Y_n|\mathcal{F}_m] &= E[X_1 + \cdots + X_m + X_{m+1} + \cdots + X_n|\mathcal{F}_m] \\ &= X_1 + \cdots + X_m + E[X_{m+1}|\mathcal{F}_m] + \cdots + E[X_n|\mathcal{F}_m]. \end{aligned}$$

Ahora bien, como las v.a. X_{m+l} son independientes de X_s , para todo $l = 1, \dots, n$, $s \leq m$, entonces X_{m+l} es independiente de $\mathcal{F}_m$. Por la proposición A.38, se deduce

que

$$\begin{aligned} E[Y_n|\mathcal{F}_m] &= Y_m + E[X_{m+1}] + \cdots + E[X_n] \\ &= Y_m + E[X_1] + \cdots + E[X_n] \\ &= Y_m + (n - m)E[X_1], \end{aligned}$$

puesto que las v.a. X_{m+l} son idénticamente distribuidas. Así,

$$\begin{aligned} E[X_n|\mathcal{F}_m] &\geq Y_m, \text{ si } E[X_1] \geq 0, \\ E[X_n|\mathcal{F}_m] &\leq Y_m, \text{ si } E[X_1] \leq 0, \\ E[X_n|\mathcal{F}_m] &= Y_m, \text{ si } E[X_1] = 0. \end{aligned}$$

- Suponga que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. Entonces por la propiedad **II** en la definición 1.25, para todo $t \in T$, usando la desigualdad de Hölder, se satisface que

$$E[|B_t|]^2 \leq E[|B_t|^2] = E[|B_t|^2] - E[B_t]^2 = t < \infty.$$

Más aún, si $s \leq t$, $s, t \in T$, entonces

$$\begin{aligned} E[B_t|\mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s \\ &= B_s, \end{aligned}$$

en el razonamiento anterior, se ha usado la proposición A.38, teniendo en cuenta que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y B_s es $\mathcal{F}_s$ -medible, gracias a la propiedad **III** de la definición 1.25, y la adaptación del movimiento browniano a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_t$. Esto muestra que $\{B_t\}_{t \in T}$ es una martingala respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. No obstante, dado que el valor esperado de B_t^2 no es constante, $E[B_t^2] = t$, entonces el proceso $\{B_t^2\}_{t \in T}$ no es una martingala. Más aún, $\{B_t^2 - t\}_{t \geq 0}$ es una martingala.

Observación 1.23.

1. Suponga que $\{X_t^{(i)}\}_{t \in T}$ es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, para cada $i = 1, \dots, n$, y considere $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Entonces la v.a. $\alpha_1 X_t^{(1)} + \alpha_2 X_t^{(2)} + \cdots + \alpha_n X_t^{(n)}$ es $\mathcal{F}_t$ -medible, puesto que cada $X_t^{(i)}$ lo es. De la misma forma, como $X_t^{(i)}$

es integrable para cada i , $E[|\alpha_1 X_t^{(1)} + \cdots + \alpha_n X_t^{(n)}|] < \infty$. Ahora, para todo $s \leq t$, se tiene que

$$E[\alpha_1 X_t^{(1)} + \alpha_2 X_t^{(2)} + \cdots + \alpha_n X_t^{(n)} | \mathcal{F}_s] = \sum_{i=1}^n \alpha_i E[X_t^{(i)} | \mathcal{F}_s] = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_s^{(i)}.$$

Esto muestra que $\{\alpha_1 X_t^{(1)} + \alpha_2 X_t^{(2)} + \cdots + \alpha_n X_t^{(n)}\}_t$ es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_t$. En particular, si $\{X_t\}_t$ es una martingala, el proceso $\{-X_t\}_t$ es también una martingala.

Por otro lado, si $\{X_t^{(i)}\}_t$ es una submartingala, $i = 1, \dots, n$. Para todo $\alpha_i \geq 0$, se sigue que

$$E\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i X_t^{(i)} | \mathcal{F}_s\right] \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i X_s^{(i)}.$$

Por tanto, $\{\alpha_1 X_t^{(1)} + \alpha_2 X_t^{(2)} + \cdots + \alpha_n X_t^{(n)}\}_t$ es una submartingala. De la misma forma, se muestra que combinación lineal de coeficientes no negativos de supermartingalas es supermartingala.

2. Sea $\{X_t\}_t$ una martingala y $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, tal que $f(X_t)$ es integrable para cada t , con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo. Entonces, por la desigualdad de Jensen para esperanza condicional presentada en la proposición A.39, para todo $s \leq t$, se infiere que

$$E[f(X_t) | \mathcal{F}_s] \geq f(E[X_t | \mathcal{F}_s]) = f(X_s).$$

En consecuencia, $f(X_t)$ es una submartingala. En particular, si $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función $x \rightarrow |x|^p$, $p \geq 1$, entonces $f(X_t) = |X_t|^p$ es una submartingala.

El siguiente resultado proporciona una propiedad sobre las submartingalas continuas a derecha. Su demostración puede ser consultada en (Ribet, 2006), pp. 51-52.

Proposición 1.24. *Suponga que $\{Y_t\}_{t \in [a, b]}$ es una submartingala continua a derecha. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$, se cumple que*

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \sup_{t \in [a, b]} Y_t(\omega) \geq \varepsilon\right\}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} E[Y_b^+],$$

donde Y_b^+ es la parte positiva de Y_b . En particular, si $\{Y_t\}_{t \in [a, b]}$ es una martingala continua a derecha, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \sup_{t \in [a, b]} Y_t(\omega) \geq \varepsilon\right\}\right] \leq \frac{1}{\varepsilon} E[Y_b].$$

1.2. Definición y propiedades básicas del movimiento browniano

En lo que sigue, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota un espacio de probabilidad y las variables aleatorias se asumen que están definidas en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definición 1.25. *Un proceso estocástico $\{B_t\}_{t \in T}$ adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, donde $T \subseteq \mathbb{R}^+$, es un **movimiento browniano** si satisface las siguientes propiedades:*

- I. $B_0 = 0$ c.s., lo que es equivalente a $P[\{\omega \in \Omega : B_0(\omega) = 0\}] = 1$.
- II. Para cualesquier $0 \leq s < t$, la v.a. $B_t - B_s$ distribuye normal con media cero y varianza $t - s$, esto es, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P(B_t - B_s \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_A e^{-x^2/2(t-s)} dx,$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ -álgebra de borel en $\mathbb{R}$.

- III. Para todos $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$.
- IV. Las trayectorias de un movimiento browniano son continuas casi seguramente, es decir, $P(\{\omega \in \Omega : t \rightarrow B_t(\omega) \text{ es continua}\}) = 1$.

La definición de independencia y algunas de sus consecuencias pueden ser encontradas en el apéndice [A.3](#).

Observación 1.26.

1. En algunos textos es usual encontrar la definición de movimiento browniano omitiendo la condición [IV](#), esto es debido a que todo proceso estocástico que cumple las propiedades [I](#), [II](#) y [III](#) de la definición anterior tiene una modificación continua. En efecto, sea $\{B_t\}_{t \in T}$ un movimiento browniano y $\beta > 2$. Se tiene entonces que $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$, lo que implica que $Z = (B_t - B_s)/(t - s)^{1/2} \sim N(0, 1)$. Luego,

$$E[|B_t - B_s|^\beta] = E[(t - s)^{\beta/2} |Z|^\beta] = E[|Z|^\beta](t - s)^{\beta/2},$$

con $E[|Z|^\beta] < \infty$. Para ver esto, note que por lo mostrado sobre el cálculo de espe-

ranzas para v.a. absolutamente continuas en el ejemplo A.10, se sigue que

$$\begin{aligned} E[|Z|^\beta] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |z|^\beta e^{-z^2/2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |z|^\beta e^{-z^2/4} e^{-z^2/4} dz \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2/4} dz \\ &< \infty, \end{aligned}$$

donde $C > 0$ es una constante tal que $(2\pi)^{-1/2} |z|^\beta e^{-z^2/4} \leq C$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

Así, tomando $\alpha = \beta/2 - 1$ en el teorema de continuidad de Kolmogorov, presentado en el teorema 1.11, se sigue que existe una familia de variables aleatorias $\{\tilde{B}_t\}_{t \in T}$ tales que $B_t = \tilde{B}_t$, para todo $t \in T$. Más aún, para $\omega \in \Omega$ la trayectoria $t \rightarrow \tilde{B}_t(\omega)$ es continua.

2. En la definición 1.25, el movimiento browniano $\{B_t\}_{t \in T}$ comienza en cero c.s., sin embargo, si se define el proceso estocástico $\tilde{B}_t = x + B_t$, entonces $\{\tilde{B}_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano que empieza en el punto x c.s.
3. Si $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, entonces lo es con respecto a cualquier filtración $\{\mathcal{F}'_t\}_{t \in T}$ tal que $\mathcal{F}'_s \subseteq \mathcal{F}_s$, para todo $s \in T$, a la cual él esté adaptado. Para ver esto, la única propiedad que se debe verificar es que para todos $0 \leq s < t$, la v.a. $B_t - B_s$ sea independiente de $\mathcal{F}'_s$, la cual es una consecuencia directa del hecho que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y $\mathcal{F}'_s \subseteq \mathcal{F}_s$.

Dos proposiciones importantes (1.27, 1.28) que son resultado de la definición 1.25 son presentadas a continuación. Se verá que si la filtración a la cual se adapta el movimiento browniano es la natural (ver definición en 1.5), la definición 1.25 y la proposición 1.28 son equivalentes, en dicho caso, se usarán indistintamente como definiciones de movimiento browniano. Así mismo, si se considera la filtración natural aumentada definida en la observación 1.7, la definición 1.25 y la proposición 1.27 son equivalentes.

Proposición 1.27. *Suponga que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. Entonces se cumple que*

1. $B_0 = 0$ c.s.
2. Si $0 \leq s < t$, la v.a. $B_t - B_s$ distribuye normal con media cero y varianza $t - s$.

3. Para todos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_1}$ son independientes.

4. Las trayectorias de un movimiento browniano son continuas c.s.

En caso que $\{\mathcal{F}_t\}_t$ sea la filtración natural aumentada asociada al proceso $\{B_t\}_{t \in T}$, **1**, **2**, **3**, **4** implican **I**, **II**, **III**, **IV** en la definición 1.25.

Demostración. Note que de la definición de movimiento Browniano se tienen **1**, **2** y **4**, así basta verificar **3**, que es equivalente a probar que para cualesquiera $A_n \in \sigma(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$, $A_{n-1} \in \sigma(B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}})$, $\dots$, $A_1 \in \sigma(B_{t_1})$, se cumple que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_{n-1})P(A_n).$$

Con el fin de mostrar la anterior igualdad es importante observar que para todo $i = 1, \dots, n-1$, $A_i \in \mathcal{F}_{t_{n-1}}$, puesto que $A_i \in \sigma(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \subseteq \mathcal{F}_{t_i}$, al ser $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible. A su vez, como $t_i \leq t_{n-1}$, se sigue que $\mathcal{F}_{t_i} \subseteq \mathcal{F}_{t_{n-1}}$, al ser $\{\mathcal{F}_t\}_t$ una familia creciente de σ -álgebras. Por tanto, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \in \mathcal{F}_{t_{n-1}}$. Por otro lado, se sabe que $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$, lo que implica que

$$P[(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n] = P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_n).$$

De la misma forma, para todo $i = 1, \dots, n-2$, $A_i \in \mathcal{F}_{t_{n-2}}$, de donde $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-2} \in \mathcal{F}_{t_{n-2}}$. Luego, por la independencia de $B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}$ con $\mathcal{F}_{t_{n-2}}$, se sigue que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2} \cap A_{n-1})P(A_n) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2})P(A_{n-1})P(A_n).$$

Argumentando de la misma manera $n-3$ veces, se llega a

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n).$$

Ahora bien, suponga que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico que satisface las propiedades **1**, **2**, **3**, **4**, y está adaptado a la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma(\tilde{\mathcal{F}}_t, \mathcal{N})$, donde $\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma(B_s : s \leq t)$ y $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{F} : P(A) = 0\}$. Se tiene entonces **I**, **II** y **IV** de la definición 1.25. Sean $0 \leq s < t$. Se debe de probar que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. Para ello, observe que para todo $u \leq s$, la propiedad de los incrementos independientes implica que las v.a. $B_t - B_s$, $B_s - B_u$ y B_u son independientes. Así, para cualquier $C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se sigue que

$$\begin{aligned} P[(B_t - B_s)^{-1}(C), (B_s - B_u)^{-1}(\mathbb{R}), B_u^{-1}(D)] &= P[(B_t - B_s)^{-1}(C), B_u^{-1}(D)] \\ &= P[(B_t - B_s)^{-1}(C)]P[B_u^{-1}(D)], \end{aligned}$$

lo cual muestra que las v.a. $B_t - B_s$ es independiente de B_u , para todo $u \leq s$. Luego, $B_t - B_s$ es independiente de $\sigma(B_u : u \leq s)$.

Considere $A \in \sigma(B_t - B_s)$, $B \in \mathcal{F}_s$. Entonces $B = \tilde{B} \cup N$, donde $N \subseteq \tilde{N}$, con $\tilde{N} \in \mathcal{N}$. Note que

$$P(B) = P(\tilde{B} \cup N) \leq P(\tilde{B}) + P(N) = P(\tilde{B}).$$

Pero, $\tilde{B} \subseteq B$. Así, $P(\tilde{B}) \leq P(B)$. Por tanto, $P(\tilde{B}) = P(B)$. Análogamente,

$$P(A \cap \tilde{B}) \leq P(A \cap B) \leq P(A \cap \tilde{B}) + P(A \cap N) = P(A \cap \tilde{B}).$$

Por la independencia de $B_t - B_s$ y $\sigma(B_u : u \leq s)$, teniendo en cuenta el cálculo anterior, se tiene que $P(A)P(\tilde{B}) \leq P(A \cap B) \leq P(A)P(\tilde{B})$. Como $P(B) = P(\tilde{B})$, entonces $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Se concluye que $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$. □

Proposición 1.28. Si $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$, entonces

1. $B_0 = 0$ c.s.
2. Para todos $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ tiene distribución normal conjunta con media cero y $B_{t_i} \sim N(0, t_i)$.
3. $E[B_s B_t] = \min\{s, t\}$.
4. Las trayectorias $t \rightarrow B_t$ son continuas c.s.

En caso que $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ sea la filtración natural, **1**, **2**, **3**, **4** implican **I**, **II**, **III**, **IV** en la definición **1.25**.

Demostración. Suponga que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano. Entonces por definición se satisfacen **1** y **4**. Considere $0 \leq s < t$. Teniendo en cuenta que $B_s \sim N(0, s)$, se llega a

$$\begin{aligned} E[B_s B_t] &= E[(B_t - B_s)B_s + B_s^2] = E[(B_t - B_s)B_s] + E[B_s^2] \\ &= E[B_t - B_s]E[B_s] + E[B_s^2] \\ &= E[B_s^2] \\ &= E[B_s^2] - (E(B_s))^2 \\ &= s \\ &= \min\{s, t\}. \end{aligned}$$

En el razonamiento anterior se han utilizado las proposiciones 1.27 y A.32.

Observe que demostrar 2, es equivalente a probar que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un proceso gaussiano (ver observación 1.3 en la sección 1.1). Para esto, considere $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Se va a mostrar por inducción que la v.a. $\alpha_1 B_{t_1} + \dots + \alpha_n B_{t_n}$ tiene ley normal. Si $n = 1$, por la definición de movimiento browniano se sabe que $\alpha_1 B_{t_1} \sim N(0, \alpha_1^2 t_1)$. Suponga ahora que la propiedad es cierta para $n - 1$. Vía un cálculo directo se observa que

$$\alpha_1 B_{t_1} + \dots + \alpha_{n-1} B_{t_{n-1}} + \alpha_n B_{t_n} = \alpha_1 B_{t_1} + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) B_{t_{n-1}} + \alpha_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}).$$

Se sabe que la v.a. $\alpha_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$, entonces es independiente a cualquier v.a. $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ -medible, por la proposición A.29. En particular, $\alpha_1 B_{t_1} + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) B_{t_{n-1}}$ es $\mathcal{F}_{t_{n-1}}$ -medible, puesto que B_{t_i} es $\mathcal{F}_{t_i}$ -medible y para todo $i = 1, \dots, n - 1$, $\mathcal{F}_{t_i} \subseteq \mathcal{F}_{t_{n-1}}$. Entonces $\alpha_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es independiente de $\alpha_1 B_{t_1} + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) B_{t_{n-1}}$. Además, por hipótesis inductiva $\alpha_1 B_{t_1} + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) B_{t_{n-1}}$ tiene ley normal y por definición de movimiento browniano, $\alpha_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ es gaussiana. Por tanto, $\alpha_1 B_{t_1} + \dots + \alpha_{n-1} B_{t_{n-1}} + \alpha_n B_{t_n}$ distribuye normal.

Suponga por último que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico que satisface 1, 2, 3 y 4. Se tiene entonces I y IV de la definición 1.25. Tome $0 \leq s < t$, al ser $\{B_t\}_{t \in T}$ un proceso gaussiano, B_s, B_t distribuyen normal con media cero y varianza s, t , respectivamente. De aquí se sigue que $E[B_t - B_s] = 0$. Ahora,

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_t - B_s) &= E[(B_t - B_s)^2] = E[B_t^2 - 2B_s B_t + B_s^2] = t - 2E[B_t B_s] + s \\ &= t - 2 \min\{s, t\} + s \\ &= t - 2s + s \\ &= t - s. \end{aligned}$$

Falta ver que para todos $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u : u \leq s)$. Como la independencia de variables aleatorias normales es equivalente a la no correlación entre ellas por la proposición A.33, es suficiente probar que

$$\text{Cov}(B_t - B_s, B_u) = E[(B_t - B_s)B_u] - E[B_t - B_s]E[B_u] = E[(B_t - B_s)B_u] = 0,$$

para todo $u \leq s$. Observe que

$$E[(B_t - B_s)B_u] = E[B_t B_u] - E[B_s B_u] = \min\{t, u\} - \min\{s, u\} = u - u = 0.$$

□

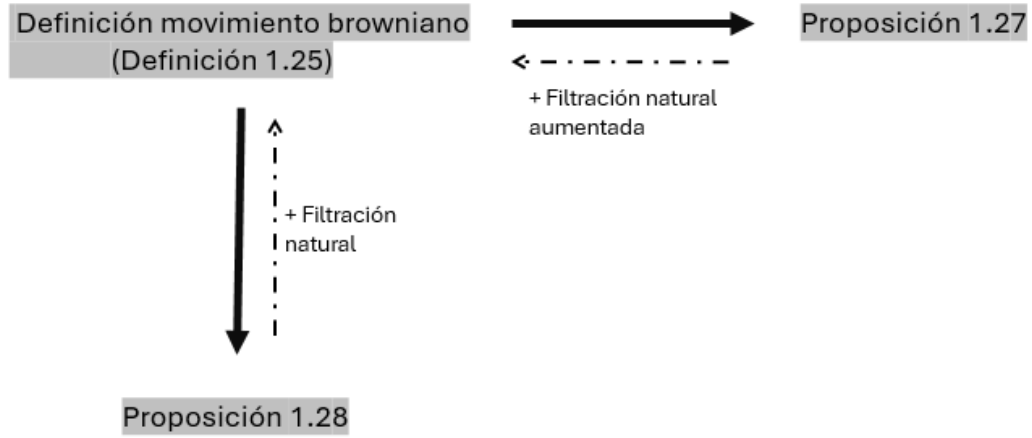


Figura 1.3: Equivalencias de la definición de movimiento browniano.

La figura 1.3 resume las relaciones entre la definición de movimiento browniano 1.25, con las proposiciones 1.27 y 1.28.

Observación 1.29. Suponga que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano. Sean $s, t \in T$ con $s < t$ y $s \neq 0$. De acuerdo con la proposición 1.27, las v.a. $B_t - B_s$ y B_s son independientes. Sin embargo, según la proposición 1.28, se tiene que $\text{Cov}(B_t, B_s) = E[B_t B_s] = s \neq 0$. Esto implica que las v.a. B_t y B_s no son independientes, por la proposición A.33.

El movimiento browniano es invariante bajo ciertas transformaciones (escalas y traslaciones), como se muestra a continuación.

Proposición 1.30. Suponga que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. Entonces:

1. $\tilde{B}_t = -B_t$,
2. $\tilde{B}_t = B_{t+s} - B_s$, para todo $s \in T$ fijo,
3. $\tilde{B}_t = cB_{t/c^2}$, con $c \in \mathbb{R}$,
4. $\tilde{B}_t = tB_{1/t}$, $t > 0$ y $\tilde{B}_0 = 0$,

son también movimientos brownianos adaptados a las filtraciones $\{\mathcal{F}_t\}_t$, $\{\mathcal{F}_{t+s}\}_t$, $\{\mathcal{F}_{t/c^2}\}_t$ y la natural, respectivamente.

Demostración.

1. Como $\{B_t\}_t$ es un movimiento browniano, se deduce que $\tilde{B}_0 = -B_0 = 0$ c.s. y la función $t \rightarrow -B_t$ es continua c.s. Considere $0 \leq s < t$, se sigue que $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s =$

$-(B_t - B_s) \sim N(0, (-1)^2(t - s))$. De igual manera, si $B_t - B_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, entonces la v.a. $-(B_t - B_s)$ satisface la misma propiedad. En consecuencia, $\{-B_t\}_t$ es un movimiento browniano.

2. Primero, note que $\tilde{B}_0 = B_s - B_s = 0$, y la función $t \rightarrow B_{t+s} - B_s$ es continua c.s., puesto que $\{B_t\}_t$ es un movimiento browniano. Sean $0 \leq t_1 < t_2$. Entonces

$$\tilde{B}_{t_2} - \tilde{B}_{t_1} = B_{t_2+s} - B_s - B_{t_1+s} + B_s = B_{t_2+s} - B_{t_1+s}.$$

Para $s \in T$ ($s \geq 0$), se tiene que $0 \leq t_1 + s < t_2 + s$. Así, $B_{t_2+s} - B_{t_1+s} \sim N(0, t_2 + s - t_1 - s)$. Por otro lado, por la propiedad de independencia de $\{B_t\}$, se llega a que $B_{t_2+s} - B_{t_1+s}$ es independiente de $\mathcal{F}_{t_1+s}$.

3. Las propiedades **I** y **IV** de la definición de movimiento browniano, implican que $\tilde{B}_0 = cB_0 = 0$ y las trayectorias $t \rightarrow cB_{t/c^2}$ son continuas c.s. Así mismo, por la condición **II**, si $0 \leq s < t$, entonces $c(B_{t/c^2} - B_{s/c^2}) \sim N(0, c^2(t/c^2 - s/c^2))$, puesto que $0 \leq s/c^2 < t/c^2$. Se cumple además que la v.a. $c(B_{t/c^2} - B_{s/c^2})$ es independiente de $\mathcal{F}_{s/c^2}$ (recuerde que la independencia no se ve afectada por multiplicación de constantes, ver proposición **A.30**).
4. Para la prueba se usará la equivalencia presentada en la proposición **1.28**, debido a que la filtración que se está considerando es la natural. De la definición del proceso $\{\tilde{B}_t\}$, se tiene que $\tilde{B}_0 = 0$. Además, al ser $\{B_t\}_t$ un movimiento browniano, para $s < t$, se sigue que

$$E[\tilde{B}_s \tilde{B}_t] = stE[B_{1/s} B_{1/t}] = st \min\{1/s, 1/t\} = \frac{st}{t} = s = \min\{s, t\}.$$

Como $\{B_t\}_t$ es un proceso gaussiano, entonces para todos $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la v.a. $\alpha_1(t_1 B_{1/t_1}) + \dots + \alpha_n(t_n B_{1/t_n})$ tiene distribución normal. Esto muestra que el proceso $\{\tilde{B}_t\}_t$ es gaussiano. Por otro lado, se tiene que las trayectorias $t \rightarrow B_t$ son continuas c.s., así por la definición de $\{\tilde{B}_t\}_t$ se sigue que para todo $t > 0$, la función $t \rightarrow tB_{1/t}$ es continua c.s. Para la continuidad en cero, observe primero que $\{B_t\}_t, \{\tilde{B}_t\}_t$ son equivalentes al ser procesos gaussianos. Además,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} B_t = 0,$$

puesto que las trayectorias de $t \rightarrow B_t$ son continuas c.s y $B_0 = 0$ c.s. Por tanto, por la proposición **1.15** se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+, t \in \mathbb{Q}} \tilde{B}_t = 0.$$

Y así, como $\{\widetilde{B}_t\}_{t>0}$ es continuo, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \widetilde{B}_t = 0.$$

□

Corolario 1.31. (*Ley de los grandes números para el movimiento browniano*). Suponga que $\{B_t\}_t$ es un movimiento browniano. Entonces

$$P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t(\omega)}{t} = 0 \right\} \right] = 1.$$

Demostración. Considere el evento

$$\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{t \rightarrow 0^+} tB_{1/t}(\omega) = 0 \right\}.$$

Entonces por la proposición 1.30, el proceso $\{tB_{1/t}\}_t$ es un movimiento browniano. Así, por la continuidad de sus trayectorias c.s., se tiene que

$$P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t(\omega)}{t} = 0 \right\} \right] = P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{t \rightarrow 0^+} tB_{1/t}(\omega) = 0 \right\} \right] = 1.$$

□

1.3. Propiedades deterministas del movimiento browniano

En esta sección se presentan algunos resultados que muestran propiedades importantes sobre las trayectorias del movimiento browniano, las cuales permiten comprender el comportamiento del proceso a lo largo del tiempo. Como se verá, algunos de los teoremas enunciados tienen demostraciones extensas, de modo que, para facilitar la comprensión de las mismas, se realizarán bosquejos de las pruebas.

Recuerde que una función f de valor real, definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, es Hölder continua de exponente γ , si y solo si, existe $C > 0$ de modo que

$$\sup_{\substack{x, y \in I \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)| \leq C\delta^\gamma. \quad (1.3.1)$$

Así mismo, f se dice localmente Hölder continua de exponente γ , si existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{\substack{x, y \in K \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)| \leq C\delta^\gamma, \quad (1.3.2)$$

en todo compacto $K \subseteq I$.

El siguiente teorema establece una propiedad de regularidad para las trayectorias de un movimiento browniano.

Teorema 1.32. *El movimiento browniano es localmente Hölder continuo de exponente γ , para todo $\gamma < 1/2$.*

Demostración. En el primer ítem de la observación 1.26 se mostró que para $\beta > 2$, $\alpha = \beta/2 - 1$, el movimiento browniano $\{B_t\}_{t \in D}$ satisface que

$$E[|B_t - B_s|^\beta] = E[|Z|^\beta](t - s)^{\beta/2},$$

donde $Z \sim N(0, 1)$ y $D \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto abierto. Luego, por el teorema de continuidad de Kolmogorov, para todo $\omega \in \Omega$, la función $t \rightarrow B_t(\omega)$ es Hölder continua con exponente γ , para todo $\gamma < \alpha/\beta = 1/2 - 1/\beta$, en todo subconjunto compacto de D . Tomando β lo suficientemente grande, se llega a que las trayectorias del movimiento son localmente Hölder continuas para todo $\gamma < 1/2$. $\square$

Uno de los resultados principales en el estudio de movimiento browniano es el teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy, que además de proporcionar una cota superior e inferior para $|B_{t_2} - B_{t_1}|$, donde t_1, t_2 son suficientemente cercanos, tiene como consecuencia que las trayectorias de un movimiento browniano no son Hölder continuas para todo $\gamma \geq 1/2$.

Teorema 1.33. *(Teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy). Considere un movimiento browniano $\{B_t\}_{t \in T}$. Si $h(t) = (2t \ln(1/t))^{1/2}$ entonces*

$$P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\varepsilon)} \right) = 1 \right\} \right] = 1.$$

En la figura 1.4 se observa una trayectoria de un movimiento browniano $\{B_t\}_{t \in [0,1]}$.

Antes de presentar el bosquejo de la demostración a este teorema, se analizará dicho resultado mostrando algunas de sus implicaciones (La prueba puede consultarse en la subsección 1.3.1). Para ello, suponga que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano. Entonces

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{(2\varepsilon \ln(1/\varepsilon))^{1/2}} \right) = 1 \text{ c.s.,}$$

significa que para casi todo $\omega \in \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\delta < \varepsilon} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}} \right) = 1.$$

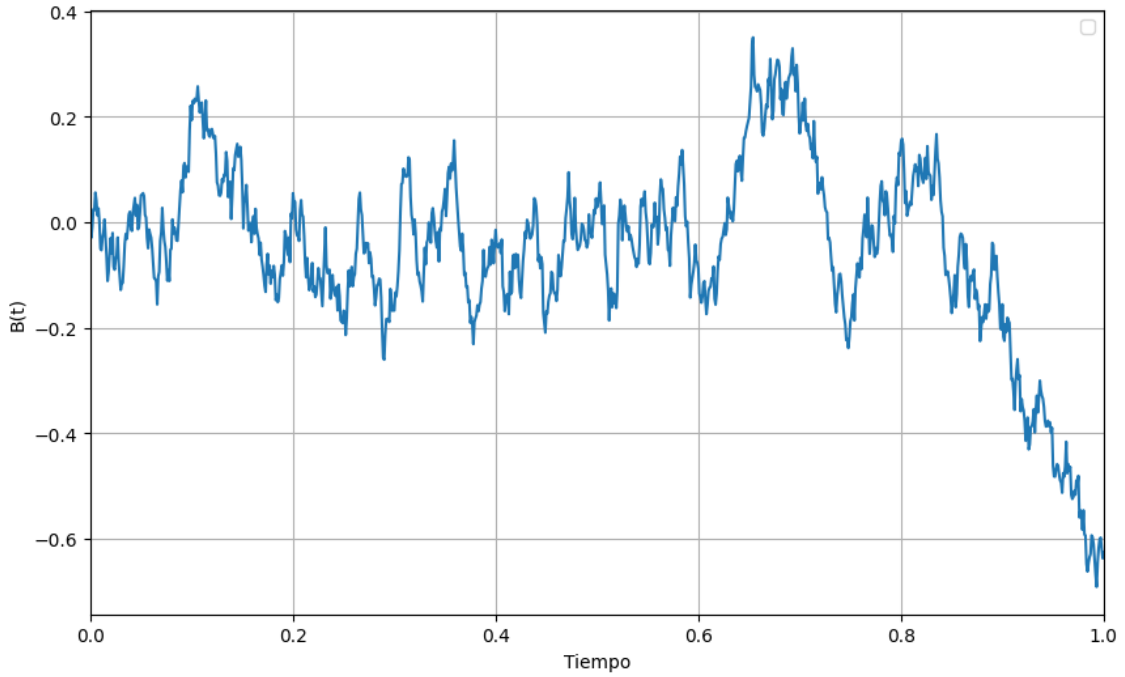


Figura 1.4: Trayectoria de un movimiento browniano en el tiempo $[0, 1]$.

Lo que es equivalente a que para cualquier $\beta > 0$, existe $\varepsilon(\beta) > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon(\beta)$, entonces

$$\left| \sup_{\delta < \varepsilon} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}} \right) - 1 \right| < \beta \text{ c.s.},$$

lo cual implica que para todo $\varepsilon < \varepsilon(\beta)$,

$$1 - \beta < \sup_{\delta < \varepsilon} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}} \right) < 1 + \beta \text{ c.s.} \quad (1.3.3)$$

Se sigue que

$$|B_{t_2} - B_{t_1}| \leq (1 + \beta)(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}, \quad (1.3.4)$$

para todos $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tales que $|t_2 - t_1| < \delta$, con $\delta < \varepsilon$ c.s. En particular, para $\delta > 0$ pequeño, si se toma $t_1 = 0$, $t < \delta$, entonces $-(1 + \beta)(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2} < B_t < (1 + \beta)(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}$ c.s. De esta manera, el teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy, de manera intuitiva, muestra que, en intervalos de tiempo lo suficientemente pequeños, el movimiento browniano está controlado por las funciones $(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}$ y $-(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}$ c.s. Dicho resultado se puede visualizar en la figura 1.5.

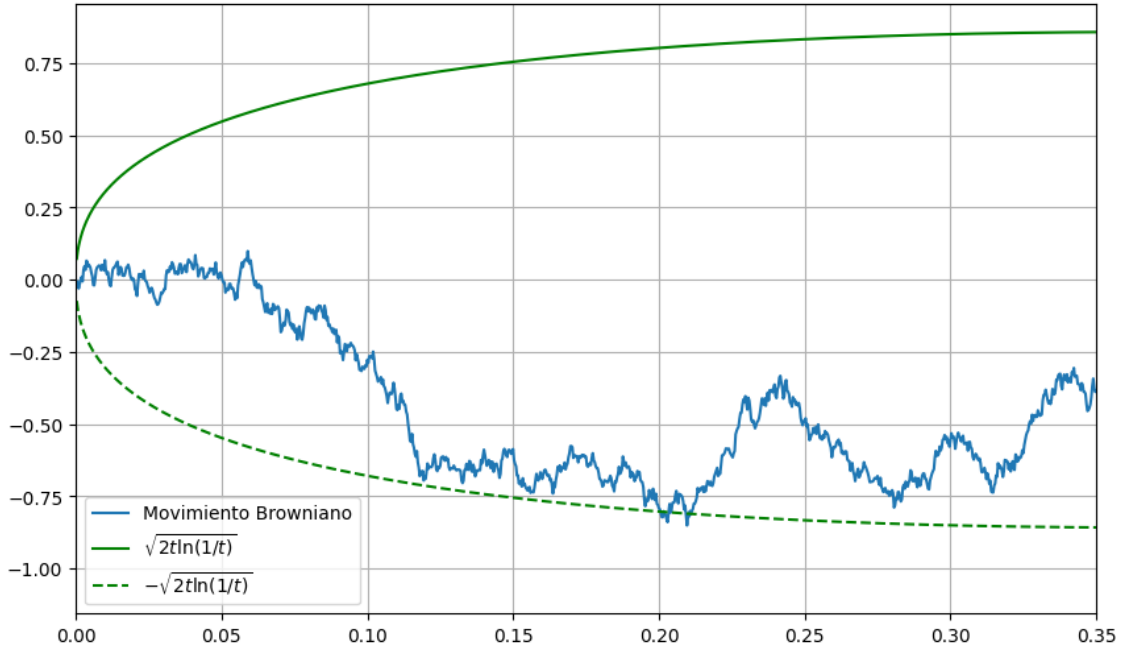


Figura 1.5: Comportamiento asintótico del movimiento browniano en un intervalo pequeño de tiempo.

En particular, las trayectorias de un movimiento browniano definidas en $[0, 1]$ no son Hölder continuas para $\gamma \geq 1/2$ c.s. De manera general, por las propiedades de invarianza 2 y 3 de un movimiento browniano (ver proposición 1.30), las funciones $t \rightarrow B_t(\omega)$ no satisfacen esta propiedad de regularidad en cualquier intervalo $J \subseteq \mathbb{R}^+$. Más precisamente,

Corolario 1.34. *Las trayectorias de un movimiento browniano no son Hölder continuas de exponente $\gamma \geq 1/2$ c.s, en cualquier intervalo de tiempo $J \subseteq \mathbb{R}^+$ de interior no vacío.*

Demostración. Por (1.3.3), para todo $\beta > 0$, existe $\varepsilon(\beta) > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon(\beta)$, entonces

$$\sup_{\delta < \varepsilon} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}} \right) > 1 - \beta \text{ c.s..}$$

Al ser el supremo un punto de acumulación, existen infinitos valores de $\delta > 0$, con $\delta < \varepsilon$ tales que

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}} > 1 - \beta. \quad (1.3.5)$$

Esto implica que para todo $0 < \beta < 1$ e infinitos valores de $\delta > 0$ lo suficientemente

pequeños, se tiene que

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} |B_{t_2} - B_{t_1}| > (1 - \beta)(2\delta \ln(1/\delta))^{1/2}.$$

Note que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} (\ln(1/\delta))^{1/2} = \infty$. Así, para cualquier $M > 0$, existe $\delta(M) > 0$, tal que si $\delta < \delta(M)$, entonces $(\ln(1/\delta))^{1/2} > M$. En particular, para todo $C > 0$, si se toma $M = C/(\sqrt{2}(1 - \beta))$, se tiene que

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} |B_{t_2} - B_{t_1}| > \sqrt{2}(1 - \beta)(\ln(1/\delta))^{1/2}\delta^{1/2} > C\delta^{1/2}.$$

siempre que $\delta < \delta(M)$. Esto muestra que las trayectorias del movimiento browniano en $[0, 1]$ no son Hölder continuas de exponente $\gamma = 1/2$ c.s., por lo presentado en (1.3.2).

De forma más general, para todo $a > 0$ y $M > 0$, se satisface que

$$(\ln(1/\delta))^{1/2} > M\delta^a, \tag{1.3.6}$$

siempre que $\delta > 0$ sea lo suficientemente pequeño. Así,

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} |B_{t_2} - B_{t_1}| > \sqrt{2}(1 - \beta)M\delta^a\delta^{1/2}.$$

Para $C > 0$, si se considera $M = C/(\sqrt{2}(1 - \beta))$, entonces

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} |B_{t_2} - B_{t_1}| > C\delta^{a+1/2},$$

para todo $a > 0$ y $\delta \ll 1$. Esto indica que las funciones $t \rightarrow B_t$ definidas en $[0, 1]$, no son Hölder continuas para $\gamma \geq 1/2$ c.s.

Para ver (1.3.6), tome $M > 0$ y considere la función $\delta \rightarrow C\delta^a$ en $(0, b]$, con $b > 0$. Dicha función es acotada por Cb^a . Observe que como $(\ln(1/\delta))^{1/2} \rightarrow \infty$, cuando $\delta \rightarrow 0^+$. Existe $\delta' > 0$ de modo que si $\delta < \delta'$, entonces $(\ln(1/\delta))^{1/2} > Mb^a$. Por tanto, para $\delta \in (0, b] \cap (0, \delta')$, se cumple que $(\ln(1/\delta))^{1/2} > M\delta^a$.

Hasta ahora se ha mostrado que el teorema se satisface en $[0, 1]$. En realidad, este es cierto para cualquier intervalo de longitud 1 contenido en $\mathbb{R}^+$, como se muestra a continuación:

Por la propiedad 2 de la proposición 1.30, para cualquier $r > 0$, $\{B_{t+r} - B_r\}_t$ es un movimiento browniano. Así, aplicando el teorema 1.33 a este proceso, se tiene que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2+r} - B_{t_1+r}|}{h(\varepsilon)} \right) = 1 \text{ c.s.}$$

Por tanto,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{r \leq s < t \leq 1+r \\ t-s \leq \varepsilon}} \frac{|B_t - B_s|}{h(\varepsilon)} \right) = 1 \text{ c.s.} \quad (1.3.7)$$

Por un argumento similar al usado en el caso $[0, 1]$, la igualdad en (1.3.7) implica la no Hölder continuidad de las trayectorias del movimiento en el intervalo $[r, 1+r]$, para $\gamma \geq 1/2$. Observe entonces que si $J \subseteq \mathbb{R}^+$ contiene un intervalo de longitud 1, entonces en J se satisface el corolario a probar.

Ahora bien, considere $c > 1$. El proceso $\{cB_{t/c^2}\}$ es un movimiento browniano, por la proposición 1.30. Luego,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} \frac{|cB_{t_2/c^2} - cB_{t_1/c^2}|}{h(\delta)} \right) = 1 \text{ c.s.}$$

En consecuencia,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq s < t \leq 1/c^2 \\ t-s \leq \delta/c^2}} \frac{|B_t - B_s|}{h(\delta)} \right) = \frac{1}{c} \text{ c.s.} \quad (1.3.8)$$

Análogamente al argumento mostrado para (1.3.5) se sigue de (1.3.8) que, para todo $0 < \beta < 1/c$, e infinitos valores de $\delta > 0$ lo suficientemente pequeños,

$$\sup_{\substack{0 \leq s < t \leq 1/c^2 \\ t-s \leq \delta/c^2}} |B_t - B_s| > \sqrt{2}c(1/c - \beta)(\ln(1/\delta))^{1/2}(\delta/c)^{1/2} \text{ c.s.}$$

Lo que implica que casi seguramente las trayectorias no son Hölder continuas de exponente $\gamma \geq 1/2$, en $[0, 1/c^2]$. Por otro lado, por la propiedad de traslación del movimiento browniano, el teorema se satisface para todo intervalo de longitud $1/c^2 < 1$. Y así, se concluye la prueba en caso que $J \subseteq \mathbb{R}^+$ sea un intervalo de longitud menor que 1. $\square$

Se realiza a continuación un bosquejo de la demostración del teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy 1.33, la cual fue basada en (Revuz y Yor, 2013), pp. 30-32. Su prueba es presentada en la subsección 2.3.

Bosquejo de la prueba 1.35. (Teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy). La demostración se divide en dos partes, las cuales buscan probar que

$$\begin{aligned} \text{I. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \right) &\geq 1 \text{ c.s.} \\ \text{II. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \right) &\leq 1 \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Para **I**, se toma $\delta \in (0, 1)$ y se considera para cada $n \in \mathbb{N}$ la cantidad

$$L_n = P \left[\max_{1 \leq k \leq 2^n} |B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}| \leq (1 - \delta)h(2^{-n}) \right].$$

Utilizando propiedades del movimiento browniano y algunas desigualdades básicas, se prueba que existe una constante $C > 0$ tal que

$$L_n \leq \exp \left\{ -\frac{C}{\sqrt{n}} 2^{n(1-(1-\delta)^2)} \right\}.$$

Lo cual implica que la serie $\sum_n L_n < \infty$. Así, gracias al lema de Borel-Cantelli **A.35**,

$$P \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \omega \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}}(\omega) - B_{(k-1)2^{-n}}(\omega)|}{h(2^{-n})} \geq 1 - \delta \right\} \right] = P[\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c] = 1.$$

Por otro lado,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c \subseteq \left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\varepsilon)} \right) \geq 1 - \delta \right\},$$

lo cual permite concluir **I**, tomando δ suficientemente pequeño.

Para **II**, se escogen $\delta \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $(1 + \varepsilon)^2(1 - \delta) > 1 + \delta$, y se toma el conjunto K de pares ordenados $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de manera que $0 \leq i < j < 2^n$, $0 < j - i < 2^{n\delta}$. Se define para $n \in \mathbb{N}$, la cantidad

$$L_n = P[B_n] = P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \max_K \frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \varepsilon \right\} \right].$$

Se tiene entonces que

$$L_n \leq D' n^{-1} 2^{n((1+\delta)-(1-\delta)(1+\varepsilon)^2)},$$

donde $D' > 0$ es constante.

Al igual que para el caso **I**, la serie $\sum_n D'n^{-1}2^{n((1+\delta)-(1-\delta)(1+\varepsilon)^2)}$ converge, lo que implica que $\sum_n P[B_n] < \infty$. Luego, por el Teorema de Borel-Cantelli **A.35**, para casi todo $\omega \in \Omega$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|B_{j2^{-n}(\omega)} - B_{i2^{-n}(\omega)}| \leq (1 + \varepsilon)h(k2^{-n}),$$

siempre que $n \geq n_1$.

Debido a la proposición **B.25**, para $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, existen enteros i, j, p_r, q_s , tales que

$$t_1 = i2^{-n} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \dots, \quad t_2 = j2^{-n} + 2^{-q_1} + 2^{-q_2} + \dots,$$

Luego, por la continuidad del movimiento browniano y lo probado hasta el momento, para casi todo $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| &\leq |B_{i2^{-n}(\omega)} - B_{t_1}(\omega)| + |B_{j2^{-n}(\omega)} - B_{i2^{-n}(\omega)}| + |B_{t_2}(\omega) - B_{j2^{-n}(\omega)}| \\ &\leq 2(1 + \varepsilon)\gamma h(2^{-(n+1)(1-\delta)}) + (1 + \varepsilon)h((j - i)2^{-n}), \end{aligned}$$

con $\gamma > 0$. Si $t_2 - t_1$ es suficientemente pequeño, y se toman δ, γ y ε tendiendo a cero, con $t_2 - t_1 \leq \varepsilon$, se tiene que casi seguramente $|B_{t_2} - B_{t_1}| \leq h(\varepsilon)$, lo que implica **II**.

Teorema 1.36. Suponga que $\{B_t\}_t$ es un movimiento browniano y sea $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, con $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ una partición del intervalo $[a, b]$. Entonces

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 = b - a \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega), \quad (1.3.9)$$

donde $\|\pi\| = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|$. En particular, las trayectorias de un movimiento browniano no tienen variación finita en cualquier intervalo de tiempo c.s.

Demostración. Se debe mostrar que

$$E \left[\left(\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (b - a) \right)^2 \right] \longrightarrow 0, \quad \|\pi\| \rightarrow 0.$$

Note que

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (b-a) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{k=1}^n (|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{k=1}^n (|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})) \right) \left(\sum_{m=1}^n (|B_{t_m} - B_{t_{m-1}}|^2 - (t_m - t_{m-1})) \right) \right] \\
&= E \left[\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})) (|B_{t_m} - B_{t_{m-1}}|^2 - (t_m - t_{m-1})) \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n E \left[(|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})) (|B_{t_m} - B_{t_{m-1}}|^2 - (t_m - t_{m-1})) \right].
\end{aligned}$$

Por la propiedad de los incrementos independientes del movimiento browniano [3](#), las v.a. $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$, $k = 1, \dots, n$, son independientes. Usando las proposiciones [A.30](#) y [A.31](#), se concluye que las v.a. $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 - (t_k - t_{k-1})$ también son independientes. Así, como $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \sim N(0, t_k - t_{k-1})$ y por la proposición [A.32](#), para todo $m \neq k$, se sigue que

$$\begin{aligned}
& E \left[(|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1})) (|B_{t_m} - B_{t_{m-1}}|^2 - (t_m - t_{m-1})) \right] \\
&= E \left[|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1}) \right] E \left[|B_{t_m} - B_{t_{m-1}}|^2 - (t_m - t_{m-1}) \right] \\
&= (E \left[|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 \right] - (t_k - t_{k-1})) (E \left[|B_{t_m} - B_{t_{m-1}}|^2 \right] - (t_m - t_{m-1})) \\
&= ((t_k - t_{k-1}) - (t_k - t_{k-1})) ((t_m - t_{m-1}) - (t_m - t_{m-1})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (b-a) \right)^2 \right] &= \sum_{k=1}^n E \left[(|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (t_k - t_{k-1}))^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n E \left[\left(\frac{|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2}{t_k - t_{k-1}} - 1 \right)^2 (t_k - t_{k-1})^2 \right]
\end{aligned}$$

Para cualquier $k = 1 \dots, n$, la v.a. $Z_k = \frac{B_{t_k} - B_{t_{k-1}}}{\sqrt{t_k - t_{k-1}}} \sim N(0, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned}
E \left[(Z_k^2 - 1)^2 \right] &= E \left[Z_k^4 \right] - 2E \left[Z_k^2 \right] + 1 \\
&= 3 - 2 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 - (b-a) \right)^2 \right] &= \sum_{k=1}^n E[(Z_k^2 - 1)^2] (t_k - t_{k-1})^2 \\
&= 2 \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \\
&\leq 2 \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \\
&= 2 \|\pi\| (b-a) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando $\|\pi\| \rightarrow 0$. Esto muestra que el movimiento browniano tiene variación cuadrática finita. Suponga ahora que $\{B_t\}_t$ tiene variación finita en $[a, b]$ c.s. Entonces

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| < \infty \text{ c.s.}$$

Esto implica que

$$\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|,$$

y así,

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 \leq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sup_{1 \leq k \leq n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|.$$

Puesto que las trayectorias del movimiento browniano son continuas c.s., entonces

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sup_{1 \leq k \leq n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| = 0.$$

Por ende, por la variación finita de $\{B_t\}_t$ en $[a, b]$ se tiene que

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2 = 0,$$

lo cual contradice lo probado para (1.3.9). □

Teorema 1.37. (*Ley del logaritmo iterado*). Sea $\{B_t\}_{t \in T}$ un movimiento browniano. Entonces

$$P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t(\omega)}{(2t \ln(\ln(\frac{1}{t})))^{1/2}} = 1 \right\} \right] = 1. \quad (1.3.10)$$

Antes de presentar un bosquejo de la demostración al teorema 1.37, se van a mostrar algunas de sus consecuencias. La probabilidad descrita en (1.3.10) implica que existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$, con $P(\Omega_0) = 1$, tal que para todo $\omega \in \Omega_0$,

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t(\omega)}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < t \leq \varepsilon} \frac{B_t(\omega)}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = 1.$$

Es decir, dado $\beta > 0$ existe $\varepsilon(\beta) > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon(\beta)$, entonces

$$\left| \sup_{0 < t \leq \varepsilon} \frac{B_t(\omega)}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} - 1 \right| < \beta.$$

Así, para $\varepsilon < \varepsilon(\beta)$ se tiene que

$$1 - \beta < \sup_{0 < t \leq \varepsilon} \frac{B_t(\omega)}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} < 1 + \beta.$$

En particular,

$$(1 - \beta)(2t \ln \ln(1/t))^{1/2} < B_t(\omega) < (1 + \beta)(2t \ln \ln(1/t))^{1/2},$$

para todo $0 < t \leq \varepsilon$, siempre que $\varepsilon < \varepsilon(\beta)$.

Uno de los resultados que muestra el comportamiento oscilatorio del movimiento browniano se expone en el corolario 1.38. Como se explicará en la observación 1.39, una de sus consecuencias es que el movimiento browniano alcanza infinitas veces el valor de cero en cualquier intervalo de tiempo pequeño de la forma $[0, \varepsilon]$ c.s. Así mismo, cuando $s \rightarrow \infty$, las trayectorias $s \rightarrow B_s$ toman valores positivos y negativos infinitas veces c.s., visitando así cada número de la recta real positiva en una cantidad infinita de ocasiones.

Corolario 1.38. *Sea $\{B_t\}_t$ un movimiento browniano. Entonces*

$$1. \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = -1, \text{ c.s.}$$

$$2. \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{B_s}{(2s \ln \ln(s))^{1/2}} = 1, \text{ c.s.}$$

$$3. \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{B_s}{(2s \ln \ln(s))^{1/2}} = -1, \text{ c.s.}$$

Demostración.

1. Como $\{B_t\}_t$ es un movimiento browniano, entonces por la proposición 1.30, $\{-B_t\}_t$ es un movimiento browniano. Aplicando el teorema 1.37, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{-B_t(\omega)}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = 1 \right\} \right] \\ &= P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t(\omega)}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = -1 \right\} \right]. \end{aligned}$$

2. Por la proposición 1.30 $\{tB_{1/t}\}_t$ es un movimiento browniano. Luego, haciendo el cambio de variable $s = 1/t$, se sigue que

$$\begin{aligned} 1 &= P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{tB_{1/t}(\omega)}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = 1 \right\} \right] \\ &= P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{B_s(\omega)}{(2s \ln \ln(s))^{1/2}} = 1 \right\} \right]. \end{aligned}$$

3. Análogamente a lo probado para 1, al ser $\{-tB_{1/t}\}$ un movimiento browniano, se deduce el resultado. □

Observación 1.39. Como la intersección de dos eventos de probabilidad 1 tiene probabilidad 1¹, usando el teorema 1.37 y el corolario 1.38 se infiere que

$$P \left[\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = 1, \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = -1 \right] = 1, \quad (1.3.11)$$

$$P \left[\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{B_s}{(2s \ln \ln(s))^{1/2}} = 1, \liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{B_s}{(2s \ln \ln(s))^{1/2}} = -1 \right] = 1. \quad (1.3.12)$$

La probabilidad descrita en (1.3.11) implica que existen sucesiones $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes a cero, tales que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que si $n \geq N$,

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)(2t_n \ln \ln(1/t_n))^{1/2} &\leq B_{t_n} \leq (1 + \varepsilon)(2t_n \ln \ln(1/t_n))^{1/2}, \\ -(1 + \varepsilon)(2t'_n \ln \ln(1/t'_n))^{1/2} &\leq B_{t'_n} \leq (\varepsilon - 1)(2t'_n \ln \ln(1/t'_n))^{1/2}, \end{aligned}$$

c.s. Así, para $\varepsilon > 0$ pequeño $B_{t_n} \geq (1 - \varepsilon)(2t_n \ln \ln(1/t_n))^{1/2} \geq 0$ y $B_{t'_n} \leq (\varepsilon - 1)(2t'_n \ln \ln(1/t'_n))^{1/2} \leq 0$ c.s. En particular, esto muestra que las trayectorias del movimiento browniano pasan por cero en cualquier intervalo de tiempo pequeño de la forma $[0, \varepsilon]$ c.s. La figura 1.6 ilustra dicho comportamiento oscilatorio del movimiento browniano.

De la misma forma, por (1.3.12) existen sucesiones $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $s_n, s'_n \rightarrow \infty$, tales que para todo $\varepsilon > 0$ y n lo suficientemente grande

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)(2s_n \ln \ln(s_n))^{1/2} &\leq B_{s_n} \leq (1 + \varepsilon)(2s_n \ln \ln(s_n))^{1/2}, \\ -(\varepsilon + 1)(2s'_n \ln \ln(s'_n))^{1/2} &\leq B_{s'_n} \leq (\varepsilon - 1)(2s'_n \ln \ln(s'_n))^{1/2}, \end{aligned}$$

¹Sean A y B eventos tales que $P[A] = P[B] = 1$, entonces

$$P[A \cap B] = 1 - P[A^c \cup B^c] \geq 1 - P[A^c] - P[B^c] = 1 - 0 - 0 = 1.$$

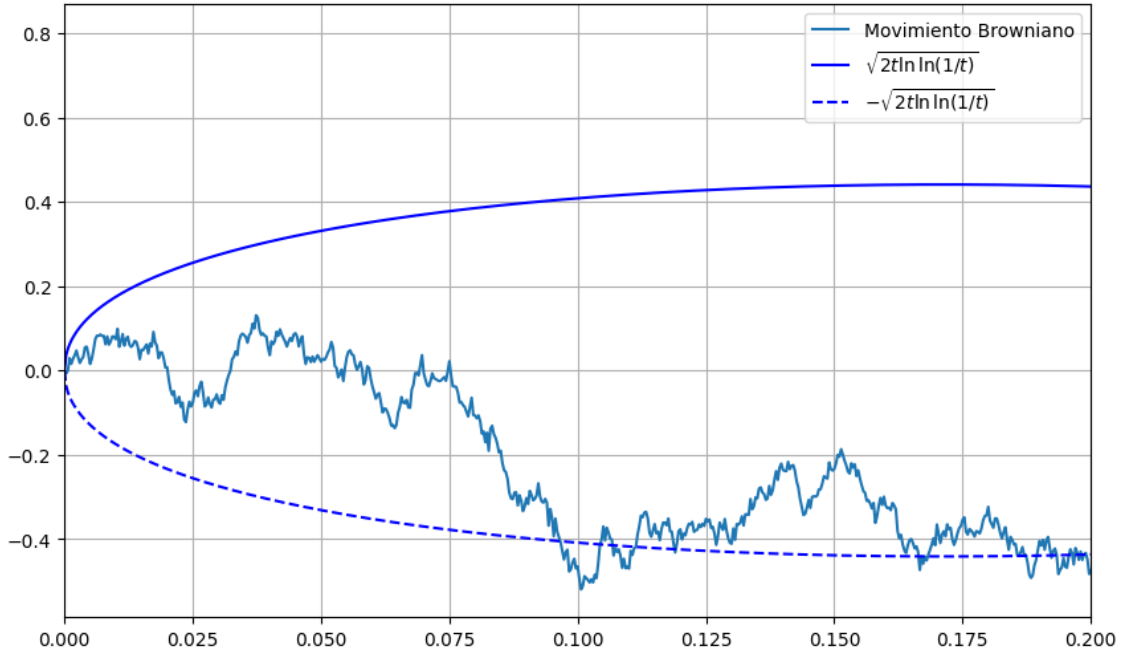


Figura 1.6: Comportamiento oscilatorio del movimiento browniano en un intervalo pequeño de tiempo.

c.s. Se deduce entonces que cuando $t \rightarrow \infty$, el movimiento browniano toma valores positivos y negativos infinitas veces. Al ser las trayectorias continuas, estas tocan cada número positivo en un número arbitrario de ocasiones, ratificando una vez más el comportamiento oscilatorio del movimiento a lo largo del tiempo.

Bosquejo de la prueba 1.40. (*Ley del logaritmo iterado*). La demostración se divide en dos partes, las cuales buscan probar que

$$\text{I. } \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} \leq 1 \text{ c.s.}$$

$$\text{II. } \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} > 1 \text{ c.s.}$$

Para I, se toma $\delta \in (0, 1)$ y la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a cero, definida por $t_n = q^n$, con $0 < q < 1$ tal que $q(1 + \delta)^2 > 1$. Se considera para cada $n \in \mathbb{N}$ el evento

$$A_n = \{\omega \in \Omega : B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t), \text{ para algún } t \in [t_{n+1}, t_n]\},$$

donde $\phi(t) = (2t \ln \ln(1/t))^{1/2}$.

Dado que $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c \subseteq \left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t(\omega)}{\phi(t)} \leq 1 + \delta \right\}$, la prueba se reduce a ver que $P[\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c] = 1$, ya que esto implicaría I tomando $\delta \rightarrow 0$. Para ello, se muestra

que

$$A_n \subseteq \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq t \leq t_n} B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t_{n+1}) \right\}.$$

Utilizando propiedades del movimiento browniano, algunas desigualdades básicas y el lema 1.43, se demuestra que existe una constante $C > 0$ tal que

$$P[A_n] \leq C \frac{(n+1)^{-(1+\delta)^2 q}}{\sqrt{\ln((n+1) \ln(1/q))}},$$

siendo $\sum_n C \frac{(n+1)^{-(1+\delta)^2 q}}{\sqrt{\ln((n+1) \ln(1/q))}}$ una serie convergente. Así, por el criterio de comparación $\sum_n P[A_n] < \infty$, de lo cual, por el primer lema de Borel-Cantelli A.35, se sigue el resultado.

Para II, se considera la sucesión $\{q^n\}_n$, con $0 < q < 1$, tal que $\ln(1/q) > 2$ y $\beta = \frac{2(1-\varepsilon)^2}{1-q} < 2$, donde $0 < \varepsilon < 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina los eventos

$$C_n = \{\omega \in \Omega : B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega) > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)\}.$$

Por propiedades del movimiento browniano y algunas desigualdades, se prueba que existe una constante $D > 0$ tal que

$$P[C_n] \geq \frac{D}{n^{\beta/2} \sqrt{\ln(n\alpha)}},$$

siendo $\sum \frac{D}{n^{\beta/2} \sqrt{\ln(n\alpha)}}$ divergente. Por tanto, $\sum P[C_n] = \infty$ y al ser los eventos C_n independientes, por el segundo lema de Borel-Cantelli A.35, se sigue que $P[\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n] = 1$. Esto implica que $B_{t_n} - B_{t_{n+1}} > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)$ c.s., para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, por lo mostrado en I aplicado al movimiento browniano $\{-B_t\}_t$, se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $B_{t_n} \geq -(1 + \varepsilon)(2t_n \ln \ln(1/t_n))^{1/2}$ c.s. En consecuencia, para infinitos valores de n ,

$$B_{t_n} \geq \phi(t_n)[1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon)(\sqrt{q} + \gamma)] \text{ c.s.,}$$

para todo $\gamma > 0$.

Ahora bien, para cualquier $\delta > 0$, se puede tomar $\varepsilon > 0$, $q > 0$, $\gamma > 0$, lo suficientemente pequeños de manera que $1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon)(\sqrt{q} + \gamma) > 1 - \delta$. Entonces $B_{t_n} > \phi(t_n)(1 - \delta)$ c.s., para infinitos valores de n . Esto implica que

$$B_t > \phi(t)(1 - \delta) \text{ c.s.,}$$

para infinitos valores de t , lo que permite concluir II.

Se finaliza esta sección discutiendo una propiedad fundamental de regularidad del movimiento browniano: la no diferenciabilidad de sus trayectorias c.s. Así, aunque las trayectorias son continuas c.s., no admiten una derivada en el sentido clásico casi en ningún punto. Este fenómeno puede ser explicado por el comportamiento altamente oscilatorio a lo largo del tiempo de las funciones $t \rightarrow B_t$, como se detalla en los teoremas 1.33 y 1.37, y sus implicaciones desarrolladas en el transcurso de esta sección. Para una demostración de este resultado, el lector puede consultar (Karatzas y Shreve, 2014), pp. 110-111.

Teorema 1.41. *Suponga que $\{B_t\}_t$ es un movimiento browniano. Entonces*

$$P[\{\omega \in \Omega : t \rightarrow B_t(\omega) \text{ es diferenciable}\}] = 0.$$

1.3.1. Demostraciones a los teoremas 1.33 y 1.37

En esta subsección se presentan las demostraciones de los teoremas 1.33 y 1.37, los cuales fueron introducidos previamente en la sección 1.3. En dicha sección se realizaron únicamente bosquejos a las pruebas, debido a su complejidad y extensión. La intención de esto fue mantener el enfoque en el estudio de las propiedades deterministas del movimiento browniano. Las demostraciones expuestas a continuación hacen un fuerte uso del álgebra conjuntista y de la ley 0-1 de los lemas de Borel-Cantelli A.35. De igual manera, algunas desigualdades y resultados expuestos en el apéndice B.4, y las propiedades de normalidad e independencia de incrementos del proceso (ver definición 1.25 y la proposición 1.27), resultan ser fundamentales.

Demostración. (Teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy). Tome $\delta \in (0, 1)$ y considere el evento

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq 2^n} |B_{k2^{-n}}(\omega) - B_{(k-1)2^{-n}}(\omega)| \leq (1 - \delta)h(2^{-n}) \right\}.$$

Note que $\omega \in A_n$ si y solo si $|B_{k2^{-n}}(\omega) - B_{(k-1)2^{-n}}| \leq (1 - \delta)h(2^{-n})$, para todo $1 \leq k \leq 2^n$. Así, de la independencia de los incrementos $B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}$, con $1 \leq k \leq 2^n$, se tiene que

$$\begin{aligned} L_n &= P[A_n] \\ &= P[|B_{2^{-n}} - B_0| \leq (1 - \delta)h(2^{-n}), \dots, |B_1 - B_{1-2^{-n}}| \leq (1 - \delta)h(2^{-n})] \\ &= P[|B_{2^{-n}} - B_0| \leq (1 - \delta)h(2^{-n})] \cdots P[|B_1 - B_{1-2^{-n}}| \leq (1 - \delta)h(2^{-n})]. \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $1 \leq k \leq 2^n$, se sabe que $B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}} \sim N(0, 2^{-n})$, y por tanto

$$\begin{aligned} L_n &= \left(\int_{-(1-\delta)h(2^{-n})}^{(1-\delta)h(2^{-n})} \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^{-n}}} e^{-(\sqrt{2^n}x)^2/2} dx \right)^{2^n} \\ &= \left(1 - 2 \int_{(1-\delta)h(2^{-n})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^{-n}}} e^{-(\sqrt{2^n}x)^2/2} dx \right)^{2^n} \\ &= \left(1 - 2 \int_{(1-\delta)h(2^{-n})}^{\infty} \frac{\sqrt{2^n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2^n}x)^2/2} dx \right)^{2^n} \\ &= \left(1 - 2 \int_{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2^n)}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \right)^{2^n}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene al hacer la sustitución $y = \sqrt{2^n}x$, teniendo que $h(2^{-n}) = (22^{-n} \ln(2^n))^{1/2} = \sqrt{2^{-n}} \sqrt{2\ln(2^n)}$.

Usando la proposición B.22 a lo encontrado anteriormente y observando que la función 2^n es creciente, se llega a que

$$\begin{aligned} L_n &\leq \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2^n)}}{2(1-\delta)^2 \ln(2^n) + 1} e^{-(1-\delta)^2 \ln(2^n)} \right)^{2^n} \\ &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2^n)}}{2(1-\delta)^2 \ln(2^n) + 1} 2^{-n(1-\delta)^2} \right)^{2^n} \end{aligned}$$

Por la desigualdad $1 - s < e^{-s}$, se sigue que

$$\begin{aligned} L_n &\leq \left(\exp \left\{ -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2^n)}}{2(1-\delta)^2 \ln(2^n) + 1} 2^{-n(1-\delta)^2} \right\} \right)^{2^n} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2^n)}}{2(1-\delta)^2 \ln(2^n) + 1} 2^n 2^{-n(1-\delta)^2} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2^n)}}{2(1-\delta)^2 \ln(2^n) + 1} 2^{n(1-(1-\delta)^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Observe que para todo $\beta > 0$, existe una constante $\gamma_\beta > 0$ tal que $x^2/(x^2 + 1) \geq \gamma_\beta$, para todo $x \geq \beta$. En efecto, al ser $x^2/(x^2 + 1)$ creciente, tome $\gamma_\beta = \beta^2/(\beta^2 + 1)$. Luego, existe una constante $\gamma_\beta > 0$, para la cual

$$\frac{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2)}\sqrt{n}}{2(1-\delta)^2 \ln(2)n + 1} \geq \frac{\gamma_\beta}{(1-\delta)\sqrt{2\ln(2)}\sqrt{n}}.$$

Entonces al ser e^{-x} decreciente, se tiene que

$$L_n \leq \exp \left\{ -\frac{C}{\sqrt{n}} 2^{n(1-(1-\delta)^2)} \right\},$$

donde $C = \frac{2\gamma_\beta}{\sqrt{2\pi(1-\delta)}\sqrt{2\ln(2)}}$.

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{C}{\sqrt{n}} 2^{n(1-(1-\delta)^2)} \right\} \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{C 2^{n(1-(1-\delta)^2)}},$$

aquí se ha utilizado el hecho de que $e^{-x} \lesssim 1/x$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{C 2^{(n+1)(1-(1-\delta)^2)}} \frac{C 2^{n(1-(1-\delta)^2)}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2^{1-(1-\delta)^2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} < 1,$$

Por el criterio del cociente, $\sum_n \sqrt{n}/(C 2^{n(1-(1-\delta)^2)})$ converge y así, del criterio de comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

En consecuencia, por el primer lema de Borel-Cantelli [A.35](#), $P(\limsup A_n) = 0$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} 1 &= P[(\limsup A_n)^c] = P[\liminf A_n^c] \\ &= P \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \omega \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}}(\omega) - B_{(k-1)2^{-n}}(\omega)|}{h(2^{-n})} \geq 1 - \delta \right\} \right]. \end{aligned}$$

Defina los eventos $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega : \max_{1 \leq k \leq 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}}(\omega) - B_{(k-1)2^{-n}}(\omega)|}{h(2^{-n})} \geq 1 - \delta \right\}, \\ \mathcal{M} &= \left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\varepsilon)} \right) \geq 1 - \delta \right\}. \end{aligned}$$

Se demostrará que $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Sea $\omega \in \mathcal{N}$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$,

$$\max_{1 \leq k \leq 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}}(\omega) - B_{(k-1)2^{-n}}(\omega)|}{h(2^{-n})} \geq 1 - \delta. \quad (1.3.13)$$

Por otro lado, para $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_1} < \varepsilon$. Así, tomando $n_2 = \max\{n_1, m\}$, para $n \geq n_2$ se satisface (1.3.13) y $2^{-n} < \varepsilon$.

Note que $k2^{-n} - (k-1)2^{-n} = 2^{-n}$, de esto se sigue que

$$\left\{ \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(2^{-n})}, 0 \leq t_1 < t_2 \leq 1, t_2 - t_1 \leq 2^{-n} \right\} \supseteq \left\{ \frac{|B_{k2^{-n}} - B_{(k-1)2^{-n}}|}{h(2^{-n})}, 1 \leq k \leq 2^n \right\}.$$

Por tanto,

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq 2^{-n}}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(2^{-n})} \geq \max_{1 \leq k \leq 2^n} \frac{|B_{k2^{-n}}(\omega) - B_{(k-1)2^{-n}}(\omega)|}{h(2^{-n})} \geq 1 - \delta.$$

Como $2^{-n} \leq \varepsilon$,

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq 2^{-n}}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(2^{-n})} \in \left\{ \sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \beta}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\beta)} : \beta \leq \varepsilon \right\}.$$

Así,

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq 2^{-n}}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(2^{-n})} \leq \sup_{\beta \leq \varepsilon} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \beta}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\beta)} \right).$$

Se ha probado que

$$1 - \delta \leq \sup_{\beta \leq \varepsilon} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \beta}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\beta)} \right),$$

Lo cual implica

$$1 - \delta \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\beta \leq \varepsilon} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \beta}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\beta)} \right) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)|}{h(\varepsilon)} \right).$$

De esta desigualdad se sigue que $\omega \in \mathcal{N}$. Como $P(\mathcal{N}) = 1$ y $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, se tiene que casi seguramente

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \right) \geq 1 - \delta,$$

para todo $\delta > 0$. Tomando δ lo suficientemente pequeño, se deduce que

$$P \left[\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \right) \geq 1 \right] = 1.$$

El objetivo ahora es demostrar que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \right) \leq 1 \text{ c.s.}$$

Para ello, tome $\delta \in (0, 1)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $(1 + \varepsilon)^2(1 - \delta) > 1 + \delta$. Sea $K = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq i < j < 2^n, 0 < j - i \leq 2^{n\delta}, k = j - i\}$. Y considere para $n \in \mathbb{N}$, el evento

$$B_n = \left\{ \omega \in \Omega : \max_K \frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \varepsilon \right\}.$$

Observe que

$$B_n \subseteq \bigcup_K \left\{ \omega \in \Omega : \frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \varepsilon \right\} = C_n.$$

En efecto, si $\omega \in B_n$, entonces

$$\max_K \frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \varepsilon.$$

Luego existe $(i, j) \in K$, con $k = j - i$, tal que

$$\frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \varepsilon,$$

lo que muestra que $\omega \in C_n$.

Dado que $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano, $B_{j2^{-n}} - B_{i2^{-n}} \sim N(0, k2^{-n})$, y así,

$$\begin{aligned} L_n &= P[B_n] \\ &\leq P \left[\bigcup_K \left\{ \omega \in \Omega : \frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \varepsilon \right\} \right] \\ &\leq \sum_K P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \geq 1 + \varepsilon \right\} \right] \\ &= \sum_K \left[\int_{-\infty}^{-(1+\varepsilon)h(k2^{-n})} \frac{1}{\sqrt{2\pi k2^{-n}}} e^{-x^2/2k2^{-n}} dx + \int_{(1+\varepsilon)h(k2^{-n})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k2^{-n}}} e^{-x^2/2k2^{-n}} dx \right] \\ &= \sum_K 2 \int_{(1+\varepsilon)h(k2^{-n})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k2^{-n}}} e^{-(x/\sqrt{k2^{-n}})^2/2} dx \\ &= \sum_K \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{(1+\varepsilon)\ln(k^{-1}2^n)}^{\infty} e^{-x^2/2} dx. \end{aligned}$$

Luego, por la proposición B.22, se tiene que

$$L_n \leq \sum_K \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (1+\varepsilon)^{-1} (\ln(k^{-1}2^n))^{-1} e^{-(1+\varepsilon)^2 (\ln(k^{-1}2^n))^2/2}.$$

Ahora, por lo demostrado en la proposición B.23, para todo $a > 0$, existe una constante $C > 0$ tal que $e^{-ax^2/2} \leq Ce^{-ax}$. Tomando $a = (1+\varepsilon)^2$, $x = \ln(k^{-1}2^n)$, se obtiene que existe $C > 0$ que satisface que

$$L_n \leq \sum_K \frac{2C}{\sqrt{2\pi}} (1+\varepsilon)^{-1} (\ln(k^{-1}2^n))^{-1} e^{-(1+\varepsilon)^2 \ln(k^{-1}2^n)}.$$

Como $k \leq 2^{n\delta}$, entonces $k^{-1}2^n \geq 2^{-n\delta+n}$, de donde

$$(\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2} \leq (\ln(2^{n(1-\delta)}))^{-1/2}. \quad (1.3.14)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{(1+\varepsilon)^{-1} (\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2}}{(\ln(k^{-1}2^n))^{1/2}} &\leq \frac{(1+\varepsilon)^{-1} (\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2}}{(\ln(2^{n(1-\delta)}))^{1/2}} \\ &= \frac{(1+\varepsilon)^{-1} (\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2}}{\sqrt{n} \sqrt{(1-\delta) \ln(2)}}. \end{aligned}$$

Tomando $D = \frac{2C(1+\varepsilon)^{-1}}{\sqrt{2\pi(1-\delta) \ln(2)}}$, se llega a

$$\begin{aligned} L_n &\leq D \sum_K \frac{(\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2}}{\sqrt{n}} e^{-(1+\varepsilon)^2 \ln(k^{-1}2^n)} \\ &= D \sum_K \frac{(\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2}}{\sqrt{n}} k^{(1+\varepsilon)^2} 2^{-n(1+\varepsilon)^2} \\ (*) &\leq D \sum_K \frac{(\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2}}{\sqrt{n}} 2^{n\delta(1+\varepsilon)^2} 2^{-n(1+\varepsilon)^2} \\ &= \frac{D}{\sqrt{n}} 2^{-n(1+\varepsilon)^2(1-\delta)} \sum_K (\ln(k^{-1}2^n))^{-1/2}, \end{aligned}$$

donde (*) se da puesto que $k \leq 2^{n\delta}$.

Observe que en K hay a lo más $2^n 2^{n\delta} = 2^{n(1+\delta)}$ elementos, así teniendo en cuenta (1.3.14), se sigue que

$$\begin{aligned} L_n &\leq \frac{D}{\sqrt{n}} 2^{-n(1+\varepsilon)^2(1-\delta)} \sum_K (\ln(2^{n(1-\delta)}))^{-1/2} \\ &\leq \frac{D}{\sqrt{n}} 2^{-n(1+\varepsilon)^2(1-\delta)} 2^{n(1+\delta)} (\ln(2^{n(1-\delta)}))^{-1/2} \\ &= D((1-\delta) \ln(2))^{-1/2} 2^{n((1+\delta)-(1-\delta)(1+\varepsilon)^2)} n^{-1/2} 2^{-n/2} \\ &= D' n^{-1} 2^{n((1+\delta)-(1-\delta)(1+\varepsilon)^2)}, \end{aligned}$$

con $D' = D((1 - \delta) \ln(2))^{-1/2}$.

Dado que $(1 + \varepsilon)^2(1 - \delta) > 1 + \delta$, $a = (1 + \delta) - (1 - \delta)(1 + \varepsilon)^2 < 0$. Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D' 2^{(n+1)a}}{n+1} \frac{n}{D' 2^{na}} = 2^a < 1.$$

En consecuencia, por el criterio del cociente, la serie $\sum_n D' n^{-1} 2^{na}$ converge. Lo que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = \sum_{n=1}^{\infty} P[B_n] < \infty.$$

Así, por el primer lema de Borel-Cantelli [A.35](#), $P(\liminf B_n^c) = 1$, lo que es equivalente a decir que para casi todo $\omega \in \Omega$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$,

$$\max_K \frac{|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)|}{h(k2^{-n})} \leq 1 + \varepsilon.$$

Esto es, para $n \geq n_1$,

$$|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)| \leq (1 + \varepsilon)h(k2^{-n}), \quad (1.3.15)$$

para todo $k = j - i$, con $(i, j) \in K$.

Observe además que la serie $\sum_n h(2^{-n}) = \sum_n (2^{-n+1} \ln(2^n))^{1/2}$ converge, debido a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{-n} \ln(2^{n+1})}{2^{-n+1} \ln(2^n)} \right)^{1/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(2^{n+1})}{2 \ln(2^n)} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Luego existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_2$,

$$\sum_{m > n} h(2^{-m}) < \gamma h(2^{-(n+1)(1-\delta)}), \quad (1.3.16)$$

donde $\gamma > 0$ es un número fijo.

Tome $N = \max\{n_1, n_2\}$, así para $n > N$ se satisface [\(1.3.15\)](#) y [\(1.3.16\)](#), para casi todo $\omega \in \Omega$. Sea $\omega \in \Omega$ tal que las mencionadas propiedades son ciertas y escoja $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ de manera que $t_2 - t_1 \leq 2^{-N(1-\delta)}$. Asimismo, considere un entero $n \geq N$ que cumple que

$$2^{-n} < 2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq t_2 - t_1 < 2^{-n(1-\delta)}.$$

Por la proposición [B.25](#) existen enteros i, j, p_r, q_s , tales que

$$t_1 = i2^{-n} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \dots, \quad t_2 = j2^{-n} + 2^{-q_1} + 2^{-q_2} + \dots,$$

con $n < p_1 < p_2 < \dots$, $n < q_1 < q_2 < \dots$. Más aún,

$$t_2 - t_1 = (j - i)2^{-n} + 2^{-p_1} + 2^{-q_1} + 2^{-p_2} + 2^{-q_2} + \dots > (j - i)2^{-n},$$

de donde $0 < j - i < (t_2 - t_1)2^n < 2^{-n(1-\delta)}2^n = 2^{n\delta}$. Luego, teniendo las desigualdades (1.3.15), (1.3.16) y usando el lema 1.42 presentado al final de esta demostración, se tiene que

$$\begin{aligned} |B_{t_1}(\omega) - B_{t_2}(\omega)| &\leq |B_{i2^{-n}}(\omega) - B_{t_1}(\omega)| + |B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)| + |B_{t_2}(\omega) - B_{j2^{-n}}(\omega)| \\ &\leq (1 + \varepsilon) \sum_{m>n} h(2^{-m}) + (1 + \varepsilon)h(k2^{-n}) + (1 + \varepsilon) \sum_{m>n} h(2^{-m}) \\ &\leq 2(1 + \varepsilon)\gamma h(2^{-(n+1)(1-\delta)}) + (1 + \varepsilon)h((j - i)2^{-n}). \end{aligned}$$

Ahora, suponga que $t_2 - t_1$ es suficientemente pequeño. Entonces dado que $2^{-(n+1)(1-\delta)} \leq t_2 - t_1$, se tiene que $h(2^{-(n+1)(1-\delta)}) \leq h(t_2 - t_1)$, al ser h creciente cerca de cero. Por otro lado, como $(j - i)2^{-n} < t_2 - t_1$, $h((j - i)2^{-n}) \leq h(t_2 - t_1)$. Por esto,

$$\begin{aligned} |B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega)| &\leq 2(1 + \varepsilon)\gamma h(t_2 - t_1) + (1 + \varepsilon)h(t_2 - t_1) \\ &= (2(1 + \varepsilon)\gamma + (1 + \varepsilon))h(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Si se toma a δ , γ y ε lo suficientemente pequeños tales que $t_2 - t_1 < 2^{-n(1-\delta)} < \varepsilon$, se tiene que casi seguramente

$$|B_{t_2} - B_{t_1}| \leq h(\varepsilon).$$

para $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, $t_2 - t_1 < \varepsilon$.

Así,

$$\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \leq 1,$$

lo que implica que

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sup_{\substack{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \\ t_2 - t_1 \leq \varepsilon}} \frac{|B_{t_2} - B_{t_1}|}{h(\varepsilon)} \right) \leq 1 \text{ c.s.}$$

□

Lema 1.42. *Suponga que $\{B_t\}_t$ es un movimiento browniano tal que para todo $k = j - i$ y $\varepsilon > 0$, se satisface que*

$$|B_{j2^{-n}}(\omega) - B_{i2^{-n}}(\omega)| \leq (1 + \varepsilon)h(k2^{-n}),$$

donde $h(t) = (2t \ln(1/t))^{1/2}$. Entonces

$$|B_{i2^{-n}}(\omega) - B_{t_1}(\omega)| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{m>n} h(2^{-m}),$$

$$|B_{t_2}(\omega) - B_{j2^{-n}}(\omega)| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{m>n} h(2^{-m}),$$

con $t_1 = i2^{-n} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \dots$, $t_2 = j2^{-n} + 2^{-q_1} + 2^{-q_2} + \dots$, $n < p_1 < p_2 < \dots$,
 $n < q_1 < q_2 < \dots$.

Demostración. Como $t_1 = i2^{-n} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \dots$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|t_1 - (i2^{-n} - 2^{-p_1} - \dots - 2^{-p_k})| \rightarrow 0.$$

Luego, por la continuidad del movimiento browniano, se tiene que

$$|B_{t_1} - B_{i2^{-n}-2^{-p_1}-\dots-2^{-p_k}}| < (1 + \varepsilon)h(2^{-(n+1)}).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} & |B_{i2^{-n}} - B_{t_1}| \\ & \leq |B_{i2^{-n}} - B_{i2^{-n}-2^{-p_1}}| + |B_{i2^{-n}-2^{-p_1}} - B_{i2^{-n}-2^{-p_1}-2^{-p_2}}| \\ & \quad + \dots + |B_{i2^{-n}-2^{-p_1}-\dots-2^{-p_{k-1}}} - B_{i2^{-n}-2^{-p_1}-\dots-2^{-p_k}}| + |B_{i2^{-n}-2^{-p_1}-\dots-2^{-p_k}} - B_{t_1}|. \end{aligned}$$

Puesto que $n < p_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, existen $r_i \in \mathbb{N}$, de modo que $p_i = n + r_i$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |B_{i2^{-n}} - B_{i2^{-n}-2^{-p_1}}| &= |B_{i2^{-n}} - B_{2^{-n}(i-2^{-r_1})}| \\ &\leq (1 + \varepsilon)h((i2^{-n} - i + 2^{-r_1})2^{-n}) \\ &= (1 + \varepsilon)h(2^{-r_1}2^{-n}) \\ &= (1 + \varepsilon)h(2^{-p_1}). \end{aligned}$$

Así mismo, para todo $2 \leq s \leq k$, se tiene que

$$\begin{aligned} & |B_{i2^{-n}-2^{-p_1}-\dots-2^{-p_{s-1}}} - B_{i2^{-n}-2^{-p_1}-\dots-2^{-p_s}}| \\ &= |B_{2^{-n}(i-2^{-r_1}-\dots-2^{-r_{s-1}})} - B_{2^{-n}(i-2^{-r_1}-\dots-2^{-r_s})}| \\ &\leq (1 + \varepsilon)h(2^{-r_s}2^{-n}) \\ &= (1 + \varepsilon)h(2^{-p_s}). \end{aligned}$$

En consecuencia, como $p_i > n$, $n + 1 > n$, se deduce que

$$|B_{i2^{-n}} - B_{t_1}| \leq \sum_{m>n} h(2^{-m}).$$

Análogamente se demuestra que $|B_{t_2}(\omega) - B_{j2^{-n}}(\omega)| \leq (1 + \varepsilon) \sum_{m>n} h(2^{-m})$. $\square$

Para la demostración del teorema 1.37 se hará uso del lema 1.43, cuya demostración puede consultarse en (Baldi, 2017), pp. 59-60.

Lema 1.43. Si $\{B_t\}_{t \in T}$ es un movimiento browniano, entonces para todo $x > 0$, $s \in T$,

$$P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq t \leq s} B_t(\omega) > x \right\} \right] \leq 2P[\{\omega \in \Omega : B_s(\omega) > x\}].$$

Demostración. (Ley del logaritmo iterado). Considere $\delta > 0$ y $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $t_n \downarrow 0$. Defina para cada $n \in \mathbb{N}$ el evento

$$A_n = \{\omega \in \Omega : B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t), \text{ para algún } t \in [t_{n+1}, t_n]\},$$

donde $\phi(t) = (2t \ln \ln(1/t))^{1/2}$. Suponga que $\omega \in \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c$. Entonces $\omega \in A_n^c$ para infinitos valores de n , excepto para un número finito de ellos. Esto es equivalente a decir que $B_t(\omega) \leq (1 + \delta)\phi(t)$, para infinitos t lo suficientemente pequeños; pero $B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t)$, para finitos valores de t . Esto muestra que

$$\omega \in \left\{ \omega \in \Omega : \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t(\omega)}{\phi(t)} \leq 1 + \delta \right\} := A.$$

En consecuencia, $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c \subseteq A$. Observe que si $P[\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c] = 1$, entonces $P[A] = 1$, lo cual mostraría que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{\phi(t)} \leq 1 + \delta \text{ c.s.}$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$, se tendría que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} \leq 1 \text{ c.s.} \quad (1.3.17)$$

El objetivo entonces para esta primera parte de la prueba es ver que $\sum_n P[A_n] = 1$, ya que por el primer lema de Borel-Cantelli A.35, se concluiría que $P[\limsup A_n] = 0$, demostrando así (1.3.17).

Considere $\omega \in A_n$. Entonces $B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t)$, para algún $t \in [t_{n+1}, t_n]$. Luego, $\sup_{t_{n+1} \leq t \leq t_n} B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t)$. Al ser ϕ una función creciente, para todo $t \geq t_{n+1}$, $\phi(t) \geq \phi(t_{n+1})$. Así, $\sup_{t_{n+1} \leq t \leq t_n} B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t_{n+1})$. Pero, $\sup_{t_{n+1} \leq t \leq t_n} B_t(\omega) \leq \sup_{0 \leq t \leq t_n} B_t(\omega)$. Por tanto, $\sup_{0 \leq t \leq t_n} B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t_{n+1})$, lo que implica que

$$A_n \subseteq \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{0 \leq t \leq t_n} B_t(\omega) > (1 + \delta)\phi(t_{n+1}) \right\}.$$

Por el lema 1.43, se tiene que

$$\begin{aligned} P[A_n] &\leq P\left[\left\{\omega \in \Omega : \sup_{0 \leq t \leq t_n} B_t(\omega) > (1+\delta)\phi(t_{n+1})\right\}\right] \\ &\leq 2P[\{\omega \in \Omega : B_{t_n}(\omega) \geq (1+\delta)\phi(t_{n+1})\}]. \end{aligned}$$

Puesto que $B_{t_n} \sim N(0, t_n)$ y por la proposición B.22 se deduce que

$$\begin{aligned} P[A_n] &\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi t_n}} \int_{(1+\delta)\phi(t_{n+1})}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2t_n}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t_n}} \int_{(1+\delta)\sqrt{2\frac{t_{n+1}}{t_n} \ln \ln \frac{1}{t_{n+1}}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{t_n} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{(1+\delta)\sqrt{2\frac{t_{n+1}}{t_n} \ln \ln \frac{1}{t_{n+1}}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(1+\delta)\sqrt{2\frac{t_{n+1}}{t_n} \ln \ln \frac{1}{t_{n+1}}}} \exp\left\{-(1+\delta)^2 \frac{t_{n+1}}{t_n} \ln \ln \frac{1}{t_{n+1}}\right\}. \end{aligned}$$

Escoja $t_n = q^n$, con $0 < q < 1$, tal que $q(1+\delta)^2 > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} (1+\delta) \left(2\frac{t_{n+1}}{t_n} \ln \ln \frac{1}{t_{n+1}}\right)^{1/2} &= (1+\delta) \left(2\frac{q^{n+1}}{q^n} \ln \ln \frac{1}{q^{n+1}}\right)^{1/2} \\ &= (1+\delta)(2q \ln((n+1) \ln(1/q)))^{1/2}. \end{aligned}$$

Así, si $\alpha = \ln(1/q)$, se tiene que

$$\begin{aligned} P[A_n] &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(1+\delta)(2q \ln((n+1)\alpha))^{1/2}} \exp\left\{\ln((n+1)\alpha)^{-(1+\delta)^2 q}\right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^{-(1+\delta)^2 q}}{(1+\delta)\sqrt{2q}} \frac{(n+1)^{-(1+\delta)^2 q}}{\sqrt{\ln((n+1)\alpha)}} \\ &= C \frac{(n+1)^{-(1+\delta)^2 q}}{\sqrt{\ln((n+1)\alpha)}}, \end{aligned}$$

donde $C = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^{-(1+\delta)^2 q}}{(1+\delta)\sqrt{2q}}$. Considere las sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de términos

$$a_n = \frac{C(n+1)^{-(1+\delta)^2 q}}{\sqrt{\ln((n+1)\alpha)}}, \quad b_n = C(n+1)^{-(1+\delta)^2 q}.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\ln((n+1)\alpha)}} = 0.$$

Como $q(1+\delta)^2 > 1$, la serie $\sum_n b_n$ converge. Por tanto, por el criterio de comparación por paso al límite, la serie $\sum_n a_n < \infty$. Luego, por el criterio de comparación $\sum_n P[A_n] < \infty$. En consecuencia, se satisface (1.3.17).

Se probará a continuación

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} \geq 1 \text{ c.s.}$$

Para ello considere la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $0 < q < 1$, tal que $\alpha = \ln(1/q) > 2$ y $\beta = \frac{2(1-\varepsilon)^2}{1-q} < 2$, donde $0 < \varepsilon < 1$. Observe que

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-\varepsilon)\phi(q^n)}{\sqrt{q^n - q^{n+1}}} = \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{2q^n \ln \ln\left(\frac{1}{q^n}\right)}}{\sqrt{q^n - q^{n+1}}} \\ &= (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2 \ln(n\alpha)}{1-q}} \\ &= \sqrt{\frac{2(1-\varepsilon)^2 \ln(n\alpha)}{1-q}} \\ &= \sqrt{\beta \ln(n\alpha)} > 1. \end{aligned}$$

En efecto, como $0 < q, \varepsilon < 1$, y $\ln(1/q) > 2$, entonces

$$\frac{e^{\frac{1-q}{2(1-\varepsilon)^2}}}{\ln(1/q)} < \frac{e^{1/2}}{2} < 1.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, $n > e^{\frac{1-q}{2(1-\varepsilon)^2}}/\alpha$. Esto implica que $\frac{2(1-\varepsilon)^2}{1-q} \ln(n\alpha) > 1$, y así $x > 1$. Luego, $\frac{x}{1+x^2} \geq \frac{1}{2x}$. Además, como las v.a. $\frac{B_{tn} - B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} \sim N(0, 1)$, entonces por la proposición B.22, se tiene que

$$\begin{aligned} P\left[\frac{B_{tn} - B_{t_{n+1}}}{\sqrt{t_n - t_{n+1}}} > x\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2x} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{\beta \ln(n\alpha)}} e^{-\frac{\beta \ln(n\alpha)}{2}} \\ &= \frac{\alpha^{-\beta/2}}{2\sqrt{2\pi\beta \ln(n\alpha)}} n^{-\beta/2} \\ &= \frac{D}{n^{\beta/2} \sqrt{\ln(n\alpha)}}, \end{aligned}$$

donde $D = \alpha^{-\beta/2}/2\sqrt{2\pi\beta}$. Con esto se ha mostrado que

$$P[C_n] = P[\{\omega \in \Omega : B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega) > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)\}] \geq \frac{D}{n^{\beta/2}\sqrt{\ln(n\alpha)}}.$$

Para $\beta < 2$, la serie $\sum_n \frac{D}{n^{\beta/2}\sqrt{\ln(n\alpha)}}$ diverge. Por tanto,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P[\{\omega \in \Omega : B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega) > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)\}] = \infty.$$

Por la propiedad de los incrementos independientes [3](#), las v.a. $B_{t_n} - B_{t_{n+1}}$ son independientes, así, los eventos

$$C_n = \{\omega \in \Omega : B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega) > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)\}$$

son independientes. Gracias al segundo lema de Borel-Cantelli [A.35](#), se sigue que

$$P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n\right] = P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\omega \in \Omega : B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega) > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)\}\right] = 1.$$

Por tanto, existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$ tal que $P(\Omega_0) = 1$ y para todo $\omega \in \Omega_0$, $\omega \in C_n$ para infinitos valores de n . Esto es, $B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n+1}}(\omega) > (1 - \varepsilon)\phi(t_n)$, para infinitos $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $\{-B_t\}_t$ es un movimiento browniano, por lo mostrado en la primera parte de la prueba,

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{-B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} \leq 1 + \varepsilon \text{ c.s.}$$

Esto implica que

$$\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\inf_{0 < t \leq s} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} \right) \geq -(1 + \varepsilon) \text{ c.s.}$$

Entonces existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que

$$\inf_{0 < t \leq s} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} > -(1 + \varepsilon) \text{ c.s.,}$$

para todo $s < \tilde{\varepsilon}$. Luego,

$$\frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} \geq -(1 + \varepsilon) \text{ c.s.,}$$

si $0 < t \leq s < \tilde{\varepsilon}$. Por tanto, como $t_n \downarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$,

$$\frac{B_{t_n}}{(2t_n \ln \ln(1/t_n))^{1/2}} \geq -(1 + \varepsilon) \text{ c.s.,}$$

de lo cual $B_{t_n} \geq -(1 + \varepsilon)(2t_n \ln \ln(1/t_n))^{1/2}$ c.s.

Como la intersección de dos eventos de probabilidad 1, tiene probabilidad 1, para infinitos valores de n se satisface que

$$B_{t_n} - B_{t_{n+1}} > (1 - \varepsilon)\phi(t_n), \quad B_{t_n} - (1 + \varepsilon)\phi(t_n) \text{ c.s.},$$

En consecuencia, para infinitos valores de n ,

$$\begin{aligned} B_{t_n} &= B_{t_n} - B_{t_{n+1}} + B_{t_{n+1}} > (1 - \varepsilon)\phi(t_n) - (1 + \varepsilon)\phi(t_n) \\ &= \phi(t_n) \left[1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon) \frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)} \right] \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2q^{n+1} \ln \ln \left(\frac{1}{q^{n+1}} \right)}{2q^n \ln \ln \left(\frac{1}{q^n} \right)}} \\ &= \sqrt{q} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\ln(n+1) + \ln(\alpha)}{\ln(n) + \ln(\alpha)}} \\ &= \sqrt{q}. \end{aligned}$$

Así, para todo $\gamma > 0$, $\phi(t_{n+1})/\phi(t_n) < \gamma + \sqrt{q}$, siempre que n sea lo suficientemente grande. Por tanto,

$$\begin{aligned} B_{t_n} &= \phi(t_n) \left[1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon) \frac{\phi(t_{n+1})}{\phi(t_n)} \right] \\ &\geq \phi(t_n) [1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon)(\sqrt{q} + \gamma)] \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Para todo $\delta > 0$, se puede tomar $\varepsilon > 0$, $q > 0$, $\gamma > 0$, lo suficientemente pequeños de manera que $1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon)(\sqrt{q} + \gamma) > 1 - \delta$. Entonces $B_{t_n} > \phi(t_n)(1 - \delta)$ c.s., para infinitos valores de n . Esto implica que

$$B_t > \phi(t)(1 - \delta) \text{ c.s.},$$

para infinitos valores pequeños de t , de lo cual,

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} > 1 - \delta \text{ c.s..}$$

Tomando $\delta \rightarrow 0$, se concluye que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{B_t}{(2t \ln \ln(1/t))^{1/2}} > 1 \text{ c.s.}$$

□

Capítulo 2

Integración estocástica

La explicación del movimiento browniano dada por el físico Albert Einstein, y su posterior descripción por el matemático y filósofo Norbert Wiener, fueron pasos iniciales hacia la integración estocástica. Asimismo, la extensión de la ley débil de los grandes números y el teorema del límite central a v.a. conectadas en cadena, realizada por el matemático Andréi Márkov a inicios del siglo XX ([Markov, 1971](#)), ([Basharin, Langville, y Naumov, 2004](#)), fue fundamental en la teoría de los procesos de Márkov, tema que, a su vez, motivó el desarrollo del cálculo estocástico.

En 1931, dos años antes de que el matemático Andréi Kolmogórov axiomatizara la probabilidad utilizando la teoría de la medida, en ([Kolmogorov, s.f.](#)) Kolmogórov relacionó las distribuciones de probabilidad del proceso de Márkov con soluciones de ecuaciones diferenciales parciales, conocidas como ecuaciones de Kolmogórov. Para ello, usó teoría de semigrupos para generadores infinitesimales, razón por la cual el método fue a menudo considerado analítico más que probabilista. El primer artículo del matemático Kiyoshi Itô, publicado en 1944 y titulado *Stochastic integral* ([Itô, 1944](#)), fue el comienzo del cálculo de Itô, la contraparte para el cálculo de Leibniz-Newton para funciones aleatorias. Una de las principales motivaciones de Itô para estudiar integrales estocásticas fue establecer una diferencial estocástica que pudiera utilizarse para modelar procesos de Márkov. Itô construyó estos procesos de difusión directamente como soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas asociadas con los generadores infinitesimales. Con este fin, se definió la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad (2.0.1)$$

donde $B = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{B_t\}_t, P)$ es un movimiento browniano. Surge la pregunta de

cómo interpretar el término $\sigma(X_t)dB_t$, ya que las trayectorias del movimiento browniano son no diferenciables c.s. (ver teorema 1.41). Es así como (2.0.1) sólo se entiende desde un sentido integral, dando lugar a la *integral de Itô*. Esto se explicará con mayor detalle en los capítulos 2 y 3.

El método empleado por Itô para definir su integral fue una combinación de la integral de Riemann-Stieltjes y la de Lebesgue. No obstante, según se afirma en (Jarrow y Protter, 2004), si $\{X_t\}_t$ es un proceso continuo y se quiere definir $\int_a^b X_t dB_t$ trayectoria por trayectoria como límite de sumas, $\{B_t\}_t$ debería al menos tener variación finita en compactos. Sin embargo, esta propiedad no la satisface el movimiento browniano, como lo muestra el teorema 1.36. Para solucionar este problema, Itô restringió el conjunto de integrandos a aquellos que él denominaba “no anticipatorios”, es decir, considerando únicamente procesos adaptados a la σ -álgebra a la cual está adaptado el movimiento browniano. Usando este concepto, el espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ y otros aspectos adicionales, se definió la integral de Itô y se demostraron algunas características importantes como la isometría de Itô.

Dos propiedades clave en el desarrollo del cálculo estocástico que se estudiaron en el capítulo 1, son la variación cuadrática finita de las trayectorias del movimiento browniano en cualquier intervalo de tiempo $[a, b]$, y su implicación que es la variación infinita en $[a, b]$ c.s. La sección 2.1 muestra un ejemplo de la importancia de estas características en la definición de la integral de Itô, que es explicada con mayor detalle en la sección 2.2. Como un caso particular, se presenta en la sección 2.3 la integral de Wiener que permite integrar funciones en $\mathbf{L}^2[a, b]$, y su resultado coincide con la integral de Itô. Más aún, en la proposición 2.30 se exponen algunas condiciones bajo las cuales la integral de Wiener coincide con la de Riemann-Stieltjes. Por último, en la sección 2.4 se exhibe una generalización de la integral de Itô, ampliando el conjunto de integrandos expuestos en la sección 2.2.

En este capítulo, se asume que $B = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, \{B_t\}_{t \in T}, P)$ es un movimiento browniano estándar, siendo $T \subseteq \mathbb{R}^+$ un intervalo compacto (ver definición de procesos estándar en 1.8 y algunas de sus implicaciones en la observación 1.7). Recuerde que por la observación 1.26 un movimiento browniano puede empezar en cualquier número real positivo c.s., así que, en particular, el proceso $\{B_t\}_{t \in [a, b]}$ está bien definido y satisface las propiedades mostradas en el capítulo 1, para cualquier $a \geq 0$.

2.1. Ideas preliminares

El objetivo central de este capítulo es dar sentido al operador integral

$$I(X) = \int_a^b X(t, \omega) dB_t(\omega), \quad (2.1.1)$$

siendo X es una v.a. Surge entonces la pregunta de cómo definir (2.1.1). La teoría del cálculo usual, específicamente la integral de Riemann- Stieltjes, y la construcción de la integral de Lebesgue estudiada en cursos de teoría de la medida, sugieren dos enfoques posibles para abordar este problema.

En el apéndice B.1 se presenta la integral de Riemann- Stieltjes, la cual permite integrar bajo ciertas condiciones una función respecto a otra función no constante en un intervalo compacto de la forma $[a, b]$. Observe que, en particular, $I(X)$ sigue esta estructura. Es de esperarse que al conjunto de v.a. en donde la integral (2.1.1) está bien definida, pertenezca un número mínimo de v.a., como el movimiento browniano $\{B_t\}_{t \in [a, b]}$, ya que se integra respecto a este mismo proceso. Sin embargo, si se define $I(X)$ como una integral de tipo Riemann-Stieltjes, esto no se satisface como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1. *Considere $P_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Siguiendo la notación descrita en el apéndice B.1, defina*

$$U_n := U(B, B, P_n) = \sum_{i=1}^n B_{t_i}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

$$L_n := L(B, B, P_n) = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Si B fuera Riemann- Stieltjes integrable respecto a B , por la definición B.2, se cumpliría que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - L_n) = 0.$$

No obstante, el movimiento browniano tiene variación cuadrática distinta de cero en cualquier intervalo $[a, b]$. Usando el teorema 1.36, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - L_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 = b - a \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Puesto que la convergencia en $\mathbf{L}^2$ implica la existencia de una subsucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge c.s. (ver diagrama A.4). Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (U_{n_k} - L_{n_k}) = b - a \text{ c.s.}$$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n - L_n) \neq 0$ c.s.

El ejemplo 2.1 muestra una limitación para los integrandos en la integral (2.1.1) vía Riemann- Stieltjes. Así, es necesario considerar una alternativa distinta de definición. En 1944, Kiyoshi Itô en su artículo (Itô, 1944), presentó dicha integral en un sentido similar al de Lebesgue, que se explica en la sección 2.2. Se verá que esta definición permite que el conjunto de integrandos sean procesos estocásticos en $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$.

2.2. Integral de Itô

Se introduce primero el conjunto de v.a. $X : [a, b] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para los cuales la integral (2.1.1) está bien definida, y con base en este, se presenta la integral de Itô. Dado que $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ es un espacio de Hilbert, esto es, es completo bajo la norma inducida por su producto interno, se puede pensar en usarlo para describir la familia de v.a. X (o quizás un subespacio M^2 de este que preserve completitud). Igualmente, se verá que muchas de las propiedades importantes que tendrá la v.a. en (2.1.1), se satisfacen si $\{X_t\}_t$ es un proceso estocástico progresivamente medible adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_t$. En particular, observe que si X es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([a, b])$ -medible, entonces dado que $X^2 \geq 0$, por el teorema de Fubini B.19 se sigue que

$$\int_{[a, b] \times \Omega} X^2(t, \omega) d(\mu_{[a, b]} \otimes P) = \int_a^b \int_{\Omega} X^2(t, \omega) dP dt = \int_{\Omega} \int_a^b X^2(t, \omega) dt dP,$$

siendo $\mu_{[a, b]}$ la medida de Lebesgue de $[a, b]$.

Lo anterior motiva a considerar el espacio $M^2[a, b]$ que se presenta a continuación.

Definición 2.2. *Se define el espacio $M^2[a, b]$ como la familia de clases de equivalencia de procesos estocásticos progresivamente medibles $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}, \{X_t\}_{t \in [a, b]}, P)$, tales que*

$$E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] < \infty.$$

En particular, esto implica que

$$\int_a^b X_t^2 dt < \infty \text{ c.s.}$$

Observación 2.3. $M^2[a, b] \subsetneq \mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$.

En efecto, suponga que $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{X_t\}_t, P) \in M^2[a, b]$. Entonces por el teorema de Fubini [B.19](#), se deduce que

$$\int_{\Omega \times [a, b]} X_t^2(\omega) d(P \otimes \mu_{[a, b]}) = \int_{\Omega} \int_{[a, b]} X_t^2(\omega) dt dP = E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] < \infty.$$

Esto prueba que $X \in \mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$. Sin embargo, en $M^2[a, b]$ pertenecen elementos de $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$. Esta condición adicional tiene como consecuencia que $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ no esté contenido en $M^2[a, b]$. Para probar ello, considere el proceso $\{X_t\}_{t \in [a, b]}$ definido por $X_t = B_b$. Note que

$$\int_a^b E[X_t^2] dt = \int_a^b E[B_b^2] dt = \int_a^b b dt = b(b - a) < \infty.$$

Sin embargo, si se toma $t = a$, $X_a = B_b$ no necesariamente es $\mathcal{F}_a$ -medible. Ya que si bien X_a es $\mathcal{F}_b$ -medible, $\mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}_b$. Esto demuestra que $\{X_t\}_t$ no está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_t$.

En la siguiente proposición se muestra que la familia $M^2[a, b]$ tiene estructura de espacio de Hilbert.

Proposición 2.4. $M^2[a, b]$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto escalar

$$\langle X, Y \rangle_{M^2} = E \left[\int_a^b X_t Y_t dt \right],$$

siendo un subespacio cerrado de $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$.

Demostración. Suponga que $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{X_t\}_t, P)$, $Y = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{Y_t\}_t, P)$ son procesos en $M^2[a, b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha X + Y = \{\alpha X_t + Y_t\}_{t \in [a, b]}$ está adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$ y es progresivamente medible, ya que X y Y satisfacen estas propiedades.

Por otro lado, observe que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M^2}$ es un producto interno en $M^2[a, b]$, al ser heredado de $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$. En consecuencia, la función $\| \cdot \|_{M^2} : M^2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por

$$\|X\|_{M^2} = \langle X, X \rangle^{1/2} = \left(E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] \right)^{1/2} = \left(\int_a^b E[X_t^2] dt \right)^{1/2},$$

es la norma en $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ restringida a $M^2[a, b]$.

Considere $\{X_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $M^2[a, b]$, donde $X_n = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_t, \{X_t^n\}_t, P)$. Como $M^2[a, b]$ es un subespacio normado de $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$, se sigue que $\{X_n\}_n \subseteq \mathbf{L}^2(\Omega \times$

$[a, b]$) es sucesión de Cauchy. De la completitud de $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$, se tiene que existe $X \in \mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ tal que $X_n \rightarrow X$ en este espacio. Por tanto, existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{X_n\}_n$ que converge a X c.s. (ver diagrama A.4). Esto es, para casi todo $(\omega, t) \in \Omega \times [a, b]$, se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_t^{n_k}(\omega) = X_t(\omega).$$

Dado que $\{B_t\}_{t \in [a, b]}$ es un proceso estándar, entonces la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$ es completa (ver definición 1.8). Así, X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible, al ser límite de funciones $\mathcal{F}_t$ -medibles. De la misma forma, puesto que $\{X_t^{n_k}\}_t$ es progresivamente medible, la función $(\omega, t) \rightarrow X_t^{n_k}(\omega)$ es $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([a, b])$ -medible. Luego, $(\omega, t) \rightarrow X_t(\omega)$ es medible respecto a esta misma σ -álgebra.

Esto muestra que $M^2[a, b]$ es un espacio de Hilbert respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M^2}$. De lo anterior, se sigue que $M^2[a, b]$ es subespacio cerrado de $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$. $\square$

De manera general, se define el espacio $M_{loc}^p[a, b]$, $p \geq 1$, como el conjunto de clases de equivalencia de procesos estocásticos progresivamente medibles, adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$, tales que

$$\int_a^b |X_t|^p dt < \infty \text{ c.s.}$$

Así mismo, $M^p[a, b]$ denota el subespacio de $M_{loc}^p[a, b]$ de procesos X que satisfacen

$$E \left(\int_a^b |X_t|^p dt \right) < \infty.$$

Observación 2.5. *Se exponen a continuación algunas propiedades y generalidades de los espacios $M_{loc}^p[a, b]$ y $M^p[a, b]$.*

1. *Análogamente a los argumentos presentados en la proposición 2.4, se muestra que el espacio $M^p[a, b]$ es un espacio de Banach bajo la norma heredada de $\mathbf{L}^p(\Omega \times [a, b])$, para todo $p \geq 1$.*
2. *Suponga que $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}, \{X_t\}_{t \in [a, b]}, P)$ es un proceso continuo. Entonces por la proposición 1.14, X es progresivamente medible. Además, la función $t \rightarrow |X_t(\omega)|^p$ es continua y por ende acotada en $[a, b]$, para todo $\omega \in \Omega$ y $p \geq 1$. Por tanto,*

$$\int_a^b |X_t(\omega)|^p dt < \infty.$$

Así, $X \in M_{loc}^p[a, b]$.

3. Si $Y \in M_{loc}^p[a, b]$ y $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}, \{X_t\}_{t \in [a, b]}, P)$ es un proceso progresivamente medible y acotado. Entonces $XY \in M_{loc}^p[a, b]$. En efecto, observe que XY es progresivamente medible y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$. Al ser X acotado (ver definición en la sección A.1), para casi todo $\omega \in \Omega$, existe una constante $M > 0$ tal que $|X_t(\omega)| \leq M$, para todo $t \in [a, b]$. En consecuencia,

$$\int_a^b |X_t Y_t|^p dt \leq M^p \int_a^b |Y_t|^p dt < \infty \text{ c.s.}$$

4. Considere $X \in M_{loc}^p[a, b]$ y τ un stopping time respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$. Usando la proposición 1.19, se sigue que el proceso $\{Y_t\}_{t \in T}$ definido por $Y_t = 1_{\{t < \tau\}}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_t$. Más aún, como $\{Y_t\}_t$ es continuo a derecha, por la proposición 1.14, $\{Y_t\}_t$ es progresivamente medible. Lo anterior implica que $X_t 1_{\{t < \tau\}}$ es $\mathcal{F}_t$ -medible, para todo t , y el proceso $\{X_t 1_{\{t < \tau\}}\}_t$ es progresivamente medible. Ahora bien,

$$\int_a^b |X_t 1_{\{t < \tau\}}|^p dt = \int_a^b |X_t|^p 1_{\{t < \tau\}} dt = \int_a^{b \wedge \tau} |X_t|^p dt \leq \int_a^b |X_t|^p dt < \infty.$$

Por tanto, $\{X_t 1_{\{t < \tau\}}\}_t \in M_{loc}^p[a, b]$.

Note que si $X \in M^p[a, b]$, entonces $\{X_t 1_{\{t < \tau\}}\}_t \in M_{loc}^p[a, b]$. Además,

$$E \left[\int_a^b |X_t 1_{\{t < \tau\}}|^p dt \right] \leq E \left[\int_a^b |X_t|^p dt \right] < \infty.$$

5. Sea $\{B_t\}_{t \in [a, b]}$ un movimiento browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$. Entonces por la continuidad casi segura de sus trayectorias, se tiene que $\{B_t\}_{t \in [a, b]}$ es progresivamente medible y

$$E \left[\int_a^b B_t^2 dt \right] = \int_a^b E[B_t^2] dt = \int_a^b t dt < \infty.$$

En consecuencia, $\{B_t\}_{t \in [a, b]} \in M^2[a, b]$.

Se describen a continuación los procesos estocásticos simples X en $M^2[a, b]$, los cuales son los análogos a las funciones simples en la integral de Lebesgue. La idea es definir la integral de Itô para dichos procesos. Luego, a través de teoremas de aproximación, extenderla a una familia más amplia de v.a.

Considere el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [a,b]}$, dado por

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad (2.2.1)$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, X_{i-1} es una v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible y $E[X_{i-1}^2] < \infty$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Observe que $\{X_t\}_t \in M^2[a, b]$. En efecto, sea $t \in [a, b]$ fijo. Entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $t \in [t_{i-1}, t_i)$. En dicho caso, $X_t = X_{i-1}$, la cual es una v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible. A su vez, puesto que $\{\mathcal{F}_t\}_t$ es una familia creciente de σ -álgebras y $t_{i-1} \leq t$, se tiene que $\mathcal{F}_{t_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_t$. Así, X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible. Más aún, por la proposición 1.14, como $\{X_t\}_t$ es continuo a derecha, entonces es un proceso progresivamente medible. Luego, al ser $\{t_i\}_{i=0}^n$ una partición del intervalo $[a, b]$, se deduce que

$$X_t^2 = \sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t).$$

Cada v.a. X_{i-1} no depende de la variable temporal t , en consecuencia

$$\begin{aligned} E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] &= E \left[\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 \int_a^b \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t) dt \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n X_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) E[X_{i-1}^2] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Definición 2.6. El conjunto de procesos definidos como en (2.2.1) es denotado por $D_{M^2[a,b]}$ y a sus elementos se les conoce como procesos simples predecibles o procesos simples en $M^2[a, b]$. En caso de que el intervalo $[a, b]$ en el cual está indexado el proceso X sea claro, se asume la convención $D_{M^2[a,b]} = D_{M^2}$.

Suponga que $X \in D_{M^2[a,b]}$ es de la forma

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t).$$

Entonces las v.a. X_{i-1} se pueden pensar como la “altura” del proceso X en el intervalo $[t_{i-1}, t_i)$. Es así, como una forma intuitiva de definir

$$I(X) = \int_a^b X_t dB_t,$$

considerando el movimiento browniano como la forma de “medir la base” del rectángulo formado, sería

$$I(X) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Definición 2.7. Sea $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}, \{X_t\}_{t \in [a,b]}, P) \in D_{M^2}$. La integral estocástica de X con respecto al movimiento browniano $B = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}, \{B_t\}_{t \in [a,b]}, P)$, denotada por $\int_a^b X_t dB_t$, está dada por

$$I(X) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Específicamente,

$$I(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow I(X)(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(\omega)(B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)).$$

Observación 2.8. (Buena definición de la integral estocástica para procesos estocásticos simples). Suponga que $X \in D_{M^2}$ admite dos representaciones de la forma

$$X_t = \sum_{i=1}^n X_{i-1} \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t) = \sum_{k=1}^m \tilde{X}_{k-1} \mathbb{1}_{[t'_{k-1}, t'_k)}(t),$$

donde $a = t_0 < \dots < t_n = b$, $a = t'_0 < \dots < t'_m = b$ son particiones de $[a, b]$, las v.a. X_{i-1} , $\tilde{X}_{k-1}$ son cuadrado integrables y $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, $\mathcal{F}_{t'_{k-1}}$ -medibles, respectivamente. Entonces

$$\sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{k=1}^m \tilde{X}_{k-1}(B_{t'_k} - B_{t'_{k-1}}).$$

Con el fin de ilustrar la definición 2.7, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.9.

1. Defina el proceso $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$ por

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/3), \\ -1, & t \in [1/3, 1]. \end{cases}$$

Observe que

$$X_t = 1 \cdot \mathbb{1}_{[0, 1/3)} - 1 \cdot \mathbb{1}_{[1/3, 1]},$$

donde las v.a. $\omega \rightarrow 1$ y $\omega \rightarrow -1$ son $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_{1/3}$ -medibles, respectivamente. Además, son cuadrado integrables. Esto muestra que $X \in M^2[0, 1]$ y su integral estocástica está dada por

$$\begin{aligned} I(X) &= 1 \cdot (B_{1/3} - B_0) - 1 \cdot (B_1 - B_{1/3}) \\ &= 2B_{1/3} - B_1. \end{aligned}$$

2. Sean ζ y κ v.a. $\mathcal{F}_0$ -medibles y cuadrado integrables. Considere el proceso $\{X_t\}_{t \in [0, 1]}$ definido por $X_t = \zeta \mathbb{1}_{[0, 1/2)} + \kappa \mathbb{1}_{[1/2, 1]}$. Observe que κ es, a su vez, $\mathcal{F}_{1/2}$ -medible, puesto que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_{1/2}$. Se sigue que $\{X_t\}_t \in M^2[0, 1]$ y así,

$$I(X) = \kappa B_1 + (\zeta - \kappa) B_{1/2}.$$

De manera general, para cualquier $t \in [0, 1]$ se satisface

$$\int_a^t X_s dB_s = \begin{cases} \kappa B_t, & t \in [0, 1/2), \\ \kappa B_t + (\zeta - \kappa) B_{1/2}, & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

La proposición 2.19 muestra algunas propiedades de la integral estocástica para procesos estocásticos simples.

Proposición 2.10. Sea X un proceso estocástico simple en $M^2[a, b]$. Entonces $I(X)$ es una v.a. de media cero y varianza

$$E[I^2(X)] = \int_a^b E[X_t^2] dt = E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right].$$

Demostración. Si X es un proceso en D_{M^2} de la forma

$$X_t(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, X_{i-1} es una v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible y $E[X_{i-1}^2] < \infty$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces

$$I(X) = \sum_{i=1}^n X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Cada B_{t_k} , $k = 0, \dots, n$ es una v.a. Por tanto, $I(X)$ es una función $\mathcal{F}$ -medible, al ser suma de funciones con dicha propiedad. Ahora bien, como X_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible, $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim$

$N(0, t_i - t_{i-1})$ y es independiente de $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, para todo $i = 1, \dots, n$ (ver definición 1.25), entonces por la proposición A.38, se tiene que

$$\begin{aligned}
 E[I(X)] &= \sum_{i=1}^n E[X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[E[X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[X_{i-1} E[B_{t_i} - B_{t_{i-1}} | \mathcal{F}_{t_{i-1}}]] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[X_{i-1} E[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}]] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[I(X)] &= E[I^2(X)] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right) \left(\sum_{j=1}^n X_{j-1}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) \right] \\
 &= E \left[\sum_{i,j=1}^n X_{i-1} X_{j-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right] \\
 &= \sum_{i,j=1}^n E[X_{i-1} X_{j-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})].
 \end{aligned}$$

Si $i = j$, por la independencia de la v.a. $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ con la σ -álgebra $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, y la $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medibilidad de la v.a. X_{i-1} , usando la proposición A.38 se llega a

$$\begin{aligned}
 E[X_{i-1}^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] &= E \left[E[X_{i-1}^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \right] \\
 &= E \left[X_{i-1}^2 E[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \right] \\
 &= E \left[X_{i-1}^2 E[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] \right] \\
 &= E[X_{i-1}^2 \text{Var}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})] \\
 &= E[X_{i-1}^2 (t_i - t_{i-1})].
 \end{aligned}$$

Suponga que $j < i$, $i, j = 1, \dots, n$. Entonces $\mathcal{F}_{t_{j-1}} \subseteq \mathcal{F}_{t_{i-1}}$. En particular, esto implica que $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ es una sub σ -álgebra de $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$, y puesto que la v.a. $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ es $\mathcal{F}_{t_j}$ -medible

y $j \leq i - 1$, entonces $B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$ es, a su vez, $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible. Por tanto,

$$\begin{aligned}
& E [X_{i-1} X_{j-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] \\
&= E [E [X_{i-1} X_{j-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= E [X_{j-1} E [X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= E [X_{j-1} E [E [X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= E [X_{j-1} E [(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) X_{i-1} E [B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= E [X_{j-1} E [(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) X_{i-1} E [B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]]] \\
&= E [X_{j-1} E [(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) X_{i-1} \cdot 0 \mid \mathcal{F}_{t_{j-1}}]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto muestra que

$$\begin{aligned}
\text{Var}(I(X)) &= \sum_{i=1}^n E [X_{i-1}^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2] \\
&= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) E [X_{i-1}^2] \\
&= \int_a^b E [X_t^2] dt.
\end{aligned}$$

□

Por argumentos análogos a los presentados en la demostración de la proposición 2.10, para todo $X \in D_{M^2}$, se puede probar que

$$\begin{aligned}
E [I(X) \mid \mathcal{F}_a] &= 0, \\
E [I^2(X) \mid \mathcal{F}_a] &= E \left[\int_a^b X_t^2 dt \mid \mathcal{F}_a \right].
\end{aligned}$$

Así, de acuerdo con la definición de esperanza condicional A.36, para todo $A \in \mathcal{F}_a$, se satisface

$$\begin{aligned}
\int_A \left(\int_a^b X_t dB_t \right) dP &= \int_A E \left[\int_a^b X_t dB_t \mid \mathcal{F}_a \right] dP = 0, \\
\int_A \left(\int_a^b X_t dB_t \right)^2 dP &= \int_A E \left[\left(\int_a^b X_t dB_t \right)^2 \mid \mathcal{F}_a \right] dP = \int_A E \left[\int_a^b X_t^2 dt \mid \mathcal{F}_a \right] dP.
\end{aligned}$$

En particular, tomando $A = \Omega$ y usando la propiedad $E[E[Y \mid \mathcal{G}]] = E[Y]$, se sigue que

$$\begin{aligned}
E[I(X)] &= 0, \\
E[I^2(X)] &= E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right],
\end{aligned}$$

propiedades que ya se habían detallado en la proposición 2.10. Observe que

$$\|I(X)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (E[|I(X)|^2])^{1/2} = \left(E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right]\right)^{1/2} = \|X\|_{M^2} < \infty. \quad (2.2.2)$$

Así, $I(X) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Por tanto, si se considera la función

$$\begin{aligned} I : D_{M^2} &\rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega) \\ X &\rightarrow I(X), \end{aligned}$$

entonces I es una isometría, por lo explicado en (2.2.2). Esta propiedad es conocida como la **isometría de Itô para procesos estocásticos predecibles**. Más aún, I es un operador lineal y acotado, como lo expone la proposición 2.11. El concepto de operador lineal y acotado, y algunas de sus consecuencias son explicados en el apéndice B.2. Esto será fundamental para extender la integral estocástica a procesos en $M^2[a, b]$ (ver definición 2.13).

Proposición 2.11. *La función*

$$\begin{aligned} I : D_{M^2} &\rightarrow L^2(\Omega) \\ X &\rightarrow I(X), \end{aligned}$$

es un operador lineal acotado.

Demostración. Suponga que $X, Y \in D_{M^2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $I_0, \dots, I_{n-1}$ los subintervalos de $[a, b]$, en los cuales X y Y son constantes. Sin pérdida de generalidad, considere $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, n$, con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Entonces

$$X_t = \sum_{i=1}^n X_{i-1} \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad Y_t = \sum_{i=1}^n Y_{i-1} \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

para algunas v.a. X_{i-1}, Y_{i-1} $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medibles y cuadrado integrables. Note que

$$\alpha X + Y = \sum_{i=1}^n (\alpha X_{i-1} + Y_{i-1}) \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)},$$

y así,

$$\begin{aligned} \alpha I(X) + I(Y) &= \alpha \sum_{i=1}^n X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n Y_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha X_{i-1} + Y_{i-1}) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= I(\alpha X + Y). \end{aligned}$$

Esto muestra que I es lineal. Por otro lado, como I es una isometría, se sigue que es acotado de norma 1. El concepto de norma operador es definido en el apéndice B.2. $\square$

La siguiente proposición establece que el espacio D_{M^2} es denso en $M^2[a, b]$.

Proposición 2.12. *Suponga que $X \in M^2[a, b]$. Entonces existe una sucesión $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de procesos estocásticos simples en D_{M^2} , tales que*

$$\|X_t^n - X_t\|_{M^2}^2 = \int_a^b E[(X_t^n - X_t)^2] dt \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Demostración. Suponga que la función $(t, s) \rightarrow E[X_t X_s]$ es continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$X_t^n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ es una partición de $[a, b]$.

Considere $t \in [a, b]$ fijo. Entonces existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $t \in [t_{i-1}, t_i)$. Así, como $\mathcal{F}_{t_{i-1}} \subseteq \mathcal{F}_t$ y $X_{t_{i-1}}$ es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible, se sigue que $X_t^n = X_{t_{i-1}}$ es $\mathcal{F}_t$ -medible. Por tanto, $\{X_t^n\}_{t \in [a, b]}$ es un proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$. Más aún, para $\omega \in \Omega$, la función $t \rightarrow X_t^n(\omega)$ es continua a derecha. Luego, $\{X_t^n\}_t$ es progresivamente medible. Por otro lado, se sabe que

$$\int_{[a, b]} \int_{\Omega} X_t^2(\omega) dP d\lambda_{[a, b]} < \infty,$$

de lo cual,

$$E[X_t^2] = \int_{\Omega} X_t^2(\omega) dP < \infty,$$

para casi todo $t \in [a, b]$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $E[X_{t_{i-1}}] < \infty$, para todo i , (de lo contrario, tome una partición $P = \{t'_0, \dots, t'_n\}$ de $[a, b]$ de manera que esto se satisfaga). Esto muestra que $X^n \in D_{M^2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por la continuidad de $E[X_t X_s]$ en $[a, b] \times [a, b]$, se deduce que

$$\lim_{s \rightarrow t} E[(X_t - X_s)^2] = E[X_t^2] - 2 \lim_{s \rightarrow t} E[X_t X_s] + \lim_{s \rightarrow t} E[X_s^2] = 0.$$

Note que cuando $n \rightarrow \infty$, $t_{i-1} \rightarrow t$. El límite anterior implica que para $t \in [t_{i-1}, t_i)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_t - X_t^n)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_t - X_{t_{i-1}})^2] = 0.$$

Usando la desigualdad $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, se tiene que

$$|E[(X_t - X_t^n)^2]| \leq 2E[X_t^2] + 2E[(X_t^n)^2] \leq 4 \sup_{a \leq t \leq b} E[X_t^2].$$

Observe que $\sup_{a \leq t \leq b} E[X_t^2] < \infty$, puesto que la función $t \rightarrow E[X_t^2]$ es continua en el compacto $[a, b]$. Así, $\sup_{a \leq t \leq b} E[X_t^2]$ es integrable en $[a, b]$ respecto a la medida de Lebesgue. Luego, por el teorema de la convergencia dominada, se infiere que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E[(X_t^n - X_t)^2] dt = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_t^n - X_t)^2] \right) dt = 0.$$

Por tanto, $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Ahora bien, si X es un proceso acotado (ver definición en la sección 1.1), para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el proceso $\{Y_t^n\}_{t \in [a, b]}$ por

$$Y_t^n(\omega) = \int_0^{n(t-a)} e^{-u} X_{t-n^{-1}u}(\omega) du = \int_a^t n e^{-n(t-u)} X_u(\omega) du.$$

Dado que X es progresivamente medible, para cada $t \in [a, b]$, la función $(\omega, u) \rightarrow X_u(\omega)$ es $\mathcal{F}_t \otimes [a, t]$ -medible. Además,

$$\int_a^t E[X_u^2] du \leq \int_a^b E[X_u^2] du < \infty.$$

Así, $X \in \mathbf{L}^2(\Omega \times [a, t])$. Como $(P \otimes \mu_{[a, t]})(\Omega \times [a, t]) < \infty$, entonces $X \in \mathbf{L}^1(\Omega \times [a, t])$. Por tanto, la función $(\omega, u) \rightarrow n e^{-n(t-u)} X_u(\omega)$ es integrable en el espacio $\Omega \times [a, t]$. Por el teorema de Fubini, se sigue que la función

$$\omega \rightarrow \int_a^t n e^{-n(t-u)} X_u(\omega) du,$$

es $\mathcal{F}_t$ -medible. Esto muestra que el proceso $\{Y_t^n\}_t$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_t$. Más aún, $\int_a^b E[(Y_t^n)^2] < \infty$ y

$$\lim_{t \rightarrow s} E[(Y_t^n - Y_s^n)^2] = 0.$$

Este límite implica que $E[Y_t^n Y_s^n]$ es una función continua de (t, s) .

Observe que

$$\begin{aligned} \int_a^b E[(X_t - Y_t^n)^2] dt &\leq \int_a^b \int_0^\infty e^{-u} E[(X_t - X_{t-n^{-1}u})^2] du dt \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \left(\int_a^b E[(X_t - X_{t-n^{-1}u})^2] dt \right) du \\ &= \int_0^\infty e^{-u} E \left[\int_a^b (X_t - X_{t-n^{-1}u})^2 dt \right] du. \end{aligned}$$

Además, como X es acotado

$$\int_a^b (X_t - X_{t-n^{-1}u})^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ c.s.}$$

De lo cual, se concluye que

$$\int_a^b E[(X_t - Y_t^n)^2] dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.2.3)$$

Dado que $E[Y_t^n Y_s^n]$ es continua, por lo probado anteriormente, existe una sucesión $\{X^n\}_n$ de procesos simples tales que

$$\int_a^b E[(Y_t^n - X_t^n)^2] dt \leq \frac{1}{n}. \quad (2.2.4)$$

De (2.2.5) y (2.2.3), se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E[(X_t - X_t^n)^2] dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

lo cual concluye la prueba en el caso que X sea un proceso acotado. De manera general, si $X \in M^2[a, b]$, defina la sucesión $\{Y^n\}_n$ por

$$Y_t^n(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega), & |X_t(\omega)| \leq n, \\ 0, & |X_t(\omega)| > n. \end{cases}$$

Entonces por el teorema de la convergencia dominada

$$\int_a^b E[(X_t - Y_t^n)^2] dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Entonces por lo analizado en el caso anterior, para cada n , existe un proceso $\{X_t^n\}_t$, de manera que

$$\int_a^b E[(Y_t^n - X_t^n)^2] dt \leq \frac{1}{n}, \quad (2.2.5)$$

lo que lleva a la conclusión de la prueba. Los detalles de la demostración se pueden encontrar en (Ribet, 2006), pp. 45-47. $\square$

A manera de resumen, se ha probado que

$$\begin{aligned} I : D_{M^2} &\rightarrow L^2(\Omega) \\ X &\rightarrow I(X) \end{aligned}$$

es un operador lineal acotado (proposición 2.11). El conjunto de procesos simples predecibles $D_{M^2} \subseteq M^2[a, b]$, siendo $M^2[a, b]$ un espacio de Hilbert con el producto interno

heredado de $\mathbf{L}^2(\Omega \times [a, b])$ (proposición 2.4). Además, $\overline{D_{M^2}} = M^2[a, b]$ (proposición 2.12). Por tanto, por el teorema de extensión para operadores lineales y acotados presentado en la proposición B.13 del apéndice B.2, I tiene una única extensión

$$\tilde{I} : M^2[a, b] \rightarrow L^2(\Omega), \quad (2.2.6)$$

donde $\tilde{I}$ un operador lineal y acotado, con norma operador $\|\tilde{I}\| = \|I\| = 1$ (ver definición en el apéndice B.2).

Definición 2.13. *Suponga que $X \in M^2[a, b]$. La integral estocástica o integral de Itô de X , está dada por*

$$\int_a^b X_t dB_t := \tilde{I}(X),$$

donde $\tilde{I} : M^2[a, b] \rightarrow L^2(\Omega)$ definida por $X \rightarrow \tilde{I}(X)$, es la extensión explicada en (2.2.6).

Observación 2.14. *Estudiar la integral estocástica desde la perspectiva de análisis funcional, como se ha presentado en la definición 2.13, permite simplificar los cálculos que hacen los libros de probabilidad usuales (ver por ejemplo (Baldi, 2017), (Chung y Williams, 1990), (Ribet, 2006)), para probar que la integral de Itô es un operador lineal y que su valor, $I(X)$, es una v.a. en el espacio $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Así mismo, proporciona una mirada complementaria de la integral, mostrando la dualidad presente entre el análisis y la probabilidad.*

Con el fin de no sobrecargar la notación, a la extensión $\tilde{I}$ detallada en (2.2.6), se le va a denotar con I .

De acuerdo con la proposición 2.12, para $X \in M^2[a, b]$, existe una sucesión $\{X^n\}_n$ de procesos simples en $D_{M^2}[a, b]$, tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$. Lo cual implica que $\{X^n\}_n$ es de Cauchy en este espacio, así, para $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\int_a^b E[(X_t^n - X_t^m)^2] dt < \varepsilon.$$

Lo cual implica que $\{I(X^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En efecto, por la linealidad de I , para todos $n, m \geq N$, se satisface que

$$\begin{aligned} \|I(X^n) - I(X^m)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= E[(I(X^n - X^m))^2] \\ &= \text{Var}[I(X^n - X^m)] \\ &= \int_a^b E[(X_t^n - X_t^m)^2] dt \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, al ser $\mathbf{L}^2(\Omega)$ un espacio completo, $\{I(X^n)\}_n$ converge en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Así, el siguiente límite existe

$$\mathfrak{I}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Note que $\mathfrak{I} : M^2[a, b] \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ es lineal, gracias a la linealidad de I en D_{M^2} . Además, por la isometría de Itô para procesos estocásticos predecibles, para todo $X^n \in D_{M^2}$, se cumple que $\|I(X^n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|X^n\|_{M^2}$. En consecuencia, por la continuidad de la función norma,

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{I}\| &= \sup_{X \in M^2[a, b]} \frac{\|\mathfrak{I}(X)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}{\|X\|_{M^2[a, b]}} \\ &= \sup_{X \in M^2} \frac{\|\lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n)\|_{\mathbf{L}^2}}{\|\lim_{n \rightarrow \infty} X^n\|_{M^2}} \\ &= \sup_{X \in M^2[a, b]} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|I(X^n)\|_{\mathbf{L}^2}}{\|X^n\|_{M^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathfrak{I}$ es un operador acotado. Así mismo, $I = \mathfrak{I}$ en D_{M^2} (para $X \in D_{M^2}$, considere la sucesión $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2}$ tal que $X^n = X$, $n \in \mathbb{N}$).

Por tanto, por la unicidad de la extensión para operadores lineales y acotados, expuesta en (2.2.6), se sigue que $I = \mathfrak{I}$. Esta observación motiva la siguiente proposición, la cual es una caracterización a la definición de la integral de Itô 2.13.

Proposición 2.15. *Suponga que $X \in M^2[a, b]$. Entonces*

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b X_t^n dB_t \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

donde $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_{M^2}$ es una sucesión tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$.

Observación 2.16. *(Buena definición de la integral estocástica). Considere $X \in M^2[a, b]$. Entonces existe una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2}$ tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$. De acuerdo con la proposición 2.15, la integral estocástica de X , $I(X)$, está dada por*

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Suponga que $\{Y^n\}_n \subseteq D_{M^2}$ es tal que $Y^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$. Entonces

$$\begin{aligned} \|I(X^n) - I(Y^n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= E[(I(X^n - Y^n))^2] \\ &\leq 2 \int_a^b E[(X_t^n - X_t)^2] dt + 2 \int_a^b E[(X_t - Y_t^n)^2] dt \\ &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(Y^n) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Se ha demostrado que el operador $I : D_{M^2[a,b]} \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ es una isometría (ver la igualdad en (2.2.2)). La proposición 2.17 establece una generalización de este resultado para procesos en $M^2[a,b]$.

Proposición 2.17. (*Isometría de Itô*). Si $X \in M^2[a,b]$, entonces

$$\|I(X)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = E \left[\left(\int_a^b X_t dB_t \right)^2 \right] = E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] = \|X\|_{M^2[a,b]}^2.$$

Demostración. Suponga que $X \in M^2[a,b]$. Entonces existe una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2}$ tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a,b]$. Por tanto, $I(X^n) \rightarrow I(X)$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Luego, por la continuidad de la función norma, se tiene que $\|X^n\|_{M^2} \rightarrow \|X\|_{M^2}$ y $\|I(X^n)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow \|I(X)\|_{\mathbf{L}^2}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X^n \in D_{M^2}$. Así, usando la isometría de Itô para procesos estocásticos predecibles, se sigue que

$$\|I(X)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|I(X^n)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X^n\|_{M^2[a,b]} = \|X\|_{M^2[a,b]}.$$

□

Una consecuencia de la isometría de Itô es que si $\{X^n\}_n \subseteq M^2[a,b]$ es una sucesión que converge a X en $M^2[a,b]$, entonces $I(X^n) \rightarrow I(X)$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, como se expone en el siguiente corolario.

Corolario 2.18. Si $X^n, X \in M^2[a,b]$ son procesos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \right] = 0,$$

entonces

$$\int_a^b X_t^n dB_t \rightarrow \int_a^b X_t dB_t, \quad n \rightarrow \infty \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Demostración. El resultado se sigue de la isometría de Itô, ya que

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_a^b X_t^n dB_t - \int_a^b X_t dB_t \right)^2 \right] &= E \left[\left(\int_a^b (X_t^n - X_t) dB_t \right)^2 \right] \\ &= E \left[\int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \right] \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

□

A continuación, se muestra que la integral estocástica de un proceso en $M^2[a, b]$ es una v.a. de media cero y varianza $E[\int_a^b X_t^2 dt]$, propiedad que generaliza la proposición 2.10. La demostración del resultado se basa en dicha proposición. Note que, en particular, si $E[I(X)] = 0$, entonces $\text{Var}[I(X)] = E[(I(X))^2] = \|X\|_{M^2}^2$, gracias a la isometría de Itô (ver (Baldi, 2017), p.188).

Proposición 2.19. *Sea $X \in M^2[a, b]$. Entonces $I(X)$ es una v.a. de media cero y varianza*

$$E[(I(X))^2] = \int_a^b E[X_t^2] dt = E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right].$$

El corolario 2.20 prueba que el operador $I : M^2[a, b] \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ preserva el producto entre los espacios $M^2[a, b]$ y $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Corolario 2.20. *Suponga que $X, Y \in M^2[a, b]$. Entonces*

$$\langle X, Y \rangle_{M^2} = \int_a^b E[X_t Y_t] dt = E \left[\int_a^b X_t dB_t \int_a^b Y_t dB_t \right] = \langle I(X) I(Y) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Demostración. Por la linealidad de la integral estocástica y la proposición 2.19, se llega a que

$$\begin{aligned} E[(I(X) + I(Y))^2] &= E[(I(X + Y))^2] \\ &= \int_a^b E[(X_t + Y_t)^2] dt \\ &= \int_a^b E[X_t^2] dt + 2 \int_a^b E[X_t Y_t] dt + \int_a^b E[Y_t^2] dt. \end{aligned}$$

A su vez, según la proposición 2.19, se sigue que

$$\begin{aligned} E[(I(X) + I(Y))^2] &= E[(I(X))^2] + 2E[I(X)I(Y)] + E[(I(Y))^2] \\ &= \int_a^b E[X_t^2] dt + 2E[I(X)I(Y)] + \int_a^b E[Y_t^2] dt. \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores implican que

$$\int_a^b E[X_t Y_t] dt = E[I(X)I(Y)] = E \left[\int_a^b X_t dB_t \int_a^b Y_t dB_t \right].$$

□

Observación 2.21. *La proposición 2.17 y el corolario 2.20 establecen que el operador $I : M^2[a, b] \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ es una isometría y preserva el producto escalar de los espacios $M^2[a, b]$ y $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Es natural preguntarse si el operador es sobreyectivo, es decir, si toda v.a. en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ puede verse como la integral estocástica de un proceso en $M^2[a, b]$. Sin*

embargo, esto no se cumple, puesto que la esperanza de toda integral estocástica es cero. Por ejemplo, si se considera la v.a. $X \equiv 1$ en Ω , como $P[\Omega] = 1$, se sigue que $X \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y $E[X] = 1 \neq 0$.

La siguiente proposición presenta algunas propiedades de las integrales estocásticas, que son análogas a las estudiadas en los cursos de análisis. Sin embargo, una diferencia es que no necesariamente la integral de un proceso no negativo, es no negativa.

Proposición 2.22. *Considere $X \in M^2[a, b]$ y $c \in [a, b]$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $X \in M^2[a, c]$ y $X \in M^2[c, b]$.
2. $\int_a^b X_t dB_t = \int_a^c X_t dB_t + \int_c^b X_t dB_t$.
3. $\int_a^a X_t dB_t = 0$.
4. Si $X \geq 0$, entonces no necesariamente $\int_a^b X_t dB_t \geq 0$.
5. Si $Y = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}, \{Y_t\}_{t \in [a, b]}, P)$ es continuo y

$$E \left[\int_a^b Y_t^2 dt \right] < \infty,$$

entonces la integral estocástica $\int_a^b Y_t dB_t$ está bien definida.

Demostración.

1. Suponga que $X \in D_{M^2[a, b]}$. Entonces

$$X_t = \sum_{i=1}^n X_{i-1} \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ es una partición de $[a, b]$, X_{i-1} es una v.a. $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible y $E[X_{i-1}^2] < \infty$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Denote con $X|_{[a, c]}$ la restricción del proceso X en el tiempo $[a, c]$. Es decir, $X|_{[a, c]} : \Omega \times [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $(\omega, t) \rightarrow X_t(\omega)$. Note que para cualquier $c \in [a, b]$, existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $c \in [t_{k-1}, t_k)$. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_{i-1} \mathbb{1}_{[t_{i-1} \wedge c, t_i \wedge c)} &= \sum_{i=1}^{k-1} X_{i-1} \mathbb{1}_{[t_{i-1} \wedge c, t_i \wedge c)} + X_{k-1} \mathbb{1}_{[t_{k-1}, c)} + \sum_{i=k+1}^n X_{i-1} \mathbb{1}_{[t_{i-1} \wedge c, t_i \wedge c)} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} X_{i-1} \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)} + X_{k-1} \mathbb{1}_{[t_{k-1}, c)} \\ &= X|_{[a, c]}. \end{aligned}$$

De aquí, se sigue que $X|_{[a,c]} \in D_{M^2[a,c]}$, De manera análoga, se muestra que $X|_{[c,b]} \in D_{M^2[c,b]}$, puesto que

$$X|_{[c,b]} = \sum_{i=1}^n X_{i-1} 1_{[t_{i-1} \vee c, t_i \vee c)}$$

Suponga que $X \in M^2[a, b]$. Entonces existe una sucesión de procesos simples en $D_{M^2[a,b]}$ tal que

$$\int_a^b E[(X_t - X_t^n)^2] dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Esto es, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n > N$, entonces

$$\int_a^b E[(X_t - X_t^n)^2] dt < \varepsilon.$$

Luego, para $c \in [a, b]$ y $n \geq N$ se satisface

$$\begin{aligned} \int_a^c E[(X_t - X_t^n)^2] dt &\leq \int_a^b E[(X_t - X_t^n)^2] dt < \varepsilon, \\ \int_c^b E[(X_t - X_t^n)^2] dt &\leq \int_a^b E[(X_t - X_t^n)^2] dt < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $X^n|_{[a,c]} \rightarrow X|_{[a,c]}$ en $M^2[a, c]$ y $X^n|_{[c,b]} \rightarrow X|_{[c,b]}$ en $M^2[c, b]$.

2. Si X es un proceso estocástico simple en $D_{M^2[a,b]}$. Entonces X restringido a los intervalos $[a, c], [c, b]$ pertenecen a $M^2[a, c], M^2[c, b]$ respectivamente. Siguiendo la notación del ítem 1, y lo probado allí, se tiene que

$$\int_a^c X_t dB_t + \int_c^b X_t dB_t = \sum_{i=1}^n X_{i-1} (B_{t_i \wedge c} - B_{t_{i-1} \wedge c}) + \sum_{i=1}^n X_{i-1} (B_{t_{i-1} \vee c} - B_{t_i \vee c}).$$

Como $c \in [a, b]$, existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $c \in [t_{k-1}, t_k)$. Por ende,

$$\begin{aligned} &\int_a^c X_t dB_t + \int_c^b X_t dB_t \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k-1} X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + X_k (B_c - B_{t_{k-1}}) + \sum_{i=k+1}^n X_{i-1} (B_c - B_{t_i}) \right) \\ &+ \left(\sum_{i=1}^{k-1} X_{i-1} (B_c - B_{t_i}) + X_k (B_{t_k} - B_c) + \sum_{i=k+1}^n X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \int_a^b X_t dB_t. \end{aligned}$$

Suponga que $X \in M^2[a, b]$. Entonces existe una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2[a, b]}$, tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$. Por el ítem 1, se sabe que $X^n|_{[a, c]} \rightarrow X|_{[a, c]}$ en $M^2[a, c]$ y $X^n|_{[c, b]} \rightarrow X|_{[c, b]}$ en $M^2[c, b]$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_a^c X_t dB_t + \int_c^b X_t dB_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n|_{[a, c]}) + \lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n|_{[c, b]}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I(X^n|_{[a, c]}) + I(X^n|_{[c, b]}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b X_t^n dB_t \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene por lo probado anteriormente para procesos en $D_{M^2[a, b]}$.

3. Suponga que $X \in D_{M^2[a, b]}$. De acuerdo con la notación de los ítems 1 y 2, se tiene que

$$\int_a^a X_t dB_t = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i \wedge a} - B_{t_{i-1} \wedge a}) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_a - B_a) = 0.$$

De la misma forma, si $X \in M^2[a, b]$ y $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D_{M^2[a, b]}$ es tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$, entonces

$$\int_a^a X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^a X_t^n dB_t = 0,$$

por el caso anterior.

4. Considere el proceso $X : \Omega \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $X_t(\omega) = 1$, donde $\delta > 0$. Note que la función $(s, t) \rightarrow E[X_s X_t] = 1$ es continua. Así, si $P_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \delta\}$ es una partición de $[0, \delta]$, usando lo mostrado en la observación 2.24, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\delta X_t dB_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= B_\delta - B_0 \\ &= B_\delta. \end{aligned}$$

No obstante, la función $\omega \rightarrow B_\delta(\omega)$ no es necesariamente positiva, ya que por el teorema de la ley del logaritmo iterado 1.37, el movimiento browniano toma valores positivos y negativos infinitas veces en cualquier intervalo de tiempo pequeño $[0, \varepsilon]$ c.s., con $\delta \in [0, \varepsilon]$.

5. En la observación 2.5, se probó que si Y es un proceso adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}$ es continuo, entonces $Y \in M_{loc}^2[a, b]$. La condición

$$E \left[\int_a^b Y_t^2 dt \right] < \infty,$$

garantiza que $Y \in M^2[a, b]$. En consecuencia, la integral estocástica $\int_a^b Y_t dB_t$ está bien definida.

□

La siguiente proposición muestra que si X y Y son procesos en $M^2[a, b]$, que son modificaciones uno del otro en un evento $A \in \mathcal{F}$, entonces sus integrales estocásticas coinciden c.s. en A . Su demostración puede ser consultada en (Baldi, 2017), pp. 191-192.

Proposición 2.23. *Considere $X, Y \in M^2[a, b]$. Si $X_t = Y_t$ en $A \in \mathcal{F}$, para todo $t \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b X_t dB_t = \int_a^b Y_t dB_t \text{ c.s. en } A.$$

Hasta ahora se ha construido la integral de Itô y se han mostrado algunas de sus propiedades. Sin embargo, es importante notar que al calcular $\int_a^b X_t dB_t$, donde $X \in M^2[a, b]$, se debe hallar una sucesión de procesos simples $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2}$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E[(X_t - X_t^n)^2] dt = 0.$$

Posteriormente, encontrar

$$I(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

tareas que, en general, no son sencillas. Es por esto que, así como en los cálculos tradicionales, es esencial desarrollar criterios que permitan abordar la complejidad inherente del cálculo de integrales estocásticas.

Observación 2.24.

- La demostración de la proposición 2.12 no sólo muestra la densidad de los procesos estocásticos simples de la forma (2.2.1) en $M^2[a, b]$, si no que también proporciona un criterio útil para calcular algunas integrales estocásticas. En efecto, suponga que se quiere calcular $\int_a^b X_t dB_t$, siendo $(t, s) \rightarrow E[X_t X_s]$ una función continua en $[a, b] \times [a, b]$. Si se considera la sucesión $\{X_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de procesos en D_{M^2} , definida por

$$X_t^n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ es una partición de $[a, b]$, entonces $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, por la buena definición de la integral estocástica presentada en la observación 2.16, se tiene que

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b X_t^n dB_t \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Pero,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b X_t^n dB_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega), \end{aligned}$$

donde $\|\Delta_n\|$ denota la norma de la partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Esto es, $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Más aún, existe una subsucesión $\{X^{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (ver diagrama A.4), tal que

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b X_t^{n_k} dB_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} X_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ c.s.}$$

Así, en este caso, la integral de Itô se puede calcular trayectoria por trayectoria (c.s.), como límite de sumas de productos entre el proceso X evaluado en el extremo izquierdo de la partición y las diferencias $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$. Lo cual es similar a la forma de calcular integrales por Riemann. Sin embargo, note que por el ejemplo 2.1, $\int_a^b X_t dB_t$ no coincide, en general, con cualquier límite de sumas de Riemann-Stieltjes.

- En la sección 2.3 se demostrará que si $f \in \mathbf{L}^2[a, b] \subseteq M^2[a, b]$ es continua y de variación acotada, entonces

$$\int_a^b f(t) dB_t = (RS) \int_a^b f(t) dB_t \text{ c.s.,}$$

donde la integral en el lado izquierdo es la integral de Itô y la del lado derecho es la integral de Riemann-Stieltjes (ver proposición 2.30).

- Suponga que $X \in M^2[a, b]$ es un proceso continuo. Entonces

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ en probabilidad,}$$

donde $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$. Dicho resultado se demuestra en la proposición 2.41 de la sección 2.4.

En el ejemplo 2.25 se estudian algunas integrales estocásticas. En particular, se calcula $\int_a^b B_t dB_t$, la cual se había introducido previamente en la sección 2.1.

Ejemplo 2.25.

- En la observación 2.5 se mostró que el movimiento browniano es un proceso en $M^2[a, b]$. Por tanto, la integral de Itô $\int_a^b B_t dB_t$ está bien definida. De acuerdo con la proposición 1.28, $E[B_t B_s] = \min\{s, t\}$, la cual es una función continua en $[a, b] \times [a, b]$. Por la observación 2.24, se tiene que

$$\int_a^b B_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

En el ejemplo 2.1 se consideraron las cantidades

$$U_n = \sum_{i=1}^n B_{t_i} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}), \quad L_n = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

y se probó que $\lim_n (U_n + L_n) = B_b^2 - B_a^2$, $\lim_n (U_n - L_n) = b - a$. En consecuencia,

$$\int_a^b B_t dB_t = \frac{1}{2} (B_b^2 - B_a^2 - (b - a)).$$

Además, de acuerdo con la proposición 2.19, la integral estocástica $\int_a^b B_t dB_t$ es una v.a. de media cero y varianza $(b^2 - a^2)/2$.

- Suponga que X y Y son procesos en $M^2[a, b]$ y $M^2[c, d]$, respectivamente, donde $a \leq c$. Si $[a, b]$ y $[c, d]$ son no disjuntos, entonces $[a, b] \cap [c, d] = [c, b]$ o $[a, b] \cap [c, d] = [c, d]$. En caso que $[a, b] \cap [c, d] = [c, b]$, defina los procesos

$$\tilde{X}_t = \begin{cases} X_t, & t \in [a, b], \\ 0, & t \in (b, d]. \end{cases} \quad \tilde{Y}_t = \begin{cases} 0, & t \in [a, c), \\ Y_t, & t \in [c, d]. \end{cases}$$

Por el corolario 2.20, se tiene que

$$\begin{aligned} E \left[\int_a^b X_t dB_t \int_c^d Y_t dB_t \right] &= E \left[\int_a^d \tilde{X}_t dB_t \int_a^d \tilde{Y}_t dB_t \right] \\ &= \int_a^d E[\tilde{X}_t \tilde{Y}_t] dt \\ &= \int_c^b E[\tilde{X}_t \tilde{Y}_t] dt. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$, entonces

$$E \left[\int_a^b X_t dB_t \int_c^d Y_t dB_t \right] = 0.$$

Los argumentos presentados en este ejemplo, pueden usarse para calcular el valor esperado del producto de integrales estocásticas sobre diferentes intervalos.

- Considere el proceso $\{e^{B_t}\}_{t \in [0,1]}$. Observe que para cada $t \in [0, 1]$ fijo, la función $\omega \rightarrow e^{B_t(\omega)}$ es composición de la función continua $x \rightarrow e^x$, $x \in \mathbb{R}$, y la v.a. $\mathcal{F}_t$ -medible $\omega \rightarrow B_t(\omega)$. Por lo tanto, $\{e^{B_t}\}_{t \in [0,1]}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,1]}$. Así mismo, dicho proceso es continuo c.s. De acuerdo con la observación 2.5, $\{e^{B_t}\}_{t \in [0,1]} \in M_{loc}^2[0, 1]$. Como $B_t \sim N(0, t)$, se deduce que

$$\begin{aligned} \int_0^1 E[(e^{B_t})^2] dt &= \int_0^1 E[e^{2B_t}] dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{2x} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \right) dt \\ &= \int_0^1 e^{2t} dt \\ &= \frac{e^2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

Esto muestra que $\{e^{B_t}\}_{t \in [0,1]} \in M^2[0, 1]$. Así, la integral estocástica $\int_0^1 e^{B_t} dB_t$ está bien definida y es una v.a. de media cero y varianza $(e^2 - 1)/2$.

Se puede probar que $E[e^{B_t} e^{B_s}] = e^{t+s}$, la cual es una función continua de $[0, 1] \times [0, 1]$.

De este modo, por la observación 2.24, la integral estocástica está dada por

$$\int_0^1 e^{B_t} dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{B_{t_{i-1}}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

siendo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ una partición de $[0, 1]$.

Suponga que $X \in M^2[a, b]$. En la proposición 2.22 se muestra que $X \in M^2[a, t]$, para cualquier $t \in [a, b]$. Por tanto, la integral estocástica

$$I_{X,a,b}(t) = \int_a^t X_s dB_s,$$

está bien definida. Más aún, se sabe que $I_{X,a,b}(t)$ es una v.a. (ver proposición 2.19). Esto muestra que $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ es un proceso estocástico. Es natural preguntarse sobre las propiedades de dicho proceso. Por ejemplo, ¿Es $I_{X,a,b}(t)$ $\mathcal{F}_t$ -medible? ¿Es continuo?, y de no cumplirse, ¿Bajo qué condiciones se pueden garantizar estas características?.

En el ejemplo 2.25 se calculó la integral estocástica $\int_a^b B_t dB_t$. En particular, para $a = 0$, $b = t > 0$, se encuentra que

$$\int_0^t B_t dB_t = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Note que la función $t \rightarrow \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$ es continua c.s. Además, se satisfacen las siguientes propiedades:

- Para cada $t \in [0, T]$, la v.a. $I_{B,0,T}(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible, puesto que el proceso $\{B_t\}_{t \in [0,T]}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$.
- $E \left[\left| \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \right| \right] \leq \frac{1}{2}E[B_t^2] + \frac{1}{2}t = t < \infty$.
- Considere $s, t \in [0, T]$, con $s \leq t$. Como la función $\omega \rightarrow t$ es $\mathcal{F}_s$ -medible, por la proposición A.38, se sigue que

$$E \left[\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{1}{2}E[B_t^2 | \mathcal{F}_s] - \frac{1}{2}E[t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{2}E[B_t^2 | \mathcal{F}_s] - \frac{1}{2}t.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la v.a. $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ y es independiente de $\mathcal{F}_s$, B_s es $\mathcal{F}_s$ -medible, usando propiedades de la esperanza condicional (ver proposición A.38), se tiene que

$$\begin{aligned} E[B_t^2 | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s + B_s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2E[B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] + E[B_s^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= E[(B_t - B_s)^2] + 2B_s E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + B_s^2 \\ &= t - s + 2B_s E[B_t - B_s] + B_s^2 \\ &= t - s + B_s^2. \end{aligned}$$

Luego,

$$E \left[\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{1}{2}(t - s + B_s^2) - \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}B_s^2 - \frac{1}{2}s.$$

Por tanto, $\{I_{B,0,T}(t)\}_{t \in [0,T]}$ es una martingala respecto a la filtración a la cual está adaptado el movimiento browniano, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$.

Los teoremas 2.26 y 2.27 establecen que, en general, para cualquier $X \in M^2[a, b]$, el proceso $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ es una martingala respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}$. Más aún, $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ acepta una modificación continua.

Teorema 2.26. *Suponga que $X \in M^2[a, b]$. Entonces el proceso $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ definido por*

$$I_{X,a,b}(t) = \int_a^t X_s dB_s$$

es una martingala cuadrado integrable respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}$.

Demostración. El proceso $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ satisface las siguientes propiedades:

1. $I_{X,a,b}(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible, para todo $t \in [a, b]$.
2. $\|I_{X,a,b}(t)\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} = E[|I_{X,a,b}(t)|] < \infty$, $t \in [a, b]$.
3. Si $a \leq s < t \leq b$, entonces $E[I_{X,a,b}(t)|\mathcal{F}_s] = I_{X,a,b}(s)$.

En efecto,

1. Considere $t \in [a, b]$ fijo. Entonces, por la proposición 2.22, el proceso X restringido al intervalo $[a, t]$ pertenece a $M^2[a, t]$. Por lo tanto, existe una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2[a,t]}$ tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, t]$. Se sigue que

$$I_{X,a,b}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t X_s^n dB_s \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Por ende, existe una subsucesión $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{n\}_n$ (ver diagrama A.4), tal que

$$I_{X,a,b}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^t X_s^{n_k} dB_s \text{ c.s.}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, suponga que X^n es de la forma

$$X_s^n = \sum_{i=1}^{m_n} X_{i-1}^n \mathbf{1}_{[s_{i-1}^n, s_i^n)}(s),$$

donde $a = s_0^n < s_1^n < \dots < s_{m_n}^n = t$ es una partición de $[a, t]$. En consecuencia,

$$\int_a^t X_s^n dB_s = \sum_{i=1}^{m_n} X_{i-1}^n (B_{s_{i-1}^n} - B_{s_i^n})$$

Las v.a. $B_{s_i^n}$ y $B_{s_{i-1}^n}$ son $\mathcal{F}_{s_i^n}$ y $\mathcal{F}_{s_{i-1}^n}$ -medibles, respectivamente. Como $\mathcal{F}_{s_i^n} \subseteq \mathcal{F}_t$ y $\mathcal{F}_{s_{i-1}^n} \subseteq \mathcal{F}_t$, entonces $B_{s_i^n}$ y $B_{s_{i-1}^n}$ son $\mathcal{F}_t$ -medibles. Así mismo, X_{i-1}^n es $\mathcal{F}_t$ -medible, puesto que X_{i-1}^n es medible respecto a la σ -álgebra $\mathcal{F}_{s_{i-1}^n} \subseteq \mathcal{F}_t$.

Se concluye que

$$\int_a^t X_s^n dB_s$$

es $\mathcal{F}_t$ -medible, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, $I_{X,a,b}(t)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible, al ser límite de funciones con dicha propiedad.

2. Usando la desigualdad de Hölder y la isometría de Itô (proposición 2.17), se deduce que

$$\begin{aligned}
 \|I_{X,a,b}(t)\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} &\leq \|I_{X,a,b}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = (E[(I_{X,a,b}(t))^2])^{1/2} \\
 &= \left(E \left[\int_a^t X_s^2 ds \right] \right)^{1/2} \\
 &\leq \left(E \left[\int_a^b X_s^2 ds \right] \right)^{1/2} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

3. Considere $a \leq s < t \leq b$. Entonces

$$\begin{aligned}
 E[I_{X,a,b}(t)|\mathcal{F}_s] &= E \left[\int_a^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = E \left[\int_a^s X_u dB_u + \int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= E \left[\left[\int_a^s X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] + E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\
 &= \int_a^s X_u dB_u + E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= I_{X,a,b}(s) + E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right].
 \end{aligned}$$

En el razonamiento anterior se han usado las proposiciones A.38, 2.22 y el ítem 1, teniendo en cuenta que $I_{X,a,b}(s)$ es $\mathcal{F}_s$ -medible.

Note que para completar la prueba, basta verificar que

$$E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0.$$

Para ello, suponga que $X|_{[s,t]} \in D_{M^2[s,t]}$. Entonces $X|_{[s,t]}$ es de la forma

$$\sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}),$$

donde $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Luego,

$$\int_s^t X_u dB_u = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Ahora bien, se sabe que $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ y es independiente de la σ -álgebra $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$. Además, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_{i-1}}$ y la v.a. X_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible, para todo

$i \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 E \left[\int_s^t X_u B_u \middle| \mathcal{F}_s \right] &= E \left[\sum_{i=1}^n X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E \left[X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E \left[E \left[X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E \left[X_{i-1} E \left[B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \middle| \mathcal{F}_{t_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E \left[X_{i-1} E \left[B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \right] \middle| \mathcal{F}_s \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Si $X \in M^2[s, t]$, existe una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2[s, t]}$ tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[s, t]$. Como la función $x \rightarrow x^2$ es convexa, por la desigualdad de Jensen presentada en la proposición A.39, se sigue que $(E[Y|\mathcal{G}])^2 \leq E[Y^2|\mathcal{G}]$. Así,

$$\left(E \left[\int_s^t (X_u^n - X_u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \right)^2 \leq E \left[\left(\int_s^t (X_u^n - X_u) dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

Usando las proposiciones A.38 y 2.17, la desigualdad anterior implica que

$$\begin{aligned}
 E \left[\left(E \left[\int_s^t (X_u^n - X_u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \right)^2 \right] &\leq E \left[E \left[\left(\int_s^t (X_u^n - X_u) dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\
 &= E \left[\left(\int_s^t (X_u^n - X_u) dB_u \right)^2 \right] \\
 &= \int_s^t E \left[(X_u^n - X_u)^2 \right] du \\
 &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned}
 &E \left[\left(E \left[\int_s^t X_u^n dB_u - \int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \right)^2 \right] \\
 &= E \left[\left(E \left[\int_s^t X_u^n dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] - E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \right)^2 \right] \\
 &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$E \left[\int_s^t X_u^n dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \rightarrow E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega), \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Así, existe una subsucesión $\{X^{n_k}\}_k$ de $\{X^n\}_n$ tal que

$$E \left[\int_s^t X_u^{n_k} dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \rightarrow E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \text{ c.s. cuando } k \rightarrow \infty.$$

Pero, por lo probado para procesos simples,

$$E \left[\int_s^t X_u^{n_k} dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0,$$

para todo n_k . Por tanto,

$$E \left[\int_s^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0.$$

Las propiedades 1, 2 y 3, muestran que $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a,b]}$. Más aún, $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ es cuadrado integrable, ya que para $X \in M^2[a, t]$, $a \leq t \leq b$, por la isometría de Itô 2.17, se tiene que

$$E \left[(I_{X,a,b}(t))^2 \right] = \int_a^t E[X_u^2] du < \infty.$$

□

Teorema 2.27. Si $X \in M^2[a, b]$, entonces el proceso $\{I_{X,a,b}(t)\}_{t \in [a,b]}$ tiene una modificación continua.

Demostración. Suponga que X es un proceso estocástico simple en $D_{M^2[a,b]}$ de la forma

$$X_s(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(s),$$

donde X_{i-1} es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -medible y $E[X_{i-1}^2] < \infty$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces para casi todo $\omega \in \Omega$, la función $t \rightarrow I_{X,a,b}(t)(\omega)$ definida por

$$I_{X,a,b}(t)(\omega) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(\omega) (B_{t_i \wedge t}(\omega) - B_{t_{i-1} \wedge t}(\omega))$$

es continua. En efecto, como $t \in [t_{k-1}, t_k)$, para algún $k \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$I_{X,a,b}(\omega) = \sum_{i=1}^{k-1} X_{i-1}(\omega) (B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)) + X_{k-1}(\omega) (B_t(\omega) - B_{t_{k-1}}(\omega)).$$

Puesto que la trayectoria $t \rightarrow B_t(\omega)$ es continua c.s., se sigue lo afirmado.

Ahora, considere $X \in M^2[a, b]$. Entonces existe una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq D_{M^2[a, b]}$ tal que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b E \left[(X_s - X_s^n)^2 \right] ds = 0. \quad (2.2.7)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina el proceso $\{Y_t^{(n)}\}_{t \in [a, b]}$ por

$$Y_t^{(n)} = I_{X^n, a, b}(t) = \int_a^t X_s^n dB_s.$$

Recuerde que (2.2.7) implica que $\{Y_b^{(n)}\}_n$ es sucesión de Cauchy en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (ver la construcción realizada para mostrar la caracterización de la integral de Itô presentada en la proposición 2.15). Luego, para todo $\lambda > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq M$,

$$\begin{aligned} \|Y_b^{(n)} - Y_b^{(m)}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= E \left[\left(\int_a^b X_s^n dB_s - \int_a^b X_s^m dB_s \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\int_a^b (X_s^n - X_s^m) dB_s \right)^2 \right] \\ &= \int_a^b E \left[(X_s^n - X_s^m)^2 \right] ds \\ &< \lambda. \end{aligned}$$

Considere la subsucesión $\{n_k\}_k$ de $\{n\}_n$ dada por $n_1 = M, n_m = M + (m - 1), m \geq 2$. Se sigue que

$$\|Y_b^{(n_k)} - Y_b^{(n_{k+l})}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \int_a^b E \left[(X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+l}})^2 \right] ds < \lambda,$$

para todo $k \geq 1, l \geq 1$.

Ahora, el proceso $\{Y_t^{(n_k)}\}_t$ es continuo c.s. y es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$, gracias al teorema 2.26. Como combinación lineal de martingalas es martingala (ver observación 1.23), el proceso $\{Y_t^{(n_k)} - Y_t^{(n_{k+l})}\}_t$ es una martingala continua. De acuerdo con la desigualdad de Doob 1.24, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que

$$P \left[\sup_{a \leq t \leq b} \left\{ \omega \in \Omega : \left| Y_t^{(n_k)}(\omega) - Y_t^{(n_{k+l})}(\omega) \right| \geq \varepsilon \right\} \right] \leq \frac{1}{\varepsilon} E[|Y_b^{(n_k)} - Y_b^{(n_{k+l})}|].$$

Pero,

$$\begin{aligned} E[|Y_b^{(n_k)} - Y_b^{(n_{k+l})}|] &\leq \left(E[|Y_b^{(n_k)} - Y_b^{(n_{k+l})}|^2] \right)^{1/2} \\ &= \|Y_b^{(n_k)} - Y_b^{(n_{k+l})}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &< \lambda^{1/2}, \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = 1/k$, $\lambda = 1/k^4$, se deduce que

$$P[A_{n_k}] = P\left[\sup_{a \leq t \leq b} \left\{ \omega \in \Omega : \left| Y_t^{(n_k)}(\omega) - Y_t^{(n_{k+l})}(\omega) \right| \geq \frac{1}{k} \right\}\right] \leq \frac{1}{k^2}.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} P[A_{n_k}] < \infty$. El primer lema de Borel Cantelli [A.35](#) implica que

$$P\left[\liminf_{k \rightarrow \infty} A_{n_k}^c\right] = 1.$$

Así, existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$ con $P[\Omega_0] = 1$, tal que si $\omega \in \Omega_0$, entonces $\omega \in A_{n_k}^c$ para todos menos un numero finito de k 's. Es decir, existe $M_\omega \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \in A_{n_k}^c$ para $k \geq M_\omega$. Esto es,

$$\sup_{a \leq t \leq b} \left| Y_t^{(n_k)}(\omega) - Y_t^{(n_{k+l})}(\omega) \right| \leq \frac{1}{k}, \text{ para todo } k \geq M_\omega.$$

Por otro lado, la función $t \rightarrow Y_t^{(n_s)}$ es continua c.s. para $s \geq 1$, entonces existe $\Omega_s \subseteq \Omega$, con $P(\Omega_s) = 1$, tal que si $\omega \in \Omega_s$, la función $t \rightarrow Y_t^{(n_s)}(\omega)$ es continua. En consecuencia, tomando $\Omega' = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} \Omega_s$, se tiene que $P[\Omega'] = 1$ y para todo $\omega \in \Omega'$, la función $t \rightarrow Y_t^{(n_s)}(\omega)$ es continua y

$$\sup_{a \leq t \leq b} \left| Y_t^{(n_k)}(\omega) - Y_t^{(n_{k+l})}(\omega) \right| \leq \frac{1}{k}, \text{ para todo } k \geq M_\omega.$$

Tome $N_\omega = \max\{M_\omega, 1/\delta\}$, con $\delta > 0$. Entonces para todo $k \geq N_\omega$, se tiene que

$$\sup_{a \leq t \leq b} \left| Y_t^{(n_k)}(\omega) - Y_t^{(n_{k+l})}(\omega) \right| \leq \delta.$$

Lo que muestra que $\{Y_t^{(n_k)}\}_k$ es una sucesión de procesos con trayectorias continuas, las cuales convergen uniformemente en $[a, b]$. Por tanto, si $\{Y_t\}_{t \in [a, b]}$ es el límite de $\{Y_t^{(n_k)}\}_k$, entonces $\{Y_t\}_t$ es continuo c.s.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_t^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t X_s^n dB_s = \int_a^t X_s dB_s \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y_t^{(n_k)} = \int_a^t X_s dB_s \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Luego, existe una subsucesión $\{n_{k_s}\}_s$ de $\{n_k\}_k$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y_t^{(n_{k_s})} = \int_a^t X_s dB_s \text{ c.s.}$$

Pero,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y_t^{(n_{k_s})} = Y_t \text{ c.s.}$$

Se concluye que $Y_t = \int_a^t X_s dB_s$ c.s. Esto es, $\{I_{X, a, t, b}\}_{t \in [a, b]}$ acepta una modificación continua (ver definición en [1.9](#)). $\square$

2.3. Integral de Wiener

En esta sección, se estudia la integral de Wiener como un caso particular de la integral estocástica discutida en la sección 2.2. El objetivo es mostrar propiedades adicionales de la integral de Itô cuando el conjunto de integrandos son funciones deterministas, es decir, solo dependen de la variable temporal t . Como resultados importantes, se prueba que si $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$, la integral de Itô $\int_a^b f(t)dB_t$ tiene ley normal (proposición 2.29) y su valor coincide con la integral de Riemann-Stieltjes, si f continua y de variación acotada c.s. (proposición 2.30).

Suponga que $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$ es un proceso estocástico adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$. Como f no depende de $\omega \in \Omega$, se tiene que

$$E \left[\int_a^b f^2(t)dt \right] = \int_a^b f^2(t)dt < \infty.$$

Por tanto, $f \in M^2[a, b]$ y la integral $I(f) = \int_a^b f(t)dB_t$ está bien definida. Por la proposición 2.19, $I(f)$ es una v.a. de media cero y varianza $\int_a^b f^2(t)dt$. Además, la función

$$I : \mathbf{L}^2[a, b] \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$$

$$f \rightarrow I(f) = \int_a^b f(t)dB_t$$

es un operador lineal acotado. Así mismo,

$$\|I(f)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \left(\int_a^b f^2(t)dt \right)^{1/2} = \|f\|_{\mathbf{L}^2[a, b]},$$

lo cual muestra que los espacios $\mathbf{L}^2[a, b]$ y $\mathbf{L}^2(\Omega)$ son isométricos (isometría de Itô 2.17). Más aún, por el corolario 2.20, se tiene que

$$E[I(f)I(g)] = \int_a^b E[f(t)g(t)]dt = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Suponga que g es una función de la forma

$$g(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t), \quad (2.3.1)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ es una partición de $[a, b]$. Note que $g \in \mathbf{L}^2[a, b]$. En este caso,

$$I(g) = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Como el conjunto de funciones descritas en (2.3.1) es denso en $\mathbf{L}^2[a, b]$, para toda $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$, existe una sucesión $\{f_n\}_n \subseteq \mathbf{L}^2[a, b]$ de dichas funciones tal que $f_n \rightarrow f$ en $\mathbf{L}^2[a, b]$. En consecuencia, por la buena definición de la integral estocástica 2.16, se deduce que

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_n) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Definición 2.28. Si $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$, la integral de Wiener de f se define por

$$I(f) = \int_a^b f(t)dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dB_t \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

donde $\{f_n\}_n$ es una sucesión de funciones simples en $\mathbf{L}^2[a, b]$, tal que $f_n \rightarrow f$ en $\mathbf{L}^2[a, b]$.

En la sección 2.2 se estudia la función

$$\begin{aligned} I(X) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow I(X)(\omega), \end{aligned}$$

para $X \in M^2[a, b]$. Se muestra que $I(X)$ es una v.a. y se encuentran los valores de su media y varianza (ver proposición 2.19). Sin embargo, su distribución no es conocida en general. Una manera intuitiva de ver esto es que, por ejemplo, si $X \in D_{M^2[a, b]}$ es de la forma

$$X_t = \sum_{i=1}^n X_{i-1} \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

Entonces

$$I(X) = \sum_{i=1}^n X_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Si bien $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$, no necesariamente se conoce la ley de la v.a. X_{i-1} , para $i \in \{1, \dots, n\}$. Esto hace que sea difícil determinar la distribución de $I(X)$. No obstante, una de las propiedades más interesantes de la integral de Wiener es que, para $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$, la integral $I(f)$ distribuye normal.

Proposición 2.29. Suponga que $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)dB_t \sim N\left(0, \int_a^b f^2(t)dt\right).$$

Demostración. Si $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$ es de la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i)}(t),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ es una partición de $[a, b]$. Entonces

$$I(f) = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Por la propiedad de los incrementos independientes del movimiento browniano 3, las v.a. $B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ son independientes. Además, $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. De acuerdo con la proposición A.34, suma de v.a. normales independientes es normal. Se concluye que $I(f)$ tiene ley normal.

De manera general, si $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$, entonces existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_n \subseteq \mathbf{L}^2[a, b]$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $\mathbf{L}^2[a, b]$. Por la proposición A.25, como

$$I(f_n) \sim N\left(0, \int_a^b f_n^2(t) dt\right)$$

y $I(f_n) \rightarrow I(f)$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, entonces $I(f)$ es normal. $\square$

En el ejemplo 2.1 se muestra que a pesar que el movimiento browniano es un proceso continuo c.s., la integral $\int_a^b B_t dB_t$ no existe en el sentido de Riemann-Stieltjes. Esto se debe a la variación cuadrática no nula del proceso. La siguiente proposición establece un conjunto de condiciones bajo las cuales una función *determinista* cuya integral estocástica está bien definida, es a su vez, Riemann-Stieltjes integrable, y sus resultados coinciden c.s.

Proposición 2.30. *Si $f \in \mathbf{L}^2[a, b]$ es una función continua y de variación acotada, entonces*

$$(IW) \int_a^b f(t) dB_t = (RS) \int_a^b f(t) dB_t \text{ c.s.,}$$

donde el lado izquierdo de la igualdad corresponde a la integral de Wiener de f y el lado derecho a la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto al movimiento browniano.

Demostración. La función $(t, s) \rightarrow E[f(t)f(s)] = f(t)f(s)$ es continua en $[a, b] \times [a, b]$. Según lo mostrado en la observación 2.24, se sigue que la integral de Wiener de f está dada por

$$\int_a^b f(t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

donde $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ es una partición de $[a, b]$. Así, existe una subsucesión $\{n_k\}_k$ de $\{n\}_n$ tal que

$$\int_a^b f(t) dB_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ c.s.}$$

En consecuencia, existe $\Omega_1 \subseteq \Omega$, con $P[\Omega_1] = 1$ de modo que para todo $\omega \in \Omega_1$, se satisface

$$\int_a^b f(t)dB_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(t_{i-1})(B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)). \quad (2.3.2)$$

Denote con $\Omega_0 \subseteq \Omega$ al evento $\Omega_0^c = \{\omega \in \Omega : t \rightarrow B_t(\omega) \text{ no es continua}\}$. Entonces $P[\Omega_0] = 1$. De acuerdo con la propiedad 7 presentada en la proposición B.3, para $\omega \in \Omega_0$, como f es de variación acotada, entonces la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b B_t(\omega)df(t)$$

existe. Por tanto, usando la fórmula de integración por partes (ver propiedad 8 de la proposición B.3), para $\omega \in \Omega_0$, f es Riemann- Stieltjes integrable respecto al movimiento browniano y

$$\begin{aligned} \text{(RS)} \int_a^b f(t)dB_t(\omega) &= f(t)B_t(\omega) \Big|_a^b - \int_a^b B_t(\omega)df(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(b)B_b(\omega) - f(a)B_a(\omega) - \sum_{i=1}^n B_{t_i}(\omega)(f(t_i) - f(t_{i-1})) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)). \end{aligned}$$

En particular, se cumple que

$$\text{(RS)} \int_a^b f(t)dB_t(\omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} f(t_{i-1})(B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)). \quad (2.3.3)$$

A partir de (2.3.2) y (2.3.3), para cada $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, se concluye la prueba. $\square$

Ejemplo 2.31. (Sobre la integral de Wiener).

1. Considere $s \in \mathbb{R}$. Entonces la función constante $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = s$, es continua y de variación acotada. Por la proposición 2.30, se sigue que

$$\text{(IW)} \int_a^b f(t)dB_t = \text{(RS)} \int_a^b f(t)dB_t \text{ c.s.}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \text{(RS)} \int_a^b f(t)dB_t &= \int_a^b sdB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n s(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= s(B_b - B_a), \end{aligned}$$

donde $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ es una partición de $[a, b]$. En consecuencia, la integral estocástica de f es la v.a. $\omega \rightarrow s(B_b(\omega) - B_a(\omega))$, la cual tiene distribución normal de media cero y varianza $s^2(b - a)$ (ver proposición 2.29).

2. La función $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(s) = e^{t-s}$, es continua y monótona, por lo tanto, es de variación acotada. Por la proposición 2.30, se obtiene que la integral estocástica

$$\int_0^t e^{t-s} dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e^{t-s_i} (B_{s_i} - B_{s_{i-1}}) \text{ c.s.,}$$

donde $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ es una partición de $[0, t]$. Por otra parte, según la proposición 2.29 la v.a.

$$\int_0^t e^{t-s} dB_s \sim N \left(0, \frac{e^{2t} - 1}{2} \right).$$

3. Suponga que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y f' es acotada. Usando la proposición B.24, se tiene que f es de variación acotada en $[0, 1]$. Considere el evento

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \in \Omega : (IW) \int_0^1 f(t) dB_t(\omega) = (RS) \int_0^1 f(t) dB_t(\omega) \right\}.$$

Entonces, de acuerdo con la proposición 2.30, $P[\Omega_0] = 1$. Así, para todo $\omega \in \Omega_0$, f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a la función $t \rightarrow B_t(\omega)$, y por la fórmula de integración por partes 8, se satisface

$$\begin{aligned} (RS) \int_0^1 f(t) dB_t(\omega) &= f(t) B_t(\omega) \Big|_0^1 - \int_0^1 B_t(\omega) f'(t) dt \\ &= f(1) B_1(\omega) - \int_0^1 B_t(\omega) f'(t) dt. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$(RS) \int_0^1 B_t f'(t) dt = \int_0^1 (f(1) - f(t)) dB_t \text{ c.s.}$$

Ahora bien, la función $t \rightarrow f(1) - f(t)$ es continua y de variación acotada, entonces, por la proposición 2.30, se tiene que

$$(RS) \int_0^1 B_t f'(t) dt = (IW) \int_0^1 (f(1) - f(t)) dB_t \text{ c.s.}$$

Aplicando la proposición 2.19, se obtiene

$$\int_0^1 B_t f'(t) dt \sim N \left(0, \int_0^1 (f(1) - f(t))^2 dt \right).$$

De manera general, para todo $s > 0$ fijo, la v.a.

$$\int_0^s B_t f'(t) dt \sim N \left(0, \int_0^s (f(s) - f(t))^2 dt \right).$$

Lo mostrado en el ítem 3 proporciona un método para conocer la distribución de una v.a. definida por el operador integral $\int_0^s B_t f'(t) dt$, donde f es una función determinista con derivada acotada. Se exhiben a continuación algunos ejemplos en donde se aplica esto.

- a) Suponga que se quiere encontrar la distribución de la v.a. $X_t = \int_0^t B_u du$. Tomando $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ como $u \rightarrow u - t$, entonces $f'(u) = 1$. Por el ítem 3, se sabe que

$$\int_0^t B_u du = \int_0^t B_u f'(u) du = \int_0^t (f(t) - f(u)) dB_u = \int_0^t (t - u) dB_u.$$

Además,

$$\int_0^t B_u du = \int_0^t (t - u) dB_u \sim N\left(0, \frac{t^3}{3}\right).$$

Más aún, dado que $-f(u) = t - u \in \mathbf{L}^2[0, t] \subseteq M^2[0, t]$, de acuerdo con el teorema 2.26, el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, para $T > 0$, es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$, a la cual está adaptado el movimiento browniano $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$. Por lo tanto, para cada $t \in [0, T]$, X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible, $E[|X_t|] < \infty$, y para todo $s \leq t$, se satisface $E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$. Es decir, para cualquier $A \in \mathcal{F}_s$, se tiene que

$$\int_A \left(\int_0^t B_u du \right) dP = \int_A \left(\int_0^s B_u du \right) dP.$$

Así mismo, $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ admite una modificación continua (ver teorema 2.27).

- b) Análogamente a lo mostrado en el ítem 3a, si se considera la función $f(u) = \sin(u - t)$ en $[0, T]$, $T > 0$. Entonces

$$\int_0^t B_u \cos(u - t) du \sim N\left(0, \frac{2t - \sin(2t)}{4}\right).$$

El proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ dado por

$$X_t = \int_0^t B_u \cos(u - t) du,$$

es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ y acepta una modificación continua.

2.4. Integral para procesos en $M_{loc}^2[a, b]$

En la sección 2.2 se estudia la integral estocástica

$$\int_a^b X_t dB_t,$$

para procesos $X \in M^2[a, b]$. Así mismo, se define el espacio $M_{loc}^2[a, b]$ como el conjunto de clases de equivalencia de procesos X progresivamente medibles adaptados a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$, tales que $X \in \mathbf{L}^2[a, b]$ c.s. En particular, se sabe que $M^2[a, b]$ es un subespacio de $M_{loc}^2[a, b]$. El siguiente ejemplo, muestra que, en general, no todo proceso $X \in M_{loc}^2[a, b]$ es un elemento en $M^2[a, b]$, lo que implica $M^2[a, b] \subsetneq M_{loc}^2[a, b]$.

Ejemplo 2.32. Considere el proceso estocástico $X = \{X_t\}_{t \in [0, 1]}$, definido por $X_t = e^{B_t^2}$. Para cada $t \in [0, 1]$ fijo, la función $\omega \rightarrow X_t(\omega)$ es composición de la función continua $x \rightarrow e^x$, $x \in \mathbb{R}$, y la v.a. $\mathcal{F}_t$ -medible $\omega \rightarrow B_t^2(\omega)$. Esto implica que $\{X_t\}_{t \in [0, 1]}$ es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, 1]}$. Más aún, dicho proceso es continuo c.s. De acuerdo con la observación 2.5, $X \in M_{loc}^2[0, 1]$. Sin embargo, como $B_t \sim N(0, t)$, se sigue que

$$\begin{aligned} E[X_t^2] &= E[e^{2B_t^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{2x^2} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{x^2(\frac{4t-1}{2t})} dx. \end{aligned}$$

Si $t < 1/4$, entonces $(4t - 1)/2t < 0$, y así,

$$E[e^{2B_t^2}] = \frac{1}{\sqrt{1 - 4t}}.$$

Por otro lado, si $t \geq 1/4$, $E[e^{2B_t^2}] = \infty$. En consecuencia,

$$\int_0^1 E[X_t^2] dt = \infty,$$

y por lo tanto, $X \notin M^2[0, 1]$.

Es natural entonces preguntarse si es posible generalizar, de alguna manera, el operador integral

$$\int_a^b X_t dB_t,$$

para procesos estocásticos $X \in M_{loc}^2[a, b]$. La respuesta es afirmativa como se muestra en esta sección. La idea de la definición es demostrar que existe una sucesión $\{X^n\}_n$ de procesos en $M^2[a, b]$ que aproximan a X en el espacio $\mathbf{L}^2[a, b]$. Posteriormente, se busca que $I(X)$ sea el límite de las $I(X^n)$. En la proposición 2.39 se prueba que el límite es

en probabilidad, convergencia que es “un poco más débil” que la convergencia en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, como ocurría en la integral estocástica explicada en la definición 2.13 (aquí débil se refiere a que la convergencia en $\mathbf{L}^2$ implica la convergencia en probabilidad, pero no viceversa; véase la figura A.4).

La siguiente proposición establece que, para todo proceso $X \in M_{\text{loc}}^2[a, b]$, existe una sucesión de elementos en $M^2[a, b]$ que converge a X en $\mathbf{L}^2[a, b]$ c.s.

Proposición 2.33. *Suponga que $X \in M_{\text{loc}}^2[a, b]$. Entonces existe una sucesión $\{X^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M^2[a, b]$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt = 0 \text{ c.s.}$$

Antes de realizar la demostración a esta proposición, en el siguiente lema se define una sucesión de stopping times $\{\tau_n\}_n$, la cual se usará para construir la sucesión $\{X^n\}_n \subseteq M^2[a, b]$. Para ello, recuerde que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$ es continua a derecha (ver definición en la observación 1.7), ya que el movimiento browniano se asume como un proceso estándar (ver definición 1.8).

Lema 2.34. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\tau_n : \Omega \rightarrow [a, b]$ por*

$$\tau_n(\omega) = \sup \left\{ t \in [a, b] : \int_a^t X_s^2(\omega) ds \leq n \right\} = \sup A_{n, \omega}.$$

Entonces τ_n es un stopping time y la sucesión $\{\tau_n\}_n$ es creciente y converge a $t = b$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración. Observe que $A_{n, \omega} \neq \emptyset$ porque $\int_a^a X_s^2(\omega) ds = 0 \leq n$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Además, $A_{n, \omega}$ está acotado superiormente por $t = b$, por lo tanto, $\sup A_{n, \omega}$ existe. Así mismo, note que

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf \left\{ t \in [a, b] : \int_a^t X_s^2(\omega) ds > n \right\}, & A_{n, \omega}^c \neq \emptyset, \\ b, & A_{n, \omega}^c = \emptyset. \end{cases}$$

Por otro lado, si $A_{n, \omega}^c \neq \emptyset$, entonces

$$\tau_n = \inf \left\{ t \in [a, b] : \int_a^t X_s^2 ds \in (n, \infty) \right\}.$$

Dado que la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$ es continua a derecha y el intervalo $(-\infty, n]$ es un conjunto cerrado, por la proposición 1.20, se concluye que τ_n es un stopping time.

Más aún, la sucesión $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y converge a $t = b$, cuando $n \rightarrow \infty$ c.s. En efecto, como $X \in M_{loc}^2[a, b]$, entonces $\int_a^b X_s^2 ds < \infty$ c.s. Así, existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$, con $P[\Omega_0] = 1$, tal que para todo $\omega \in \Omega_0$, se cumple que $\int_a^b X_s^2(\omega) ds < \infty$. Luego, $\int_a^b X_s^2(\omega) ds \leq n_\omega$, para algún número natural n_ω . Para n lo suficientemente grande, se puede suponer que $n_\omega \leq n$, lo cual implica que $\int_a^t X_s^2(\omega) ds \leq n$. Por ende, $\tau_n(\omega) = b$, $n \rightarrow \infty$. Suponga ahora que $m \leq n$, y considere $t \in A_{n,\omega}^c$. Entonces $\int_a^t X_s^2 ds > n \geq m$. Esto muestra que $A_{n,\omega}^c \subseteq A_{m,\omega}^c$, y por lo tanto, $\tau_m = \inf A_{m,\omega}^c \leq \inf A_{n,\omega}^c = \tau_n$. $\square$

Demostración. (De la proposición 2.33). Considere la sucesión de stopping times $\{\tau_n\}_n$ definida en el lema 2.34. Defina el proceso $\{X_t^n\}_{t \in [a,b]}$ por $X_t^n = X_t \mathbf{1}_{\{t < \tau_n\}}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $X \in M_{loc}^2[a, b]$ y τ_n es un stopping time, por la observación 2.5, se sigue que $\{X_t \mathbf{1}_{\{t < \tau_n\}}\}_t \in M_{loc}^2[a, b]$. Específicamente,

$$\begin{aligned} X_t^n(\omega) &= \begin{cases} X_t(\omega), & t < \sup \left\{ t \in [a, b] : \int_a^t X_s^2(\omega) ds \leq n \right\}, \\ 0, & t \geq \sup \left\{ t \in [a, b] : \int_a^t X_s^2(\omega) ds \leq n \right\}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} X_t(\omega), & \int_a^t X_s^2(\omega) ds \leq n, \\ 0, & \int_a^t X_s^2(\omega) ds > n. \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada $\omega \in \Omega$ fijo, se satisface que $\mathbf{1}_{\{t < \tau_n\}}(\omega) = \mathbf{1}_{[a, \tau_n(\omega))}(t)$. Así,

$$\begin{aligned} \int_a^b X_t^2(\omega) \mathbf{1}_{\{t < \tau_n\}}(\omega) dt &= \int_a^b X_t^2(\omega) \mathbf{1}_{[a, \tau_n(\omega))}(t) dt \\ &= \int_a^{\tau_n(\omega)} X_t^2(\omega) dt \\ &\leq n, \end{aligned}$$

puesto que $\tau_n(\omega)$ es el mayor valor de los $t \in [a, b]$, que hace que $\int_a^t X_s^2(\omega) ds \leq n$. Esto implica que

$$E \left[\int_a^b X_t^2 \mathbf{1}_{\{t < \tau_n\}} dt \right] \leq E[n] = n.$$

Por tanto, $\{X_t^n\}_{t \in [a,b]} \subseteq M^2[a, b]$. Como $X \in M_{loc}^2[a, b]$, entonces $\int_a^b X_s^2 ds < \infty$ c.s. Luego, existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$, con $P[\Omega_0] = 1$, tal que para todo $\omega \in \Omega_0$, $\int_a^b X_s^2(\omega) ds \leq n_\omega$, para algún número natural n_ω . Esto implica que para $n \gg 1$, $\int_a^t X_s^2(\omega) ds \leq \int_a^b X_s^2(\omega) ds \leq n$. Así, para todo $n > n_\omega$, $X_t^n(\omega) = X_t(\omega)$, con $t \in [a, b]$.

En consecuencia, para cada $t \in [a, b]$ y $\omega \in \Omega_0$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (X_t^n(\omega) - X_t(\omega))^2 dt = 0.$$

Puesto que $X^n, X \in M_{\text{loc}}^2[a, b]$ y M_{loc}^2 es un espacio vectorial, se sigue que $X^n - X \in M_{\text{loc}}^2[a, b]$. De este modo, existe $\Omega_1 \subseteq \Omega$, con $P[\Omega_1] = 1$, tal que para $\omega \in \Omega_1$,

$$\int_a^b (X_t^n(\omega) - X_t(\omega))^2 dt < \infty.$$

Considere $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$. Entonces las funciones $t \rightarrow X_t^2(\omega)$ y $t \rightarrow (X_t^n(\omega) - X_t(\omega))^2$ están en $\mathbf{L}^1[a, b]$. Además,

$$(X_t^n(\omega) - X_t(\omega))^2 \leq (|X_t^n(\omega)| + |X_t(\omega)|)^2 \leq 4X_t^2(\omega) \in \mathbf{L}^1[a, b].$$

Luego, por el teorema de la convergencia dominada se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} (X_t^n - X_t)^2 dt = 0 \text{ c.s.}$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia directa de la proposición 2.33 y del hecho que la convergencia c.s. implica convergencia en probabilidad (ver diagrama A.4).

Corolario 2.35. *Suponga que $X \in M_{\text{loc}}^2[a, b]$. Entonces existe una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq M^2[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Suponga que $X \in M_{\text{loc}}^2[a, b]$. En la demostración de la proposición 2.33 se encuentra una sucesión $\{X^n\}_n \subseteq M^2[a, b]$ que converge a X en $\mathbf{L}^2[a, b]$ c.s. Una idea natural para definir $\int_a^b X_t dB_t$, sería tener en cuenta los procesos X_t^n , ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, la integral $I(X_t^n)$ está bien definida. Se puede entonces pensar en tomar

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b X_t^n dB_t. \quad (2.4.1)$$

De todos modos, esto da lugar a varias preguntas: ¿Existe el límite? En caso de existir, ¿En qué sentido se debe entender la convergencia? (¿c.s.? ¿En $\mathbf{L}^2(\Omega)$? ¿En probabilidad?).

Antes de presentar la definición de la integral estocástica para procesos en $M_{\text{loc}}^2[a, b]$, se analizarán dichas preguntas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se sabe que la integral estocástica $I(X^n) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ es una v.a. (ver definición 2.13). Observe que si $\{I(X^n)\}_n$ fuera una sucesión de Cauchy en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, entonces, al ser este espacio completo, se tendría que $I(X^n)$ converge a una v.a. en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, con lo cual el límite en (2.4.1), se tomaría en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, como se demuestra en la siguiente observación.

Observación 2.36. Suponga que $X \in M_{loc}^2[a, b]$. Entonces por la proposición 2.33, existe una sucesión $\{X^n\}_n$ que converge a X en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ c.s. Recuerde que $X_t^n = X_t \mathbf{1}_{\{t < \tau_n\}}$, donde τ_n es el stopping time definido en el lema 2.34. Considere $m, n \in \mathbb{N}$, con $n \geq m$. Por la isometría de Itô 2.19, se sigue que

$$\begin{aligned} \|I(X^n) - I(X^m)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= E \left[(I(X^n) - I(X^m))^2 \right] \\ &= E \left[\left(\int_a^b X_s (\mathbf{1}_{\{s < \tau_n\}} - \mathbf{1}_{\{s < \tau_m\}}) dB_s \right)^2 \right] \\ &= E \left[\int_a^b X_s^2 (\mathbf{1}_{\{s < \tau_n\}} - \mathbf{1}_{\{s < \tau_m\}})^2 ds \right] \\ &= \int_{\Omega} \int_a^b X_s^2(\omega) (\mathbf{1}_{\{s < \tau_n\}} - \mathbf{1}_{\{s < \tau_m\}})^2(\omega) ds dP. \end{aligned}$$

De acuerdo con el lema 2.34, la sucesión $\{\tau_n\}_n$ es creciente. Así, para $n \geq m$ y $\omega \in \Omega$, se tiene que $(\mathbf{1}_{\{s < \tau_n\}} - \mathbf{1}_{\{s < \tau_m\}})(\omega) = \mathbf{1}_{[\tau_m(\omega), \tau_n(\omega))}(s)$. Esto implica que

$$\begin{aligned} \|I(X^n) - I(X^m)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \int_a^b X_s^2(\omega) \mathbf{1}_{[\tau_m(\omega), \tau_n(\omega))}(s) ds dP \\ &= \int_{\Omega} \int_{\tau_m(\omega)}^{\tau_n(\omega)} X_s^2 ds dP \\ &= E \left[\int_{\tau_n}^{\tau_m} X_s^2 ds \right]. \end{aligned}$$

Si $\{I(X^n)\}_n$ es de Cauchy, se cumpliría que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} E \left[\int_{\tau_n}^{\tau_m} X_s^2 ds \right] = 0.$$

Si bien,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_{\tau_n}^{\tau_m} X_s^2 ds = 0,$$

puesto que $\tau_n \rightarrow b$, cuando $n \rightarrow \infty$ (ver lema 2.34). No necesariamente se puede garantizar que

$$E \left[\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_{\tau_n}^{\tau_m} X_s^2 ds \right] = \lim_{n, m \rightarrow \infty} E \left[\int_{\tau_n}^{\tau_m} X_s^2 ds \right]. \quad (2.4.2)$$

En efecto, si se aplicara el teorema de la convergencia dominada, una condición suficiente para el intercambio de límites en (2.4.2), es que la v.a.

$$\omega \rightarrow \int_{\tau_n(\omega)}^{\tau_m(\omega)} X_s^2(\omega) ds,$$

esté dominada por un función en $\mathbf{L}^1(\Omega)$. Sin embargo, note que

$$\int_{\tau_n(\omega)}^{\tau_m(\omega)} X_s^2(\omega) ds \leq \int_a^b X_s^2(\omega) ds,$$

donde la v.a. $\omega \rightarrow \int_a^b X_s^2(\omega)ds$ no necesariamente es integrable, al ser X un proceso en $M_{loc}^2[a, b]$. Esto permite concluir que el límite en (2.4.1) no converge en $L^2(\Omega)$.

Construcción de la integral estocástica para procesos en $M_{loc}^2[a, b]$.

En esta parte de la sección, se dará sentido a la integral $\int_a^b X_t dB_t$ para procesos en $M_{loc}^2[a, b]$. La sucesión $\{X^n\}_n \subseteq M^2[a, b]$ dada por $X_t^n = X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}}$, es la definida en la demostración de la proposición 2.33 y la sucesión de stopping times $\{\tau_n\}_n$, es la construida en el lema 2.34.

Dado que $\tau_n \geq \tau_m$ para $n \geq m$, si $\omega \in \tau_m^{-1}(\{b\})$, entonces $b = \tau_m(\omega) \leq \tau_n(\omega)$. Pero, $\max_\omega \tau_n(\omega) = b$, así, $\tau_n(\omega) = b$. Por tanto, $\tau_m^{-1}(\{b\}) \subseteq \tau_n^{-1}(\{b\})$. Esto implica que, para todo $s \in [a, b]$, $X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_m\}} = X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}}$ en $\tau_m^{-1}(\{b\}) \in \mathcal{F}$. En consecuencia, por la proposición 2.23, para cada $t \in [a, b]$, se tiene que

$$I_{X^n}(t) = \int_a^t X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} dB_s = \int_a^t X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_m\}} dB_s = I_{X^m}(t) \text{ en } \tau_m^{-1}(\{b\}) \text{ c.s.}$$

Por otro lado, dado que $X \in M_{loc}^2[a, b]$, existe $\Omega_0 \subseteq \Omega$ con $P[\Omega_0] = 1$, tal que para $\omega \in \Omega_0$, $\int_a^b X_s^2(\omega)ds < \infty$. Así, $\int_a^t X_s^2(\omega)ds \leq n$, para algún $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in [a, b]$. Se deduce que $\tau_n(\omega) = b$. Esto muestra que $\Omega_0 \subseteq \bigcup_n \tau_n^{-1}(\{b\})$. Por otro lado, note que $\bigcup_n \tau_n^{-1}(\{b\}) \subseteq \Omega_0$.

Con lo anterior se ha demostrado:

- si $m \leq n$, entonces $I_{X^n}(t) = I_{X^m}(t)$ en $\tau_m^{-1}(\{b\})$ c.s. Por tanto, existe $\Omega_1 \subseteq \Omega$, con $P[\Omega_1] = 1$, de manera que si $\omega \in \Omega_1$, entonces $I_{X^n}(t)(\omega) = I_{X^{n+1}}(t)(\omega) = \dots$ en $\tau_m^{-1}(\{b\})$.
- $\Omega_0 = \bigcup_n \tau_n^{-1}(\{b\})$, donde $\Omega_0 \subseteq \Omega$ es tal que $P[\Omega_0] = 1$.

Por lo tanto, para todo $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $\omega \in \tau_n^{-1}(\{b\})$. En consecuencia, por el primer ítem, $I_{X^n}(t)(\omega) = I_{X^{n+1}}(t)(\omega) = \dots$. Esto muestra que la sucesión $\{I_{X^n}(t)(\omega)\}_n$ es eventualmente constante y por tanto converge, a dicho límite se le denotará con $I_X(t)(\omega) = \int_a^t X_s(\omega)dB_s(\omega)$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.37. Suponga que $X \in M_{loc}^2[a, b]$. La integral estocástica de X es definida por

$$\int_a^t X_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^t X_s \mathbb{1}_{\{s < \tau_n\}} dB_s \text{ c.s.,}$$

donde $\{X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}}\}_t$ es el proceso en $M^2[a, b]$ que converge a X en $\mathbf{L}^2[a, b]$ c.s., definido en la demostración de la proposición 2.33.

La siguiente observación muestra que la definición 2.37 generaliza la integral estocástica para procesos $X \in M^2[a, b]$. Es decir, la integral descrita en dicha definición coincide con la expuesta en la definición 2.13.

Observación 2.38. Considere $X \in M^2[a, b]$. Entonces $X \in M_{loc}^2[a, b]$. Por lo tanto, la sucesión $\{X^n\}_n$ definida por $X_t^n = X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}}$, converge a X en $\mathbf{L}^2[a, b]$ c.s. Más aún, $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$. En efecto,

$$\begin{aligned} E \left[\int_a^b (X_t - X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}})^2 dt \right] &= E \left[\int_a^b X_t^2 (1 - \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}})^2 dt \right] \\ &= E \left[\int_{\tau_n}^b X_t^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Denote con $Y^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a la v.a. $\omega \rightarrow \int_{\tau_n(\omega)}^b X_t^2(\omega) dt$. Entonces dado que $\tau_n \rightarrow b$, se tiene que $Y^n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$|Y^n| \leq \int_{\tau_n}^b X_t^2 dt \leq \int_a^b X_t^2 dt,$$

donde

$$E \left[\int_a^b X_t^2 dt \right] < \infty.$$

Por el teorema de la convergencia dominada, se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_{\tau_n}^b X_t^2 dt \right] = E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau_n}^b X_t^2 dt \right] = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b (X_t - X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}})^2 dt \right] = 0.$$

Esto muestra que $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, b]$ y, así, $X^n \rightarrow X$ en $M^2[a, t]$, para cualquier $a \leq t \leq b$. Dado que $X^n, X \in M^2[a, b]$, por el corolario 2.18, se tiene que

$$\int_a^t X_s^n dB_s \rightarrow \int_a^t X_s dB_s \text{ en } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Así, existe una subsucesión $\{X^{n_k}\}_k$ de $\{X^n\}_n$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^t X_s^{n_k} dB_s = \int_a^t X_s dB_s \text{ c.s.} \quad (2.4.3)$$

Pero, según la definición 2.37, la integral estocástica para procesos en $M_{loc}^2[a, b]$ está dada por

$$\int_a^t X_s dB_s = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^t X_s^{n_k} dB_s. \quad (2.4.4)$$

De (2.4.3) y (2.4.4), se tiene que la integral estocástica dada en las definiciones 2.13 y 2.37 coinciden para procesos en $M^2[a, b]$.

La siguiente proposición establece que si $X \in M_{loc}^2[a, b]$ y $\{X^n\}_n$ es una sucesión de procesos en $M_{loc}^2[a, b]$ tal que $\int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$, entonces $I(X^n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} I(X)$. En particular, en el corolario 2.35 se muestra que

$$\int_a^b (X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}} - X_t)^2 dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

La proposición 2.39 implica que

$$\int_a^b X_t \mathbb{1}_{\{t < \tau_n\}} dB_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_a^b X_t dB_t.$$

Proposición 2.39. Sean $X_n, X \in M_{loc}^2[a, b]$, $n \geq 1$. Suponga que

$$\int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

Entonces

$$\int_a^b X_t^n dB_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_a^b X_t dB_t.$$

Para la demostración de dicha proposición se hará uso del lema 2.40. El lector interesado puede consultar su demostración en (Baldi, 2017) pp. 201-202.

Lema 2.40. Si $X \in M_{loc}^2[a, b]$, entonces para todo $\zeta > 0$ y $\rho > 0$, se tiene que

$$P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \left| \int_a^b X_t(\omega) dB_t(\omega) \right| > \zeta \right\} \right] \leq \frac{\rho}{\zeta^2} + P \left[\left\{ \omega \in \Omega : \int_a^b X_t^2(\omega) > \rho \right\} \right].$$

Demostración. (De la proposición 2.39). Considere $\zeta > 0$ y $\rho > 0$. Entonces por el lema 2.40, se sigue que

$$\begin{aligned} P \left[\left| \int_a^b X_t^n dB_t - \int_a^b X_t dB_t \right| > \zeta \right] &= P \left[\left| \int_a^b (X_t^n - X_t) dB_t \right| > \zeta \right] \\ &\leq P \left[\left| \int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \right| > \rho \right] + \frac{\rho}{\zeta^2}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\rho/\zeta^2 < \varepsilon$. Como

$$\int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se satisface

$$P \left[\left| \int_a^b (X_t^n - X_t)^2 dt \right| > \rho \right] < \varepsilon - \frac{\rho}{\zeta^2}.$$

Así,

$$P \left[\left| \int_a^b X_t^n dB_t - \int_a^b X_t dB_t \right| > \zeta \right] < \varepsilon - \frac{\rho}{\zeta^2} + \frac{\rho}{\zeta^2} = \varepsilon.$$

siempre que $n \geq N$. Se concluye que

$$\int_a^b X_t^n dB_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_a^b X_t dB_t.$$

□

Suponga que $X = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}, \{X_t\}_{t \in [a, b]}, P)$ es un proceso continuo. De acuerdo con la observación 2.5, se tiene que $X \in M_{loc}^2[a, b]$. La siguiente proposición 2.41 establece que la integral estocástica de X , se puede calcular como límites de sumas de Riemann-Stieltjes donde el proceso X es evaluado en el extremo izquierdo de la partición. La demostración puede ser consultada en (Ribet, 2006), p. 68.

Proposición 2.41. *Si X es un proceso continuo y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$, entonces*

$$\int_a^b X_t dB_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \text{ en probabilidad,}$$

donde $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales estocásticas

Las soluciones a un problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

en general describen la evolución de un sistema a lo largo del tiempo. Para el análisis de estas ecuaciones, se asume que todos los parámetros son conocidos y no dependen de factores aleatorios. Sin embargo, según se afirma en (Oksendal, 2013), si en un modelo se incluye cierta aleatoriedad en algunos de los coeficientes de la ecuación diferencial, a menudo se obtiene un modelo matemático más realista de la situación. Es así, como perturbar la ecuación por un ruido aleatorio, comúnmente modelado por un proceso estocástico como el movimiento browniano, es crucial para analizar de manera más precisa la dinámica de fenómenos sujetos a incertidumbres o fluctuaciones.

El objetivo del capítulo es estudiar la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \quad (3.0.1)$$

donde $\mu \in M_{\text{loc}}^1[0, T]$, $\sigma \in M_{\text{loc}}^2[0, T]$ y $B = (\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}, \{B_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ es un movimiento browniano. Para esto, la teoría del cálculo estocástico discutida en el capítulo 2, y en particular, la fórmula de Itô presentada en el teorema 3.4, son herramientas fundamentales para analizar este tipo de ecuaciones.

Es importante notar que la diferencial estocástica (3.0.1) no tiene sentido por sí misma, dado que las trayectorias del movimiento browniano son no diferenciables c.s. Es así como

(3.0.1) no es más que un símbolo utilizado para representar la *fórmula integral*

$$X_t = X_0 + \int_0^T \mu(X_t, t)dt + \int_0^T \sigma(X_t, t)dB_t. \quad (3.0.2)$$

Este enfoque motiva el estudio de estos procesos X , los cuales se explican en detalle en la sección 3.1. Así mismo, se presenta la fórmula de Itô y se muestran algunos ejemplos que ilustran su aplicación en el cálculo estocástico. Por último, en la sección 3.2 se analizan soluciones de algunas EDE y se expone el teorema de existencia y unicidad para EDE's.

3.1. Procesos de Itô y Fórmula de Itô

Suponga que X es un proceso tal que para s, t con $0 \leq s < t \leq T$,

$$X_t - X_s = \int_s^t \mu(X_t, t)dt + \int_s^t \sigma(X_t, t)dB_t,$$

donde $\mu \in M_{\text{loc}}^1[0, T]$ y $\sigma \in M_{\text{loc}}^2[0, T]$. Entonces, se dice que X satisface la **diferencial estocástica**

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t. \quad (3.1.1)$$

Un proceso X que admite una diferencial estocástica es llamado un **proceso de Itô**. Con el objetivo de simplificar notación se suele escribir

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

para denotar el diferencial en (3.1.1).

Note que por lo explicado en la sección 2.4, la integral $\int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s$ está bien definida y la trayectoria $t \rightarrow \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s$ es continua c.s., para todo $t \in [0, T]$. Más aún, dado que μ pertenece a $\mathbf{L}^1[0, T]$ c.s., se sigue que la integral $\int_0^t \mu_s ds$ es una función continua de t . Esto muestra que X es un proceso continuo c.s.

Ejemplo 3.1. Considere $0 \leq s < t \leq T$ y $\Delta_n = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ una partición de $[s, t]$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_s^t B_u du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \text{ c.s.}, \\ \int_s^t u dB_u &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \text{ c.s.}, \end{aligned}$$

donde para el segundo límite se ha usado la proposición 2.30, teniendo en cuenta que la función $f(u) = u$ es continua y de variación acotada. Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_s^t B_u du + \int_s^t u dB_u &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [B_{t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) + t_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t_k B_{t_k} - t_{k-1} B_{t_{k-1}}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n B_{t_n} - t_0 B_{t_0}) \\ &= t B_t - s B_s \text{ c.s.} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t.$$

Esto muestra que el proceso $\{tB_t\}_t$ es un proceso de Itô. Es importante observar que, en este caso, el “diferencial” de $\{tB_t\}_t$ “coincide” con el diferencial que sugiere el cálculo usual de Leibniz. Sin embargo, esto no siempre se cumple. Por ejemplo, si se considera el proceso $X_t = B_t^2$, no puede ser que $dX_t = 2B_t dB_t$. Ya que esto sugeriría que para cualquier $t > 0$,

$$B_t^2 = \int_0^t 2B_t dB_t = I(2B).$$

No obstante, $E[B_t^2] = t$ y $E[I(2B)] = 0$, por la proposición 2.19. Sin embargo, el proceso $\{B_t^2\}_t$ es un proceso de Itô como se demostrará en el ejemplo 3.6.

Las proposiciones 3.2 y 3.3 establecen que si X y Y son procesos de Itô, entonces $X + Y$ y XY también son procesos de Itô, mostrando explícitamente su diferencial. En el caso de la suma, la demostración se sigue directamente de la definición. Por otro lado, la diferencial del producto es conocida como *la regla del producto del cálculo estocástico*, debido a su similitud con la estudiada en los cursos de cálculo; el lector interesado puede consultar su demostración en (Baldi, 2017), pp. 218-219.

Proposición 3.2. *Si X y Y son procesos con diferenciales estocásticas*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, \quad dY_t = \nu_t dt + \rho_t dB_t,$$

entonces

$$d(X_t + Y_t) = (\mu_t + \nu_t)dt + (\sigma_t + \rho_t)dB_t.$$

Proposición 3.3. Si X y Y son procesos con diferenciales estocásticas

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t, \quad dY_t = \nu_t dt + \rho_t dB_t,$$

entonces

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \rho_t dt.$$

Es decir, para cualesquier $0 \leq s < t \leq T$ se satisface que

$$X_t Y_t - X_s Y_s = \int_s^t (X_u \mu_u + Y_u \nu_u + \sigma_u \rho_u) du + \int_s^t (X_u \sigma_u + Y_u \rho_u) dB_u.$$

Observe que en la proposición 3.3, si alguno de los procesos σ_t o ρ_t es cero, la diferencial $d(X_t Y_t)$ se reduce a la regla del producto del cálculo usual.

Se introduce a continuación una de las propiedades más importantes del cálculo estocástico, la cual es la *fórmula de Itô*. Antes de analizar dicho resultado para funciones aleatorias, suponga que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función con derivadas continuas. La regla de la cadena en el cálculo usual dice que

$$df(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dx + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt. \quad (3.1.2)$$

Sin embargo, cuando se está trabajando con procesos de Itô, $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, la regla de la cadena clásica para el diferencial $df(X_t, t)$ no siempre es válida. En efecto, considere el proceso $\{B_t\}_{t \in [0, T]}$ y la función $f(x, t) = x^2$. De satisfacerse la igualdad (3.1.2), se tendría que

$$df(B_t) = \frac{\partial f}{\partial x} dB_t.$$

Es decir, para cualquier $0 \leq a < b \leq T$,

$$B_b^2 - B_a^2 = 2 \int_a^b B_t dB_t.$$

No obstante, en el ejemplo 2.25, se prueba que

$$B_b^2 - B_a^2 - (b - a) = 2 \int_a^b B_t dB_t.$$

La fórmula de Itô es la **regla de la cadena para funciones aleatorias**, que es análoga a la regla de la cadena (3.1.2), pero incorpora un término adicional que tiene en cuenta la naturaleza aleatoria del proceso, específicamente del sumando $\sigma_t dB_t$ del diferencial presentado en (3.1.1).

Teorema 3.4. (Fórmula de Itô). Sea X un proceso con diferencial estocástica

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t,$$

y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en (x, t) , una vez continuamente diferenciable en t y dos veces en x . Entonces

$$\begin{aligned} df(X_t, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

Una forma de obtener la fórmula del teorema 3.4 es mediante derivación simbólica, utilizando la expansión de Taylor de primer orden para dt y de segundo orden para dX_t , y empleando la siguiente tabla.

$\times$	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Cuadro 3.1: Tabla de Multiplicación de Itô

De este modo,

$$\begin{aligned} df(X_t, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)(dX_t)^2 \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt. \end{aligned}$$

Cabe aclarar que lo anterior no proporciona una prueba para la fórmula de Itô, su demostración a detalle se presenta a continuación.

Demostración. (Fórmula de Itô). La prueba se divide en tres partes.

Caso 1. Suponga que $f(t, x) = x^n$. Se debe de mostrar que

$$\begin{aligned} dX_t^n &= \left(nX_t^{n-1}\mu_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}\sigma_t^2 \right) dt + nX_t^{n-1}\sigma_t dB_t \\ &= nX_t^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}\sigma_t^2 dt. \end{aligned}$$

Si $n = 1$, entonces $nX_t^{n-1}dX_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}\sigma_t^2 dt = \mu_t dt + \sigma_t dB_t = dX_t^n$. Ahora bien, suponga que la igualdad anterior se satisface para algún $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo con la

proposición 3.3, se tiene que

$$\begin{aligned}
d(X_t^{n+1}) &= X_t^n dX_t + X_t d(X_t^n) + (nX_t^{n-1}\sigma_t)\sigma_t dt \\
&= X_t^n(\mu_t dt + \sigma_t dB_t) + X_t \left(nX_t^{n-1}\mu_t + \frac{1}{2}n(n-1)X_t^{n-2}\sigma_t^2 \right) dt + nX_t^n \sigma_t dB_t + nX_t^{n-1}\sigma_t^2 dt \\
&= (n+1)\mu_t X_t^n dt + \left(\frac{1}{2}n(n-1) + n \right) X_t^{n-1}\sigma_t^2 dt + (n+1)X_t^n \sigma_t dB_t \\
&= (n+1)\mu_t X_t^n dt + \frac{1}{2}n(n+1)X_t^{n-1}\sigma_t^2 dt + (n+1)X_t^n \sigma_t dB_t,
\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. Más aún, dado que la fórmula de Itô se satisface para cualquier potencia natural de la variable x , dicho resultado es válido si $f(x, t)$ es un polinomio $P(x)$, según la proposición 3.2.

Caso 2. Sea $f(x, t) = P(x)g(t)$, donde $P(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0$ es un polinomio y $g(t)$ es una función continuamente diferenciable. Entonces

$$\begin{aligned}
d(f(X_t, t)) &= d(P(X_t)g(t)) \\
&= \sum_{k=0}^n a_k d(X_t^k g(t)) \\
&= \sum_{k=0}^n a_k (X_t^k d(g(t)) + g(t) d(X_t^k)) \\
&= \sum_{k=0}^n a_k X_t^k g'(t) dt + \sum_{k=0}^n a_k g(t) d(X_t^k) \\
&= P(X_t)g'(t) dt + \sum_{k=1}^n a_k g(t) d(X_t^k) \\
&= P(X_t)g'(t) dt + \sum_{k=1}^n a_k k X_t^{k-1} g(t) dX_t + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n a_k k(k-1) X_t^{k-2} \sigma_t^2 g(t) dt \\
&= P(X_t)g'(t) dt + P'(X_t)g(t) dX_t + \frac{1}{2} P''(X_t)g(t) \sigma_t^2 dt.
\end{aligned}$$

En consecuencia, de acuerdo con la proposición 3.2, la fórmula de Itô se cumple si f es de la forma

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^k P_i(x)g_i(t), \quad (3.1.3)$$

donde P_i es un polinomio y g_i es una función continuamente diferenciable, para cada $i = 1, \dots, k$.

Caso 3. Suponga que f es continua en (x, t) , una vez continuamente diferenciable en la variable t y dos veces en x . De acuerdo con (Baldi, 2017), p. 220-221, existe una sucesión

$\{f_n\}_n$ de funciones de la forma (3.1.3) tal que

$$\begin{aligned} f_n(x, t) &\rightarrow f(x, t), \\ \frac{\partial f_n}{\partial x}(x, t) &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, t), \\ \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(x, t) &\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t), \\ \frac{\partial f_n}{\partial t}(x, t) &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t), \end{aligned}$$

donde cada una de las convergencias anteriores es uniforme en conjuntos compactos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Por el caso 2, para todos $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, se tiene que

$$\begin{aligned} &f_n(X_{t_2}, t_2) - f_n(X_{t_1}, t_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f_n}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t)\mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t)\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

Se debe de probar que

$$\begin{aligned} &f(X_{t_2}, t_2) - f(X_{t_1}, t_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\sigma_t dB_t. \end{aligned}$$

Para ello, note que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left| \frac{\partial f_n}{\partial t}(X_t, t) - \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) \right| &< \varepsilon, \\ \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left| \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \right| &< \varepsilon, \\ \sup_{t \in [t_1, t_2]} \left| \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(X_t, t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t) \right| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial f_n}{\partial t}(X_t, t) - \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) \right| dt &< \varepsilon(t_2 - t_1), \\ \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t)\mu_t - \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\mu_t \right| dt &< \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \mu_t dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right| dt &< \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t^2 dt. \end{aligned}$$

Por las desigualdades anteriores, dado que $\mu \in \mathbf{L}^1[0, T]$ y $\sigma \in \mathbf{L}^2[0, T]$ c.s., se deduce que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f_n}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t)\mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt \quad (3.1.4)$$

converge a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt,$$

cuando $n \rightarrow \infty$ c.s.

Por otro lado, observe que si $n \geq N$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \right)^2 \sigma_t^2 dt \leq \varepsilon^2 \int_{t_1}^{t_2} \sigma_t^2 dt.$$

Puesto que $\sigma \in \mathbf{L}^2[0, T]$ c.s., se sigue que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \right)^2 \sigma_t^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ c.s.}$$

Como la convergencia c.s. implica la convergencia en probabilidad (ver diagrama A.4), se sigue que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \right)^2 \sigma_t^2 dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0.$$

La proposición 2.39 implica que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_n}{\partial x}(X_t, t) \sigma_t dB_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \sigma_t^2 dB_t.$$

Por tanto, existe una subsucesión $\{n_k\}_k$ de $\{n\}_n$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f_{n_k}}{\partial x}(X_t, t) \sigma_t dB_t \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \sigma_t^2 dB_t, \quad (3.1.5)$$

cuando $k \rightarrow \infty$ c.s. (ver diagrama A.4).

Dado que $f_{n_k} \rightarrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces por lo mostrado en (3.1.4) y (3.1.5), se deduce que

$$\begin{aligned} & f(X_{t_2}, t_2) - f(X_{t_1}, t_1) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)\mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) \sigma_t dB_t, \end{aligned}$$

para todos $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, lo cual concluye la prueba. $\square$

En la observación 2.24 y la proposición 2.41 se estudiaron algunos criterios que pueden emplearse para calcular integrales estocásticas. Sin embargo, en general, estas herramientas no son de fácil aplicación, ya que no siempre se obtiene una forma explícita del resultado de la integral (ver los ejemplos 2.25 y 2.31). La fórmula de Itô proporciona una forma más accesible para calcular dichas integrales, como se ilustra en la observación 3.5 y en el ejemplo 3.6. Además, es fundamental para resolver ecuaciones diferenciales estocásticas, como se detallará en la sección 3.2.

Observación 3.5.

1. Suponga que $f = f(x)$ es una función con segunda derivada continua $f''(x)$. Según la fórmula de Itô,

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

Esto implica que para cualquier $0 \leq a < b \leq T$, con $T > 0$, se cumple que

$$\int_a^b f'(B_t)dB_t = f(B_b) - f(B_a) - \frac{1}{2} \int_a^b f''(B_t)dt. \quad (3.1.6)$$

2. Si $f = f(x, t)$ es una función continua tal que $\frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ son continuas, entonces la fórmula de Itô para $df(B_t, t)$ es

$$df(B_t, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t)dB_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(B_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t, t) \right) dt,$$

lo cual en forma integral se expresa como

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t)dB_t = f(B_b, b) - f(B_a, a) - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(B_t, t)dt - \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t, t)dt, \quad (3.1.7)$$

para todos $0 \leq a < b \leq T$. La igualdad en (3.1.7) es conocida como el **teorema fundamental del cálculo de Itô**.

3. Suponga que $f(x, t) = h(t)g(x)$, donde h es una función una vez continuamente diferenciable y g es una función dos veces continuamente diferenciable. Entonces

$$\int_a^b h(t)g'(B_t)dB_t = h(b)g(B_b) - h(a)g(B_a) - \int_a^b h'(t)g(B_t)dt - \frac{1}{2} \int_a^b h(t)g''(B_t)dt. \quad (3.1.8)$$

Esta expresión se denomina la **fórmula de integración estocástica por partes**.

Note que las igualdades en (3.1.6), (3.1.7) y (3.1.8), son útiles para calcular algunas integrales estocásticas.

Se muestran a continuación algunas aplicaciones de la fórmula de Itô en el cálculo estocástico.

Ejemplo 3.6.

1. Los siguientes son consecuencia del ítem 1 de la observación 3.5.

- Considere la función $f(x) = x^2$. Entonces $d(B_t^2) = 2B_tdB_t + dt$.

- Si $f(x) = e^x$, entonces $d(e^{B_t}) = e^{B_t}dB_t + \frac{1}{2}e^{B_t}dt$. Así, para cualquier $t > 0$,

$$\int_0^t e^{B_s} dB_s = e^{B_t} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds.$$

La integral $\int_0^t e^{B_s} dB_s$ se discute en el ejemplo 2.25 junto con algunas de sus propiedades. Además, observe que

$$E[e^{B_t}] = 1 + \frac{1}{2}E\left[\int_0^t e^{B_s} ds\right].$$

- Tomando $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$, se sigue que $dB_t^m = mB_t^{m-1}dB_t + \frac{1}{2}m(m-1)B_t^{m-2}dt$. Por tanto,

$$B_t^m = m \int_0^t B_s^{m-1} dB_s + \frac{m(m-1)}{2} \int_0^t B_s^{m-2} ds.$$

En particular, dado que $\{B_s^{m-1}\}_{s \in [0, t]} \in M^2[0, t]$, $m \geq 2$ (los argumentos para probar esto son análogos a los mostrados para el proceso $\{e^{B_s}\}_{s \in [0, t]}$ en el ejemplo 2.25), entonces $E\left[\int_0^t B_s^{m-1} dB_s\right] = 0$. Por ende,

$$E[B_t^m] = \frac{m(m-1)}{2} \int_0^t E[B_s^{m-2}] ds,$$

proporcionando una fórmula para calcular valores esperados de potencias del movimiento browniano. Por ejemplo, como $E[B_t^2] = t$, entonces $E[B_t^4] = 3t^2$ y $E[B_t^6] = 15t^3$.

- Suponga que se quiere calcular $\int_\varepsilon^t \ln(B_s^2) dB_s$, donde $\varepsilon > 0$. Una forma de hacer esto, de acuerdo con la observación 3.5, es buscar una función en la variable x dos veces continuamente diferenciable, tal que $f'(x) = \ln(x^2)$. Observe que la función $f(x) = x(\ln(x^2) - 2)$ satisface dicha condición. Entonces por la fórmula de Itô,

$$d(B_t(\ln(B_t^2) - 2)) = \ln(B_t^2)dB_t + \frac{1}{B_t}dt,$$

de lo cual

$$\int_\varepsilon^t \ln(B_s^2) dB_s = B_t(\ln(B_t^2) - 2) - B_\varepsilon(\ln(B_\varepsilon^2) - 2) - \int_\varepsilon^t \frac{1}{B_s} ds.$$

- Análogamente a los ítems anteriores se demuestra que

$$\begin{aligned}\int_0^t \sin(B_s) dB_s &= 1 - \cos(B_t) - \frac{1}{2} \int_0^t \cos(B_s) ds, \\ \int_0^t \cos(B_s) dB_s &= \sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds, \\ \int_0^t B_s e^{B_s} dB_s &= (B_t - 1)e^{B_t} + 1 - \frac{1}{2} \int_0^t (B_s + 1)e^{B_s} ds, \\ \int_0^t \frac{1}{1 + B_s^2} dB_s &= \arctan(B_t) + \int_0^t \frac{B_s}{(1 + B_s^2)^2} ds.\end{aligned}$$

2. Lo que se expone a continuación son resultados del punto 2 señalado en la observación 3.5.

- Considere la función $f(x, t) = (x + t)e^{-x - \frac{1}{2}t}$. Entonces

$$d((B_t + t)e^{-B_t - \frac{1}{2}t}) = e^{-B_t - \frac{1}{2}t}(-B_t + 1 - t)dB_t,$$

lo que implica que

$$(B_t + t)e^{-B_t - \frac{1}{2}t} = \int_0^t e^{-B_s - \frac{1}{2}s}(-B_s + 1 - s)dB_s.$$

- El proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, definido por $X_t = e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t)$, es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ a la que está adaptado el movimiento browniano. En efecto, si se considera la función $f(x, t) = e^{\frac{1}{2}t} \cos(x)$, entonces

$$\begin{aligned}d(e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t)) &= -e^{\frac{1}{2}t} \sin(B_t)dB_t + \left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t) - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t) \right) dt \\ &= -e^{\frac{1}{2}t} \sin(B_t)dB_t.\end{aligned}$$

Esto es, para cualquier $0 < t \leq T$, se tiene que

$$e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t) = 1 - \int_0^t e^{\frac{1}{2}s} \sin(B_s) dB_s.$$

Note que $\{e^{\frac{1}{2}s} \sin(B_s)\}_{s \in [0, T]} \in M_{loc}^2[0, T]$, ya que es continuo y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$ (repítase los argumentos expuestos en el ejemplo 2.25). Más aún,

$$\begin{aligned}\int_0^T E \left[\left(e^{\frac{1}{2}s} \sin(B_s) \right)^2 \right] ds &= \int_0^T E \left[e^s \frac{1 - \cos(2B_s)}{2} \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T e^s (1 - E[\cos(2B_s)]) ds,\end{aligned}$$

donde

$$E [\cos(2B_s)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} \cos(2x) e^{-\frac{x^2}{2s}} dx = e^{-2s}.$$

Así,

$$\int_0^T E \left[\left(e^{\frac{1}{2}s} \sin(B_s) \right)^2 \right] ds = \frac{1}{2} \int_0^T e^s (1 - e^{-2s}) ds < \infty,$$

puesto que la función $s \rightarrow e^s(1 - e^{-2s})$ es continua, y por tanto acotada en $[0, T]$. Esto muestra que $\{e^{\frac{1}{2}s} \sin(B_s)\}_{s \in [0, T]} \in M^2[0, T]$. En consecuencia, por el teorema 2.26 dicho proceso es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0, T]}$. Dado que el proceso constante $\{1\}_{s \in [0, T]}$ es una martingala, por la observación 1.23, se sigue que

$$\{e^{\frac{1}{2}s} \cos(B_s)\}_{s \in [0, T]} = \left\{ 1 - \int_0^t e^{\frac{1}{2}s} \sin(B_s) dB_s \right\}_{s \in [0, T]},$$

es una $\{\mathcal{F}_s\}_{s \in [0, T]}$ -martingala.

Análogamente, se demuestra que el proceso $\{e^{\frac{1}{2}t} \cos(B_t)\}_{t \in [0, T]}$ es una martingala respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$.

- Se puede probar que

$$\begin{aligned} \int_0^t s B_s dB_s &= \frac{t}{2} \left(B_t^2 - \frac{t}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_0^t B_s^2 ds, \\ \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \cos(B_s) dB_s &= e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t), \\ \int_0^t e^{\frac{s}{2}} \sin(B_s) dB_s &= 1 - e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t), \end{aligned}$$

3. Considere el proceso de Itô

$$X_t = \int_0^t Y_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t Y_s^2 ds,$$

donde $0 \leq t \leq 1$ y $Y \in M_{loc}^2[0, 1]$. Si $f(x, t) = e^x$, entonces, aplicando la fórmula de Itô, se tiene que

$$e^{X_t} = 1 + \int_0^t e^{X_s} Y_s dB_s.$$

Por tanto,

$$\exp \left(\int_0^t Y_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t Y_s^2 ds \right) = 1 + \int_0^t \exp \left(\int_0^s Y_u dB_u - \frac{1}{2} \int_0^s Y_u^2 du \right) Y_s dB_s.$$

3.2. Teorema de existencia y unicidad para EDE's

En esta sección, se presenta el teorema de existencia y unicidad para EDE's. Dicho resultado es fundamental en el cálculo estocástico, ya que establece condiciones bajo las cuales se puede garantizar la existencia y unicidad de una solución fuerte para una EDE dada. En este texto, se estudian únicamente este tipo de soluciones. No obstante, cuando no es posible encontrar soluciones fuertes para una EDE, se pueden buscar soluciones débiles, que son soluciones en distribución. El lector interesado en profundizar más en este tema puede consultar en (Klebaner, 2012), pp. 137-143.

Definición 3.7. *Un proceso continuo $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, se dice que es una solución fuerte de la EDE*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \quad t \in [0, T],$$

donde $\mu \in M_{loc}^1[0, T]$ y $\sigma \in M_{loc}^2[0, T]$, si

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB_s,$$

con probabilidad 1, para cada $t \in [0, T]$.

A continuación, se exponen algunos ejemplos que ilustran la definición 3.7.

Ejemplo 3.8.

- El proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ definido por $X_t = e^{B_t}$ es una solución fuerte de la EDE

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t,$$

lo cual se tiene por el ejemplo 3.6.

- El proceso $X_t = \frac{B_t}{1+t}$ es solución fuerte de la EDE

$$dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t.$$

Esto se sigue de la observación 3.5.

A continuación, se estudian algunas EDE's y se discuten sus métodos de solución. Para esto, se verá que la fórmula de Itô es clave. Además, se demostrará que, en ocasiones, las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias pueden proporcionar intuición y facilitar la visualización de las formas de las soluciones en el contexto estocástico.

Ejemplo 3.9.

1. Considere la EDE dada por

$$dS_t = \alpha S_t dt + \beta S_t dB_t, \quad (3.2.1)$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Si se divide la ecuación (3.2.1) por S_t , se obtiene que $\frac{dS_t}{S_t} = \alpha dt + \beta dB_t$ (cabe destacar que esta manipulación tiene como objetivo ofrecer una idea intuitiva o una posible forma de solucionar la ecuación). Por el término $\frac{dS_t}{S_t}$, se introduce la función $f(x, t) = \ln(x)$. De acuerdo con la fórmula de Itô, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\ln(S_t)) &= \left(\frac{1}{S_t} \alpha S_t - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} \beta^2 S_t^2 \right) dt + \frac{1}{S_t} \beta S_t dB_t \\ &= \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) dt + \beta dB_t. \end{aligned}$$

Así, para cualquier $t > 0$,

$$\begin{aligned} \ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) ds + \int_0^t \beta dB_s \\ &= \ln(S_0) + \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta B_t. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta B_t \right).$$

Al proceso $\{X_s\}_{s \in \mathbb{R}^+}$ es conocido como movimiento browniano geométrico y es utilizado para modelar los precios de acciones y bonos y para el valor de una cartera. En dicho contexto, las cantidades α y σ representan la tasa promedio de rentabilidad y la volatilidad, respectivamente (ver (Grigoriu, 2013), pp. 534-535). La figura 3.1 muestra una trayectoria del proceso (3.2.1) para $\alpha = 1$ y $\beta^2 = 1/2$.

2. Se procede a resolver la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dB_t, \quad (3.2.2)$$

con $\alpha, \beta > 0$. Antes de encontrar el proceso X_t que satisface dicha EDE, observe que en ecuaciones diferenciales ordinarias, la ecuación $dX_t = -\alpha X_t dt$ tiene como solución $X_t = e^{-\alpha t}$. Considere entonces la función $f(x, t) = e^{-\alpha t} x$. Así, por la fórmula de Itô,

$$d(e^{-\alpha t} X_t) = -\alpha e^{-\alpha t} X_t dt - \alpha e^{-\alpha t} X_t dt + \beta e^{-\alpha t} dB_t.$$

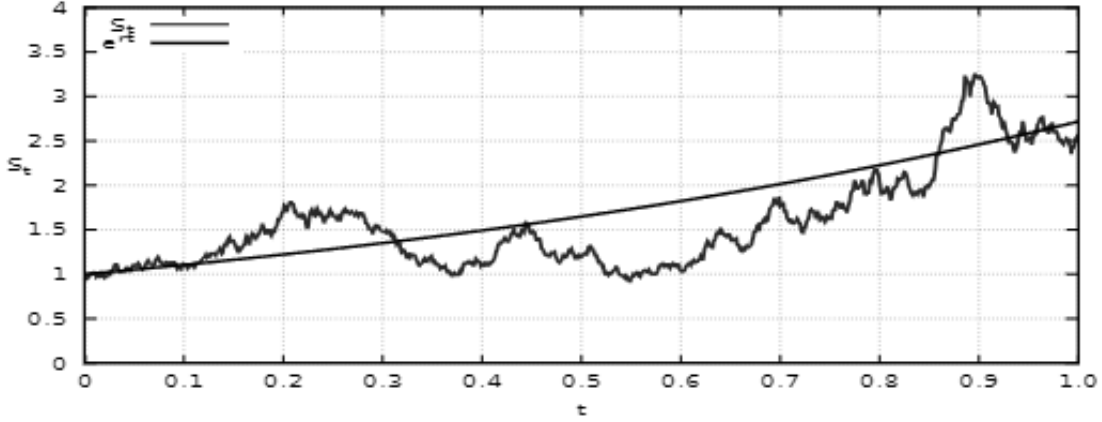


Figura 3.1: Trayectoria del movimiento browniano geométrico.

Esto es, para $t > 0$,

$$e^{-\alpha t} X_t = X_0 - 2\alpha \int_0^t e^{-\alpha s} X_s ds + \beta \int_0^t e^{-\alpha s} dB_s,$$

lo que no permite encontrar de manera explícita el proceso X , ya que hay dependencia de él en la integral $\int_0^s e^{-\alpha s} X_s ds$. No obstante, si se toma la función $f(x, t) = e^{\alpha t} x$, entonces

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} X_t) &= (\alpha e^{\alpha t} X_t - \alpha e^{\alpha t} X_t) dt + \beta e^{\alpha t} dB_t \\ &= \beta e^{\alpha t} dB_t. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s. \quad (3.2.3)$$

Con lo anterior, note que las ecuaciones diferenciales clásicas pueden dar una idea intuitiva de solución, que, en ocasiones, se busca que involucren una combinación entre una función conveniente determinista (como $e^{\alpha t}$) y el término x (o una función en la variable x). La figura 3.2 exhibe una trayectoria del proceso, para $\alpha = 10$ y $\beta = 0.2$.

Note que cuando $t \rightarrow \infty$, la condición inicial X_0 decae exponencialmente. Además, dado que la función $s \rightarrow e^{-\alpha(t-s)}$ es continua y de variación acotada, entonces por propiedades de la integral de Wiener, se sigue que $E \left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s \right] = 0$, con lo cual

$$E[X_t] = e^{-\alpha t} E[X_0].$$

Si X_0 es una v.a. $\mathcal{F}_0$ -medible, de acuerdo con la isometría de Itô, la proposición A.38 y el teorema 2.26, se deduce que

$$\text{Var}[X_t] = e^{-2\alpha t} \text{Var}[X_0] + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Así pues, cuando $t \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned} E[X_t] &\rightarrow 0, \\ \text{Var}[X_t] &\rightarrow \frac{\sigma^2}{2\alpha}. \end{aligned}$$

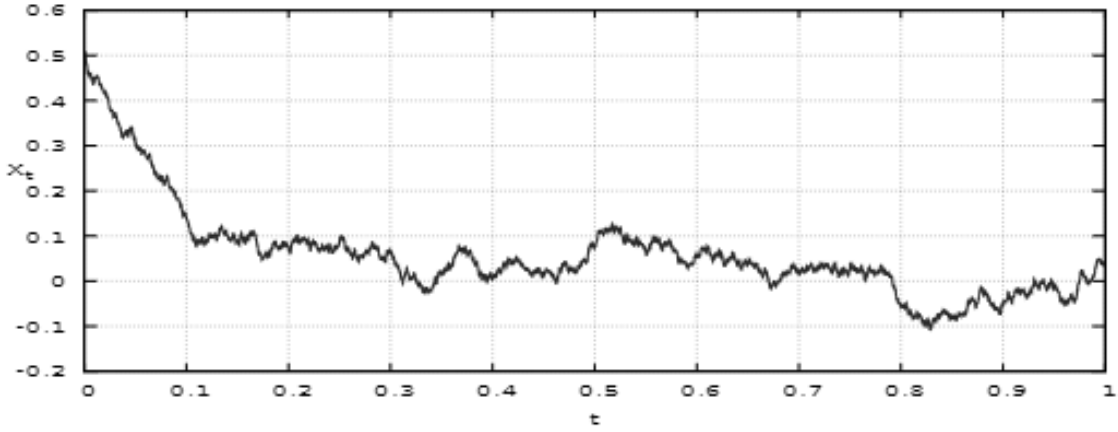


Figura 3.2: Trayectoria del proceso descrito por la ecuación de Ornstein-Uhlenbeck.

El modelo descrito en (3.2.2), en principio, fue utilizado por los físicos L. S. Ornstein y G. E. Uhlenbeck para estudiar la velocidad de una molécula individual de gas en 1931, aunque planteado de una forma un poco diferente ya que las EDE no habían surgido aún. En finanzas, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck se emplea a menudo para modelar tasas de interés, volatilidad y otras variables financieras que tienden a revertir a una media a largo plazo (Steele, 2001), pp. 138-140.

3. En este ejemplo, se expone un método de solución para algunas EDE y se ilustra su aplicación con un caso en particular. En el ítem 2 se encontró que la solución a la EDE (3.2.2) tiene una solución de la forma

$$X_t = a(t) \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right). \quad (3.2.4)$$

Aplicando la regla del producto 3.3, la diferencial del proceso anterior está dado por

$$\begin{aligned} dX_t &= a'(t) \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right) dt + a(t) d \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right) \\ &= a'(t) \left(X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right) dt + a(t) b(t) dB_t \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t) b(t) dB_t, \end{aligned}$$

donde $a(0) \neq 0$. Lo anterior, es útil para dar solución a EDE's lineales en dt y con coeficientes que dependen de t en dB_t . Para ilustrar esto, considere la ecuación

$$dX_t = tX_t dt + e^{\frac{t^2}{2}} dB_t, \quad X_0 = x_0. \quad (3.2.5)$$

Se busca como solución un proceso $\{X_t\}_t$ tal que satisfaga (3.2.4). Entonces se debe de satisfacer que

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = t, \quad a(t)b(t) = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Una solución de la primera ecuación diferencial es $a(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$. Así, se puede tomar $b(t) = 1$. En consecuencia, el proceso buscado es

$$\begin{aligned} X_t &= e^{\frac{t^2}{2}} \left(x_0 + \int_0^t dB_s \right) \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} (x_0 + B_t). \end{aligned}$$

Cabe destacar que dicho proceso también puede ser obtenido aplicando la fórmula de Itô a la función $f(x, t) = e^{\frac{t^2}{2}} x$. La figura 3.3 exhibe una trayectoria al proceso solución de la EDE (3.2.5).

Las imágenes de los ítems 1, 2 y 3 son tomadas de (Privault, 2021), pp. 17-18.

4. De manera análoga a lo realizado en el punto 3, una solución de la EDE

$$dX_t^T = \beta dB_t - \frac{X_t^T}{T-t} dt, \quad 0 \leq t < T, \quad (3.2.6)$$

con condición inicial $X_0^T = 0$ y $\beta > 0$, es

$$X_t^T = \beta \int_0^T \frac{T-t}{T-s} dB_s, \quad 0 \leq t < T.$$

A dicho proceso se le conoce un puente browniano, ver figura 3.4.

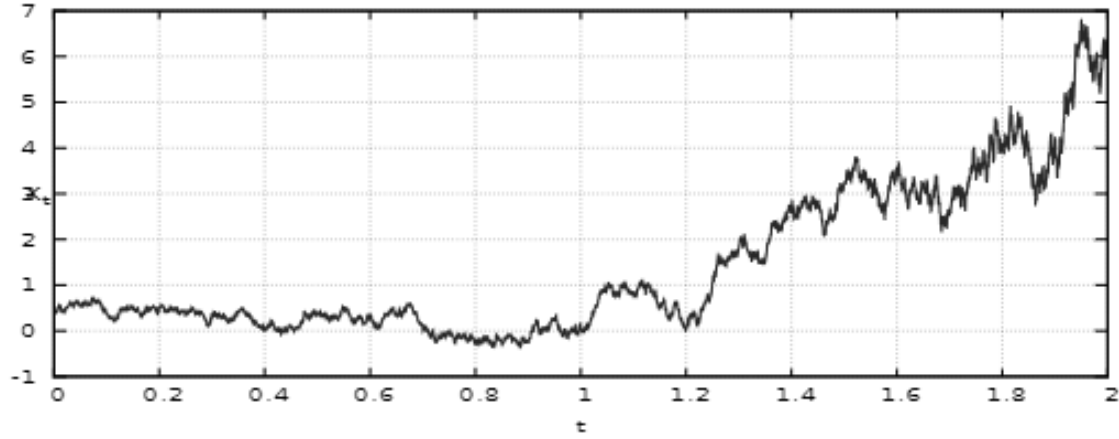


Figura 3.3: Trayectoria del proceso descrito por la EDE (3.2.5)

A continuación se muestran algunas de sus propiedades. Considere la función $f(s) = \beta(T-t)/(T-s)$, $s \in [0, t]$, $t \in (0, T)$. Entonces $f \in \mathbf{L}^2[0, t]$, puesto que

$$\int_0^t \beta^2 \left(\frac{T-t}{T-s} \right)^2 ds = \beta^2 \frac{t(T-t)}{T} < \infty.$$

Por tanto, por la proposición 2.29, se tiene que

$$\beta \int_0^t \frac{T-t}{T-s} dB_s \sim N \left(0, \beta^2 \frac{t(T-t)}{T} \right),$$

para todo $t \in [0, T]$. Más aún, gracias a la isometría de Itô,

$$\|X_t^T\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = E[(X_t^T)^2] = \beta^2 \int_0^t \left(\frac{T-t}{T-s} \right)^2 ds = \beta^2 \frac{t(T-t)}{T}.$$

Así,

$$\lim_{t \rightarrow T} \|X_t^T\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0.$$

5. La EDE $dX_t = X_t dB_t$ tiene como única solución el proceso $X_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$. Para demostrarlo, tome la función $f(x, t) = e^{x - \frac{1}{2}t}$. Entonces por la fórmula de Itô, el diferencial $d(e^{B_t - \frac{1}{2}t})$ está dado por

$$\begin{aligned} d(e^{B_t - \frac{1}{2}t}) &= \left(-\frac{1}{2}e^{B_t - \frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}e^{B_t - \frac{1}{2}t} \right) dt + e^{B_t - \frac{1}{2}t} dB_t \\ &= e^{B_t - \frac{1}{2}t} dB_t. \end{aligned}$$

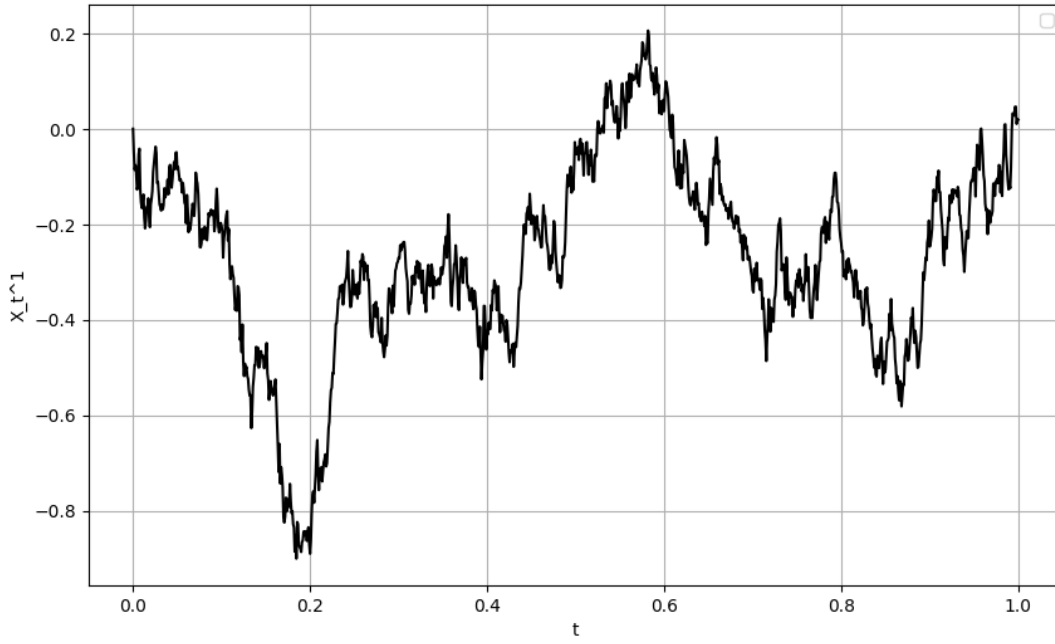


Figura 3.4: Trayectoria del puente browniano para $\beta = 1$, $T = 1$.

Así mismo, se prueba que $d(1/X_t) = (1/X_t)dt - (1/X_t)dB_t$. Suponga que $Y = \{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ es otro proceso que satisface dicha EDE con la condición inicial $X_0 = Y_0$. De acuerdo con la proposición 3.3,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{X_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{X_t}\right) + \frac{1}{X_t} d(Y_t) - \frac{1}{X_t} Y_t dt \\ &= Y_t \left(\frac{1}{X_t} dt - \frac{1}{X_t} dB_t\right) + \frac{1}{X_t} Y_t dB_t - \frac{1}{X_t} Y_t dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $t \in [0, T]$, con $T > 0$, se sigue que

$$\frac{Y_t}{X_t} = \frac{Y_0}{X_0}.$$

Así, $X_t = Y_t$ para cada $t \in [0, T]$.

6. Considere la EDE

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}} dt + 3X_t^{\frac{2}{3}} dB_t. \quad (3.2.7)$$

Tome $a > 0$ y $f_a(x) = (x - a)^3$. Entonces $f'_a(x) = 3(f_a(x))^{\frac{2}{3}}$ y $f''_a(x) = 6(f_a(x))^{\frac{1}{3}}$.

Utilizando la fórmula de Itô, se tiene que

$$\begin{aligned} d(f_a(B_t)) &= 3(f_a(B_t))^{\frac{2}{3}} dB_t + \frac{1}{2} 6(f_a(B_t))^{\frac{1}{3}} dt \\ &= 3(f_a(B_t))^{\frac{2}{3}} dB_t + 3(f_a(B_t))^{\frac{1}{3}} dt. \end{aligned}$$

Esto muestra que, para cada $a > 0$, $f_a(B_t)$ es solución de (3.2.7). Observe que una forma intuitiva de escoger la función f_a es mediante la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que las soluciones de $y' = 3y^{2/3}$ son de la forma $y = (x - a)^3$.

En el ejemplo 3.9 se resuelven algunas EDE clásicas. Sin embargo, al igual que en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, generalmente es difícil encontrar de manera explícita una solución fuerte para una EDE y, aún más, garantizar su unicidad. Por ejemplo, en el ítem 6 se muestra que una EDE puede tener infinitas soluciones. Por lo tanto, es necesario establecer condiciones bajo las cuales se pueda determinar la existencia y unicidad de soluciones. El siguiente teorema especifica estas condiciones. Para su demostración, consulte en (Steele, 2001), pp. 142-148.

Teorema 3.10. (*Teorema de existencia y unicidad para EDE's*). Suponga que los coeficientes de la EDE

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t, \text{ con } X_0 = x_0 \text{ y } 0 \leq t \leq T, \quad (3.2.8)$$

satisfacen la condición de Lipschitz en la variable espacial x , es decir, existe $K > 0$ tal que

$$|\mu(x, t) - \mu(y, t)|^2 + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)|^2 \leq K|x - y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (3.2.9)$$

y la condición de crecimiento

$$|\mu(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leq K(1 + |x|^2), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.2.10)$$

Entonces existe un proceso continuo y adaptado, $X = \{X_t\}_{t \in [0, T]}$, uniformemente acotado en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, esto es,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E[X_t^2] < \infty,$$

el cual es solución fuerte de (3.2.8). Además, si $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ es otro proceso que satisface dichas propiedades, entonces

$$P[\{\omega \in \Omega : X_t = Y_t \text{ para todo } t \in [0, T]\}] = 1.$$

Observación 3.11.

1. La hipótesis (3.2.9) asegura que la EDE (3.2.8) tiene a lo más una solución.

En el ítem 6 del ejemplo 3.9, se estudia la EDE

$$dX_t = 3X_t^{\frac{1}{3}} + 3X_t^{\frac{2}{3}} dB_t,$$

y se demuestra que dicha ecuación tiene infinitas soluciones. Esto se debe a que no satisface la condición de Lipschitz (3.2.9), ya que de ser cierto existiría $M > 0$, tal que

$$\begin{aligned} |3x^{\frac{1}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}| &\leq M|x - y|, \\ |3x^{\frac{2}{3}} - 3y^{\frac{2}{3}}| &\leq M|x - y|. \end{aligned}$$

En la primera desigualdad, tome $x = 1/n^3$ y $y = 0$, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces $3/n \leq M/n^3$, lo que implica que $n^2 \leq M/3$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $M > 0$ es una constante fija, esto es una contradicción. De la misma manera, se puede probar que la desigualdad $|3x^{\frac{1}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}| \leq M|x - y|$ no es válida.

Cabe destacar que la condición de Lipschitz se cumple en la ecuación $dX_t = X_t dB_t$ del ítem 5, donde ya se había probado la unicidad de la solución $X_t = e^{B_t - \frac{1}{2}t}$.

2. La condición (3.2.10) garantiza que la solución X_t no tiende a ∞ en tiempo finito. Por ejemplo, la ecuación diferencial $dX_t = X_t^2 dt + 0 dB_t$ con condición inicial $X_0 = 1$, para $0 \leq t \leq 1$, tiene como solución $X_t = (1-t)^{-1}$. Note que la función $\mu(x, t) = x^2$, no satisface la desigualdad (3.2.10). Además, X_t explota cuando $t \rightarrow 1$.

Se retoma a continuación el ejemplo 3.9, estudiando la unicidad de las soluciones presentadas en él.

Ejemplo 3.12. Las soluciones de las EDE's presentadas en los ítems 1, 2, 3 y 4 son únicas, de acuerdo con la observación 3.11. En caso de la EDE $dS_t = \alpha S_t dt + \beta S_t dB_t$, para $t \in [0, T]$, se tiene que

$$|\alpha x - \alpha y|^2 + |\beta x - \beta y|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)|x - y|^2,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Así, tome $K = (\alpha^2 + \beta^2)$ en (3.2.9).

Para la EDE $dX_t^T = \beta dB_t - X_t^T/(T-t)dt$, con $t \in [0, T)$, note que

$$\left| \frac{x}{T-t} - \frac{y}{T-t} \right|^2 - |\beta - \beta|^2 = \frac{1}{(T-t)^2} |x - y|^2 \leq |x - y|^2.$$

Análogamente, para las ecuaciones $dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dB_t$ y $dX_t = tX_t dt + e^{\frac{t^2}{2}} dB_t$, con $t \in [0, T]$, considere K como α^2 y T^2 , respectivamente.

Apéndice A

Elementos básicos de probabilidad

En este capítulo se presentan definiciones y resultados básicos de probabilidad, que son fundamentales para el desarrollo del trabajo. En la sección A.1, se introducen los conceptos de espacios de probabilidad y variables aleatorias (v.a.). Así mismo, se definen la ley y distribución de una v.a. y se presentan algunas de sus propiedades. Se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre la ley y la distribución de una v.a. En la sección A.2, se exponen diferentes tipos de convergencia como en medida, casi seguramente, en probabilidad, entre otras; y sus propiedades. En la sección A.3, se estudian los conceptos de independencia de eventos, σ -álgebras y v.a. Por último, en la sección A.4, se explica la esperanza condicional de una v.a. X definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dada una sub- σ -álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, mediante ejemplos y propiedades. Se verá que esta es una función $\mathcal{G}$ -medible, y que la información suministrada por esta nueva v.a. puede ser interpretada como el mejor valor de X dado que ocurrió $\mathcal{G}$.

A.1. Espacios de probabilidad y variables aleatorias

La forma de modelar un experimento aleatorio, es decir, un experimento cuyo resultado no se puede conocer con certeza, es a través de espacios de probabilidad.

Definición A.1. *Un espacio de probabilidad es una tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω es un conjunto, $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ es una σ -álgebra en Ω , y P es una función definida en $\mathcal{F}$ tal que*

$$(i) \ P(\emptyset) = 0, \ P(\Omega) = 1,$$

$$(ii) \ P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n), \text{ siendo } \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ una sucesión de elementos de } \mathcal{F} \text{ tal que } A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ para } i, j \in \mathbb{N}, i < j.$$

En otras palabras, la tripla $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de medida finita, con $P(\Omega) = 1$. En lo que sigue, a Ω se le llama espacio muestral, a los elementos de $\mathcal{F}$ eventos y a la medida P una medida de probabilidad o probabilidad en $\mathcal{F}$.

Observación A.2. A lo largo del trabajo, se considera el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ -álgebra de Borel generada por los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ (ver capítulo 7 de (Bauer, 2011)).

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, es fundamental considerar funciones definidas en Ω que describan numéricamente el resultado de un experimento aleatorio. A dichas funciones se les llaman variables aleatorias (v.a.).

Definición A.3. Una variable aleatoria X es una función $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ medible, es decir, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y X es una v.a. definida en Ω . Se desea asociar al espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ una medida que dé cuenta de la probabilidad de que X tome valores en un boreliano A . Observe que la función P_X , definida en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ como

$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)),$$

es una medida de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, y se denota también por $P_X(A) = P(X \in A)$. A P_X se le conoce como la ley o distribución de X .

La figura A.1 da claridad sobre la construcción de la ley de una v.a. a partir de la medida de probabilidad P .

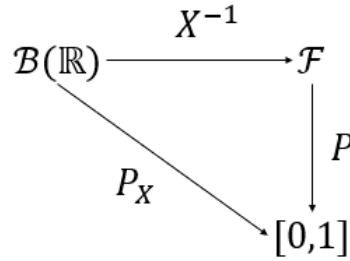


Figura A.1: Construcción ley de una v.a.

Ahora bien, para cada $a \in \mathbb{R}$, considere el intervalo $A = (-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Entonces se puede calcular $P_X(A)$ y definir la función F_X en $\mathbb{R}$ por

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

$$a \mapsto P[X \leq a] = P_X((-\infty, a]) = P[X \in (-\infty, a)].$$

A F_X se le denomina como la *función de distribución acumulada* de X .

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de la función de distribución acumulada.

Proposición A.4. *Suponga que X es una v.a. definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Entonces su función de distribución acumulada, F_X , satisface las siguientes propiedades:*

- I. F_X es creciente,
- II. F_X es continua por derecha,
- III. $\lim_{a \rightarrow -\infty} F_X(a) = 0$ y $\lim_{a \rightarrow +\infty} F_X(a) = 1$.

Demostración.

- I. Tome $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$. Entonces, $(-\infty, a] \subseteq (-\infty, b]$ y, por lo tanto, $F_X(a) = P_X((-\infty, a]) \leq P_X((-\infty, b]) = F_X(b)$.
- II. Considere $x \in \mathbb{R}$ y tome una sucesión $\{x_n\}_n$ tal que $x_n \downarrow x$. Es claro que para todo $n > m$, se cumple $(-\infty, x_n] \subseteq (-\infty, x_m]$, lo cual implica que $(-\infty, x_n] \downarrow \bigcap_n (-\infty, x_n]$, siendo $P_X((-\infty, x_n]) < \infty$ para cada n . Por el teorema de continuidad de medida, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_X((-\infty, x_n]) = P_X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x_n]\right) = P_X((-\infty, x]).$$

En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = F_X(x)$.

- III. Suponga que $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ son sucesiones tales que $x_n \uparrow \infty$ y $y_n \downarrow -\infty$. Entonces, $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$ y $(-\infty, y_n] \downarrow \emptyset$. Por el teorema de continuidad de medida, se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X((-\infty, x_n]) = P_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x_n]\right) = P_X(\mathbb{R}) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} F_X(y_n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} P_X((-\infty, y_n]) = P_X\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, y_n]\right) = P_X(\emptyset) = 0.$$

□

Con lo expuesto anteriormente, observe que F_X se ha construido a partir de la ley de la v.a. X (ver figura A.2). Note además que para todos $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, se satisface que

$$P_X((a, b]) = P_X((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) = P_X((-\infty, b]) - P_X((-\infty, a]) = F_X(b) - F_X(a). \quad (\text{A.1.1})$$

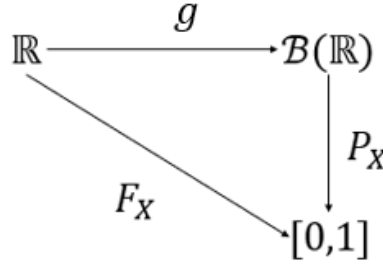


Figura A.2: Construcción función de distribución de una v.a., siendo g la función $a \rightarrow (-\infty, a]$.

El teorema A.5 establece que a toda función de distribución se le puede asociar una medida de probabilidad en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, para la cual en un intervalo de la forma $(a, b]$ la relación (A.1.1) es válida. En consecuencia, existe una correspondencia biunívoca entre la ley y la distribución de una v.a.

Teorema A.5. *Suponga que F es una función definida en $\mathbb{R}$, que satisface las condiciones I, II y III de la proposición A.4. Entonces existe una única medida de probabilidad μ_F en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que*

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a), \text{ para todo } (a, b] \in \mathcal{I},$$

siendo $\mathcal{I}$ la familia de intervalos en $\mathbb{R}$.

Demostración. Considere $C = \emptyset \cup \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ y defina en esta clase $\nu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$, $\nu_F(\emptyset) = 0$. Entonces, ν_F es una medida en C . Tome ahora $C' = C \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) : b \in \mathbb{R}\}$ y C'' como la clase de todas las uniones de elementos de C' de a pares disjuntos. Así, C'' es un álgebra que genera a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ y los elementos de C'' son uniones contables de elementos de C a pares disjuntos. Para todo $A \in C''$, se define $\mu_F(A)$ como la suma de las medidas $\nu_F(I_j)$, siendo $A = \cup_j I_j$ con $I_j \in C$ para todo j .

Debido a la construcción de μ_F , se sigue que μ_F coincide con ν_F en C y μ_F es una medida en C'' . Luego, por el teorema de extensión de Carathéodory, μ_F se puede extender a $\sigma(C'') = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Además, al ser F una función de distribución, μ_F es σ -finita y $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Por tanto, μ_F es una medida de probabilidad única en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Los detalles de la prueba se pueden encontrar en el capítulo 2 de (Roussas, 2014). $\square$

Se introducen los conceptos de esperanza y varianza de una v.a. X , que intuitivamente representan el valor medio de los valores tomados por X y una medida de la variabilidad de estos alrededor de la media.

Definición A.6. Sea X una v.a. definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si X es integrable, es decir, $\int_{\Omega} |X| dP < \infty$, la esperanza matemática, denotada por $E[X]$, está dada por

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP.$$

Así mismo, si X es cuadrado integrable, lo que equivale a decir que $E[X^2] < \infty$, se define la varianza de X como la cantidad

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

La siguiente proposición relaciona la esperanza de una v.a. en Ω , con la esperanza de una v.a. en $\mathbb{R}$.

Proposición A.7. Suponga que X es una v.a. definida en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable respecto a la ley de la v.a., P_X . Entonces se satisface que

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} g(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X.$$

Demostración. En primer lugar, suponga que $g = 1_A$, con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Así, $g(X) = 1_{X^{-1}(A)}$, puesto que para cada $\omega \in \Omega$,

$$(g \circ X)(\omega) = g(X(\omega)) = 1_A(X(\omega)) = 1_{X^{-1}(A)}(\omega).$$

Por tanto,

$$\int_{\Omega} g(X) dP = \int_{\Omega} 1_{X^{-1}(A)} dP = P(X^{-1}(A)) = P_X(A) = \int_{\mathbb{R}} 1_A dP_X.$$

Sea g una función simple no negativa, es decir, $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}$, con $\alpha_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $\{B_1, \dots, B_n\}$ una partición medible de $\mathbb{R}$. Entonces para todo $\omega \in \Omega$,

$$(g \circ X)(\omega) = g(X(\omega)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i}(X(\omega)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{X^{-1}(B_i)}(\omega).$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(X) dP &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{X^{-1}(B_i)} dP = \sum_{i=1}^n \alpha_i P(X^{-1}(B_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i P_X(B_i) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} dP_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X. \end{aligned}$$

Si g es una función medible no negativa, existe una sucesión $\{g_n\}_n$ de funciones simples tal que $g_n \uparrow g$. Se tiene entonces que para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n se puede expresar como $g_n = \sum_{i=1}^{r_n} \alpha_{n_i} \mathbb{1}_{A_{n_i}}$, donde $\alpha_{n_i} > 0$ para $i = 1, \dots, r_n$ y $\{A_{n_1}, \dots, A_{n_{r_n}}\}$ es una partición medible de $\mathbb{R}$. Note que $g_n(X) \uparrow g(X)$, debido a que para cada ω , $(g_n \circ X)(\omega) = g_n(X(\omega)) \uparrow g(X(\omega)) = (g \circ X)(\omega)$. Así,

$$\int_{\Omega} g(X) dP = \lim_n \int_{\Omega} g_n(X) dP = \lim_n \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dP_X = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X.$$

Por último, suponga que $g = g^+ - g^-$ es una función medible, lo cual implica que $g(X) = g^+(X) - g^-(X)$. Si $\int_{\Omega} g(X) dP$ existe, entonces

$$\int_{\Omega} g^+(X) dP < \infty \text{ o } \int_{\Omega} g^-(X) dP < \infty. \quad (\text{A.1.2})$$

Pero, por lo demostrado en el caso anterior, $\int_{\Omega} g^+(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g^+(x) dP_X$ y $\int_{\Omega} g^-(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g^-(x) dP_X$. Por tanto, por (A.1.2), se sigue que $\int_{\mathbb{R}} g^+(x) dP_X < \infty$ o $\int_{\mathbb{R}} g^-(x) dP_X < \infty$. Esto muestra que $\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X$ existe y

$$\int_{\Omega} g(X) dP = \int_{\Omega} g^+(X) dP - \int_{\Omega} g^-(X) dP = \int_{\mathbb{R}} g^+(x) dP_X - \int_{\mathbb{R}} g^-(x) dP_X = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X.$$

□

En la proposición A.7 se explica que si g es una función integrable respecto a la ley de la v.a. X , P_X , entonces la esperanza de la v.a. $g(X)$ coincide con la integral $\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X$. En general, si g es Riemann-Stieltjes integrable en todo compacto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ (ver definición en

la sección B.1 del apéndice B), entonces $\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X$ se puede calcular como una integral de Riemann-Stieltjes de g respecto a la función de distribución F_X , como se expone en la proposición A.8. La demostración de este resultado puede ser consultada en (Fristedt y Gray, 2013), p. 111.

Proposición A.8. *Suponga que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible y Riemann-Stieltjes integrable respecto a la función de distribución F_X de la v.a. X , en todo intervalo $[a, b]$ con $-\infty < a < b < \infty$. Entonces, si $\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X$ existe, se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dP_X = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_X.$$

Las v.a. se clasifican de acuerdo con su función de distribución. De manera más precisa, suponga que X es una v.a. definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea F_X su función de distribución. X es llamada una *v.a. discreta* si $X(\Omega)$ es un conjunto a lo más numerable de $\mathbb{R}$, lo que es equivalente a decir que F_X es una función escalonada. Por otro lado, X se llama *v.a. continua* si $X(\Omega)$ es un conjunto continuo de valores en $\mathbb{R}$, lo que implica que F_X es continua. En particular, si existe una función integrable no negativa f_X tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt,$$

entonces X es una *variable aleatoria absolutamente continua*. En dicho caso, f_X es conocida como la *función de densidad* de la v.a. X y F_X es una función absolutamente continua. (La definición y propiedades de las funciones absolutamente continuas pueden ser encontradas en el capítulo 1 de (Chung, 2001)).

En lo que sigue, se ilustran algunos ejemplos de variables aleatorias discretas y continuas.

Ejemplo A.9.

- *En un experimento, se desea determinar el número de veces que al lanzar una moneda resulta en cara de $N = 2$ intentos. Para esto, considere el espacio de probabilidad $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$, donde $\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}$ y P está definida por $P(\{CC\}) = P(\{CS\}) = P(\{SC\}) = P(\{SS\}) = 1/4$. Aquí, C y S denotan los posibles resultados “cara” y “sello” al realizar una repetición. Defina $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como el número de caras obtenidas al lanzar una moneda dos veces. Observe que X es una v.a. discreta y puede expresarse como*

$$X = 0 \cdot 1_{\{SS\}} + 1 \cdot 1_{\{CS, SC\}} + 2 \cdot 1_{\{CC\}}.$$

El tipo de v.a. que permiten describir experimentos como el descrito anteriormente se estudia mediante la distribución binomial, la cual, es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de aciertos en N ensayos Bernoulli. Se asume además, que el resultado en una repetición no afecta a lo ocurrido en otra. El lector interesado puede consultar más sobre esta distribución en (Wackerly, Mendenhall, y Scheaffer, 2014).

- Una distribución de gran importancia en el estudio del movimiento browniano y del cálculo estocástico es la distribución normal o Gaussiana. Esta fue introducida por el matemático francés Abraham de Moivre, como una aproximación a la distribución binomial cuando el número de ensayos N es suficientemente grande.

Se dice que una v.a. absolutamente continua X tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2 , y se denota por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Un caso especial de esta distribución se presenta cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, y se conoce como la distribución normal estándar.

En la figura A.3 se muestran algunas funciones de densidad de v.a. con distribución normal. Las curvas en azul y rojo representan las v.a $X \sim N(0, 1)$ y $Y \sim N(2, 1, 5)$, respectivamente.

En el ejemplo A.10 se muestra cómo calcular la esperanza de una v.a. discreta y de una v.a. absolutamente continua. En ambos casos, se asume que las v.a. están definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ejemplo A.10.

- Suponga que X es una v.a. discreta que toma valores en $\{a_j\}_{j \in J}$, donde J es un conjunto de índices discreto o numerable. Usando la proposición A.7 (tome g como la función identidad en $\mathbb{R}$), se tiene que

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dP_X = \int_{\cup_i \{a_i\}} x dP_X + \int_{\mathbb{R} \setminus \cup_i \{a_i\}} x dP_X \\ &= \sum_i \int_{\{a_i\}} x dP_X + \int_{\mathbb{R} \setminus \cup_i \{a_i\}} x dP_X \\ &= \sum_i a_i P_X(\{a_i\}) + \int_{\mathbb{R} \setminus \cup_i \{a_i\}} x dP_X \\ &= \sum_i a_i P(X = a_i). \end{aligned}$$

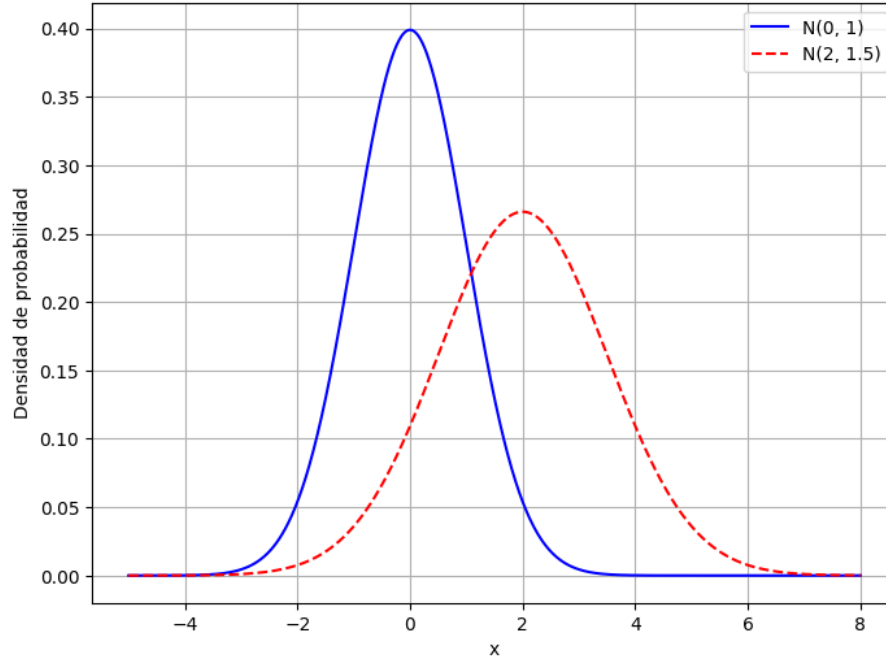


Figura A.3: Funciones de densidad de variables aleatorias con ley normal.

La última igualdad se debe a que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \cup_i \{a_i\}} x dP_X = 0,$$

puesto que $P_X(\mathbb{R} \setminus \cup_i \{a_i\}) = P(\emptyset) = 0$.

- Tome X una v.a. absolutamente continua y sea f_X su función de densidad. Usando las proposiciones A.7 y A.8, se sigue que

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} x dP_X = \int_{\mathbb{R}} x dF_X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx,$$

donde la última igualdad se debe a que F_X es diferenciable con derivada $F' = f$ c.s. (ver (Chung, 2001), p. 11). Para los detalles de esta parte de la prueba, consulte en (Roussas, 2014), pp. 385-386. El concepto de casi seguramente (c.s.) es explicado en la sección A.2.

Observe que las fórmulas dadas anteriormente para calcular la esperanza de una v.a. discreta o absolutamente continua, son las definiciones que se dan en los cursos básicos de probabilidad.

A.2. Convergencias para sucesiones de variables aleatorias

En los cursos básicos de análisis se estudian especialmente dos tipos de convergencia para sucesiones de funciones: la convergencia puntual y la uniforme. Se demuestra, además, que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual, pero no viceversa. No obstante, existen otros tipos de convergencia que también son relevantes en distintas áreas de la matemática y en particular, en la teoría del cálculo estocástico, como lo son la convergencia casi segura, en probabilidad y en $\mathbf{L}^p$, para $p \geq 1$. El propósito de esta sección es exponer distintos tipos de convergencia para sucesiones de v.a. y las relaciones entre ellas. En lo que sigue, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ denota un espacio de probabilidad, y se asume que las v.a. están definidas en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$.

El concepto de casi seguramente (c.s.) se refiere a los eventos que suceden con probabilidad 1. Precisamente, un evento $N \in \mathcal{F}$ ocurre c.s. si $P(N^c) = 0$, donde N^c es el complemento de N . En este contexto, la convergencia casi segura es un tipo de convergencia que se basa en esta noción y en la convergencia puntual.

Definición A.11. Se dice que una sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. converge casi seguramente a una v.a. X y se escribe $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ c.s. o $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} X$, si existe $N \in \mathcal{F}$ tal que $P(N^c) = 0$ y $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$, para todo $\omega \in N$. Se suele escribir también

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 0,$$

para indicar que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ c.s.

En otras palabras, una sucesión de v.a. $\{X_n\}_n$ converge c.s. a una v.a. X , si X_n converge puntualmente a X fuera de un conjunto de probabilidad cero.

Ejemplo A.12.

1. Si $\{X_n\}_n$ es una sucesión de v.a. que converge puntualmente a X , entonces

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$ c.s. En efecto, tome $N = \emptyset$ en la definición A.11.

2. Considere el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, 1], \mu_{[0, 1]})$, donde $\mu_{[0, 1]}$ es la medida de Lebesgue restringida a $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ define

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \frac{n+1}{2n} \\ 0, & \frac{n+1}{2n} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$$

y

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$$

Entonces $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.s.

Una sucesión de funciones $\{X_n\}_n$ converge a X uniformemente si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N(\varepsilon)$, entonces $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$, para todo $\omega \in \Omega$. Este tipo de convergencia es más fuerte que la convergencia puntual, debido a que el valor de $N(\varepsilon)$ es uniforme, es decir, no depende de los valores $\omega \in \Omega$. La convergencia casi uniforme, al igual que la casi segura, se basa en el concepto de convergencia uniforme de funciones.

Definición A.13. Una sucesión $\{X_n\}_n$ de v.a. converge casi uniformemente a una v.a. X , y se denota con $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.u. o $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.u.} X$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathcal{F}$, tal que $\mu(N) < \varepsilon$ y $X_n \rightarrow X$ uniformemente en N^c .

Observe que, en particular, si X_n converge a X uniformemente, entonces $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.u.

Se sabe que si $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ uniformemente, entonces $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ puntualmente. La siguiente proposición muestra que esta propiedad se preserva si se consideran las convergencias c.u. y c.s.

Proposición A.14. Si $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.u., entonces $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.s.

Demostración. Dado que $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.u., para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(N_k) < 1/k$ y X_n converge a X uniformemente en N_k^c . Tome $N = \bigcap_k N_k$. Entonces, se tiene que $\mu(N) = 0$ y $X_n \rightarrow X$ puntualmente en N^c . Por tanto, $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.s. $\square$

Un resultado conocido es que la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme. Un ejemplo es la sucesión $\{1_{(n,n+1)}\}_n$, cuyo límite es la función idénticamente cero. Esta limitación se debe a que, en general, los espacios de medida en donde están definidas las funciones medibles son no finitos. Sin embargo, en un espacio de probabilidad, que es un espacio de medida finita (ver definición A.1), la convergencia c.s. implica la convergencia c.u. Este resultado es conocido como el teorema de Egorov, cuya demostración puede consultarse en (Folland, 1999), p. 62.

Proposición A.15. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a. que converge a la v.a. X c.s., entonces $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ c.u.

Considere $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a. y X una v.a. Sea $\varepsilon > 0$. La cantidad $P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ puede interpretarse como la probabilidad que X_n esté a una distancia mayor o igual que ε con respecto a X . Observe que si X_n converge a X , debería suceder que esta probabilidad tienda a cero cuando n sea suficientemente grande. Si dicha condición se satisface para todo $\varepsilon > 0$, entonces se dice que X_n converge a X en probabilidad.

Definición A.16. Una sucesión de v.a. $\{X_n\}_n$ converge a una v.a. X en probabilidad y se denota por $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$, si para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

El concepto de convergencia en probabilidad puede generalizarse a espacios de medida $(X, \mathcal{G}, \mu)$ que no necesariamente cumplen con $\mu(X) = 1$. En estos casos, la convergencia se conoce como *convergencia en medida*.

Ejemplo A.17. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina la v.a. $X_n = n^2 \mathbb{1}_{(0, 1/n)}$ en el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, 1], \mu_{[0, 1]})$. Tome $\varepsilon > 0$. Note que

$$\{x \in [0, 1] : |X_n(x)| \geq \varepsilon\} = \{x \in [0, 1] : n^2 \mathbb{1}_{(0, 1/n)}(x) \geq \varepsilon\} \subseteq (0, 1/n).$$

Así,

$$\mu_{[0, 1]}(\{x \in [0, 1] : |X_n(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu_{[0, 1]}((0, 1/n)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Por tanto, $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$.

Una propiedad importante que relaciona las convergencias c.s. y en probabilidad se expone a continuación. Cabe aclarar que esta proposición es válida únicamente porque las v.a. están definidas en un espacio de medida finita.

Proposición A.18. Suponga que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} X$, entonces $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$, siendo X_n y X v.a., para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Defina el evento $A_n = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$ y la función $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$, para cada n . Entonces $f_n \rightarrow 0$ c.s. y $\mathbb{1}_{A_n} \leq 1$, donde la v.a. $\omega \rightarrow 1$ es integrable ya que $P(\Omega) = 1 < \infty$. En consecuencia, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{A_n} dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_n} d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}). \end{aligned}$$

□

El recíproco de la proposición A.18 no es, en general, válido. Sin embargo, si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$, existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}_k$ de $\{X_n\}_n$ tal que $X_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} X$. Una prueba detallada de este resultado se puede encontrar en (Roussas, 2014), pp. 46-50.

Proposición A.19. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$, entonces existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}_k$ de $\{X_n\}$ tal que $X_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \tilde{X}$, donde $\tilde{X}$ es una v.a. con $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq \tilde{X}(\omega)\}) = 0$.

Análogamente a los resultados anteriores, las proposiciones A.20 y A.21 aportan propiedades adicionales sobre las convergencias c.u. y en probabilidad.

Proposición A.20. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.u.} X$, entonces $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$.

Demostración. Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.u.} X$, entonces para cada $\delta > 0$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(F) < \delta$ y X_n converge a X uniformemente en F^c . Esto es, si $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$, para todo $\omega \notin F$, siempre que $n \geq N$. Así, para $n \geq N$, se satisface que $\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} \subseteq F$. En consecuencia,

$$P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq P(F) < \delta,$$

para todo $n \geq N$. Se concluye que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$. $\square$

La demostración de la siguiente proposición puede ser consultada en (Roussas, 2014), p. 49.

Proposición A.21. Suponga que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$. Entonces existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}_k$ de $\{X_n\}_n$ tal que $X_{n_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.u.} X$.

Por último, se estudia una de las convergencias más importantes en análisis y probabilidad, la cual es la convergencia en los espacios $\mathbf{L}^p(\Omega)$, para $p \geq 1$ (ver definición en la sección B.3 del apéndice B). Recuerde que una v.a. X pertenece a $\mathbf{L}^p(\Omega)$ si su p-ésimo momento es finito, es decir,

$$\int_{\Omega} |X|^p dP < \infty.$$

Además, se sabe que la función $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p} : \mathbf{L}^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $\|X\|_{\mathbf{L}^p} = (\int_{\Omega} |X|^p dP)^{\frac{1}{p}}$ es una norma en $\mathbf{L}^p(\Omega)$. Por lo tanto, tiene sentido considerar la convergencia de sucesiones en estos espacios con respecto a su norma.

Definición A.22. Una sucesión de v.a. $\{X_n\}_n$ se dice que converge a la v.a. X en $\mathbf{L}^p(\Omega)$, para $p \geq 1$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |X_n - X|^p dP = 0.$$

Ejemplo A.23. En el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [0, 1], \mu_{[0,1]})$, considere la sucesión $\{X_n\}_n$ definida por $X_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{1}_{[0,1/n]}$. Observe que para $p \geq 2$, se tiene que

$$\|X_n\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^p d\mu_{[0,1]} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p}} = n^{-\frac{p+2}{2p}} \rightarrow 0,$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Esto muestra que $X_n \rightarrow X$ en $\mathbf{L}^p([0, 1])$, si $p \geq 2$.

La demostración de la siguiente proposición es una consecuencia directa de la *desigualdad de Chebyshev*, la cual establece que para todo $\varepsilon > 0$ y $p \geq 1$,

$$P(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\Omega} |X|^p dP.$$

Proposición A.24. Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de v.a. Entonces si X_n converge a la v.a. X en $\mathbf{L}^p(\Omega)$, entonces $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$.

El recíproco de la proposición A.24 no es cierto. En efecto, en el ejemplo A.17, se prueba que la sucesión $\{n^2 \mathbb{1}_{(0,1/n)}\}_n$ converge a la v.a. $X \equiv 0$ en probabilidad. No obstante, para $p \geq 1$,

$$\int_{[0,1]} |n^2 \mathbb{1}_{(0,1/n)}|^p d\mu_{[0,1]} = \int_{[0,1]} n^{2p} \mathbb{1}_{(0,1/n)} d\mu_{[0,1]} = n^{2p} \frac{1}{n} \not\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dado que $X_n \rightarrow X$ en $\mathbf{L}^p(\Omega)$ implica que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$. Entonces, por las proposiciones A.19 y A.21, se sigue que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} X$ y $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.u.} X$.

La proposición A.25 presenta una condición que garantiza que el límite de sucesiones de v.a. con distribución normal también tiene distribución normal. Su demostración es una combinación de las proposiciones 1.5 y 1.9 de las páginas 12 y 20 del libro (Baldi, 2017).

Proposición A.25. Suponga que $\{X_n\}_n$ es una sucesión de v.a. con distribución normal tal que $X_n \rightarrow X$ en $\mathbf{L}^p(\Omega)$, para $p \geq 1$, entonces X tiene ley normal.

El diagrama A.4 resume las relaciones entre los cuatro tipos de convergencias estudiadas a lo largo de esta sección. Las flechas continuas (en color negro) indican *implicaciones*, mientras que las líneas punteadas (en color naranja) representan la *existencia de una subsucesión*.

A.3. Independencia de variables aleatorias

En esta sección, se estudia uno de los conceptos probabilísticos de mayor importancia: la *independencia* de eventos, clases de eventos (como las σ -álgebras) y v.a. Intuitivamente,

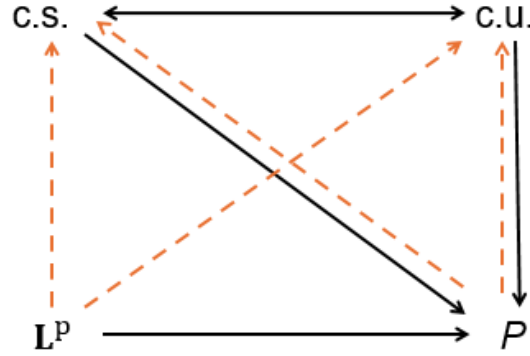


Figura A.4: Relaciones entre los distintos tipos de convergencia

dos eventos son independientes si la probabilidad de que ocurra uno de ellos no se ve afectada por la ocurrencia del otro. De manera similar, se puede pensar que dos v.a. son independientes si ninguna de ellas tiene “efecto” sobre la otra, es decir, la probabilidad de que tomen valores en cualesquier borelianos A y B no se ve afectada porque estas tomen sus valores en los conjuntos A y B . De manera formal,

Definición A.26.

- Se dice que dos eventos $A_1 \in \mathcal{F}$ y $A_2 \in \mathcal{F}$ son independientes si

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Para $n \geq 2$, los eventos $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ son independientes si, para todo $k \geq 2$ y cualesquier $n_1, \dots, n_k$, con $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k \leq n$, se satisface que

$$P(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_k}) = P(A_{n_1})P(A_{n_2}) \dots P(A_{n_k}).$$

Una colección de eventos $\{A_i : i \in I\}$, donde I es un conjunto de índices, es independiente si toda subcolección finita de eventos es independiente.

- Dos clases de eventos C_1 y C_2 son independientes si cualquier selección de eventos $A_1 \in C_1$ y $A_2 \in C_2$ son independientes. De manera similar al ítem anterior, se define la independencia de clases finitas y arbitrarias de eventos. En particular, si las clases C_j son σ -álgebras, se habla de independencia de σ -álgebras.
- Considere las v.a. X_1 y X_2 y sean $\sigma(X_1)$ y $\sigma(X_2)$ las σ -álgebras generadas por ellas. Recuerde que $\sigma(X_i) = X_i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $j = 1, 2$. Entonces, las v.a. X_1 y X_2 son independientes si las clases de eventos $\sigma(X_1)$ y $\sigma(X_2)$ son independientes. Análogamente, las v.a. $X_1, \dots, X_n$ son independientes si las σ -álgebras $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$

son independientes. Por último, el conjunto de v.a. $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ son independientes si toda colección finita de estas v.a. son independientes.

- Una σ -álgebra $\mathcal{G}$ y una v.a. X son independientes si las σ -álgebras $\mathcal{G}$ y $\sigma(X)$ son independientes.

Observe que, para demostrar que las σ -álgebras $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ son independientes, es suficiente mostrar que para toda selección de eventos $A_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$, se cumple que

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n).$$

En otras palabras, no es necesario verificar que la igualdad anterior se satisface para toda subcolección de $k \leq n$ eventos. Esto se debe a que $\Omega \in \mathcal{F}_j$, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Además, es inmediato de la definición que subclases de clases independientes también son independientes.

De la definición A.26 se sigue que las v.a. $X_1, \dots, X_n$ son independientes si para todos $A_1 \in \sigma(X_1), \dots, A_n \in \sigma(X_n)$,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n). \quad (\text{A.3.1})$$

Dado que $\sigma(X_i) = X_i^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ para todo $i = 1, \dots, n$, entonces $A_i = X_i^{-1}(B_i)$ para algún $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En lenguaje probabilista, se suele escribir $X_i \in B_i$ para indicar el conjunto A_i . Por tanto, la relación (A.3.1) es equivalente a

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n).$$

Ahora bien, suponga que $X_1, \dots, X_n$ son v.a. tales que para todos $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que $P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$. Sean $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ las σ -álgebras generadas por las v.a. $X_1, \dots, X_n$, respectivamente, y tome $A_1 \in \sigma(X_1), \dots, A_n \in \sigma(X_n)$. Así, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que $A_i = X_i^{-1}(B_i)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) &= P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) \\ &= P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n) \\ &= P(A_1) \dots P(A_n), \end{aligned}$$

lo cual muestra que $X_1, \dots, X_n$ son independientes.

Esto demuestra la caracterización de independencia para v.a. presentada en la proposición A.27.

Proposición A.27. *Las v.a. $X_1, \dots, X_n$ son independientes, si para todos $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se satisface que*

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_n \in B_n). \quad (\text{A.3.2})$$

Si bien la proposición anterior establece un criterio para determinar independencia de v.a., puede ser difícil mostrar que la igualdad (A.3.2) es válida para cada conjunto de Borel. El siguiente resultado muestra que es suficiente con probar la relación (A.3.2) para conjuntos de la forma $(-\infty, a_i]$, con $a_i \in \mathbb{R}$. Para una demostración detallada consulte (Roussas, 2014), pp. 181-188.

Proposición A.28. *Las v.a. $X_1, \dots, X_n$ son independientes si y solo si para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,*

$$P(X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n) = P(X_1 \leq a_1) \cdots P(X_n \leq a_n).$$

De la proposición A.28 se sigue que, si las v.a. $X_1, \dots, X_n$ son independientes, entonces, en términos de sus funciones de distribución (ver definición y propiedades en la sección A.1), se satisface

$$F_{X_1, \dots, X_n}(a_1, \dots, a_n) = F_{X_1}(a_1) \cdots F_{X_n}(a_n),$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Proposición A.29. *Una v.a. X y una σ -álgebra $\mathcal{G}$ son independientes si y solo si X es independiente a toda v.a. $\mathcal{G}$ -medible W .*

Demostración. Sea W una v.a. $\mathcal{G}$ -medible. Tome $A \in \sigma(X)$ y $B \in \sigma(W) \subseteq \mathcal{G}$. Entonces por la independencia de X y $\mathcal{G}$, se tiene que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, lo que implica que X y W son independientes. Suponga que X es independiente a toda v.a. $\mathcal{G}$ -medible W y considere $B \in \mathcal{G}$. Entonces 1_B es $\mathcal{G}$ -medible, y así $\sigma(X)$ y $\sigma(1_B) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ son independientes. Por tanto, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, para todo $A \in \sigma(X)$. $\square$

Las proposiciones A.30 y A.31 brindan propiedades adicionales sobre la independencia de transformaciones lineales y cuadráticas de v.a. independientes.

Proposición A.30. *Suponga que X y Y son v.a. definidas en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si X y Y son independientes, entonces para todos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con a y b distintos de cero, las v.a. $aX + c$ y $bY + d$ son independientes.*

Demostración. Si X y Y son independientes, por la proposición A.28, se tiene que para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$. Ahora bien, si se consideran $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $c, d \in \mathbb{R}$, para todos $x', y' \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$\begin{aligned} P(aX + c \leq x', bY + d \leq y') &= P(X \leq (x' - c)/a, Y \leq (y' - d)/b) \\ &= P(X \leq (x' - c)/a)P(Y \leq (y' - d)/b) \\ &= P(aX + c \leq x')P(bY + d \leq y'). \end{aligned}$$

Por tanto, las v.a. $aX + c$ y $bY + d$ son independientes. Si a y b no necesariamente son positivos, la prueba es análoga a lo anterior. $\square$

Los argumentos utilizados para demostrar la proposición que se expone a continuación son similares a los presentados para la proposición A.30.

Proposición A.31. *Si las v.a. X y Y son independientes, entonces X^2 y Y^2 también son independientes.*

Una consecuencia importante de la independencia de v.a. es la relación entre la esperanza del producto de dos v.a. y el producto de sus esperanzas. En particular, si X y Y son independientes, se cumple que $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Proposición A.32. *Si las v.a. X, Y son independientes y $E|X|, E|Y| < \infty$, entonces $E|XY| < \infty$ y $E[XY] = E[X]E[Y]$.*

Demostración. Suponga que $X = 1_A$ y $Y = 1_B$, donde A y B son eventos en $\mathcal{F}$. Dado que X y Y son independientes, entonces las σ -álgebras $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ y $\sigma(Y) = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$ también son independientes. Observe que

$$E[XY] = E[1_{A \cap B}] = P(A \cap B) = P(A)P(B) = E[1_A]E[1_B] = E[X]E[Y].$$

Si X y Y son funciones simples positivas, es decir, si se pueden expresar como $X = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{A_i}$, $Y = \sum_{j=1}^n \beta_j 1_{B_j}$, donde α_i y β_j son no negativos para todos i, j , y los

conjuntos $\{A_1, \dots, A_m\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$ son particiones medibles de Ω . Entonces

$$\begin{aligned}
 E[XY] &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j 1_{A_i \cap B_j} dP = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \int_{\Omega} 1_{A_i \cap B_j} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j P(A_i \cap B_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j P(A_i) P(B_j) \\
 &= \sum_{i=1}^m \alpha_i P(A_i) \sum_{j=1}^n \beta_j P(B_j) \\
 &= E[X]E[Y].
 \end{aligned}$$

Ahora, sean X y Y v.a. no negativas. Entonces, existen sucesiones de v.a. simples no negativas $\{X_n\}_n$ y $\{Y_n\}_n$ tales que $X_n \uparrow X$ y $Y_n \uparrow Y$, lo que implica que $X_n Y_n \uparrow XY$. En consecuencia, por el teorema de la convergencia monótona, se tiene que $E[X_n] \uparrow E[X]$, $E[Y_n] \uparrow E[Y]$ y $E[X_n Y_n] \uparrow E[X_n]E[Y_n]$. Según lo demostrado en el caso anterior, se sigue que $E[X_n Y_n] = E[X_n]E[Y_n] \uparrow E[X]E[Y]$. Así, $E[XY] = E[X]E[Y] < \infty$.

Por último, para cualquier v.a X y Y , la v.a. XY está dada por

$$XY = (X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) = X^+Y^+ - X^+Y^- - X^-Y^+ + X^-Y^-,$$

donde X^+ y Y^+ representan las partes positivas de X y Y , respectivamente, mientras que X^- y Y^- representan las partes negativas. Observe que las esperanzas de las v.a. en cada sumando son finitas, y por lo que se ha demostrado anteriormente, se deduce que

$$\begin{aligned}
 E[XY] &= E[X^+Y^+] - E[X^+Y^-] - E[X^-Y^+] + E[X^-Y^-] \\
 &= E[X^+]E[Y^+] - E[X^+]E[Y^-] - E[X^-]E[Y^+] + E[X^-]E[Y^-] \\
 &= E[X^+]E[Y] - E[X^-]E[Y] \\
 &= E[X]E[Y].
 \end{aligned}$$

□

En probabilidad, además de los valores de esperanza y varianza estudiados en la sección [A.1](#), existen otras cantidades que también son importantes, ya que pueden proporcionar información adicional sobre las v.a. En particular, la *covarianza* mide la variación entre dos v.a. respecto a sus medias. Específicamente, si X y Y son v.a., entonces la covarianza entre X y Y está dada por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Así mismo, la *correlación* entre X y Y indica la fuerza de la relación lineal entre estas. Matemáticamente, la correlación se define como

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$$

Este valor varía entre -1 y 1. Si $\text{Cor}(X, Y) = 0$, se dice que las v.a. X y Y no tienen relación lineal. Note que si X y Y son independientes, de acuerdo con la proposición A.32, se tiene que $\text{Cor}(X, Y) = 0$.

Las proposiciones A.33 y A.34 establecen propiedades sobre v.a. independientes con distribución normal. El lector interesado puede encontrar sus demostraciones en (Baldi, 2017), p.19 y (Bain y Engelhardt, s.f.), p.214, respectivamente.

Proposición A.33. *Si X y Y son v.a. con ley normal, entonces X y Y son independientes si y solo la correlación $\text{Cor}(X, Y) = 0$.*

Proposición A.34. *Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a. independientes con distribución normal. Suponga que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. Entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$*

Se finaliza esta sección presentando un lema fundamental en la teoría de probabilidad: el *lema de Borel-Cantelli*. Este resultado tiene diversas aplicaciones. En particular, como se estudia en el capítulo 1, es clave para probar propiedades importantes del movimiento browniano, tales como el teorema del módulo de continuidad de Paul Lévy 1.33 y la ley del logaritmo iterado 1.37. Antes de mostrar este lema, se estudian los límites superior e inferior para sucesiones de conjuntos.

En el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, considere la sucesión de eventos $\{A_n\}_n$. Los límites superior e inferior de A_n , denotados por $\limsup_n A_n$ y $\liminf_n A_n$, son definidos por

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n. \end{aligned}$$

Cabe destacar que los conjuntos $\limsup_n A_n \in \mathcal{F}$ y $\liminf_n A_n \in \mathcal{F}$. Más aún,

$$\begin{aligned} \omega \in \limsup_n A_n &\iff \text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \omega \in A_n \\ &\iff \omega \in A_n \text{ para infinitos valores de } n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \in \liminf_n A_n &\iff \text{existe } m \in \mathbb{N} \text{ tal que para todo } n \geq m \text{ se satisface que } \omega \in A_n \\ &\iff \omega \in A_n \text{ para todos menos un número finito de } n. \end{aligned}$$

Esto muestra que

$$\begin{aligned}\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para todos menos un número finito de } n\}.\end{aligned}$$

Se presenta a continuación el lema de Borel-Cantelli, también conocido como la *ley 0-1*, ya que dependiendo de si la serie formada por los valores $P(A_n)$ converge o diverge, se garantiza que $P[\limsup_n A_n]$ es 0 o 1. Consulte la demostración en (Athreya y Lahiri, 2006), p. 224.

Lema A.35. *Suponga que $\{A_n\}_n$ es una sucesión de eventos en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

- **Primer lema de Borel-Cantelli.** *Si $\sum_n P(A_n) < \infty$, entonces*

$$P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right] = 0.$$

- **Segundo lema de Borel-Cantelli.** *Si los eventos $\{A_n\}_n$ son independientes y $\sum_n P(A_n) = \infty$, entonces*

$$P\left[\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right] = 1.$$

A.4. Esperanza condicional

En esta sección se presenta la esperanza condicional de una v.a. definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dada una sub- σ -álgebra $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$. Para su definición se hace uso del teorema de Radon-Nikodym y de algunos conceptos, como el de medida absolutamente continua respecto a otra, los cuales son presentados en la sección B.3 del apéndice B.

Sea X una v.a. integrable, es decir, $E[|X|] < \infty$. Tome $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ -álgebra y considere las funciones $\mu_{\mathcal{G}}^+$ y $\mu_{\mathcal{G}}^-$ definidas en $\mathcal{G}$ por

$$\mu_{\mathcal{G}}^+(A) = \int_A X^+ dP, \quad \mu_{\mathcal{G}}^-(A) = \int_A X^- dP, \quad A \in \mathcal{G},$$

donde X^+ y X^- representan la parte positiva y negativa de X , respectivamente. Entonces $\mu_{\mathcal{G}}^+$ y $\mu_{\mathcal{G}}^-$ satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\mu_{\mathcal{G}}^+$ y $\mu_{\mathcal{G}}^-$ son medidas σ -finitas en $\mathcal{G}$,

2. $\mu_{\mathcal{G}}^+$ y $\mu_{\mathcal{G}}^-$ son absolutamente continuas respecto a P .

Para mostrar [1](#), tome una sucesión disjunta $\{A_n\} \subseteq \mathcal{G}$. Entonces se satisface que

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{G}}^+(\emptyset) &= \int_{\emptyset} X^+ dP = 0, \\ \mu_{\mathcal{G}}^+\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} X^+ dP = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} X^+ dP = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{\mathcal{G}}^+(A_n).\end{aligned}$$

Esto prueba que $\mu_{\mathcal{G}}^+$ es una medida en $\mathcal{G}$. Ahora bien, considere la sucesión $\{\Omega_n\}_n$ en $\mathcal{G}$. Es claro que $\bigcup_n \Omega_n = \Omega$ y $\mu_{\mathcal{G}}^+(\Omega) < \infty$, puesto que $E[|X|] < \infty$. Así, $\mu_{\mathcal{G}}^+$ es una medida σ -finita en $\mathcal{G}$. Análogamente se demuestran estas propiedades para $\mu_{\mathcal{G}}^-$.

El ítem [2](#) sigue del hecho que si $A \in \mathcal{G}$ es tal que $P(A) = 0$, entonces $\mu_{\mathcal{G}}^+(A) = \mu_{\mathcal{G}}^-(A) = 0$, ya que las integrales $\int_A X^+ dP$ y $\int_A X^- dP$ se realizan sobre un conjunto de medida cero.

Por tanto, por el teorema de Radon–Nikodym, existen únicas v.a. $\mathcal{G}$ -medibles no negativas Y^+ y Y^- , tales que

$$\mu_{\mathcal{G}}^+(A) = \int_A Y^+ dP, \quad \mu_{\mathcal{G}}^-(A) = \int_A Y^- dP,$$

para todo $A \in \mathcal{G}$. La unicidad se refiere a que si Z^+ y Z^- son v.a. que satisfacen estas propiedades, entonces $P(Z^+ = Y^+) = 1$ y $P(Z^- = Y^-) = 1$. Tomando $Y = Y^+ - Y^-$, entonces Y es $\mathcal{G}$ -medible y para todo $A \in \mathcal{G}$ se cumple que

$$\int_A Y dP = \int_A Y^+ dP - \int_A Y^- dP = \int_A X^+ dP - \int_A X^- dP = \int_A X dP.$$

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición A.36. Dada una v.a. integrable en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y una σ -álgebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, la esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$ se define como la única v.a. Y (única con probabilidad 1), que satisface las siguientes propiedades:

- Y es $\mathcal{G}$ -medible,
- $\int_A X dP = \int_A Y dP$, para todo $A \in \mathcal{G}$.

A la v.a. Y se le denota por $E[X|\mathcal{G}]$, $E(X|\mathcal{G})$ o $E^{\mathcal{G}}X$.

Si $X = 1_A$ para algún $A \in \mathcal{F}$, entonces $E[1_A|\mathcal{G}]$ se denomina la *probabilidad condicional* de A dado $\mathcal{G}$, y se denota por $P^{\mathcal{G}}A$. Por la definición [A.36](#) se tiene que

$$\int_B E[1_A|\mathcal{G}] dP = \int_B P^{\mathcal{G}}A dP = \int_B 1_A dP = P(A \cap B), \quad B \in \mathcal{G}.$$

Es importante resaltar que la condición de que $E[X|\mathcal{G}]$ sea una v.a. $\mathcal{G}$ -medible es crucial. Si se omite, es trivial que $\int_A X dP = \int_A X dP$ para todo $A \in \mathcal{G}$, y en dicho caso se podría tomar $X = E[X|\mathcal{G}]$. Sin embargo, observe que X no necesariamente es $\mathcal{G}$ -medible, ya que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Así, la v.a. $E[X|\mathcal{G}]$ puede interpretarse como el mejor valor de X dada la información suministrada por $\mathcal{G}$.

Ejemplo A.37.

- Suponga que X es una v.a. integrable y considere $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$. Sea $Y = E[X|\mathcal{G}]$. Dado que Y es $\mathcal{G}$ -medible, entonces $Y = c$ para alguna constante c . Además,

$$\int_A c dP = \int_A X dP,$$

para todo $A \in \mathcal{G}$. En particular, para $A = \Omega$, se satisface que $E[X] = c$. Esto muestra que $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ c.s. Observe que, como la σ -álgebra $\mathcal{G}$ no da información, es de esperarse que el mejor valor de X dado $\mathcal{G}$ es su esperanza.

- Sea $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ una partición medible de Ω , con $P(B_i) > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{G} = \sigma(\{B_i : i \in \mathbb{N}\})$. Observe entonces que $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset, \bigcup_{i \in J} B_i\}$, donde $J \subseteq \mathbb{N}$. Por definición de esperanza condicional, si X es una v.a. integrable, se sabe que $E[X|\mathcal{G}]$ es una función $\mathcal{G}$ -medible. Por tanto, debe ser constante en cada elemento de la partición $\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$. Suponga que $E[X|\mathcal{G}] = c_i \in \mathbb{R}$ en B_i , para $i \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que

$$\int_{B_i} X dP = \int_{B_i} E[X|\mathcal{G}] dP = \int_{B_i} c_i dP,$$

para cada i . En consecuencia,

$$E[X|\mathcal{G}] = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) 1_{B_j}.$$

Para cualquier $A \in \mathcal{G}$, se tiene que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$, para algún $I \subseteq \mathbb{N}$. Dado que

$\{B_i : i \in \mathbb{N}\}$ es una partición de Ω , entonces

$$\begin{aligned}
 \int_A \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) \mathbb{1}_{B_j} \right] dP &= \int_{\bigcup_{i \in I} B_i} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) \mathbb{1}_{B_j} \right] dP \\
 &= \sum_{i \in I} \int_{B_i} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) \mathbb{1}_{B_j} \right] dP \\
 &= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_i} \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) \mathbb{1}_{B_j} dP \\
 &= \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) P(B_i \cap B_j) \\
 &= \sum_{i \in I} \left(\frac{1}{P(B_i)} \int_{B_i} X dP \right) P(B_i) \\
 &= \int_A X dP,
 \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se ha utilizado la proposición [B.16](#), debido a que para cada $j \in \mathbb{N}$, la v.a.

$$f_j = \left(\frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \right) \mathbb{1}_{B_j \cap B_i}$$

es integrable, ya que $E[|X|] < \infty$, y

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_j| dP &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P(B_j)} \left| \int_{B_j} X dP \right| \int_{\Omega} \mathbb{1}_{B_j \cap B_i} dP \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{P(B_j)} \left| \int_{B_i} X dP \right| P(B_j \cap B_i) \\
 &= \frac{1}{P(B_i)} \left| \int_{B_i} X dP \right| P(B_i) \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

En particular, si $X = \mathbb{1}_A$ para algún $A \in \mathcal{F}$, entonces para $\omega \in \Omega$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \in B_j$. Se sigue que

$$P^G A(\omega) = \frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} \mathbb{1}_A dP = \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}.$$

Cabe destacar que este cociente de probabilidades se conoce como probabilidad condicional de A dado que ocurrió el evento B_j y se suele denotar por $P_{\omega}(A|B_j)$. Además,

se puede demostrar que la función $P^{\mathcal{G}}A(\omega) = P_{\omega}(A|B_j)$ (como función de A) es una medida de probabilidad en $\mathcal{F}$, y para cualquier v.a. integrable Y , la integral

$$\int_{\Omega} Y(\tilde{\omega}) dP_{\omega}(\cdot|B_j) = \frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} Y dP = E[Y|\mathcal{G}](\omega),$$

donde $\omega \in B_j$, $j \geq 1$.

En la siguiente proposición se estudian varias propiedades clave de la esperanza condicional, esenciales para las demostraciones y el desarrollo de la teoría de la integral de Itô que se aborda en el capítulo 2.

Proposición A.38. *Suponga que X y Y son v.a. integrables.*

1. $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.
2. Si X es $\mathcal{G}$ -medible, entonces $E[X|\mathcal{G}] = X$ c.s. En particular, si $X = c \in \mathbb{R}$ c.s., se tiene que $E[X|\mathcal{G}] = c$ c.s.
3. Si $X \geq Y$ c.s., entonces $E[X|\mathcal{G}] \geq E[Y|\mathcal{G}]$ c.s.
4. Suponga que para $j = 1, \dots, n$ las v.a. $X_1, \dots, X_n$ son integrables y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Entonces

$$E \left[\sum_{j=1}^n c_j X_j \middle| \mathcal{G} \right] = \sum_{j=1}^n c_j E[X_j|\mathcal{G}] \text{ c.s.}$$

5. $E[XW] = E[E[X|\mathcal{G}]W]$ para toda v.a. W $\mathcal{G}$ -medible y acotada. Más aún, si Z es una v.a. $\mathcal{G}$ -medible tal que $E[ZW] = E[XW]$, entonces $Z = E[X|\mathcal{G}]$ c.s.
6. Si Y es $\mathcal{G}$ -medible, entonces $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$ c.s.
7. Si $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$, entonces $E[E[X|\tilde{\mathcal{G}}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$ c.s.
8. Si X es independiente de $\mathcal{G}$, entonces $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ c.s.

Demostración.

1. Tome $A = \Omega$ en la definición A.36.
2. Observe que para todo $A \in \mathcal{G}$, se tiene que $\int_A X dP = \int_A X dP$. Además, dado que X es $\mathcal{G}$ -medible, por la unicidad de la esperanza condicional, se sigue que $E[X|\mathcal{G}] = X$ c.s.

3. Considere $A \in \mathcal{G}$. Entonces

$$\int_A E[X|\mathcal{G}]dP = \int_A XdP \geq \int_A YdP = \int_A E[Y|\mathcal{G}]dP.$$

Como $E[X|\mathcal{G}]$ y $E[Y|\mathcal{G}]$ son v.a. $\mathcal{G}$ -medibles, se sigue que $E[X|\mathcal{G}] \geq E[Y|\mathcal{G}]$.

4. Para todo $A \in \mathcal{G}$, se cumple que

$$\begin{aligned} \int_A \left(\sum_{j=1}^n c_j E[X_j|\mathcal{G}] \right) dP &= \sum_{j=1}^n c_j \int_A E[X_j|\mathcal{G}]dP \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \int_A X_j dP \\ &= \int_A \sum_{j=1}^n c_j X_j dP. \end{aligned}$$

Puesto que la v.a. $\sum_{j=1}^n c_j E[X_j|\mathcal{G}]$ es $\mathcal{G}$ -medible, se sigue el resultado por la unicidad de la esperanza condicional.

5. De la definición de esperanza condicional [A.36](#), se sabe que si X es una v.a. integrable y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ es una σ -álgebra, entonces se satisface la relación $E[X \mathbf{1}_A] = E[E[X|\mathcal{G}] \mathbf{1}_A]$, para todo $A \in \mathcal{G}$. Esto implica que

$$E[XW] = E[E[X|\mathcal{G}]W],$$

para toda v.a. $\mathcal{G}$ -medible W . Para demostrar esto, primero suponga que W es una función simple positiva y use la propiedad [4](#). Si W es una v.a. $\mathcal{G}$ -medible no negativa, entonces existe una sucesión creciente $\{W_n\}_n$ de funciones simples $\mathcal{G}$ -medibles tal que $W_n \uparrow W$. En consecuencia,

$$E[XW] = E \left[X \lim_{n \rightarrow \infty} W_n \right] = E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} XW_n \right].$$

Note que $\{XW_n\}_n$ es una sucesión de v.a. $\mathcal{F}$ -medibles e integrables. Además, $XW_n \uparrow XW$ y $|XW_n| \leq |XW| \leq XM \in \mathbf{L}^1(\Omega)$, siendo $M > 0$ una constante tal que $W \leq M$. Así, por el teorema de la convergencia dominada, $E[XW] = \lim_n E[XW_n]$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} E[XW] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[XW_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[E[X|\mathcal{G}]W_n] \\ &= E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} E[X|\mathcal{G}]W_n \right] \\ &= E[E[X|\mathcal{G}]W], \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se ha utilizado el teorema de convergencia dominada, teniendo en cuenta que $W_n \leq M$, para todo n .

En general, si W es una v.a. $\mathcal{G}$ -medible acotada, entonces la propiedad se deduce aplicando el caso anterior a las funciones $\mathcal{G}$ -medibles y positivas W^+ y W^- , donde W^+ y W^- representan la parte positiva y negativa de W , respectivamente.

Ahora, suponga que Z es una v.a. $\mathcal{G}$ -medible tal que $E[ZW] = E[XW]$, para toda v.a. W $\mathcal{G}$ -medible y acotada. En particular, para todo $A \in \mathcal{G}$, si se considera la v.a. $W = 1_A$, se cumple que

$$E[Z 1_A] = E[X 1_A].$$

Por tanto, por la unicidad de la esperanza condicional, se deduce que $Z = E[X|\mathcal{G}]$ c.s.

6. La prueba es análoga a la realizada para el ítem 5. Primero, se supone que Y es una función de la forma $Y = 1_A$, para $A \in \mathcal{G}$. Con base en esto, se demuestra la propiedad para funciones simples no negativas. Posteriormente, se extiende la prueba a v.a. $\mathcal{G}$ -medibles no negativas y, en general, a v.a. que toman valores en $\mathbb{R}$. Los detalles de la prueba pueden ser consultados en (Roussas, 2014), pp. 161-162.
7. Sea $\mathcal{G} \subseteq \tilde{\mathcal{G}}$. Por la definición de esperanza condicional se tiene que $E[E[X|\tilde{\mathcal{G}}]|\mathcal{G}]$ es una v.a. $\mathcal{G}$ -medible. De acuerdo con la propiedad 5, para demostrar que $E[E[X|\tilde{\mathcal{G}}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$ es suficiente mostrar que para toda v.a. $\mathcal{G}$ -medible y acotada W , se cumple que $E[E[E[X|\tilde{\mathcal{G}}]|\mathcal{G}]W] = E[XW]$. Para esto, tomando $Z = E[X|\tilde{\mathcal{G}}]$, observe que

$$E[E[Z|\mathcal{G}]W] = E[E[WZ|\mathcal{G}]] = E[WE[X|\tilde{\mathcal{G}}]] = E[E[WX|\tilde{\mathcal{G}}]] = E[WX].$$

8. Dado que X y $\mathcal{G}$ son independientes, entonces por la proposición A.29 las v.a. X y 1_A son independientes, para todo $A \in \mathcal{G}$. Según la proposición A.32, se tiene que

$$\int_A E[X|\mathcal{G}]dP = E[E[X|\mathcal{G}] 1_A] = E[X 1_A] = E[X]E[1_A] = E[X]P(A) = \int_A E[X]dP.$$

Como la v.a. $\omega \rightarrow E[X]$ es $\mathcal{G}$ -medible, se concluye que $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$.

□

La proposición que se expone a continuación, proporciona propiedades adicionales de la esperanza condicional. La demostración detallada puede ser encontrada en (Roussas, 2014), pp. 160-161, 164-169.

Proposición A.39.

1. *(Teorema de la convergencia monótona para esperanza condicional). Si $\{X_n\}_n$ es una sucesión de v.a. no negativas tal que $X_n \uparrow X$ para alguna v.a. X con $E[|X|] < \infty$, entonces $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$ c.s.*
2. *(Teorema de la convergencia dominada para esperanza condicional). Suponga que $\{X_n\}_n$ es una sucesión de v.a. integrables y $X_n \rightarrow X$ c.s. Si existe una función integrable Y tal que $|X_n| \leq Y$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $E[X_n|\mathcal{G}] \rightarrow E[X|\mathcal{G}]$ c.s.*
3. *(Desigualdad de Jensen). Sea $X \in \mathbf{L}^1(\Omega)$. Si Φ es una función convexa en $\mathbb{R}$ y $\Phi(X) \in \mathbf{L}^1(\Omega)$, entonces $\Phi(E[X|\mathcal{G}]) \leq E[\Phi(X)|\mathcal{G}]$.*

Apéndice B

Fundamentos de análisis

El objetivo de este capítulo es sentar las bases de análisis real y funcional que se usaron a lo largo del trabajo. En la sección [B.1](#) se define la integral de Riemann- Stieltjes, como una generalización de la integral de Riemann, que permite integrar bajo ciertas condiciones una función respecto a otra. En la proposición [2.30](#) se demuestra que, si una función determinista es continua y de variación acotada, entonces se puede integrar respecto al movimiento browniano, y su resultado coincide con la integral de Wiener expuesta en [2.3](#). Por otro lado, en [B.3](#) y [B.2](#) se exhiben definiciones y resultados importantes sobre teoría de la integración y análisis funcional. Como aplicación de estas secciones, un teorema sobre operadores lineales acotados entre espacios normados [B.13](#), permite presentar la integral de Itô como un operador lineal y acotado, simplificando algunos cálculos para demostrar estas propiedades, como lo hacen en algunos libros ([Baldi, 2017](#)), ([Ribet, 2006](#)), proporcionando además una forma equivalente de definir esta integral. Por último, en la sección [B.4](#) se exhiben desigualdades y resultados generales sobre los números, funciones exponenciales, entre otras, que se usaron para demostrar teoremas y proposiciones en el transcurso del texto.

B.1. Integral de Riemann- Stieltjes

La integral de Riemann- Stieltjes fue presentada por primera vez por el matemático holandés Thomas Joannes Stieltjes en 1894, en el artículo *Recherches sur les fractions continues* ([Stieltjes, 1894](#)). En dicho documento, se planteó el problema de determinar el límite de una fracción continua, en caso de existir. Como resultado de esto, introdujo el concepto de función creciente y afirmó que la distribución de masa sobre una recta de origen O genera una función creciente de la distancia de O a x_0 , y de manera recíproca, una función

creciente puede pensarse como una distribución de masa. En teoría de la medida, la equivalencia anterior se interpreta como que toda función de distribución (función creciente y continua a derecha, definida en $\mathbb{R}$) genera una medida y, a su vez, toda medida sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genera una función de distribución, ver la construcción de la ley de una v.a. en el apéndice A y la proposición A.5. Ahora bien, si $F(x)$ es la función de distribución de una masa m en el punto x , se presenta la necesidad de determinar ciertos valores como el centro de masa, es decir, calcular

$$\frac{1}{m} \int_O^{x_0} x dF(x),$$

y, en general, calcular expresiones de la forma

$$\int_O^{x_0} \varphi(x) dF(x),$$

donde φ es una función con ciertas características.

La idea ahora es definir, como lo hizo Stieltjes, integrales de la forma

$$\int_a^b f(x) dg(x),$$

donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no constante. Se suele asumir que g es creciente, pero en lo que sigue, no se va a suponer esto más que como una condición para obtener algunas propiedades. Dada una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$, se define para cada $i = 1, \dots, n$, las cantidades

$$\begin{aligned} \Delta g_i &= g(x_i) - g(x_{i-1}), \\ m_i &= \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ m &= \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}, \\ M &= \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Observe que cada uno de los valores anteriores son finitos ya que la función f es acotada. Además, para todo $i = 1, \dots, n$, se tiene que $m \leq m_i \leq M_i \leq M$. Se definen las suma superior e inferior de Riemann- Stieltjes de f respecto a g , correspondiente a la partición P como

$$U(f, g, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta g_i, \quad L(f, g, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta g_i,$$

respectivamente. Dado que $m_i \leq M_i$ para todo i , se sigue que $L(f, g, P) \leq U(f, g, P)$ para cualquier partición P de $[a, b]$. Más aún, se puede demostrar que si incrementa el número de puntos en una partición, las sumas inferiores de Riemann-Stieltjes crecen mientras que las sumas superiores decrecen, es decir, si Q es una partición de $[a, b]$ tal que $P \subseteq Q$, entonces $L(f, g, P) \leq L(f, g, Q)$ y $U(f, g, Q) \leq U(f, g, P)$ (ver (Rudin y cols., 1964), p. 123). En particular, esto implica que para cualesquiera particiones P y Q de $[a, b]$, se satisface que $L(f, g, P) \leq U(f, g, Q)$. Dichas observaciones motivan la siguiente definición.

Definición B.1. *Se define la suma superior e inferior de Riemann- Stieltjes de f respecto a g , como*

$$\overline{\int_a^b f dg} = \inf_P U(f, g, P), \quad \underline{\int_a^b f dg} = \sup_P L(f, g, P),$$

respectivamente, donde el supremo y el ínfimo se toman sobre todas las particiones P de $[a, b]$.

Dado que $L(f, g, P) \leq U(f, g, Q)$ para todas las particiones P y Q de $[a, b]$, se deduce que

$$\underline{\int_a^b f dg} \leq \overline{\int_a^b f dg}.$$

En caso tal que $\underline{\int_a^b f dg} \geq \overline{\int_a^b f dg}$, se dice que f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a g .

Definición B.2. *Si las sumas superiores e inferiores de f respecto a g coinciden, entonces f es Riemann- Stieltjes integrable respecto a g en $[a, b]$, y se denota por*

$$I_g(f) = \int_a^b f dg = \int_a^b f(x) dg(x) = \underline{\int_a^b f dg} = \overline{\int_a^b f dg}.$$

Se suele usar la expresión $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$ para indicar que f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a g en $[a, b]$.

Cabe destacar que la construcción de la integral realizada anteriormente es similar a la presentada por Riemann para definir su integral para funciones acotadas en un intervalo compacto. En particular, si se toma $g(x) = x$, la integral de Riemann coincide con la integral de Riemann-Stieltjes. Es natural entonces preguntarse si la integral de Stieltjes preserva todas las propiedades de la de Riemann. Como lo expone la proposición B.3, se satisfacen propiedades como la linealidad. Sin embargo, se puede proporcionar un ejemplo de una función continua que no es Riemann-Stieltjes integrable respecto a una función g no constante (ver ejemplo 2.1 del capítulo 2), lo cual marca una diferencia con respecto a la integral de Riemann.

En lo que sigue, se muestran algunas propiedades sobre la integral de Riemann-Stieltjes. El lector interesado puede consultar la demostración en (Rudin y cols., 1964), pp. 128-129 y (Carothers, 2000), pp. 227-228.

Proposición B.3. *La integral de Riemann-Stieltjes satisface las siguientes propiedades:*

1. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}_g[a, b]$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{R}_g[a, b]$ y

$$I_g(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I_g(f_1) + \alpha_2 I_g(f_2).$$

2. Si $f \in \mathcal{R}_{g_1}[a, b]$, $f \in \mathcal{R}_{g_2}[a, b]$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, entonces $f \in \mathcal{R}_{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2}[a, b]$ y

$$I_{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2}(f) = \alpha_1 I_{g_1}(f) + \alpha_2 I_{g_2}(f).$$

3. $f \in \mathcal{R}_g(f)$ si y solo si $f \in \mathcal{R}_g[a, c]$ y $f \in \mathcal{R}_g[c, b]$, para todo $c \in (a, b)$. Más aún,

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

4. Si $f \in \mathcal{R}[a, b]$ es no negativa y g es una función creciente, entonces $I_g(f) \geq 0$.

5. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}_g[a, b]$ y $f_1 \leq f_2$, donde g es una función creciente, entonces $I_g(f_1) \leq I_g(f_2)$.

6. Si g es una función creciente y $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$, entonces $|f| \in \mathcal{R}_g[a, b]$ y $|I_g(f)| \leq I_g(|f|)$.

7. Si g es una función de variación acotada, entonces toda función continua es integrable con respecto a g .

8. (Fórmula de integración por partes) Sean f, g funciones acotadas y suponga que $f \in \mathcal{R}_g[a, b]$. Entonces $g \in \mathcal{R}_f[a, b]$ y

$$\int_a^b g df = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b f dg.$$

Observación B.4. La propiedad 8 es de gran relevancia, ya que permite intercambiar el orden de las funciones f y g involucradas en la definición B.2, lo cual es útil en caso de que integrar f respecto a g sea quizás más difícil que su caso recíproco. Por ejemplo, en el capítulo 2 se quiere dar sentido a la integral

$$\int_a^b f(t, \omega) dB_t(\omega), \tag{B.1.1}$$

donde f una función con ciertas propiedades y $\{B_t\}_{t \in [a,b]}$ un movimiento browniano 1.25. Para analizar (B.1.1), una idea inicial sería definir

$$\int_a^b f(t)dB_t(\omega) = (RS) \int_a^b f(t)dB_t(\omega),$$

donde la integral del lado derecho corresponde a la integral de Riemann- Stieltjes de f respecto a $\{B_t\}_t$. En particular, al no haber fórmula explícita para $\{B_t\}_t$ como función de (t, ω) , sería útil que se satisficiera la fórmula de integración por partes 8, de manera que se escriba

$$\int_a^b f(t, \omega)dB_t(\omega) = f(b)B(b) - f(a)B(a) - (RS) \int_a^b B_t(\omega)df(t, \omega). \quad (\text{B.1.2})$$

En la sección 2.1 del capítulo 2 se verá que definir (B.1.1) como en (B.1.2) en general no es práctico, ya que limita el conjunto de funciones f para las cuales se pueda integrar respecto al movimiento browniano. El matemático Kiyoshi Itô define (B.1.1) en un sentido similar al de Lebesgue (ver sección 2.2). En particular, si f es una función que solo depende de la variable t , y es continua y de variación acotada, la integral de Riemann-Stieltjes y la de Itô coinciden, como se muestra en la proposición 2.30.

B.2. Elementos de análisis funcional

Esta sección introduce algunos conceptos de análisis funcional, tales como los espacios de Banach y de Hilbert. En particular, se presenta un resultado fundamental para definir la integral de Itô en el capítulo 2 (ver la proposición B.13 y la definición 2.13).

Intuitivamente, la norma de un vector es una cantidad que mide su tamaño o longitud. Generalizando este concepto, se introducen los espacios normados, que son espacios vectoriales en los cuales se puede definir una norma

Definición B.5. Un espacio vectorial X sobre $\mathbb{R}$ es un espacio normado, si existe una función $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ tal que para todos $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

1. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se suele utilizar la notación $(X, \|\cdot\|)$ para indicar que X es un espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. La propiedad 3 se conoce como desigualdad triangular.

Ejemplo B.6.

- La función $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$.

- Si $C[a, b]$ denota el conjunto de las funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la función $\|\cdot\|_\infty : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

es una norma en $C[a, b]$.

De manera similar a los espacios normados, surge el concepto de espacios con producto interno.

Definición B.7. Suponga que X es un espacio vectorial real. Un producto interno en X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se satisface que

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$,
2. $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$,
3. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$,
4. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Es común usar la notación $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ para denotar que X es un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Ejemplo B.8.

- El espacio $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, donde $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, es un espacio con producto interno, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- En la sección [B.3.1](#) se define el espacio $\mathbf{L}^2(X)$, donde X es un conjunto. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2} : \mathbf{L}^2(X) \times \mathbf{L}^2(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{L}^2} = \int_X f g d\mu$$

es un producto interno en $\mathbf{L}^2(X)$.

En el ejemplo B.8 se muestra que $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno. Note que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma dada en el ejemplo B.6. Esto muestra que $\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. De manera general, si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en el espacio vectorial X , entonces la función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $x \rightarrow \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ es una norma en X (ver (Rynne y Youngson, 2007), pp. 56-57). Esta norma se conoce como la norma inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Dos clases importantes de espacios normados en análisis funcional son los espacios de Banach y los *espacios de Hilbert*, que se definen a continuación.

Definición B.9. *Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en X converge en X , es decir, X es completo bajo la norma $\|\cdot\|$.*

Se puede demostrar que los espacios $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ y $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ expuestos en el ejemplo B.6 son espacios de Banach (ver (Rynne y Youngson, 2007), p. 49).

Definición B.10. *Un espacio con producto interno $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert si X es completo con respecto a la norma inducida por su producto interno.*

Los espacios $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ y $(\mathbf{L}^2(X), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{L}^2})$ expuestos en el ejemplo B.8 son espacios de Hilbert (ver (Kreyszig, 1991), pp. 131-132).

Un concepto fundamental en álgebra lineal que aporta importantes propiedades a los espacios vectoriales es el de transformación lineal. Estas son funciones entre espacios vectoriales que preservan tanto la suma como la multiplicación por escalar. Una clase especial de estas transformaciones, cuando se consideran entre espacios vectoriales normados, son las transformaciones acotadas, que se describen a continuación.

Definición B.11. *Suponga que $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios normados y sea $T : X \rightarrow Y$ una transformación lineal. T se dice acotado si existe un número $k > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq k\|x\|_X$, para todo $x \in X$.*

El conjunto de todas las transformaciones lineales entre X y Y es denotado por $B(X, Y)$, y sus elementos se llaman *operadores lineales acotados* o *operadores lineales*. Se puede demostrar que $B(X, Y)$ es un espacio vectorial, ya que es un subespacio del conjunto de

transformaciones lineales $T : X \rightarrow Y$. Más aún, $B(X, Y)$ es un espacio normado, como lo muestra la siguiente proposición. Consulte la demostración en (Rynne y Youngson, 2007), pp. 97-98.

Proposición B.12. *Suponga que $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios normados. La función $\|\cdot\| : B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por*

$$\|T\| = \sup \{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X},$$

es una norma en $B(X, Y)$ y se conoce como la norma operador.

El siguiente resultado, conocido como el teorema de extensión de operadores lineales acotados, establece que todo operador lineal acotado $T : D \rightarrow Y$, donde D es subespacio de un espacio normado X y Y es espacio de Banach, puede ser extendido a un operador lineal acotado $\tilde{T} : \overline{D} \rightarrow Y$. El lector interesado puede consultar la demostración en (Kreyszig, 1991), pp. 221-222.

Proposición B.13. *Suponga que $T : D(T) \rightarrow Y$ es un operador lineal acotado, donde $D(T)$ se encuentra en un espacio normado X y Y es un espacio de Banach. Entonces T tiene una extensión*

$$\tilde{T} : \overline{D(T)} \rightarrow Y,$$

donde $\tilde{T}$ es un operador lineal acotado de norma

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

B.3. Elementos de teoría de la integración

En esta sección se presentan algunos resultados generales sobre la teoría de la integración, los cuales constituyen una base teórica necesaria para el estudio del cálculo de Itô.

B.3.1. Espacios L^p

Suponga que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida. Para $p \geq 1$, defina el conjunto

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Defina en $\mathcal{L}^p$ la función $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p}$ por

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Note que $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p}$ no define una norma en $\mathcal{L}^p$, ya que, por ejemplo, en el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$, donde μ denota la medida de Lebesgue, y tomando $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \neq 0$, se tiene que $\|f\|_{\mathbf{L}^p} = 0$. Por lo tanto, $\|f\|_{\mathbf{L}^p} = 0$ no necesariamente implica que $f = 0$. Para evitar este problema, se introduce la siguiente relación de equivalencia

$$f \sim g \text{ si y solo si } f = g \text{ c.s.}$$

En este caso, observe que si $\|f\|_{\mathbf{L}^p} = 0$, entonces $f = 0$ c.s. Esto motiva a considerar el espacio $\mathbf{L}^p(X)$ dado por el conjunto de clases de equivalencia de las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles tales que $\|f\|_{\mathbf{L}^p} < \infty$. Se suele decir que $f \in \mathbf{L}^p(X)$ si y solo si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y $\|f\|_{\mathbf{L}^p} < \infty$. Es decir, $f \in \mathbf{L}^p(X)$ si y solo si $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Sin embargo, es importante aclarar que f es, en realidad, un representante de la clase de equivalencia de f . Para $p = 1$ y $p = 2$, si $f \in \mathbf{L}^p(X)$, se dice que f es integrable y cuadrado integrable, respectivamente.

La función

$$\|\cdot\|_{\mathbf{L}^p} : \mathbf{L}^p(X) \rightarrow [0, \infty]$$

$$f \rightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en $\mathbf{L}^p(X)$, para $p \geq 1$. Así, para todas $f, g \in \mathbf{L}^p(X)$, se tiene que $\|f+g\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p} + \|g\|_{\mathbf{L}^p}$. Esta desigualdad se conoce como la *desigualdad de Minkowski*, para su demostración se utiliza la *desigualdad de Hölder*, la cual establece que

$$\|fg\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p} \|g\|_{\mathbf{L}^q},$$

para cada $f, g \in \mathbf{L}^p(X)$, con $p \geq 1$, y $q \geq 1$ tal que $1/p + 1/q = 1$.

Además, el conjunto de las funciones simples $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$, donde $\mu(A_i) < \infty$ para todo i , es denso en $\mathbf{L}^p(X)$. Esto significa que para cada $f \in \mathbf{L}^p(X)$, existe una sucesión $\{f_n\}_n$ de funciones simples tal que $f_n \rightarrow f$ en $\mathbf{L}^p(X)$. Más aún, para todo $p \geq 1$, $(\mathbf{L}^p, \|\cdot\|_{\mathbf{L}^p})$ es un espacio de Banach, y cuando $p = 2$, $\mathbf{L}^2(X)$ es un espacio de Hilbert con respecto a la norma inducida por su producto interno (ver sección B.2). Los detalles de las pruebas pueden ser consultados en (Folland, 1999), pp. 182-183 y (Kreyszig, 1991), p. 132.

Ejemplo B.14.

1. Considere el espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, donde μ es la medida de contar. Entonces

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{N}) = \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |f(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

En este caso, se usa la notación $\ell^p = \mathbf{L}^p(\mathbb{N})$. Observe que

$$\ell^p = \left\{ \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

2. Suponga que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad. De acuerdo con la definición [A.3](#), una v.a. es una función $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -medible. Para $p \geq 1$, el espacio $\mathbf{L}^p(\Omega)$ es el conjunto de clases de equivalencia de v.a. con p -ésimo momento finito, es decir,

$$\int_{\Omega} |Y|^p dP < \infty.$$

Para $p = 1$, se dice que Y es una v.a. integrable y se escribe $E[|Y|] < \infty$. Recuerde que

$$E[|Y|] = \int_{\Omega} |Y| dP.$$

En este trabajo, los espacios de medida finita son de especial relevancia, en particular, los espacios de probabilidad (ver definición en [A.1](#)). En la sección [A.2](#) del apéndice [A](#) se muestra que la *finitud* proporciona propiedades adicionales en las implicaciones entre los distintos tipos de convergencia. Por ejemplo, si $\mu(X) < \infty$, entonces, si $f_n \rightarrow f$ c.s., se sigue que $f_n \rightarrow f$ en medida, como lo expone la proposición [A.18](#). La siguiente proposición establece que si $\mu(X) < \infty$ y $1 \leq p < q < \infty$, entonces $\mathbf{L}^q(X) \subseteq \mathbf{L}^p(X)$.

Proposición B.15. *Suponga que $1 \leq p < q < \infty$. Si $\mu(X) < \infty$, entonces $\mathbf{L}^q(X) \subseteq \mathbf{L}^p(X)$.*

Demostración. Tome $\alpha = q/p$ y $\beta > 1$ tal que $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Si $f \in \mathbf{L}^q(X)$, por la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &\leq \left(\int_X |f|^{p\alpha} d\mu \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_X 1 d\mu \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \mu(X)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \|f\|_{\mathbf{L}^q}^p \mu(X)^{\frac{1}{\beta}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

Se finaliza esta sección mostrando un resultado que garantiza cuándo se puede intercambiar sumas infinitas con integrales (ver demostración en ([Folland, 1999](#)), p. 55).

Proposición B.16. *Suponga que $\{f_j\}_n$ es una sucesión de funciones en $L^1(X)$ tal que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \int_X |f_j| d\mu < \infty$. Entonces*

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j d\mu.$$

B.3.2. Medidas producto

Suponga que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son espacios de medida. El objetivo de esta sección es definir una σ -álgebra en el espacio producto $X \times Y$, denotada por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ y conocida como la σ -álgebra producto. Además, se construye una medida producto $\mu \otimes \nu$ en esta σ -álgebra.

Un rectángulo medible es cualquier conjunto de la forma $A \times B$, donde $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. La σ -álgebra producto de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $X \times Y$ es la menor σ -álgebra generada por la colección de rectángulos medibles. Es decir,

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

La dupla $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ es llamado el *espacio de medida producto*.

Considere $E \subseteq X \times Y$. Para $x \in X$ y $y \in Y$, se define

$$S_x(E) = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad S_y(E) = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

A los conjuntos $S_x(E)$ y $S_y(E)$ se conocen como la x -sección y y -sección de E , respectivamente. Se puede demostrar que $S_x(E) \in \mathcal{B}$ y $S_y(E) \in \mathcal{A}$, para todo $x \in X$ y $y \in Y$ (ver (Rudin, 1987), p. 161).

Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -medible, para $x \in X$ y $y \in Y$ fijos, se definen las funciones $f_x : Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_y : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_x(y) = f(x, y)$ y $f_y(x) = f(x, y)$. Entonces de acuerdo con el teorema 8.5 del libro (Rudin, 1987), se sigue que f_x es $\mathcal{B}$ -medible y f_y es $\mathcal{A}$ medible.

El siguiente resultado es conocido como el teorema de Fubini-Cavalieri y es utilizado para definir la medida producto $\mu \otimes \nu$ en la σ -álgebra producto. El lector interesado puede consultar su demostración en (Folland, 1999), pp. 66-67.

Proposición B.17. *Suponga que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son espacios de medida σ -finitos. Si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ y*

$$\varphi(x) = \nu(S_x(E)), \quad \psi(y) = \mu(S_y(E)),$$

para cada $x \in X$ y $y \in Y$, entonces φ es $\mathcal{A}$ -medible, ψ es $\mathcal{B}$ -medible, y

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu.$$

La anterior proposición motiva la definición de medida producto presentada a continuación.

Definición B.18. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son espacios de medida σ -finitos, la función

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &\rightarrow [0, \infty] \\ E &\rightarrow (\mu \otimes \nu)(E) := \int_X \nu(S_x(E)) d\mu = \int_Y \mu(S_y(E)) d\nu, \end{aligned}$$

es llamada la medida producto en el espacio medible $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

Note que la función definida en B.18 es, en efecto, una medida. Además, si $E = A \times B$ con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, entonces

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(S_x(A \times B)) d\mu = \int_X \nu(B) 1_A d\mu = \mu(A) \nu(B).$$

Se concluye esta sección exponiendo un teorema importante, el cual establece condiciones bajo las cuales se puede calcular integrales de funciones $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -medibles respecto a la medida producto $\mu \otimes \nu$, utilizando las integrales $\int_X f_y d\mu$ y $\int_Y f_x d\nu$. La demostración puede ser consultada en (Rudin, 1987), pp. 164-166.

Teorema B.19. (Teorema de Fubini). Suponga que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son espacios de medida σ -finitos, y $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es medible en la σ -álgebra producto. Si f es no negativa o $f \in \mathbf{L}^1(X \times Y)$, entonces

1. las funciones

$$x \rightarrow \int_Y f_x(y) d\nu, \quad y \rightarrow \int_X f_y(x) d\mu,$$

son $\mathcal{A}$ -medible y $\mathcal{B}$ -medible, respectivamente.

$$2. \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x(y) d\nu d\mu = \int_Y \int_X f_y(x) d\mu d\nu.$$

B.3.3. Teorema de Radon-Nikodym

Suponga que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{A}$ -medible no negativa. No es difícil demostrar que la función

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{A} &\rightarrow [0, \infty] \\ E &\rightarrow \nu(E) = \int_E f d\mu, \end{aligned}$$

es una medida en el espacio medible $(X, \mathcal{A})$ (ver (Folland, 1999), p. 52). El teorema de Radon-Nikodym establece condiciones bajo las cuales se puede garantizar que, dada una medida ν en el espacio $(X, \mathcal{A})$, existe una función medible f no negativa tal que $\nu(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \mathcal{A}$.

Observe que si $\mu(E) = 0$, entonces $1_E = 0$ c.s., y por tanto, $f 1_E = 0$ c.s., lo que implica que $\nu(E) = \int_X f 1_E d\mu = 0$. Esto muestra que si $\mu(E) = 0$, entonces $\nu(E) = 0$. En este caso, se dice que ν es una medida absolutamente continua respecto a la medida μ . De manera más precisa,

Definición B.20. Sean μ y ν medidas en el espacio medible $(X, \mathcal{A})$. ν es absolutamente continua con respecto a μ si para todo $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = 0$ implica que $\nu(E) = 0$. Esta relación se denota como $\nu \ll \mu$.

Con esta noción de medidas absolutamente continuas se presenta el teorema de Radon-Nikodym. Consulte la demostración en (Roussas, 2014), p. 128.

Teorema B.21. (Teorema de Radon-Nikodym.) Suponga que μ y ν son medidas σ -finitas en el espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y $\nu \ll \mu$. Entonces existe una única función integrable no negativa f tal que

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \text{ para todo } E \in \mathcal{A}.$$

B.4. Resultados auxiliares

En esta sección, se presenta una serie de resultados que han sido utilizados a lo largo de este trabajo.

Proposición B.22. Tome $a > 0$. Entonces

$$\left(\frac{a}{a^2 + 1} \right) e^{-a^2/2} \leq \int_a^\infty e^{-z^2/2} dz \leq \frac{1}{a} e^{-a^2/2}.$$

Demostración. Observe que para todo $a \leq z$ se satisface que $ae^{-z^2/2} \leq ze^{-z^2/2}$. Por tanto,

$$\int_a^\infty e^{-z^2/2} dz \leq \frac{1}{a} \int_a^\infty ze^{-z^2/2} dz = \frac{1}{2a} \int_{a^2}^\infty e^{-z/2} dz = \frac{1}{a} e^{-a^2/2}.$$

Por otro lado, para todo $z \geq a$,

$$e^{-z^2/2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) \leq e^{-z^2/2} \left(1 + \frac{1}{a^2} \right).$$

Se sigue entonces que

$$\int_a^\infty e^{-z^2/2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) dz \leq \int_a^\infty e^{-z^2/2} \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) dz.$$

Sin embargo, note que

$$\frac{d}{da} \left(\frac{1}{a} e^{-a^2/2} \right) = - \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) e^{-a^2/2},$$

y así

$$\frac{1}{a} e^{-a^2/2} = - \int_\infty^a \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) e^{-z^2/2} dz = \int_a^\infty e^{-z^2/2} \left(1 + \frac{1}{z^2} \right) dz.$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{a} e^{-a^2/2} \leq \int_a^\infty e^{-z^2/2} \left(1 + \frac{1}{a^2} \right) dz,$$

lo que implica que

$$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{a^2} \right)^{-1} e^{-a^2/2} = \left(\frac{a}{a^2 + 1} \right) e^{-a^2/2} \leq \int_a^\infty e^{-z^2/2} dz.$$

□

Proposición B.23. *Para todo $a > 0$, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$e^{-ax^2/2} \leq C e^{-ax}, \quad x \geq 0.$$

Demostración. Para todo $a > 0$ se tiene que

$$0 < \frac{a}{2}(x-1)^2 = a \frac{x^2}{2} - a \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

Por tanto, $ax^2/2 > a(x-1/2)$. Dado que la función $x \rightarrow e^{-x}$ es decreciente, se sigue que

$$e^{-ax^2/2} \leq e^{-a(x-1/2)} = e^{a/2} e^{-ax}.$$

□

La demostración de la siguiente proposición puede ser consultada en (Grady, 2009), pp. 14-15.

Proposición B.24. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y f' es acotada en (a, b) , entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

La proposición B.25 es consecuencia de la representación binaria de los números reales (ver teorema 12.1 en (Rosen, 2011), p. 456)

Proposición B.25. *Para todo $0 \leq t \leq 1$, existen enteros i, j, p_r, q_s, n tales que*

$$t = i2^{-n} - 2^{-p_1} - 2^{-p_2} - \dots,$$

$$t = j2^{-n} + 2^{-q_1} + 2^{-q_2} + \dots,$$

con $n < p_1 < p_2 < \dots, n < q_1 < q_2 < \dots$.

Referencias

- Athreya, K. B., y Lahiri, S. N. (2006). *Measure theory and probability theory* (Vol. 19). Springer.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation. En *Annales scientifiques de l'école normale supérieure* (Vol. 17, pp. 21–86).
- Bain, L. J., y Engelhardt, M. (s.f.). *Introduction to probability and mathematical statistics* (Vol. 4).
- Baldi, P. (2017). *Stochastic calculus*. Springer.
- Basharin, G. P., Langville, A. N., y Naumov, V. A. (2004). The life and work of aa markov. *Linear algebra and its applications*, 386, 3–26.
- Bauer, H. (2011). *Measure and integration theory* (Vol. 26). Walter de Gruyter.
- Bian, X., Kim, C., y Karniadakis, G. E. (2016). 111 years of brownian motion. *Soft Matter*, 12(30), 6331–6346.
- Black, F., y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3), 637–654.
- Brown, R. (2022). *The miscellaneous botanical works of robert brown: Vol. i*. BoD—Books on Demand.
- Carothers, N. L. (2000). *Real analysis*. Cambridge University Press.
- Chung, K. L. (2001). *A course in probability theory*. Academic press.
- Chung, K. L., y Williams, R. J. (1990). *Introduction to stochastic integration* (Vol. 2). Springer.
- Debnath, L., y Basu, K. (2015). A short history of probability theory and its applications. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(1), 13–39.
- Doob, J. L. (1953). *Stochastic processes*. Estados Unidos : Jhon Wiley Sons.
- Duncan, T. (2007). *Brownian motion: A study of its theory and applications* (Tesis Doctoral no publicada). Boston College. College of Arts and Sciences.
- Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, 4.
- Ermogenous, A. (2006). Brownian motion and its applications in the stock market.
- Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications* (Vol. 40). John Wiley & Sons.
- Fristedt, B. E., y Gray, L. F. (2013). *A modern approach to probability theory*. Springer

- Science & Business Media.
- Grady, N. (2009). Functions of bounded variation. *Dostopno prek: <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/grady.pdf> (Dostopano: 7.2. 2017)*.
- Grigoriu, M. (2013). *Stochastic calculus: applications in science and engineering*. Springer Science & Business Media.
- Itô, K. (1944). 109. stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8), 519–524.
- Jarrow, R., y Protter, P. (2004). A short history of stochastic integration and mathematical finance: the early years, 1880-1970. *Lecture Notes-Monograph Series*, 75–91.
- Karatzas, I., y Shreve, S. (2014). *Brownian motion and stochastic calculus* (Vol. 113). springer.
- Klebaner, F. C. (2012). *Introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific Publishing Company.
- Kolmogoroff, A. (1933). Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung.
- Kolmogorov, A. (s.f.). Probability theory and mathematical statistics.
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons.
- Langevin, P., y cols. (1908). Sur la théorie du mouvement brownien. *CR Acad. Sci. Paris*, 146(530-533), 530.
- Markov, A. (1971). Extension of the limit theorems of probability theory to a sum of variables connected in a chain. *Dynam Probabilist Syst*, 1, 552.
- Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.
- Ornstein, L. S. (1930). On the theory of the brownian motion. *Physical review*, 36, 823–841.
- Privault, N. (2021). *Stochastic interest rate modeling with fixed income derivative pricing*. World Scientific.
- Revuz, D., y Yor, M. (2013). *Continuous martingales and brownian motion* (Vol. 293). Springer Science & Business Media.
- Ribet, K. (2006). Introduction to stochastic integration.
- Rosen, K. H. (2011). *Elementary number theory*. Pearson Education London.
- Roussas, G. G. (2014). *An introduction to measure-theoretic probability*. Academic Press.
- Rudin, W. (1987). Real and complex analysis (mcgraw-hill international editions: Mathematics series). *cit. on*, 71.
- Rudin, W., y cols. (1964). *Principles of mathematical analysis* (Vol. 3). McGraw-hill New

York.

- Rynne, B., y Youngson, M. A. (2007). *Linear functional analysis*. Springer Science & Business Media.
- Steele, J. M. (2001). *Stochastic calculus and financial applications* (Vol. 1). Springer.
- Stieltjes, T.-J. (1894). Recherches sur les fractions continues. En *Annales de la faculté des sciences de toulouse: Mathématiques* (Vol. 8, pp. J1–J122).
- Thiele, T. N. (1880). *Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés*. CA Reitzel.
- Wackerly, D., Mendenhall, W., y Scheaffer, R. L. (2014). *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning.
- Yasin, M. W., Ahmed, N., Iqbal, M. S., Raza, A., Rafiq, M., Eldin, E. M. T., y Khan, I. (2023). Spatio-temporal numerical modeling of stochastic predator-prey model. *Scientific Reports*, 13(1), 1990.