



FACULTAD DE CIENCIAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

**Puntos críticos de soluciones de
problemas de contorno elípticos con
condición tipo Dirichlet**

Autor:

Andrés DELGADO O.

Director:

Dr. Jaime ARANGO C.

9 de febrero de 2017

Resumen

Este trabajo está dedicado a estudiar cualitativamente las soluciones de problemas semilineales elípticos sobre dominios que no tienen frontera analítica. Para esto examinamos el conjunto crítico de la solución. Arango y Gómez [2, 3] demuestran que en un dominio anular con frontera analítica, el conjunto de puntos críticos de la solución de un problema elíptico que modela la deflexión de una membrana sujeta en el borde, está formado por un número finito de puntos críticos aislados y un número finito de curvas de Jordan. En esta investigación se generalizará el resultado a dominios anulares con frontera interior poligonal. La herramienta principal para obtener la generalización es el estudio de las líneas nodales asociadas a la solución del problema elíptico. También usamos las líneas nodales para concluir que la solución del problema de contorno 3-dimensional $-\Delta u = f(u)$ sobre un Toroide y con la condición de Dirichlet nula en la frontera, tiene una única curva crítica y no tiene puntos críticos aislados.

Por otra parte, usamos planos móviles para obtener una subregión del dominio sobre la cual la solución al problema de contorno no tiene puntos críticos. Además, al combinar la técnica de los planos móviles y de la transformada Kelvin logramos probar que los vértices interiores de algunos dominios anulares no son puntos de acumulación de puntos críticos.

MSC (2010): Principal 35J25, Secundarios 74K15, 35J05.

Índice general

Introducción	III
1. Planteamiento del problema	1
1.1. Historia del problema	1
1.2. Antecedentes y estado del arte	3
2. Generalidades de las soluciones	7
2.1. Propiedades de la solución	11
2.1.1. Reflexiones y planos móviles	15
2.1.2. El problema lineal	17
2.1.3. Simetrías	20
2.2. Líneas nodales	24
3. Planos móviles	39
3.1. Simetrías, planos móviles y región sin puntos críticos	39
3.2. Ejemplos	41
3.2.1. Dominios tipo tuerca	41
3.2.2. Otros dominios	45
3.3. La Transformada Kelvin	53
4. Puntos críticos en el espacio	57
4.1. Algunos ejemplos en $\mathbb{R}^3$	57
4.2. El toroide	61
5. Conclusiones y perspectivas	65

Introducción

Consideremos el problema semilineal de contorno

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado del plano, f es una función real a valor real y Δ es el operador de Laplace. De manera general estudiaremos las soluciones de clase $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y en particular nos enfocaremos en las soluciones analíticas en Ω y continuas en la frontera $\partial\Omega$.

Si u es una solución de (1), nuestro objetivo principal es estudiar el conjunto crítico

$$\mathbb{K} = \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\},$$

en donde ∇ es el operador gradiente. El estudio del conjunto crítico $\mathbb{K}$ es importante entre otras cosas puesto que la ecuación (1) modela un amplio repertorio de problemas físicos, entre ellos superficies mínimas, deflexiones de membranas elásticas y también se encuentran aplicaciones en la mecánica de fluidos. Quizá, una de las principales dificultades en el estudio de este tipo de ecuaciones es la dependencia sensible de una solución con respecto al dominio. En el Trabajo de Grado [10] se pueden apreciar ejemplos donde se muestra esta situación. Además, se conocen pocos ejemplos donde se pueda dar una solución explícita al problema (1). Luego, el estudio de $\mathbb{K}$ es importante para dar una descripción de la naturaleza y propiedades de una solución u .

El estudio del problema (1) y la descripción del conjunto crítico $\mathbb{K}$ hace parte de una larga cadena de resultados, que van desde Makar-Limanov (1971) [18], Cabré y Chanillo (1998) [7], Grossi y Molle [17] (2003), Gladiali y Grossi [15] (2004) hasta resultados más recientes como Grecco [16] (2006), Finn [12] (2008), Arango y Gómez (2011) [2], (2012) [3], entre muchos otros. La presente investigación comienza con el Trabajo de Grado (2009) [10] en el cual se estudió el conjunto crítico de la solución al problema lineal (1) con f constante, para la investigación se estudiaron las líneas nodales, las cuales básicamente son la curva de nivel cero de la función $\nabla u \cdot \theta$, siendo

θ una dirección en S^1 . En la Sección 2.2 retomaremos la investigación de las líneas nodales. En [10] se mostró que una función armónica tiene a lo más un número finito de puntos críticos en un compacto. Se obtuvieron resultados sobre el cardinal del conjunto $\mathbb{K}$ de la solución al problema (1) siendo f una constante, resultado que se obtiene sin usar la condición Dirichlet en la frontera. Además, se presentaron varios ejemplos donde se expuso como una pequeña perturbación en Ω produce un cambio significativo en $\mathbb{K}$. También se exhibió un ejemplo explícito en el cual la solución de (1) con f constante posee un único punto crítico el cual es degenerado, en el sentido de que la matriz Hessiana de u es singular.

En la Tesis de Maestría 2012 [11] se abordó el mismo objetivo principal, pero en este caso se estudió el problema semilineal y se consideraron dominios con frontera analítica a trozos. Algunos de los resultados de la Tesis de Maestría [11] han sido publicados en [1]. En [11] se probó la existencia de una familia de dominios anulares donde la solución de (1) no tiene curvas críticas. Se hizo una extensión a dominios con frontera analítica a trozos del resultado probado por Arango y Gómez [2] (Teorema 1.3), mediante el cual el conjunto crítico de la solución de (1) es una curva de Jordan y una cantidad finita de puntos. Más aún se demostró que existen dominios anulares donde tal curva crítica no existe.

Makar-Limanov en [18] combina técnicas geométricas y analíticas para probar que la solución del problema (1) donde $f \equiv 1$, tiene curvas de nivel convexas sobre un dominio Ω convexo con frontera suave. Este resultado permite concluir que la solución posee un único punto crítico el cual es un máximo, ver el Teorema 1.1.

Cabré y Chanillo [7] al estudiar el problema 2-dimensional y al igual que en la presente investigación, se basan en el estudio de las líneas nodales. Ellos concluyen que si Ω es un dominio plano suave, acotado, convexo con frontera de curvatura positiva y $f \geq 0$ entonces la solución de (1) tiene un único punto crítico no degenerado, ver el Teorema 1.2. Ellos obtienen un resultado análogo en el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de revolución estrictamente convexo. En este caso la hipótesis y herramienta fundamental es la simetría del dominio. Ver [7, Theorem 2].

Arango y Gómez [2, 3] también utilizan la técnica de las líneas nodales para describir el conjunto crítico de la solución de (1) en un dominio plano con frontera suave, ver el Teorema 1.3. También abordan el problema cuando Ω es una región anular cuyas fronteras son ambas de curvatura no nula.

La principal suposición sobre el término semilineal f en la ecuación (1) que se hizo en este trabajo es la siguiente:

Suposición 1. *f es una función decreciente, real analítica definida en un intervalo abierto y acotado, que satisface $f(0) > 0$.*

La dificultad al tratar dominios con frontera poligonal, básicamente es establecer

a que parte de la frontera llegan las líneas nodales, pues dado un vértice no es fácil determinar cuales líneas nodales llegarán a él. Las líneas nodales en dominios con frontera suave tienen un comportamiento muy distinto en comparación cuando el dominio tiene frontera con vértices(esquinas), compare las Figuras 2.6, 2.7 y 2.8 para apreciar las diferencias. Estas diferencias hace que las técnicas sean diferentes al tratar de resolver problemas en dominios con esquinas.

Otra de las dificultades al estudiar la ecuación (1) en un dominio que pierde analiticidad en su frontera, es la posibilidad de la acumulación de puntos críticos en los vértices. Para descartar esta eventualidad se usó la técnica de los Planos Móviles [24]. En el caso que la frontera es suave, el Lema de Punto de Frontera de Hopf permite de forma sencilla descartar esta posibilidad. Fue justamente con la técnica de los planos móviles que se logró descartar la acumulación de puntos críticos a las esquinas de dominios que en [11] se denominaron *tipo tuerca*, los cuales detallamos a continuación pues serán mencionados en reiteradas ocasiones en el documento.

Definición 1. *Llamaremos dominio tipo tuerca, a un dominio anular en el cual la frontera interior es una circunferencia centrada en el origen y la frontera exterior es un n -ágono regular cuyos vértices se encuentran sobre la circunferencia unitaria que comparte el centro con la frontera interior.*

En las figuras 3.1 (a), 3.4 (a) y 3.6 (a) en la Sección 3.2.1, se pueden apreciar algunos ejemplos de dominios de este tipo.

La técnica de los Planos Móviles usada para descartar la acumulación en las esquinas de puntos críticos no se aplica de manera obvia a algunos dominios, como es el caso de dominios anulares con vértices en la frontera interior. En particular en la inversión de un dominio tipo tuerca, es decir cuando intercambiamos de posición las fronteras que conforman al dominio tipo tuerca, quedando como frontera exterior una circunferencia y frontera interior un n -ágono regular. Estos dominios gozan de múltiples simetrías por lo cual al usar la técnica de las líneas nodales podremos descartar que en los vértices interiores no se acumulan puntos críticos, obteniendo de esta forma uno de los principales resultados de esta investigación, dando continuidad a resultados inconclusos de la Tesis de Maestría [11] y a los publicados en [1].

Teorema P 1. *Sean Ω la inversión de un dominio tipo tuerca, f una función que satisface la Suposición (1) y $u \in H^2(\Omega)$ la solución del problema de contorno (1). Entonces los vértices de la frontera interior de Ω no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución u , más aún el conjunto crítico de u no tiene curvas de Jordan, es finito y su cardinalidad es por lo menos $2n$, donde n es el número de vértices en la frontera interior de Ω .*

En este documento, también abordaremos el caso lineal de la ecuación (1), es decir

$$\begin{aligned} -\Delta u &= G & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

siendo G un campo escalar, obteniendo resultados homólogos a los consignados en [11] y [1] para el caso semilineal. En la Sección 3.3 continuamos con el problema de la acumulación de los puntos críticos de la solución en las esquinas interiores, sobre dominios anulares que no tienen las mismas simetrías que un dominio tipo tuerca o la inversión de este, esto es logrado al combinar la técnica de la transformada Kelvin, los planos móviles de Serrin y los resultados obtenidos sobre el conjunto crítico de (2). Puntualmente en el Ejemplo 3.10 mostramos que los vértices interiores del dominio $\Omega = B(0; 4) \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, -2/3 \leq x_2 \leq 1\}$ no son puntos de acumulación de la solución del problema (1) con $f \equiv a$, siendo a una constante no negativa. Para lograrlo se utilizan los resultados sobre el caso lineal (2).

A. Castro y R. Pardo en [8] utilizan la transformada Kelvin y la técnica de los planos móviles para dar una cota en L^∞ para u que no depende ni de f ni de u en (1), esta cota es determinada para la solución del problema (1) sobre dominios en $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Los autores asumen que f es una función localmente lipschitz y colocan condiciones sobre el crecimiento de esta, y así prueban que la transformada Kelvin de la solución no tiene extremos en una vecindad de la frontera del dominio transformado mediante la aplicación recíproca $1/z$, ver [8, Theorem 1.1].

Como ya se ha mencionado la mayoría de la literatura sobre el estudio del conjunto $\mathbb{K}$ de la solución de (1) se impone como hipótesis que $\partial\Omega$ es suave. Quedando interrogantes sobre el comportamiento de la solución cuando Ω no goza de este atributo. El estudio de la ecuación (1) ha sido bastante documentado en la literatura, una de las razones de su vasto estudio son las propiedades geométricas del operador de Laplace, propiedades que permiten aplicar una variedad de técnicas como reflexiones y rotaciones, planos móviles, entre otras. Sin embargo una vez que se hace una ligera modificación al operador, varias de estas propiedades se pierden y se dificulta el estudio del conjunto crítico de la solución. En este trabajo de investigación, se estudiarán algunas de las propiedades cualitativas de la solución al problema semilineal de contorno

$$\begin{aligned} L[u] &= f(u) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3)$$

donde L es el operador elíptico

$$L[u] := -\Delta u - \frac{a}{x_1 - \lambda} u_{x_1} - \frac{b}{x_2 - \lambda} u_{x_2}, \quad (4)$$

y f satisface la Suposición 1.

Abordamos el problema de estudiar el conjunto crítico de la solución de (1) en un dominio toroidal, para ello se restringe el estudio al conjunto crítico de una solución del problema de contorno 2-dimensional (3). Esto nos permitió concluir que el conjunto crítico de la solución en el Toroide está conformado exactamente por una curva crítica. Y al igual que Cabré y Chanillo en [7, Theorem 2] usamos ampliamente las propiedades geométricas del dominio, algunas de las cuales son heredadas a la solución. No conocemos literatura donde se aborde el estudio del conjunto crítico de la solución en un problema 3-dimensional, haciendo uso de los métodos usados en nuestra investigación. Concretamente se probó el siguiente resultado.

Teorema P 2. *Sea Ω el sólido de revolución obtenido al rotar una región plana Ω_0 con respecto a un eje de rotación. Supongamos que Ω_0 es un dominio estrictamente convexo, con frontera suave de curvatura nunca nula, que no contiene al origen y es simétrico respecto a uno de sus ejes, también asumiremos que f satisface la Suposición 1. Entonces la solución del problema de contorno (1) no tiene puntos críticos aislados y tiene exactamente una curva crítica la cual es degenerada.*

Para probar el Teorema P2 se estudió el conjunto crítico de la solución del problema (3) en un dominio plano, convexo y con frontera suave. De nuevo, la herramienta principal fueron las líneas nodales, estas fueron analizadas logrando mostrar la existencia y unicidad de un punto crítico. Estos resultados fueron desarrollados en la Sección 2.2 y consecuencia del Teorema 2.11, en general no es posible calcular explícitamente el punto crítico, quien es el que engendrará la curva crítica al considerar el sólido de revolución del que habla el Teorema P2.

A continuación haremos una breve síntesis sobre lo plasmado en cada capítulo de la presente investigación.

En el Capítulo 1 plantearemos el problema, comenzando con una reseña histórica, haciendo un recorrido por algunos de los autores que han hecho aportes con investigaciones afín y mostrando el estado actual de la investigación.

El Capítulo 2 es más extenso. Comenzamos por los resultados de existencia, regularidad y unicidad de solución de los problemas de contorno. Después, algunos resultados generales sobre la solución, como el signo de esta o la propiedad de ser superarmónica y otros sencillos resultados que dan cuenta del conjunto crítico. En este capítulo también enunciamos e introducimos la terminología y notación correspondiente a las simetrías y a los planos móviles, dando algunos resultados sobre la transferencia de las simetrías del dominio a la solución del problema de contorno y las incidencias que tienen los ejes de simetría del dominio sobre el conjunto $\mathbb{K}$. También introducimos las líneas nodales y hacemos un estudio detallado de las lí-

neas nodales asociadas a la solución del problema (1) sobre dominios con vértices en la frontera, también hacemos un estudio de las líneas nodales de la solución del problema (3) en dominios convexos de curvatura no nula y frontera suave.

En el Capítulo 3 usaremos los planos móviles introducidos en las secciones 2.1.1 y 2.1.3 del Capítulo 2. Con estos conceptos mostremos que en el caso de tener vértices en la frontera exterior podemos determinar una región formada por los planos móviles donde la solución carezca de puntos críticos, lo cual implica que los vértices exteriores no son puntos de acumulación de puntos críticos. En este capítulo mostraremos algunos ejemplos de dominios y de las regiones sin puntos críticos que podemos conseguir aplicando reiterativamente el método. También mostraremos, combinando la técnica de planos móviles y la transformada Kelvin, como en un caso particular del problema (1) y en un dominio con vértices en la frontera interior que estos vértices no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución.

El Capítulo 4 es dedicado a estudiar el conjunto crítico de la solución de (1) en el caso 3-dimensional. Comenzamos mostrando algunos ejemplos explícitos, algunos de los cuales motivaron considerar la ecuación (1) sobre sólidos de revolución. En este capítulo se dará la demostración del Teorema P2 con ayuda de los resultados preliminares probados en el Capítulo 2 sobre las líneas nodales asociadas al problema (3) sobre dominios convexos de curvatura no nula y frontera suave.

Finalmente, el Capítulo 5 es dedicado a las conclusiones y perspectivas, comentando varias de las dificultades y logros de la investigación.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Historia del problema

Esta breve reseña fue tomada de [22]. La ecuación de Laplace 2-dimensional es la ecuación

$$\Delta u = 0,$$

nombrada en honor al matemático francés del Siglo XVIII Pierre-Simon Laplace. Una función de valor real $u = u(x_1, x_2)$ que satisface la ecuación de Laplace es conocida como *función armónica*. El espacio de las funciones armónicas puede ser identificado como el Kernel del operador de segundo orden

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

conocido como el operador de Laplace o Laplaciano. La versión no homogénea o forzada de la ecuación de Laplace

$$-\Delta u = G(x_1, x_2)$$

es conocida como la ecuación de Poisson nombrada en honor a Siméon-Denis Poisson, quien fue discípulo de Laplace. La ecuación de Laplace y de Poisson surgen como las ecuaciones de equilibrio en una notable variedad de sistemas físicos. Por ejemplo, se puede interpretar a $u(x_1, x_2)$ como el desplazamiento de una membrana elástica como en el caso de un tambor, el término no homogéneo $G(x_1, x_2)$ representa un forzamiento externo. Otro ejemplo es el equilibrio térmico en placas planas, en este caso $u(x_1, x_2)$ representa la temperatura y $G(x_1, x_2)$ una fuente de calor externo. En mecánica de fluidos, $u(x_1, x_2)$ representa la función potencial cuyo gradiente $v = \nabla u$

es el vector velocidad de un flujo de fluido constante plano. Similares consideraciones aplican a potenciales electrostáticos y gravitacionales 2-dimensionales.

Dado que tanto la ecuación de Laplace como la ecuación de Poisson describen configuraciones de equilibrio, ellas surgen en aplicaciones en el contexto de problemas de valor en la frontera. Vemos una solución $u(x_1, x_2)$ de la ecuación diferencial definida sobre un dominio fijo y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y se requiere que la solución satisfaga adecuadas condiciones sobre la frontera $\partial\Omega$. Existen diferentes tipos de condiciones de frontera. Uno de estos es la condición tipo Dirichlet la cual especifica el valor de u sobre la frontera

$$u(x_1, x_2) = h(x_1, x_2), \quad \text{para } (x_1, x_2) \in \partial\Omega.$$

La condición tipo Dirichlet sirve para especificar la unicidad de la solución u en la ecuación de Laplace o de Poisson. Físicamente, en el caso de una membrana libre o forzada, las condiciones de frontera tipo Dirichlet corresponden al empalme del borde de la membrana con un cable a la altura $h(x_1, x_2)$, sobre cada punto en la frontera $\partial\Omega$. En el caso del equilibrio térmico una condición tipo Dirichlet representa la imposición de una distribución de temperatura prescrita, representada por la función h a lo largo de la frontera de la placa.

Otro tipo de condición de frontera es la condición tipo Newmann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta = k(x_1, x_2), \quad \text{para } (x_1, x_2) \in \partial\Omega,$$

en la cual la derivada normal de la solución u sobre la frontera es prescrita. Por ejemplo, en termodinámica una condición tipo Newmann especifica el flujo de calor en la placa a través de su frontera. El no flujo o condición homogénea de Newmann en la frontera, es decir cuando $k(x_1, x_2) = 0$, corresponde a una frontera aislada. En el caso de una membrana, la condición homogénea tipo Newmann corresponde a un borde libre en el tambor. En mecánica de fluidos, la condición homogénea implica que la componente normal del vector velocidad $v = \nabla u$ se anula sobre la frontera, y así no se permite que el fluido fluya a través de la frontera.

También aparecen condiciones mixtas sobre la frontera, imponiendo condiciones tipo Dirichlet sobre una parte de la frontera y condición tipo Newmann sobre la parte complementaria

$$\begin{aligned} -\Delta u &= G & \text{en } \Omega, \\ u &= h & \text{en } D, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= k & \text{en } N, \end{aligned}$$

donde $\partial\Omega = D \cup N$ es una unión disjunta. Por ejemplo, si u representa la temperatura de equilibrio en una placa, entonces la parte con condición tipo Dirichlet en la

frontera es donde la temperatura está fija, mientras que en la parte de la frontera con la condición Newmann la temperatura está aislada o tiene un flujo de calor prescrito. Análogamente, cuando se modela el desplazamiento de una membrana, la parte Dirichlet es donde el borde del tambor esta fijo a un soporte, mientras que la parte Newmann es donde la membrana esta colgando libremente. En este trabajo nosotros únicamente consideramos condición homogénea tipo Dirichlet.

1.2. Antecedentes y estado del arte

Como se mencionó antes, el modelamiento de una membrana elástica que se deforma bajo la acción de su propio peso, fue una de las preguntas que abordó Poisson. En un intento por responder este cuestionamiento propone que la deflexión se puede describir por una función vectorial $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, u(x_1, x_2))$ donde u es una solución de (1) con $f(u) \equiv \omega$, una constante proporcional a la densidad de la membrana. La ecuación (2) modela la deflexión u de una membrana sometida a tensiones internas bajo la acción de una carga o forzamiento G , es decir, gobierna el equilibrio estático de la membrana.

Si aceptamos el hecho de que bajo ciertas condiciones sobre f , la ecuación (1) modela la deflexión de una membrana, entonces es relevante preguntarse el lugar geométrico donde ocurre la máxima deflexión, o en cuantos lugares ocurre tal deflexión, así como preguntarse por cualquier otro tipo de peculiaridad de la deflexión. Aquí comenzamos a apreciar una de las importancias de estudiar el conjunto crítico de la solución al problema de Poisson, además de la importancia matemática como tal.

Consideremos los problemas de contorno (1) y (2) donde Ω es un dominio acotado del plano, f es una función real a valor real y G un campo escalar definido en Ω . Estamos interesados en dar una descripción del conjunto crítico $\mathbb{K}$ de una solución u , estudiar la conformación de $\mathbb{K}$ y las alteraciones que sufre cuando se hacen perturbaciones al dominio Ω . Deseamos estudiar la estructura del conjunto $\mathbb{K}$ bajo diferentes hipótesis sobre Ω y su frontera $\partial\Omega$. Uno de los supuestos sobre Ω que deseamos investigar, es cuando la frontera $\partial\Omega$ tiene vértices, esto es, puntos donde la parametrización de la frontera pierde analiticidad. En particular estamos interesados en estudiar la ecuación (1) sobre dominios tipo *tuerca*.

Matemáticamente hablando, las ecuaciones (1) y (2) han sido ampliamente estudiadas cuando Ω es una región plana convexa con frontera suave. Poco menos se ha estudiado cuando Ω es una región múltiplemente conexa y menos aún cuando $\partial\Omega$ no es suave. Igualmente, poca literatura se tiene en el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$. Algunos de los resultados conocidos e importantes sobre el conjunto crítico son:

Teorema 1.1. (cf. [18, Theorem 1 and 2])(1971) Sea u una solución del problema de contorno (1) donde $f \equiv 1$ y $\partial\Omega$ es una curva suave, cerrada y convexa. Entonces u tiene un único máximo local y todas sus curvas de nivel son convexas.

Otro resultado un poco mas reciente se debe a Cabré y Chanillo.

Teorema 1.2. (cf. [7, Theorem 1])(1998) Sea Ω un dominio suave, convexo y con frontera de curvatura positiva. Supongamos que la función $f \geq 0$ es suave, además que u es una solución semiestable de (1) con $u > 0$ en Ω . Entonces u tiene un único punto crítico x_0 en Ω . Más aun, u alcanza el máximo en x_0 y x_0 es un punto no degenerado de u , en el sentido de que la matriz Hessiana de u en x_0 es negativa definida.

Cabré y Chanillo en [7] definen a una solución u de (1) como semiestable si el operador linealizado $B = -\Delta - f'(u)$ en (1) es definido no negativo, es decir si

$$(B\phi, \phi) = \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 - \int_{\Omega} f'(u)\phi^2 \geq 0$$

para toda función ϕ de clase C^∞ y con soporte compacto en Ω . Note por ejemplo que la hipótesis de ser f decreciente en la Suposición 1 hace que la u solución sea semiestable.

En 2008 D. Finn [12] extiende los resultados de Makar-Limanov probando que una solución del problema semilineal (1) con f suave que satisface $f(0) > 0$, $f' \leq 0$, en un dominio convexo con frontera suave tiene un único punto crítico no degenerado y al igual que en la conclusión del Teorema 1.1, Finn prueba que la solución u tiene curvas de nivel convexas.

Por otro lado, es menos la literatura conocida para cuando el dominio Ω no es convexo. Un resultado reciente es el siguiente Teorema de Arango y Gómez en [2].

Teorema 1.3. (cf. [2, Theorem 3.1])(2011) Sean Ω una región plana acotada con frontera suave, f una función analítica de valor real con $f(0) > 0$ y $f' \leq 0$. Si u es una solución del problema de contorno semilineal (1) entonces $\mathbb{K}$ está conformado por una cantidad finita de puntos y a lo más un número finito de curvas de Jordan. Más aún, de existir alguna curva crítica en $\mathbb{K}$, la curva es analítica y Ω no puede ser simplemente conexo.

En [3] los autores extienden el Teorema 1.3 a un operador más general.

Teorema 1.4. (cf. [3, Theorem 4])(2012) Suponga que Ω es acotado con frontera $\partial\Omega$ suave y las funciones a, b, c son reales y analíticas en $\mathbb{R}^2$, supongamos también

que f es una función real analítica creciente y tal que $f(0) > 0$. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} L[u] = a(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + b(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c(\nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= f(u) & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Si existe una solución negativa u , entonces su conjunto crítico está conformado por finitos puntos aislados y finitas curvas de Jordan. Más aún, si alguna curva de Jordan está contenida en su conjunto crítico, esta curva debe ser regular analítica y el dominio Ω no puede ser simplemente conexo.

Además, los autores también demuestran que si Ω es estrictamente convexo con frontera suave, entonces la solución del problema (1.1) tiene exactamente un punto crítico el cual no es degenerado, ver [3, Theorem 10]. Este último resultado es un equivalente a los ya mencionados resultados de Makar-Limanov [18], Cabré y Chanillo [7] al de Finn [12].

En la Tesis de Maestría [11] se investiga el conjunto $\mathbb{K}$ cuando la frontera del dominio Ω no es suave. En esa investigación se aplica el Teorema 1.3 a dominios cuya frontera $\partial\Omega$ está compuesta por dos curvas de Jordan, ambas con interior convexo y se extiende a dominios donde la frontera exterior es una curva analítica a trozos, mientras que la frontera interior es una curva suave.

Teorema 1.5. (cf. [11, Teorema 3.3])(2012) Sea u la solución del problema de contorno semilineal (1), donde f es una función analítica de valor real con $f(0) > 0$, decreciente en un intervalo abierto y Ω es una región anular cuya frontera está compuesta por dos curvas de Jordan, ambas con interior convexo. Supondremos también que la frontera exterior es una curva analítica a trozos, mientras que la frontera interior es suave. Entonces, el conjunto crítico $\mathbb{K}$ de la solución u está conformado por una cantidad finita de puntos y a lo más una curva crítica de Jordan.

Por otro lado, en [11] también se consideraron los dominios del tipo *tuerca*. En estos dominios se logró probar que una solución u de (1) tiene por lo menos $2n$ puntos críticos y no posee curvas críticas, ver [11, Teorema 3.4]. A pesar de que los ejemplos numéricos llevan a conjeturar que la solución tiene exactamente $2n$ puntos críticos, no fue posible dar una demostración analítica de este hecho. Otro de los inconvenientes que aparecieron durante esa investigación, es la conformación de $\mathbb{K}$ cuando la frontera Ω tiene vértices en su frontera interior, como es el caso de un dominio anular donde ambas fronteras estén conformadas por un n -ágono regular. En este trabajo abordaremos el problema cuando Ω es la inversión de un dominio tuerca, esto es, un dominio anular cuya frontera exterior es una circunferencia y su frontera interior un n -ágono regular.

No se conocen muchos resultados sobre el conjunto crítico en 3 o más dimensiones. Uno de los pocos resultados del que se tiene referencia es el de Cabré y Chanillo

Teorema 1.6. *(cf. [7, Theorem 2])(1998) Sea $n \geq 3$. Supongamos que Ω es un dominio de revolución respecto a un eje en $\mathbb{R}^n$, suave, acotado y estrictamente convexo. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función no negativa y u una solución clásica, semiestable de (1) tal que $u > 0$ en Ω , entonces u tiene un único punto crítico en Ω . Más aún, este único punto crítico es el máximo de u y es no degenerado.*

Compárese con el Teorema P2.

Capítulo 2

Generalidades de las soluciones

Sean L el operador elíptico en (4), f una función a valor real y a, b constantes reales no negativas. Estudiaremos la ecuación (3) en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio acotado donde supondremos que esta ecuación está bien definida. En este capítulo daremos algunas propiedades cualitativas de la solución del problema (3), para ello estudiaremos el conjunto crítico de su solución y cómo algunas propiedades geométricas del dominio Ω son heredadas por la solución u . Note que cuando $a = b = 0$ entonces el operador L se reduce al operador de Laplace y obtenemos el problema de contorno (1). Comenzaremos con resultados que nos garanticen existencia y unicidad.

Teorema 2.1. *Sean $\beta \in (0, 1)$ y Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ que satisface la condición de esfera exterior. Supongamos que $G \in C^\beta(\Omega)$, entonces el problema lineal (2) tiene una única solución $u \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Teorema 2.2. *Sean $\beta \in (0, 1)$ y Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ que satisface la condición de esfera exterior. Si $f \in C^{0,\beta}(\mathbb{R})$ es decreciente entonces el problema semilineal de contorno (3) tiene una solución $u \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

Observación 2.1. En el caso en que $\partial\Omega$ sea de clase $C^{2,\beta}$ se tiene que, $u \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$.

La demostración del Teorema 2.1 puede consultarse en [13, Theorem 6.13]. El Teorema 2.2 y la Observación 2.1 admiten versiones más generales. Se remite al lector a [13, Theorem 12.5] y la observación (1) pág. 308-309 del mismo texto.

Teorema 2.3. *Supongamos que $f \in C^1$ tal que $f' \leq 0$ y $f(0) \neq 0$. Entonces el problema (3) tiene una única solución no trivial.*

Demostración. Supongamos que u_1, u_2 son soluciones de (3). Note que $w = u - v$, satisface

$$\begin{aligned} -\Delta w - \frac{a}{x_1-\lambda}w_{x_1} - \frac{b}{x_2-\lambda}w_{x_2} - f'(c)w &= 0 & \text{en } \Omega, \\ w &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $c = c(x)$ depende de $v(x) - u(x)$. Ahora aplicando el Principio del Máximo [23, Teorema 2.1.1], teniendo en cuenta que $h = f' \leq 0$ entonces concluimos que $w \equiv 0$, luego $u \equiv v$. Como $f(0) \neq 0$ entonces la solución trivial $u \equiv 0$ no satisface el problema (3). $\square$

Sobre la regularidad del problema (3) Müller prueba lo siguiente.

Teorema 2.4. (cf. [20, Theorem 1]) *Sea G un campo escalar analítico y f una función real analítica entonces ambos, el problema lineal (2) y el problema semilineal (3) admiten soluciones analíticas en Ω .*

Además, también es posible demostrar que en los trozos analíticos de la frontera $\partial\Omega$ la solución u de (3) se puede extender analíticamente, de tal forma que la extensión resuelva (3) en el dominio extendido. Concretamente

Teorema 2.5. (cf. [20, Theorem 2]) *Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma)$ la solución de (3), donde Γ es un arco abierto real analítico en $\partial\Omega$. Si f es una función real analítica entonces existe una continuación real analítica de u al otro lado de Γ , que resuelve el problema (3) en el dominio extendido.*

Las pruebas de los Teoremas 2.4 y 2.5 son elaboradas, versiones más generales de estos resultados pueden consultarse en el trabajo de Müller en [20].

Observación 2.2. Si $a = b = 0$, entonces el problema (1) y (2) tienen solución única, no trivial y analítica.

Hasta el momento no se ha hecho una suposición sobre la suavidad de $\partial\Omega$, lo único que se ha requerido hasta ahora es que satisfaga la propiedad de esfera exterior. A partir de aquí en la mayoría de los resultados asumiremos sobre el término f en (3) que satisface la Suposición 1.

A medida que avanzamos en el documento impondremos más hipótesis sobre el término f al igual que sobre la frontera $\partial\Omega$. Uno de los objetivos de este trabajo es estudiar los problemas de contorno planteados cuando $\partial\Omega$ tiene vértices, sin embargo, en el estudio de la ecuación (3) en ocasiones nos veremos obligados a imponer regularidad en $\partial\Omega$. A pesar de que el Teorema 2.2 exige que la función esté definida en $\mathbb{R}$, sólo hemos supuesto que f esté definida en un intervalo abierto y acotado, en la observación 2.4 se explicará por que podemos hacer esta suposición.

Terminaremos esta sección con un resultado sobre la derivabilidad de la solución de (1) en un vértice de un dominio tipo tuerca. Para esto, usaremos un resultado de A. Azzam [5] y así probaremos que la solución de (1) admite derivada en un vértice $p \in \partial\Omega$ con un ángulo interior $0 < \gamma < \pi$.

Teorema 2.6. [5, Theorem 1] Sea Ω un dominio simplemente conexo cuya frontera $\partial\Omega$ es de clase $C^{m+2,\beta}$ excepto en un punto p donde la frontera $\partial\Omega$ tiene un vértice con ángulo interior γ , supondremos también que $\phi \in C^0(\partial\Omega) \cap C^{m+2,\beta}(\partial\Omega \setminus \{p\})$ y $a_{ij}, a_i, a, G \in C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$. Entonces toda solución acotada del problema de contorno

$$\begin{aligned} \sum a_{ij}(x)u_{ij} + \sum a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u &= G & \text{en } \Omega, \\ u &= \phi & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.1)$$

es de clase $C^\nu(\bar{\Omega})$, donde

$$\nu = \min \left\{ \frac{\pi}{\gamma} - \epsilon, m + 2 + \beta \right\},$$

$\epsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño. Más aún, si $\frac{\pi}{\gamma} = q \leq m + 2$, con q un entero, entonces para toda función $t \in C^\delta(\bar{\Omega}_0)$, $\epsilon \leq \delta < 1$ que se anula en p , tenemos que $t(x)D^q u(x) \in C^\mu(\bar{\Omega}_0)$ donde $\bar{\Omega}_0 \subset \bar{\Omega}$ es alguna vecindad del vértice, $D^q u$ es una derivada parcial de u de orden q y

$$\mu = \begin{cases} \delta - \epsilon & \text{si } q < m + 2 \\ \min\{\beta, \delta - \epsilon\} & \text{si } q = m + 2. \end{cases}$$

Basándonos en el Teorema 2.6 probaremos el siguiente Lema.

Lema 2.1. Sean Ω un dominio tipo tuerca, p un vértice en $\partial\Omega$, $G \in C^{m,\beta}(\bar{\Omega})$ con $0 < \beta < 1$, $m \geq 0$. Si u es la solución de (2) entonces $\nabla u(p) = 0$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Denotemos por γ al ángulo interior en p y note que $0 < \gamma < \pi$. Con las aristas de $\partial\Omega$ en el vértice p formemos una curva cerrada simple Γ de clase $C^{m,\beta}$ (o bien C^∞) salvo en p , tal que $\Gamma \subset B(p; \epsilon)$, el ángulo en p sea γ . Llamemos a U la región interior a Γ en Ω y notemos que u satisface el siguiente problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= G & \text{en } U, \\ u &= \phi & \text{en } \partial U, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $\phi(x) = u(x)$, $x \in \Gamma$. Ver Figura 2.1. Elegimos ϵ de manera que $1 \leq \frac{\pi}{\gamma} - \epsilon$. Note que $2 \leq m + 2 + \beta$ por el Teorema 2.6 obtenemos que $u \in C^\nu(\bar{U})$ con $\nu \geq 1$. De esta forma el gradiente de u existe en p , ahora al usar la condición nula en la frontera podemos reescribir el gradiente en términos de las direcciones de las aristas para finalmente concluir que $\nabla u(p) = 0$.

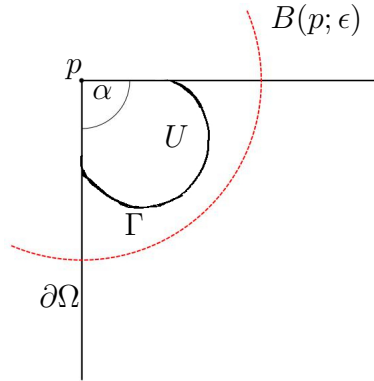


Figura 2.1: Región U y curva Γ en la construcción para la demostración del Lema 2.1

□

Al emplear el siguiente resultado podremos concluir que la solución del problema semilineal en un dominio tipo tuerca también admite derivada en los vértices.

Teorema 2.7. (cf. [14, Theorem 2.6])(2010) Sean $r \in \mathbb{N}^+$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera Lipschitz. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < (r - k)p$. Entonces

$$W^{r,p}(D) \subset C^{k,\alpha}(\overline{D}), \quad \forall \alpha \in \left(0, r - k - \frac{n}{p}\right] \cap (0, 1)$$

con inclusión compacta si $\alpha < r - k - \frac{n}{p}$.

Teorema 2.8. Sean Ω un dominio tipo tuerca, p un vértice en $\partial\Omega$ f es una función real de clase $C^{2,\beta}$ que satisface $f' \leq 0$ $f(0) \neq 0$, entonces la solución del problema semilineal (1) satisface $\nabla u(p) = 0$.

Demostración. Observemos que los dominios tipo tuerca son dominios con frontera Lipschitz y satisfacen la condición de bola exterior con radio uniforme. Ahora, si ponemos $r = n = p = 2$ en el Teorema 2.7, entonces $k = 0$ es el único natural que satisface el requerimiento $n < (r - k)p$ y en este caso la conclusión del teorema es

$$H^2(D) \subset C^{0,\alpha}(\overline{D}), \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Con $f \in C^{2,\beta}$ por el Teorema 2.2 sabemos que existe una única solución $u \in C^{4,\beta}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ del problema (1). Ahora, notemos que u satisface el problema lineal (2) con $G(x) = f(u(x)) \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Por lo cual se sigue que $G \in H^2(\Omega)$ y al usar la observación inicial obtenemos que $G \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, tomando $\alpha = \beta$ en el Teorema 2.7. Finalmente usaremos el Lema 2.1 con $m = 0$ lo que nos permite determinar que $\nabla u(p) = 0$. □

2.1. Propiedades de la solución

El conjunto crítico de la solución a la ecuación $-\Delta u = 1$ en el anillo concéntrico con condición Dirichlet nula en la frontera, esta conformado por una circunferencia, la matriz Hessiana de u no es invertible en los puntos críticos que conforman esta circunferencia, en el Ejemplo 4.8 se encuentra esta curva de forma explícita. Esta característica también se puede ver en dominios no planares, como veremos en el Capítulo 4. Sin embargo, bajo ciertos supuestos mostraremos que las soluciones de (3) son funciones semi-morse, esto es la matriz Hessiana es no nula en los puntos críticos. Arango y Gómez muestran en [2] y con más generalidad en [3] resultados análogos a los que expondremos a continuación.

Proposición 2.1. *Supongamos que f es como en la Suposición 1. Entonces la solución u de (3) es positiva en Ω y satisface $L[u] > 0$.*

Demostración. Ver [2, Lemma 2.2] y [3, Lemma 1]. Usaremos el Principio del Máximo (Mínimo) [23, Theorem 2.1.1] y el Principio de Tangencia [23, Theorem 2.1.3]. Si $f > 0$, entonces $L[u] > 0$, luego por el Principio del Máximo (mínimo) u alcanza el mínimo en la frontera, pero $u = 0$ en esta, se sigue que u es positiva en Ω .

Por otro lado, sea $x_m \in \Omega$ un punto donde u alcanza el valor mínimo $u_m = u(x_m)$. Como L es elíptico, se sigue que $L[u](x_m) \geq 0$. Si $0 = L[u](x_m)$ entonces $f(u(x_m)) = 0$ así que la función constante definida en Ω , $w(x) = u(x_m)$ satisface la ecuación diferencial del problema de contorno (3) luego, por el principio de Tangencia, tenemos que $u = w$, es decir u es constante, lo cual es una contradicción. Por lo cual $0 < L[u](x_m)$. Como f es no creciente, obtenemos

$$0 < f(w) \leq f(u) = L[u] \quad \text{entonces} \quad 0 < L[u].$$

□

Corolario 2.1. *La solución u de (3) es una función semi-Morse, es decir la matriz Hessiana de u no se anula en los puntos críticos de u .*

Demostración. En efecto, si $p \in \Omega$ es un punto crítico, entonces

$$0 < L[u](p) = -\Delta u(p)$$

así que H_u tiene traza positiva. □

El siguiente resultado es una consecuencia básica del Lema de Punto de frontera de Hopf. A manera de ilustración mostraremos la argumentación de su prueba.

Proposición 2.2. *Si Ω es un dominio acotado con frontera suave $\partial\Omega$ y f una función que satisface la Suposición 1, entonces la solución u de (3) no tiene puntos críticos sobre la frontera $\partial\Omega$.*

Demostración. Por la Proposición 2.1 y el Principio del Máximo, sabemos que u alcanza sus valores mínimos sobre $\partial\Omega$. El dominio Ω satisface la condición de bola interior en cada punto sobre su frontera pues $\partial\Omega$ es suave. La solución u es real analítica, en particular es de clase C^2 en Ω y por el Teorema 2.5 la derivada en la dirección saliente a Ω existe en cada punto sobre la frontera. Por lo tanto, en virtud del Lema de Punto de Frontera [23, Theorem 2.8.3] se sigue que la derivada de u en la dirección saliente a Ω sobre los puntos frontera es negativa, por lo cual no pueden existir puntos críticos sobre la frontera. $\square$

Observación 2.3. Por la argumentación presentada en la Proposición 2.1, en el Corolario 2.1 y en la Proposición 2.2 podemos notar que los resultados son válidos aún cuando se considera el problema (3) en $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.2. *Sea Ω un dominio acotado con frontera suave $\partial\Omega$, u una función semi-Morse definida en una vecindad abierta de $\overline{\Omega}$. Si todos los puntos críticos de u están en Ω , entonces el conjunto crítico de u esta conformado por una cantidad finita de puntos y finitas curvas analíticas de Jordan.*

Demostración. Ver [2, Theorem 3.1] y [3, Lemma 2]. En virtud de [4, Lemma 3] localmente, el conjunto crítico de una función semi-morse es o bien un punto aislado o una curva. Finalmente, por la compacidad de $\overline{\Omega}$ y dado que no hay puntos críticos sobre la frontera se obtiene la conclusión del resultado. $\square$

Proposición 2.3. *Si β es una curva crítica de Jordan de la solución u de (3), entonces β es una curva de máximos locales y la región acotada en Ω por la curva β no es simplemente conexa. En consecuencia, si Ω es simplemente conexo la solución u no tiene curvas críticas.*

Demostración. Supongamos que β sea una curva crítica de u . Note que $L[u] \Big|_{\beta} = -\Delta u \Big|_{\beta}$. Si β es una curva crítica conformada por puntos de silla. Sea $s \in \beta$. Reescribamos el operador de Laplace en coordenadas θ_1 y θ_2 , de manera que θ_1 coincida con el vector tangente de β en s y $\theta_1 \perp \theta_2$. La solución u es constante a lo largo de β , así que $u_{\theta_1\theta_1}(s) = 0$. Como s es un punto silla, tenemos que $u_{\theta_2\theta_2}(s) = 0$, lo cual implica que $\Delta u(s) = 0$, contradiciendo la Proposición 2.1.

Por otro lado, note que $0 < L[u] \Big|_{\beta} = -\Delta u \Big|_{\beta}$, luego β debe ser una curva de máximos locales de u . Denotemos por Ω_{β} la región en Ω acotada por la curva β

y supongamos que Ω_β es simplemente conexa. Como $L[u] > 0$ en Ω_β , entonces u alcanza el mínimo (positivo) en $\partial\Omega_\beta = \beta$ o bien u es constante en Ω_β , si u es constante en Ω_β entonces $L[u] = 0$ contradiciendo la Proposición 2.1. En caso de alcanzar el mínimo sobre β tal mínimo alcanzado es positivo puesto que por la Proposición 2.1 u es positiva en Ω , además u no puede alcanzar el mínimo en β ya que esta curva es una curva de máximos locales. Por lo tanto Ω_β no puede ser simplemente conexo. $\square$

Corolario 2.2. *Supongamos que Ω es doblemente conexo, es decir, con un hoyo. Entonces, a lo más existe una curva de Jordan crítica de la solución u de (3).*

Demostración. En caso de existir más de una curva crítica, sabemos por la Proposición 2.3 que estas deben ser curvas de máximos locales y que la región acotada por ellas no puede ser simplemente conexa, así pues en el caso de que existan varias curvas críticas estas bordearán el agujero en Ω y se formará entre ellas una región anular conformada por las curvas críticas. Supongamos que existen dos curvas críticas β_1 y β_2 y sea $\Omega_{\beta_1, \beta_2}$ la región anular en Ω cuyas fronteras son β_1 y β_2 . Entonces, una vez más aplicando el Principio del Máximo en esta región anular, u alcanza el mínimo en $\partial\Omega_{\beta_1, \beta_2}$, contradiciendo una vez más que estas curvas son máximos locales de u . $\square$

Terminaremos la sección con una comparativa entre problemas de contorno, que nos permitirá debilitar la hipótesis sobre la definición de f en todo $\mathbb{R}$ en el Teorema 2.2.

Proposición 2.4. *Supongamos que u es una solución de (1) donde f es una función analítica definida en $\mathbb{R}$ que satisface $f(0) > 0$ y $f' \leq 0$. Entonces existe $r > 0$ tal que*

$$0 < u \leq \frac{r^2 f(0)}{4} \quad \text{en } \Omega. \quad (2.3)$$

Si en particular Ω es un dominio tipo tuerca cuya frontera exterior está sobre la circunferencia unidad, entonces podemos escoger $r = 1$ en la desigualdad (2.3).

Demostración. Por la Proposición 2.1 $u > 0$, como Ω es acotado existe $r > 0$ tal que $\Omega \subset B = B(0; r)$ la bola de radio r centrada en el origen. Consideremos la solución v del problema

$$\begin{aligned} -\Delta v &= f(v) & \text{en } B, \\ v &= 0 & \text{en } \partial B. \end{aligned}$$

Note que u y v satisfacen problemas de contorno similares, salvo por que u esta definida en Ω mientras que v esta definida en $B \supset \Omega$. En Ω definamos $\hat{u}(x) =$

$u(x) - v(x)$, entonces $\hat{u}$ satisface

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{u} - f'(c(x))\hat{u} &= 0 & \text{en } \Omega \\ \hat{u} &< 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

donde c es una función que depende de los valores $u(x) - v(x)$. Por tanto, ya que $f' \leq 0$ el Principio del Máximo garantiza que $\hat{u}$ alcanza los extremos en la frontera $\partial\Omega$ a menos que $\hat{u}$ sea constante. Si $\hat{u}$ no es constante, entonces $\hat{u} < 0$ en Ω , por tanto $u - v < 0$ en Ω , y así $0 < u < v$ en Ω , luego

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\Omega} v \leq \max_{\overline{B}} v.$$

En caso que $\hat{u}$ sea constante concluimos la misma desigualdad entre los máximos de u y v . En efecto, si $\hat{u} = k$ en Ω , entonces como $\hat{u} < 0$ en $\partial\Omega$, se sigue que $k < 0$, y así $u = k + v$, y podemos obtener la misma desigualdad sobre $\max_{\overline{\Omega}} u$ y $\max_{\overline{B}} v$. Por otro lado veamos que $w(x) = \frac{f(0)}{4}(r^2 - |x|^2)$ satisface el problema

$$\begin{aligned} -\Delta w &= f(0) & \text{en } B, \\ w &= 0 & \text{en } \partial B, \end{aligned}$$

Como $f' \leq 0$,

$$\begin{aligned} 0 &< v \\ f(v) &\leq f(0) \\ -\Delta v &\leq -\Delta w & \text{en } B \end{aligned}$$

pero $0 = v = w$ en ∂B , entonces por el Principio de Comparación ver [23, Theorem 2.1.4], tenemos que $v \leq w$ en $\overline{B}$ y por tanto

$$0 < v \leq \max_{\overline{B}} w.$$

En consecuencia,

$$\max_{\overline{B}} v \leq \max_{\overline{B}} w = \frac{r^2 f(0)}{4}$$

lo que nos lleva a concluir que

$$0 < u \leq \frac{r^2 f(0)}{4} \quad \text{en } \Omega.$$

□

Observación 2.4. (El intervalo de definición del término semilineal f en (1).) En virtud de la Proposición 2.4 es suficiente asumir que la función f esté definida sólo en un intervalo acotado, más precisamente, en un intervalo abierto y acotado que contenga al intervalo $I = [0, \frac{r^2 f(0)}{4}]$, siendo r una constante que depende de Ω . En efecto, supongamos f como antes, es decir una función analítica definida en $\mathbb{R}$ que satisface $f(0) > 0$ y $f' \leq 0$. Sea (a, b) un intervalo acotado que contiene al intervalo I y $\phi \in C_c^\infty((a, b))$ tal que $\phi \equiv 1$ en I y $\phi \in C_c^\infty((a, b))$ entonces $f\phi \in C^{0,\beta}(\mathbb{R})$ para cada $\beta \in (0, 1)$. Si Ω es un dominio acotado que satisface la condición de bola exterior, el Teorema 2.2 garantiza la existencia de una solución $v \in C^{2,\beta}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ del problema:

$$\begin{aligned} -\Delta v &= f(v)\phi(v) & \text{en } \Omega \\ v &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Note que $f(0)\phi(0) = f(0) > 0$, $f\phi = f$ en $[0, \frac{r^2 f(0)}{4}]$, argumentando como arriba obtenemos que $0 \leq v \leq \frac{r^2 f(0)}{4}$ en $\bar{\Omega}$, por tanto v también satisface el problema (1), según el Teorema 2.3 las hipótesis sobre f son suficientes para garantizar la unicidad de la solución del problema (1).

2.1.1. Reflexiones y planos móviles

En esta sección definiremos lo que entendemos por reflexión de un punto respecto a una recta y seguiremos las ideas de J. Serrin en [24] sobre planos móviles, usaremos estas ideas para mostrar que siempre que podamos “reflejar” parte del dominio sobre sí mismo, entonces sobre la recta que permite la reflexión, no existen puntos críticos de la solución u de (1). La reiteración de estas ideas nos proveerán de un método para acotar la región donde se encuentran los puntos críticos de la solución u , es decir, encontraremos una región en Ω admisible para $\mathbb{K}$.

Definición 2. Sea T una recta en el plano. Escribiremos $R_T(x)$ para denotar la reflexión del punto x con respecto a la recta T .

Se verifica sin dificultad que si $T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = mx_1 + c\}$, entonces la reflexión de $x = (x_1, x_2)$ con respecto a T es

$$R_T(x) = (R_1(x), R_2(x)) = \left(\frac{(1 - m^2)x_1 + 2m(x_2 - c)}{m^2 + 1}, \frac{2mx_1 + (m^2 - 1)x_2 + 2c}{m^2 + 1} \right).$$

Si en particular la recta T tiene la forma $T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \lambda\}$, entonces la reflexión de x con respecto a T viene dada por

$$R_T(x) = (2\lambda - x_1, x_2). \quad (2.5)$$

Es claro que si $x \in T$ entonces no hay reflexión, esto es $R_T(x) = x$. Note que

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial R_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial x_2} = \frac{\partial R_2}{\partial x_1} \quad \text{además} \quad |\nabla R_1|^2 = |\nabla R_2|^2 = 1.$$

Sea Ω una región acotada múltiplemente conexa, cuya frontera esta compuesta por varias curvas de Jordan todas con interior convexo. Supondremos que la frontera exterior es un polígono, mientras que las fronteras interiores son suaves. Supongamos también que T_0 una recta que no interseca $\bar{\Omega}$, esto es $T_0 \cap \bar{\Omega} = \emptyset$. Note que T_0 divide el plano en dos semiplanos, uno de ellos contiene al dominio Ω . Denotemos por $\mathcal{M}$ al semiplano que contiene a Ω . Sea $\eta \in \mathcal{M}$ un vector ortogonal a T_0 . Consideremos las siguientes rectas

$$T_t = T_0 + t\eta, \quad t \geq 0.$$

Note que $T_t \in \mathcal{M}$ es una recta paralela a T_0 para cada $t \geq 0$.

Sabemos que $\Omega \subset \mathcal{M}$ es un dominio acotado y que $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{t \geq 0} T_t = \bigcup_{t \geq 0} T_0 + t\eta$, luego, para cierto valor de t tenemos que el conjunto $\{t \in \mathbb{R}^+ : T_t \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset\}$ es no vacío, además $t = 0$ es una cota inferior de este conjunto, el axioma de completez garantiza la existencia del ínfimo

$$d := \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : T_t \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset\}. \quad (2.6)$$

Para $d < t$ definamos la sección Ω_t como la porción de Ω que se encuentra al mismo lado de T_t y de la recta inicial T_0 , mas formalmente,

$$\Omega_t = \Omega \cap \bigcup_{s < t} T_s, \quad \text{para } d < t. \quad (2.7)$$

Denotemos por Ω'_t la reflexión de Ω_t respecto de T_t , esto es

$$\Omega'(T) \equiv \Omega'_t = R_{T_t}(\Omega_t). \quad (2.8)$$

Recordemos que la frontera exterior de Ω es un polígono, por lo cual no es evidente que para toda recta inicial T_0 , exista una región $\Omega'(T)$ estrictamente contenida en Ω , por ejemplo, si la frontera exterior de Ω es un triángulo equilátero y T_0 es una recta paralela a uno de los lados, entonces es claro que $\Omega'(T) \not\subset \Omega$. Sin embargo, dado que el interior de la frontera exterior de Ω es convexo, entonces por lo menos existe un vértice cuyo ángulo interno es convexo, luego, el proceso arriba descrito se puede iniciar tomando una recta T_0 paralela a una secante de este ángulo.

A partir de aquí supondremos que la recta inicial T_0 nos permite reflejar la sección Ω_t en Ω , es decir que el conjunto $\{t \in \mathbb{R}^+ : \Omega'_t \subset \Omega\}$ es no vacío. Ahora

debemos definir, la recta límite con respecto a la cual podemos reflejar sin permitir que $\partial\Omega'(T) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega) \neq \emptyset$. De nuevo, la acotación del dominio Ω implica que existe $t > d$ tal que $T_t \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, esto es, un acota superior del conjunto $\{t \in \mathbb{R}^+ : \Omega'_t \subset \Omega\}$. Una vez más, el axioma de completez garantiza la existencia de

$$e := \sup\{t \in \mathbb{R}^+ : \Omega'_t \subset \Omega\} \quad (2.9)$$

En resumen, para $d < t \leq e$ tenemos que

$$\Omega'_t \subset \Omega$$

y para $t > e$

$$\Omega'_t \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Omega) \neq \emptyset$$

llamaremos al intervalo (d, e) así formado, *intervalo de reflexión* y T_e la *recta límite de reflexión*.

Observación 2.5. Aquí hemos definido la reflexión sobre dominios muy particulares, sin embargo el procedimiento funciona en dominios más generales, como dominios conexos con frontera analítica a trozos.

2.1.2. El problema lineal

Esta sección esta dedicada a considerar el problema lineal de contorno (2) donde Ω es un dominio tipo tuerca, el campo escalar $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es real analítico. Adicionalmente exigiremos dos hipótesis sobre el campo escalar G . Supondremos que

$$\frac{\partial G}{\partial \phi} < 0 \quad \text{en } B \cap \Omega \quad \text{y} \quad G > 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.10)$$

donde $B = B(\nu, \epsilon)$ es una bola centrada en un punto vértice ν , $\phi = \frac{\nu}{|\nu|}$ y $\epsilon > 0$.

Observación 2.6. Las hipótesis impuestas sobre G pueden ser cambiadas por $G < 0$ y $\frac{\partial G}{\partial \phi} > 0$ en la ecuación (2.10)

A continuación se presentarán sin demostración algunos resultados equivalentes a los obtenidos para el caso semilineal (1). La demostración de la Proposición 2.5 es equivalente a la presentada en el Corolario 2.1, mientras que la prueba de la Proposición 2.6 es semejante a la presentada en la Proposición 2.3 y el argumento para el Corolario 2.3 es el mismo que el mostrado en el Corolario 2.2.

Proposición 2.5. *La matriz Hessiana H_u no se anula en los puntos críticos de la solución u de (2), es decir, u es una función semi-Morse.*

Proposición 2.6. *Si β es una curva crítica de Jordan, de la solución u de (2), entonces β es una curva de máximos locales y la región acotada en Ω por la curva β no es simplemente conexa.*

Corolario 2.3. *A lo más existe una curva de Jordan crítica de la solución u de (2).*

Proposición 2.7. *Supongamos que se satisfacen las hipótesis (2.10) sobre G . Los vértices de los dominios tipo tuerca no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución u de (2).*

Demostración. Sea V es el conjunto de vértices del dominio. Entonces por la hipótesis (2.10) para cada vértice $\nu \in V$ existe una bola B centrada en ν donde $\frac{\partial G}{\partial \phi} < 0$, en $B \cap \Omega$, $\phi = \frac{\nu}{|\nu|}$, es decir ϕ es el vector con la dirección de la línea que parte desde el origen y pasa por el vértice ν .

Procedamos por contradicción. Supongamos que existe una sucesión $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en Ω de puntos críticos de u que converge a ν . Escojamos $p = p_k$ suficientemente próximo a ν tal que

$$R_T(\Omega_T) \subset B \quad \text{por tanto} \quad \Omega_T \subset B. \quad (2.11)$$

Recuerde que R_T y Ω_T se encuentran en la Definición 2 y en la ecuación (2.7) respectivamente. En este caso, T es una recta que contiene al punto p y es ortogonal a la recta(diagonal) ℓ que parte desde el origen, pasa por ν . Note que ϕ es la dirección de ℓ . A partir de aquí la demostración es básicamente la misma que se presentará en el caso semilineal en la Proposición 3.1.

Como $G > 0$ (< 0) y u satisface (2), entonces $\Delta u < 0$ (> 0) en Ω , luego, por el Principio del Máximo

$$u > 0 \text{ } (< 0) \quad \text{en} \quad \Omega. \quad (2.12)$$

Para $x \in \Omega_T$, definamos

$$w(x) = u_T(x) - u(x) = u(R_T(x)) - u(x)$$

Notemos que si $x \in \Omega_T$ entonces

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= \Delta u(R_T(x)) - \Delta u(x) \\ &= -G(R_T(x)) + G(x) \\ &= G(x) - G(R_T(x)) \\ &= DG(z) \cdot (x - R_T(x)), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde z pertenece al segmento de recta $L(x, R_T(x))$ que une $R_T(x)$ con x . Note que $L(x, R_T(x)) \subset B$ por (2.11), note también que $L(x, R_T(x)) \parallel \ell$, es decir $x - R_T(x) \parallel \ell$

ya que $T \perp \ell$, luego $DG(z) \cdot (x - R_T(x))$ y $DG(z) \cdot \phi$ tienen el mismo signo, de allí que

$$\Delta w < 0 \quad \text{en} \quad \Omega_T.$$

Examinemos el comportamiento de w en la frontera $\partial\Omega_T$. Si $x \in \partial\Omega_T \setminus T$ entonces $w(x) = u_T(x) - u(x) = u_T(x) > 0$ ya que $R_T(x) \in \Omega$ y también por la ecuación (2.12).

Si $x \in \partial\Omega_T \cap T$, $w(x) = u_T(x) - u(x) = 0$, pues $x = R_T(x)$. Luego, $w \geq 0$ en $\partial\Omega_T$.

Por el Principio del Máximo, obtenemos que w alcanza el mínimo (cero) en T . Por otro lado, Ω_T satisface la condición de bola interior en T . Ahora ya que $\Omega_T \subset \Omega$, el Lema de punto de frontera garantiza que

$$\frac{\partial w}{\partial \theta}(p) < 0,$$

donde θ es la dirección saliente desde Ω_T en p . Esto Contradice que p sea un punto crítico de u . $\square$

Observación 2.7. Si $G < 0$ y $\frac{\partial G}{\partial \phi} > 0$, w se define de igual forma, pero en este caso al seguir la argumentación presentada, se obtiene que w satisface: $\Delta w > 0$ en Ω_T y $w \leq 0$ en $\partial\Omega_T$.

Resumiremos los resultados sobre el conjunto crítico de la solución u del problema (2) en el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio tipo tuerca. Supongamos que u es solución del problema lineal de contorno (2) y que la función G satisface las desigualdades en (2.10). Entonces la solución u es una función semi-morse y su conjunto crítico está conformado por una cantidad finita de puntos aislados y a lo más por una curva de Jordan. Más aún, en caso de existir una curva crítica, tal curva es una curva de máximos locales y la región acotada por esta curva en Ω no es simplemente conexa.*

Demostración. La Proposición (2.5) garantiza que u sea una función semi-morse. La Proposición 2.6 y el Corolario 2.3 establecen que existe a lo más una curva crítica y que tal curva “bordea” el agujero, por tanto región acotada por esta curva en Ω no es simplemente conexa. La Proposición 2.6 también establece que en caso de que la curva crítica exista, esta debe ser una curva de máximos locales. Por otro lado, la Proposición 2.7 establece que los vértices en los dominios tipo tuerca no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución u .

Finalmente probaremos que los puntos aislados de u son finitos. Recordemos que $\mathbb{K} = \{x \in \overline{\Omega} : \nabla u = 0\}$, entonces, escribamos el conjunto de puntos críticos aislados de u como

$$\mathbb{K}_0 = \left\{ x \in \mathbb{K} : \exists r > 0 \text{ tal que } \nabla u \Big|_{B(x;r) \setminus \{x\}} \neq 0 \right\}.$$

Procedamos por contradicción, suponiendo que $\mathbb{K}_0$ es infinito. En tal caso, por ser acotado, posee un punto de acumulación p . Note que $p \notin \partial\Omega$, ya que la Proposición 2.7 establece que los vértices no son puntos de acumulación. De otro lado, el Lema de Punto de Frontera garantiza que los puntos críticos de u no se acumulan en la frontera $\partial\Omega$ donde la derivada de u en la dirección saliente de Ω exista y se tenga la condición de bola interior. Por tanto $p \in \Omega$, contradiciendo que los puntos en $\mathbb{K}_0$ son aislados, ya que existe una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}_0$ que converge a p .

En efecto, $\lim_n x_n = p$ y dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2^n}$, siempre que $n, m > N$. Dejemos a $x_m \in \mathbb{K}_0$ fijo. Como $x_m \in \mathbb{K}_0$ existe $r_m > 0$ tal que $\nabla u \Big|_{B(x_m;r_m) \setminus \{x_m\}} \neq 0$, sin embargo podemos encontrar un $n > N$ tal que $\frac{\epsilon}{2^n} < r_m$, pero en este caso $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2^n} < r_m$ y $\nabla u(x_n) = 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

2.1.3. Simetrías

En esta sección estudiaremos la transferencia de simetrías entre el dominio Ω y la solución u de (3). Luego, estudiaremos las líneas nodales, que serán una herramienta fundamental en la descripción del conjunto crítico $\mathbb{K}$. En gracia de la discusión y para conveniencia del lector repetimos el argumento de Serrin en [24] al mostrar la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 2.8. *Supongamos que Ω es simétrico respecto a la recta $x_1 = \lambda$, que $a = 0$ y que f es como en la Suposición 1, entonces la solución u del problema semilineal (3) en Ω es simétrica respecto de $x_1 = \lambda$, esto es*

$$u(x_1, x_2) = u(2\lambda - x_1, x_2).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $\lambda = 0$ y probaremos que la solución es simétrica respecto a la recta $x_1 = 0$. Es decir, mostraremos que $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$. Para $(x_1, x_2) \in \Omega$ definamos $v(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} \Delta v(x_1, x_2) &= \Delta u(-x_1, x_2) \\ &= -f(u(-x_1, x_2)) - \frac{b}{x_2} u_{x_2}(-x_1, x_2) \\ &= -f(v(x_1, x_2)) - \frac{b}{x_2} v_{x_2}(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{2.14}$$

entonces v satisface la ecuación diferencial en el problema (3). Por otro lado, sobre la frontera, si $(x_1, x_2) \in \partial\Omega$, por la simetría del dominio $(-x_1, x_2) \in \partial\Omega$ luego

$v = u = 0$, por lo tanto v satisface el problema de contorno (3), pero en el Teorema 2.3 se probó que la solución es única, y por lo tanto $u \equiv v$. $\square$

Corolario 2.4. *Sea $\lambda = 0$. Supongamos que Ω es simétrico respecto a la recta $x_2 = 0$, $b = 0$ y que f es como en la Suposición 1, entonces la solución u del problema semilineal (3) es simétrica respecto de la recta $x_2 = 0$, esto es*

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2).$$

Proposición 2.9. *Sea u la solución del problema (1), donde f satisface la Suposición 1. La solución u es simétrica respecto de una recta T si y solo si T es un eje de simetría de Ω .*

Demostración. Supongamos que u es simétrica respecto de una recta T . La hipótesis implica que

$$u(R_T(x)) = u(x) \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

luego $R_T(x) \in \Omega$ para todo $x \in \Omega$, esto es, Ω es simétrico respecto T .

Recíprocamente, si T es una recta de la forma $x_1 = \lambda$, es consecuencia de la Proposición 2.8, al poner $a = b = 0$ en el problema de contorno (3). Si $T = \{(x_1, x_2) : x_2 = mx_1 + c\}$ entonces definimos $v(x_1, x_2) = u(R_T(x_1, x_2))$ y luego de unos cálculos podemos verificar que

$$\begin{aligned} \Delta v(x_1, x_2) &= \Delta u(R_T(x_1, x_2)) |\nabla R_1|^2 \\ &= \Delta u(R_T(x_1, x_2)) \\ &= f(u(R_T(x_1, x_2))) \\ &= f(v(x_1, x_2)), \end{aligned}$$

recordando que $|\nabla R_1|^2 = |\nabla R_2|^2 = 1$. Además, si $x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega$ entonces $R_T(x) \in \partial\Omega$, por lo que v es solución de (1), pero este problema tiene solución única, por lo que $v \equiv u$ y así u es simétrica respecto de T . $\square$

Observación 2.8. De la demostración de la Proposición 2.9 vemos que no hay nada en particular en el hecho de que Ω sea un dominio plano. La demostración fácilmente se extiende a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, salvo por algunos detalles técnicos. Mientras que en el caso de el problema (3), con las hipótesis actuales y dada la forma del operador L en (4) no es posible obtener la simetría de la solución.

Observación 2.9. La hipótesis $f' \leq 0$ en la Suposición 1 es relevante para garantizar la simetría de la solución del problema (1). Consideremos el problema de Helmholtz de valores y funciones propias en la bola $B = B(0; 1)$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u & \text{en } B, \\ u &= 0 & \text{en } \partial B. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Note que para este caso $f(z) = \lambda z$, como λ debe ser positivo en (2.15) entonces, para este caso f es creciente.

Es conocido que los valores y funciones propias tienen varias propiedades importantes, como el hecho de que la sucesión de valores propios (λ_n) es una sucesión creciente no acotada, además, las funciones propias forman una base ortonormal de $L^2(B)$. Por otro lado, el dominio B es radialmente simétrico. Al convertir el operador de Laplace a coordenadas polares y hacer separación de variables en la ecuación resultante, la parte radial de la solución de la ecuación (2.15) satisface una ecuación diferencial ordinaria de Bessel. Concretamente, si $u = (r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ entonces, luego de hacer la reescalación con $\sqrt{\lambda}r$ se puede probar que la parte radial $R(r)$ satisface

$$r^2 R'' + rR' + (r^2 - n^2)R = 0 \quad (2.16)$$

entonces $R(r) = R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$, donde J_n es la función de Bessel de primera especie y orden n . Como $R(1) = 0$ por la condición de frontera, entonces $J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$, es decir $\alpha = \sqrt{\lambda}$ es un cero de J_n . Si denotamos los ceros positivos de J_n por

$$\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \dots \quad \text{tenemos que}$$

$u_{nk}(r, \theta) = J_n(\alpha_{n,k}r) \cos(n\theta)$, $u_{nk}(r, \theta) = J_n(\alpha_{n,k}r) \sin(n\theta)$ son funciones propias con valor propio $\alpha_{n,k}^2 = \lambda$, $n \geq 0$, $k \geq 1$, las cuales no son todas simétricas.

Proposición 2.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y simétrico con respecto a una recta T . Si el problema (1) con $f' \leq 0$, tiene una solución u entonces existe por lo menos un punto crítico de u sobre la recta T .*

Demostración. La prueba se basa en el Teorema de Rolle y la Proposición 2.9. Para simplificar los cálculos supondremos que la recta de simetría T es el eje $\vec{x}_2$, es decir, la recta $x_1 = 0$ es un eje de simetría de Ω . Como Ω es conexo y acotado, existen por lo menos dos números reales $a < b$, tales que el segmento de recta $\{(0, t) : a \leq t \leq b\} \subset \vec{x}_2 \cap \bar{\Omega}$ y $(0, a), (0, b) \in \partial\Omega$. Definamos $v(t) = u(0, t)$ para $a \leq t \leq b$. Note que v es una función de valor real diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , además $v(a) = v(b) = 0$. El Teorema de Rolle garantiza la existencia de $c \in (a, b)$ tal que $v'(c) = 0$, esto es $\partial u(0, c)/\partial x_2 = 0$.

Como Ω es simétrico, existe $0 < e$ tal que

$$\{(t, c) : -e \leq t \leq e\} \subset \bar{\Omega} \quad \text{y los puntos} \quad (e, c), (-e, c) \in \partial\Omega.$$

Por otro lado, la Proposición 2.9 garantiza la simetría de la solución respecto de la recta $x_1 = 0$, esto es, $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$. Entonces $h(t) = u(t, c)$ es una función real, simétrica y diferenciable en el intervalo $(-e, e)$, luego $0 = h'(0) = \partial u(0, c)/\partial x_1$. Es decir, $(0, c)$ es un punto crítico de u que está sobre el eje de simetría $\vec{x}_2$. $\square$

Observación 2.10. En un dominio tipo tuerca o a la inversión de este, dado que tenemos una frontera interior la cual es atravesada por las simetrías del dominio, al aplicar la demostración de la Proposición 2.10 obtenemos que por cada eje de simetría existen por lo menos 2 puntos críticos, para un total de $2n$ puntos críticos.

Proposición 2.11. *Sea u la solución del problema (1), donde f satisface la Suposición 1 y T es un eje de simetría de Ω . Si p es un punto crítico de u entonces la reflexión de p respecto a T también es un punto crítico de u*

Demostración. Por la Proposición 2.9 tenemos que

$$u(R_T(x)) = u(x) \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega},$$

entonces

$$\nabla u(R_T(p)) = -(DR_T(R_T(p)))^* \nabla u(R_T(R_T(p))) = -(DR_T(R_T(p)))^* \nabla u(p) = 0$$

donde A^* denota la matriz adjunta de A □

Proposición 2.12. *Supongamos que Ω es un dominio acotado, convexo, con frontera suave y por lo menos con un eje de simetría. Si f satisface la Suposición 1 entonces la solución u de (1) tiene un único punto crítico. Más aún, el punto crítico pertenece a cada eje de simetría de Ω .*

Demostración. En [3, Theorem 10] Arango y Gómez prueban, en particular para el operador $L = \Delta$, que la solución u tiene exactamente un punto crítico. Para demostrar que el único punto crítico se encuentra en la intersección de los ejes de simetría, se puede proceder usando reflexiones, para así probar que por fuera de los ejes de simetría no hay puntos críticos, luego el punto debe estar en la intersección de los ejes de simetría. Otro argumento es la Proposición 2.10. □

Observación 2.11. En primer lugar note que, en la Proposición 2.10 no se han impuesto hipótesis sobre $\partial\Omega$, por lo cual se debe suponer la existencia de una solución en el dominio Ω , mientras que con las hipótesis sobre f y Ω en la Proposición 2.12, es conocida la existencia, regularidad y unicidad de la solución u del problema (1), ver los Teoremas 2.2, 2.3 y 2.4. Por otro lado, en la Proposición 2.12 se supone que Ω es convexo y con frontera suave lo cual permite garantizar la existencia de un *único* punto crítico, mientras que la conclusión en la Proposición 2.10 sólo asegura la existencia de por lo menos un punto crítico. Mediante el estudio de las líneas nodales mostraremos que la solución de (3) en un disco tiene un único punto crítico.

2.2. Líneas nodales

Si v es una función suave de valor real, llamaremos al conjunto $v^{-1}(0)$ *conjunto nodal* de v . Si $\nabla v(p) \neq 0$ entonces p es un punto regular de v , de lo contrario p es un *punto crítico* de v .

Sea θ una dirección en S^1 denotemos

$$u_\theta(x) = \nabla u(x) \cdot \theta, \quad x \in \bar{\Omega} \quad \text{y} \quad N_\theta = \{x \in \bar{\Omega} : u_\theta(x) = 0\}, \quad (2.17)$$

a la función u_θ la llamaremos función nodal mientras que al conjunto N_θ lo llamaremos conjunto nodal o línea nodal. Observemos que para cada $\theta \in S^1$ tenemos

$$\mathbb{K} = \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} \subset N_\theta.$$

Más aún, si θ y ϕ son dos direcciones en S^1 no colineales entonces

$$\mathbb{K} = N_\theta \cap N_\phi.$$

En efecto, si $x \in N_\theta \cap N_\phi$ entonces $\nabla u(x)$ es perpendicular a θ y ϕ , luego $\nabla u(x) = 0$ y así $x \in \mathbb{K}$. Teniendo en mente que si u satisface (3), es claro que la aplicación

$$x \rightarrow JH_u(x)\theta, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es de clase $C(\Omega)$, siendo J la matriz de rotación $-\pi/2$. Si $p \in N_\theta$ es un punto regular de u_θ , entonces N_θ puede ser parametrizado localmente por la solución de la E.D.O.

$$x'(t) = JH_u(x(t))\theta, \quad x(0) = p. \quad (2.18)$$

Tenemos que, $\nabla u_\theta = H_u \theta$ es ortogonal a la curva de nivel N_θ , de esta forma tomando su rotación obtenemos un vector tangente a N_θ . La anterior ecuación diferencial ordinaria satisface las condiciones del Teorema de Picard de existencia y unicidad de problemas de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver [19], pág. 86), pues como se mencionó arriba la aplicación $JH_u(x)\theta$ está en $C(\Omega)$.

El conjunto nodal asociado al problema (1)

Las siguientes proposiciones son aspectos generales de las líneas nodales asociadas a la solución de (1) y serán esenciales para lograr demostrar que los vértices interiores de la inversión de un dominio tipo tuerca no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución. Además, con esta misma técnica lograremos probar que en la inversión de dominios tipo tuerca no hay acumulación de puntos críticos en la frontera interior.

Proposición 2.13. Sean Ω un dominio plano acotado, T un eje de simetría de Ω y $\theta \in S^1$ ortogonal al vector director de la recta T . Si u es la solución del problema (1) y f satisface la Suposición 1 entonces $T \subseteq N_\theta$.

Demostración. Asumiremos que T es el eje $\vec{x}_1$. Por la proposición 2.9 tenemos que $v(x_1) = u(-x_1, x_2) - u(x_1, x_2) = 0$ para todo x_1 con $(x_1, x_2) \in \Omega$, entonces $v'(0) = 0$, es decir $v'(0) = -u_{x_1}(0, x_2) - u_{x_1}(0, x_2) = 0$ de donde que se concluye $u_{x_1}(0, x_2) = 0$ por lo que $T \subseteq N_{(1,0)}$. $\square$

En el Ejemplo 2.4 se aprecia como las rectas de simetría pertenecen a líneas nodales. La siguiente proposición es válida tanto para la solución u de (1) como (3).

Proposición 2.14. Si Ω es un dominio plano con un eje de simetría T entonces para todo $\theta \in S^1$ se tiene que

$$R_T(N_\theta) = N_{R_T(\theta)},$$

donde $R_T(\cdot)$ es la reflexión con respecto a la recta T en la Definición 2.

Demostración. Con el objetivo de simplificar la demostración asumiremos que el eje de simetría pasa por el origen de coordenadas. Por la proposición 2.9 tenemos que $u(x) = u(R_T(x))$ y recordemos que

$$DR_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x_1} & \frac{\partial R_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial R_2}{\partial x_1} & \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \nabla u(x) \cdot \theta &= \nabla[u(R_T(x))] \cdot \theta \\ &= (DR_T(x))^t \nabla u(R_T(x)) \cdot \theta \\ &= \nabla u(R_T(x))^t \cdot DR_T(x) \theta \\ &= \nabla u(R_T(x))^t \cdot DR_T(x) \theta \\ &= \nabla u(R_T(x))^t \cdot DR_T(\theta), \end{aligned}$$

de donde se obtiene la conclusión de la proposición. $\square$

Proposición 2.15. Sean Ω la inversión de un dominio tipo tuerca, f una función que satisface la Suposición 1 y $u \in H^2(\Omega)$. Supongamos que existe una curva de Jordan $\beta \subset N_\theta$. Si Ω_β es la región en Ω acotada por β , entonces Ω_β no puede ser simplemente conexa. Más aún, dado θ en S^1 no puede existir una región conexa en Ω con frontera N_θ , por lo tanto a lo más puede existir una curva de Jordan en N_θ .

Demostración. Sea $\theta \in S^1$ fijo pero arbitrario y supongamos que Ω_β es simplemente conexa. Observemos que u_θ satisface el problema de contorno

$$\begin{aligned} -(\Delta + f'(u))u_\theta &= 0 & \text{en } \Omega_\beta, \\ u_\theta &= 0 & \text{en } \partial\Omega_\beta = \beta \subset N_\theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dado que $f' < 0$, el Principio del Máximo garantiza que $u_\theta \equiv 0$ en Ω_β , extendiendo analíticamente obtenemos que $u_\theta \equiv 0$ en Ω . La frontera exterior de Ω es suave y en ella u alcanza su valor mínimo, usemos el Lema de punto de frontera de Hopf tomando $x_0 \in \partial\Omega$ tal que θ no sea colineal con el tangente a $\partial\Omega$ en x_0 , entonces $\frac{\partial u}{\partial \theta}(x_0) \neq 0$ contradiciendo que $u_\theta \equiv 0$. $\square$

El siguiente resultado nos ayudará a probar que los vértices interiores de la inversión de los dominios tipo tuerca no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución de (1). En el caso de los dominios tipo tuerca se demostró en [11] usando la técnica de los planos móviles que los vértices exteriores no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución del problema (1), dada la geometría resultante en la inversión de los dominios tipo tuerca, no es posible aplicar la técnica de los planos móviles en las esquinas interiores.

Proposición 2.16. *Sea Ω la inversión del dominio tipo tuerca cuyos vértices exteriores son los puntos $(\cos(\frac{2k\pi}{n}), \sin(\frac{2k\pi}{n}))$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$ y la frontera interior una circunferencia centrada en el origen de radio distinto de 1. Entonces, cada línea nodal $N_{\frac{2k\pi}{n}}$ contiene una curva de Jordan, para $k = 0, 1, \dots, n-1$.*

Demostración. Con el fin de simplificar la demostración consideremos como Ω la inversión del dominio tipo tuerca cuyos vértices exteriores están situados sobre la circunferencia unidad, es decir los puntos $(\cos(\frac{2k\pi}{4}), \sin(\frac{2k\pi}{4}))$ con $k = 0, 1, 2, 3$, y usaremos por guía la Figura 2.2. Probaremos que la línea nodal $N_{\pi/2}$ tiene una curva de Jordan.

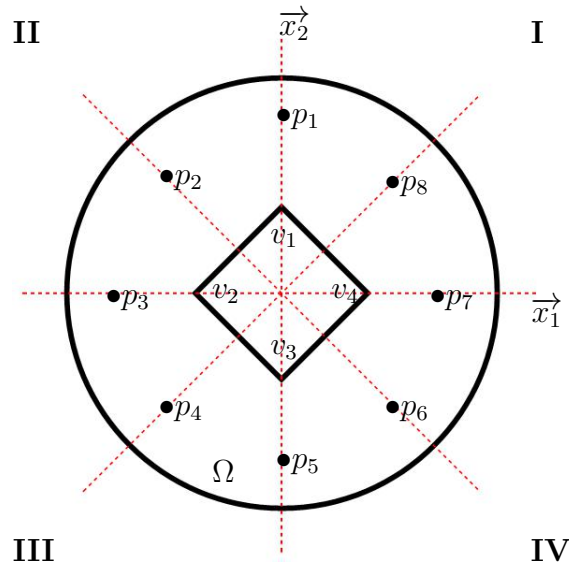


Figura 2.2: Inversión de un dominio tipo tuerca, vértices y puntos críticos sobre los ejes de simetría.

Por la Proposición 2.10 y dado que nuestro dominio es anular, se sigue que existen por lo menos 8 puntos críticos. Notemos que $\vec{x}_1 \subset N_{\pi/2}$ y recordemos que $N_{\pi/2}$ contiene a todos los puntos críticos. También observemos que $R_{\vec{x}_1}(N_{\pi/2}) = N_{\pi/2}$ y $R_{\vec{x}_2}(N_{\pi/2}) = N_{\pi/2}$. Sea β una componente conexa de $N_{\pi/2} \setminus \{\vec{x}_1\}$ que pasa por el punto crítico p_1 en sobre el eje $\vec{x}_2$, ver Figura 2.3 a). Si β interseca la frontera interior de $\partial\Omega$ en el vértice v_1 , entonces al tomar la reflexión de $N_{\pi/2}$ respecto al eje $\vec{x}_2$ se obtiene una región simplemente conexa en Ω acotada por $\beta \subset N_{\pi/2}$ contradiciendo la Proposición 2.15.

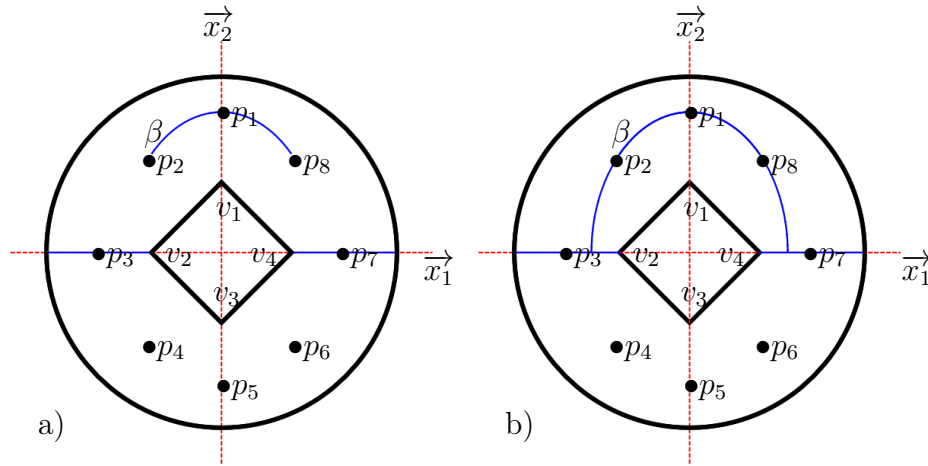


Figura 2.3: a) Segmento de β componente conexas de $N_{\pi/2} \setminus \{x_1\}$ que pasa por el punto crítico p_1 . b) El segmento β interseca al eje x_1 para formar por simetría una curva de Jordan en $N_{\pi/2}$

Dado que β es una curva continua, entonces β debe intersecar el eje $\vec{x}_1$. Ambos extremos de β no pueden intersecar el eje $\vec{x}_1$ en el mismo cuadrante, puesto que se formaría una región conexas cuya frontera es conformada por $N_{\pi/2}$ contradiciendo la Proposición 2.15. En consecuencia, β debe intersecar el eje $\vec{x}_1$ en el cuadrante I y en el cuadrante II, intersección que podría darse en los vértices v_2 y v_4 conectando dos vértices no contiguos. Para concluir debemos tomar la reflexión de β respecto del eje $\vec{x}_1$, obteniendo la curva de Jordan por simetría. Ver Figura 2.3 $\square$

Las Proposiciones 2.15 y 2.16 son resultados previos de uno de los resultados principales del documento, según el cual podremos concluir que en el caso de la inversión de un dominio tipo tuerca, los vértices interiores no son puntos de acumulación de puntos críticos. Recordemos el enunciado del Teorema P1

Teorema P 1. Sean Ω la inversión de un dominio tipo tuerca, f una función que satisface la Suposición (1) y $u \in H^2(\Omega)$ la solución del problema de contorno (1). Entonces los vértices de la frontera interior de Ω no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución u , más aún el conjunto crítico de u no tiene curvas de Jordan, es finito y su cardinalidad es por lo menos $2n$, donde n es el número de vértices en la frontera interior de Ω .

Observación 2.12. La conclusión del Teorema P1 es la misma en el caso de un dominio tipo tuerca.

Demostración. Dada la geometría de un dominio tipo tuerca y de su inversión, en virtud de la Proposición 2.10 y de la Observación 2.10 la solución u tiene por lo menos

$2n$ puntos críticos los cuales están ubicados sobre los n ejes de simetría. En lo que resta de la demostración, asumiremos que Ω es la inversión del dominio tipo tuerca cuya frontera exterior es un cuadrado y su frontera interior es una circunferencia, notando que el razonamiento no depende de este supuesto, simplemente nos permite fijar ideas y simplificar la demostración.

Procederemos por contradicción para demostrar que los vértices interiores no son puntos de acumulación de puntos críticos. En caso de existir una sucesión de puntos críticos que converge a un vértice, por la Proposición 2.11 sabemos que la reflexión de un punto crítico de la solución respecto a un eje de simetría también es punto crítico, luego todos los vértices de la frontera interior son puntos de acumulación de puntos críticos. Según lo probado en Proposición 2.16 el conjunto nodal $N_{\pi/2}$ contiene una curva, de esta forma para que $N_{\pi/2}$ contenga infinitos puntos críticos, deben existir infinitas curvas de Jordan en $N_{\pi/2}$ formando entre ellas regiones conexas acotadas por $N_{\pi/2}$ contradiciendo la Proposición 2.15. $\square$

Observación 2.13. Comentaremos que la técnica de comparar la solución u con la solución en el dominio rotado por $\pi/4$ usada en el Teorema 3 en [1] y en el Teorema 3.4 en [11] para probar que no existe una curva crítica, igual aplica en el caso de la inversión de un dominio tipo tuerca, pues la región D de estas pruebas satisface las mismas propiedades que la que se forma en el caso de la inversión de un dominio tipo tuerca.

Observación 2.14. Sobre el intervalo de definición de f en el Teorema P1, nos interesa que f satisfaga las hipótesis en el intervalo $[0, f(0)/4]$, así que es suficiente exigir que $f \in C^\omega([0, f(0)/4])$ pues según la Proposición 2.4 los valores de la solución u de (1) se encuentran acotados en este intervalo y es allí donde realmente f debe tener las características requeridas por el Teorema. Con el fin de satisfacer las hipótesis del Teorema P1 podemos suponer que J es un intervalo abierto y acotado que contiene al intervalo $[0, f(0)/4]$ y tomar una extensión $\bar{f}$ de clase $C^\infty(J)$ de f .

A continuación mostraremos un par de ejemplos numéricos donde podemos verificar la conclusión del teorema anterior.

Ejemplo 2.1. Sea Ω el dominio anular cuya frontera exterior es una circunferencia de radio 2 y su frontera interior el cuadrado de vértices $(-1, 0), (0, -1), (0, 1), (1, 0)$. Sea $u \in C^2(\Omega)$ la solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 - u^3 & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

En este caso $f(z) = 1 - z^3$ satisface las hipótesis del Teorema P1, entonces los vértices interiores de Ω no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución u . En

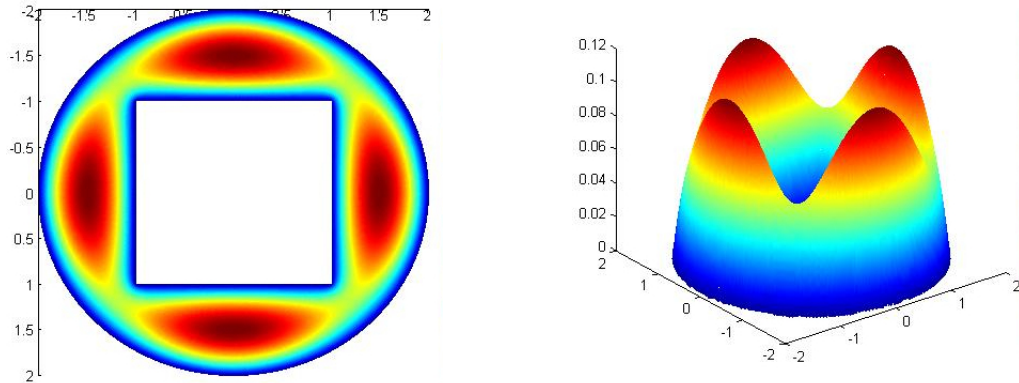


Figura 2.4: Solución u en el ejemplo 2.1. $f(z) = 1 - z^3$

la figura 2.4 podemos apreciar que en efecto no hay acumulación de puntos críticos en los vértices interiores y hay 8 puntos críticos, distribuidos como 4 máximos y 4 puntos silla.

Ejemplo 2.2. Sea Ω el dominio cuya frontera interior es un triángulo equilátero con los vértices sobre la circunferencia unitaria y su frontera exterior es una circunferencia de radio $r = 2$. Sea $u \in C^2(\Omega)$ la solución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \cos u & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Note que en este caso $f(z) = \cos z$ pero f no es decreciente en un intervalo abierto que contiene al intervalo $[0, 1/2]$, sin embargo, tal como se indicó en la observación 2.14 es suficiente con que f satisfaga las hipótesis en tal intervalo, ya que se podría dar una extensión de clase C^∞ donde se tengan todas las hipótesis. En la Figura 2.5 se aprecian la solución u y las curvas de nivel, notando que no hay acumulación de puntos críticos en los vértices interiores y hay 6 puntos críticos, distribuidos como 3 máximos y 3 puntos silla.

El conjunto nodal asociado al problema (3)

El estudio del conjunto nodal asociado a la solución de (3) es en general complicado, puesto que la ecuación asociada a u_θ queda en términos de la solución u . Por este hecho y como se verá más adelante, nos vemos obligados a estudiar el conjunto nodal asociado a dos direcciones particulares, sin embargo, como se observó antes, la intersección de dos conjuntos nodales cuyas direcciones son no colineales es el conjunto crítico $\mathbb{K}$ que es el principal objetivo de este trabajo.

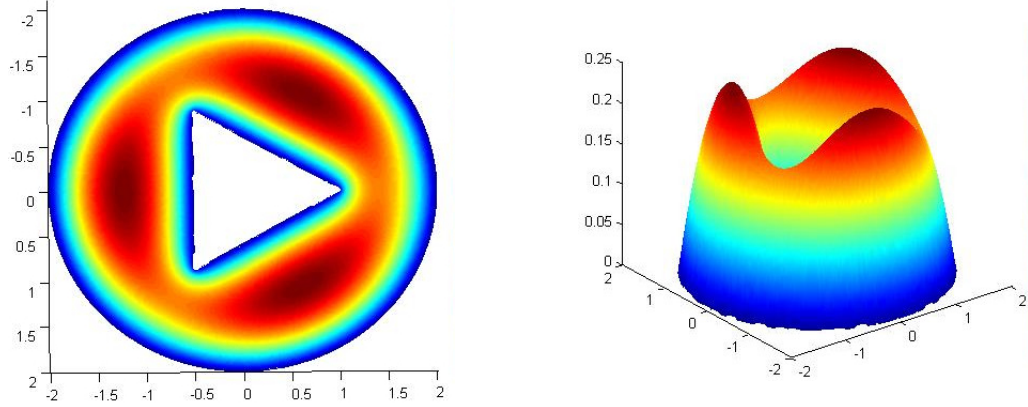


Figura 2.5: Solución u en el ejemplo 2.2. $f(z) = \cos(z)$

Sea u solución de (3), $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1$ y u_θ definida como en la ecuación (2.17). Luego de unos cálculos podemos verificar que u_θ satisface

$$L[u_\theta] = f'(u)u_\theta - \frac{a}{(x_1 - \lambda)^2}u_{x_1}\theta_1 - \frac{b}{(x_2 - \lambda)^2}u_{x_2}\theta_2, \quad (2.20)$$

donde L es el operador de la ecuación (4). En Virtud del Teorema 2.4 la solución de (3) es analítica, entonces alrededor de un punto regular de u_θ las soluciones del sistema Hamiltoniano (2.18) también son analíticas. Debemos investigar la estructura de N_θ cerca de un punto crítico de u_θ . Para ello, utilizaremos el siguiente resultado de L. Bers.

Teorema 2.10. (cf. [6, Theorem I])(1955) Sean $n \geq 2$, $m \geq 2$. Supongamos que

$$Lv(x) = \sum_{l=0}^m \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=l} a_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) \frac{\partial^l v(x)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0 \quad (2.21)$$

es una ecuación elíptica con coeficientes definidos y Hölder continuos cerca del origen. En particular supongamos que los coeficientes de derivadas de orden m satisfacen una condición de Hölder continuidad uniforme con exponente ϵ , $0 < \epsilon < 1$. Sea $v(x)$ una solución de esta ecuación definida cerca de $x = 0$ la cual se anula en $x = 0$, pero no de orden infinito. Entonces existe un polinomio homogéneo de grado N , $p_N(x)$ el cual no es idénticamente nulo y satisface la ecuación de osculación

$$L_0 v(x) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=m} a_{i_1 i_2 \dots i_n}(0) \frac{\partial^m v(x)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0$$

tal que

$$v(x) = p_N(x) + O(|x|^{N+\epsilon})$$

$v(x) - p_N(x)$ tiene derivadas parciales de orden m y

$$\frac{\partial^l (v(x) - p_N(x))}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} = O(|x|^{N-l+\epsilon}) \quad \text{para } l = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Básicamente el Teorema 2.10 afirma que si v es una solución de la ecuación (2.21) que se anula en el origen pero no de orden infinito, entonces existe un polinomio homogéneo armónico $p_N(x) \neq 0$ tal que

$$v(x) \sim p_N(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^l v(x)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} \sim \frac{\partial^l p_N(x)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}}$$

y el término de error es $O(|x|^{N-l+\epsilon})$. En 1976, Cheng [9] utiliza el Teorema 2.10 para estudiar el conjunto nodal de las funciones propias del Operador de Laplace sobre variedades Riemannianas.

En lo que resta de la sección y a menos que se indique otra cosa nos restringiremos a dominios Ω que satisfacen la siguiente condición:

Suposición 2. *Supongamos que Ω es un dominio estrictamente convexo con frontera suave y de curvatura nunca nula.*

Proposición 2.17. *Supongamos que Ω cumple la Suposición 2, f como en la suposición 1 y sea u la solución positiva de (3). Para las direcciones $\theta = (1, 0)$ y $\theta = (0, 1)$ los puntos críticos de u_θ sobre la línea nodal N_θ son aislados, además, en caso de existir algún punto crítico, en estos puntos críticos N_θ es un sistema equiangular de por lo menos 4 segmentos que dividen Ω en un número finito de subregiones conexas.*

Demostración. Usaremos el Teorema 2.10. Para $\theta = (1, 0)$ el operador de Bers en la ecuación (2.21) para estudiar la ecuación (2.20) se transforma en

$$Lv = -\Delta v - \frac{a}{x_1 - \lambda} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{b}{x_2 - \lambda} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \left(\frac{a}{(x_1 - \lambda)^2} - f'(u) \right) v$$

con $n = m = 2$, $a_{00} = \frac{a}{(x_1 - \lambda)^2} - f'(u)$, $a_{10} = -\frac{a}{x_1 - \lambda}$, $a_{01} = -\frac{b}{x_2 - \lambda}$, $a_{11} = 0$, $a_{2,0} = a_{0,2} = -1$. Claramente estos coeficientes son Hölder continuos cerca del punto $q \in \Omega$ que satisface $\nabla u_\theta(q) = 0$. Por lo tanto, según el Teorema 2.10 si una solución v de $Lv = 0$ tiene un cero de orden N entonces existe un polinomio homogéneo P_N de grado N tal que para $l = 0, 1, 2$

$$\frac{\partial^l v(x)}{\partial x_1^j \partial x_2^k} = \frac{\partial^l P_N(x - q)}{\partial x_1^j \partial x_2^k} + O(|x - q|^{N-l+1})$$

donde $x = x(x_1, x_2)$, $j + k = l$ y P_N satisface $L_0 v = 0$, siendo

$$L_0 v = -\Delta v$$

es decir, P_N es un polinomio armónico.

Argumentaremos igual para $\theta = (0, 1)$. En este caso el operador (2.20) para estudiar las líneas nodales es

$$Lv = -\Delta v - \frac{a}{x_1 - \lambda} \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{b}{x_2 - \lambda} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \left(\frac{b}{(x_2 - \lambda)^2} - f'(u) \right) v$$

con $n = m = 2$, $a_{10} = -\frac{a}{x_1 - \lambda}$, $a_{01} = -\frac{b}{x_2 - \lambda}$, $a_{00} = \frac{b}{(x_2 - \lambda)^2} - f'(u)$, $a_{11} = 0$, $a_{2,0} = a_{0,2} = -1$. Al igual que en el caso anterior las hipótesis se satisfacen, ya que estos coeficientes son Hölder continuos en algún punto crítico $q \in \Omega$ de u_θ . Para este caso, resulta también que existe un polinomio armónico homogéneo P_N para el que para $l = 0, 1, 2$

$$\frac{\partial^l v(x)}{\partial x_1^j \partial x_2^k} = \frac{\partial^l P_N(x - q)}{\partial x_1^j \partial x_2^k} + O(|x - q|^{N-l+1}).$$

Lo anterior implica que para las direcciones mencionadas los puntos críticos de u_θ sobre la línea nodal N_θ son aislados y en los puntos regulares el conjunto nodal N_θ es una curva analítica. Además, como u_θ es aproximada por un polinomio armónico homogéneo entonces en cada punto crítico de u_θ el conjunto nodal N_θ es un sistema de por lo menos 4 rayas que dividen el dominio Ω en un número finito de subregiones conexas. $\square$

Ejemplo 2.3. Sea

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{500} + x_1^3 x_2 + 18x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 - 3x_2^4 - 3x_1^4 - \frac{x_2^2}{2}$$

Definamos Ω como la región conexa interior a $\partial\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : u(x_1, x_2) = 0\}$. Mediante un cálculo simple se puede observar que u satisface (1), con $f \equiv 1$ una constante, así mismo podemos verificar que

$$\mathbb{K} = \{(x_1, x_2) \in \Omega : \nabla u(x_1, x_2) = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Con ayuda del ordenador podemos graficar diferentes líneas nodales y observar que estas sólo se cruzan en un punto, ver fig.2.6. Al calcular la Matriz Hessiana obtenemos

$$H_u(x_1, x_2) = - \begin{pmatrix} 36x_1^2 - 6x_1 x_2 - 36x_2^2 & 3x_2^2 - 72x_1 x_2 - 3x_1^2 \\ 3x_2^2 - 72x_1 x_2 - 3x_1^2 & 1 - 36x_1^2 + 6x_1 x_2 + 36x_2^2 \end{pmatrix}$$

de este cálculo notamos que $H_u(0, 0)$ así el origen de coordenadas es singular. Es decir, el único punto crítico en este caso de la función u resulta ser un punto crítico degenerado, además al observar la curva nodal N_π vemos que esta se bifurca, dado que el origen es un punto crítico de u_π . Ver el Trabajo de grado [10].

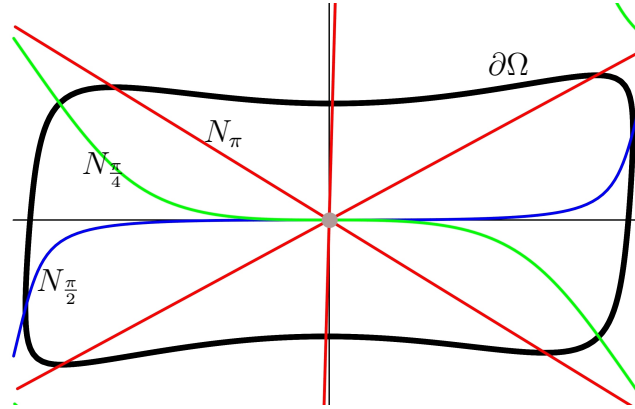


Figura 2.6: Curvas nodales de las funciones u_θ asociadas a la solución del Ejemplo 2.3, para varios valores de θ , $\partial\Omega$ esta representada por la línea negra, la línea de color rojo representa el conjunto nodal N_π , la línea de color azul representa el conjunto nodal $N_{\pi/2}$ y la línea de color verde representa a $N_{\pi/4}$.

Ejemplo 2.4. Consideremos la región

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 + \frac{a}{\sqrt{3}} > 0, \sqrt{3}|x_1| < \frac{2a}{\sqrt{3}} - x_2\}$$

aquí $f(s) \equiv w$ (constante) y $\partial\Omega$ es un triángulo equilátero de lado $2a$ centrado en el origen. Para este caso particular, la solución de (1) viene dada por

$$u(x_1, x_2) = \frac{w}{4\sqrt{3}a} \left(x_2 + \frac{a}{\sqrt{3}} \right) \left(\left(x_2 - \frac{2a}{\sqrt{3}} \right)^2 - 3x_1^2 \right).$$

Observe que Ω es simétrico respecto del eje $\vec{x}_2$ y efectivamente $u(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2)$, además Ω también es simétrico respecto de las rectas $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1$ y $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1$. La transformación lineal que produce la reflexión sobre la segunda de las dos rectas anteriores es

$$T(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \right).$$

Un cálculo directo muestra que $u(T(x_1, x_2)) = u(x_1, x_2)$, compare con las Proposiciones 2.8, 2.9 y 2.10. Note también que las gráficas de las curvas nodales $N_{\pi/2}$ y $N_{7\pi/6}$ son simétricas una de la otra con respecto de la recta $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1$, ver Fíg. 2.7. Este

ejemplo nos da una idea de cómo son las líneas nodales cuando Ω tiene vértices en la frontera, pues en este caso en particular todas las líneas nodales llegan a los vértices, situación que no es fácil de probar en general. Mientras que cuando la frontera es suave, la línea nodal llega a los puntos sobre la frontera que tienen la dirección θ correspondiente.

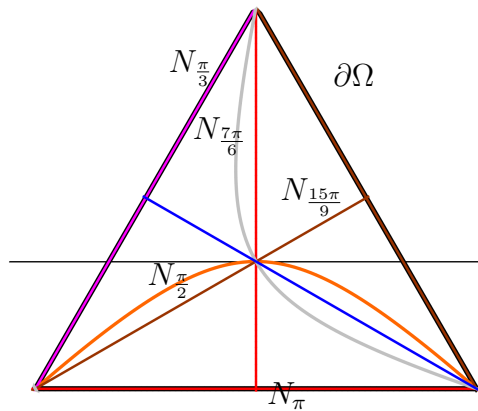


Figura 2.7: Curvas nodales de las funciones u_θ asociadas a la solución del Ejemplo 2.4, para varios valores de θ . $a = 2$, $w = 1$.

Ejemplo 2.5. Tomemos una ϵ -perturbación en la parte armónica de la solución de (1) en un anillo concéntrico de radio exterior 1 y radio interior $0 < r_1 < 1$, con $f \equiv 1$. Ver Ejemplo 4.8.

$$u(x_1, x_2) = u(r) = \frac{1}{4 \ln r_1} \left((1 - r^2) \ln r_1 + \frac{r_1^2 - 1}{2} \ln(r^2 + \epsilon^2 - 2x_1\epsilon) \right),$$

donde $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Consideremos la curva de nivel $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : u(x_1, x_2) = 0\}$ representada en la Fig. 2.8 y definamos a Ω como la región conexa que tiene a Γ como frontera, de manera que $\Gamma = \partial\Omega$. Note que Ω depende de los parámetros r_1 y ϵ .

En la Fig. 2.8 observamos cómo las líneas nodales llegan a la frontera solamente con las direcciones correspondientes, también notamos que las tres líneas nodales graficadas se intersecan sólo en dos puntos interiores a Ω , de manera que en este caso

el conjunto crítico está compuesto sólo por estos puntos. Es pertinente llamar la atención sobre que desconocemos una expresión explícita para la solución de (1) cuando el dominio es el anillo no concéntrico $\Omega = B(0; 1) \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - \epsilon)^2 + x_2^2 < r_1^2\}$, en este sentido, este ejemplo pretende dar una idea del comportamiento del conjunto crítico de tal solución y mostrar cómo son las líneas nodales cuando la frontera del dominio es suave, además mostrar la dependencia sensible entre el dominio Ω y el conjunto crítico $\mathbb{K}$, puesto que cuando el anillo es concéntrico la solución tiene una curva crítica, pero al hacer una pequeña perturbación en el dominio, las simetrías de este desaparecen y en consecuencia el conjunto crítico cambia. Compare con Arango y Gómez [2].

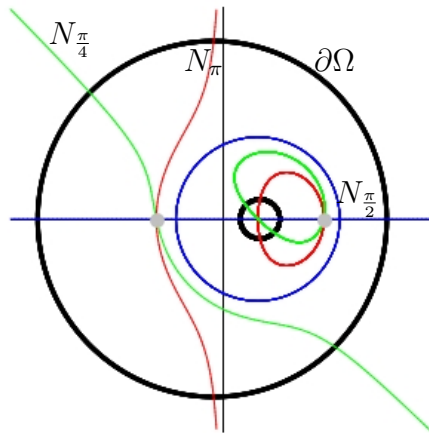


Figura 2.8: Curvas nodales de las funciones u_θ asociadas a la solución del Ejemplo 2.5, para varios valores de θ , $\partial\Omega$ esta representada por la línea negra, la línea de color rojo representa el conjunto nodal N_π , la línea de color azul representa el conjunto nodal $N_{\pi/2}$ y la línea de color verde representa a $N_{\pi/4}$. $\epsilon = 1/5$, $r_1 = 1/10$

Según el siguiente resultado, las líneas nodales N_θ para $\theta = (1, 0)$ y $\theta = (0, 1)$ no se bifurcan y la situación planteada en el Ejemplo 2.3 ó en la Fíg. 2.9 no ocurre.

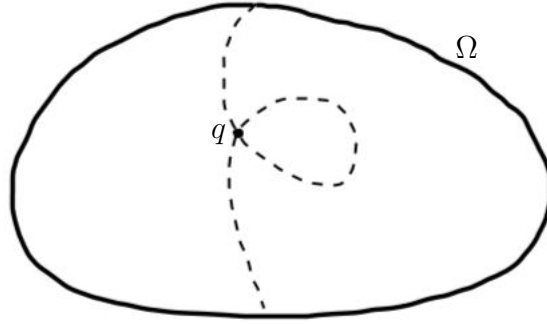


Figura 2.9: Bifurcación de la línea nodal en un punto crítico q de u_θ sobre N_θ .

Proposición 2.18. *Supongamos que Ω satisface la Suposición 2, f como en la Suposición 1 y sea u la solución positiva del problema (3). Para las direcciones $\theta = (1, 0)$ y $\theta = (0, 1)$ el conjunto nodal N_θ no tiene curvas de Jordan y la función u_θ no tiene puntos críticos sobre N_θ .*

Demostración. Notemos que en caso de tener N_θ una curva de Jordan o de existir un punto crítico sobre N_θ , y dado que N_θ sólo tiene dos puntos sobre $\partial\Omega$ a donde llegar, se obtiene una región acotada por la línea nodal donde se satisface una ecuación de la forma $L[v] + c(x)v = 0$ con condición nula tipo Dirichlet, debido a que la frontera es la línea nodal. Luego, en ambos casos se argumentará igual, concentrándonos en dicha región.

Supongamos que existe un punto crítico de u_θ sobre N_θ . Según la Proposición 2.17, en caso de existir un punto crítico de u_θ sobre N_θ ésta debe bifurcarse en por lo menos 4 rayos que dividirán al dominio en regiones conexas. Como Ω es convexo, con frontera suave y de curvatura nunca nula, entonces dada $\theta \in S^1$ sólo existen dos puntos sobre $\partial\Omega$ donde N_θ puede llegar, por lo cual N_θ debe encerrarse. Denotemos por Ω_θ la región en Ω acotada por la curva N_θ . Al usar $\theta = (1, 0)$ en la ecuación (2.20) tenemos que

$$\begin{aligned} L[u_\theta] + \left(\frac{a}{(x_1 - \lambda)^2} - f'(u)\right)u_\theta &= 0 \quad \text{en } \Omega_\theta, \\ u_\theta &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_\theta, \end{aligned}$$

donde L es el operador en (4). Usando el Principio del Máximo(Mínimo) ver [23, Theorem 2.1.1] para u_θ con $c(x) = \frac{a}{(x_1 - \lambda)^2} - f'(u) \geq 0$, pues $f' \leq 0$ y $a \geq 0$, obtenemos que $u_\theta \equiv 0$ en Ω_θ , ahora por la analiticidad de u se sigue que $u \equiv 0$, llegando a una contradicción. Para $\theta = (0, 1)$ se procede igual, teniendo en mente que en este caso u_θ satisface el problema

$$\begin{aligned} L[u_\theta] + \left(\frac{b}{(x_2 - \lambda)^2} - f'(u)\right)u_\theta &= 0 \quad \text{en } \Omega_\theta, \\ u_\theta &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto, no existen puntos críticos de u_θ sobre N_θ .

□

Teorema 2.11. *Supongamos que f cumple la Suposición 1, que Ω es simétrico respecto a la recta $x_2 = \lambda$ y satisface la Suposición 2. Si u es la solución positiva del problema (3) con $b = 0$, entonces u tiene un único punto crítico.*

Demostración. Probaremos que $\mathbb{K} = N_{(1,0)} \cap N_{(0,1)}$ sólo tiene un punto. Para simplificar los cálculos, tomaremos $\lambda = 0$, por el Corolario 2.4 u es simétrica respecto a la variable x_2 , es decir $u(x_1, x_2) = u(x_1, -x_2)$. Como consecuencia de esto,

$$\nabla u(x_1, 0) \cdot (0, 1) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0.$$

Luego, como $N_{(0,1)}$ no se bifurca debemos tener que

$$N_{(0,1)} = \{(x_1, 0) : (x_1, 0) \in \overline{\Omega}\}.$$

Notemos que

$$R_{\vec{x}_1}(N_{(1,0)}) = N_{(1,0)},$$

por la Proposición 2.14 pues la recta $x_2 = \lambda = 0$ es el eje $\vec{x}_1$. Como consecuencia de que $R_{\vec{x}_1}(N_{(1,0)}) = N_{(1,0)}$ y de que $N_{(1,0)}$ no se encierra en si misma, concluimos que $\mathbb{K} = N_{(1,0)} \cap N_{(0,1)}$ sólo tiene un elemento.

□

Capítulo 3

Planos móviles

3.1. Simetrías, planos móviles y región sin puntos críticos

En este capítulo utilizaremos algunos de los resultados de las Secciones 2.1.1, 2.1.3 para en particular estudiar el conjunto crítico del problema (1). De nuevo, supondremos que Ω es una región acotada multiplemente conexa, cuya frontera está compuesta por varias curvas de Jordan todas con interior convexo y asumiremos que la frontera exterior es un polígono, mientras que las fronteras interiores son suaves.

Proposición 3.1. *Sea t un número real en el intervalo de reflexión (d, e) . Supongamos que existe una solución u del problema de contorno (1), donde f satisface la Suposición 1. Entonces u no tiene puntos críticos sobre $T = T_t$.*

Demostración. Las hipótesis sobre T permiten que podamos reflejar Ω en si mismo respecto de T , así que podemos garantizar que el interior de la región $\Omega'_t = R_T(\Omega_T) \subset \Omega$. Las hipótesis sobre f y la Proposición 2.1 con $a = b = 0$ permiten garantizar que $u > 0$ y $-\Delta u > 0$ en Ω .

Procedamos por contradicción, supongamos que existe un punto crítico $p \in T \cap \Omega$ de la solución u . Para $x \in \Omega'_t$ definamos

$$w(x) := u_T(x) - u(x)$$

donde $u_T(x) = u(R_T(x))$. Usando el Teorema del Valor Medio vemos que existe

cierta función $c = c(x)$ con valores en el intervalo $(0, \max_{\bar{\Omega}} u)$, tal que

$$\begin{aligned} -\Delta w(x) &= -\Delta u_T(x) + \Delta u(x) \\ &= f(u_T(x)) - f(u(x)) \\ &= f'(c)(u_T(x) - u(x)) \\ &= f'(c)w(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x \in \partial\Omega'_t \cap T$ entonces $w(x) = 0$ pues $x = R_T(x)$.

$$\text{Si } x \in \partial\Omega'_t \setminus T \text{ entonces } w(x) \leq 0, \quad (3.1)$$

pues en este caso $R_T(x) \in \partial\Omega$, además $u > 0$ en Ω y $u = 0$ en $\partial\Omega$. El caso en que $w = 0$ para algún punto de $\partial\Omega'_t \setminus T$ ocurre cuando $R_T(x) \in \partial\Omega$ aún siendo $x \neq R_T(x)$. Para algunos puntos de $\partial\Omega$ en la figura 3.1(b) se puede apreciar esta situación.

Entonces w satisface el problema de contorno

$$\begin{aligned} -\Delta w - f'w &= 0 & \text{en } \Omega_t, \\ w &\leq 0 & \text{en } \partial\Omega_t. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aplicando el Principio del Máximo [23, Theorem 2.1.1] en Ω'_t , concluimos que w alcanza el máximo en $\partial\Omega'_t \cap T$. Como $p \in T \cap \partial\Omega_t$ es claro que $w(p) = 0$ luego p es un punto donde w alcanza el máximo.

De otro lado w es una función diferenciable, entonces la derivada $\frac{\partial w}{\partial \nu}$ existe en p en la dirección saliente a Ω'_t , también Ω'_t satisface la condición de bola interior en p . Luego por el Teorema de Punto de Frontera [23, Theorem 2.8.3] tenemos que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} \neq 0 \quad \text{en } p,$$

contradiciendo que $0 = \frac{\partial u}{\partial \nu}(p) = \frac{\partial u_T}{\partial \nu}(p)$. □

Corolario 3.1. *Supongamos que existe una solución u del problema de contorno (1), donde f satisface la Suposición 1. Entonces u no tiene puntos críticos interiores a la región límite Ω_e .*

Tal y como se mencionó en la observación 2.5 el argumento de los planos móviles se puede extender a dominios más generales, como los dominios conexos con frontera analítica a trozos. Igualmente, la Proposición 3.1 se extiende a estos dominios, pues la característica importante que el dominio debe satisfacer es poder reflejar parte del dominio sobre sí mismo. La prueba de la Proposición 3.1 es esencialmente la misma, salvo en que en la ecuación (3.2) se debe tomar la componente conexa de Ω_t que tiene en su frontera al supuesto punto crítico p , ver el ejemplo 3.6.

3.2. Ejemplos

Mostraremos con algunos ejemplos la aplicación de los resultados de la sección 2.1.1 y el Corolario 3.1. Se exhibirán regiones proporcionadas por el método de los planos móviles en las cuales no hay puntos críticos. Las gráficas en esta sección han sido diseñadas usando el programa Mathematica en su versión 9 [25] y el programa MatLab® en su versión R2010b usando la rutina PDE Toolbox.

3.2.1. Dominios tipo tuerca

Por la Proposición 2.10 existe un punto crítico de cada solución de (1) u sobre cada eje de simetría de Ω . Más aún, en [11] se demostró que una solución de (1) sobre los dominios tipo tuerca tiene por lo menos $2n$ puntos críticos y no tiene curvas críticas, ver [11, Teorema 3.4].

Ejemplo 3.1. Consideremos la región

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (0,15)^2 < x_1^2 + x_2^2, \quad x_2 + 1/2 > 0, \quad \sqrt{3}|x_1| < 1 - x_2\}.$$

Observe que Ω tiene 3 ejes de simetría, ver la figura 3.1(a).

Tomemos una recta ortogonal a la recta $x_2 = 0$, digamos $x_1 = 2$. Si usamos los planos móviles y el Corolario 3.1 podemos encontrar una primer subregión de Ω donde u no posee puntos críticos, ver la figura 3.1(b). Al tomar algunas rectas adecuadas y usar los planos móviles con estas rectas, podemos encontrar una región interior a Ω donde u no tiene puntos críticos, ver la figura 3.2. En la figura 3.3 podemos ver el gráfico de la solución u en este dominio.

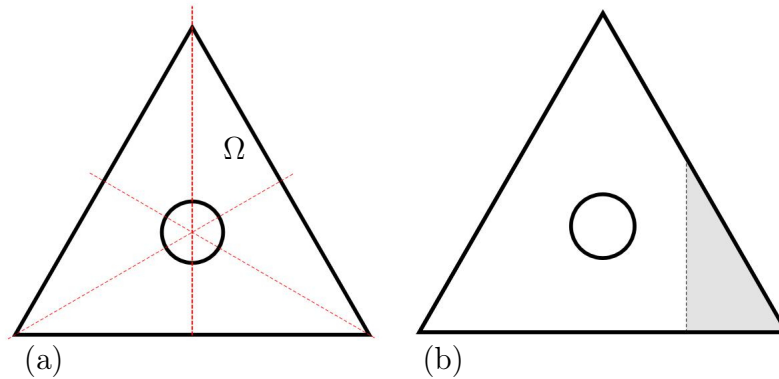


Figura 3.1: (a) Frontera y simetrías del dominio en el ejemplo 3.1. (b) Muestra una región límite del Corolario 3.1, obtenida a partir de la recta inicial $x_1 = 2$.

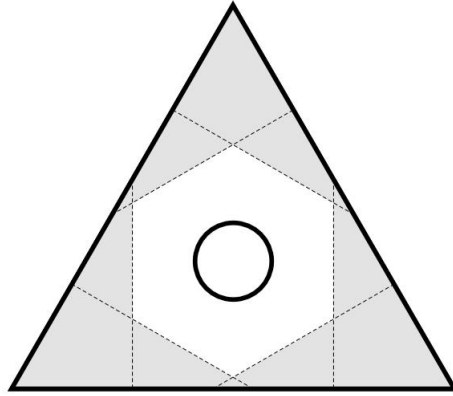


Figura 3.2: Rectas límite de la Proposición 3.1 y una región sin puntos críticos de la solución u en el dominio del ejemplo 3.1.

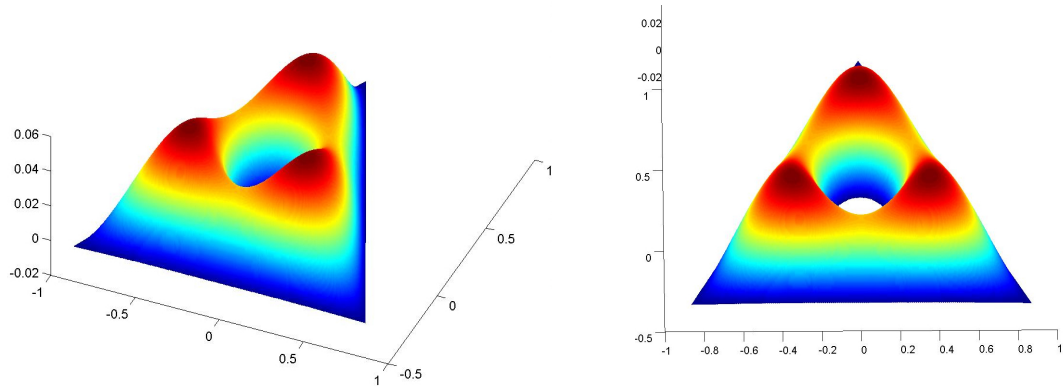


Figura 3.3: Solución u en el ejemplo 3.1. $f(z) = 1 + e^{-z}$

Para cada uno de los siguientes ejemplos, podemos encontrar una subregión sin puntos críticos usando reiteradamente la Proposición 3.1 y el Corolario 3.1. Ver la observación 3.1.

Ejemplo 3.2. Consideremos el siguiente dominio

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (0,25)^2 < x_1^2 + x_2^2, \quad |x_1| < 1, \quad |x_2| < 1\}.$$

Note que Ω tiene 4 rectas de simetría, los ejes coordenados y las rectas diagonales $x_2 = x_1$ y $x_2 = -x_1$, ver la figura 3.4(a). Al tomar rectas ortogonales a los ejes de simetría se puede formar una región interior a Ω donde u no tiene puntos críticos.

No obstante, sabemos u tiene por lo menos 8 puntos críticos en este dominio, además estos puntos críticos están ubicados sobre los ejes de simetría y por fuera de

la región de color gris en la figura 3.4(b). La figura 3.5 muestra la solución u en el dominio Ω .

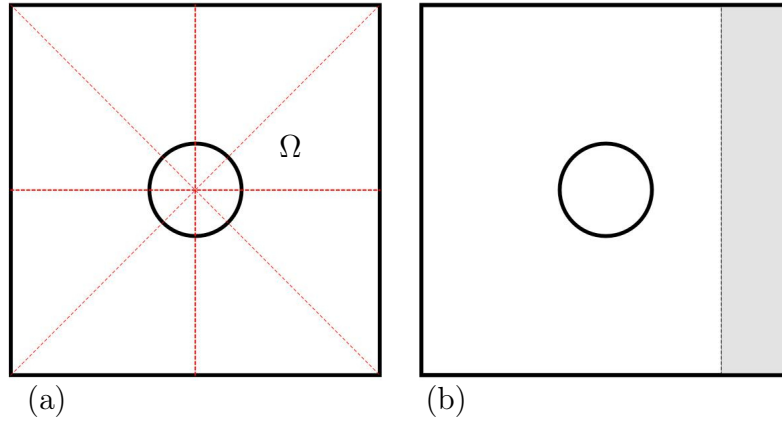


Figura 3.4: Figuras del ejemplo 3.2. La Figura (a) muestra el dominio Ω y sus simetrías. La figura (b) muestra una región obtenida por el Corolario 3.1 en el dominio del ejemplo 3.2.

Ejemplo 3.3. Para este ejemplo consideremos el dominio tipo tuerca cuya frontera exterior es un pentágono con los vértices en la circunferencia unidad y cuya frontera interior es una circunferencia de radio $r = 0,25$. Note que Ω tiene 5 ejes de simetría, y por tanto, por lo menos 10 puntos críticos los cuales están localizados sobre los ejes de simetría. Ver la figura 3.6 (a).

Procediendo como en los ejemplos anteriores, podemos encontrar una subregión sin puntos críticos de la solución u de (1) en este dominio, ver la figura 3.6 (b). Compare la información suministrada en la figura 3.6(b) con la gráfica de la solución u mostrada en la figura 3.7.

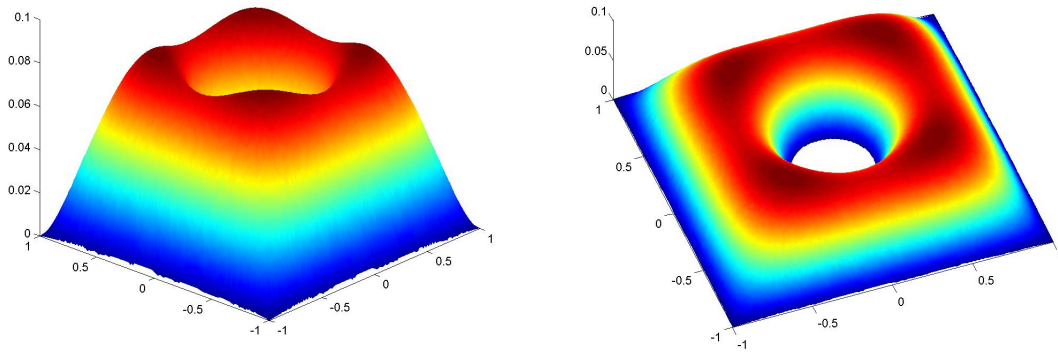


Figura 3.5: Solución u en el ejemplo 3.2. $f(z) = 2 - (z + 1)^2$

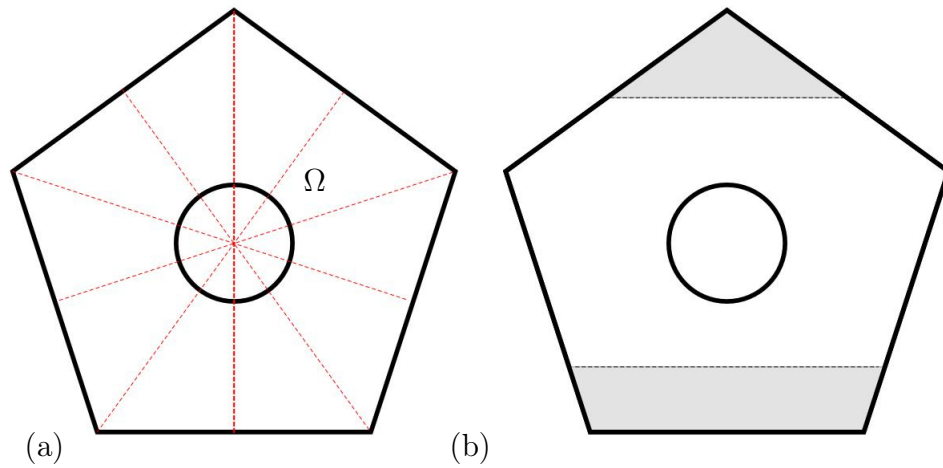


Figura 3.6: Figuras del ejemplo 3.3. La Figura (a) muestra el dominio Ω y sus simetrías. La figura (b) muestra una subregión de Ω donde u no tiene puntos críticos

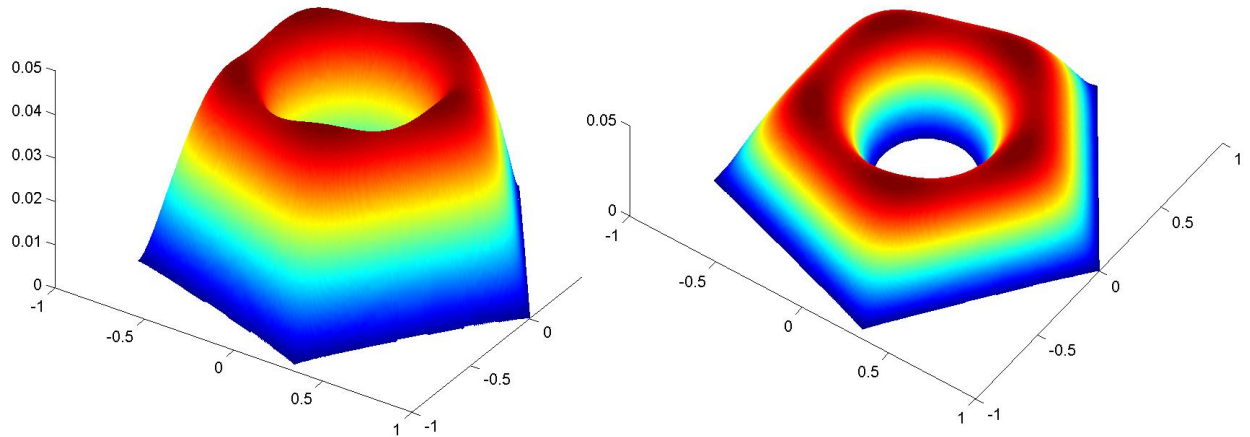


Figura 3.7: Solución u en el ejemplo 3.3. $f(z) = -(z-1)^3$

Observación 3.1. En los ejemplos precedentes, solo se tomaron algunas rectas particulares para encontrar algunas de las regiones que describe el Corolario 3.1 de manera que al unir estas pequeñas regiones, se produzca una región mayor donde con certeza podemos afirmar que u no tiene puntos críticos. Sin embargo, se pueden tomar otras rectas y usar los planos móviles para refinar un poco las regiones sin puntos críticos aquí mostradas.

3.2.2. Otros dominios

Ejemplo 3.4. Consideremos el dominio poligonal no convexo Ω conformado por segmentos de recta, cuyos vértices son los puntos del plano $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(0, 4)$, $(0, 0)$. Note que el dominio Ω así conformado, es simétrico con respecto a la recta $T = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Por tanto, en virtud de la Proposición 2.9 la solución u del problema 1 es simétrica con respecto T . Por la Proposición 2.10 existe un punto crítico de u sobre T . Las ideas de Serrin sobre los planos móviles que desarrollamos en la sección 2.1.1 se pueden extender para una región como la de este ejemplo. En la figura 3.8(b) se muestra una subregión de Ω sin puntos críticos de u . La figura 3.9 muestra la gráfica de la solución u .

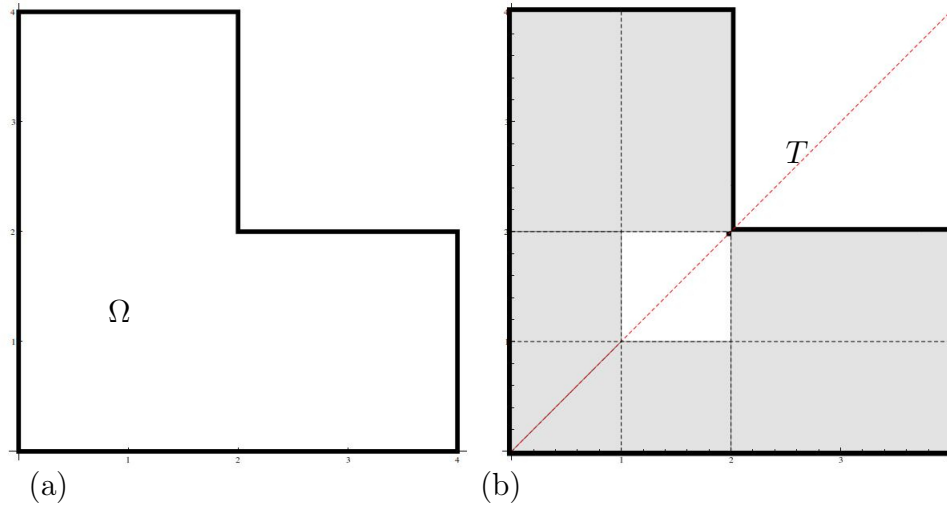


Figura 3.8: La figura (a) muestra el dominio Ω del ejemplo 3.4. La figura (b) muestra una subregión de Ω donde la solución u no tiene puntos críticos. También se aprecian *rectas límites* paralelas a segmentos de la frontera $\partial\Omega$.

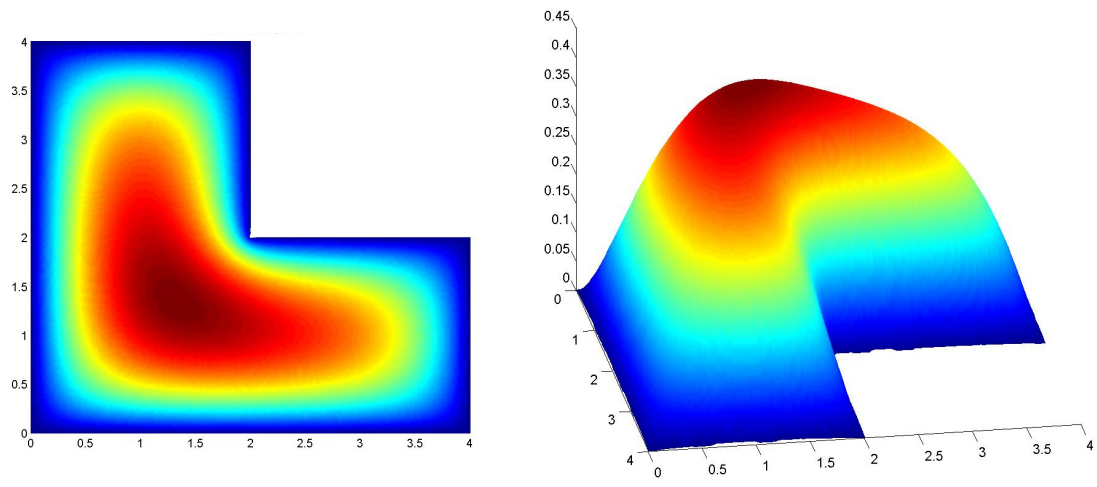


Figura 3.9: Curvas de nivel y gráfica de la solución u en el ejemplo 3.4. $f(z) = e^{-z}$

Ejemplo 3.5. Para este ejemplo consideremos el dominio poligonal Ω conformado por segmentos de recta, cuyos vértices son los puntos del plano $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 6)$, $(0, 6)$, $(0, 0)$. Note que el dominio Ω así conformado, no es convexo y **no** posee rectas de simetría. Sin embargo podemos usar los planos móviles para encontrar una región donde la solución de (1) en este dominio no tiene puntos críticos.

En la figura 3.10(b) se aprecia una subregión donde u no posee puntos críticos y algunas de las rectas límites con las cuales se formó esta subregión. Compare estos resultados con el ejemplo 3.4. La figura 3.11 muestra la gráfica de u en este dominio.

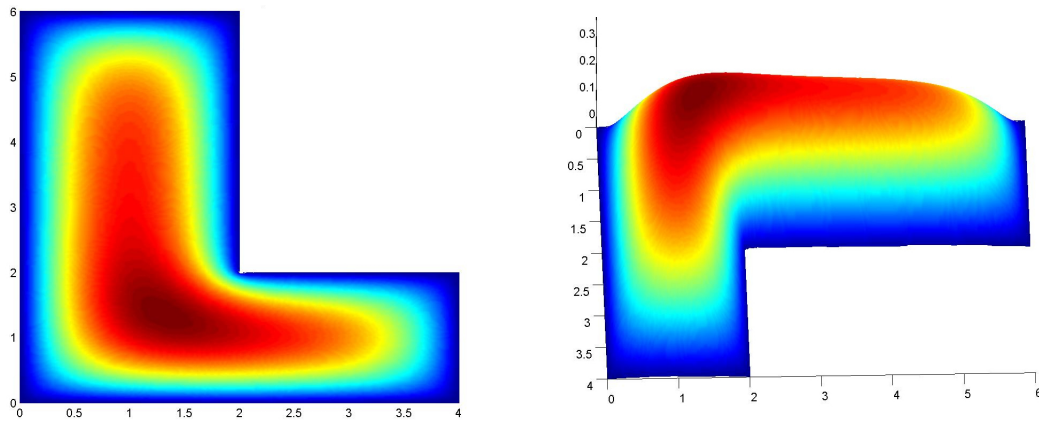


Figura 3.11: Curvas de nivel y gráfica de la solución u en el ejemplo 3.5. $f(z) = e^{-z}$

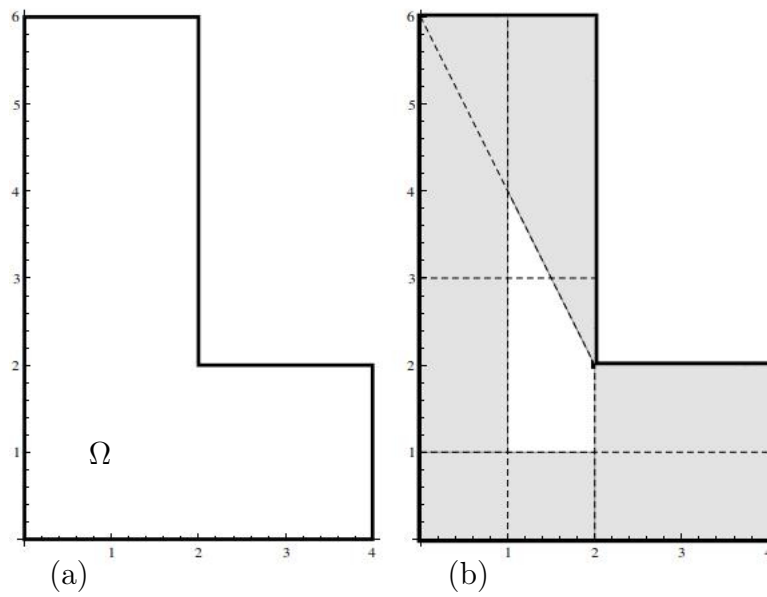


Figura 3.10: La figura (a) muestra el dominio Ω en el ejemplo 3.5. En la figura (b) muestra una subregión de Ω donde la solución u no tiene puntos críticos

Observación 3.2. Como se mencionó, por simetría sabemos que la solución en el ejemplo 3.4 tiene por lo menos un punto crítico, y aunque la intuición indica que solo hay un punto crítico, no tenemos un argumento analítico para probar este hecho. Más complejo es en el caso del ejemplo 3.5 ya que el dominio de este ejemplo no goza de ninguna simetría. Aquí simplemente sabemos de la existencia de por lo menos un máximo en el interior de Ω . También llamamos la atención en que a pesar del

cambio que sufre el dominio Ω entre los ejemplos 3.4 y 3.5 la solución, mostrada en las figuras 3.9 y 3.11 respectivamente, no sufre un cambio tan drástico como en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.6. Sea Ω el dominio poligonal conformado por segmentos de recta, cuyos vértices son los puntos del plano $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 6)$, $(8, 4)$, $(8, 0)$, $(12, 0)$, $(12, 12)$ y $(0, 12)$, ver la figura 3.12 (a). Note que Ω es simétrico respecto de la recta $x_1 = 0$ y no es convexo. Podemos usar los planos móviles para encontrar una región donde la solución de (1) en este dominio no tiene puntos críticos, ver la figura 3.12 (b). La gráfica de la solución u puede verse en la figura 3.13.

Debemos hacer la aclaración que para determinar la parte inferior de la región sin puntos críticos de la figura 3.12 (b), debemos comenzar por ejemplo con la recta $x_2 = -1$, pero tener en mente que en el problema (3.2) de la prueba de la Proposición 3.1 se tomó todo Ω_t , en este caso, tendríamos que hacer el argumento sobre cada una de las componentes conexas que se forman cuando avanzamos en el dominio con el plano móvil, ya que en esa parte de la prueba usamos el Principio del Máximo, el cual exige que el dominio sea conexo. Son justamente, esta clase de tecnicismos que se deben tener en cuenta al extender el Corolario 3.1.

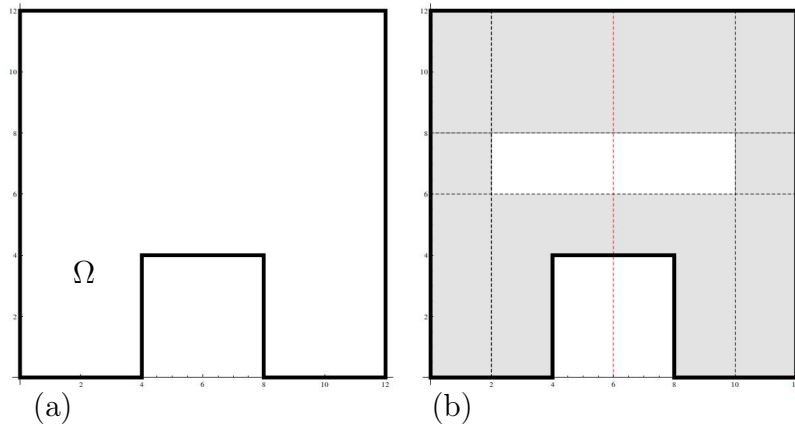


Figura 3.12: La figura (a) muestra el dominio Ω en el ejemplo 3.6. En la figura (b) muestra una subregión de Ω donde la solución u no tiene puntos críticos

Ejemplo 3.7. Ahora consideraremos un dominio que goza básicamente de las mismas propiedades que las del dominio del ejemplo 3.6, sin embargo si comparamos las gráficas 3.13 y 3.15 vemos como una pequeña variación en Ω produce una variación notable en el conjunto crítico.

Sea Ω el dominio poligonal conformado por segmentos de recta, cuyos vértices son los puntos del plano $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 8)$, $(8, 8)$, $(8, 0)$, $(12, 0)$, $(12, 12)$ y $(0, 12)$, ver la

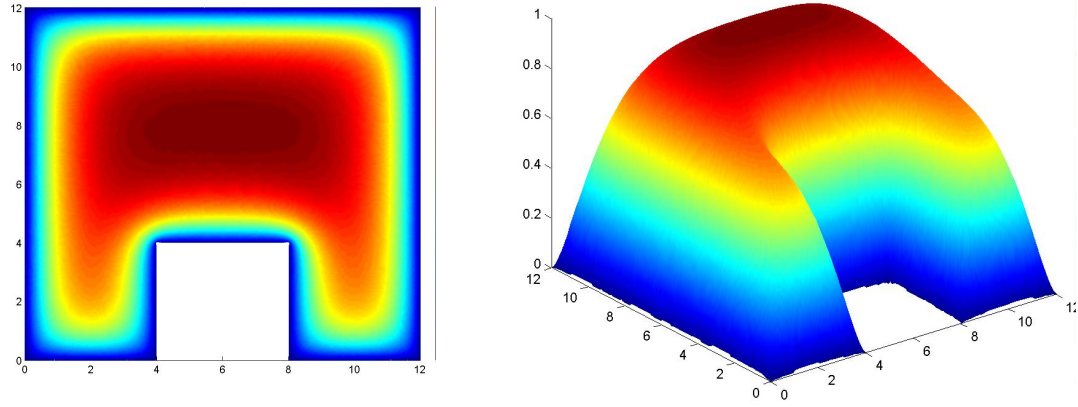


Figura 3.13: Curvas de nivel y gráfica de la solución u en el ejemplo 3.6. $f(z) = 1 - z$

figura 3.14 (a). Note que Ω es simétrico respecto de la recta $x_1 = 0$ y no es convexo. Podemos usar los planos móviles para encontrar una región donde la solución de (1) en este dominio no tiene puntos críticos, ver la figura 3.14 (b). Compare las regiones de las figuras 3.12 (b) y 3.14 (b). La gráfica de la solución u se encuentra en la figura 3.15

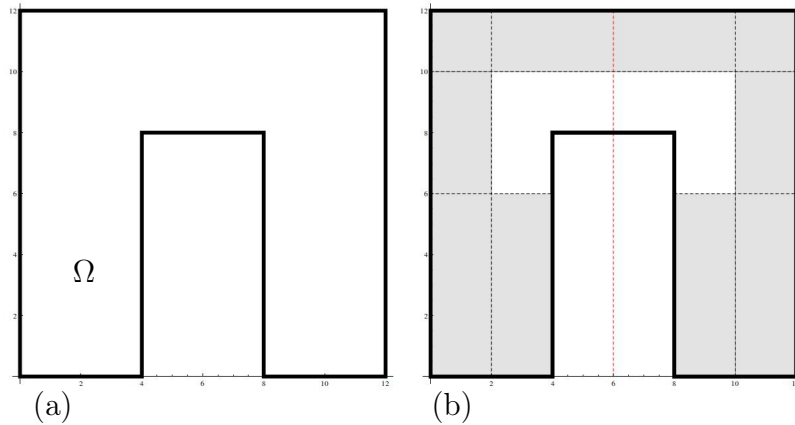


Figura 3.14: La figura (a) muestra el dominio Ω en el ejemplo 3.7. En la figura (b) muestra una subregión de Ω donde la solución u no tiene puntos críticos

Los siguientes ejemplos son muy interesantes por que dan cuenta de lo poderosa que es la herramienta de los planos móviles para obtener regiones donde la solución u de (1) no tiene puntos críticos, aún en dominios con fronteras más generales.

Ejemplo 3.8. Consideremos la región Ω cuya frontera es la poligonal que tiene por vértices a los puntos $\{(-1, -3), (4, -1), (3, 2), (-3, 4), (0, 0)\}$, ver figura 3.16 (a).

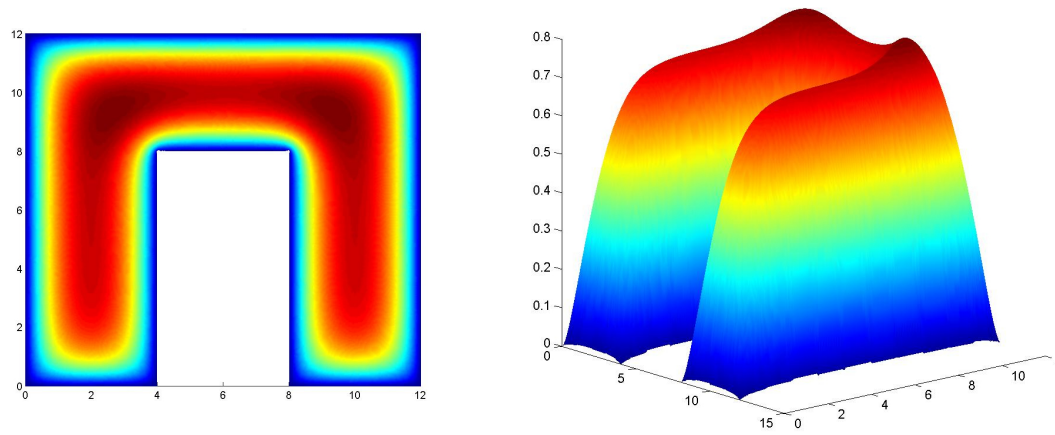


Figura 3.15: Curvas de nivel y gráfica de la solución u en el ejemplo 3.7. $f(z) = 1 - z$

Note que Ω es un dominio simplemente conexo no convexo. Note también, que la región Ω no tiene ejes de simetría. Haciendo reflexiones con respecto a algunas rectas convenientes, podemos encontrar una subregión donde la solución u no posee puntos críticos, ver figura 3.16(b). Compare la información proporcionada en la figura 3.16(b) con el gráfico de la solución u en la figura 3.17.

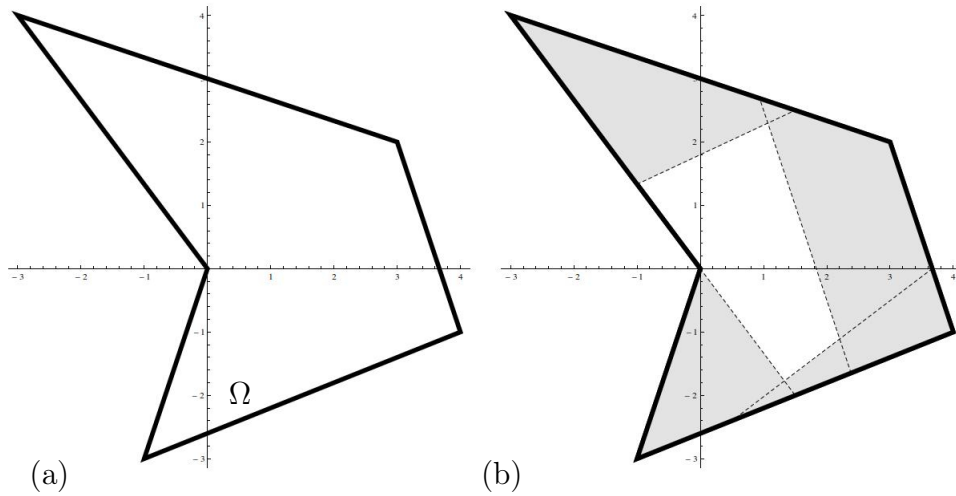


Figura 3.16: La figura (a) muestra el dominio Ω en el ejemplo 3.8. La figura (b) muestra una subregión de Ω donde la solución u no tiene puntos críticos.

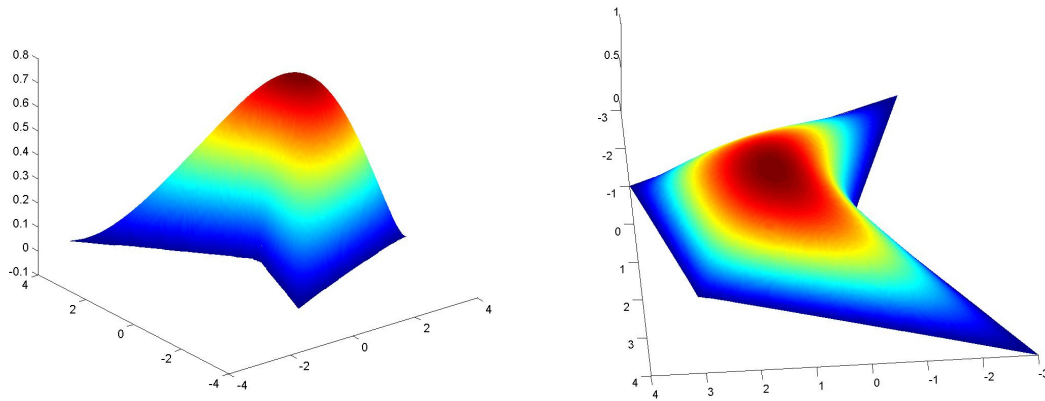


Figura 3.17: Solución u en el Ejemplo 3.8. $f(z) = e^{-z}$

Ejemplo 3.9. Ahora consideremos una región anular que tiene por frontera exterior la poligonal del dominio del ejemplo 3.8, es decir, la poligonal que tiene por vértices los puntos $\{(-1, -3), (4, -1), (3, 2), (-3, 4), (0, 0)\}$ y en la frontera interior una circunferencia de radio $r = 0,5$ centrada en el punto $(2, 0)$ ver la gráfica 3.18 (a). Este dominio carece de ejes de simetría y a diferencia del dominio del ejemplo 3.8, el dominio Ω aquí considerado no es simplemente conexo. En la figura 3.18 (b) se puede apreciar una subregión de Ω donde la solución carece de puntos críticos, compare esta región, con la gráfica de la solución u mostrada en la figura 3.19 y con las curvas de nivel de la solución u , mostradas en la figura 3.20.

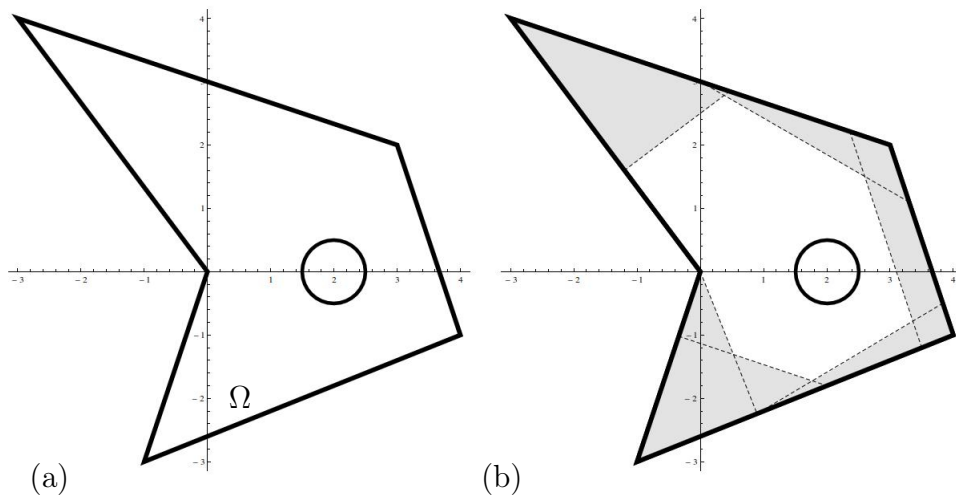


Figura 3.18: La figura (a) muestra el dominio Ω en el ejemplo 3.9. La figura (b) muestra una subregión de Ω donde la solución u no tiene puntos críticos.

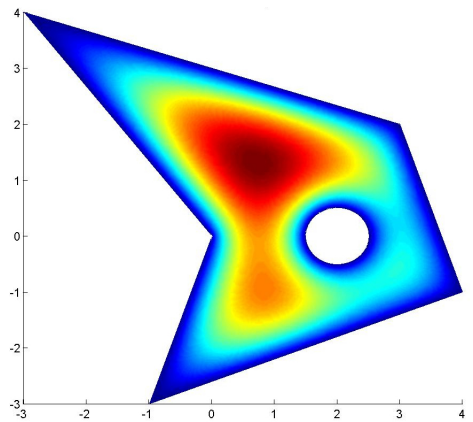


Figura 3.20: Curvas de nivel de la solución u del problema (1) en el ejemplo 3.9.

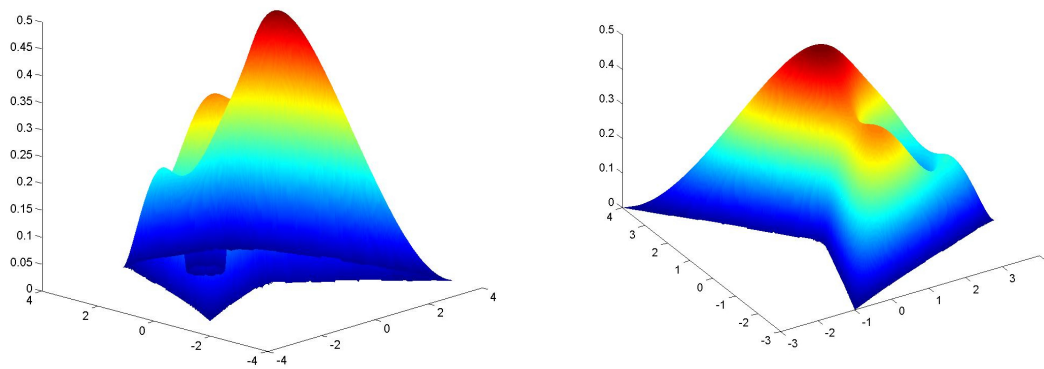


Figura 3.19: Solución u en el ejemplo 3.9. $f(z) = e^{-z}$

3.3. La Transformada Kelvin

En esta sección ilustraremos como la Transformada Kelvin, sirve para descartar la acumulación de puntos críticos de la solución del problema (2) con $G = a$ una constante y sobre algunos dominios anulares que tienen vértices en la frontera interior y que no tienen todas las simetrías que requerimos para hacer el descarte en el caso del problema semilineal (1). Ya hemos mencionado que la técnica de los planos móviles aplicada para descartar la acumulación de puntos críticos en los vértices exteriores usada en [11] no se puede aplicar cuando los vértices se encuentran en la frontera interior.

Por lo pronto, sea a una constante no negativa y denotemos por Ω un dominio anular con vértices en su frontera interior, deseamos mostrar cómo la transformada de Kelvin nos permite concluir que la solución de

$$\begin{aligned} -\Delta v &= a & \text{en } \Omega, \\ v &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.3)$$

no acumula puntos críticos en los vértices. Sea $I : \Omega \rightarrow \Omega^*$ la transformación recíproca

$$I(x_1, x_2) = (\xi(x_1, x_2), \eta(x_1, x_2)) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right). \quad (3.4)$$

Note que $I = I^{-1}$. Como función compleja $I(z) = \xi(x_1, x_2) + i\eta(x_1, x_2) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $z = x_1 + ix_2$, I es una función analítica y tenemos $\Delta\xi = \Delta\eta = 0$. También,

$$D\xi = \left(\frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right), \quad D\eta = \left(\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right),$$

note que

$$\frac{\partial\xi}{\partial x_1} = \frac{\partial\eta}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\eta}{\partial x_1}. \quad (3.5)$$

Si $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $v(x_1, x_2) = (u \circ I)(x_1, x_2) = u(\xi(x_1, x_2), \eta(x_1, x_2))$, es la Transformada Kelvin de u , calculemos Δv en términos de Δu .

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= Du(I) \cdot D_{x_1}I = u_\xi \frac{\partial\xi}{\partial x_1} + u_\eta \frac{\partial\eta}{\partial x_1} \\ v_{x_1x_1} &= D^2u(I) D_{x_1}I \cdot D_{x_1}I + Du(I) \cdot D_{x_1}^2I \\ &= u_{\xi\xi} \left(\frac{\partial\xi}{\partial x_1} \right)^2 + 2u_{\xi\eta} \frac{\partial\xi}{\partial x_1} \frac{\partial\eta}{\partial x_1} + u_{\eta\eta} \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_1} \right)^2 + u_\xi \frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2} + u_\eta \frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2} \end{aligned}$$

análogamente se calcula $v_{x_2x_2}$,

$$v_{x_2 x_2} = u_{\xi\xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2 + 2u_{\xi\eta} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + u_{\eta\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 + u_{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} + u_{\eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \Delta v &= u_{\xi\xi} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right)^2 \right] + 2u_{\xi\eta} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right] \\ &+ u_{\eta\eta} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right)^2 \right] + u_{\xi} \Delta \xi + u_{\eta} \Delta \eta \end{aligned} \quad (3.6)$$

por las ecuaciones (3.5), tenemos

$$\Delta v(x_1, x_2) = \Delta u(I(x_1, x_2)) |I'(x_1, x_2)|^2$$

equivalentemente,

$$\Delta u(I(x_1, x_2)) = \frac{\Delta v(x_1, x_2)}{|I'(x_1, x_2)|^2} = \frac{\Delta v(x_1, x_2)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \quad (3.7)$$

donde I' es la derivada en el sentido complejo.

Por lo tanto, debemos estudiar el conjunto crítico del problema lineal

$$\begin{aligned} -\Delta u = G(\xi, \eta) &:= \frac{a}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \quad \text{en } \Omega^* \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega^* \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ejemplo 3.10. Sea $\Omega = B(0; 4) \setminus \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 1, -2/3 \leq x_2 \leq 1\}$, a una constante no negativa. Note que Ω sólo tiene 1 eje de simetría, puesto que la frontera interior no es un cuadrado. Mostraremos como al usar la Transformada Kelvin y aplicar planos móviles en el dominio transformado mediante la transformación recíproca I en (3.4) se puede descartar que en las esquinas interiores se acumulen puntos críticos de la solución de (3.3).

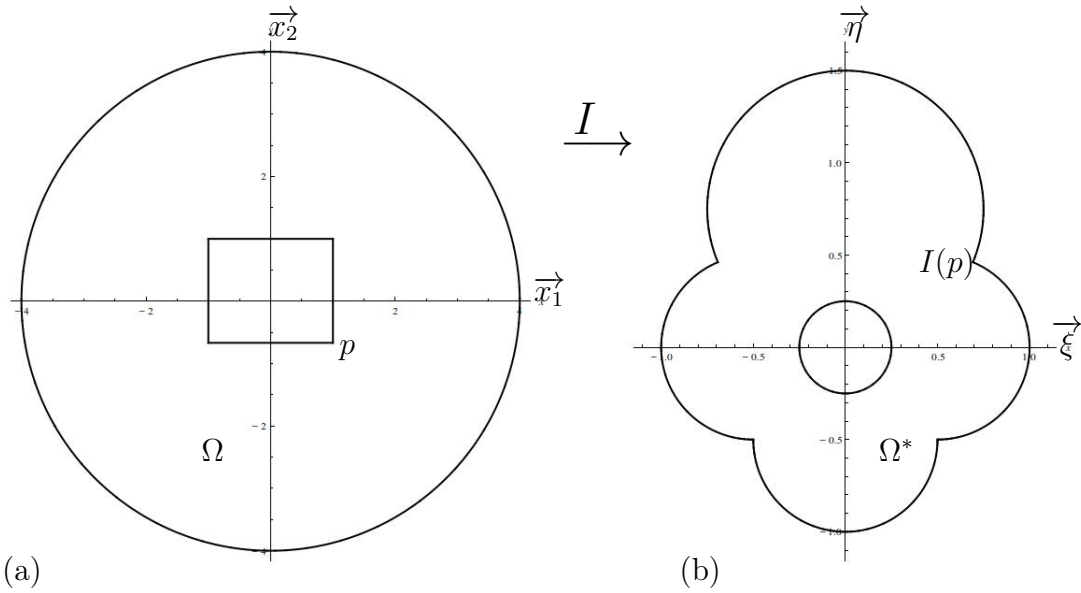


Figura 3.21: En (a) se exhibe el dominio Ω y en (b) se aprecia la transformación del dominio Ω mediante la aplicación recíproca $1/z$, en el Ejemplo 3.10

Sin pérdida de generalidad tomaremos el vértice $p = (1, -2/3)$, ver la Figura 3.21(a). Si u es la solución del problema (3.8) y definimos en $R_T(\Omega_T^*)$ la función $w(x) = u_T(x) - u(x)$ entonces al proceder como en la demostración de la Proposición 3.1 obtenemos que w satisface

$$\begin{aligned} -\Delta w &= G(R_T(x)) - G(x) & \text{en } R_T(\Omega_T^*) \\ w &\leq 0 & \text{en } \partial R_T(\Omega_T^*) \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde R_T es la aplicación de reflexión respecto a una recta T , en la Definición 2. Al notar que la función G es radialmente decreciente, luego de algunos cálculos tediosos pero simples, podemos verificar que $G(R_T(x)) - G(x) < 0$ en $R_T(\Omega_T^*)$, y de esta manera argumentar como en la prueba mencionada para concluir que sobre la recta T no hay puntos críticos, lo cual al variar la recta de reflexión nos da una región sin puntos críticos de la solución u de (3.8) para finalmente concluir que no se acumulan puntos críticos de la solución v de (3.3) en el vértice p .

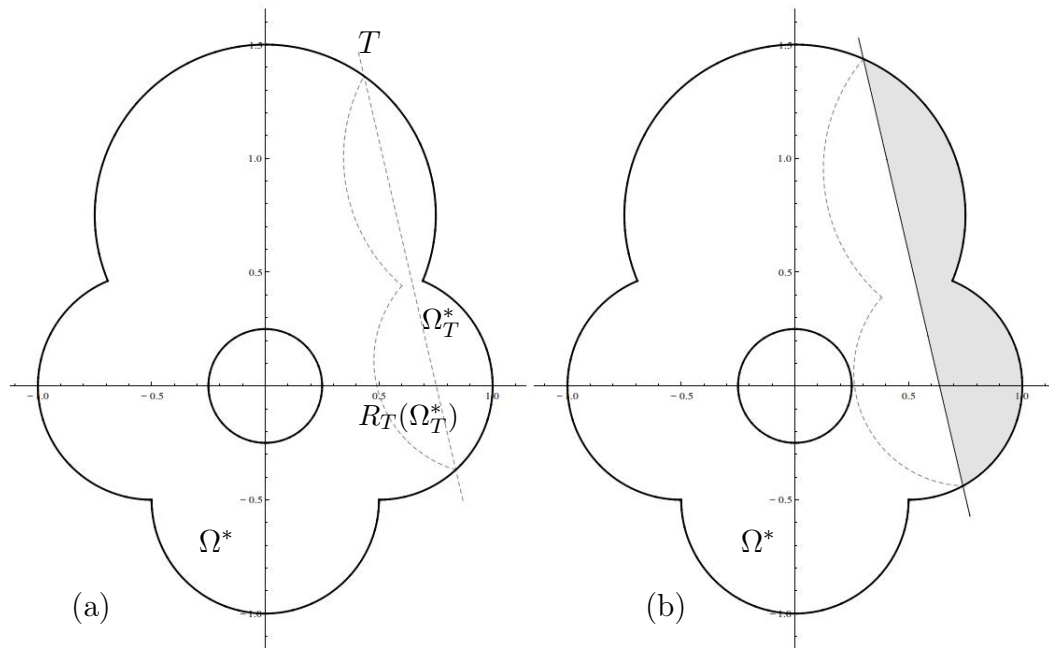


Figura 3.22: La figura (a) muestra una recta de reflexión T , las regiones Ω_T^* y $R_T(\Omega_T^*)$ del Ejemplo 3.10. La figura (b) muestra una subregión de Ω^* donde la solución u de (3.8) no tiene puntos críticos.

Podemos concluir que en dominios anulares que no gozan de las $2n$ simetrías que tiene un dominio tipo tuerca o la inversión de este, como el del Ejemplo 3.10 se puede usar la Transformada Kelvin y los Planos Móviles de Serrin para concluir que los vértices no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución de (3.3).

Capítulo 4

Puntos críticos en el espacio

4.1. Algunos ejemplos en $\mathbb{R}^3$

El conjunto crítico de la solución de las ecuaciones (1) y (2) ha sido menos estudiado cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. En este caso, el conjunto crítico puede estar conformado por puntos, líneas o superficies. En el caso en que Ω es de mayor dimensión estudiar las líneas nodales es más complejo, puesto que el $Rango(H_u)$ puede tomar más valores, por ejemplo si Ω es de dimensión 3, $Rango(H_u)$ puede ser uno, dos o tres, no puede ser cero puesto que la solución u siempre que f satisfaga la suposición 1 es semimorse, luego $H_u \neq 0$. Pero en el caso en que Ω es un dominio plano el estudio es más simple, puesto que $Rango(H_u)$ puede ser uno ó dos. Dicho con más generalidad, si p es un punto crítico y Ω es n -dimensional entonces existen a lo más $n - 1$ direcciones linealmente independientes $\theta \in S^{n-1}$ tales que p es un punto crítico de u_θ .

Con algunos ejemplos sencillos, ilustraremos a $\mathbb{K}$ cuando Ω sea de dimensión tres.

Ejemplo 4.1. No es difícil ver que $u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$ satisface (1) con $f \equiv 1$, en $\Omega = B(0; 1) = \{x = (x_1, x_2, x_3) : |x| < 1\}$. Fácilmente podemos verificar que el conjunto crítico es este caso es $\mathbb{K} = \{(0, 0, 0)\}$.

Ejemplo 4.2. Consideremos el dominio $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Note que $u = u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}(1 - x_1^2 - x_2^2)$ satisface (1) con $f \equiv 1$. Un cálculo sencillo muestra que el conjunto crítico de u es

$$\mathbb{K} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Si bien es cierto que el dominio Ω no satisface la condición de ser acotado, condición que ha sido una constante durante todo el documento, el ejemplo es interesante al notar que el conjunto crítico es una línea recta. Un valor agregado adquiere el

ejemplo cuando se menciona que el autor sólo conoce un ejemplo en el caso de un dominio plano donde la solución de (1) tiene una curva crítica, a saber, el caso en que Ω es un anillo, es decir la región formada por dos circunferencias concéntricas. Ver el Ejemplo 4.8.

Ejemplo 4.3. En este caso consideremos por dominio las bolas concéntricas en $\mathbb{R}^3$, $\Omega = B(0; 1) \setminus B(0; \frac{1}{2})$. Al escribir el operador de Laplace en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) tenemos

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} u,$$

donde $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Supongamos que $u = u(r)$ es radialmente simétrica y que satisface (1) con $f \equiv 1$. Al resolver la ecuación ordinaria resultante

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = 1 \quad \text{en} \quad \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

con las condiciones de borde

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = u(1) = 0,$$

podemos verificar que

$$u(r) = \frac{7}{24} - \frac{r^2}{6} - \frac{1}{8r}. \quad (4.1)$$

Lo que finalmente nos lleva a determinar que el conjunto crítico es una superficie, la cual forma una esfera de radio $(3/8)^{1/3}$, esto es

$$\mathbb{K} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (3/8)^{2/3}\}.$$

Ejemplo 4.4. Sea $0 < \epsilon < 1$ y consideremos una ϵ -perturbación de la solución u del Ejemplo 4.3

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{24} - \frac{1}{6}((x_1 - \epsilon)^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

en este caso, definiremos Ω como el sólido interior a la superficie de nivel cero de u , es decir $\partial\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : u(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ ver Figura 4.1. En este caso u satisface (1) con $f \equiv 1$. El gradiente de u es

$$\left(\frac{\epsilon - x_1}{3} + \frac{x_1}{8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, -\frac{x_2}{3} + \frac{x_2}{8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, -\frac{x_3}{3} + \frac{x_3}{8(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \right).$$

Cuando resolvemos $\nabla u(x) = 0$, llegamos a las dos ecuaciones cúbicas

$$x_1^3 - \epsilon x_1^2 - \frac{3}{8} = 0, \quad x_1^3 - \epsilon x_1^2 + \frac{3}{8} = 0$$

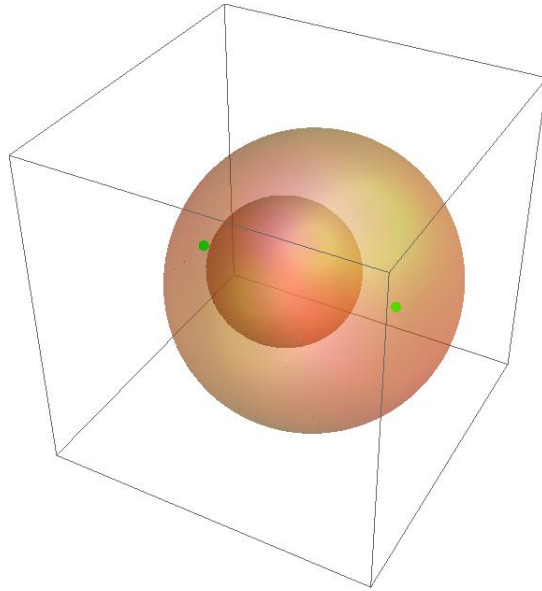


Figura 4.1: Dominio y puntos críticos de la solución del Ejemplo 4.4 con $\epsilon = 1/10$.

Al estudiar los coeficientes de ambas ecuaciones, se demuestra que cada ecuación tiene una solución real y dos complejas. Las soluciones reales de ambas ecuaciones son los puntos críticos de la solución u . Una ecuación cubica $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ tiene una raíz real si $R^2 \geq Q^3$, donde $Q = \frac{a^2 - 3b}{9}$ y $R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54}$, en el caso de nuestra primera ecuación cúbica tenemos que

$$R^2 = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^6 + \frac{\epsilon^3}{3^2 2^3} + \frac{3^2}{2^8} \geq Q^3 = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^6,$$

y en el caso de la segunda ecuación cúbica tenemos que

$$R^2 = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^6 - \frac{\epsilon^3}{3^2 2^3} + \frac{3^2}{2^8}; \quad Q^3 = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^6,$$

dato que $0 < \epsilon < 1$ entonces $\epsilon^3 < \frac{3^4}{2^5}$ y por lo tanto $\frac{\epsilon^3}{3^2 2^3} < \frac{3^2}{2^8}$, lo que permite concluir $R^2 \geq Q^3$. Usando Mathematica para hacer la simulación, al poner $\epsilon = 0,1$ se encuentran los puntos críticos $(-0,6892848690248583, 0, 0)$, $(0,7560462958840349, 0, 0)$ los cuales se encuentran graficados en la Figura 4.1

Ejemplo 4.5. Procederemos como en el Ejemplo 4.4, pero ahora perturbaremos también el término armónico de la solución u en (4.1). De nuevo, tomemos $0 < \epsilon < 1$ y consideremos la perturbación de la solución u del Ejemplo 4.3

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{24} - \frac{1}{6}((x_1 - \epsilon)^2 + x_2^2 + x_3^2) - \frac{1}{\sqrt{(x_1 - \epsilon)^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

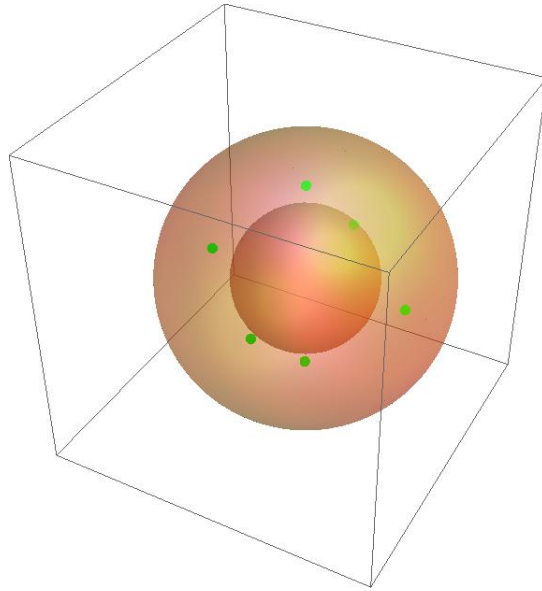


Figura 4.2: Dominio y puntos críticos de la solución del Ejemplo 4.5 con $\epsilon = 1/10$.

Una vez más, definimos $\partial\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : u(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ ver Figura 4.2. Esta función también satisface la ecuación (1) con $f \equiv 1$. Al proceder como en el Ejemplo 4.4 haciendo $\epsilon = 0,1$ y con ayuda del programa Mathematica, encontramos los 6 puntos críticos $p_1 = (1/10, 0, -\sqrt[3]{3}/2)$, $p_2 = (1/10, 0, \sqrt[3]{3}/2)$, $p_3 = (1/10, -\sqrt[3]{3}/2, 0)$, $p_4 = (1/10, \sqrt[3]{3}/2, 0)$, $p_5 = ((1 - 5\sqrt[3]{3})/10, 0, 0)$ y $p_6 = ((1 + 5\sqrt[3]{3})/10, 0, 0)$ los cuales están mostrados en la Figura 4.2.

Observación 4.1. Notemos como el conjunto crítico de las soluciones es sensible a las perturbaciones en la solución, pues en el Ejemplo 4.3 existe una superficie crítica, mientras que en el Ejemplo 4.4 al perturbar parte de la solución en ese dominio se obtiene una función con un conjunto cuyo cardinal es finito y diferente a cuando se perturbaron los dos términos de la solución en el Ejemplo 4.5. Se espera un comportamiento similar al de los ejemplos 4.4 y 4.5 al solucionar la ecuación (1) en el dominio conformado por dos esferas no concéntricas, es decir, se especula que la solución en este dominio sólo tiene un número finito de puntos críticos.

Ejemplo 4.6. Consideremos la función $u = u(x_1, x_2, x_3) = (R - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2 - r^2$. Notemos que la superficie de nivel $u = 0$ es un toroide con radio r y distancia R al eje $\vec{x}_3$ de rotación, denotaremos por $\partial\Omega$ al toroide y tomaremos por Ω la región

interior al toroide. Se verifica que u satisface el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{2R}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 6 & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Observe que $G(x_1, x_2, x_3) = \frac{2R}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 6 < 0$ en Ω , pues $R < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < R + r$. Podemos comprobar que en este caso el conjunto crítico es una curva, más precisamente la circunferencia

$$\mathbb{K} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0, x_1^2 + x_2^2 = R^2\}.$$

Estos ejemplos muestran diferentes casos del conjunto crítico cuando Ω es de mayor dimensión, además no es difícil ver como se pueden extender los ejemplos 4.1, 4.2, 4.3 a más dimensiones. Por otra parte, en virtud de la Observación 2.3 y al hacer $a = b = 0$ en el operador (4) podemos concluir que la función u que satisface el problema de contorno (1) es superarmónica y en consecuencia semimorse cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Cabré y Chanillo estudian el conjunto crítico de la solución del problema (1) cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un sólido de revolución. A causa del Teorema 1.6 en el caso de $\mathbb{R}^3$, se puede concluir que una solución del problema 1 tiene un único punto crítico sobre una esfera, un elipsoide y otros sólidos con cualidades equivalentes y que satisfacen las hipótesis del teorema. Sin embargo no se puede concluir nada sobre dominios que aún siendo sólidos de revolución no son convexos, como es el caso de un Toroide.

4.2. El toroide

En el ejemplo 4.6 explícitamente se dio la función u , cuya superficie de nivel cero coincide con la superficie Toroidal, motivados por este ejemplo intentamos estudiar el conjunto crítico de la solución de (1) en el Toroide. Se insiste en la importancia de este resultado, puesto que como se mencionó antes, en el caso plano sólo se conoce un ejemplo donde la solución de (1) tiene una curva crítica. Por comodidad del lector recordaremos el enunciado del Teorema P2.

Teorema P2. *Sea Ω el sólido de revolución obtenido al rotar una región plana Ω_0 con respecto a un eje de rotación. Supongamos que Ω_0 es un dominio estrictamente convexo, con frontera suave de curvatura nunca nula, que no contiene al origen y es simétrico respecto a uno de sus ejes, también asumiremos que f satisface la Suposición 1. Entonces la solución del problema de contorno (1) no tiene puntos críticos aislados y tiene exactamente una curva crítica la cual es degenerada.*

Demostración. La idea de la demostración es reducir el problema de $\mathbb{R}^3$ a un problema plano en $\mathbb{R}^2$. Para fijar ideas, vamos a suponer que Ω_0 está el plano $\overrightarrow{x_2x_3}$ y es simétrico respecto al eje $\overrightarrow{x_2}$. Usaremos coordenadas cilíndricas $x_1 = r \cos \phi$, $x_2 = r \sin \phi$, $x_3 = z$, al considerar el sólido de revolución en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , Ω es transformado en el cilindro cuyas secciones transversales perpendiculares al eje $\overrightarrow{z}$ son “copias” de Ω_0 , es decir

$$\partial\Omega_0, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad 0 < r(\partial\Omega_0) < \gamma$$

siendo γ una constante que depende de $\partial\Omega_0$. Hay que observar, que cuando $\phi = 0$ la sección plana de este cilindro coincide con Ω_0 , ahora visto en el plano $\overrightarrow{rz}$.

La geometría del dominio Ω nos lleva a pensar que u no varía cuando ϕ lo hace, y dado que el problema (1) tiene solución única, al garantizar que existe una solución que no depende de ϕ podemos concluir que dicha solución es efectivamente la solución del problema inicial. Por lo pronto supondremos que $u = u(r, z)$. Al transformar el operador de Laplace en coordenadas cilíndricas y bajo el supuesto anterior debemos estudiar el problema 2-dimensional

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r}u_r &= f(u) & \text{en } \Omega_0, \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Usaremos los resultados del Capítulo 2. Note que al poner $b = \lambda = 0$, $a = 1$ en el problema de contorno (3), obtenemos el problema (4.2), teniendo este último solución única y no trivial por el Teorema 2.3. Para cada ϕ la sección transversal en el cilindro es una región plana idéntica a Ω_0 , luego sobre cada una de estas secciones transversales se satisface la Suposición 2 y así el Teorema 2.11 garantiza que la solución al problema plano (4.2) tiene un único punto crítico p_ϕ en Ω_0 . En consecuencia la solución en el sólido de revolución Ω tiene una curva crítica determinada por cada punto crítico p_ϕ a medida que ϕ varía en el intervalo $(0, 2\pi)$. Finalmente, la curva de puntos críticos es degenerada, pues si $x(t)$ es la parametrización por longitud de arco de la curva crítica entonces para cada t

$$\nabla u(x(t)) = 0 \quad \text{y así} \quad H_u(x(t))x'(t) = 0,$$

luego $\det(H_u(x(t))) = 0$, es decir cada punto crítico es degenerado. $\square$

Es preciso mencionar que la parametrización puede cambiar un poco dependiendo de la geometría de Ω_0 . Por ejemplo si Ω_0 es una elipse la parametrización cambiará. Sin embargo, lo importante es que el Teorema 2.11 aplica y el resultado sigue siendo válido.

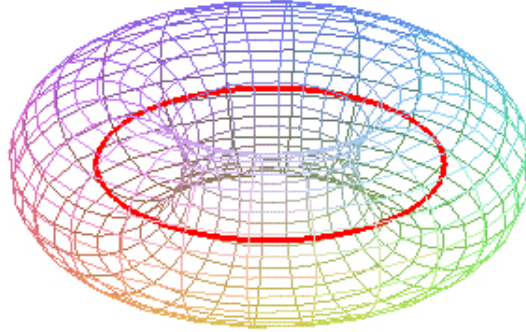


Figura 4.3: Dominio y curva crítica en el Ejemplo 4.7

Ejemplo 4.7. En el caso particular del Toroide $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2 = 1\}$ al usar coordenadas cilíndricas se obtiene el Cilindro

$$(2 - r)^2 + z^2 = 1, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \phi < 2\pi,$$

y el problema se reduce a estudiar la ecuación (4.2) con $\partial\Omega_0 = \{(r, z) \in \mathbb{R}^2 : (2 - r)^2 + z^2 = 1\}$. Así que en este caso podemos concluir que la solución de (1) en un Toroide tiene una única curva crítica. Es importante recalcar la importancia del caso del Toroide puesto que en $\mathbb{R}^2$ el autor sólo conoce un ejemplo donde exista una curva crítica, la cual al igual que en este caso, es una curva crítica degenerada.

Ejemplo 4.8. El análogo en el caso 2-dimensional al Ejemplo 4.7, es el caso en el que Ω es un anillo concéntrico. Si $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1/4 < |x| < 1\}$ y $f \equiv 1$. Podemos verificar que la solución de (1) es radialmente simétrica en este dominio

$$u(r, \theta) = u(r) = \frac{1}{4 \ln 4} \left((1 - r^2) \ln 4 + \frac{15}{16} \ln r \right).$$

En este caso obtenemos $\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 = \frac{15}{32 \ln 4}\}$, con un poco de cálculos se puede verificar que H_u es singular sobre la curva crítica y en consecuencia, obtenemos una curva crítica degenerada.

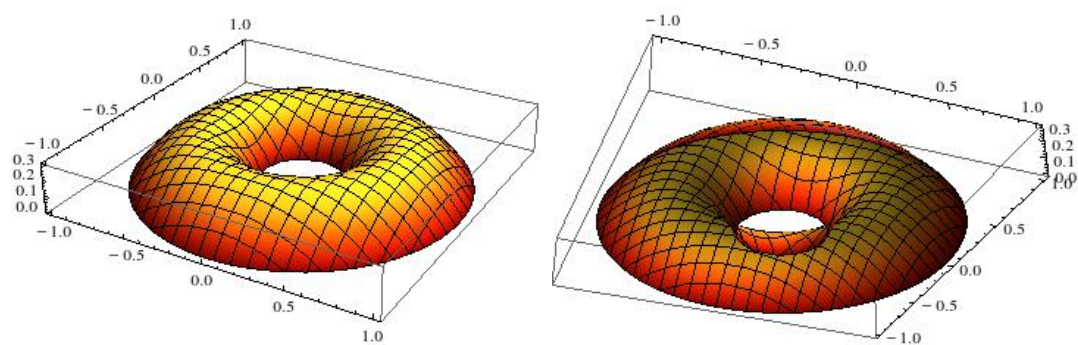


Figura 4.4: Diferentes perspectivas de la gráfica de la solución u en el Ejemplo 4.8.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En este documento se hizo un análisis cualitativo de la solución de algunos problemas planares y espaciales del problema de Poisson con condición tipo Dirichlet nula. Este análisis se hizo tomando diferentes hipótesis sobre la frontera $\partial\Omega$ del dominio en consideración, de este análisis se concluye que hay una relación sensible entre la frontera y el conjunto crítico de la solución, como por ejemplo la solución de (1) en un disco, en un anillo concéntrico o en un anillo no concéntrico, aquí las soluciones en cada caso tienen 1 punto crítico, una curva crítica y dos puntos críticos respectivamente. Podemos comparar también con la cardinalidad del conjunto crítico en el caso de un dominio anular como los dominios tipo tuerca y su inversión, en donde la cardinalidad es por lo menos $2n$. Compare los ejemplos 4.8, 2.2, 2.5 y 3.2. Se tiene información numérica sobre el conjunto crítico de la solución de (1) cuando el dominio es un “corredor”, es decir una región anular conformada por dos n -ágonos regulares concéntricos, esta información muestra que también se tiene por lo menos $2n$ puntos críticos, ver figuras 5.1 y 5.2. Al usar los planos móviles sabemos que en este tipo de dominios las esquinas exteriores no son punto de acumulación de puntos críticos, sin embargo descartar la existencia de una curva crítica es difícil, y no es posible con la técnica empleada en [1] ya que es necesario que al hacer la rotación del dominio una de las fronteras permanezca invariante, lo cual sucede cuando la frontera interior o exterior es una circunferencia como en el caso de los dominios tipo tuerca o su inversión. De otro lado usar las líneas nodales no es sencillo, pues desconocemos una prueba analítica de que las líneas nodales van desde una esquina en la frontera exterior a una esquina en la frontera interior. Se espera en futuras investigaciones mejorar las técnicas para incluir este tipo de dominios.

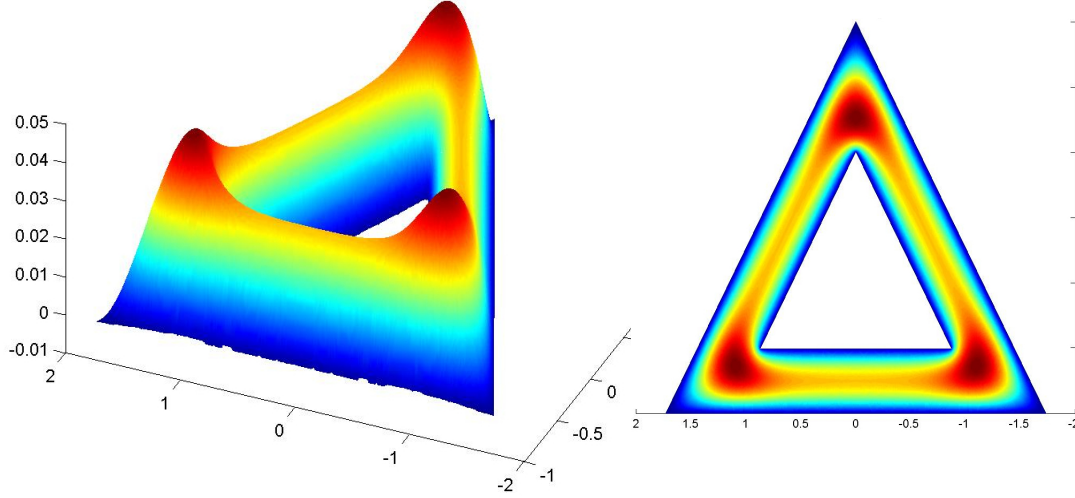


Figura 5.1: Gráfica y curvas de nivel de la solución de $-\Delta u = 1 - u^3$ con condición tipo Dirichlet nula en un dominio anular cuyas fronteras son dos triángulos rectángulos.

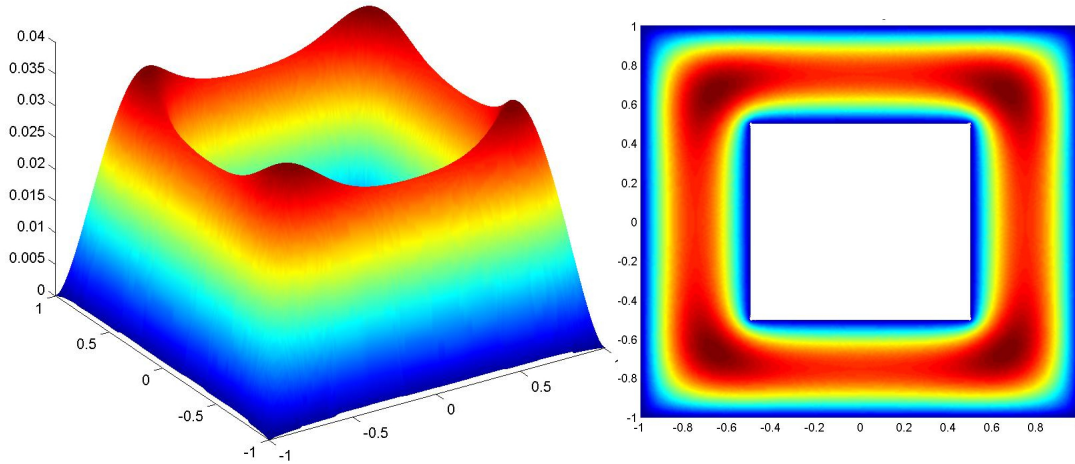


Figura 5.2: Gráfica y curvas de nivel de la solución de $-\Delta u = e^{-u}$ con condición tipo Dirichlet nula en un dominio anular cuyas fronteras son dos cuadrados.

En la Proposición 2.3 probamos que en el caso de un dominio plano, de existir una curva crítica de la solución de (3), el dominio debe ser doblemente conexo y la región en Ω interior a la curva crítica no es simplemente conexa, es decir la curva crítica debe “bordear” la frontera interior del dominio. En la Sección 2.1.2 se obtuvo resultados similares a los probados en la Tesis de Maestría [11] y a los publicados en [1] estudiando en esta ocasión el problema lineal (2). Usando la Técnica de los Planos

Móviles en la Proposición 2.7 se prueba que los vértices de los dominios tipo tuerca no son puntos de acumulación de puntos críticos de la solución. Ahora, usando las propiedades geométricas de la solución que fueron heredadas del dominio, se concluye que la solución de (2) en un dominio tipo tuerca tiene una cantidad finita de puntos críticos y a lo más una curva de Jordan, la cual en caso de existir es una curva de máximos locales que “bordea” la frontera interior del dominio, esto se encuentra condensado en el Teorema 2.9.

Para investigar el conjunto crítico $\mathbb{K}$ de la solución del problema de contorno (1) en un dominio con frontera suave y curvatura no nula, Arango y Gómez en [2, 3] usan la técnica de las líneas nodales. Aplicando esta técnica, al analizar $\mathbb{K}$ en el problema semilineal (1) en dominios anulares con vértices en la frontera interior y con suficientes simetrías se logra mostrar que la solución no presenta acumulación de puntos críticos en los vértices de la frontera interior. Para lograr esto se debieron obtener resultados previos que relacionaran las simetrías del dominio con los puntos críticos y con las líneas nodales, Proposiciones 2.11, 2.12, 2.14 y 2.15.

El conjunto nodal en el caso del problema (3) es más complicado, dificultad que se recibe de la ecuación parcial que satisface u_θ , compare las ecuaciones en los problemas (2.19) y (2.20). Aún así era preciso obtener resultados sobre el conjunto nodal del problema (3) pues estos son los resultados medios para analizar el conjunto crítico de la solución u de (1) en el espacio. Dado que nuestro interés al estudiar a $\mathbb{K}$ en el problema 3-dimensional era sobre sólidos de revolución, nos enfocamos en estudiar el conjunto nodal asociado a la solución de (3) en dominios estrictamente convexos con frontera suave y con características particulares resultantes de la región que engendra el sólido de revolución en donde íbamos inspeccionar $\mathbb{K}$ en el caso 3-dimensional. Esperamos en el futuro, mejorar el entendimiento de la ecuación nodal (2.20) del problema (3) puesto que al lograr esto podríamos saber como es el conjunto crítico en el caso de un anillo y a su vez obtener una conclusión sobre el conjunto crítico de (1) cuando Ω es un toroide anular doblemente conexo, es decir un toroide al cual se le ha extraído otro toroide de menor diámetro. Por ejemplo, si lográramos probar que la solución de (3) tiene una curva crítica en un anillo concéntrico, este hecho implicaría la existencia de una superficie crítica en la solución de (1) sobre el toroide anular. Ver Figura 5.3.

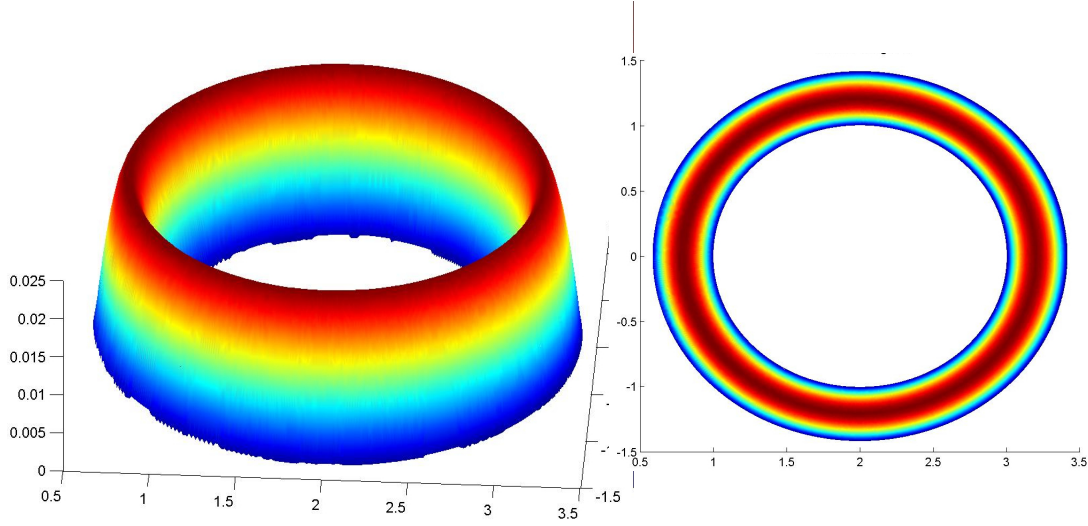


Figura 5.3: Gráfica y curvas de nivel de la solución de $-\Delta u - \frac{1}{x}u_x = e^{-u}$ con condición tipo Dirichlet nula en un anillo concéntrico.

Para obtener la conclusión del Teorema P1 mediante el camino trazado en esta investigación es indispensable las simetrías del dominio, y teniendo en cuenta que hay una dependencia sensible entre el dominio Ω y conjunto crítico $\mathbb{K}$ era relevante preguntarse si se podía descartar la acumulación de los puntos críticos en un dominio que no cumpliera con todas las propiedades geométricas de los dominios tipo tuerca y su inversión. Este objetivo fue logrado parcialmente en un caso particular de la ecuación (2), para ello combinamos las técnicas de los Planos Móviles y de la Transformada Kelvin.

Sería muy interesante obtener un resultado equivalente al Teorema P2 cuando el sólido de revolución es formado a partir de una región plana con vértices en la frontera como un polígono, o el caso en que la región plana sea un dominio tipo tuerca, dando lugar a un sólido Toroidal doblemente conexo con vértices sobre la frontera. Como se mencionó el Teorema P2 fue obtenido restringiendo el análisis al estudio del problema (3) en una región plana, sin embargo cuando esta región plana tiene vértices sobre la frontera, debemos descartar la posibilidad de que los puntos críticos se acumulen en la frontera, para lo cual es pertinente extender la Proposición 3.1 y su Corolario 3.1. Sin embargo el argumento de la demostración de la Proposición 3.1 en el cual la función w satisface el problema (3.2) es esquivo, ya que en el caso de la ecuación (3) el problema resultante es, mucho más difícil por la forma del operador L . Al avanzar en la investigación nos dimos cuenta que varias de las dificultades con las que nos encontramos incluida la antes mencionada, convergen en la necesidad de conocer el punto sobre la frontera al que llegará una línea nodal en un

dominio con vértices en la frontera. Sin embargo obtener una caracterización sobre que líneas nodales llegan a un vértice sobre la frontera tampoco es tarea sencilla y quedará para una futura investigación. Pues si bien, podemos decir algunas de las cuales llegan a un vértice dado, no fue posible obtener una caracterización que relacione el ángulo θ de la línea nodal con el ángulo del vértice sobre la frontera al cual llegará la línea nodal.

Uno de los inconvenientes que se tuvo durante la realización de la investigación, es que se cometió un error en la utilización de la Transformada Kelvin. Al usar esta transformada sobre la inversión de los dominios tipo tuerca no nos percatamos exactamente del dominio transformado mediante la aplicación recíproca $1/z$, y erróneamente se creyó que este era transformado en un dominio tipo tuerca. De hecho, el nombre de inversión de dominio tipo tuerca viene motivado por este error, sin embargo en la introducción del documento se dejó en claro, que la inversión no es más que intercambiar la posición de las fronteras en un dominio tipo tuerca. El error llevo a creer que las esquinas interiores se comportaban igual que las esquinas exteriores en los dominios tipo tuerca. Este descuido atrasó considerablemente la investigación, puesto que nos vimos en la necesidad de crear resultados medios para poder acoger el nuevo y difícil término semilineal resultante después de tomar la Transformada Kelvin, ver la ecuación (3.7). La idea era que sobre los dominios tipo tuerca se tenía bastante información probada durante la investigación de la Maestría, entonces si mediante la aplicación recíproca lográbamos relacionar los dominios tipo tuerca con su inversión, entonces podríamos rescatar los resultados de la Maestría. No sólo fue la dificultad en el nuevo término semilineal lo que nos hizo caer en cuenta del fatal descuido, sino que comenzamos a encontrar una contradicción en lo que habíamos probado y el Teorema principal en [21]. Según J. Oddson si u es tal que $-\Delta u \geq 0$, y u alcanza un mínimo en un punto frontera donde el ángulo interior es mayor a π , entonces no hay derivada direccional interior puesto que esta es no acotada. Ver observación 2 pág 669 [21].

Aún con todos los inconvenientes presentados consideramos que se logró el objetivo general planteado en el Proyecto y con buena parte de los objetivos específicos. El objetivo principal era estudiar el conjunto crítico $\mathbb{K}$ exigiendo diferentes hipótesis sobre Ω y su frontera $\partial\Omega$ además mostrar alteraciones que sufre $\mathbb{K}$ cuando se hacen perturbaciones al dominio Ω , en este último sentido los ejemplos mostrados en el capítulo 4 son pertinentes. Otro de los modestos aportes de este documento a la relación entre $\mathbb{K}$ y Ω es la Proposición 2.3 que esta escrita para el problema cuasilineal (3), y según la cual si Ω es simplemente conexo la solución u no tiene curvas críticas.

Uno de los objetivos específicos era probar que sobre los dominios tipo tuerca existían exactamente $2n$ puntos críticos. Durante la investigación de la Maestría [11](2012) al estudiar el conjunto crítico de la solución de (1) en dominios tipo tuer-

ca, sólo se logró probar la existencia de por lo menos $2n$ puntos críticos aislados y descartar la existencia de la curva crítica. Sin embargo, y pese a la información numérica recolectada, no fue posible demostrar que existían exactamente $2n$ puntos críticos. Frente a esto, una vez más no fue posible probar analíticamente lo que la evidencia numérica muestra, sin embargo podemos saber algo más. A saber, supongamos la existencia de un punto crítico adicional sobre un eje de simetría o por fuera de este, pero por fuera de la curva de Jordan en alguno de los conjuntos nodales a los que se refiere la Proposición 2.16. Por las simetrías del dominio la existencia de este punto crítico implica la existencia de otros $2n - 1$ ó $4n - 1$ puntos críticos adicionales respectivamente, por los cuales deben pasar todas las líneas nodales, por ejemplo $N_{\pi/2}$ en el caso del dominio formado por una circunferencia y un cuadrado. Dado que se ha supuesto que el punto crítico adicional no esté sobre la curva de Jordan, solo resta la posibilidad de existir otra curva de Jordan en $N_{\pi/2}$ que pase por todos los nuevos puntos críticos resultantes. Entre estas dos curvas se formará una región conexa cuya frontera esta completamente determinada por $N_{\pi/2}$, contradiciendo la Proposición 2.15. Por lo cual podemos concluir, que de existir algún punto crítico adicional, este debe estar sobre cada una de las curvas de Jordan de los conjuntos nodales de la Proposición 2.16 .

Cumplimos el objetivo de estudiar el conjunto crítico de la solución en el caso de un problema cuasilineal. Si bien no con la generalidad planteada inicialmente en el proyecto, se hizo con la generalidad suficiente para permitir cumplir otro de los objetivos específicos el cual era estudiar el problema (1) en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. Es en esta dirección que van los resultados de la sección dedicada al conjunto nodal del problema (3) y posteriormente al Teorema P2. Sin embargo, no se pudo obtener ningún avance en el estudio crítico de la solución de un problema completamente no lineal. Esperamos que la experiencia ganada durante esta investigación me permita en un futuro abordar con éxito este y otros objetivos de los planteados en el proyecto que no se pudieron cumplir, como determinar alguna relación relevante entre la curvatura de $\partial\Omega$ y el conjunto crítico $\mathbb{K}$.

Bibliografía

- [1] J. Arango and J. Delgado. Critical points of solutions to elliptic equations in planar domains with corners. In *Analysis, modelling, optimization, and numerical techniques*, volume 121 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 105–112. Springer, Cham, 2015.
- [2] J. Arango and A. Gómez. Critical points of solutions to elliptic problems in planar domains. *Comm. Pure Appl. Anal.*, 10:327–338, 2011.
- [3] J. Arango and A. Gómez. Critical points of solutions to quasilinear elliptic problems. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, 75(11):4375–4381, 2012.
- [4] J. Arango and O. Perdomo. Morse theory for analytic functions on surfaces. *J. Geom.*, 84(1-2):13–22, 2005.
- [5] A. Azzam. Behaviour of solutions of Dirichlet problem for elliptic equations at a corner. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 10:1453–1459, 1979.
- [6] Lipman Bers. Local behavior of solutions of general linear elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 8:473–496, 1955.
- [7] X. Cabré and S. Chanillo. Stable solutions of semilinear elliptic problems in convex domains. *Sel. Math., New ser.*, 4(1):1–10, 1998.
- [8] Alfonso Castro and Rosa Pardo. A priori bounds for positive solutions of sub-critical elliptic equations. *Rev. Mat. Complut.*, 28(3):715–731, 2015.
- [9] Shiu-Yuen Cheng. Eigenfunctions and nodal sets. *Comment. Math. Helv.*, 51:43–55, 1976.
- [10] A. Delgado. Puntos críticos de soluciones de ecuaciones elípticas en el plano. Trabajo de Grado. Universidad del Valle, Cali, Colombia, Mayo 2009.

- [11] A. Delgado. Puntos críticos y simetrías de soluciones de problemas elípticos. Master's thesis, Universidad del Valle, Cali, Colombia, Marzo 2012.
- [12] David L. Finn. Convexity of level curves for solutions to semilinear elliptic equations. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 7(6):1335–1343, 2008.
- [13] G. Gilbarg y N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, 1983.
- [14] Filippo Gazzola, Hans-Christoph Grunau, and Guido Sweers. *Polyharmonic boundary value problems*, volume 1991 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains.
- [15] Francesca Gladiali and Massimo Grossi. Strict convexity of level sets of solutions of some nonlinear elliptic equations. *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.*, 134(2):363–373, 2004.
- [16] Antonio Greco. Quasi-concavity for semilinear elliptic equations with non-monotone and anisotropic nonlinearities. *Bound. Value Probl.*, 2006:15, 2006.
- [17] Massimo Grossi and Riccardo Molle. On the shape of the solutions of some semilinear elliptic problems. *Commun. Contemp. Math.*, 5(1):85–99, 2003.
- [18] L. Makar-Limanov. *Solutions for the Dirichlet's problem for the equation $\Delta u = -1$ in a convex region*, volume 9:52–53 *Math. Notes Acad. Sci. USSR*. 1971.
- [19] J. Meiss. *Differential dynamical systems*. Siam, 1rd edition, 2007.
- [20] F. Müller. On the continuation of solutions for elliptic equations in two variables. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 19(6):745–776, 2002.
- [21] J. K. Oddson. On the boundary point principle for elliptic equations in the plane. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:666–670, 1968.
- [22] Peter J. Olver. *Introduction to partial differential equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, 2014.
- [23] P. Pucci and J. Serrin. *The maximum principle*. Birkhauser, Bassel-Boston-Berlin, 1rd edition, 2007.
- [24] J. Serrin. A symetry problem in potential theory. *Arch. Rational Mech*, 36, pages 304–318, 1971.

- [25] Inc. Wolfram Research. *Mathematica 9.0*. Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2012.