



Modelación de la dependencia entre el Indicador Bancario de Referencia (IBR) y la inflación colombiana

Isaac Sánchez Cuéllar

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística
Cali, Valle del Cauca
2024

Modelación de la dependencia entre el Indicador Bancario de Referencia (IBR) y la inflación colombiana

Por

Isaac Sánchez Cuellar

Trabajo de grado para optar por el título de:

Estadístico

Director:

Ph.D José Rafael Tovar Cuevas

Codirectora:

MSc Inés María Ulloa Villegas

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística
Cali, Valle del Cauca
2024

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento al Profesor José Rafael Tovar Cuevas por su orientación, paciencia y apoyo continuo a lo largo de todo el proceso de este trabajo. Sus valiosos conocimientos y consejos fueron fundamentales para la realización de esta investigación.

También deseo reconocer el apoyo brindado por mis amigos y familiares. Su constante respaldo fue fundamental para poder culminar este trabajo de grado.

Finalmente, agradezco sinceramente a todas las instituciones y personas que, de una forma u otra, contribuyeron al desarrollo de este proyecto.

Resumen

Este estudio investiga la relación entre la inflación y el Indicador Bancario de Referencia (IBR) en Colombia utilizando datos del Banco de la República. Se implementa una metodología que combina análisis exploratorio, modelado de la media condicional mediante modelos ARMA y AR, y ajuste de modelos GARCH para capturar la heterocedasticidad. Además, se emplean cópulas para evaluar la dependencia entre las variables de interés. Los resultados resaltan la importancia de tratar la estacionariedad y modelar la volatilidad para una mejor comprensión de la dinámica entre la inflación y el IBR. Se encontró una relación significativa entre ambas variables, con la cópula normal presentando el mejor ajuste, y se estima que la dependencia entre el IBR y la inflación es del 0.17, lo que sugiere la influencia del canal de la tasa de interés en la estabilidad de precios en Colombia.

Palabras clave: Inflación, Indicador Bancario de Referencia, Modelado Financiero, GARCH, ARMA, Copulas, Política Monetaria.

Abstract

This study investigates the relationship between inflation and the interbank reference rate (IBR) in a financial context using data from the Banco de la República de Colombia. The methodology combines exploratory data analysis, conditional mean modeling with ARMA and AR models, and GARCH models to capture heteroscedasticity. Additionally, copulas are employed to assess the dependency between the variables of interest. The results highlight the importance of addressing stationarity of time series and modeling volatility to better understand the dynamics between inflation and the IBR. A significant relationship between both variables is found, with the normal copula being the best fit to the data. Additionally, the dependence between the IBR and inflation is estimated to be 0.17, suggesting the influence of the interest rate channel on price stability of Colombia. These findings support the relevance of monetary policies in inflation management.

Keywords: Inflation, Interbank Reference Rate, Financial Modeling, GARCH, ARMA, Copulas, Monetary Policy.

Contenido

Resumen	IV
1 Introducción	1
1.1 Planteamiento del problema	2
1.2 Pregunta de investigación	3
1.3 Objetivo general	4
1.3.1 Objetivos específicos	4
1.4 Justificación	4
1.5 Antecedentes	5
2 Marco teórico	7
2.1 Marco teórico contextual	7
2.1.1 Política monetaria	7
2.1.2 Canales de transmisión de política monetaria	7
2.1.3 Inflación	8
2.1.4 Tasa de interés de referencia	8
2.1.5 Indicador Bancario de Referencia	8
2.2 Marco teórico estadístico	9
2.2.1 Retornos y Log-retornos	9
2.2.2 ACF y PACF	9
2.2.3 La prueba aumentada de Dickey-Fuller	10
2.2.4 Modelo Autoregresivo	11
2.2.5 Modelo Autorregresivo de Media Móvil (ARMA)	12
2.2.6 La prueba de Ljung-Box	12
2.2.7 La prueba de Jarque-Bera	13
2.2.8 Prueba de Multiplicadores de Lagrange para Efectos ARCH	13
2.2.9 Modelo ARCH generalizado (GARCH)	13
2.2.10 Distribución de Error Generalizado (GED)	14
2.2.11 Criterios de información	14
2.2.12 Función Cópula	15
2.2.13 Estimador de Funciones de Inferencia para Marginales	20
3 Metodología	21
3.1 Datos	21

3.2	Modelado de la media condicional	22
3.2.1	Comprobación de la estacionariedad de la serie original	22
3.2.2	Calculo de los log-retornos	22
3.2.3	Confirmación de estacionariedad con el test aumentado de Dickey-Fuller	22
3.2.4	Ajuste de modelos para la media condicional	23
3.2.5	Estimación de la significancia de los parámetros	24
3.2.6	Diagnósticos del modelo para la media condicional	24
3.3	Modelado de la varianza condicional	25
3.3.1	Diagnósticos de efectos ARCH	25
3.3.2	Ajuste de 15 modelos GARCH	25
3.3.3	Elección del modelo para la varianza condicional	26
3.3.4	Diagnósticos del modelo GARCH	26
3.4	Función copula	26
3.4.1	Ajuste de función cópula asumiendo marginales conocidas	26
3.4.2	Ajuste de función cópula asumiendo marginales desconocidas	28
4	Resultados	29
4.1	Descripción preliminar del archivo de datos	29
4.2	Modelos para la media condicional	31
4.2.1	Modelo de media condicional para el IBR	32
4.2.2	Modelo de media condicional para la inflación	36
4.3	Modelo para la varianza condicional	41
4.3.1	Modelo de varianza condicional para el IBR	41
4.3.2	Modelo de varianza condicional para la inflación	43
4.4	Ajuste de función copula	45
4.4.1	Ajuste asumiendo marginales conocidas	45
4.4.2	Ajuste asumiendo marginales desconocidas	49
5	Conclusiones	52
	Bibliografía	54

Lista de Figuras

4-1	Serie de tiempo para el IBR desde enero de 2008 hasta agosto de 2023. . . .	30
4-2	Serie de tiempo para la inflación desde enero de 2008 hasta agosto de 2023. .	30
4-3	Scatterplot de IBR vs Inflación	31
4-4	ACF y PACF de la serie de IBR original.	32
4-5	Log-retornos del IBR.	33
4-6	ACF y PACF de los log-retornos del IBR.	33
4-7	Diagnóstico de los residuos del modelo ARMA(1,1).	35
4-8	Gráfico Cuantil-Cuantil de los residuos del modelo ARMA(1,1) para el IBR.	36
4-9	ACF y PACF de la serie de la inflación original.	37
4-10	Log-retornos de la inflación.	37
4-11	ACF y PACF de los log-retornos de la inflación.	38
4-12	Gráfico Cuantil-Cuantil de los residuos del modelo AR(1) para la inflación. .	39
4-13	Diagnóstico de los residuos del modelo AR(1) para la inflación.	40
4-14	ACF y PACF de los residuos del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para el IBR.	43
4-15	ACF y PACF de los residuos del modelo AR(1)-GARCH(1,1) para la inflación.	45
4-16	Ajuste de distribución de residuos de modelo ARMA-GARCH para el IBR. .	46
4-17	Ajuste de distribución de residuos de modelo AR-GARCH para la inflación. .	46
4-18	Pseudo-observaciones paramétricas(izquierda) y puntajes normales (derecha) del conjunto de datos de IBR e inflación.	47
4-19	Gráfico de contornos de la cópula normal ajustada superpuesto con los contornos de la cópula empírica.	48
4-20	Pseudo-observaciones (izquierda) y puntajes normales (derecha) del conjunto de datos de IBR e inflación.	49
4-21	Gráfico de contornos de la cópula normal ajustada basada en pseudo observaciones superpuesto con los contornos de la cópula empírica.	50

Lista de Tablas

4-1	Estadísticas descriptivas.	29
4-2	Coeficientes y estadísticas del modelo ARMA(1,1) ajustado para los log-retornos del IBR.	34
4-3	Coeficientes y estadísticas del modelo AR(1) ajustado para los log-retornos de la inflación.	39
4-4	Estimación de los criterios de información AIC y BIC para 15 modelos GARCH ajustados a los log-retornos del IBR.	41
4-5	Estimación del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para los log-retornos del IBR	42
4-6	Estimación de los criterios de información AIC y BIC para 15 modelos GARCH ajustados a los log-retornos de la inflación.	44
4-7	Estimación del modelo AR(1)-GARCH(1,1) para los log-retornos de la inflación.	44
4-8	Estimación de parámetros de distribución de residuos en modelos GARCH. .	47
4-9	Estimaciones del parámetro θ para 7 siete funciones cópula usando las pseudo observaciones.	48
4-10	Resultados del Bootstrap para los Parámetros θ y τ	49
4-11	Estimaciones del parámetro θ para 7 cópulas	50
4-12	Resultados del Bootstrap para los Parámetros θ y τ con Marginales Desconocidos	51

1 Introducción

En el vasto campo de la economía, la comprensión y análisis de la economía a gran escala se torna imperativo. En este contexto, la macroeconomía desempeña un papel fundamental, ya que influye en los ingresos que se perciben, las oportunidades de empleo y la fijación de precios. Además, aborda aspectos esenciales como el crecimiento económico, la inflación, el desempleo y las políticas fiscales y monetarias, que son cruciales para entender la dinámica de la economía global (Rivera, 2020).

El estudio de la macroeconomía permite a los distintos agentes económicos identificar las principales vulnerabilidades y fortalezas de una economía, aspectos cruciales al tomar decisiones sobre gastos e inversiones. Específicamente, la inflación, definida como el aumento generalizado y sostenido de los precios de bienes y servicios, constituye una preocupación tanto a nivel nacional como internacional. Este fenómeno multifactorial no solo eleva los precios, sino que también tiene un impacto significativo en la distribución de la riqueza, la calidad de vida y el funcionamiento de las naciones (Martínez, 1991).

La problemática de la inflación en Colombia se aborda a través de la política monetaria, la cual, mediante diversas acciones como la variación de la tasa de interés de política monetaria, genera efectos en distintos canales de transmisión. Estos canales son los mecanismos a través de los cuales se transmite el impacto de los cambios en las tasas de interés de política monetaria (Ospina, 2004). Uno de estos mecanismos es el canal de la tasa de interés, que incluye la modificación de las tasas de interés de los distintos bancos y, por consiguiente, la modificación del indicador bancario de referencia (IBR). En este contexto, dado que las tasas de interés regulan las decisiones de gasto e inversión de diversos agentes económicos, este trabajo se centra en modelar la dependencia entre el IBR y la inflación.

El análisis realizado en este estudio demuestra que la dependencia entre el IBR y la inflación en Colombia, estimada en torno al 0.17 mediante una cópula normal, indica una relación débil entre ambas variables. Aunque esta dependencia no es extremadamente fuerte, el resultado sugiere que un incremento en una de las variables tiende a estar asociado con un incremento similar en la otra. La selección de la cópula normal como la mejor ajustada proporciona evidencia de que la relación entre el IBR y la inflación es aproximadamente lineal, con una dependencia simétrica en las colas superiores e inferiores.

Este hallazgo tiene importantes implicaciones tanto para la política monetaria como para la metodología aplicada. Por un lado, el hecho de haber utilizado cópulas aporta una mayor flexibilidad en el análisis de la dependencia, lo que refuerza la necesidad de considerar herramientas econométricas más avanzadas para capturar relaciones complejas entre variables económicas. Esto implica que las autoridades monetarias podrían beneficiarse de la incorporación de estos modelos en la evaluación del impacto del IBR sobre la inflación, ya que permiten un análisis más detallado de cómo varían las dependencias bajo diferentes condiciones económicas.

El presente trabajo se estructura de la siguiente manera: en el primer capítulo se abordan el planteamiento del problema, su justificación, los objetivos de la investigación y los antecedentes relevantes. El segundo capítulo comprende el marco teórico, dividido en dos partes: un marco conceptual y otro estadístico. El tercer capítulo detalla la metodología propuesta para llevar a cabo el modelado de la dependencia entre las variables IBR e inflación. En el cuarto capítulo se exponen los resultados, que incluyen el ajuste de distintos modelos para las series de tiempo de las variables y el ajuste de funciones cópulas. Por último, el quinto capítulo presenta las conclusiones y recomendaciones derivadas de este trabajo.

1.1. Planteamiento del problema

La política monetaria en Colombia busca cumplir el objetivo de mantener una tasa de inflación baja y estable. De esta forma, la política monetaria cumple con el mandato de la Constitución de velar por mantener el poder adquisitivo del peso y contribuye a mejorar el bienestar de la población (Hernández-Gamarra and Tolosa-Buitrago, 2001). Colombia, en el año 1991, mediante la Constitución Política, establece que el Banco de la República es una institución independiente cuya función es mantener la estabilidad de precios y garantizar el crecimiento de la economía; además, para lograr sus objetivos económicos, el Banco de la República sigue un esquema de inflación objetivo el cual se estableció en 1999 y se implementó en su totalidad a partir de 2001 (León, 2015). Bajo este esquema, las acciones de política monetaria se enfocan en lograr que la inflación futura se mantenga dentro de una meta establecida.

Cuando el banco central ajusta la tasa de intervención de la política monetaria, se desencadenan una serie de cambios en las tasas de interés a diferentes plazos, en la tasa de cambio y en las expectativas de inflación. Estos cambios se transmiten a través de lo que se conoce como los canales de transmisión de la política monetaria, que son los mecanismos mediante los cuales las decisiones de política monetaria impactan en diversas variables macroeconómicas, generando una cadena de efectos en la economía. En particular, el canal de la tasa de interés produce variaciones en las tasas de interés a corto plazo del mercado interbancario, lo que a su vez afecta al Indicador Bancario de Referencia (IBR),

que es una medida que refleja el precio al que los bancos ofrecen o captan recursos en el mercado monetario. El IBR, por tanto, es una medida clave del comportamiento de la tasa de intervención de la política monetaria, y el Banco de la República actúa para que el IBR se sitúe cerca de la Tasa de Política Monetaria (TPM). Por ejemplo, Vargas-Herrera et al. (2024) explica cómo, en el primer trimestre de 2023, las diferencias negativas entre el IBR y la TPM fueron corregidas mediante la modificación de plazos y cupos en las operaciones repo de expansión. De igual manera, Toro et al. (2023) destaca que el IBR es una buena medida de la tasa de interés interna en Colombia.

De acuerdo con Zamudio (2022), la inflación y las tasas de interés en Colombia se habían mantenido bajas y estables durante años. Sin embargo, eventos como la pandemia de COVID-19 y la guerra en Ucrania provocaron alteraciones significativas en estas variables, impactando la estabilidad económica del país. Estas crisis forzaron al Banco de la República a realizar ajustes en la política monetaria para enfrentar las nuevas circunstancias, lo que incrementó la volatilidad de estas variables.

Durante la pandemia, en el segundo trimestre de 2020, el Banco de la República redujo la tasa de referencia en respuesta a la contracción significativa de la demanda agregada, impulsada por la caída del consumo y la pérdida de millones de empleos, además de factores externos como el desplome de los precios del petróleo y un entorno de muy baja inflación (Arce Buitrago, 2023). Según Zamudio (2022), los problemas inflacionarios se intensificaron cuando las economías comenzaron a reactivarse tras mitigar los efectos de la pandemia. Además, el conflicto entre Rusia y Ucrania exacerbó esta situación, disparando los precios debido al colapso de las exportaciones de granos desde Ucrania, la escasez y el encarecimiento de los fertilizantes, así como el incremento del costo de la energía. Este conflicto también impactó los precios del petróleo tanto a nivel local como internacional, provocando una tendencia al alza en los precios (Gudynas, 2023). Como resultado, los bancos centrales se vieron obligados a aumentar las tasas de política monetaria, mientras que los gobiernos implementaron subvenciones para mitigar los efectos del aumento en los precios de los alimentos y la energía (Cárdenas and Hernández, 2022).

En este contexto, la problemática central de este proyecto se centra en el modelado de la dependencia entre el Indicador Bancario de Referencia (IBR) y la inflación en Colombia, teniendo en cuenta los cambios en la volatilidad provocados por crisis mundiales.

1.2. Pregunta de investigación

¿Cuál es el grado de dependencia que existe entre el indicador bancario de referencia y la inflación de Colombia?

1.3. Objetivo general

Determinar la relación entre el indicador bancario de referencia y la inflación Colombiana.

1.3.1. Objetivos específicos

- Describir el comportamiento del Indicador Bancario de Referencia (IBR) y la inflación marginalmente.
- Modelar la dependencia entre ambas variables usando función cópula asumiendo las distribuciones marginales conocidas.
- Modelar la dependencia entre ambas variables usando función cópula asumiendo las distribuciones marginales desconocidas.

1.4. Justificación

La inflación es uno de los fenómenos macroeconómicos más críticos que enfrentan los países, ya que impacta directamente en la economía al deteriorar el poder adquisitivo y generar incertidumbre en los mercados financieros. En el caso de Colombia, como en muchas otras naciones, comprender y controlar la inflación es crucial para mantener la estabilidad económica y social (Ochoa and Martínez, 2005). En este contexto, la política monetaria, bajo la dirección del Banco de la República, desempeña un papel fundamental. El Banco utiliza herramientas como la modificación de la tasa de interés para influir en las dinámicas inflacionarias y garantizar un entorno económico más estable.

Existe un amplio cuerpo de literatura que examina los canales de transmisión de la política monetaria y su relación con distintas variables macroeconómicas. Por ejemplo, Garizado and Londoño (2004), utilizando metodología econométrica de vectores autorregresivos (VAR), analizaron cómo los canales del dinero y del crédito impactan la economía colombiana. Por su parte, Otero (2015), a través de la metodología SVAR, estudió los efectos de los canales de transmisión de la tasa de cambio, la hoja de balance, la tasa de interés y los préstamos bancarios en la actividad económica de cinco países que siguen el esquema de inflación objetivo. Asimismo, Medina (2018) exploró el impacto de variables como la tasa de interés de intervención, el IBR y la DTF sobre la inflación utilizando métodos de cointegración.

La mayoría de estudios recurren a métodos de cointegración o modelos var que según Perman (1991), los métodos de cointegración son herramientas clave para estimar relaciones económicas a largo plazo entre variables no estacionarias. Por otro lado, los modelos VAR son ampliamente utilizados debido a su versatilidad en el análisis de series temporales multivariantes, extendiendo el modelo autorregresivo univariante a un contexto multivariante

más dinámico (Zivot and Wang, 2006).

La relevancia de este estudio radica en la necesidad de comprender la relación entre el Indicador Bancario de Referencia (IBR) y la inflación, dos elementos clave en la transmisión de la política monetaria en Colombia. Este análisis no solo proporciona evidencia empírica crucial para los responsables de la política monetaria y el sector financiero, demostrando si las políticas implementadas están influyendo en las dinámicas inflacionarias del país, sino que también ofrece herramientas precisas para la toma de decisiones informadas. A nivel académico, este estudio tiene el potencial de enriquecer significativamente el cuerpo de conocimientos existente al emplear un enfoque innovador en el contexto colombiano: el modelado de dependencias entre el IBR y la inflación mediante cópulas. Este método permite capturar dependencias no lineales entre variables, una tarea que los modelos VAR o SVAR no manejan con la misma facilidad. Según Sandoval-Paucar (2020), al incluir episodios de crisis financiera, se destaca la integración de un enfoque de cópulas. Este enfoque, aún poco explorado en Colombia, cobra mayor importancia al considerar periodos de crisis económicas globales, como el COVID-19 y la guerra en Ucrania, permitiendo una comprensión más robusta de la relación entre estas variables en contextos de alta incertidumbre.

1.5. Antecedentes

El estudio de Otero (2015) investigó los efectos de la política monetaria en la actividad económica en países de América Latina que implementan un esquema de inflación objetivo. Utilizando la metodología econométrica SVAR, se analizó cómo los cambios en la política monetaria impactan la actividad económica en cinco países latinoamericanos. Se concluyó que un aumento inesperado en la tasa de interés de política monetaria reduce la actividad económica, aunque la magnitud y el momento del impacto varían entre los países. Además, el análisis con VAR mostró que el canal de la tasa de interés es el más relevante en todos los países analizados.

Estos hallazgos son consistentes con los resultados de Ramírez and Rodríguez (2013), quienes, en el marco de su proyecto de investigación titulado "Un Análisis Estructural de Política Monetaria en Colombia" identificaron y analizaron las relaciones contemporáneas entre la tasa de intervención del Banco de la República, el crecimiento económico y la inflación utilizando modelos VAR. Encontraron que la relación entre la tasa de intervención y el crecimiento económico es positiva, pero no significativa, mientras que la relación entre la tasa de intervención y la inflación es positiva y significativa.

Además, se examinaron los efectos dinámicos que genera la tasa de intervención en la inflación y el crecimiento económico. Se concluyó que un choque positivo en la tasa de intervención, en diferencias, genera efectos cíclicos y significativos sobre la inflación entre el

segundo y tercer trimestre, así como entre el sexto y octavo trimestre después de haberse producido el choque monetario. Sin embargo, si la tasa de intervención se encuentra en niveles bajos, los efectos dinámicos no son significativos. Estos estudios evidencian la relación entre las variables macroeconómicas y las decisiones de política monetaria ejercidas por el Banco de la República.

Por otro lado, el estudio de Kwofie et al. (2020), titulado "Modelling the Dependency between Inflation and Exchange Rate Using Copula", adoptó un enfoque diferente al utilizar cópulas para analizar la relación entre la inflación y la tasa de cambio en Ghana.

Para lograr su objetivo, en primer lugar, estimaron el mejor modelo GARCH para ambas variables. Luego, identificaron las distribuciones marginales de estas variables y las utilizaron para transformar los residuos estandarizados del modelo GARCH, con el fin de estimar las cópulas. Como resultado, encontraron que la cópula que mejor se ajustó fue una distribución t de Student, y que la dependencia aproximada entre las variables fue del 7 %.

Finalmente, Grégoire et al. (2008) subrayaron la importancia de las cópulas en el modelado de la dependencia de series temporales en su estudio "Using Copulas to Model Price Dependence in Energy Markets". En este estudio, se modelaron las variables marginales del precio del petróleo crudo y del gas natural a través de una distribución F y un modelo GARCH(1,6), respectivamente. Mediante la estimación de diversas cópulas, encontraron que la que mejor se ajustaba era una cópula t , y determinaron que el parámetro de dependencia era de 0.52.

2 Marco teórico

En esta sección, se abordan los conceptos y definiciones relevantes, tanto en términos contextuales como estadísticos. Estos elementos proporcionan el fundamento teórico y las herramientas necesarias para abordar el problema de investigación planteado. Los temas se presentan en un orden que sigue la lógica del desarrollo del trabajo de grado.

2.1. Marco teórico contextual

2.1.1. Política monetaria

La política monetaria se define como el conjunto de acciones y decisiones tomadas por las autoridades monetarias de un país, como el banco central, con el propósito de regular la cantidad de dinero en circulación y las condiciones financieras en la economía para alcanzar objetivos macroeconómicos específicos. Estos objetivos suelen incluir el control de la inflación, el fomento del crecimiento económico sostenible y el mantenimiento de la estabilidad financiera. La política monetaria se implementa a través de herramientas como la manipulación de las tasas de interés, la compra y venta de activos financieros en el mercado abierto y la regulación de los requisitos de reserva de los bancos comerciales. En el caso de Colombia, el Banco de la República es la institución encargada de diseñar y ejecutar la política monetaria del país, con el fin de lograr una economía estable y próspera (Becerra and Melo Velandia, 2009).

2.1.2. Canales de transmisión de política monetaria

Los canales de transmisión de la política monetaria son esenciales para comprender cómo las medidas adoptadas por el banco central afectan la economía real. Según Ospina (2004), estos canales representan los mecanismos a través de los cuales las acciones de política monetaria se transmiten a variables macroeconómicas como la actividad económica y la inflación. Uno de los canales más importantes es el canal de la tasa de interés, que se basa en la relación entre las tasas de interés y el comportamiento del gasto e inversión de los agentes económicos. Cuando el banco central implementa una política monetaria expansiva y reduce las tasas de interés, esto tiende a estimular el consumo y la inversión al reducir los costos de financiamiento para los prestatarios.

2.1.3. Inflación

La inflación, como señala Oner (2009), se define como la tasa de aumento de los precios en un cierto período de tiempo. Esta medida abarca un amplio espectro, reflejando el aumento generalizado del costo de vida en un país o incluso puede calcularse de manera más específica para ciertos productos o servicios. El Índice de Precios al Consumidor (IPC) es una de las herramientas utilizadas para medir el costo de vida del consumidor promedio, reflejando la evolución de una canasta de artículos de consumo habitual. Por consiguiente, la inflación, expresada como la variación porcentual del IPC en un período dado, proporciona una medida clave para comprender los cambios en el poder adquisitivo de una moneda y su impacto en la economía. La inflación entonces se deriva de la siguiente ecuación:

$$\text{Inflación} = \frac{\text{IPC}_{\text{actual}} - \text{IPC}_{\text{base}}}{\text{IPC}_{\text{base}}} \times 100 \% \quad (2-1)$$

2.1.4. Tasa de interés de referencia

La tasa de intervención de política monetaria, también conocida como tasa de interés de referencia, es un instrumento fundamental del Banco de la República (BanRep) para controlar la cantidad de dinero en circulación en la economía. Esta tasa representa el interés más bajo que el BanRep cobra a los bancos por los préstamos que estos obtienen a través de las operaciones financieras. Es determinada por la Junta Directiva del BanRep y tiene un impacto significativo en diversos aspectos económicos. De acuerdo con Betancourt et al. (2008) este mecanismo es esencial para mantener la estabilidad económica y controlar la inflación, ya que influye en las decisiones de préstamo y las condiciones financieras en el mercado.

2.1.5. Indicador Bancario de Referencia

Acorde con el Vidaurre (2016) El Indicador Bancario de Referencia o Índice de la Tasa Representativa del Mercado (IBR) es una tasa de interés de referencia de corto plazo, denominada en pesos colombianos. Este índice refleja el precio al cual los bancos están dispuestos a ofrecer o a captar recursos en el mercado monetario. Es decir, los bancos y otras instituciones financieras pueden utilizar esta tasa como base para fijar los intereses en préstamos, depósitos y otros productos financieros.

El IBR es una medida importante para los participantes del mercado, ya que les brinda una indicación del nivel general de las tasas de interés en el mercado monetario. Hay que mencionar, además que cambios en el IBR pueden influir en las decisiones de préstamo, inversión y gestión de riesgos por parte de las entidades financieras. En este trabajo de grado se trabaja con el IBR efectivo anual el cual se origina de la siguiente ecuación:

$$\text{IBR}_{\text{EA}} = \left\{ \left[1 + \left(\frac{\text{IBR}_{\text{nominal}}}{100} \right) \times \frac{n}{360} \right]^{\frac{365}{n}} - 1 \right\} \times 100 \quad (2-2)$$

2.2. Marco teórico estadístico

2.2.1. Retornos y Log-retornos

El retorno, como lo define Tsay (2005), representa el rendimiento o ganancia obtenida de una inversión en un activo financiero durante un período específico de tiempo. Es una medida importante en estudios financieros debido a sus propiedades estadísticas favorables y su capacidad para proporcionar un resumen completo y libre de escala de las oportunidades de inversión para los inversionistas promedio. En este contexto, los retornos, denotados como R_t , se utilizan para medir el cambio en el valor de las variables económicas analizadas en este trabajo. Además, son preferidos sobre los valores de las variables originales debido a su manejo más sencillo y a las propiedades estadísticas más atractivas que poseen, como la estacionariedad y la ergodicidad (Campbell et al., 1998).

Por otro lado, el log-retorno, representado como r_t , es el logaritmo natural del retorno bruto simple en un período determinado, calculado a partir del valor de la variable en ese período t dividido sobre la variable en el periodo $t - 1$. Esta medida ofrece ventajas significativas en el análisis financiero. En primer lugar, facilita la agregación de rendimientos a lo largo de múltiples períodos, simplemente sumando los log-retornos individuales. Además, los log-retornos poseen propiedades estadísticas más favorables en comparación con los retornos simples, lo que los hace más adecuados para análisis y modelización.

Retorno:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \times 100 \% \quad (2-3)$$

Log-retorno:

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (2-4)$$

2.2.2. ACF y PACF

La Función de Autocorrelación (ACF) y la Función de Autocorrelación Parcial (PACF) son herramientas muy útiles en el análisis de series temporales en estadística. La ACF y PACF es definida por Wei (2013) para un proceso estacionario Z_t .

La ACF es una medida estadística que representa la covarianza entre Z_t y Z_{t+k} . Es decir, la ACF indica cómo se relaciona cada observación de una serie temporal con las observaciones anteriores a medida que aumenta el rezago temporal k .

La ACF se calcula mediante la correlación de Pearson entre la serie temporal original y sus versiones rezagadas para diferentes rezagos temporales. Si la ACF muestra valores significativos en ciertos rezagos, indica que hay correlación entre las observaciones separadas por esos rezagos. La ACF es una herramienta fundamental en el análisis de series temporales para identificar patrones de dependencia temporal en los datos.

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(Z_t) \cdot \text{Var}(Z_{t+k})}} \quad (2-5)$$

Donde a ρ_k se le llama el coeficiente de autocorrelación de orden k , γ_k es la covarianza entre Z_t y Z_{t+k} donde $\text{Var}(Z_t) = \text{Var}(Z_{t+k}) = \gamma_0$.

Por otro lado, la Función de Autocorrelación Parcial (PACF) se define como la correlación entre Z_t y Z_{t+k} , una vez eliminada la influencia lineal de las observaciones intermedias. En otras palabras, la PACF mide la relación directa entre una observación y otra separada por un cierto número de periodos, controlando o eliminando el efecto de las observaciones intermedias.

$$P_k = \frac{\text{Cov}((Z_t - \hat{Z}_t), (Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}))}{\sqrt{\text{Var}(Z_t - \hat{Z}_t) \cdot \text{Var}(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})}} \quad (2-6)$$

Donde $\hat{Z}_{t+k} = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t+k-1} + \alpha_2 Z_{t+k-2} + \alpha_3 Z_{t+k-3} + \dots + \alpha_{k-1} Z_{t+1}$ es el término que contiene la influencia lineal. Es importante destacar que los gráficos de ρ_k y P_k contra el tiempo son llamados correlograma y correlograma parcial, respectivamente. Para mas detalle sobre los cálculos y propiedades de la ACF y PACF ver Wei (2013).

2.2.3. La prueba aumentada de Dickey-Fuller

Partiendo inicialmente de la prueba de Dickey-Fuller, desarrollada por Dickey and Fuller (1979), la cual sirve para detectar la presencia de una raíz unitaria en el polinomio autorregresivo del proceso, bajo el supuesto de normalidad. Se tiene que la prueba plantea tres modelos para probar la hipótesis $H_0 : \gamma = 0$, lo que implica que el no rechazo de la hipótesis conlleva a decir que la serie tiene una raíz unitaria y, por tanto, la serie es no estacionaria.

$$\Delta z_t = \gamma z_{t-1} + a_t$$

$$\Delta z_t = \beta_0 + \gamma z_{t-1} + a_t$$

$$\Delta z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma z_{t-1} + a_t$$

El estadístico de prueba para este test es $\tau = \hat{\gamma}/se(\hat{\gamma})$. La distribución de τ bajo H_0 no es la t de Student tradicional, sino que pertenece a una clase de distribuciones no estándar y se encuentra tabulada para diferentes valores de n y niveles de significancia α .

La Prueba Aumentada de Dickey-Fuller (ADF) comparte la misma hipótesis nula, el mismo estadístico y su distribución subyacente con la prueba original de Dickey-Fuller. Sin embargo, difiere en su enfoque cuando el término de error del modelo presenta autocorrelación, lo que puede afectar la eficiencia de los estimadores. En tales casos, Dickey-Fuller propone una extensión de los modelos anteriores de la siguiente manera:

$$\Delta z_t = \gamma z_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta \Delta z_{t-i} + a_t$$

$$\Delta z_t = \beta_0 + \gamma z_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta \Delta z_{t-i} + a_t$$

$$\Delta z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \gamma z_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta \Delta z_{t-i} + a_t$$

2.2.4. Modelo Autoregresivo

Un modelo autorregresivo (AR) es una herramienta estadística utilizada para modelar series temporales. Como menciona Posada Zuluaga (2023), el uso de los modelos autorregresivos se ha convertido en una herramienta útil en economía debido a su capacidad para capturar la relación entre el valor actual de una variable y sus valores pasados. En otras palabras, un modelo AR predice el valor futuro de una variable en función de su comportamiento pasado.

Wei (2013) define un modelo autorregresivo de orden p como:

$$\dot{Z}_t = \phi_0 + \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \phi_2 \dot{Z}_{t-2} + \cdots + \phi_p \dot{Z}_{t-p} + a_t \quad (2-7)$$

Donde:

- $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ es el valor actual de la variable de interés en el tiempo t .
- ϕ_0 es una constante.

- $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son los coeficientes del modelo, que representan el impacto de los valores pasados de la variable sobre su valor actual.
- a_t es un proceso ruido blanco (RBN), que se asume independiente e idénticamente distribuido con media cero y varianza constante.

2.2.5. Modelo Autorregresivo de Media Móvil (ARMA)

Un modelo autorregresivo de Media móvil (ARMA) es una extensión natural de los procesos autorregresivos (AR) y de promedio móvil (MA), que incluye ambos procesos como casos especiales. Este modelo combina las características de ambos enfoques, proporcionando un modelo parsimonioso para describir una amplia variedad de series temporales encontradas en la práctica (Wei, 2013).

El modelo ARMA(p,q) se representa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\dot{Z}_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \dot{Z}_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j a_{t-j} + a_t \quad (2-8)$$

Donde:

- Z_t es el valor actual de la serie temporal en el tiempo t .
- ϕ_0 es una constante.
- ϕ_i son los coeficientes del componente autorregresivo (AR).
- θ_j son los coeficientes del componente de promedio móvil (MA).
- a_t es el término ruido blanco en el tiempo t .

2.2.6. La prueba de Ljung-Box

La prueba de Ljung-Box, desarrollada por Ljung and Box (1978), es un estadístico utilizado para evaluar la presencia de autocorrelaciones en una serie temporal de residuos. Se define como:

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{j=1}^m \frac{\hat{\rho}_j^2}{T-j} \quad (2-9)$$

donde T es el número de observaciones en la serie, $\hat{\rho}_j$ son los coeficientes de autocorrelación estimados hasta el orden m utilizando los residuos del modelo ajustado. La decisión de rechazar la hipótesis nula H_0 : "No hay autocorrelaciones en los residuos hasta el orden m " se realiza si $Q(m)$ es mayor que el percentil $100(1 - \alpha)$ de una distribución chi-cuadrado con m grados de libertad, denotado como $\chi_{\alpha, m}^2$.

2.2.7. La prueba de Jarque-Bera

La prueba descrita por Jarque and Bera (1987) evalúa si los residuos tienen una distribución normal mediante el análisis de su asimetría y curtosis.

El estadístico de prueba se define como:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4}(K - 3)^2 \right) \quad (2-10)$$

donde n es el tamaño de la muestra, S es la medida de asimetría y K es la medida de curtosis. Bajo la hipótesis nula de que los datos provienen de una distribución normal, el estadístico JB sigue una distribución chi-cuadrado con 2 grados de libertad. El criterio de decisión consiste en rechazar la hipótesis nula si el valor JB supera un umbral crítico de la distribución chi-cuadrado con un nivel de significancia del 0.05.

2.2.8. Prueba de Multiplicadores de Lagrange para Efectos ARCH

La presencia de efectos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) en un proceso estocástico implica que la varianza del proceso no es constante y está correlacionada con sus valores anteriores. La evaluación de la presencia de estos efectos se puede llevar a cabo mediante la prueba de multiplicadores de Lagrange (LM) propuesta por Engle (1982).

La prueba se realiza en dos pasos principales:

1. Se calculan los residuos estandarizados al cuadrado del modelo ajustado para la media condicional. Estos residuos son una medida de la varianza no explicada por el modelo de media.
2. Se ajusta un modelo de regresión de los residuos al cuadrado sobre una constante y sus valores pasados. El estadístico de prueba utilizado es TR^2 , donde T es el número de residuos y R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión ajustada.

$$a_t = \gamma + \gamma_1 a_{t-1} + \gamma_2 a_{t-2} + \dots + \gamma_m a_{t-m}$$

Bajo la hipótesis nula de que no existen efectos ARCH en los datos, el estadístico TR^2 sigue una distribución chi-cuadrado con m grados de libertad, donde m representa el número de parámetros en el modelo de regresión de los residuos al cuadrado.

2.2.9. Modelo ARCH generalizado (GARCH)

El modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), propuesto por Bollerslev (1987), es una extensión del modelo ARCH. Este modelo se utiliza para

capturar la volatilidad condicional en series temporales, es decir, cuando la varianza de los errores no es constante, sino que depende de los valores pasados.

El modelo GARCH(m,s) se define como:

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2-11)$$

donde ϵ_t son residuos independientes e idénticamente distribuidos con media cero y varianza uno, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, m$, y $\beta_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, s$.

2.2.10. Distribución de Error Generalizado (GED)

La familia de distribuciones de Error Generalizado (GED) fue introducida por Subbotin (1923). Esta distribución puede modelar diferentes grados de curtosis y asimetría en los datos, lo que la hace adecuada para capturar una amplia gama de comportamientos observados en variables financieras y económicas.

La función de densidad de la GED para una variable aleatoria X se define mediante una transformación estándar $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ como sigue:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\kappa e^{-0,5 \left| \sqrt{2^{-2/\kappa} \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(3\kappa-1)}} z \right|^\kappa}}{\left(2^{1+\kappa^{-1}} \sqrt{2^{-2/\kappa} \frac{\Gamma(\kappa-1)}{\Gamma(3\kappa-1)}} \right) \Gamma(\kappa^{-1})} \quad (2-12)$$

Donde:

- μ es la media de la distribución,
- σ es la desviación estándar,
- κ es el parámetro de forma (*shape parameter*) que determina la forma de la distribución.

2.2.11. Criterios de información

El Criterio de Akaike (AIC), definido por Akaike (1974), y el Criterio Bayesiano de Schwarz (BIC), definido por Schwarz (1978), son medidas utilizadas para la selección de modelos en estadística. Estos criterios penalizan la complejidad del modelo para evitar el sobreajuste, proporcionando una forma de balancear la bondad del ajuste del modelo con su complejidad.

El AIC se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$AIC = \frac{-2LL}{N} + \frac{2m}{N} \quad (2-13)$$

El BIC se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$BIC = \frac{-2LL}{N} + \frac{m \log_e(N)}{N} \quad (2-14)$$

donde:

- LL es la logverosimilitud maximizada del modelo.
- N es el número total de observaciones en los datos.
- m es el número de parámetros estimados en el modelo.

Un valor más bajo de AIC o BIC indica un mejor equilibrio entre la bondad del ajuste y la complejidad del modelo.

2.2.12. Función Cópula

Nelsen (2006), en su libro "An Introduction to Copulas", explica que una cópula es una función matemática que permite describir la dependencia entre dos variables aleatorias, independientemente de sus distribuciones marginales. En el caso de una cópula bivariada, tenemos que, dadas un par de variables aleatorias X e Y con funciones de distribución $F(x) = P[X \leq x]$ y $G(y) = P[Y \leq y]$, respectivamente, y una función de distribución conjunta $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$, la cópula asigna el valor de la función de distribución conjunta a cada par ordenado de valores de las funciones de distribución marginales.

Esto se logra mediante una correspondencia que lleva el par (x, y) de valores reales a un punto $(F(x), G(y))$ en el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$, y este par a su vez corresponde a un número $H(x, y)$ en $[0, 1]$. Así, las cópulas permiten capturar y representar de manera precisa la relación de dependencia entre las variables aleatorias.

Formalmente, una cópula es una función $C : I^2 \rightarrow I$ (donde $I = [0, 1]$) que cumple con las siguientes propiedades:

1. Para todo u, v en I ,

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0 \quad (2-15)$$

y

$$C(u, 1) = u \quad \text{y} \quad C(1, v) = v; \quad (2-16)$$

2. Para todo u_1, u_2, v_1, v_2 en I tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (2-17)$$

Estas propiedades aseguran que C asigne un número en I a cada rectángulo en el cuadrado unitario I^2 .

Teorema de Sklar

El Teorema de Sklar resume la relación entre cópulas y funciones de distribución multivariadas (Nelsen, 2006). Este teorema establece que, para cualquier función de distribución conjunta H de las variables aleatorias X e Y con funciones de distribución marginales F y G , existe una cópula C tal que:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (2-18)$$

Si F y G son continuas, entonces C es única; de lo contrario, C es únicamente determinada en $\text{Ran}(F) \times \text{Ran}(G)$.

Cópula FGM

La cópula FGM (Farlie-Gumbel-Morgenstern), propuesta por Morgenstern (1956) y desarrollada posteriormente por Gumbel (1958) y Farlie (1960), es una cópula ampliamente utilizada debido a su forma analítica simple. Se emplea principalmente en modelado, pruebas de asociación y estudios de la eficiencia de procedimientos no paramétricos. Sin embargo, esta cópula solo puede modelar dependencias relativamente débiles (Nelsen, 2006). Además, es simétrica, lo que significa que es invariante bajo ciertos intercambios de las variables aleatorias. Específicamente, (X, Y) es simétrico en torno a (a, b) si los siguientes cuatro pares de variables aleatorias tienen una distribución conjunta común: $(X - a, Y - b)$, $(X - a, b - Y)$, $(a - X, Y - b)$ y $(a - X, b - Y)$.

La estructura analítica de la cópula FGM se expresa como:

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad \theta \in [-1, 1]. \quad (2-19)$$

La relación entre el parámetro θ y el Tau de Kendall asociado (τ) para la cópula FGM se define como:

$$\tau = \frac{2\theta}{9} \quad (2-20)$$

Cópula de Frank

La cópula de Frank, propuesta por Frank (1979), es una cópula arquimediana con función generadora $\phi(t) = -\log\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$. Esta cópula permite modelar la dependencia simétrica en los extremos (symmetric tail dependence). El parámetro de dependencia θ en la cópula de Frank determina la intensidad y dirección de la dependencia. Valores positivos de θ indican dependencia positiva, mientras que valores negativos indican dependencia negativa.

La estructura analítica de la cópula de Frank se define como:

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \quad \theta \neq 0 \quad (2-21)$$

El Tau de Kendall asociado (τ) para la cópula de Frank se relaciona con el parámetro θ de la siguiente manera:

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)] \quad (2-22)$$

donde D_1 es la función de Debye, definida como:

$$D_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{e^t - 1} dt \quad (2-23)$$

Cópula Gumbel-Hougaard

La cópula Gumbel-Hougaard es una cópula arquimediana introducida por Lai and Balakrishnan (2009), tiene como función generadora $\varphi(t) = (-\log(t))^\theta$. Esta cópula es intercambiable, lo que significa que el orden de las variables no importa para la estructura de dependencia capturada por la cópula. Esto se puede explicar de la siguiente manera: si la función de distribución conjunta de X e Y es H , entonces $H(x, y) = H(y, x)$ para todos los x, y en R^2 . Esta cópula es útil para modelar la dependencia en la cola superior (upper tail dependence) (Qian et al., 2020). Sin embargo, no puede modelar dependencias negativas.

La estructura analítica de la cópula Gumbel-Hougaard es:

$$C(u, v) = \exp \left[- \left((-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta \right)^{1/\theta} \right], \quad \theta \in [1, \infty) \quad (2-24)$$

El parámetro θ se relaciona con el Tau de Kendall (τ) de la siguiente manera:

$$\tau = 1 - \frac{1}{\theta} \quad (2-25)$$

Cópula Plackett

La cópula Plackett, introducida por Plackett (1965), ha sido ampliamente utilizada tanto en la modelización como en estudios de potencia y robustez de varias pruebas estadísticas como alternativa a la normal bivariada (Nelsen, 2006).

El parámetro de dependencia θ de la cópula Plackett se obtiene numéricamente y su ecuación es:

$$\theta = \frac{C(u, v)[1 - u - v + C(u, v)]}{[u - C(u, v)][v - C(u, v)]} \quad (2-26)$$

No hay una forma cerrada para el tau de Kendall asociado a esta cópula y la estructura analítica de la cópula Plackett se define como:

$$C(u, v) = \frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}, \quad \theta > 0 \quad (2-27)$$

Cópula Clayton

La cópula Clayton, desarrollada por Clayton (1978), es una cópula arquimediana con función generadora $\varphi(t) = \frac{t^{-\theta}-1}{\theta}$ que se utiliza para modelar la dependencia en la cola inferior (lower tail dependence) y no puede modelar dependencias negativas.

La estructura analítica de la cópula Clayton se define como:

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > 0 \quad (2-28)$$

La relación entre θ y el Tau de Kendall (τ) es:

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2} \quad (2-29)$$

Cópula Normal

Con base a la definición de Hofert et al. (2018), la cópula normal o gaussiana pertenece a la familia elíptica. Es una cópula simétrica que no captura fuertes dependencias en las colas. Asimismo, es una cópula que permite modelar dependencias negativas y positivas (Flores de la Fuente, 2009). El parámetro a estimar es ρ y su relación con el Tau de Kendall (τ) es:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho) \quad (2-30)$$

La estructura analítica de la cópula normal se define como:

$$C(u, v) = \Phi_\rho \left(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v) \right), \quad \rho \in [-1, 1] \quad (2-31)$$

donde:

- Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución de la normal estándar.
- Φ_ρ es la función de distribución normal bivariada estándar con correlación ρ .

La fórmula explícita de la cópula normal es:

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)} \right) ds dt \quad (2-32)$$

Esta expresión integra la densidad conjunta de una distribución normal bivariada estándar con correlación ρ , lo que permite calcular la probabilidad conjunta de las variables transformadas u y v .

Cópula t

La cópula t es una cópula elíptica que permite capturar la propiedad de colas pesadas (Wang et al., 2010). Tiene como parámetros ρ y v , que son los grados de libertad. La relación entre el parámetro ρ y el Tau de Kendall (τ) es:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho) \quad (2-33)$$

Con base en Hofert et al. (2018), su estructura analítica se define como:

$$C(u, v) = t_{\rho, \nu}(t^{-1}(u), t^{-1}(v)), \quad \rho \in [-1, 1] \quad (2-34)$$

donde:

- $t_{\rho, \nu}$ denota la función de distribución multivariada t de Student estandarizada con parámetro de correlación ρ y v grados de libertad.
- t_ν^{-1} es la inversa de la función de distribución univariada t de Student con v grados de libertad.

La fórmula explícita de la cópula t es:

$$C(u, v) = \int_{-\infty}^{t^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ 1 + \frac{t^2 + s^2 - 2\rho ts}{\nu(1-\rho^2)} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}} dt ds \quad (2-35)$$

2.2.13. Estimador de Funciones de Inferencia para Marginales

El Estimador de Funciones de Inferencia para Marginales (IFME), presentado por Joe (2005), fue desarrollado como una alternativa para reducir la carga computacional asociada con la estimación de máxima verosimilitud. Este estimador consiste en dos etapas.

En primer lugar, se estiman los vectores de parámetros de las variables marginales $\gamma_{0,1}, \dots, \gamma_{0,d}$. Lo anterior permite calcular el vector U , conocido como pseudo observaciones paramétricas de la cópula C , de la siguiente manera:

$$U_{i,\gamma_n} = (F_{1,\gamma_{n,1}}(X_{i1}), \dots, F_{d,\gamma_{n,d}}(X_{id})), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

Este procedimiento se basa en la suposición de que los valores de las funciones de distribución son variables uniformes. Posteriormente, se estiman los parámetros de la cópula desconocida θ_n utilizando:

$$\theta_n = \underset{\theta}{\operatorname{argsup}} \sum_{i=1}^n \log c_{\theta} (F_{1,\gamma_{n,1}}(X_{i1}), \dots, F_{d,\gamma_{n,d}}(X_{id})) \quad (2-36)$$

3 Metodología

En esta sección, se describe detalladamente la metodología empleada para dar cumplimiento a los objetivos planteados y dar respuesta a la pregunta de investigación del presente trabajo. Con el fin de responder al problema de investigación planteado, se ha diseñado un conjunto de actividades donde inicialmente se realiza el análisis exploratorio de los datos, luego se ajusta un modelo para la media condicional de las variables, posteriormente se realiza el ajuste de un modelo GARCH para capturar la volatilidad condicional de los datos y, finalmente, se ajusta una función cópula que modele la dependencia de ambas variables. Este último paso se realiza bajo un enfoque de supuestos paramétricos y no paramétricos sobre las marginales de los residuos del modelo GARCH.

3.1. Datos

Los datos utilizados en este trabajo de grado fueron extraídos de las bases de datos del Banco de la República de Colombia, una fuente autorizada y bien establecida en el ámbito económico y financiero. La utilización de datos provenientes de esta entidad contribuyó significativamente a la calidad y fiabilidad de los resultados obtenidos en este estudio.

Para obtener los datos del IBR (Indicador Bancario de Referencia), se accedió al sitio web oficial del Banco de la República a través de la URL <https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/indicador-bancario-referencia-ibr>. Se descargó el histórico del IBR a plazo overnight desde enero de 2008 hasta agosto de 2023 ya que fue en enero de 2008 que comenzó a funcionar el esquema de formación del indicador bancario de referencia (IBR). Aunque los datos tienen una periodicidad diaria, están disponibles únicamente para los días hábiles.

Por otro lado, los datos de la inflación mensual fueron obtenidos también del sitio web oficial del banco, utilizando la URL <https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/inflacion-total-y-meta>. Se descargó la información desde enero de 2008 hasta agosto de 2023, con una periodicidad mensual para contar con la misma cantidad de registros que la variable IBR.

La limpieza y preparación de los datos se realizó usando una hoja de cálculo mediante Microsoft Excel. Se eliminaron filas y columnas que no eran pertinentes para el análisis.

Además, se empleó R para desarrollar un código que asegurara la misma periodicidad en la serie temporal del IBR y la de la inflación, seleccionando el último dato disponible de cada mes.

3.2. Modelado de la media condicional

Según Hofert et al. (2018), para garantizar que las estimaciones de los parámetros de las copulas ajustadas se realicen utilizando técnicas clásicas de estimación, como la estimación por máxima verosimilitud, es necesario asegurar que las variables marginales de la cópula sean observaciones independientes e idénticamente distribuidas (iid). Por lo tanto, es esencial capturar la dependencia serial de ambas variables mediante el ajuste de modelos para la media condicional.

3.2.1. Comprobación de la estacionariedad de la serie original

En primer lugar, se verificó la estacionariedad de la serie a través de la visualización de la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF). Este proceso se lleva a cabo utilizando las funciones `ACF()` y `PACF()`, las cuales toman como parámetros la serie de tiempo y k , que es igual al número máximo de rezagos que se desean evaluar. Conforme a Wei (2013), se recomienda que $k = n/4$.

3.2.2. Calculo de los log-retornos

Posteriormente, se calcularon los log-retornos de las variables IBR e inflación. Esta transformación se llevó a cabo con el propósito de trabajar con una serie que posea propiedades estadísticas más atractivas, como la estacionariedad en media. Para realizar este procedimiento, se empleó la función `returns`, la cual toma como parámetros la serie de tiempo y dado que el objetivo es calcular los log-retornos, se definió `method="compound"`.

3.2.3. Confirmación de estacionariedad con el test aumentado de Dickey-Fuller

La función `adf.test` se utilizó para calcular el test aumentado de Dickey-Fuller desarrollado por Dickey and Fuller (1979), el cual se utiliza para confirmar si el supuesto de estacionariedad es cumplido por la serie de log-retornos de ambas variables. Este test es una herramienta primordial en el análisis de series temporales, ya que permite determinar si una serie temporal es estacionaria o no. Si el valor-p resultante del test es menor que un nivel de significancia definido en este trabajo en 0.05, se rechaza la hipótesis nula de no estacionariedad y se concluye que la serie es estacionaria en media.

3.2.4. Ajuste de modelos para la media condicional

Con la ayuda de la función `auto.arima` del paquete `forecast`, se ajustaron varios modelos ARMA, siguiendo la metodología utilizada en estudios como los de Choudhary et al. (2022) y Kovvuri et al. (2022), quienes han modelado series temporales con éxito utilizando esta herramienta, lo que refuerza la confianza en su efectividad. Para el ajuste, se estableció un orden máximo de 3 tanto para los procesos autoregresivos (p) como para los de medias móviles (q), permitiendo una exploración exhaustiva de posibles configuraciones. La función realiza un ajuste automático de los modelos ARMA, evaluando diferentes combinaciones de órdenes y seleccionando el modelo que mejor se ajusta a los datos, basándose en el criterio de información AIC. Una vez identificado el modelo óptimo, se procedió a la estimación de los parámetros utilizando el método de máxima verosimilitud exacta, partiendo de valores iniciales obtenidos a través del método de estimación condicional. Para más detalles sobre la metodología de estimación de parámetros, se recomienda consultar (Ansley, 1979).

De acuerdo con Wei (2013), la forma exacta de la función de verosimilitud para un modelo ARMA es complicada.

Por otro lado, el Método de Estimación de Máxima Verosimilitud Condicional consta de los siguientes pasos:

En primer lugar consideramos el modelo general ARMA (p,q):

$$\dot{Z}_t = \sum_{j=1}^p \phi_j \dot{Z}_{t-j} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} + a_t \quad (3-1)$$

donde $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ y a_t se distribuye $RBN(0, \sigma_a^2)$.

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad conjunta para un modelo ARMA es:

$$P(a|\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_a^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n a_t^2} \quad (3-2)$$

De la ecuación (1) se tiene que a_t es:

$$a_t = \sum_{i=1}^q \phi_i a_{t-i} + \dot{Z}_t - \sum_{j=1}^p \phi_j \dot{Z}_{t-j} \quad (3-3)$$

Entonces, de esos resultados derivamos el logaritmo de la función de verosimilitud de los parámetros $(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2)$:

$$\ln L(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2) = \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_a^2) - \frac{S(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_a^2} \quad (3-4)$$

Donde $S(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1}^n a_t^2$.

Para calcular los términos a_t en la suma de cuadrados mencionada, es necesario disponer de un conjunto de condiciones iniciales previamente conocidas, representadas por Z_* y a_* . Conforme a lo anterior, el logaritmo de la función de verosimilitud condicional se define como:

$$\ln L_*(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2) = \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma_a^2) - \frac{S_*(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_a^2} \quad (3-5)$$

Donde

$$S_*(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1}^n \left(\sum_{i=1}^q \phi_i a_{t-i} + \dot{Z}_t - \sum_{j=1}^p \phi_j \dot{Z}_{t-j} \right)^2 \Big|_{Z_*, \varepsilon_*, Z} \quad (3-6)$$

La expresión $S_*(\phi, \mu, \theta)$ se conoce como la función de suma de cuadrados condicional. Los valores $\hat{\phi}$, $\hat{\mu}$ y $\hat{\theta}$, que maximizan esta función, se llaman estimadores máximo verosímiles condicionales.

3.2.5. Estimación de la significancia de los parámetros

En esta etapa de la metodología, se procedió a evaluar la significancia estadística de los parámetros estimados en los modelos de la media condicional ajustados. Para este propósito, se empleó el estadístico t , el cual se define como el cociente entre la estimación del parámetro y su error estándar. Este estadístico sigue una distribución asintóticamente normal cuando el tamaño de la muestra es grande (Tsay, 2005).

La hipótesis nula establece que el parámetro es igual a cero. Esta hipótesis se rechaza si $|t| > Z_{\alpha/2}$, donde $Z_{\alpha/2}$ es el percentil $\alpha/2$ superior de la distribución normal(0,1).

3.2.6. Diagnósticos del modelo para la media condicional

De acuerdo con Wei (2013), la verificación de si las raíces caen fuera del círculo unitario es fundamental para determinar la estacionariedad de un proceso AR y la invertibilidad de un proceso MA. Esta verificación puede realizarse mediante el valor absoluto de las estimaciones de los parámetros del modelo. En el caso de un modelo ARMA(1,1), si $|\phi_1| < 1$, el proceso se considera estacionario. Por otro lado, si $|\theta_1| < 1$, el proceso se considera invertible. Para

un modelo $AR(1)$, la evaluación de la estacionariedad se realiza verificando si $|\phi_1| < 1$.

Para evaluar los supuestos del modelo, es fundamental verificar si los residuos del modelo siguen un proceso de ruido blanco. Esto implica que los residuos tengan media cero, varianza constante y no estén correlacionados. Este diagnóstico se llevó a cabo utilizando la función `tsdiag`, que proporciona herramientas visuales para examinar la autocorrelación, la varianza y los valores p de la prueba de Ljung-Box de distintos k para evaluar la correlación entre los residuos a lo largo del tiempo.

Además, para evaluar el supuesto de normalidad de los residuos, se realizó la prueba de Jarque-Bera y se construyeron gráficos cuantil-cuantil (QQ plots).

3.3. Modelado de la varianza condicional

Es esencial capturar adecuadamente el fenómeno de volatilidad condicional en las series económicas analizadas en este trabajo de grado. Esto garantiza que los residuos del modelo GARCH ajustado exhiban propiedades de ruido blanco, lo cual es fundamental para la validez de las inferencias derivadas de las cópulas ajustadas.

3.3.1. Diagnósticos de efectos ARCH

En primera instancia, se evaluó la presencia de efectos ARCH, que indica que la varianza del proceso estocástico cambia con el tiempo y está correlacionada con sus valores anteriores. Esta evaluación se llevó a cabo mediante la prueba de multiplicadores de Lagrange LM que está implementada en R mediante la función `ArchTest` del paquete `FinTS`.

3.3.2. Ajuste de 15 modelos GARCH

Para ajustar los modelos $GARCH(m,s)$ a los residuos estandarizados de los modelos de la media previamente ajustados, se consideraron quince combinaciones diferentes, donde $m \in \{1, 2, 3\}$ y $s \in \{1, 2, 3\}$. En cada combinación, uno de los parámetros m o s se mantuvo en 1 para evitar el sobreajuste y mantener la parsimonia del modelo. La estimación de los parámetros del modelo $GARCH(m,s)$ se realizó mediante la máxima verosimilitud condicional como lo define Shumway et al. (2000). Además, la verosimilitud condicional del modelo $GARCH(m,s)$ se calculó como el producto de las densidades de una distribución de errores generalizada escalada (GED). La estimación de estos modelos se realizó asumiendo que los residuos del modelo para la media condicional provenían de distribuciones generalizadas error (GED), t de Student y normales, utilizando la función `ugarchfit` después de haber especificado el modelo con `ugarchspec`.

3.3.3. Elección del modelo para la varianza condicional

Los modelos GARCH(m,s) ajustados fueron evaluados utilizando criterios estadísticos como el Criterio de Información de Akaike (AIC) y el Criterio de Información Bayesiano (BIC), además de la verificación de los supuestos subyacentes en estos modelos.

3.3.4. Diagnósticos del modelo GARCH

Para evaluar la calidad del ajuste del modelo GARCH, se realizó un diagnóstico de los residuos para asegurar que no estén serialmente correlacionados y que no muestren evidencia de volatilidad condicional. Para esto, se empleó la prueba de Ljung-Box en los residuos del modelo y los residuos al cuadrado.

3.4. Función copula

El propósito de esta sección es presentar la metodología usada para estimar la cópula C utilizando los residuos de los modelos GARCH ajustados. Se considera inicialmente la estimación de C bajo un enfoque de distribuciones marginales conocidas, para luego explorar un enfoque de marginales desconocidas.

3.4.1. Ajuste de función cópula asumiendo marginales conocidas

Puntajes normales

Las pseudo observaciones se transformaron en puntajes normales mediante la aplicación de la función cuantil de la distribución normal. Esta estrategia tiene fundamento con lo expuesto por Hofert et al. (2018), donde se expresa que los puntajes normales permiten identificar desviaciones de la normalidad bivariada en el gráfico resultante.

La presencia de colas más pesadas en el gráfico de dispersión de los puntajes normales indica la existencia de dependencia de cola. Este fenómeno sugiere que las colas tienen una masa de probabilidad mayor que las colas de las distribuciones normales estándar, lo que revela una asociación más fuerte entre las variables en extremos opuestos. Para mas detalle sobre los puntajes normales ver (Joe, 2005).

Diagnostico de independencia

Se llevó a cabo el diagnostico de independencia entre los residuos de ambas variables esto con el objetivo de determinar si no hay relación entre ambas variables y por lo tanto determinar si la copula de independencia es la mas apropiada. Lo anterior se realizó con la función `cor.test` la cual desarrolla el test de correlación de rangos desarrollado por Kendall (1938).

Ajuste de 7 funciones cópulas a los datos

En este estudio, se llevó a cabo el ajuste de siete cópulas (FGM, Frank, Gumbel, Plackett, Clayton, Normal y t-Student), y sus parámetros fueron estimados utilizando el Estimador de Funciones de Inferencia para Marginales (IFME). Para ello, se empleó la función `gedFit` y se utilizó el Criterio de Información de Akaike (AIC) para determinar cuál de estas cópulas se ajustó mejor a los datos observados.

El cálculo del AIC se modificó para este modelo según la siguiente fórmula:

$$AIC = -2\log(L) + 2k \quad (3-7)$$

donde L representa la función de verosimilitud maximizada del modelo y k es el número de parámetros estimados en el modelo.

Bootstrap no paramétrico para estimación del parámetro de dependencia y τ de Kendall

Para robustecer las estimaciones del parámetro de dependencia de las cópulas y el τ de Kendall, se aplicó una metodología de remuestreo denominada bootstrap no paramétrico. Esta técnica permite obtener estimaciones más confiables de los parámetros y sus intervalos de confianza al repetir el proceso de estimación en múltiples muestras generadas a partir de los residuos del modelo GARCH ajustado.

El procedimiento de bootstrap no paramétrico se llevó a cabo de la siguiente manera:

1. **Generación de muestras bootstrap:** Se crearon 1000 muestras bootstrap de tamaño igual al de la muestra original mediante el muestreo con reemplazo.
2. **Estimación de parámetros:** Para cada muestra bootstrap, se ajustó la copula que mejor ajuste tuvo en la muestra original y se estimaron los parámetros de dependencia. Las estimaciones se realizaron utilizando el Estimador de Funciones de Inferencia para Marginales (IFME) de la misma manera que se hizo con la muestra original.
3. **Estimación de intervalos de confianza:** A partir de las estimaciones obtenidas para cada una de las 1000 muestras bootstrap, se calcularon los intervalos de confianza bootstrap del 95 % de confianza para el parámetro de dependencia y el τ de Kendall a partir de los cuantiles 0.025 y 0.975.

3.4.2. Ajuste de función cópula asumiendo marginales desconocidas

Para evitar los problemas derivados de una especificación incorrecta de los parámetros de las distribuciones marginales, lo que conduce a estimaciones sesgadas de θ , se calcularon las pseudo observaciones no paramétricas, que se originan de la función de distribución empírica, estimada por la ecuación 3-8:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n 1(X_i \leq x) \quad (3-8)$$

El propósito de utilizar $n+1$ es asegurar que las observaciones caigan en el intervalo $[0,1]$.

La metodología aplicada en este enfoque es igual a la descrita en la sección 3.4.1; sin embargo, la estimación de los parámetros se realiza utilizando el Estimador de Máxima Pseudo-Verosimilitud, ya que Genest et al. (1995) demuestran que el estimador de máxima pseudo-verosimilitud es más eficiente para familias de cópulas cuyos parámetros pueden ser estimados mediante el método de los momentos. Por lo tanto, se tiene que:

$$\theta_n = \underset{\theta}{\operatorname{argsup}} \sum_{i=1}^n \log c_{\theta}(U_{i,n}) \quad (3-9)$$

Donde $U_{i,n}$ se define como:

$$U_{i,n} = \frac{1}{n+1} (R_{i1}, \dots, R_{id}) \quad (3-10)$$

Donde R_{ij} es el rango de X_{ij} .

4 Resultados

Esta sección presenta los resultados obtenidos al aplicar nuestra metodología a los datos de inflación e indicador bancario de referencia. Estas variables están compuestas por dos bases de datos, cada una con dos columnas y 188 filas. En primer lugar, llevamos a cabo un análisis exploratorio de los datos que incluyó descripciones y visualizaciones detalladas. Luego, estimamos las distribuciones marginales utilizando la metodología GARCH. Posteriormente, derivamos la distribución de probabilidad marginal de los residuos estandarizados mediante enfoques paramétricos y no paramétricos, y los transformamos para obtener las marginales uniformes. Estas últimas se utilizaron para estimar las cópulas. Todos los resultados obtenidos en este trabajo de grado se realizaron mediante el uso de R.

4.1. Descripción preliminar del archivo de datos

En la Tabla 4.1 se muestran los estadísticos descriptivos básicos, donde se observa que las medias y desviaciones estándar de ambas variables son muy similares. Este comportamiento se refleja también de manera gráfica en las Figuras 4-1 y 4-2.

Tabla 4-1: Estadísticas descriptivas.

Estadístico	IBR	Inflación
Min.	1.720	1.489
1st Qu.	3.421	2.885
Median	4.370	3.645
Mean	5.235	4.668
sd	2.730	2.856
3rd Qu.	6.089	5.903
Max.	13.294	13.344

Como se mencionó en 3.1, empleamos datos mensuales de inflación e IBR que se extienden desde 2008 hasta 2023. Las Figura 4-1 y 4-2 ilustran claramente que estas variables no exhibían estacionariedad, ni en términos de media ni de varianza. Por consiguiente, para el análisis subsiguiente de los datos, optamos por utilizar los log-retornos de las variables que en muchos casos, tienden a ser más estacionarios que los niveles originales de los datos, lo que implica una mayor estabilidad en la media y la varianza (Tsay, 2005).

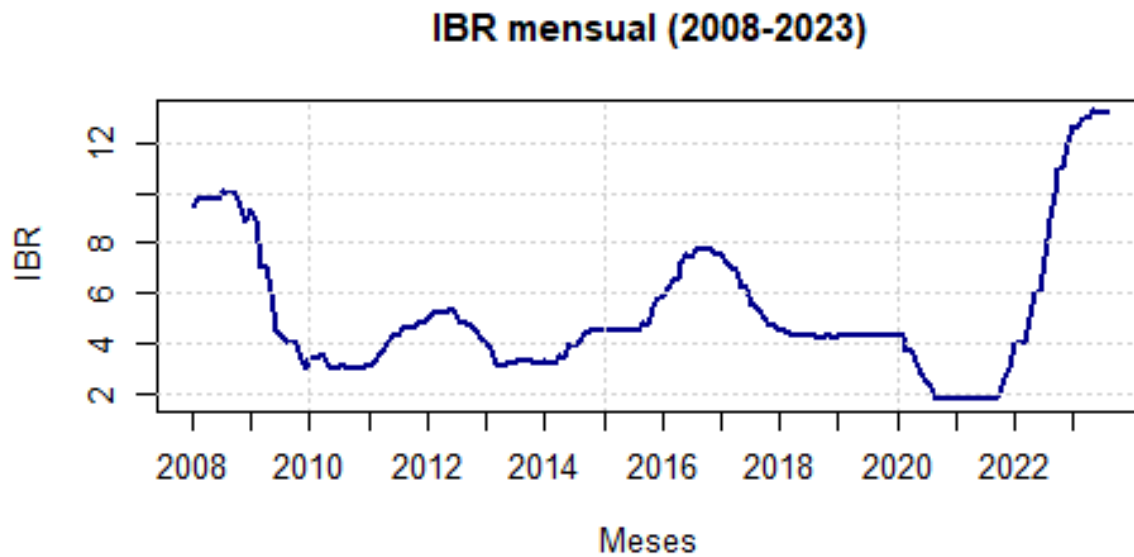


Figura 4-1: Serie de tiempo para el IBR desde enero de 2008 hasta agosto de 2023.

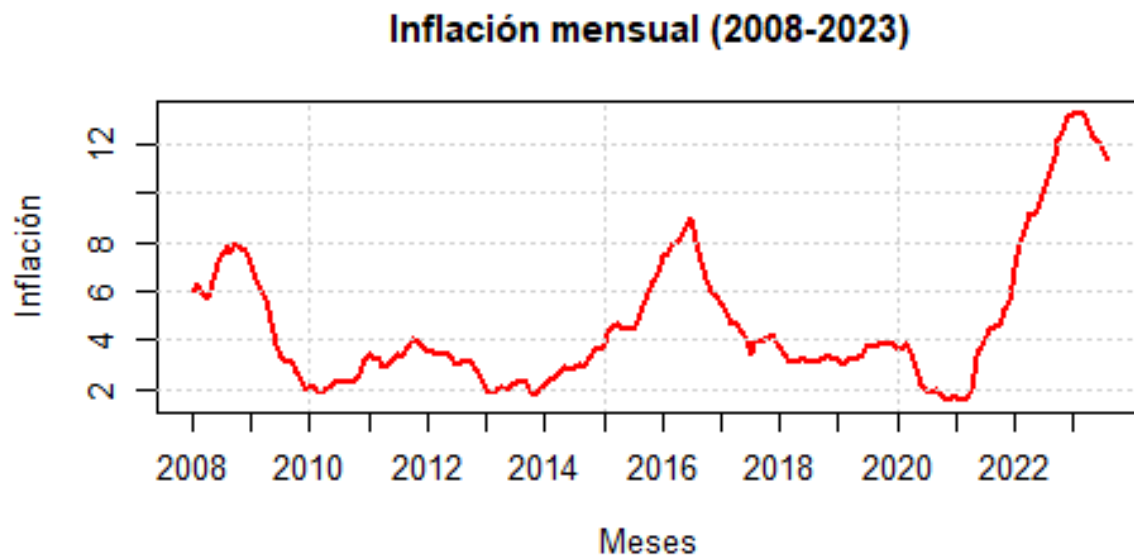


Figura 4-2: Serie de tiempo para la inflación desde enero de 2008 hasta agosto de 2023.

Para analizar la relación entre el IBR (Indicador Bancario de Referencia) y la inflación, se realizó un scatter plot de las dos variables, evidenciándose una fuerte relación lineal en las variables originales.

El valor obtenido para el coeficiente de correlación de Spearman fue de 0.81. Este valor indica una fuerte correlación positiva entre el IBR y la inflación, sugiriendo que a medida que el IBR aumenta, la inflación tiende a aumentar también. Es importante destacar que este análisis es descriptivo y no se realizó un test de hipótesis, ya que el objetivo es proporcionar una idea general de la relación lineal entre las variables.

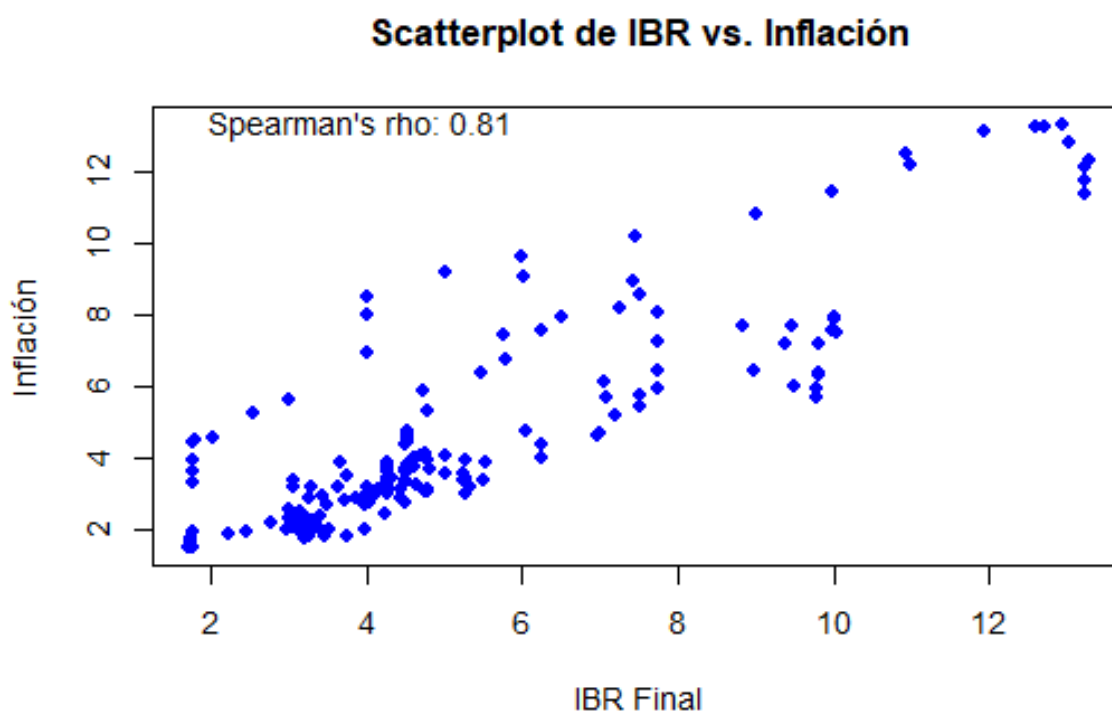


Figura 4-3: Scatterplot de IBR vs Inflación

4.2. Modelos para la media condicional

En el enfoque de la cópula para modelar la dependencia entre dos variables aleatorias, es fundamental garantizar que las observaciones sean independientes e idénticamente distribuidas (iid). En esta sección, nos centraremos en el proceso de modelado para la media condicional, cuyo objetivo es capturar y modelar las correlaciones entre los valores pasados y futuros de las variables. Este enfoque es útil para reducir o eliminar la dependencia serial en los datos.

4.2.1. Modelo de media condicional para el IBR

En primer lugar, para confirmar la no estacionariedad en la media de la serie original mencionada en la Sección 4.1, se muestra en la Figura 4-4 su respectiva Función de Autocorrelación Muestral (ACF), la cual decae lentamente en forma sinusoidal amortiguada, lo que indica no estacionariedad (Wei, 2013). Además, su Función de Autocorrelación Parcial (PACF) muestra un gran valor para $k=1$ y después decrece significativamente lo que conjuntamente son indicativos de no estacionariedad.

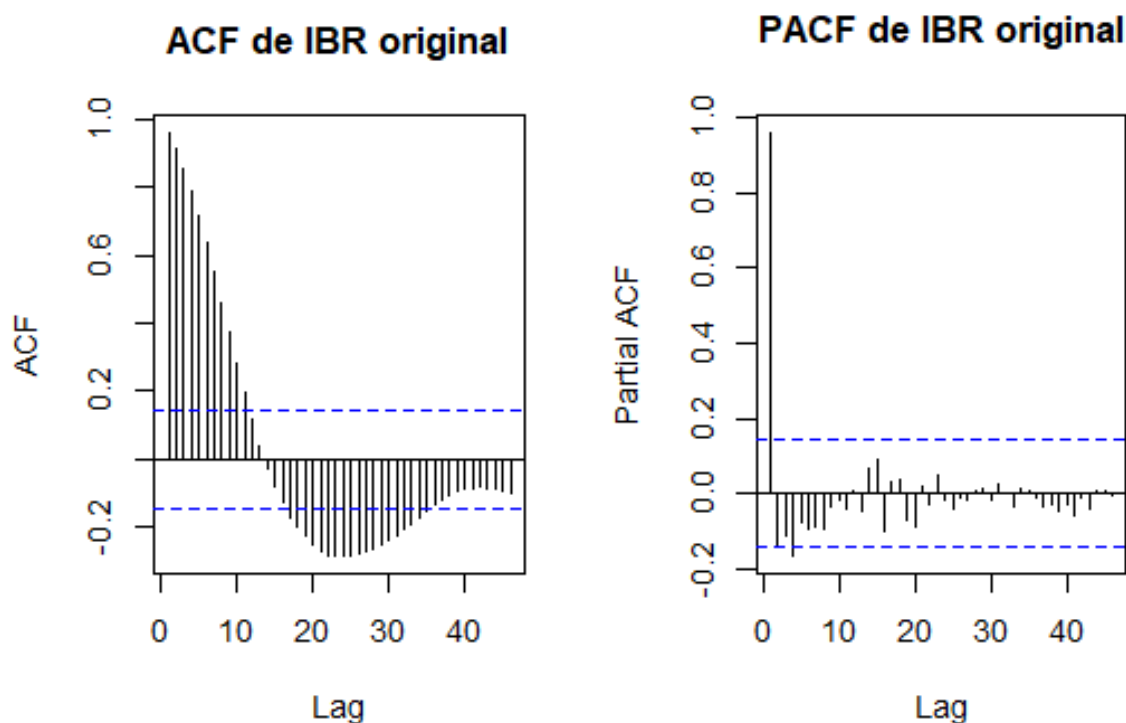


Figura 4-4: ACF y PACF de la serie de IBR original.

La Figura 4-5 muestra la serie temporal de los log-retornos calculados, sugiriendo la presencia de estacionariedad. Para confirmar esta observación, se realizó la prueba aumentada de Dickey-Fuller con un nivel de significancia del 5% tanto a la variable original como a los log-retornos. Se encontró que la hipótesis nula fue rechazada solo en el caso de los log-retornos, lo que indica que esta serie es estacionaria. Por otro lado, la homogeneidad en la varianza y covarianza de la serie aun no es evidente.

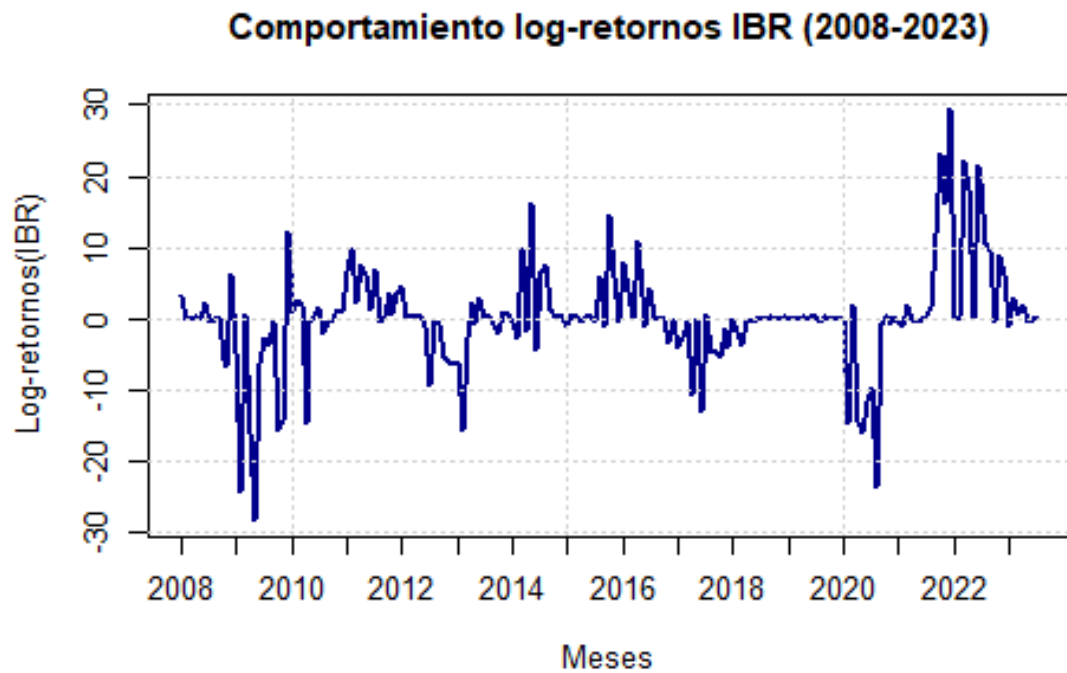


Figura 4-5: Log-retornos del IBR.

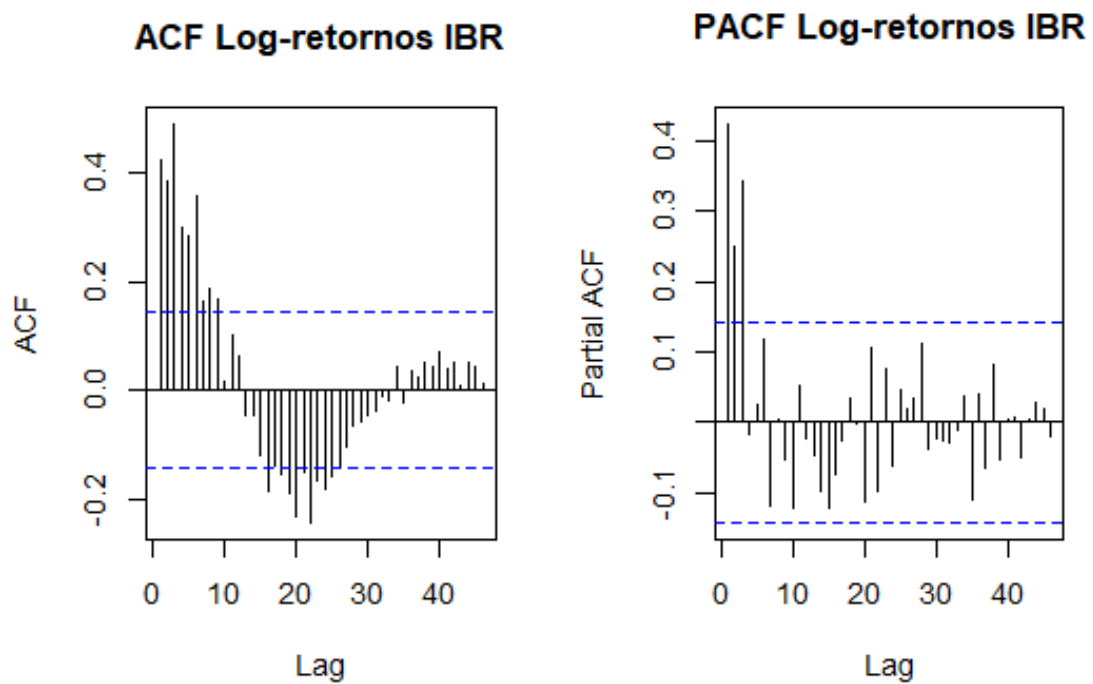


Figura 4-6: ACF y PACF de los log-retornos del IBR.

En la Figura 4-6, se analiza el comportamiento de la función de autocorrelación (ACF) y la función de autocorrelación parcial (PACF), evidenciando indicios de estacionariedad. En particular, sugiere que un posible modelo para la media condicional podría ser un AR(3), dado el decaimiento en forma sinusoidal de la ACF y el corte en la PACF después del rezago 3.

Al determinar que la serie era estacionaria en media, se empleó la función `auto.arima` y se concluyó que el mejor modelo para la serie de log-retornos del IBR es un AR(3) con media cero. Sin embargo, análisis posteriores revelaron que este modelo para la media generaba residuos considerablemente grandes al ajustar el modelo GARCH presentado en la Sección 4.3.1. Por consiguiente, se optó por seleccionar un modelo ARMA(1,1) con media 0 para el ajuste del modelo de media condicional del IBR. Los resultados presentados en la Tabla 4-2 indican que los parámetros del modelo ARMA son estadísticamente significativos, lo cual significa que son diferentes de cero. Lo anterior, se evidencia por los valores de los estadísticos t y los valores p asociados.

Lo anterior, resulta en la definición del siguiente modelo para la media condicional de los log-retornos del IBR:

$$IBR_t = \phi_1 IBR_{t-1} + \theta_1 a_{t-1} + a_t \quad (4-1)$$

$$IBR_t = 0,897 IBR_{t-1} - 0,628 a_{t-1} + a_t \quad (4-2)$$

Tabla 4-2: Coeficientes y estadísticas del modelo ARMA(1,1) ajustado para los log-retornos del IBR.

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico t	Valor p
ar1	0.8975306	0.04328423	20.735740	0.000000
ma1	-0.6282317	0.06953240	-9.035093	2.220446e-16
Estadísticas Adicionales				
σ^2	39.32			
Log-verosimilitud	-608.88			
AIC	1221.75			

Para evaluar si el modelo es estadísticamente coherente con los supuestos teóricos en los que se basa, primero se examinó la estacionariedad del modelo y dado que $|\phi_1| < 1$ y $|\theta_1| < 1$, el proceso se considera estacionario e invertible.

Posteriormente, se realizó un diagnóstico de los residuos del modelo para verificar que sean consistentes con un proceso de ruido blanco de media cero, lo que implica que tengan una media cero, que no estén correlacionados y que tengan una varianza constante.

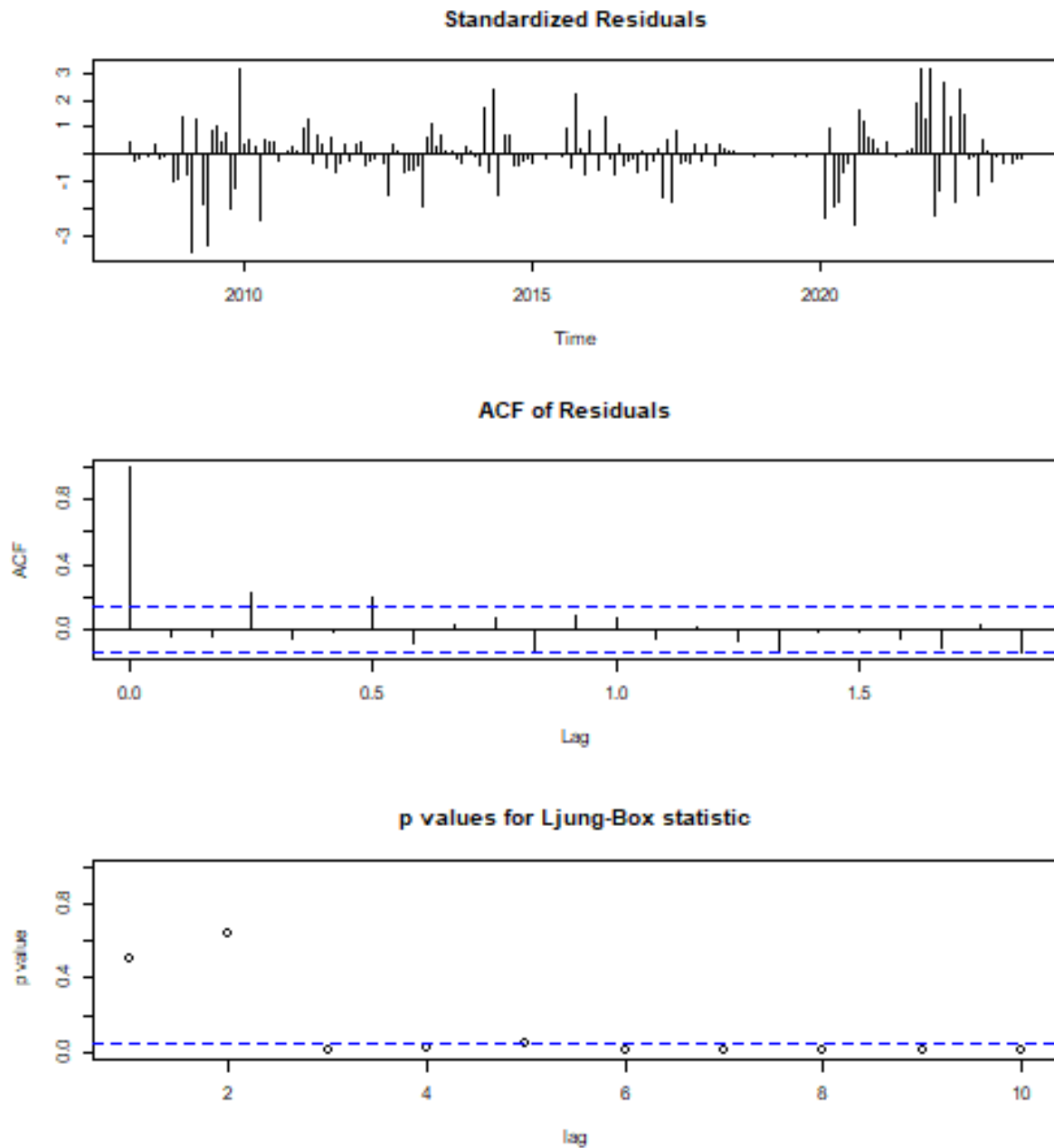


Figura 4-7: Diagnóstico de los residuos del modelo ARMA(1,1).

En la Figura 4-7, se observa que los residuos presentan características de media cero, y que no muestran correlación entre ellos al observar la función de autocorrelación (ACF), donde las líneas verticales se encuentran dentro de las bandas de significancia. Además, esta falta de correlación se confirma mediante el gráfico de valores p de la prueba de Ljung-Box, que muestra que hasta el rezago 3, no se rechaza la hipótesis nula de incorrelación de los residuos. Sin embargo, se observa que la varianza o volatilidad de la serie no es constante,

lo cual es común en las series financieras.

Por ultimo, se realizó el gráfico de cuantiles normales para determinar si los residuos se rigen por una distribución normal. De la Figura 4-8 se concluye que el supuesto de normalidad no se cumple y que además la distribución de los residuos muestra colas pesadas. De igual manera, se presenta el estadístico de Jarque-Bera el cual confirma la violación del supuesto de normalidad. Es por lo anterior, que en 4.3.1 se asume que los residuos provienen de una distribución GED.

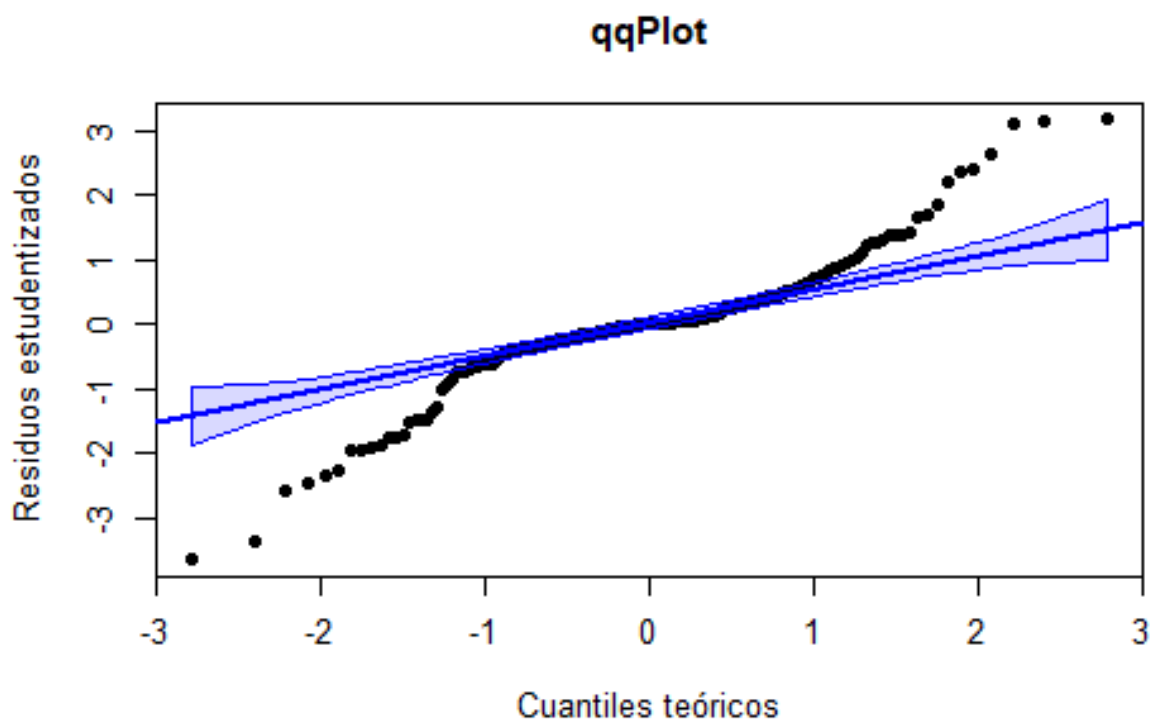


Figura 4-8: Gráfico Cuantil-Cuantil de los residuos del modelo ARMA(1,1) para el IBR.

4.2.2. Modelo de media condicional para la inflación

Siguiendo el enfoque utilizado en la Sección 4.2.1, se procedió a evaluar la estacionariedad en la media de la serie temporal de inflación original. Esto se llevó a cabo mediante el análisis de la ACF, que exhibió un decaimiento lento con una forma sinusoidal amortiguada. Además, se observó un pico significativo en la PACF para el rezago 1, seguido de un rápido decrecimiento, lo que sugiere la presencia de no estacionariedad en la serie.

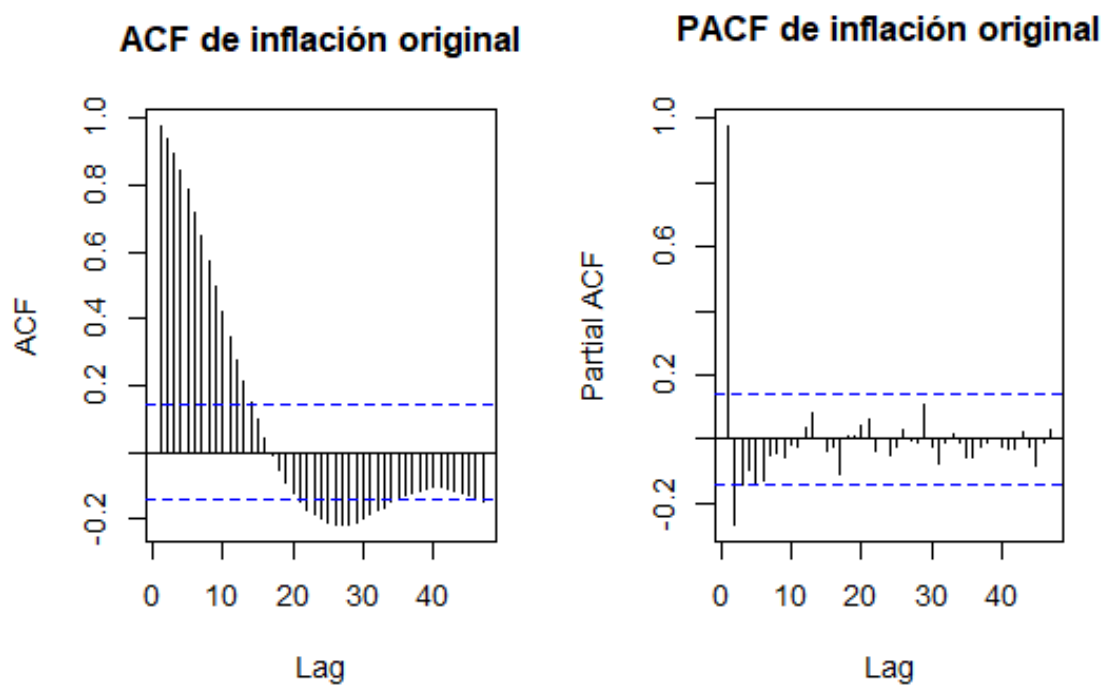


Figura 4-9: ACF y PACF de la serie de la inflación original.

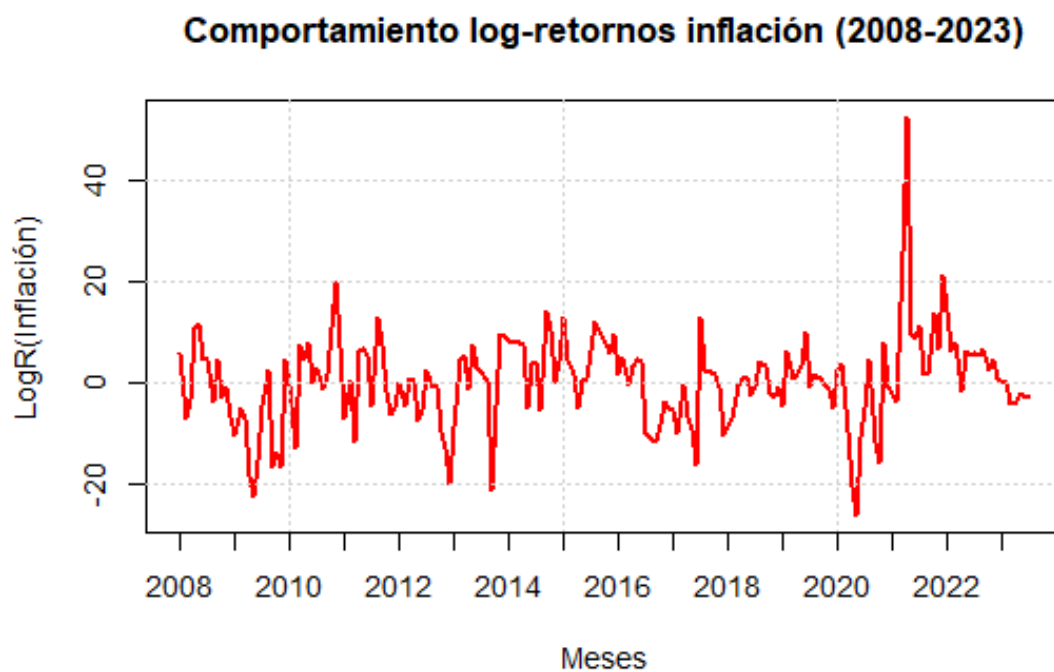


Figura 4-10: Log-retornos del la inflación.

La Figura 4-10 muestra la serie temporal de los log-retornos calculados para la variable inflación, evidenciando un comportamiento de no estacionariedad en la varianza. Sin embargo, parece que la serie es estacionaria en términos de media. Para validar esta observación, se aplicó la prueba aumentada de Dickey-Fuller con un nivel de significancia del 5%, y los resultados indicaron el rechazo de la hipótesis nula, lo que sugiere que la serie es estacionaria, aunque no homogénea en cuanto a su varianza.

Continuando con el análisis del modelado de la media condicional para la inflación, en la Figura 4-11 se examina el comportamiento de la ACF y la PACF. Este análisis confirma la estacionariedad en la media deseada. Además, a partir de este mismo análisis, se deduce que la serie puede ser modelada mediante un proceso autorregresivo de primer orden AR(1) ya que la PACF se anula después de ese rezago y la ACF exhibe un decaimiento exponencial.

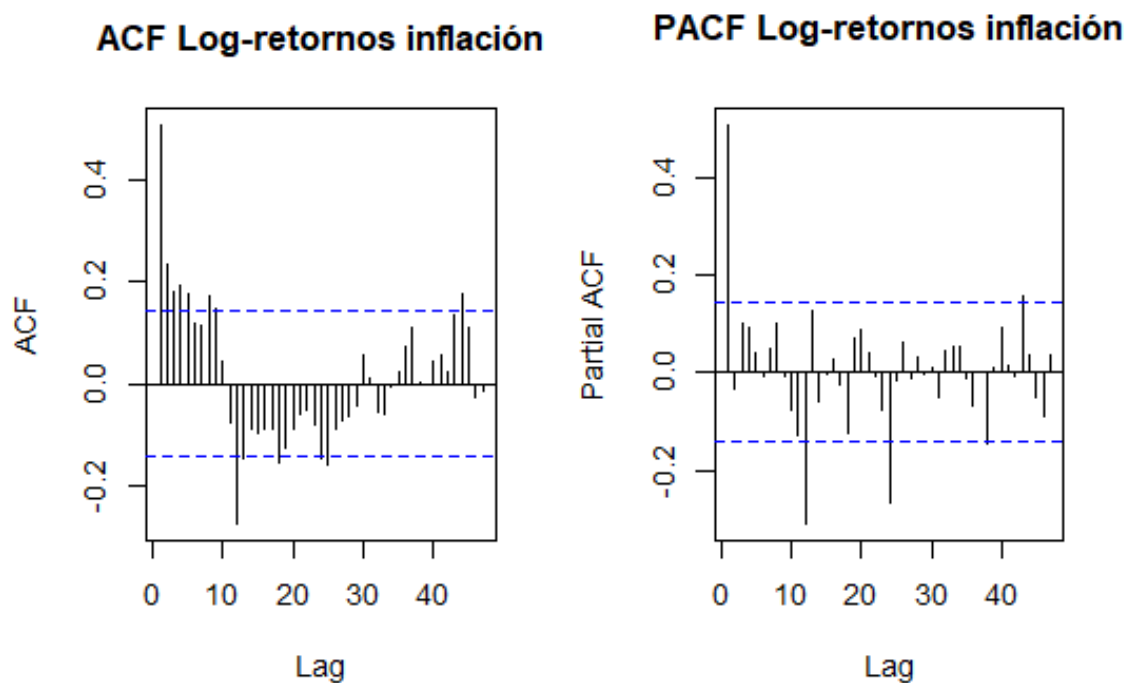


Figura 4-11: ACF y PACF de los log-retornos de la inflación.

Utilizando la función `auto.arima`, se determinó que el modelo que mejor se ajusta en términos del Criterio de Información de Akaike (AIC) es el modelo AR(1) con media cero. La Tabla 4-3 muestra la estimación de este modelo, donde se observa que el parámetro estimado es significativo. Lo anterior, resulta en la definición del siguiente modelo para la media condicional de los log-retornos de la inflación:

$$INFL_t = \phi_1 INFL_{t-1} + a_t \quad (4-3)$$

$$INFL_t = 0,509 INFL_{t-1} + a_t \quad (4-4)$$

Tabla 4-3: Coeficientes y estadísticas del modelo AR(1) ajustado para los log-retornos de la inflación.

Parámetro	Estimación	Error Estándar	Estadístico t	Valor p
ar1	0.5091384	0.0626227	8.130253	5.861978e-14
Estadísticas Adicionales				
sigma	61.59			
Log-verosimilitud	-650.76			
AIC	1303.52			

Es importante destacar que las estimaciones de los parámetros varían al ajustar el modelo para la volatilidad en la Sección 4.3.2.

En la validación de los supuestos del modelo propuesto para la inflación, se verifica que $|\phi_1| < 1$, lo que garantiza la estacionariedad del proceso.

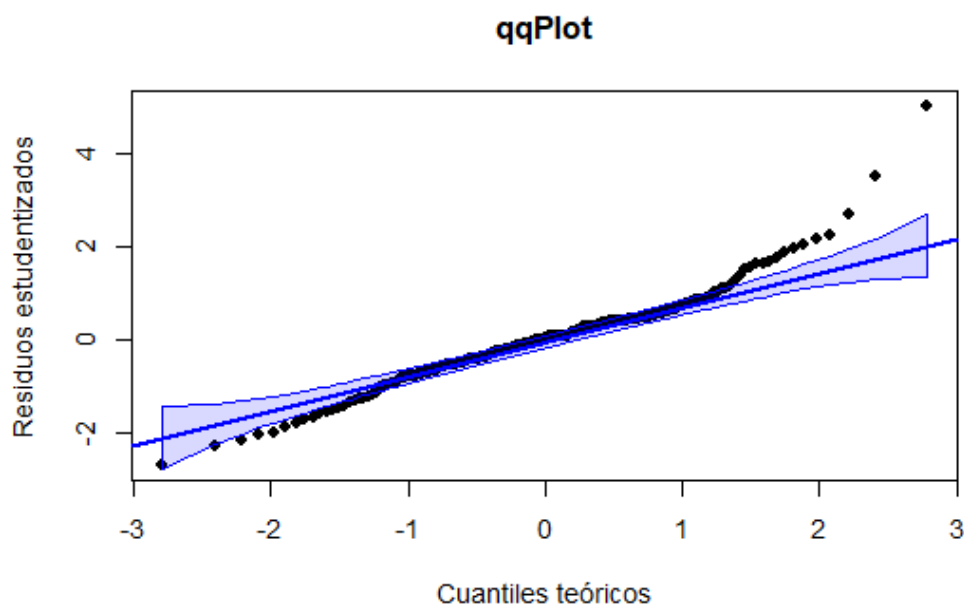


Figura 4-12: Gráfico Cuantil-Cuantil de los residuos del modelo AR(1) para la inflación.

En la evaluación de la normalidad, se detecta una violación del supuesto según se observa en la Figura 4-12, donde se evidencia una cola pesada superior. Además, esta violación del supuesto se confirma mediante el estadístico de Jarque-Bera. Además, De la Figura 4-13 confirmamos que el supuesto de que los residuos tienen media 0 y no están correlacionados como se visualiza en el gráfico superior y el del medio respectivamente. Se confirma que el supuesto de incorrelación se cumple con ayuda del gráfico de valores p de la prueba de Ljung-Box, que muestra que hasta el rezago 10, no se rechaza la hipótesis nula de incorrelación de los residuos. Sin embargo, para el supuesto de varianza constante se tiene que visualmente el supuesto no se cumple. Por lo tanto en 4.3.2 se aborda el modelado de la volatilidad o varianza de la serie.

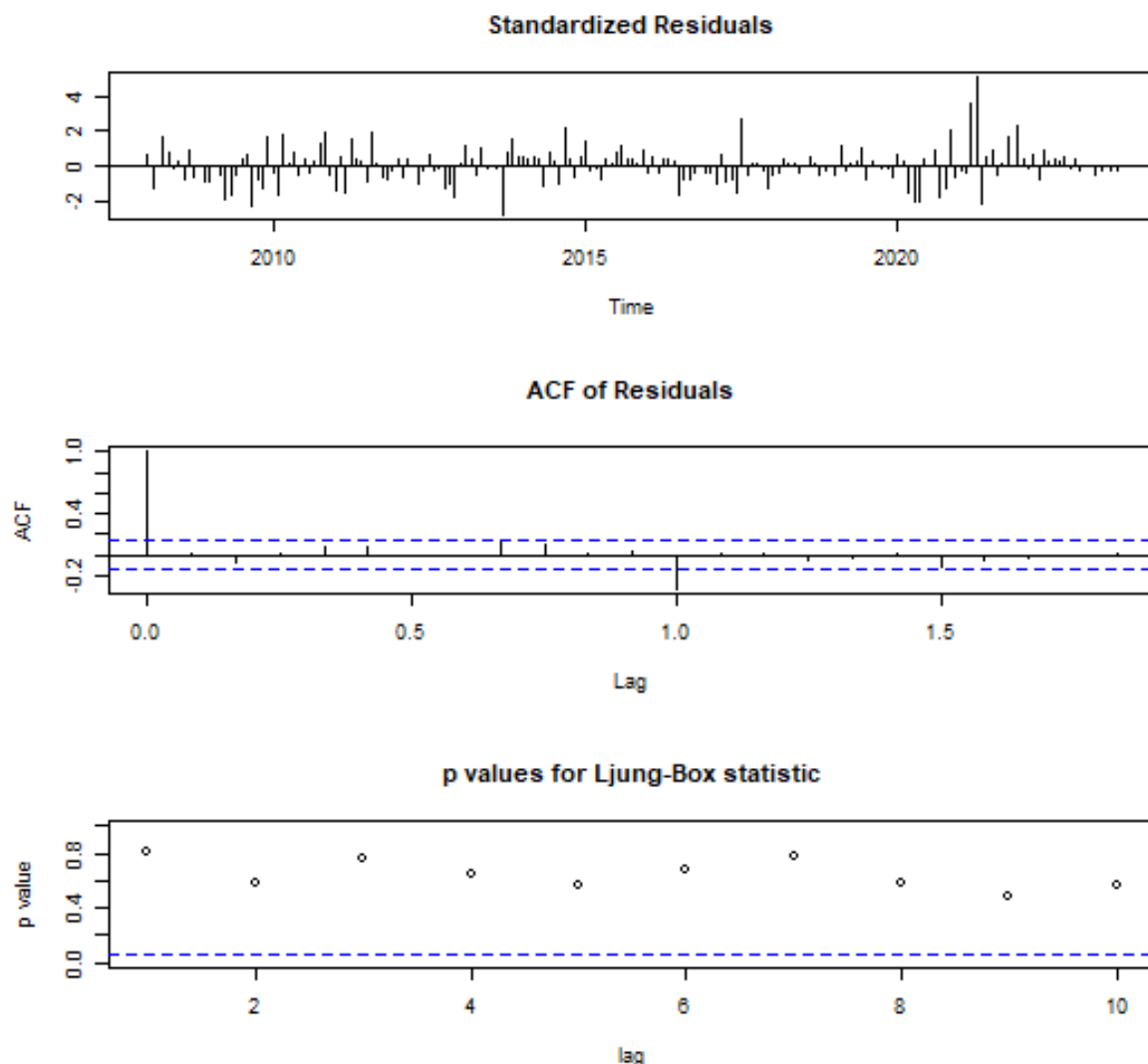


Figura 4-13: Diagnóstico de los residuos del modelo AR(1) para la inflación.

4.3. Modelo para la varianza condicional

Como se mencionó en la sección 4.2, se observaron violaciones al supuesto de la varianza constante, también conocida como volatilidad en los mercados financieros. Por lo tanto, los modelos de series temporales propuestos no fueron adecuados para capturar toda la dinámica de la serie temporal. En este capítulo, presentamos los resultados del ajuste de modelos GARCH, que resultaron ser la mejor alternativa para modelar estas series de tiempo no homogéneas. Con el uso de los modelos GARCH, buscamos capturar la heterocedasticidad y eliminar la dependencia serial de los residuos estandarizados, lo que garantiza que las observaciones sean independientes e idénticamente distribuidas (iid), preparándolas así para el ajuste de una copula.

4.3.1. Modelo de varianza condicional para el IBR

Inicialmente, se evaluó si hay efectos ARCH en los residuos del modelo ARMA(1,1) ajustado para el IBR. Se utilizó la prueba de multiplicadores de Lagrange y se encontró un valor p de 0.0004, lo que indica que rechazamos la hipótesis nula. Esto confirma que existen efectos ARCH significativos en los residuos estandarizados del modelo.

Tabla 4-4: Estimación de los criterios de información AIC y BIC para 15 modelos GARCH ajustados a los log-retornos del IBR.

i	Modelo	Distribución	AIC	BIC
12	sGARCH 2 1	ged	5.550.694	5.688.923
14	sGARCH 1 2	ged	5.587.069	5.725.298
11	sGARCH 1 1	ged	5.600.884	5.721.835
15	sGARCH 1 3	ged	5.611.247	5.766.755
6	sGARCH 1 1	std	5.727.042	5.847.992
7	sGARCH 2 1	std	5.741.688	5.879.917
9	sGARCH 1 2	std	5.742.467	5.880.696
8	sGARCH 3 1	std	5.757.545	5.913.053
10	sGARCH 1 3	std	5.758.162	5.913.670
13	sGARCH 3 1	ged	5.863.155	6.018.663
2	sGARCH 2 1	norm	6.227.090	6.348.041
1	sGARCH 1 1	norm	6.233.720	6.337.392
3	sGARCH 3 1	norm	6.242.419	6.380.649
4	sGARCH 1 2	norm	6.248.510	6.369.461
5	sGARCH 1 3	norm	6.265.442	6.403.671

En la Tabla 4-4, se presentan los modelos ARMA(1,1)-GARCH(m,s) ajustados, los cuales incluyen el parámetro μ para el ARMA(1,1), dado que se observó que fue significativo

en casi todos los modelos. Estos modelos fueron estimados bajo la suposición de que las distribuciones de los log-retornos seguían una distribución normal, GED y t de Student. Se seleccionó un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1), donde los residuos provienen de una distribución GED escalada con parámetro κ .

En la Tabla 4-5 se presentan las estimaciones de los parámetros del modelo ajustado. Se observa que el parámetro omega no fue estadísticamente significativo, sin embargo, se incluirá debido a que su exclusión afecta el diagnóstico de los residuos del modelo y produce residuos muy grandes. Por otro lado, los demás parámetros, tanto para el modelo de media condicional ARMA(1,1) como para la varianza condicional GARCH(1,1), resultaron ser significativos.

Tabla 4-5: Estimación del modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para los log-retornos del IBR

Parametro	Estimación	Error estandar	Valor t	Pr(> t)
mu	0.086113	0.003390	253.995	0.000000
ar1	0.632677	0.009050	699.054	0.000000
ma1	-0.537129	0.009415	-570.492	0.000000
omega	1.914.523	1.084.981	17.646	0.077636
alpha1	0.524419	0.132165	39.679	0.000073
beta1	0.474384	0.085927	55.208	0.000000
shape	0.528359	0.049660	106.395	0.000000

El modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) se define mediante las siguientes ecuaciones:

$$IBR_t = \phi_0 + \phi_1 IBR_{t-1} + \theta_1 a_{t-1} + a_t \quad (4-5)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (4-6)$$

Donde ϕ_0, ϕ_1, θ_1 son los coeficientes del modelo ARMA(1,1), a_t es el término de error, ω corresponde a la varianza promedio según Kambouroudis (2016), y α_1 y β_1 son los parámetros del modelo GARCH(1,1).

Para diagnosticar el modelo ajustado, se examinan las funciones de autocorrelación (ACF) de los residuos estandarizados y los residuos al cuadrado. Además, se realizó el test de Ljung-Box para ambos casos. Se confirma que el modelo es adecuado, dado que los residuos del modelo no presentan correlación serial y no muestran evidencia de volatilidad condicional.

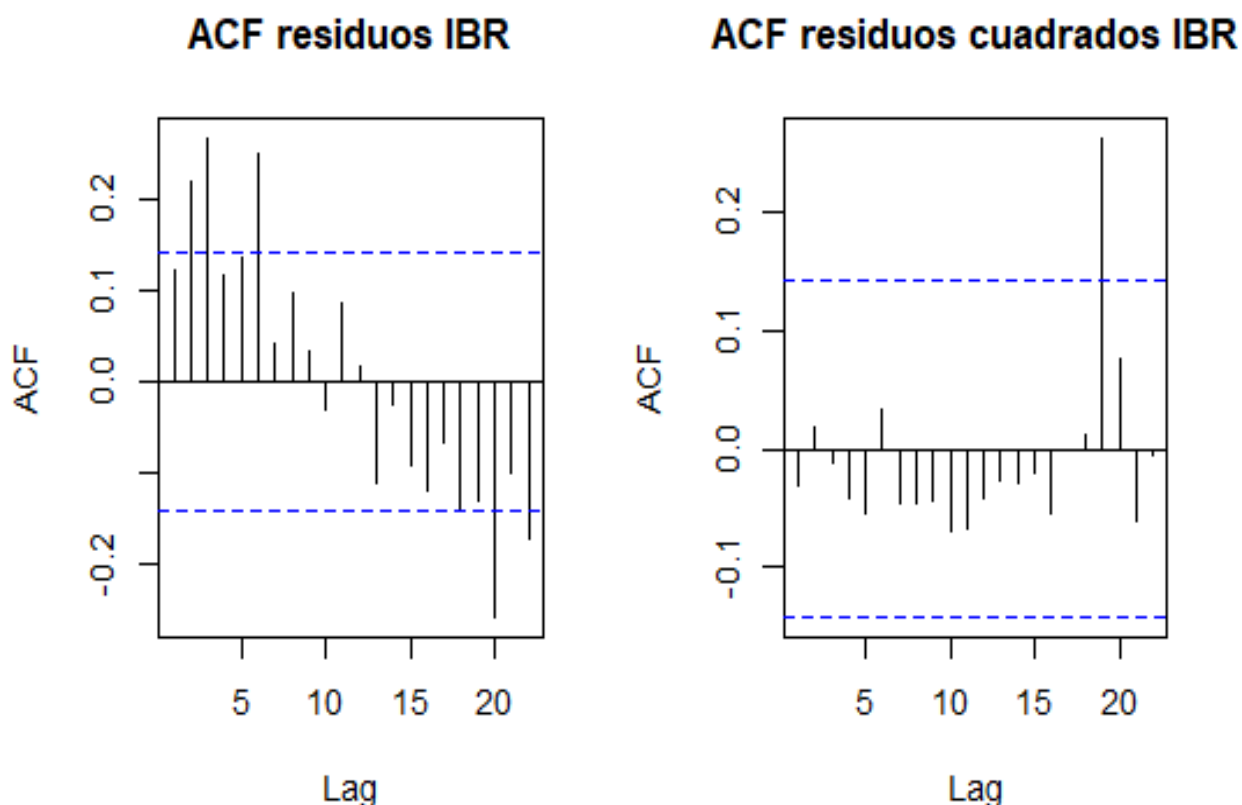


Figura 4-14: ACF y PACF de los residuos del modelo $\text{ARMA}(1,1)\text{-GARCH}(1,1)$ para el IBR.

4.3.2. Modelo de varianza condicional para la inflación

Como en 4.3.1 primero se evaluó si existen efectos ARCH en los residuos del modelo $\text{AR}(1)$ ajustado para la media condicional. Se comprueba mediante la prueba de multiplicadores de Lagrange que si hay efectos ARCH.

En la Tabla 4-6, se muestran los modelos $\text{AR}(1)\text{-GARCH}(m,s)$, junto con sus respectivos valores de AIC y BIC. Tras el análisis, se seleccionó un modelo $\text{AR}(1)\text{-GARCH}(1,1)$, donde los residuos siguen una distribución GED. Aunque los modelos 15 y 10 presentaban un AIC más bajo, al examinar la significancia de sus parámetros, dos de ellos resultaron no ser estadísticamente significativos. Además, la elección del modelo se respaldó con el criterio del BIC, ya que fue el más bajo entre todas las opciones consideradas.

Tabla 4-6: Estimación de los criterios de información AIC y BIC para 15 modelos GARCH ajustados a los log-retornos de la inflación.

i	Modelo	Distribución	AIC	BIC
15	sGARCH 1 3	ged	6.829.314	6.967.543
10	sGARCH 1 3	std	6.838.127	6.976.356
11	sGARCH 1 1	ged	6.840.991	6.944.663
14	sGARCH 1 2	ged	6.844.469	6.965.420
6	sGARCH 1 1	std	6.847.253	6.950.925
12	sGARCH 2 1	ged	6.851.233	6.972.184
5	sGARCH 1 3	norm	6.853.822	6.974.773
7	sGARCH 2 1	std	6.857.303	6.978.254
13	sGARCH 3 1	ged	6.861.847	7.000.076
8	sGARCH 3 1	std	6.868.211	7.006.441
1	sGARCH 1 1	norm	6.892.658	6.979.051
4	sGARCH 1 2	norm	6.892.801	6.996.473
2	sGARCH 2 1	norm	6.903.048	7.006.720
9	sGARCH 1 2	std	6.904.494	7.025.445
3	sGARCH 3 1	norm	6.913.452	7.034.403

En la Tabla 4-7 se presentan las estimaciones de los parámetros del modelo ajustado. Como el parámetro omega no fue significativo, al especificarse el modelo se fijó en 0. Por otro lado, las estimaciones de los parámetros para la media, la varianza y el parámetro de forma estimado de la distribución GED fueron significativas.

El modelo AR(1)-GARCH(1,1) se define mediante las siguientes ecuaciones:

$$INFL_t = \phi_0 + \phi_1 INFL_{t-1} + a_t \quad (4-7)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (4-8)$$

Tabla 4-7: Estimación del modelo AR(1)-GARCH(1,1) para los log-retornos de la inflación.

Parametro	Estimación	Error estandar	Valor t	Pr(> t)
ar1	0.50869	0.069097	7.3620	0.000000
omega	0.00000	NA	NA	NA
alpha1	0.19363	0.051841	3.7352	0.000188
beta1	0.80537	0.044601	18.0571	0.000000
shape	1.22817	0.146906	8.3602	0.000000

Tras realizar el diagnóstico del modelo ajustado, se determina que este es adecuado, dado que no se observan autocorrelaciones en los residuos estandarizados ni en sus cuadrados. Garantizando la eliminación de correlación serial y la capacidad del modelo de capturar adecuadamente la volatilidad condicional de los retornos.

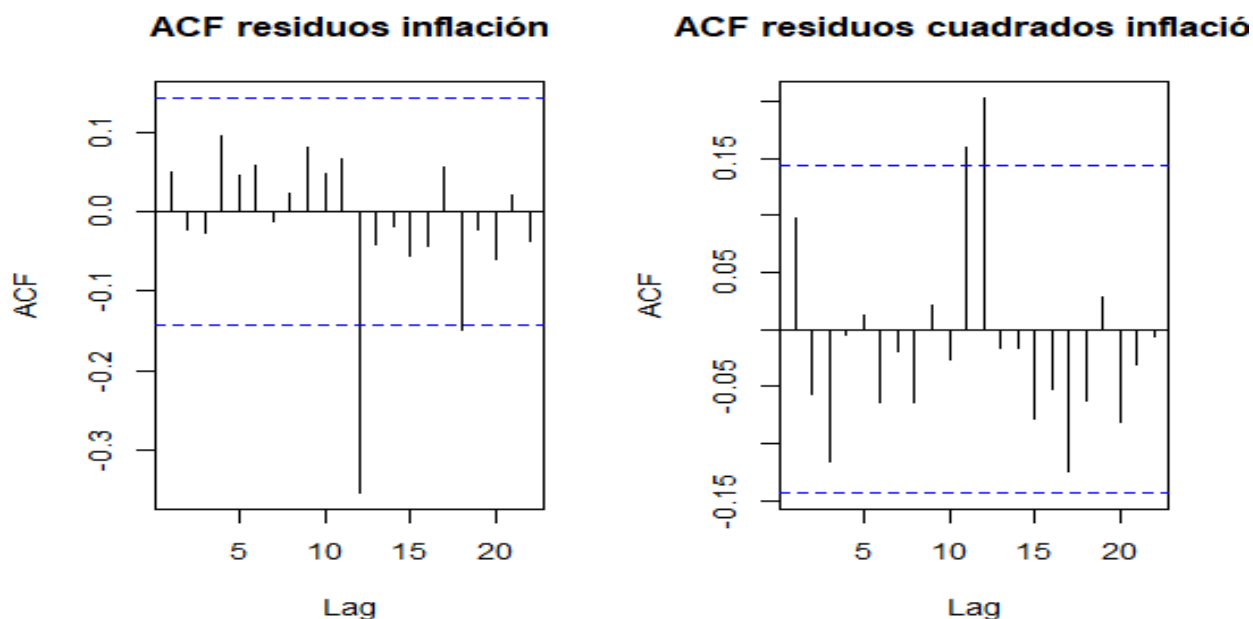


Figura 4-15: ACF y PACF de los residuos del modelo $AR(1)$ -GARCH(1,1) para la inflación.

4.4. Ajuste de función copula

En esta sección, se detallan los resultados obtenidos tras aplicar rigurosamente la metodología para la estimación, selección y diagnóstico de la cópula que describe la dependencia entre el indicador bancario de referencia (IBR) y la inflación. Uno de los enfoques de estimación consiste en asumir que la distribución de las variables marginales es conocida. Por otro lado, el segundo enfoque de estimación se realiza bajo la premisa de que las distribuciones marginales son desconocidas. A lo largo de esta sección, se discuten detalladamente los resultados de ambas aproximaciones.

4.4.1. Ajuste asumiendo marginales conocidas

Los modelos ajustados suponen que los errores provienen de una distribución de error general. En las Figuras 4-16 y 4-17, se ilustra gráficamente el ajuste de estas distribuciones, mientras que en la Tabla 4-8 se proporcionan detalles sobre los parámetros estimados. Este enfoque

nos permite determinar que los parámetros estimados de las distribuciones de los residuos estandarizados de los modelos GARCH son apropiados.

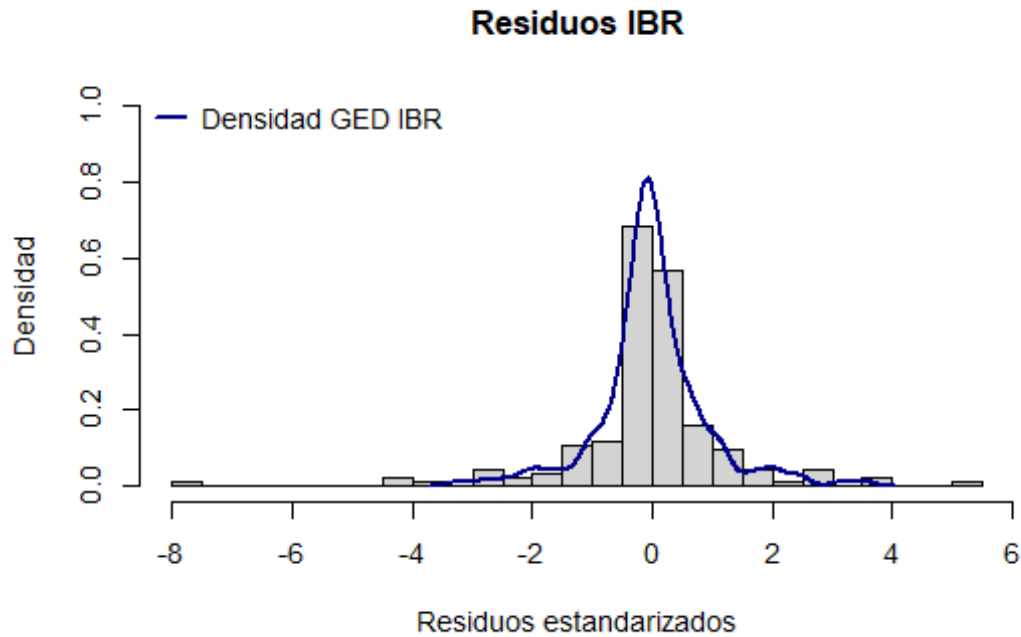


Figura 4-16: Ajuste de distribución de residuos de modelo ARMA-GARCH para el IBR.

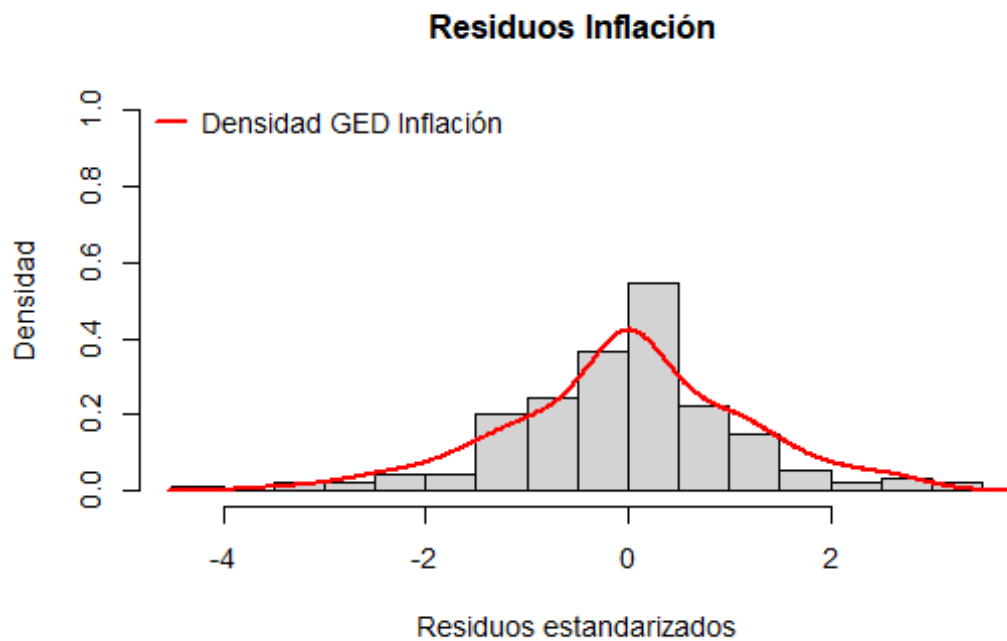
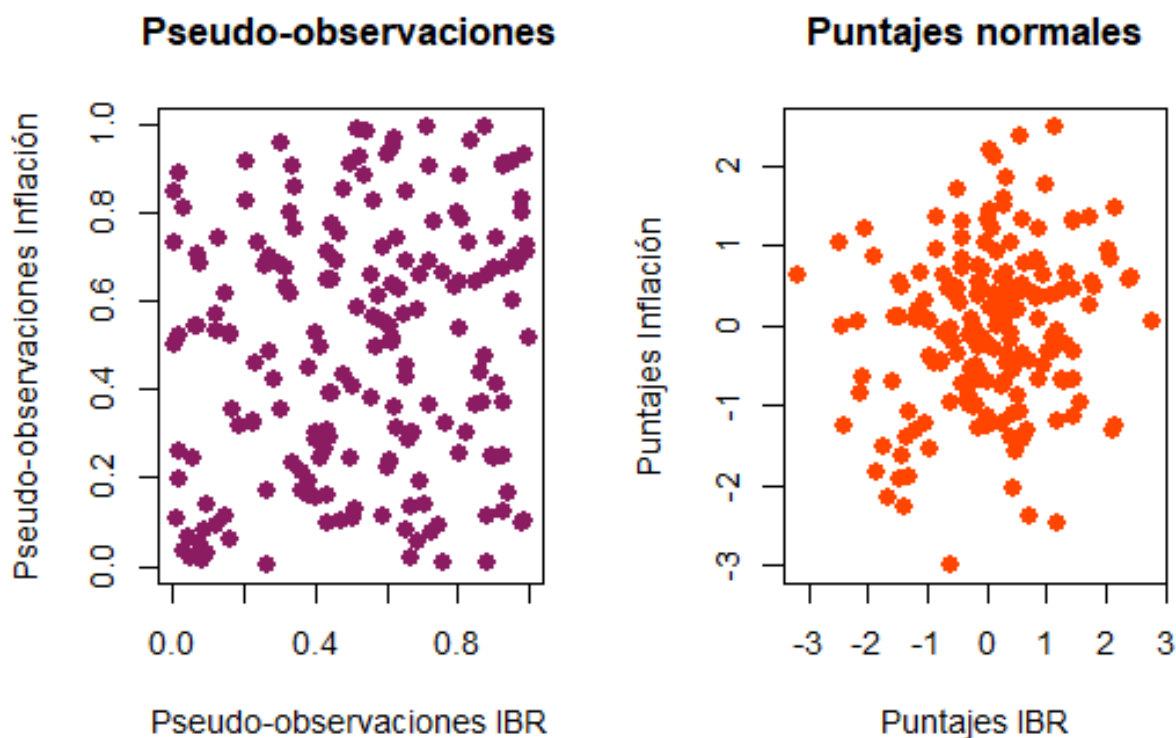


Figura 4-17: Ajuste de distribución de residuos de modelo AR-GARCH para la inflación.

Tabla 4-8: Estimación de parámetros de distribución de residuos en modelos GARCH.

Variable	Parametro	Estimación
IBR	Localización	-0.04406898
	Escala	1.13740976
	Forma	0.54320017
Inflación	Localización	0.02271208
	Escala	1.11434863
	Forma	1.16346959

**Figura 4-18:** Pseudo-observaciones paramétricas(izquierda) y puntajes normales (derecha) del conjunto de datos de IBR e inflación.

Como se evidencia en la Figura 4-18 la cópula de independencia no es adecuada para vincular las distribuciones marginales ya que no muestra una dispersión aleatoria. Por lo tanto, se lleva a cabo el ajuste de siete funciones cópulas. Los resultados se presentan en la Tabla 4-9, donde se muestra la estimación del parámetro de dependencia θ y el AIC asociado al ajuste. Basándonos en el AIC, se propone que la cópula que mejor se ajusta a los residuos estandarizados del modelo GARCH para la variable IBR e Inflación es la cópula

normal con distribuciones marginales GED.

La función cópula ajustada, $C_{0,16}^n$, definida por 4-9, se compara gráficamente con la cópula empírica en la Figura 4-19. La visualización muestra un ajuste satisfactorio, respaldando la idoneidad del modelo de cópula normal para representar la dependencia entre las variables.

$$C_{0,16}^n(u_1, u_2) = N_{0,16}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) \quad (4-9)$$

Tabla 4-9: Estimaciones del parámetro θ para 7 siete funciones cópula usando las pseudo observaciones.

Cópula	θ	Tau de kendall	AIC
FGM	0.4431638	0.09848889	-2.337301
Frank	0.9785124	0.1076992	-2.77745
Gumbel	1.074249	0.06911736	-0.2053611
Clayton	0.2319045	0.1039043	-1.452581
Plackett	1.655389	0.1127782	-3.00722
Normal	0.1626594	0.1040143	-3.05844
t	0.15	0.09585474	-1.062392

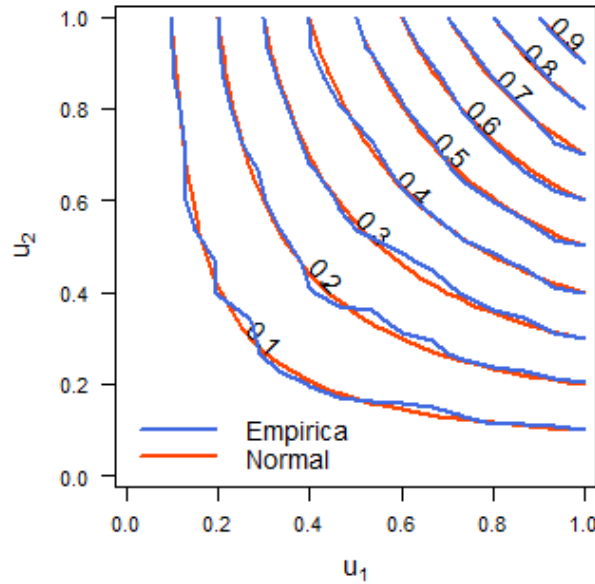


Figura 4-19: Gráfico de contornos de la cópula normal ajustada superpuesto con los contornos de la cópula empírica.

Para ofrecer evidencias de la robustez del parámetro, se presenta la estimación bootstrap del parámetro de la cópula normal, realizada a partir de 1000 remuestreos de las pseudo-observaciones. Adicionalmente, se muestra el intervalo de confianza bootstrap del 95 %.

Tabla 4-10: Resultados del Bootstrap para los Parámetros θ y τ

Parámetro	Media	Intervalo de Confianza (2.5 % - 97.5 %)
θ	0.1619	[0.0253, 0.2961]
τ	0.1038	[0.0161, 0.1914]

4.4.2. Ajuste asumiendo marginales desconocidas

Para ajustar la función cópula asumiendo marginales desconocidas se usan las funciones de distribución empíricas de los residuos de los modelos GARCH ajustados los cuales son calculados mediante la función `pobs`. En la Figura 4-20 se presentan los diagramas de dispersión de las pseudo observaciones y los puntajes normales asociados.

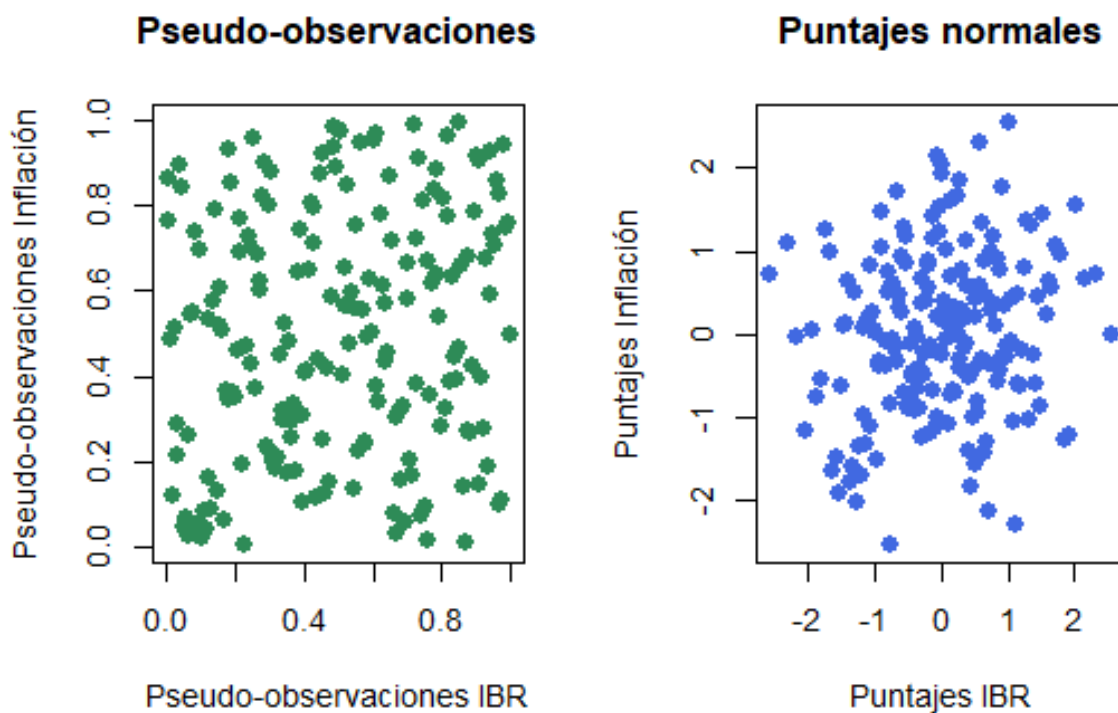


Figura 4-20: Pseudo-observaciones (izquierda) y puntajes normales (derecha) del conjunto de datos de IBR e inflación.

Al igual que en 4.4.1 se observa una débil dependencia positiva, lo que sugiere que las distribuciones marginales ajustadas no están vinculadas por la cópula de independencia. Para confirmar esta suposición, se calcula la correlación entre ambas variables utilizando el tau de Kendall. A través de la función `cor.test`, se determina que esta medida de dependencia es distinta a 0 con un valor p asociado de 0.03 y que además los resultados son idénticos a los presentados en 4.4.1.

Tabla 4-11: Estimaciones del parámetro θ para 7 cópulas

Copula	Theta	Tau de kendall	AIC
FGM	0.435	0.09666098	-2.066277
Frank	0.9561	0.1052731	-2.457434
Gumbel	1.088	0.0809941	-0.7779121
Clayton	0.2319	0.1039043	-2.312102
Plackett	1.638	0.1104262	-2.666987
Normal	0.174	0.1114821	-2.783959
t	0.1675	0.1071388	-0.8206152

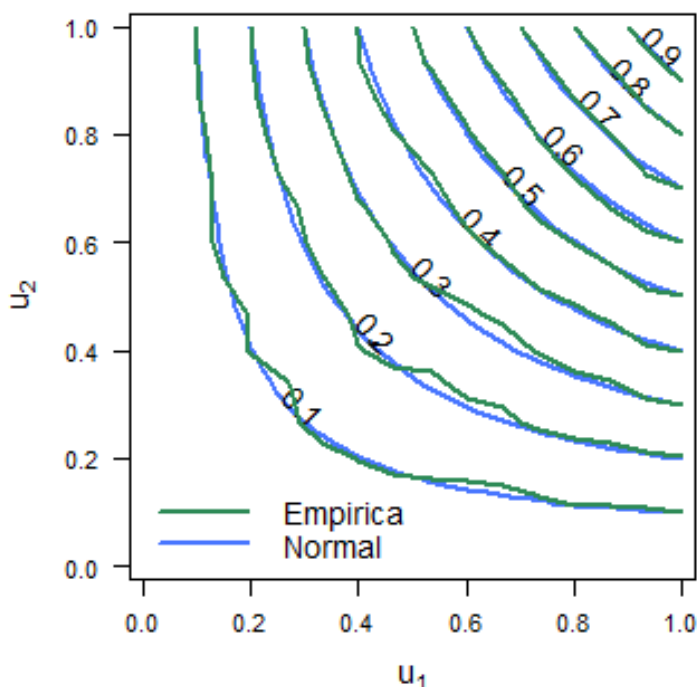


Figura 4-21: Gráfico de contornos de la cópula normal ajustada basada en pseudo observaciones superpuesto con los contornos de la cópula empírica.

Después de verificar que la cópula de independencia no es adecuada para modelar la relación entre las distribuciones marginales, procedemos a ajustar siete cópulas diferentes. Los resultados de este ajuste se resumen en la Tabla **4-11**, que incluye estimaciones de los parámetros de dependencia θ y los criterios de información de Akaike (AIC) asociados.

Al comparar los valores del AIC, notamos que la cópula que presenta el menor AIC es la normal. Por lo tanto, concluimos que la cópula normal es la que mejor se ajusta. En la Figura **4-21**, se visualiza un ajuste satisfactorio con la copula empírica, respaldando la idoneidad del modelo.

Para ofrecer evidencias de la robustez del parámetro en el ajuste de la cópula con marginales desconocidas, se presenta la estimación bootstrap del parámetro, realizada a partir de 1000 remuestreos de las pseudo-observaciones obtenidas de la función de distribución empírica (EDF) de los residuos del modelo GARCH. Adicionalmente, se muestra el intervalo de confianza bootstrap del 95 %.

Tabla 4-12: Resultados del Bootstrap para los Parámetros θ y τ con Marginales Desconocidos

Parámetro	Media	Intervalo de Confianza (2.5 % - 97.5 %)
θ	0.1721	[0.0113, 0.3143]
τ	0.1104	[0.0072, 0.2035]

5 Conclusiones

El análisis realizado sobre la relación entre la inflación y el Indicador Bancario de Referencia (IBR) ha proporcionado una visión detallada sobre la dinámica y dependencia entre estas dos variables económicas cruciales. El proceso comenzó con una exhaustiva exploración de los datos, seguido de la estimación de distribuciones marginales utilizando modelos GARCH para capturar la volatilidad de las series temporales. Los resultados mostraron que los modelos ARMA(1,1) y AR(1) eran adecuados para modelar la dinámica de la inflación y el IBR, respectivamente. Sin embargo, se identificaron violaciones al supuesto de varianza constante, lo cual se atribuye en parte a eventos de crisis globales que afectaron la volatilidad. Este hallazgo llevó al ajuste de modelos GARCH, los cuales permitieron una modelación más precisa de la volatilidad.

La evaluación de la dependencia entre el IBR y la inflación reveló que la cópula de independencia no era adecuada para los datos observados. Tras descartar este modelo, se ajustaron siete tipos diferentes de cópulas y se determinó que la cópula normal ofrecía el mejor ajuste. Los resultados también indicaron que tanto el enfoque de estimar cópulas con marginales conocidas como desconocidas conducían a resultados similares, lo que sugiere que el modelo de cópula asumiendo marginales desconocidas podría ser preferido para evitar los problemas derivados de una especificación incorrecta de los parámetros de las distribuciones marginales, lo que conduce a estimaciones sesgadas del parámetro de dependencia θ .

Además, se evaluó la robustez de las estimaciones de los parámetros de dependencia mediante el método bootstrap. Los resultados mostraron que las estimaciones puntuales del parámetro de dependencia, tanto para el ajuste de cópulas con marginales conocidas como desconocidas, fueron consistentes con las obtenidas sin el uso de bootstrap. Esto subraya la fiabilidad de las estimaciones obtenidas.

Los resultados de la cópula ajustada revelan que la relación entre el Indicador Bancario de Referencia (IBR) y la inflación es de aproximadamente 0.17, lo que indica una dependencia positiva débil entre ambas variables. Es fundamental destacar que esta medida refleja una asociación o dependencia y no implica causalidad. Es decir, aunque una tendencia al alza en una de las variables suele estar relacionada con un comportamiento similar en la otra, no se puede concluir que una variable cause directamente el cambio en la otra. Además, el ajuste con una cópula normal sugiere que la relación entre el IBR y la inflación es

aproximadamente lineal, con una dependencia en las colas simétrica de 0. Esto implica que la probabilidad de observar valores extremos simultáneamente en ambas variables es equivalente, tanto en los extremos altos como bajos.

Este hallazgo respalda la idea de que el IBR puede ser una herramienta útil en la política monetaria para influir en la inflación, aunque su efectividad no es absoluta. La política monetaria afecta la inflación a través de mecanismos tanto directos como indirectos. Los canales directos se relacionan con efectos inmediatos de las tasas de política monetaria, como la decisión de los consumidores de aplazar compras en respuesta a aumentos en las tasas de interés. Por otro lado, los canales indirectos incluyen los efectos de la tasa de política monetaria sobre variables adicionales, como el crédito bancario, los precios de los activos, la rentabilidad relativa entre activos financieros internos y externos, expectativas de inflación, dividendos y salarios. Estos canales indirectos también influyen en la inflación, pero de manera más indirecta y compleja.

Finalmente, se recomienda ampliar el alcance del estudio realizando pronósticos utilizando el modelo de cópula propuesto y llevando a cabo simulaciones de trayectorias para construir la densidad bivariada de las variables. Además, se sugiere desarrollar la distribución predictiva de la inflación condicionada a un IBR fijo para explorar más a fondo la relación entre estas variables.

Bibliografía

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, 19(6):716–723.
- Ansley, C. F. (1979). An algorithm for the exact likelihood of a mixed autoregressive-moving average process. *Biometrika*, 66(1):59–65.
- Arce Buitrago, N. (2023). Respuesta de la política monetaria en colombia durante el covid-19.
- Becerra, Ó. R. and Melo Velandia, L. F. (2009). Transmisión de tasas de interés bajo el esquema de metas de inflación: evidencia para colombia. *Cuadernos de economía*, 46(133):103–134.
- Betancourt, R., Vargas, H., and Rodríguez, N. (2008). Interest rate pass-through in colombia: a micro-banking perspective. *Cuadernos de economía*, 45(131):28–58.
- Bollerslev, T. (1987). A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The review of economics and statistics*, pages 542–547.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C., and Whitelaw, R. F. (1998). The econometrics of financial markets. *Macroeconomic Dynamics*, 2(4):559–562.
- Cárdenas, M. and Hernández, A. (2022). Las repercusiones económicas de la guerra en ucrania sobre américa latina y el caribe. *Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD)*, pages 1–24.
- Choudhary, A., Kumar, S., Sharma, M., and Sharma, K. P. (2022). A framework for data prediction and forecasting in wsn with auto arima. *Wireless Personal Communications*, pages 1–15.
- Clayton, D. G. (1978). A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. *Biometrika*, 65(1):141–151.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American statistical association*, 74(366a):427–431.

- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, pages 987–1007.
- Farlie, D. J. (1960). The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika*, 47(3/4):307–323.
- Flores de la Fuente, E. (2009). *EDAs con Funciones de cópula*. PhD thesis, Master’s thesis, Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, México
- Frank, M. J. (1979). On the simultaneous associativity of $f(x, y)$ and $x + y - f(x, y)$. *Aequationes mathematicae*, 19:194–226.
- Garizado, P. A. and Londoño, H. H. (2004). Canales de transmisión de la política monetaria: una revisión para el caso colombiano.
- Genest, C., Ghoudi, K., and Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82(3):543–552.
- Grégoire, V., Genest, C., and Gendron, M. (2008). Using copulas to model price dependence in energy markets. *Energy risk*, 5(5):58–64.
- Gudynas, E. (2023). América latina frente a la inflación de los codiciosos. *Revista de la Universidad de México Nro*, 896:66–71.
- Gumbel, E. J. (1958). Distributions à plusieurs variables dont les marges sont données. *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences*, 246(19):2717–2719.
- Hernández-Gamarra, A. and Tolosa-Buitrago, J. (2001). La política monetaria en colombia en la segunda mitad de los años noventa. *Borradores de Economía; No. 172*.
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M., and Yan, J. (2018). *Elements of copula modeling with R*. Springer.
- Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987). A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, pages 163–172.
- Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models. *Journal of multivariate Analysis*, 94(2):401–419.
- Kambouroudis, D. (2016). Modeling and forecasting stock market volatility in frontier markets: evidence from four european and four african frontier markets. In *Handbook of Frontier Markets*, pages 39–54. Elsevier.

- Kendall, M. G. (1938). A new measure of rank correlation. *Biometrika*, 30(1/2):81–93.
- Kovvuri, A. R., Uppalapati, P. J., Bonthu, S., and Kandula, N. R. (2022). Water level forecasting in reservoirs using time series analysis–auto arima model. In *International Conference on Cognitive Computing and Cyber Physical Systems*, pages 192–200. Springer.
- Kwofie, C., Akoto, I., and Opoku-Ameyaw, K. (2020). Modelling the dependency between inflation and exchange rate using copula. *Journal of Probability and Statistics*, 2020:1–7.
- Lai, C. D. and Balakrishnan, N. (2009). *Continuous bivariate distributions*. Springer.
- León, J. M. G. (2015). Relación entre política monetaria y estabilidad financiera: un análisis aplicado para colombia. *Ensayos sobre Política Económica*, 33(77):133–148.
- Ljung, G. M. and Box, G. E. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2):297–303.
- Martínez, R. Q. (1991). Precios e inflación: una revisión de conceptos teorías y políticas. *Ciencia y sociedad*, 16(2):109–137.
- Medina, J. M. (2018). Impacto de las tasas de interés de intervención, ibi y dtf en la inflación (junio 2012-junio 2016).
- Morgenstern, D. (1956). Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, 8:234–235.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Science & Business Media.
- Ochoa, H. and Martínez, Á. (2005). El comportamiento de la inflación en colombia durante el periodo 1955-2004. *Estudios Gerenciales*, 21(95):75–93.
- Oner, C. (2009). ¿ qué es la inflación? *Finance & Development*.
- Ospina, A. C. (2004). Canales de transmisión monetaria: una revisión para colombia1. *Economía, Gestión y Desarrollo*.
- Otero, J. D. Q. (2015). Impactos de la política monetaria y canales de transmisión en países de américa latina con esquema de inflación objetivo. *Ensayos sobre política económica*, 33(76):61–75.
- Perman, R. (1991). Cointegration: an introduction to the literature. *Journal of Economic Studies*, 18(3).
- Plackett, R. L. (1965). A class of bivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 60(310):516–522.

- Posada Zuluaga, J. M. (2023). *Una aplicación de redes neuronales y modelos autorregresivos para la estimación de valores de referencia de swaps*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia.
- Qian, L., Wang, X., and Wang, Z. (2020). Modeling the dependence pattern between two precipitation variables using a coupled copula. *Environmental Earth Sciences*, 79:1–12.
- Ramírez, A. and Rodríguez, H. (2013). Un análisis var estructural de política monetaria en colombia. *Revista Facultad de Ciencias Económicas: Investigación y Reflexión*, 21(2):17–41.
- Rivera, I. (2020). *Principios de macroeconomía*. Fondo Editorial de la PUCP.
- Sandoval-Paucar, G. (2020). Efectos de propagación de los mercados financieros estadounidenses en los colombianos. *Cuadernos de Economía*, 39(81):667–702.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, pages 461–464.
- Shumway, R. H., Stoffer, D. S., and Stoffer, D. S. (2000). *Time series analysis and its applications*, volume 3. Springer.
- Subbotin, M. T. (1923). On the law of frequency of error. , 31(2):296–301.
- Toro, J., Arango, L., Gamboa, F., León, L., López, M., Martínez, D., Melo, L. F., Quicazán, C., Rincón, H., Rodríguez, N., et al. (2023). Flujos de capital de portafolio en colombia. *Revista Ensayos Sobre Política Económica; No. 105, Julio 2023. Pág.: 1-103*.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of financial time series*. John wiley & sons.
- Vargas-Herrera, H., Murcia Pabón, A., Cabrera-Rodríguez, W. A., Symington-Alzate, P. R., Murillo-Ariza, S., Barreto Ramírez, I. A., Botero-Ramírez, O. D., León-Díaz, L. V., Martinez-Cruz, D. A., Mateus-Gamboa, J. C., et al. (2024). Reporte de mercados financieros-primer trimestre de 2024. *Reporte de Mercados-Primer trimestre de 2024*.
- Vidaurre, J. I. (2016). Identificación de modelos de aproximación de betas financieras en su medición del riesgo-retorno, aplicable al sistema financiero bancario de bolivia. *Revista perspectivas*, (37):41–74.
- Wang, Z., Jin, Y., and Zhou, Y. (2010). Estimating portfolio risk using garch-evt-copula model: An empirical study on exchange rate market. *Advances in neural network research and applications*, pages 65–72.
- Wei, W. W. (2013). Time series analysis.

Zamudio, L. E. V. (2022). Inflation in colombia and possible future scenarios. *Apuntes del CENES*, 41(74):11–13.

Zivot, E. and Wang, J. (2006). Vector autoregressive models for multivariate time series. *Modeling financial time series with S-PLUS®*, pages 385–429.