

Análisis epistémico en la equiparación del principio de continuidad y el de completitud en la formalización de los números reales: El caso de Dedekind y Cantor

Brayan Andrés Castillo Arboleda

202056974-3469

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática

Sede Norte del Cauca

2025

Análisis epistémico en la equiparación del principio de continuidad y el de completitud en la formalización de los números reales: El caso de Dedekind y Cantor

Brayan Andrés Castillo Arboleda

202056974-3469

Trabajo de grado para optar por el título de:

Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemática

Dirigido por:

Lina Marcela Paramo

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática

Sede Norte del Cauca

2025

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo analizar la relación entre el principio de completitud y el de continuidad en la formalización de los números reales, a partir de las construcciones propuestas por Dedekind y Cantor. Para tal efecto, se realiza un análisis comparativo desde un enfoque histórico-epistemológico de manera que se reconstruye los marcos teóricos en los que estos conceptos emergen y se consolidan. Para después hacer una reflexión que gira en torno a las implicaciones didácticas de estos hallazgos. La investigación concluye indicando que la continuidad y completitud no son conceptos equivalentes ni intercambiables, y que su relación depende del marco teórico desde el cual se aborden. Este hallazgo no solo permite reflexionar sobre su tratamiento escolar, sino que también abre preguntas para futuras investigaciones sobre su papel en la formación matemática.

Palabras clave

Números reales, continuidad, completitud, Dedekind, Cantor, epistemología matemática, enseñanza de las matemáticas.

Abstract

This thesis analyzes the relationship between the principles of completeness and continuity in the formalization of real numbers, based on the constructions proposed by Dedekind and Cantor. To this end, a comparative study is carried out from a historical-epistemological perspective, reconstructing the theoretical frameworks in which these concepts emerged and became consolidated. The work then reflects on the didactic implications of these findings. The research concludes that continuity and completeness are neither equivalent nor interchangeable concepts, and that their relationship depends on the theoretical framework from which they are addressed. This result not only invites a reconsideration of their treatment in school mathematics but also raises questions for future research on their role in mathematical education.

Keywords

Real numbers, continuity, completeness, Dedekind, Cantor, mathematical epistemology, mathematics teaching.

Índice

ANÁLISIS EPISTÉMICO EN LA EQUIPARACIÓN DEL PRINCIPIO DE CONTINUIDAD Y EL DE COMPLETITUD EN LA FORMALIZACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES: EL CASO DE DEDEKIND Y CANTOR 1

INTRODUCCIÓN 9

CAPÍTULO 1: CONSTRUCCIÓN FORMAL DE LOS NÚMEROS REALES 13

1.1. Los números reales de Dedekind 15
1.1.1. Propiedades de los racionales y su correspondencia geométrica 16
1.1.2. Las cortaduras, el primer indicio del paso de lo discreto a lo continuo 18
1.1.3. Construcción de los irracionales 21
1.1.4. El orden de $\mathbb{R}$ y propiedades subyacentes 27
1.1.5. Propiedades estructurales de los reales 29
1.2. Consideraciones históricas: de Dedekind a Cantor 35
1.3. Los números reales de Cantor 36
1.3.1. Sucesiones fundamentales 37
1.3.2. Relación de equivalencia entre sucesiones fundamentales 39
1.3.3. Relación de orden entre sucesiones fundamentales 41
1.3.4. Operaciones entre sucesiones fundamentales 43
1.3.5. El dominio ampliado y la clausura del sistema real en Cantor 44
1.3.6. Propiedades estructurales de los números reales 46

CAPÍTULO 2: ENTRE CORTADURAS Y SUCESIONES: UN ANÁLISIS HISTÓRICO, EPISTÉMICO Y COMPARATIVO DE LA CONTINUIDAD Y LA COMPLETITUD 49

2.1) Análisis histórico y epistémico 50
2.1.1. Una mirada histórica hacia la Continuidad 50

2.1.2. Un viaje histórico hacia el concepto de Completez 53
2.1.3. Algunas consideraciones filosóficas alrededor de la formalización del número real dada por Dedekind y Cantor 57
2.2) Análisis comparativo entre los conceptos continuidad y completez 59
2.2.1) Primera y segunda fase: caracterización y similitudes 61
2.2.2) Fase 3: correlación 68
2.2.3) Fase 4: culminación del análisis 71

CAPÍTULO 3: REFLEXIONES DE ORDEN DIDÁCTICO EN LA CARACTERIZACIÓN DE LA CONTINUIDAD Y LA COMPLETITUD 79

3.1) naturalización de los conceptos y dificultades en su presentación 81
3.2) Una mirada desde lo curricular 84
3.3) Tensiones conceptuales reveladas por el análisis histórico 86

CONCLUSIONES 89

Referencias 93

Índice de ilustraciones

FIG 1. PARTICIÓN DE LA RECTA EN a EN CLASES DE NÚMEROS RACIONALES $A1$ Y $A2$ 19

FIG 2. REPRESENTACIÓN DE LA RECTA RACIONAL m, DEFINIDA SÓLO CON LOS NÚMEROS RACIONALES. 19

FIG 3. MAGNITUD QUE DESCRIBE LA LONGITUD DE LA HIPOTENUSA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE LADO 1, DENOMINADA COMO Γ 20

FIG 4. ACERCAMIENTO A LA RECTA RACIONAL 21

FIG 5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SUMA DE CORTADURAS 30

FIG 6. ILUSTRACIÓN DE UNA SUCESIÓN FUNDAMENTAL 37

FIG 7. RELACIÓN ENTRE RACIONALES Y REALES A PARTIR DE CLASES DE EQUIVALENCIA DE SUCESIONES FUNDAMENTALES 45

FIG 8. AUTORES PREVIOS 57

FIG 9. FASES DEL ANÁLISIS COMPARATIVO 60

Índice de tablas

Tabla 1. Comparativa entre las propiedades del conjunto de los racionales y la recta geométrica 17
Tabla 2. Propiedades que convierten a los reales de Dedekind en un cuerpo conmutativo 31
Tabla 3. Propiedades estructurales de los números reales de Dedekind 33
Tabla 4. Operaciones entre sucesiones de Cauchy 43
Tabla 5. Propiedades que hacen que $\mathbb{R}$ sea un cuerpo 46
Tabla 6. Otras propiedades fundamentales de los números reales de Cantor 47
Tabla 7. Síntesis comparativa final: continuidad y completitud en Dedekind y Cantor 77

Introducción

Los números reales forman parte del andamiaje más profundo sobre el cual se ha erigido la matemática moderna. Son, al mismo tiempo, herramienta y fundamento: permiten formalizar conceptos clave del análisis como límites, continuidad, derivadas e integrales, y a la vez constituyen el modelo aceptado para representar la recta numérica y las magnitudes continuas del mundo físico. Sin embargo, esta aparente familiaridad esconde una historia densa, cargada de dificultades conceptuales, debates filosóficos y elaboraciones rigurosas que no siempre han sido evidentes ni unívocas.

En efecto, la construcción de los reales no fue un hallazgo inmediato. Se trata más bien del resultado de un largo proceso de consolidación teórica que se remonta a la antigüedad y atraviesa momentos cruciales como el descubrimiento de los irracionales, el desarrollo del cálculo infinitesimal, y la posterior axiomatización del análisis (Recalde, 2011). El punto de inflexión en esta historia se sitúa en el siglo XIX, cuando matemáticos como Richard Dedekind y Georg Cantor, con enfoques distintos pero complementarios, proponen construcciones rigurosas del conjunto de los números reales y con ello se identifica las características intrínsecas de este nuevo conjunto numérico que dan paso a las propiedades que los define: densidad, continuidad y completitud; es importante resaltar que la primera propiedad se hereda de los racionales, mientras que las dos últimas son propias de los reales. En particular, con Dedekind y Cantor el continuo deja de ser una intuición geométrica y pasa a definirse formalmente dentro de un sistema lógico-aritmético.

No obstante, y a pesar del impacto de estas propuestas, persisten preguntas fundamentales que todavía hoy invitan a la reflexión. Una de ellas —que articula el núcleo de este trabajo de grado— es la relación entre dos de las propiedades esenciales de los reales: la completitud y la continuidad. Estos conceptos, aunque estrechamente vinculados en muchos desarrollos posteriores, no se presentan con el mismo estatuto ni con las mismas implicaciones en las construcciones de Dedekind y Cantor, pero tampoco se da cuenta claramente de sus diferencias. De modo que, cabe preguntarse si: ¿Son propiedades

equivalentes? ¿Una implica necesariamente a la otra? ¿O se trata de nociones independientes que han sido posteriormente unificadas bajo una misma estructura formal?

Estas preguntas no son menores. De hecho, apuntan al corazón mismo de lo que significa "ser real" en matemáticas. Como muestra los antecedentes de esta investigación, la relación entre continuidad y completitud no ha sido *siempre* clara, ni mucho menos pacífica. En Dedekind, por ejemplo, la continuidad se presenta como una propiedad estructural de la recta aritmética—la llamada "propiedad IV"— mientras que en Cantor la continuidad se redefine desde una perspectiva topológica donde la completitud[1] parece surgir como resultado, pero no como principio explícito; ideas que se intentan clarificar con este estudio.

Lo anterior, permite evidenciar que en la definición de número real las propiedades de continuidad y completitud no pueden considerarse estrictamente iguales, ni tampoco completamente diferentes; sino que responden a dos modalidades diferentes en su caracterización, pero que se pueden correlacionar y deben coexistir para tener lo que hoy se conoce como el sistema de los números reales.

Ante este panorama, se hace necesario un análisis riguroso y comparativo, que permita dilucidar no solo cómo entendieron estos autores los conceptos de continuidad y completitud, sino también cómo se relacionan estos conceptos dentro de sus respectivas construcciones formales. El presente trabajo de grado busca precisamente eso: desentrañar algunos de los vínculos, las tensiones y las posibles equivalencias entre ambos principios, con el fin de aportar claridad conceptual y fundamento histórico a una discusión que sigue siendo relevante tanto en el plano matemático como en el didáctico.

En consonancia con estas inquietudes, el objetivo general de esta investigación es *analizar la relación entre el principio de completitud y el concepto de continuo en la estructura formal de los números reales, desde las construcciones de Dedekind y Cantor*, con el fin de determinar si uno constituye una condición necesaria o suficiente para el otro, o si ambos pueden considerarse equivalentes bajo ciertos marcos teóricos.

[1] La completitud determina la existencia del supremo para todo subconjunto no vacío acotado superiormente.

Para lograr este propósito, se ha optado por un enfoque metodológico histórico-epistemológico, que permite no solo estudiar las construcciones matemáticas desde su contenido lógico-formal, sino también comprenderlas en el contexto de su emergencia histórica y conceptual. Esta doble mirada —matemática e histórica— permite valorar las decisiones teóricas que dieron lugar a las distintas definiciones del continuo y la completitud, así como identificar las consecuencias que estas definiciones han tenido en el desarrollo posterior al análisis.

En coherencia con el propósito general de este trabajo de grado, se definieron tres objetivos específicos que orientan su desarrollo. En primer lugar, se busca estudiar las construcciones de los números reales propuestas por Dedekind y Cantor en el siglo XIX, prestando especial atención a los fundamentos teóricos y estructurales que dieron origen a sus respectivos enfoques. En segundo lugar, se propone reconocer brevemente la evolución histórica de los conceptos de continuidad y completitud en autores anteriores, así como identificar y correlacionar las definiciones y nociones que Dedekind y Cantor otorgan a estos conceptos, con el fin de establecer sus diferencias, afinidades y puntos de convergencia. Finalmente, se plantea formular una serie de reflexiones sobre las implicaciones didácticas que surgen del análisis histórico-conceptual desarrollado, reconociendo el valor de estas propiedades no solo desde el rigor matemático, sino también desde su relevancia para la enseñanza y comprensión profunda del sistema de los números reales. Por esta razón, el trabajo se estructura en tres capítulos principales.

El capítulo 1 está dedicado a exponer de manera rigurosa y detallada las construcciones de los números reales según Dedekind y Cantor, así como las propiedades que se derivan de cada una de ellas (cuerpo, orden, arquimedianidad, continuidad y completitud). En este capítulo se busca mostrar cómo cada autor define su sistema y cuáles son las implicaciones internas de su construcción.

El capítulo 2 constituye el núcleo analítico del trabajo. En él se lleva a cabo un estudio comparativo de las nociones de continuidad y completitud en ambos autores, dividido en cuatro fases: caracterización, identificación de similitudes, análisis de correlación interna y una fase final de confrontación y reflexión. El capítulo culmina con

una serie de tensiones conceptuales que no resuelven necesariamente la discusión, pero que abren la puerta a nuevas investigaciones.

Finalmente, el **capítulo 3** está dedicado a las reflexiones e implicaciones didácticas del análisis realizado. Este capítulo reflexiona sobre la forma en que la enseñanza de los números reales, especialmente en el contexto escolar, tiende a naturalizar propiedades como la continuidad y la completitud, lo que genera dificultades que se hacen presentes hasta en la educación superior. Se plantea que una comprensión histórica y epistemológica de estas nociones puede ayudar a superar ciertos obstáculos conceptuales, y se sugieren elementos para enriquecer la práctica docente.

A partir de estas reflexiones se abren también posibles líneas de investigación futura: indagar en las ideas espontáneas de los estudiantes sobre continuidad y completitud, estudiar con mayor detalle los obstáculos que emergen en la enseñanza, y analizar críticamente el tratamiento de los números reales en los programas de formación universitaria. Si bien estos aspectos no son abordados en profundidad en este trabajo, constituyen proyecciones que se desprenden de los resultados obtenidos y que pueden guiar investigaciones posteriores.

En este orden de ideas, este trabajo de grado busca no solo responder una pregunta matemática y epistemológica precisa, sino también contribuir a una comprensión más rica, crítica y situada del concepto de número real —un concepto tan omnipresente como difícil de aprehender en su totalidad.

Capítulo 1: Construcción histórica de los números reales

Una de las observaciones más vehementes de las investigaciones en historia y epistemología de las matemáticas, corresponde a la perspectiva según la cual los números reales son la base de la mayoría de las teorías matemáticas[2]. Esta afirmación se justifica no solo por su centralidad teórica, sino porque responden a problemáticas profundamente humanas como *medir, contar y ordenar* (Recalde, 2011) (Rojas, 1999). Por esto se puede afirmar que, el conjunto de los números reales abarca desde los elementos más básicos de la matemática —como los números naturales— hasta nociones altamente sofisticadas y discutidas como el infinito actual[3], cuya aceptación no fue inmediata en la historia del desarrollo del pensamiento matemático.

Durante siglos, el desarrollo de la matemática avanzó sobre una base que, aunque útil y poderosa, carecía de una fundamentación rigurosa para ciertos objetos centrales como los números irracionales. Desde los pitagóricos hasta el cálculo infinitesimal del siglo XVII, los irracionales se aceptaban con una base empírica o intuitiva, principalmente desde una perspectiva geométrica[4]. No fue sino hasta el siglo XIX, en un contexto de creciente necesidad de rigor lógico y formal[5], que surgieron propuestas sistemáticas para construir formalmente el conjunto de los reales a partir de los racionales.

Este proceso de fundamentación —que hoy identificamos como la construcción de los números reales— surge como una respuesta a varios desafíos conceptuales: la definición precisa del continuo, la existencia de irracionales, la comprensión del infinito actual y la estructura lógica del análisis matemático. En este contexto emergen las

---

[2] Tal es el caso del análisis infinitesimal, la topología y el cálculo, entre otras.

[3] En el ejemplo puntual que mencione tenemos que; desde la época de Aristóteles el infinito actual fue relegado, no es hasta la segunda mitad del siglo XIX con los trabajos de Cantor que el infinito actual adquiere un papel protagónico y empieza a ser objeto de estudio.

[4] Desde los pitagóricos se sabía de la existencia de unas magnitudes que no podían medirse, lo cual se debía a la carencia de poder expresarlas como la razón de dos enteros. De allí nace la clasificación de las magnitudes en conmensurables e inconmensurables, es en esta clasificación que esta la génesis de lo que hoy conocemos como números racionales e irracionales respectivamente.

[5] Se empieza a considerar la matemática como una teoría formal independiente, y no como un instrumento para resolver necesidades humanas o como un conjunto de verdades evidentes, esto se da en el contexto de la llamada crisis de los fundamentos. De allí que los objetos, números, que se trabajan en matemática deben quedar completamente definidos.

propuestas de Richard Dedekind y Georg Cantor, cuyas teorías cambiaron profundamente el paisaje matemático. Se reconoce el trabajo de grandes estandartes matemáticos como Karl Weierstrass (1815-1897), David Hilbert (1862-1943) entre otros[6], sin embargo, el foco principal de este trabajo recae sobre las construcciones de Dedekind y Cantor. Esto se debe a que, estos dos autores son considerados los padres de la teoría de conjuntos como rama matemática (Recalde C. , 2024). Además, dentro de sus construcciones y bajo un carácter estrictamente formal, dejan ver el alcance que tiene dos de las propiedades fundamentales de los números reales y que son objeto de estudio de esta investigación: continuidad y completitud

Ambos autores construyeron el sistema de los reales con métodos distintos: Dedekind, por medio de las *cortaduras*, buscó una definición puramente aritmética de los irracionales, alejándose de las demostraciones geométricas; mientras que Cantor, con su enfoque conjuntista y basado en *sucesiones de Cauchy*, introdujo una visión abstracta y estructural en la cual el infinito actual tuvo un papel protagónico.

Estas construcciones no solo resolvieron antiguos problemas, sino que también redefinieron lo que entendemos por número, dotando a la matemática de un nuevo fundamento epistemológico. Hoy, el conjunto de los reales no es simplemente un sistema entre otros, sino que es la base sobre la cual se edifica el análisis matemático, el cálculo y múltiples disciplinas matemáticas.

En esta investigación, se analiza detalladamente estas dos construcciones —la de Dedekind y la de Cantor— con el objetivo de comprender la forma en que estos autores conceptualizaron y definieron dos de las propiedades fundamentales e intrínsecas de los números reales, la *completitud* y la *continuidad*. El análisis se centrará en las nociones propuestas por ambos autores, así como en la relación entre dichos conceptos. Antes de abordar sus teorías, se presentarán algunos fundamentos preliminares, especialmente aquellos asociados al sistema de los racionales y a los problemas que motivaron la necesidad de estas construcciones.

[6] Como Charles Méray, Camille Jordan, Georg Friedrich Riemann y muchos más.

1.1. Los números reales de Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) fue un matemático alemán cuya obra marcó un hito en la fundamentación de los números reales. A diferencia de enfoques previos basados en la intuición geométrica, Dedekind buscó desarrollar una construcción puramente aritmética y lógica de los números reales, alejándose de las demostraciones geométricas predominantes en su época (Dedekind R. , 1927)[7], objetivo que otros matemáticos cómo Cauchy y Bolzano también tenían, sin embargo, las demostraciones anteriores a Dedekind no alcanzaban el nivel de rigor introducido en la construcción de los números reales de Dedekind. Su método, basado en las llamadas cortaduras de Dedekind, permitió establecer una definición rigurosa de los números irracionales sin depender de la noción de magnitud continua[8] propia de la geometría clásica.

El problema central que Dedekind abordó se remonta a la dificultad histórica de entender los números irracionales dentro del sistema de los números racionales. Desde la época de los pitagóricos, se conocía la existencia de magnitudes inmedibles, por ejemplo, lo que hoy conocemos como $\sqrt{2}$, que no podían expresarse como fracción de dos enteros. Sin embargo, no se tenía una formulación matemática precisa que integrara los irracionales dentro de un sistema numérico completamente definido. Durante siglos, la interpretación geométrica de los números irracionales prevaleció, hasta que en el siglo XIX se hizo evidente la necesidad de una definición más rigurosa.

Dedekind propuso una solución innovadora: en lugar de tratar los números irracionales como entidades misteriosas, los definió a partir de cortes en el conjunto de los números racionales. Esta idea no solo permitió una definición precisa de los números reales, sino que también introdujo un enfoque estructural que influenció el desarrollo posterior de la teoría de conjuntos y el análisis matemático.

---

[7] Se aclara que la fecha de la cita corresponde a la traducción en español, no al libro original.

[8] Dedekind siendo profesor de cálculo de Zúrich, notó que la idea de magnitud continua se basaba solo en intuiciones geométricas, siendo una magnitud variable que converge a un valor determinado. Existiendo un teorema que decía que toda magnitud crece constantemente, pero no más allá de todo limite. (Dedekind R. , 1927)

Por lo anterior, se puede decir que, para entender a cabalidad la construcción de Dedekind se debe abordar los fundamentos teóricos asociados a los números racionales y sus propiedades, para luego, construir el conjunto de los números irracionales. Por esta razón, algunas páginas de este documento se dedican a hacer una contextualización de los conocimientos previos asociados a los números racionales, y que son necesarios para entender la construcción de Dedekind.

La razón por la que Dedekind empieza caracterizando y mencionando las propiedades de los números racionales, es porque la forma en cómo se construyeron los números racionales fue a partir de los números enteros, y los enteros a su vez fueron construidos de los naturales, debido a que él considera a la aritmética como un conjunto de consecuencias necesarias, (Dedekind R. , 1927).

1.1.1. Propiedades de los racionales y su correspondencia geométrica

Desde la perspectiva de Dedekind, la construcción rigurosa del número real debe fundamentarse sobre una base sólida que sea ampliamente conocida. Así pues, Dedekind toma a los números racionales como el punto de partida hacia la formalización de los números reales, esto se debe a que los racionales cuentan con una estructura aritmética para las operaciones básicas[9] y son obtenidos de forma rigurosa a partir de los números enteros.

En efecto, la razón por la que Dedekind empieza caracterizando y mencionando las propiedades de los números racionales, es porque la forma en cómo se construyeron los números racionales fue a partir de los números enteros, y estos a su vez construidos de los naturales; todos bajo una aritmética claramente definida que fue heredada de un conjunto numérico a otro, considerando a la aritmética como un conjunto de consecuencias necesarias, (Dedekind R. , 1927) basadas en principios lógicos de rigor. En este orden de ideas, es necesario entender cómo se concibe y dar cuenta de las características principales asociadas al número racional.

[9] Suma y multiplicación.

Dedekind entonces empieza caracterizando las 3 propiedades de los números racionales $\mathbb{Q}$: la transitividad, la densidad y la propiedad de la cortadura. Propiedades que hacen a $\mathbb{Q}$ "un dominio unidimensional, con un orden total[10], y además comparable con la recta geométrica si se piensa ésta como un conglomerado de puntos." (Arbeláez, 2011, pág. 147). Centrándose en la propiedad de la cortadura.

Antes de introducir rigurosamente la noción de cortadura, es importante reconocer las propiedades fundamentales que, según Dedekind, caracterizan al conjunto de los números racionales. Estas propiedades permiten establecer un paralelo con la recta geométrica $\boldsymbol{L}$.

Esta relación permite que los racionales, aunque definidos analíticamente, guarden una estrecha relación con lo geométrico, y puedan pensarse desde la geometría. Dedekind utiliza esta equivalencia estructural para subrayar la intuición de que el sistema racional "se comporta" como una línea, aunque con ciertos vacíos.

A continuación, se presenta una tabla comparativa que resume las tres propiedades esenciales tanto en su formulación racional como en su expresión geométrica, revelando así su similitud desde dos registros distintos.

Tabla 1. COMPARATIVA ENTRE LAS PROPIEDADES DEL CONJUNTO DE LOS RACIONALES Y LA RECTA GEOMÉTRICA

Propiedad	En el conjunto de los racionales ($\mathbb{Q}$)	En la línea recta geométrica (L)
Transitividad	Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Se dice que b está situado entre a y c.	Si un punto a está a la derecha de b, y b a la derecha de c, entonces a está a la derecha de c.
Densidad	Si a y c son distintos, existen infinitos $b \in \mathbb{Q}$ tales que $a < b < c$.	Si a y b son dos puntos distintos, existen infinitos puntos entre ellos.
Cortadura	Para un número a, los racionales se dividen en dos clases: $A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < a\}$ y $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > a\}$ El punto a pertenece a A_1 o A_2, pero no a ambas a la vez	Dado un punto β. La recta se puede dividir en dos clases de puntos: aquellos a la izquierda de un punto β y aquellos a la derecha. Este punto debe pertenecer

[10] Es necesario aclarar que Dedekind además de tomar como punto de partida a los números racionales, toma como base la definición de orden usual, que establece que $a < b$ sí y sólo si $b - a > 0$ para todo $a, b \in \mathbb{Q}$; orden heredado del conjunto de los números enteros, que los dota de un orden lineal según el cual todos los elementos del conjunto $\mathbb{Q}$ son comparables entre sí, y por tanto bajo este orden siempre será posible decidir, dados 2 números, cuál de ellos es mayor o menor.

		a cualquiera de las dos clases, pero no a ambas a la vez

Como se puede observar, las propiedades estructurales que Dedekind atribuye a los números racionales también se manifiestan en la recta geométrica, aunque expresadas en otro registro. Esta correspondencia revela que lo que está en juego no es una diferencia esencial en las propiedades mismas, sino en la forma en que estas se presentan: una desde la aritmética formal, la otra desde la intuición geométrica.

Esta última propiedad es una propiedad interesante, debido a que parecía tan trivial que ningún matemático consideró tan siquiera la necesidad de enunciarla, curiosamente esta fue la propiedad que usó Dedekind para fundamentar toda su teoría, por lo tanto, es importante dar la definición y las condiciones inherentes a esta propiedad.

1.1.2. Las cortaduras, el primer indicio del paso de lo discreto a lo continuo

Dedekind inicia presentando la definición de cortadura. Una cortadura de Dedekind es una partición del conjunto de los números racionales en dos clases A_1 y A_2 tales que:

1. A_1 y A_2son subconjuntos disjuntos de $\mathbb{Q}$ cuya unión es $\mathbb{Q}$, es decir, $A_1 \cup A_2 = \mathbb{Q}$
2. Cada número $\boldsymbol{a_1} \in A_1$ es menor que cada número $\boldsymbol{a_2} \in A_2$
3. A_1 no contiene un mayor elemento (máximo), o A_2 no contiene un menor elemento (mínimo).[11]

Como se puede ver ejemplificado en la figura 1, donde cualquier número que pertenezca a A_1 será menor a cualquier elemento de A_2, excluyendo por supuesto el racional a.

[11] En la formulación de esta propiedad, la conjunción disyuntiva "o" podría interpretarse lógicamente como una mera disyunción, lo que permitiría la posibilidad de que ninguna de las condiciones se cumpla simultáneamente. Sin embargo, en la construcción de Dedekind, al menos una de estas propiedades debe cumplirse para garantizar que la partición esté correctamente definida.

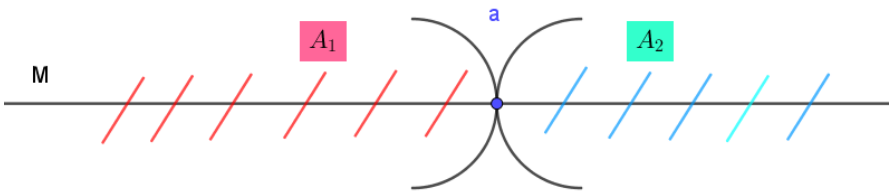


fig 1. *Partición de la recta en a en clases de números racionales A_1 y A_2*

Partiendo de esto Dedekind va a plantear el "problema" de la continuidad en $\mathbb{Q}$, debido a que él consideraba la recta como el prototipo de la continuidad, en esos tiempos se creía que la biyección entre la recta numérica y el conjunto de los racionales se podía efectuar por la propiedad de la densidad[12], esta intuición se basaba en la idea de que entre dos racionales siempre hay otro racional, lo que da la impresión de que "no hay huecos". Sería justamente Dedekind quien mostraría que esto no es así, y que es necesario pensar en un conjunto numérico más extenso, para hacer esta biyección. A continuación, se presenta una construcción a modo de ejemplo, para entender como Dedekind llego a esta noción.

Piénsese en la recta continua m, donde los puntos están determinados por la correspondencia con los números de $\mathbb{Q}$. Tal como se muestra en la figura 2

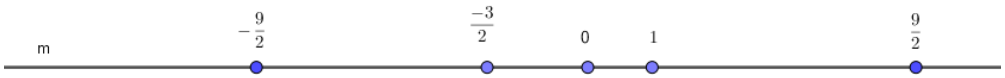


fig 2. *Representación de la recta racional m, definida sólo con los números racionales.*

[12] Según Arbeláez y Gálvez (2011) en algunos momentos históricos se confundió esta propiedad con la propiedad de la continuidad.

Piénsese por un momento en el punto H, este punto está ubicado a lado izquierdo del punto de origen que corresponde con el racional 0, por lo que la distancia entre H con respecto al origen, tiene una longitud de γ: donde γ es la longitud asociada a la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, donde sus catetos tienen una longitud de 1 respectivamente.[13] Esta construcción geométrica se representa en la figura 3.

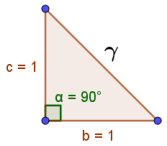
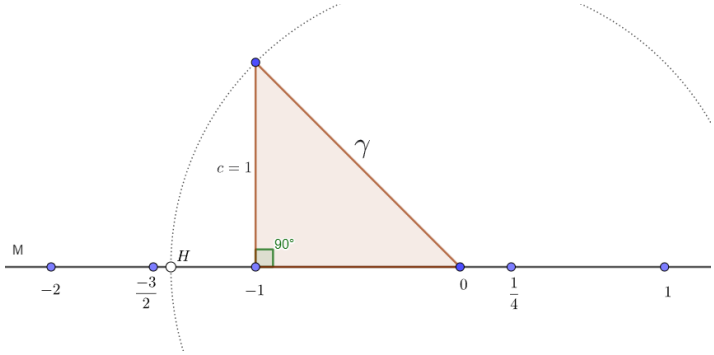


fig 3. Magnitud que describe la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de lado 1, denominada como γ

Debido al trabajo de los pitagóricos sabemos que la distancia entre el punto H y el origen es una longitud inconmensurable, es decir, no puede expresarse como fracción de dos enteros. Esto significa que, en una recta construida únicamente a partir de números racionales, *no hay ningún número* que corresponda exactamente al punto H. En consecuencia, esta posición representa un "hueco" en la estructura racional de la recta. Para evidenciar esta noción se puede hacer un acercamiento a la recta inicial, transponiendo, además, el triángulo que representa la distancia que denomine γ para por medio de una proyección ortogonal representar el punto H, como se muestra en la figura 4.



[13] γ es lo que nosotros actualmente conocemos como $\sqrt{2}$

fig 4. Acercamiento a la recta racional

Este mismo razonamiento se puede hacer con todas las longitudes inconmensurables, que sabemos que son infinitas, lo que daría como resultado una recta con infinitos "huecos", por lo que la continuidad de la que se dotó a la recta m no se cumple si está es definida sólo sobre los racionales, por lo tanto, se necesita más que los números racionales para garantizar la continuidad. Esto nos muestra, tal como lo enunció Dedekind, que la recta geométrica es infinitamente más rica que el conjunto de los números reales.

Como consecuencia de esto, Dedekind dedica el resto de su trabajo en formalizar los reales como el conjunto numérico que toma tanto a racionales como irracionales, demostrando que, con la unión de estos dos conjuntos numéricos, se puede satisfacer la propiedad de la *continuidad*.

1.1.3. Construcción de los irracionales

Al demostrar la discontinuidad de los $\mathbb{Q}$ se evidencia la necesidad de "agregar" al conjunto "nuevos" elementos que completen el dominio numérico para tener una verdadera correspondencia biunívoca con la recta geométrica, y por tanto dar garantía de lo continuo. En efecto, los "huecos" que presenta la recta en $\mathbb{Q}$ impiden una estructura continua, de modo que, para completar este sistema, Dedekind propuso una construcción basada en la noción de *cortaduras* (o cortes), que toma a $\mathbb{Q}$ como base para obtener no sólo los números racionales sino también los números irracionales.

Cuando la partición se origina a partir de un número racional a, este actúa como el punto de corte entre A_1 y A_2, definiendo completamente la partición. Sin embargo, Dedekind notó que existen particiones que no están determinadas por ningún número racional, como lo ejemplifique en la *figura 2* lo que indica la necesidad de extender el sistema numérico.

Para ilustrar la existencia de cortes que no corresponden a ningún número racional, Dedekind consideró el siguiente caso:

Sea $\boldsymbol{D}$ un número entero positivo que *no* es el cuadrado de ningún número entero. entonces D se encuentra entre dos cuadrados consecutivos. De modo que, existe un entero positivo λ tal que:

$$\boldsymbol{\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2}. \quad \textit{(1.1)}$$

A partir de este D, se define la siguiente partición en $\mathbb{Q}$:

- La clase A_1 está formada por todos los números racionales A_1 tales que $\boldsymbol{a_1}^2 < D$
- La clase A_2 está formada por todos los números racionales A_2 tales que $\boldsymbol{a_2}^2 > D$

Esta construcción satisface las condiciones de un corte, pues todo $a_1 \in A_1$ es menor que cualquier $a_2 \in A_2$ Sin embargo, este corte no está determinado por ningún número racional, lo que significa que no existe un racional cuyo cuadrado sea exactamente D.

Para justificar esto, Dedekind procede con una demostración por contradicción: Inicia con el supuesto de que D es un número racional, hay también dos números enteros positivos t y u, dando con la siguiente ecuación:

$$\frac{t^2}{u^2} = D \quad \textit{(1.2)}$$

Y, por lo tanto, al hacer la transposición de términos para dejar la ecuación igual a cero, se obtiene:

$$\boldsymbol{t^2 - Du^2 = 0} \qquad \textit{(1.3)}$$

Por lo que al sustituir el resultado de (1.2) en (1.1) se tiene que:

$$\boldsymbol{\lambda}^2 < \frac{t}{u^2}^2 < (\boldsymbol{\lambda} + 1)^2 \qquad (1.4)$$

Y de forma equivalente, al despejar para t y aplicar la propiedad de los cuadrados[14] en (1.4), se llega a:

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u \qquad (1.5)$$

Al aplicar la propiedad distributiva, despejar para u y simplificar, se obtiene:

$$0 < t - \lambda u < u \qquad (1.6)$$

Ahora, si se define

$$u' = t - \boldsymbol{\lambda u} \qquad (1.7)$$

Se tiene por (1.6) que u' es un número entero positivo menor que u y a su vez se puede suponer que u es el mínimo número entero positivo que posee la propiedad de que su cuadrado al multiplicarse por D se transforma en el cuadrado de un número entero t. En efecto, al despejar para t, de la ecuación (1.2) se tiene que:

$$t^2 = Du^2 \qquad (1.8)$$

Por otro lado, si la desigualdad en (1.6) se multiplica por el racional $\frac{t}{u}$ [15] al simplificarse se obtiene:

$$0 < \frac{t^2}{u} - \lambda t < t \qquad (1.9)$$

Y según el resultado en (1.8) y al hacer el despeje adecuado, la desigualdad anterior se transforma en

$$0 < Du - \lambda t < t \qquad (1.10)$$

De modo que, si se define

$$t' = Du - \boldsymbol{\lambda t} \quad (1.11)$$

---

[14] Una de las propiedades fundamentales de las desigualdades sobre números cuadrados establece que $a^2 < b^2$ si y sólo si $|a| < |b|$. En particular, para números positivos está propiedad se transforma en $a^2 < b^2$ si y sólo si $a < b$.

[15] Nótese que, por cómo está definido D se tiene que el racional $\frac{t}{u}$ corresponde a lo que modernamente se conoce como la raíz cuadrada de D. Esto es $\sqrt{D} = \frac{t}{u}$.

También se tendrá que t' será un número entero y positivo. Por lo que se cumplirá la siguiente ecuación:

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0 \quad \textit{(1.12)}$$

Con esto Dedekind encuentra una contradicción con lo que había supuesto de u, sin embargo, creo conveniente revisar el desarrollo de la factorización efectuada por este matemático tan brillante.

Se inicia, según los resultados obtenidos en (1.7) y (1.11), reemplazando u' y t' en (1.12), luego se resuelve el binomio al cuadrado, se distribuye el factor común D y se aplica la propiedad del inverso aditivo, esto es:

$$(Du - \lambda t)^2 - D(t - \lambda u)^2 = 0$$

$$(Du)^2 - 2Du\lambda t + (\lambda t)^2 - Dt^2 + 2Du\lambda t - D(\lambda u)^2 = 0$$

$$D(Du^2) + \lambda^2 t^2 - Dt^2 - D(\lambda^2 u^2) = 0$$

Luego, se agrupa los términos dos a dos (primero con tercero y segundo con cuarto), se saca factor común D y λ^2 respectivamente y se reorganiza la ecuación sacando factor común menos para el factor D, así:

$$D(Du^2 - t^2) + \lambda^2(-Du^2 + t^2) = 0$$

$$\lambda^2(t^2 - Du^2) - D(t^2 - Du^2) = 0$$

Al sacar factor común $t^2 - Du^2$ se llega a (1.12):

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0$$

Esto contradice la presuposición que le habíamos asignado a u, debido a que se muestra que existen u' que satisfacen la ecuación y son menores que u y al mismo tiempo es positivo por (1.6) y (1.7), esto quiere decir que u *no* es el mínimo número entero positivo. Con esta contradicción queda demostrado que *D* no puede ser un racional.

En lo que sigue se demuestra que ninguna de las clases formadas por el corte en D tienen un límite, es decir ni A_1 tiene máximo, ni A_2 tiene mínimo. Dedekind puede decir que, el cuadrado de cada número racional x es, o bien menor que D, o bien mayor que D. De aquí se sigue fácilmente que ni en la clase A_1 hay un número máximo, ni en la clase A_2 hay un número mínimo. Para demostrar que A_1 no tiene máximo Dedekind usa nuevamente una demostración por contradicción, donde toma como supuesto que x es el máximo de la clase A_1. Esto hace que: $x \in R^+$, donde, $x^2 < D$, o lo que es lo mismo $x < D$. Para iniciar él usa la siguiente ecuación:

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2+D} \quad (1.13)$$

Dedekind le resta x a ambos lados de la igualdad, al simplificar según la resta de racionales y aplicando propiedad distributiva, se tiene:

$$y - x = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D} - \frac{x}{1}$$

$$y - x = \frac{x(x^2 + 3D) - x(3x^2+D)}{3x^2+D}$$

$$y - x = \frac{x^3+3Dx-3x^3-Dx}{3x^2+D}$$

Por reducción de términos semejantes y factor común, se llega a la igualdad[16]

$$y - x = \frac{2x(D-x^2)}{3x^2+D} > 0 \qquad (1.14)$$

Por otro lado, como $x \in \mathbb{Q}$ entonces x debe ser elemento de A_1 o A_2. Así pues, se define una diferencia sobre D en la cual se sustituye el resultado de (1.13), veamos:

$$y^2 - D = \left[\frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2+D}\right]^2 - D \quad (1.15)$$

Al aplicar la propiedad distributiva, resolver el binomio al cuadrado, realizar la resta de racionales y simplificar para términos semejantes, se tiene que

[16] Recuerde que $x < D$ y tambien $x^2 < D$, de modo que $D - x^2 > 0$, además como x es un número positivo, entonces toda la fracción es positiva porque suma, producto y división de números positivos hace del resultado en (1.14) un número positivo.

$$y^2 - D = \left[\frac{x^6+6x^4D+9D^2x^2}{(3x^2+D)^2}\right] - \frac{D}{1}$$

$$y^2 - D = \frac{x^6+6x^4D+9D^2x^2-9x^4D-6x^2D^2-D^3}{(3x^2+D)^2}$$

$$y^2 - D = \frac{x^6-3x^4D+3D^2x^2-D^3}{(3x^2+D)^2}$$

Aplicando el binomio de newton en (1.15) se llega a:

$$y^2 - D = \frac{(x^2-D)^3}{(3x^2+D)^2} < 0 \quad (1.16)$$

De esta expresión se desprende que $y^2 - D < 0$[17]. Por consiguiente, $y^2 < D$, y por definición de A_1, $y \in A_1$, y como $x < y$[18] podemos decir que A_1 no tiene un máximo x, pues existe un y mayor que pertenece a su misma clase. De igual manera se demuestra que A_2 no tiene un mínimo.[19]

Con lo anterior, Dedekind concluye que la cortadura (A_1, A_2) no está dada por un número racional. Por lo que el conjunto A_1 carece de un elemento máximo, mientras que al conjunto A_2 carece de elemento mínimo. Dedekind vislumbra la existencia de un nuevo número $\sqrt{\mathrm{D}}$ que corresponde al supremo de A_1 y al mínimo de A_2. Como se indicó en líneas atrás este es el número irracional raíz cuadrada de D, que cumple con la igualdad:

$$\inf \mathrm{A}_2 = \sup \mathrm{A}_2 = \sqrt{\mathrm{D}} \quad (1.17)$$

En resumen, con todo lo anterior Dedekind puede garantizar la existencia del número raíz cuadrada de D, en simbolos $\sqrt{D}$, y así definir formalmente a los números reales $\mathbb{R}$ como el conjunto de todas las cortaduras en $\mathbb{Q}$, cortes que son formados no sólo por los números racionales sino también por los irracionales.

[17] Esto se da porque $x^2 < D$ y por tanto $x^2 - D < 0$, lo que hace que la fracción en (1.16) sea menor a cero por la ley de signos.
[18] Esto se da por la igualdad dada en (1.14) pues si $y - x > 0$ entonces $x - y < 0$ y por tanto $x < y$.
[19] Es importante resaltar que en los documentos revisados de Dedekind no se mostraron el desarrollo de estas ecuaciones, sin embargo, vi necesario desarrollarlas, en mi experiencia me demoré un tiempo considerable en entender las equivalencias mostradas anteriormente.

No obstante, los números reales van más allá de sus particularidades. En efecto, Dedekind los hace parte de una estructura consistente que es heredada de los racionales, dotándolos de una operatividad y de un orden, que se complementa con propiedades adicionales que permiten identificar cuando se está en el universo de los números reales y cuando en el universo de los racionales, lo cual deja al descubierto sus similitudes y diferencias. Aspectos que se muestran a continuación.

1.1.4. El orden de $\mathbb{R}$ y propiedades subyacentes

La construcción de los números reales mediante cortaduras de Dedekind permite establecer una relación de orden que es consistente con la relación de orden previamente definida en los números racionales $\mathbb{Q}$. Este ordenamiento se basa en la inclusión de subconjuntos y en la posición relativa de los elementos en la estructura de cortaduras.

Dada la definición de los números reales como cortaduras en $\mathbb{Q}$, la relación de orden entre dos cortaduras β y λ a las cuales les corresponde las clases (A_1, A_2) y (B_1, B_2) respectivamente, se define de la siguiente manera:

1. Si β y λ son generadas por números racionales q_1 y q_2, entonces:
    - $\beta = \lambda$ sí y solo si $q_1 = q_2$.
    - $\beta < \lambda$ sí y solo sí $q_1 < q_2$.
2. Si alguna de las cortaduras no es generada por un número racional, entonces:
    - $\beta = \lambda$ si y solo si $A_1 = B_1$.
    - $\beta < \lambda$ sí y solo si $A_1 \subset B_1$.

Esta relación de orden permite concluir que los números reales conforman un dominio unidimensional ordenado, lo que se traduce en la validez de ciertas propiedades fundamentales del orden en $\mathbb{R}$. Algunas de las cuales se presentan continuación. Las siguientes propiedades estructuran el orden en $\mathbb{R}$ y consolidan su carácter continuo:

I. Transitividad del orden: Si $\beta < \lambda$ y $\lambda < \gamma$, entonces $\beta < \gamma$. Esto establece que los números pueden compararse de manera coherente.

II. Densidad del conjunto de los números reales: Dados dos números reales diferentes β y λ, siempre existe un conjunto infinito de números situados entre ellos.

III. Estructura de corte en R: Para cualquier número real β, el sistema se divide en dos clases A_1y A_2:

- A_1 contiene todos los elementos menores que β.
- A_2 contiene todos los elementos mayores que β.
- El propio β puede pertenecer a cualquiera de las dos clases, actuando como el máximo de A_1 o el mínimo de A_2.

Pero, a diferencia de estas tres propiedades, que son compartidas tanto por la recta racional Q como por la recta geométrica L, el dominio de los números reales se caracteriza por cumplir una propiedad adicional, conocida como el principio de continuidad. Esta será en adelante la condición distintiva que asegura la plenitud de la recta real frente a las insuficiencias de los racionales.

IV. Propiedad de continuidad de Dedekind[20]: Si el sistema R se divide en dos clases A_1 y A_2 tales que cada elemento de A_1 es menor que cualquier elemento de A_2, entonces existe un único número real β que determina dicha división.

Esta propiedad es crucial, ya que establece que en $\mathbb{R}$ no hay "huecos". Esto pues, dentro del conjunto $\mathbb{R}$ da garantía de la existencia del elemento donde se hace la partición, a diferencia de $\mathbb{Q}$, donde pueden existir cortes sin un elemento que los determine. La demostración se basa en que dicha división también genera una cortadura en $\mathbb{Q}$, la cual necesariamente está determinada por un único número real.

El concretar la relación de orden en mediante cortaduras no solo garantiza la coherencia con el orden en $\mathbb{R}$, sino que también permite definir rigurosamente la

[20] Esta es la propiedad más importante en el análisis que se desarrolla en el capítulo 2, debido a que, describe sintéticamente el cómo Dedekind veía la continuidad.

continuidad del conjunto de los números reales. Esto abre la puerta al desarrollo de conceptos fundamentales en el análisis matemático, cuya estructura se verá fortalecida por este marco formal.

1.1.5. Propiedades estructurales de los reales

Una vez completada la construcción de los números reales mediante cortaduras como lo presenta Dedekind, resulta pertinente revisar si esta construcción cumple con las propiedades algebraicas y estructurales con la que actualmente dotamos al conjunto de los números reales, las cuales nos dicen que el conjunto de los números reales son un cuerpo ordenado, arquimediano y completo.

En lo que respecta a la condición cuerpo se tiene que, para que el conjunto de los reales construido mediante cortaduras de Dedekind ($\mathbb{R}$) pueda considerarse un cuerpo conmutativo, es necesario definir las operaciones de suma y multiplicación entre cortaduras, así como sus respectivos elementos neutros e inversos. Estas operaciones se definen a partir de las propiedades de los racionales contenidos en las cortaduras. Para así, poder dar cuenta de que se satisfacen todas las condiciones para llamarlos cuerpo

Dedekind nos da un ejemplo de cómo se presentan la suma, el caso más simple según sus palabras, para entender el cálculo entre cortaduras (Dedekind R. , 1927), para este trabajo también se mostrará una reinterpretación de cómo se puede ver la suma de cortaduras.

Sea $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ dos cortaduras de $\mathbb{Q}$ definimos la *suma de cortaduras* por: $\alpha + \beta = \gamma$: donde $\gamma = (C_1, C_2)$, tal que:

$$C_1 = \{a + b \mid a \in A_1, b \in B_1\}$$

$$C_2 = \{a + b \mid a \ \in A_2, b \ \in B_2\}$$

En la figura 5. se muestra un esquema gráfico de las cortaduras mostradas

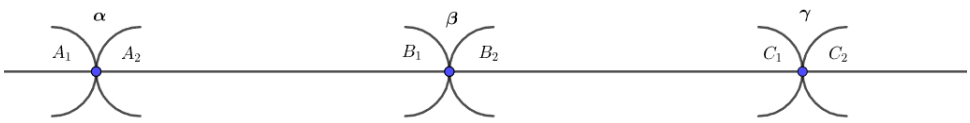


fig 5. Representación gráfica de la suma de cortaduras

Esta suma genera una nueva cortadura, ya que se conserva la propiedad de ser un subconjunto de $\mathbb{Q}$ sin máximo, que divide al conjunto $\mathbb{Q}$ en dos clases disjuntas que reunidas forman a todo $\mathbb{Q}$, es decir, se obtiene una partición que cumple con la propiedad de orden.[21]

Producto de cortaduras (cuando ambas son positivas):

$\alpha * \beta = (D_1, D_2)$, donde $D_1 = \{a * b \mid a \in A_1, b \in B_1, a > 0, b > 0\}$

Esta definición puede extenderse a cortaduras negativas o mixtas, manejando casos por separado, como es habitual en álgebra. No obstante, en cualquiera de los casos se garantiza que el resultado es una nueva cortadura que se comporta de la manera requerida. Por lo tanto, se verifica tanto para la suma como para el producto que se cumple la propiedad clausurativa.

Una vez definidas las operaciones de suma y producto entre cortaduras, es posible examinar si el conjunto $\mathbb{R}$, tal como lo construyó Dedekind, cumple con las otras condiciones algebraicas para ser considerado un *cuerpo conmutativo*. Esto implica verificar si se satisfacen propiedades como la clausura, la conmutatividad, la asociatividad, la

[21] Por ejemplo, piénsese en la cortadura $\alpha = 2\,, \beta = 3$. $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$. $\alpha + \beta = \gamma$. $\{\gamma \in \mathbb{Q} \mid \gamma = 2 + 3\}$. donde $\gamma = (C_1, C_2)$. A_1 contendrá todos los elementos menores a 2 y B_1 contendrá todos los elementos menores a 3, se puede comprobar que la suma de cualquiera de los elementos de estos dos subconjuntos va a permanecer en el subconjunto C_1, que está compuesto por todos los elementos menores a 5.

existencia de elementos neutros e inversos (aditivo y multiplicativo), así como la distributiva del producto respecto a la suma.

Estas propiedades se derivan directamente del comportamiento algebraico de los racionales, y se preservan en $\mathbb{R}$ a través de su construcción mediante cortaduras. A continuación, se sintetizan estas propiedades en una tabla, que recoge cómo cada una se verifica en este sistema numérico. Posteriormente se ampliarán aquellas que requieren mayor atención conceptual o técnica según los objetivos que movilizan esta investigación.

Tabla 2. PROPIEDADES QUE CONVIERTEN A LOS REALES DE DEDEKIND EN UN CUERPO CONMUTATIVO

Los reales como cuerpo	
Propiedad	**Descripción / Verificación**
Clausura	La suma y el producto de dos cortaduras producen subconjuntos de $\mathbb{Q}$ que también cumplen la definición de cortadura. Es decir, el conjunto resultante también está formado por números racionales menores a un cierto supremo y sin máximo, cumpliendo la propiedad de partición del dominio racional.
Conmutatividad	Como las operaciones de suma y multiplicación se definen elemento a elemento desde $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{Q}$ es conmutativo, se conserva esta propiedad en $\mathbb{R}$. Es decir, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ y $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Asociatividad	Las operaciones entre cortaduras también heredan la asociatividad de $\mathbb{Q}$, pues toda operación entre cortaduras depende únicamente de combinaciones entre racionales: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$, y para el producto $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$.
Elemento neutro aditivo	La cortadura $0 = (P, N)$, donde $P = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\}$, actúa como neutro para la suma: $\alpha + 0 = \alpha$.
Elemento neutro multiplicativo	La cortadura $1 = (L, R)$, donde $L = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 1\}$, actúa como neutro para el producto: α·1=α
Inverso aditivo	Para toda cortadura α, existe una cortadura $-\alpha$ construida con los opuestos de los racionales que no pertenecen a A_1, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0$
Inverso multiplicativo	Si $\alpha \neq 0$, y es una cortadura positiva, su inverso multiplicativo α^{-1}está definido como el conjunto de todos los racionales $q \in \mathbb{Q}$ tales que $q < 0$ o $q < \frac{1}{r}$ para algún $r \notin A_1$. De esta manera, $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$
Distributiva	La distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, también se hereda de $\mathbb{Q}$, ya que la definición de las operaciones en $\mathbb{R}$ está construida sobre combinaciones racionales pero que se extiende al universo de los reales.

Inverso multiplicativo de α

Esta es la parte más técnica, por así decirlo. Consideremos una cortadura $\alpha = (A_1, A_2)$ que representa un número real positivo $x > 0$, distinto de cero.

Lo que se busca es definir una cortadura $\alpha^{-1} = (C_1, C_2)$ de manera que:

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$$

Para construir α^{-1}, se utiliza el siguiente conjunto:

$$C_1 = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0 \; y \; \exists r \in \mathbb{Q}^+, r \notin A_1 tal \; que \; q < 1/r\}$$

Esta definición se puede interpretar y describir desde dos momentos. Primero, se incluyen todos los racionales negativos, porque al construir una cortadura que se aproxime desde abajo a $\frac{1}{X}$ cualquier número negativo siempre será menor que dicho valor. Y, segundo, se consideran racionales positivos que estén por debajo del recíproco de algún racional que no pertenece a A_1. Esto es crucial: si $r \notin A_1$, entonces r es mayor o igual que x y, en consecuencia, $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{X}$. Por lo tanto, cualquier racional menor que $\frac{1}{r}$ también lo será respecto a $\frac{1}{x}$, lo que garantiza que estamos construyendo una cortadura que se aproxima desde abajo al valor deseado.

En resumen, la cortadura α^{-1} contiene a todos los racionales estrictamente menores que todos los posibles recíprocos de elementos mayores o iguales al supremo de A_1. De esta manera, se asegura que la multiplicación entre α y α^{-1}, definida como producto de cortaduras (basada en la combinación ordenada de elementos racionales), converge a la cortadura correspondiente al número 1.

En el caso de una cortadura negativa (es decir, que representa un número real negativo), el proceso se refleja de manera análoga: el inverso multiplicativo también será negativo, y la construcción se ajusta para que el conjunto se aproxime desde abajo al valor

$\frac{1}{X}$, teniendo en cuenta que $\frac{1}{X} < 0$. Es decir, se toman racionales menores que el recíproco de racionales negativos que no pertenecen a A_1.

En este sentido, una vez definida la estructura algebraica de cuerpo para el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, es pertinente presentar de forma sintética otras propiedades que complementan esta estructura. Algunas de ellas, como el orden total, ya fueron desarrolladas en apartados anteriores, mientras que otras se fundamentan directamente en la construcción con cortaduras y serán retomadas con más profundidad en capítulos posteriores.

A continuación, se presentan de forma comparativa las propiedades que definen a los números reales como un sistema numérico ordenado, arquimediano, continuo y completo:

Tabla 3. Propiedades estructurales de los números reales de Dedekind

Los reales como un sistema ordenado, arquimediano, continuo y completo		
Propiedad	**Justificación en la construcción de Dedekind**	**Lectura histórica o interpretativa**
Orden total	Abordado en el apartado 1.1.4. La relación de orden entre cortaduras se define por inclusión de subconjuntos, replicando el orden de los racionales y extendiéndolo a los irracionales.	Replica el orden existente en $\mathbb{Q}$, pero lo extiende a $\mathbb{R}$, alineando el dominio con una visión unidimensional de la recta numérica.
Continuidad	Si se divide $\mathbb{R}$ en dos clases tal que todo elemento de una es menor que los de la otra, para todo corte se tiene la garantía de que existe un único real que determina esa división.[22]	Esta es la formulación del famoso axioma de continuidad de Dedekind, que garantiza que en $\mathbb{R}$ no hay "saltos" o huecos.
Completitud	Toda cortadura define un único número real. Esto garantiza que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$ tiene supremo en $\mathbb{R}$.	Aunque Dedekind no usó el término "axioma de completitud", su teoría lo incorpora implícitamente como principio estructural.

[22] (Dedekind R. , 1998)

Densidad[23]/ Arquimedianidad	Entre dos reales hay otro real. Además, para todo real positivo, existe un natural n tal que $1/n < \varepsilon$.	Garantiza la inexistencia de infinitesimales y de elementos infinitamente grandes. Aunque en ocasiones se asocia a intuiciones antiguas sobre la "densidad", se pueden trabajar como dos propiedades distintas.

Pues bien, al hacer énfasis en la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, se encuentra que históricamente, esta idea fue trabajada por Arquímedes a partir de las nociones de medida en las magnitudes geométricas, pero en el contexto de Dedekind, su validez se deduce del hecho de que toda cortadura contiene elementos racionales. Dado que en $\mathbb{Q}$ esta propiedad es válida, y que el orden se conserva en $\mathbb{R}$, se garantiza que toda cortadura representa un número que puede ser acotado por una fracción $1/n$. Por tanto, la Arquimedianidad no se impone como axioma, sino que se deduce naturalmente de la construcción misma de los reales.[24]

Es importante aclarar que, aunque en este capítulo se han mencionado brevemente las propiedades de continuidad y completitud, su desarrollo ha sido tratado de manera introductoria. En los capítulos siguientes se abordarán de forma más detallada estas dos nociones, analizando no solo su estructura matemática sino también sus implicaciones epistemológicas, análisis que no sólo se limita a los reales de Dedekind sino también a los reales de Cantor.

De hecho, la perspectiva y contribución de Dedekind, aunque rigurosamente poderosa, no fue la única ruta para construir el conjunto de los reales. De forma paralela, el matemático alemán Georg Cantor desarrolló una propuesta alternativa, que, desde una óptica conjuntista y basada en sucesiones, condujo a una caracterización distinta de los

[23] Esta propiedad ha sido descrita anteriormente en las formulaciones del apartado 1.1.4

[24] La propiedad arquimediana se considera actualmente una formalización más precisa de ciertas intuiciones antiguas asociadas a la densidad, razón por la cual ambas pueden tratarse conjuntamente. En términos modernos, esta propiedad establece que no existen infinitesimales en $\mathbb{R}$; es decir, no hay elementos positivos tan pequeños que no puedan ser superados por un número racional de la forma $1/n$. Esto distingue al conjunto $\mathbb{R}$ de otros sistemas numéricos extendidos, como $\mathbb{R}*$, utilizado en el análisis no estándar, donde sí se admiten infinitesimales positivos distintos de cero. Para una discusión histórica más profunda, véase Stroyan y Luxemburg (1976), o los comentarios en Bergé y Sessa (2003).

números reales pero que mantiene su esencia y sus propiedades intrínsecas. Líneas más adelante, se abordará esta segunda construcción, cuyas ideas también dejaron una huella profunda en el desarrollo epistemológico y matemático de la noción de número real.

Previo a ello, es fundamental que se tengan en cuenta algunas consideraciones que surgieron en torno a la contribución de Dedekind y Cantor y que fueron punto de discusión, lo cual es importante si se tiene en cuenta que sus aportes en torno al número real se dieron en paralelo, lo cual se pretende mostrar de forma transversal a continuación.

1.2. Consideraciones históricas: de Dedekind a Cantor

La construcción aritmética propuesta por Dedekind tuvo un gran impacto en la matemática del siglo XIX. Su uso del principio de la cortadura permitió fundamentar rigurosamente la existencia de los números irracionales como extensiones necesarias del dominio racional. No obstante, su énfasis en la propiedad IV —la llamada "propiedad de continuidad" o axioma de completitud— fue objeto de discusión incluso entre sus contemporáneos.

Georg Cantor, por ejemplo, cuestionó el carácter esencial que Dedekind atribuía a esta propiedad. En una carta fechada el 17 de mayo de 1877, Cantor sugiere que no es razonable considerar dicha propiedad como definitoria de la continuidad, ya que también se cumple en el conjunto de los números enteros, los cuales, son prototipo de discontinuidad.

Este señalamiento no deja de tener sentido, pero también ignora que Dedekind nunca presentó dicha propiedad de forma aislada, sino integrada con otras, como la densidad. En efecto, los números naturales carecen de esa densidad —es decir, entre dos enteros consecutivos no existe ningún otro entero—, por lo que no satisfacen todas las condiciones que hacen a un sistema numérico continuo.

Esta discrepancia permite vislumbrar una distinción de fondo entre los dos enfoques. Mientras Dedekind busca una construcción puramente lógica, Cantor se mueve hacia una visión estructural, fuertemente influenciada por su naciente teoría de conjuntos.

La construcción cantoriana, como se verá a continuación, no parte del problema de la continuidad, sino del deseo de extender el universo de los racionales mediante la estructura de las sucesiones fundamentales.

Esta postura marcará el inicio de un enfoque completamente nuevo en la historia de las matemáticas, donde no solo se redefinen los números reales, sino también el papel del infinito y la estructura misma de este conjunto numérico.

1.3. Los números reales de Cantor

Georg Cantor (1845–1918), contemporáneo de Dedekind, ofreció una perspectiva complementaria a través de su teoría de conjuntos y su análisis de la cardinalidad infinita[25]. A diferencia de otros matemáticos de su época, Cantor no centró su interés en ofrecer una fundamentación aritmética rigurosa de los números irracionales. Su preocupación era más estructural: construir a los números irracionales a partir de los racionales, de la misma manera en que se construyen los racionales desde los naturales.

Para ello, Cantor recurrió a las sucesiones de Cauchy, construyendo un sistema que hiciera uso de herramientas propias del análisis infinitesimal. En síntesis, podemos afirmar que, su enfoque no solo redefinió la noción de número real, sino que transformó por completo teorías posteriores como el concepto de infinito. En su propuesta, el infinito deja de verse desde lo potencial para ser considerado en su acepción actual[26], dando lugar a un universo matemático donde se pueden manipular y comparar distintos tipos de infinitos.

Este salto conceptual marcó una revolución en la forma de entender la estructura del sistema numérico, siendo elogiado por muchos de los matemáticos de ese entonces[27] y cuestionado y debatido por muchos otros. Así, la construcción de los números reales según

---

[25] Es decir, inicio el estudio del comportamiento de los conjuntos infinitos y las relaciones que tienen sus elementos en el infinito.

[26] Ya desde Aristóteles se había distinguido entre dos tipos de infinito: el potencial, aceptado como proceso sin fin, y el actual, concebido como una totalidad completa pero rechazada por considerarse contradictoria. Esta posición dominó el pensamiento matemático por siglos. No fue sino hasta el siglo XIX, con los aportes de Georg Cantor, que el infinito actual fue reivindicado y formalizado como objeto legítimo de estudio matemático, dando origen a una nueva etapa en la concepción del continuo y el desarrollo de la teoría de conjuntos.

[27] *"Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros*", destacó Hilbert.

Cantor no solo dio lugar a una nueva formulación analítica de los irracionales, sino que abrió el camino a la teoría de conjuntos, la noción actual del infinito, y una redefinición del continuo. Este enfoque será desarrollado a continuación, detallando tanto la construcción como sus implicaciones matemáticas.

1.3.1. Sucesiones fundamentales

En la propuesta de Cantor, los números reales se construyen a partir del conjunto de los racionales utilizando un enfoque que se apoya en la noción de sucesión. Pero no cualquier tipo de sucesión, sino aquellas que hoy denominamos *sucesiones fundamentales* o *sucesiones de Cauchy*. Este concepto se convierte en el pilar de su construcción.

Cantor adopta la definición de sucesión de Cauchy en lugar de la definición usual de límite, precisamente para evitar una circularidad lógica. Mientras que la definición de límite exige conocer de antemano el valor al que converge la sucesión (lo cual supondría admitir la existencia de irracionales sin haberlos construido aún), la condición de Cauchy depende únicamente de los términos de la sucesión, todos ellos racionales. De esta manera, Cantor logra construir los números reales a partir de los racionales sin necesidad de postular previamente los límites que desea fundamentar.

Una sucesión fundamental en los racionales es una sucesión ordenada de números racionales $\{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$ tal que, conforme avanzamos en la secuencia, los términos se van acercando cada vez más entre sí como se puede ver ejemplificado en la figura 6.

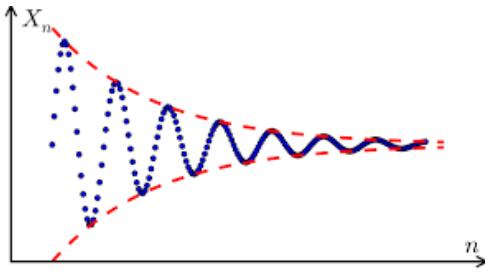


fig 6. Ilustración de una sucesión fundamental

Precisamente, se define así:

Una sucesión $\{a_n\}$ de números racionales se dice *fundamental* si, para todo número positivo ε, por pequeño que sea, existe un número natural N tal que, para todo $m, n \geq N$, se cumple que:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

Esto significa que, después de cierto punto en la sucesión todos los elementos están arbitrariamente cerca entre sí, esto implica que la distancia entre un término y otro se hace mínima y tienda a cero, de modo que los términos se aproximan a un mismo valor, aunque *no necesariamente* converjan a un número racional, es decir dada una sucesión de números racionales ella puede o no converger a un racional, lo que permite llegar a resultados numéricos que hasta ese momento no eran considerados números, así pues se va abriendo camino al universo de lo irracional.

Es precisamente en este último punto donde Cantor ve una oportunidad para extender el conjunto de los racionales: si existen sucesiones fundamentales que no convergen dentro de $\mathbb{Q}$, entonces hay "números nuevos" que deberían incorporarse al sistema. Cantor asocia a cada sucesión fundamental un símbolo, que actuará como representante del número al que "debería" converger, aunque dicho número no pertenezca necesariamente a $\mathbb{Q}$.

Este símbolo, que podemos denotar como b, no debe interpretarse como un límite en sentido estricto, sino como una designación para el valor al cual la sucesión se aproxima internamente. En este sentido, Cantor realiza una abstracción que permite introducir elementos ajenos a $\mathbb{Q}$, dando así lugar a un nuevo conjunto numérico más completo.

Por ejemplo, podemos considerar la sucesión cuyo término n-ésimo es el siguiente:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Esta sucesión es fundamental en $\mathbb{Q}$, y se aproxima cada vez más al número dos[28]. En este caso, su símbolo asociado representaría el número 2 dentro de $\mathbb{Q}$. Sin embargo, también es posible construir sucesiones que se aproximen, por ejemplo, a $\sqrt{2}$, sin que ninguno de sus términos sea exactamente $\sqrt{2}$, ya que este número no pertenece a $\mathbb{Q}$.[29]

Con esto, Cantor establece el punto de partida para una ampliación rigurosa del conjunto de los números racionales, en la que los nuevos elementos emergen como equivalencias de sucesiones fundamentales.

1.3.2. Relación de equivalencia entre sucesiones fundamentales

Tras haber definido las sucesiones fundamentales como aquellas sucesiones de números racionales cuyos términos, a medida que avanza la sucesión, se acercan indefinidamente entre sí, el paso siguiente en la construcción de los números reales según Cantor consiste en establecer una forma adecuada de identificar cuándo dos de estas sucesiones representan el mismo número real. Para ello, introduce una *relación de equivalencia* entre sucesiones fundamentales.

La idea principal es la siguiente: si dos sucesiones fundamentales se acercan al mismo valor (aunque no se conozca explícitamente ese valor), entonces deben considerarse equivalentes, ya que comparten el mismo "límite", aunque este no exista en el conjunto de los números racionales.

---

[28] Obsérvese que los primeros términos de la sucesión son: 1,5; 1,75; 1,875; 1,9375… Cada término se obtiene sumando una fracción cada vez más pequeña (la mitad de la anterior), lo cual implica que la sucesión se aproxima indefinidamente a 2 sin llegar a alcanzarlo. Esto ocurre porque se trata de una suma parcial de una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, cuya suma infinita es 2.

[29] Por ejemplo, el método de Herón de Alejandría (siglo I d.C.) ya proponía una forma de aproximar raíces cuadradas mediante una sucesión recursiva de números racionales. Dado un número positivo S, se define la sucesión por la relación: $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{S}{x_n}}{2}$ En el caso particular de $S = 2$, si se toma $x_0 = 1$

Cantor define esta relación del siguiente modo:

Dos sucesiones fundamentales de números racionales, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, son equivalentes si la sucesión $\{a_n - b_n\}$ tiende a cero.

En otras palabras, si la diferencia entre los términos correspondientes de ambas sucesiones se vuelve arbitrariamente pequeña a medida que n crece, entonces ambas sucesiones se consideran representaciones del mismo número real. Así pues, si la diferencia de los términos n-ésimos de la sucesión tiende a cero entonces las sucesiones son equivalentes.

Esto se puede expresar así: "Las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si y solo si la sucesión $\{a_n - b_n\}$ también es fundamental y su "límite" es cero". Esta relación cumple las propiedades que se esperan de una relación de equivalencia, esto es:

- **Reflexiva**: Toda sucesión es equivalente a sí misma.
- **Simétrica**: Si $\{a_n\}$ es equivalente a $\{b_n\}$, entonces $\{b_n\}$ es equivalente a $\{a_n\}$.
- **Transitiva**: Si $\{a_n\}$ es equivalente a $\{b_n\}$ y $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$, entonces $\{a_n\}$ es equivalente a $\{c_n\}$.

Al formarse la relación de equivalencia se puede obtener las clases de equivalencia de la relación, las cuales agrupan en un único "paquete" a todas las sucesiones equivalentes entre sí según la definición de Cantor, obteniendo para cada número, racional e irracional, un paquete de sucesiones que le corresponde pues ellas convergen a dicho número. En consecuencia, estas clases de equivalencia se interpretan como los **números reales**. Así, cada número real no se asocia a una única sucesión, sino a todas las sucesiones fundamentales que "convergen" a ese valor. El conjunto de todas estas clases de equivalencia es el que Cantor identifica como el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Este procedimiento permite construir un nuevo dominio numérico partiendo únicamente de los racionales, sin necesidad de una intuición geométrica o de recurrir a nociones externas del análisis. Al definir así a los números reales, Cantor logra dotarlos de

una *estructura completamente aritmética*, fundamentada en el comportamiento interno de las sucesiones.

Esta interpretación de las clases de equivalencia como nuevos números reales no solo es coherente con las exigencias del análisis moderno, sino que fue anticipada por el mismo Cantor, quien afirma:

> *Después de todos estos prolegómenos, se obtiene como primera proposición rigurosamente demostrable que, si* b *es el número determinado por la sucesión fundamental* $(\boldsymbol{a}_v)$*, entonces, con v creciente,* $b - a_v$ *se hace menor en valor absoluto que cualquier número racional concebible, o lo que es lo mismo:* $\lim_{v\to\infty} a_v = b$ (Cantor G & Domínguez, 2005, pág. 112)[30]

Con estas palabras Cantor consolida su nuevo dominio numérico partiendo únicamente de los racionales, este nuevo dominio hoy lo conocemos como los reales, desde un punto de vista cantoriano. Un dominio que al igual que el de Richard Dedekind cumple con características y propiedades sumamente interesantes que se presentan en los siguientes apartados.

1.3.3. Relación de orden entre sucesiones fundamentales

Una vez definidos los números reales como clases de equivalencia de sucesiones fundamentales de racionales, es necesario introducir una relación de orden que permita comparar estos nuevos elementos. Cantor establece una forma precisa de hacerlo, basándose en la comparación término a término de las sucesiones representativas.

[30] Recuerde que esta cita hace referencia a el documento en español que leí, no al documento original

Definición de orden

Sean b y b' dos números reales, representados respectivamente por las sucesiones fundamentales $\{a_n\}$ y $\{a_n{}'\}$[31]. Se dice que:

- $b < b'$ si existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$, se cumple que $a_n < a_n{}'$.

Es decir, b es menor que b' si, a partir de cierto índice en adelante, los términos de la sucesión $\{a_n\}$ siempre son menores que los términos correspondientes de $\{a_n{}'\}$. Esta relación es *bien definida* porque las sucesiones fundamentales convergen, y por tanto sus diferencias eventualmente se estabilizan en torno a un mismo comportamiento.

Observaciones importantes

- Si $\{a_n\}$ y $\{a_n{}'\}$ representan el mismo número real (es decir, pertenecen a la misma clase de equivalencia), entonces no hay diferencia significativa entre ellas, y no se cumple $b < b'$ ni $b' < b$, sino que $b = b'$.
- Si $\{a_n\}$ se mantiene estrictamente por debajo de $\{a_n{}'\}$ a partir de cierto punto, entonces b y b' representan diferentes números reales y se cumple la desigualdad $b < b'$.

Coherencia con la intuición numérica

Esta relación de orden respeta la intuición del análisis clásico. Por ejemplo, si $\{a_n\}$ es una sucesión que tiende a π y $\{a_n{}'\}$ es otra que tiende a $\pi + 1$, entonces $b < b'$, ya que $\pi < \pi + 1$. El orden definido se hereda del orden en los racionales, pero adaptado a las características de las sucesiones convergentes.

Más aún, al igual que Dedekind, Cantor dota a los números reales de las condiciones necesarias que permite garantizar la existencia de la estructura de la cual subyacen estos números, donde se toma como base los elementos fundacionales que dan sustento a su definición de número real; es así como, no sólo el orden, sino también las

[31] Cantor relaciona las infinitas sucesiones fundamentales a un "signo" b y aclara que no debe tomarse a b como el límite de la sucesión $\{a_n\}$, sino como un símbolo, volviéndose solamente una expresión nominal. Sin embargo, más adelante, Cantor dota a estos signos de un sentido numérico comparándolos con números racionales, diciendo si son mayores o menores a estos.

operaciones fundamentales del conjunto numérico son definidas en términos de las sucesiones fundamentales, lo cual se presenta a continuación.

1.3.4. Operaciones entre sucesiones fundamentales

Una vez que se han establecido las sucesiones fundamentales como las entidades con las que Cantor construye los números reales, el siguiente paso en su sistema consiste en definir operaciones entre estas sucesiones. Las operaciones elementales de suma, producto y opuesto se definen en función de la operación término a término entre sucesiones racionales, cuidando que el resultado siga cumpliendo con la propiedad de ser una sucesión fundamental (de Cauchy) Todo ello se resume en la tabla 4.

Tabla 4. Operaciones entre sucesiones de Cauchy[32]

Operación	Definición	Observaciones
Suma	Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones fundamentales, se define $\{c_n\} = a_n + b_n$.	La suma de dos sucesiones de Cauchy también es de Cauchy, por lo tanto $\{c_n\}$ es sucesión fundamental.
Producto	Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones fundamentales, se define $\{c_n\} = a_n \times b_n$.	El producto de sucesiones de Cauchy también produce otra sucesión de Cauchy, lo que garantiza que el resultado es fundamental.
Opuesto aditivo	Si $\{a_n\}$ es una sucesión fundamental, se define $\{-a_n\}$ como la sucesión cuyo término general es $-a_n$.	El opuesto también es una sucesión de Cauchy, y representa el inverso aditivo en el sistema construido.
Inverso multiplicativo	Si $\{a_n\}$ es sucesión fundamental y no tiende a cero, se define $\{b_n\} = \frac{1}{a_n}$.	Como $\{a_n\}$ está alejada de cero no se generan indeterminaciones.

[32] En la tabla se muestran las operaciones término a término entre sucesiones fundamentales (Cauchy) de racionales, usando únicamente su término general a_n. Conviene recordar que, en la formulación original una sucesión es fundamental si las diferencias entre sus términos cumplen $\lim_{m,n\to\infty.} (a_m - a_n) = 0$ Esta condición asegura que las operaciones presentadas (suma, producto, opuesto, inverso) permanecen dentro del conjunto de sucesiones fundamentales. El inverso multiplicativo, por su parte, solo se define cuando la sucesión es *eventualmente no nula*, evitando así indeterminaciones.

Como se puede apreciar las operaciones con sucesiones fundamentales, no distan mucho del comportamiento que se puede encontrar en las operaciones con los racionales, por lo tanto, se puede dar paso a la forma en como Cantor demuestra la completitud de los reales y como no es necesario seguir "ampliando" el dominio.

1.3.5. ***El dominio ampliado y la clausura del sistema real en Cantor***

Cantor inicia su construcción partiendo del dominio A, conformado por todos los números racionales. Define entonces el conjunto B, compuesto por todas las sucesiones fundamentales de racionales. Cada una de estas sucesiones define un símbolo (o signo) b, que no debe entenderse como el límite numérico en sentido tradicional, sino como una nueva entidad: una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy, que será posteriormente dotada de significado numérico.

Este proceso produce una extensión del dominio A, ya que no todas las sucesiones fundamentales convergen a un número racional. Algunas tienden hacia valores que no están en $\mathbb{Q}$, lo que revela que B incluye elementos que en A no se pueden expresar. La función de correspondencia entre los números racionales y los signos que se obtienen del conjunto cociente[33] de todas las sucesiones fundamentales, es entonces inyectiva pero no biyectiva: cada racional da lugar a una sucesión (representante de la clase de equivalencia), pero no toda sucesión fundamental proviene de un racional.

Para ilustrar esta situación, piénsese en las sucesiones fundamentales $\{a_f\}$ que convergen a los racionales del conjunto A, y en las sucesiones $\{b_m\}$ del conjunto B, que representan todas las sucesiones fundamentales (racionales o no) que convergen a algún valor, ya sea racional o irracional. Esta relación se muestra de forma esquemática en la figura 7.

[33] En el conjunto cociente se agrupan todas las clases de equivalencias, de modo que se puede elegir un represente por cada clase, de donde se va a obtener no sólo los signos que corresponden a un racional sino también aquellos que conllevan a un irracional

Sin embargo, la verdadera elegancia del razonamiento cantoriano aparece en el siguiente paso: Cantor propone nuevamente tomar el conjunto de todas las sucesiones fundamentales, pero ahora definidas sobre B —esto es, sucesiones de sucesiones fundamentales. Al hacerlo, se encuentra con un hecho clave: toda sucesión fundamental construida a partir de elementos de B ya está representada en B.

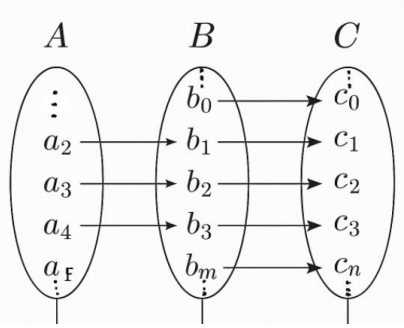


fig 7. Relación entre racionales y reales a partir de clases de equivalencia de sucesiones fundamentales

Esto implica que el nuevo dominio C, que surge al construir sucesiones sobre B, ya no extiende el dominio anterior: no se generan "nuevos" elementos. De este modo, la función entre B y C es biyectiva, por lo que sus elementos tienen una correspondencia biunívoca, lo que indica que se ha alcanzado un punto de clausura. No es posible seguir ampliando el sistema sin alterar su estructura fundamental.

Como lo resume Cantor, en palabras recogidas por (López, 2008, pág. 21):

> *Mientras que los sistemas* B *y* A *son tales que se puede igualar cada uno de los* a a *un* b *pero no cada uno de los* b a *un* a*, se puede dar, por el contrario, igualar no solamente cada uno de los* b *a un* c *sino también cada uno de los* c *a un* b (CAN72, p.76).

Este resultado establece que el dominio B, es decir, el sistema de los reales construido por Cantor es completo en sí mismo. No sólo amplía a los racionales, sino que no admite una ampliación adicional sin perder su naturaleza estructural. Esta construcción

culmina la definición de los números reales desde la perspectiva cantoriana, consolidando su cierre y completitud dentro del universo matemático.

1.3.6. Propiedades estructurales de los números reales

A continuación, se presentan presenta de forma transversal en formato tabular las propiedades fundamentales que permiten considerar al conjunto $\mathbb{R}$, construido a partir de sucesiones de Cauchy, como un cuerpo ordenado, arquimediano, continuo y completo. Este formato permite al lector apreciar de forma clara y concisa el papel que cada propiedad cumple dentro de la estructura matemática dada.

Tabla 5. Propiedades que hacen que $\mathbb{R}$ sea un cuerpo

Propiedad	**Descripción y verificación en $\mathbb{R}$**
Clausura	La suma y el producto de dos clases de sucesiones de Cauchy ($[(a_n)]$ y $[(b_n)]$) dan lugar a otra clase de sucesión de Cauchy, es decir, el conjunto $\mathbb{R}$ está cerrado bajo estas operaciones.
Conmutatividad	Como las operaciones se definen a partir de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es conmutativo, se hereda la propiedad: $[(a_n)] + [(b_n)] = [(b_n)] + [(a_n)]$, y $[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(b_n)] \cdot [(a_n)]$.
Asociatividad	Dado que en $\mathbb{Q}$ se cumple: $a_n + (b_n + c_n) = (a_n + b_n) + c_n$, entonces ello también se da para $\mathbb{R}$. De forma análoga se cumple para el producto.
Neutros	Neutro aditivo: la clase $[(0)]$, sucesión constante de ceros. Neutro multiplicativo: la clase $[(1)]$, sucesión constante de unos. Las sucesiones constantes garantizan la existencia de al menos una sucesión fundamental que hace las veces del elemento neutro tanto para suma como para el producto.
Inversos	Inverso aditivo: $[(a_n)] + [(-a_n)] = [(0)]$. Inverso multiplicativo: si $[(a_n)] \neq [(0)]$, existe $[(b_n)]$ donde $b_n = 1/a_n$ para $n \geq N$, tal que $[(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(1)]$.
Distributiva	$[(a_n)] \cdot ([(b_n)] + [(c_n)]) = [(a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n)]$ $= [(a_n \cdot b_n)] + [(a_n \cdot c_n)]$.

Como se puede apreciar las siguientes propiedades se pueden garantizar, por la naturaleza de las sucesiones de Cauchy y la forma en como Cantor definió las operaciones

entre estas, mostrando que los números reales cumplen con las condiciones que hoy en día usamos para corroborar que un conjunto puede ser considerado un cuerpo conmutativo.

Además de las propiedades algebraicas que hacen de $\mathbb{R}$ un cuerpo conmutativo, resulta crucial examinar otras propiedades que dotan al conjunto de los números reales de una estructura aún más robusta. En este sentido, las propiedades de orden, la propiedad arquimediana, la continuidad y la completitud son esenciales para comprender su papel central en el análisis matemático. Algunas de estas propiedades, como el orden total, ya han sido abordadas previamente en el proceso de construcción; sin embargo, aquí se sistematizan junto con otras que permiten caracterizar a $\mathbb{R}$ como un dominio numérico sin "huecos", perfectamente adecuado para el tratamiento riguroso de los conceptos de límite, convergencia y continuidad. A continuación, se presentan estas propiedades en una tabla para facilitar su comprensión.

Tabla 6. Otras propiedades fundamentales de los números reales de Cantor.

Propiedad		Justificación en $\mathbb{R}$
Ordenado		En $\mathbb{R}$ se define $[(a_n)] \leq [(b_n)]$ si $\exists N$ tal que $\forall n \geq N$, $a_n \leq b_n$. Esta relación cumple reflexividad, antisimetría, transitividad y totalidad. Se hereda del orden dado en $\mathbb{Q}$ y se conserva en las clases de equivalencia de sucesiones.
Arquimediano		Si $[(a_n)] > [(0)]$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot [(a_n)] > [(b_n)]$ para cualquier $[(b_n)] \in \mathbb{R}$. Esto impide la existencia de infinitesimales en $\mathbb{R}$. Se considera que tiene un mayor alcance que la propiedad de la densidad.[34]
Continuo		Si $\mathbb{R}$ se divide en dos subconjuntos A_1 y A_2 tales que $\forall x \in A_1, \forall y \in A_2$ se cumple $x < y$, entonces existe $[(a_n)] \in \mathbb{R}$ que representa el "punto de corte" que separa A_1 y A_2. Esta propiedad impide "saltos" y garantiza la conexión del conjunto.
Completo		Toda sucesión de Cauchy de clases $[(a_n)]$ en $\mathbb{R}$ converge a un número real dentro del mismo conjunto. $\mathbb{R}$ no necesita ser ampliado, ya que en él convergen todas las sucesiones de Cauchy de racionales.

[34] La propiedad arquimediana impide la existencia de infinitesimales en $\mathbb{R}$, en contraste con sistemas como los números hiperreales. Aunque se relaciona con la densidad de $\mathbb{R}$, esta propiedad va más allá, ya que garantiza la posibilidad de cualquier número dado pueda "alcanzar" a cualquier número real positivo multiplicado las veces suficientes.

Las construcciones de Dedekind y Cantor no son meros ejercicios formales o curiosidades históricas: representan verdaderas revoluciones en la concepción del número real. Ambas teorías no solo logran integrar a los irracionales dentro de un sistema numérico riguroso, sino que además consiguen resolver las tensiones que durante siglos separaron a la aritmética de la geometría, y a lo discreto de lo continuo. A través de enfoques distintos —pero complementarios— se dota al conjunto $\mathbb{R}$ de las propiedades necesarias para convertirse en la base del análisis matemático moderno: un cuerpo ordenado, arquimediano, continuo y completo.

No obstante, detrás de esta aparente equivalencia estructural subyacen diferencias profundas. ¿Qué entendieron Dedekind y Cantor por continuidad? ¿Qué papel juega en cada caso el principio de completitud? ¿Puede decirse que ambos conceptos refieren a una misma propiedad, o estamos ante nociones distintas que han sido unificadas desde la axiomatización posterior?

Estas son las preguntas que marcarán el rumbo del siguiente capítulo. A partir de este punto, el foco de la investigación se desplazará desde la construcción formal hacia el análisis conceptual. En ese terreno se abrirá paso el estudio histórico, epistemológico y comparativo de la continuidad y la completitud: los dos pilares más profundos —y quizás más enigmáticos— sobre los que descansa toda la estructura de los números reales.

Pero para esto, debemos remontarnos a la génesis histórica, al origen de estos dos conceptos, continuidad y completitud, de manera que se pueda conocer a profundidad la esencia y naturaleza de ellos, o por lo menos aprender a reinterpretarlos desde la perspectiva de Dedekind y Cantor.

Capítulo 2: Entre cortaduras y sucesiones: un análisis histórico, epistémico y comparativo de la continuidad y la completitud

Dedekind y Cantor fueron los primeros en hablar de la continuidad y la completitud… ¿cierto? Pues no exactamente. Es fácil caer en la tentación de pensar que estos dos gigantes del siglo XIX fueron los primeros en preguntarse por la naturaleza del continuo o en intentar "cerrar" el sistema de los racionales[35], lo cual es producto de que sus contribuciones se consideran rigurosamente más completas, pero hay evidencia de otros trabajos también interesantes que han sido objeto de estudio, abordan temas relacionados y que ayudan a la conformación de estos conceptos. Pero si algo nos enseña la historia de las matemáticas es que ningún concepto surge de la nada. De hecho, la pregunta por la continuidad —y su inquietante vínculo con lo incompleto, con lo inabarcable, con lo infinitamente denso o infinitamente pequeño— ha acompañado al pensamiento humano desde hace más de dos milenios, un ejemplo de eso es el libro *Física* de Aristóteles: "Llamo continuo a lo que es divisible en partes siempre divisibles." (Aristóteles, 1998).

¿Y qué hay de la completitud? ¿De la necesidad de llenar huecos, de no dejar cabos sueltos en los sistemas numéricos? ¿Acaso no es esa la misma inquietud que llevó a los griegos a desconfiar de $\sqrt{2}$ y a buscar fundamentos para la geometría? Incluso antes de que existiera el concepto moderno de número real, ya había matemáticos y *filósofos* preguntándose por las grietas invisibles de la recta, por las paradojas del infinito, por los límites que no se pueden tocar, aun cuando no contaban con las herramientas necesarias para formalizar conceptos como continuidad o completez, según (Caveing, 1984), su enfoque mostraba la dificultad que implicaba formalizar esta noción desde una perspectiva geométrica en una época donde las magnitudes inconmensurables aún representaban un problema.

Así que no, Dedekind y Cantor no llegaron primero; llegaron más bien tarde a una conversación que llevaba siglos abierta. Pero lo hicieron justo en el momento indicado ya que contaban con herramientas nuevas, o por lo menos con los elementos necesarios para

[35] Viendo en perspectiva seria extremadamente raro que, en casi 4800 años de civilización humana, nadie haya investigado o debatido acerca de estas cuestiones

crearlas, con una lógica más depurada y con un lenguaje capaz de hacer lo que los antiguos solo podían imaginar. Y eso sí: una vez que hablaron, el concepto de número real cambió para siempre. Antes del siglo XIX, la continuidad se entendía principalmente como una propiedad geométrica. Fue Dedekind quien introdujo un enfoque aritmético mediante las cortaduras, dando así una base lógica al continuo. (Bergé y Sessa., 2003)

2.1) Análisis histórico y epistémico

Se comienza con un recuento histórico que, sin caer en tecnicismos innecesarios. Se recuperará algunas de las intuiciones clave sobre el continuo y la completitud que preceden al siglo XIX. Veremos desfilar nombres como Euclides, Aristóteles, Stevin, Newton, Bolzano o Cauchy, no por mero deber historiográfico, sino porque comprender sus dificultades y avances nos da claves esenciales para entender el origen y sentido de las construcciones formales del número real que analizamos en el capítulo anterior.

Más aún, rescatar el carácter gradual, problemático e históricamente situado del conocimiento matemático es también una forma de pensar en su enseñanza. La idea de que los conceptos emergen para resolver tensiones, para cerrar vacíos, para hacer avanzar el pensamiento, debería estar en el centro del aula. Aunque ese análisis se abordará con mayor profundidad en el Capítulo 3.

2.1.1. Una mirada histórica hacia la Continuidad

Para rastrear las primeras manifestaciones de la noción de continuidad, es necesario remontarse al pensamiento griego clásico, en particular al trabajo de Aristóteles en el siglo IV a.C. En su obra *Física*, Aristóteles desarrolla una concepción filosófica del continuo estrechamente ligada a las magnitudes físicas como el tiempo, el espacio y el movimiento. Para él, lo continuo (*synechés*) es aquello que puede dividirse indefinidamente, sin que sus partes se separen completamente. Es decir, lo continuo no está compuesto de unidades discretas, sino que forma una totalidad fluida y conexa. Esta noción emerge de una

reflexión ontológica más que matemática, donde la continuidad se asocia con una propiedad inherente al mundo físico y no con una construcción formal.

Una de las frases más célebres con las que Aristóteles ilustra su concepción es la siguiente: “Llamo continuo a lo que es divisible en partes siempre divisibles” (*Física*, 1998). Esta idea ha sido históricamente interpretada como una forma primitiva de la noción moderna de densidad. No obstante, estudios recientes como el de Arbeláez y Gálvez (2011) afirman que esta lectura es incorrecta. Según estos autores, Aristóteles no define la continuidad en términos de la densidad, sino que considera la densidad como una propiedad derivada de lo continuo, subordinada a su carácter indivisible en la totalidad.[36]

Esta concepción aristotélica influenció profundamente en el pensamiento griego posterior, como, por ejemplo, en la obra de Euclides. En el libro I de *Los Elementos*, Euclides postula que una línea recta puede prolongarse indefinidamente, lo cual implica una noción de continuidad espacial implícita. Sin embargo, Euclides no ofrece una definición rigurosa del continuo, sino que lo trata como un supuesto intuitivo y geométrico, reflejando la tradición de su época en la que lo continuo y lo discreto eran dominios diferenciados.[37]

Durante siglos, el concepto de continuidad se mantuvo dentro de esta visión geométrica e intuitiva. Es solo hasta el Renacimiento cuando empiezan a surgir aportes que desafían esta separación entre lo continuo y lo discreto. Pues bien, Rafael Bombelli, en el siglo XVI, al explorar las raíces de ecuaciones cúbicas, propone una visión más amplia del número que sugiere una continuidad aritmética, al usar el formalmente la idea de que una cantidad puede variar en un segmento dado, tomando todos los valores hasta el infinito, dando una idea intuitiva de la continuidad. Poco después, Simón Stevin defiende que los irracionales deben ser considerados números verdaderos, abogando por una continuidad del sistema numérico en sí, y no solo de las magnitudes geométricas.[38]

---

[36] En otras palabras, en la continuidad se encuentra atrapada la esencia de la densidad. Por lo tanto, si se afirma que algo es continuo, podemos dar cuenta de que cumple con la propiedad de la densidad

[37] En efecto, en el libro de los Elementos se ve claramente la distinción que se hace entre el estudio de la aritmética y el de la geometría, donde el número y la magnitud son los elementos esenciales de cada una de estas áreas del conocimiento respectivamente, los cuales a su vez son considerados prototipos de lo discreto (número) y lo continuo (magnitud).

[38] Esto porque para ese entonces se consideraba que el numero era una cantidad discontinua.

El gran salto ocurre con la llegada del cálculo infinitesimal. Newton, a finales del siglo XVII, concibe la continuidad como una propiedad esencial del movimiento, aunque sin definirla formalmente. Para él, el cambio continuo es el fundamento de las derivadas[39] y de las integrales. Sin embargo, su lenguaje sigue siendo geométrico y sus definiciones dependen de intuiciones ligadas al tiempo y al espacio.

Ya en el siglo XIX, se inicia un proceso de formalización del análisis matemático, en el cual la continuidad adquiere un nuevo estatus: ya no como intuición sino como propiedad definida rigurosamente. Bolzano, por ejemplo, propone una definición de continuidad de funciones que anticipa conceptos fundamentales del análisis moderno. En su definición auxiliar del teorema del valor intermedio, teorema que Bergé y Sessa (2003) explican de esta forma:

> *El teorema del valor medio afirma que si una función continua es tal que en un cierto intervalo* $[a, b]$ *se tiene sg*[40] $f(a) \neq sg\ f(b)$*, entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*. Esta es una propiedad que, como hemos visto, ha sido utilizada en siglos anteriores sin ser enunciada explícitamente (p.27).*

Este teorema fue un gran avance en la construcción de este concepto, sin embargo, este teorema aún se apoyaba en el marco geométrico, por lo que Bolzano da una *definición auxiliar* al teorema del valor medio. Lo cual lleva a considerar nociones como; la existencia de un supremo dentro de un conjunto de números, acercándose a lo que *más tarde* se conocerá como el principio de completitud. Sin embargo, su formulación carecía del rigor que se exigiría posteriormente, ya que dependía de la convergencia de sucesiones, es decir se presuponía que toda sucesión de números racionales converge a otro racional, sin demostrarlo rigurosamente.

Cauchy, por su parte, retoma el trabajo de Bolzano y ofrece una versión más sistemática. En su *Curso de Análisis* de 1821, Cauchy define continuidad de una función en términos de la convergencia de sucesiones y desarrolla procedimientos que, aunque técnicamente más sólidos, aún presuponen ciertas propiedades del conjunto de los reales

[39] Recordemos una de las definiciones de la derivada: es la razón de **cambio** instantánea
[40] Sg, es una abreviatura usada por los autores para referirse al signo de la función.

que en ese entonces no estaban formalmente justificadas. Este conjunto, tal como se conocía, no tenía garantizado su completitud ni una definición alejada de nociones geométricas.

Así, el siglo XIX se convierte en el escenario de un tránsito histórico: de la continuidad como intuición espacial a la continuidad como propiedad definible desde una estructura numérica rigurosa. En este punto es donde aparecen Dedekind y Cantor, quienes redefinen el concepto de continuo dentro de marcos formales distintos —el aritmético en Dedekind y el analítico en Cantor—, pero con el objetivo común de otorgarle a la continuidad un lugar legítimo dentro del edificio axiomático de las matemáticas. Está idea se retoma líneas más adelante, pues primero es preciso presentar algunas de las ideas que circulan alrededor de la noción de completez y que se estudian en el siguiente apartado.

2.1.2. Un viaje histórico hacia el concepto de Completez

A diferencia del concepto de continuidad, el principio de completitud emergió históricamente de forma más implícita, ligado al problema de garantizar la existencia de ciertos números —especialmente los irracionales— dentro del sistema numérico. Aunque no se enunciaba como un axioma o una propiedad estructural del conjunto de los números, la necesidad de referirse a la completitud se dejaba ver en diversas demostraciones que requerían la existencia de soluciones no racionales.

Uno de los primeros registros de esta necesidad aparece en el trabajo de Gerolamo Cardano durante el siglo XVI. Al resolver ecuaciones cúbicas, Cardano se topó con raíces que no podían expresarse mediante números racionales o enteros, lo que lo llevó a admitir la existencia de números “no exactos” como soluciones válidas. Aunque en su tiempo no se hablaba del conjunto de los reales, la idea de que existían “números” más allá de los racionales ya estaba implícita. Esta intuición anticipa la necesidad de un principio que

asegure que, para cada operación algebraica con sentido, debe existir un resultado numérico dentro del sistema considerado.[41]

Aparte de Cardano el italiano Rafael Bombelli llegó a usar esta idea o intuición de pensarse la existencia de infinitos números que hasta el momento eran desconocidos, en sus trabajos en matemáticas propuso la idea de que la longitud de un segmento puede variar desde 0 hasta infinito tomando **todos** los valores[42], hoy en día sabemos que esto solo se podría en un sistema numérico completo. Según (Bergé y Sessa., 2003) después de estas dos grandes contribuciones los demás matemáticos empezaron a usar esta intuición para sus propias construcciones, como es el caso de Viète y Bombelli también usaron este principio.

Ya en el siglo XIX, la necesidad de una teoría más sólida se hizo evidente. Es aquí donde nuevamente aparecen figuras como Bolzano y Cauchy, esta vez desempeñando un papel crucial en el desarrollo del concepto de completitud.

Bolzano, como ya se mencionó, introduce una versión primitiva del axioma de completitud al trabajar el teorema del valor intermedio. En su formulación auxiliar:

> Sea M una propiedad que no se cumple para un cierto valor, pero que se cumple para todos aquellos menores que algún u. Es posible entonces encontrar un valor U que es el mayor de los v que cumplen con la propiedad de que M se cumple para todos los que son menores que v (Jarník, 1981, p.36).

Esta proposición asume la existencia de un supremo (o ínfimo) para un conjunto acotado, lo cual es el corazón mismo del principio de completitud. Sin embargo, como señalan Jarník (1981) y Bergé y Sessa (2003), esta demostración recae sobre la noción de convergencia de sucesiones, un concepto que Bolzano aún no había definido rigurosamente. Por ende, aunque su formulación apunta en la dirección correcta, no puede considerarse formalmente válida.

---

[41] Se empieza a considerar la existencia de un sistema numérico cuyas operaciones y relaciones vivan en el mismo sistema, el conjunto no debe requerir elementos externos, sino que todo debe validarse dentro de su dominio.

[42] Si se quiere profundizar en este apartado se recomienda revisar el ejemplo propuesto por Bergé y Sessa

En su *Curso de Análisi*s de 1821, Cauchy muestra por medio de una función continua el principio de completez. Él empieza con una función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $[A, B]$ donde $f(A) < f(B)$. Después procede a dividir el intervalo dado en m partes con $m > 1$. Construyendo la sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, .., a_n$ y $b_1, b_2, b_3, b_4, .., b_n$ de números racionales, donde cada sucesión tiene su respectiva sucesión en las ordenadas, esto es $f(a_i)$ y $f(b_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$ con $i \in \mathbb{N}$. Teniendo así dos sucesiones distintas, una creciente a_n y otra decreciente b_n. Cauchy afirma que estas dos sucesiones convergen en un número c.

En este orden de ideas, se podría pensar en términos modernos el principio de completez de Cauchy de esta forma, él afirma que: $\lim_{n\to\infty} x_n$ existe si y solo si $\{x_n\}$ es una sucesión fundamental o sucesión de Cauchy. En términos simples, en una sucesión fundamental, los términos se van "ajustando" entre sí a medida que la sucesión avanza, mostrando que la distancia entre ellos tiende a cero conformes crecen los índices de la sucesión. Esta afirmación a priori no presenta problemas, sin embargo, la implicación recíproca (toda sucesión fundamental converge a un número), Cauchy la presuponía como un principio evidente, y la utilizaba para diversas demostraciones. En otras palabras, Cauchy se sostenía bajo el supuesto de que ese universo de variación numérica era un espacio completo, sin embargo, no hay una demostración que sustente este presupuesto, lo que crea un vacío conceptual importante. Esto hizo que esta demostración también carezca de rigor matemático.

En respuesta a este vacío conceptual, y otros que se evidenciaban en el trabajo con los teoremas del cálculo, Dedekind y Cantor desarrollan unas teorías que buscan definir de forma satisfactoria y rigurosa el conjunto numérico de los reales, donde aparece de forma inevitable el principio de completitud, del cual se suele decir que Dedekind fue uno de los más grandes exponentes en cuanto a su construcción histórica.[43]

Cauchy y Bolzano fueron referentes importantísimos en la historia de la formalización de los números reales, sus construcciones marcaron la pauta que después se

[43] Según Bergé y Sessa (2003) antes del siglo 60 la mayoría de los autores hacían construcciones como la mostrada por Dedekind, pero no tenían el rigor que Dedekind incluyo en su presentación

encargarían de pulir los matemáticos posteriores[44], sus construcciones, aunque con fallas de rigor dieron una forma más aritmética de entender conceptos como la continuidad, por esta razón son el referente más pronunciado cuando se piensa en los autores que fueron pioneros en la construcción de la continuidad y la completez.

Lo que Cauchy y Bolzano tienen en común es su dependencia implícita de una propiedad que aún no tenía nombre: la completitud del sistema numérico. Este principio, en su formulación moderna, afirma que todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene un supremo en $\mathbb{R}$. Ni Bolzano ni Cauchy lograron demostrar formalmente este hecho, pero sus desarrollos —especialmente en análisis infinitesimal— señalaron claramente la necesidad de un sistema numérico que lo cumpliera.

Dicho, en otros términos, tanto Bolzano como Cauchy imaginaron —y utilizaron— un espacio matemático que aún no existía formalmente. Este espacio sería más adelante el conjunto de los números reales, cuya construcción rigurosa solo se lograría con las teorías de Dedekind y Cantor. En ese sentido, sus aportes representan un punto de inflexión histórico: al mismo tiempo que evidencian el límite de los métodos clásicos, anuncian el nacimiento de un nuevo paradigma.

En conclusión, se evidencia que, si bien la continuidad y la completitud han sido conceptos trabajados, explícita o implícitamente, a lo largo de la historia, su revisión muestra una serie de vacíos conceptuales que no se esclarecen sino hasta la formalización de los números reales, y que evidencia la importancia de hacer un análisis como este. Esta revisión se puede mostrar de forma esquemática en la línea de tiempo que cree, donde se ven los aportes más relevantes en cada siglo y se muestra en la figura 8.[45]

[44] Un caso directo es Cauchy para cantor

[45] Es realmente interesante el salto de tiempo entre el siglo III A.C y XVI D.C. Está catalogado como un periodo donde no se documentaron aportes relevantes en torno a la continuidad y la completez

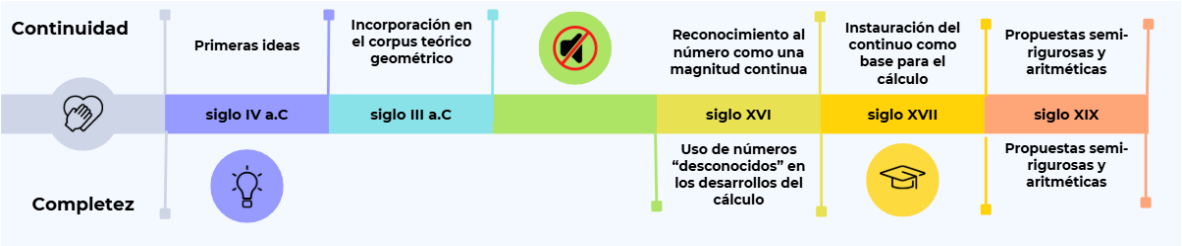


fig 8. Autores previos

En resumen, los autores mencionados en este apartado dan una idea de lo que vendría a consolidarse siglos más adelante, donde es importante destacar la brecha que se presenta en torno a estos conceptos; en efecto, es particularmente curioso que en un periodo de aproximadamente diecinueve siglos no se hayan dado avances o construcciones significativas entorno a la conceptualización y caracterización del concepto de continuidad o completitud, lo cual puede atribuirse a la falta de rigor que emerge del sistema numérico que se tenía hasta ese momento, pues sin lugar a dudas los números reales son el prototipo más claro de lo que es continuo y completo, razón por la cual los conceptos de continuidad y completitud no pueden estudiarse de forma aislada a la formalización del número real.

2.1.3. Algunas consideraciones filosóficas alrededor de la formalización del número real dada por Dedekind y Cantor

Con lo visto anteriormente se puede observar que, a lo largo de la historia, la matemática ha oscilado entre dos grandes polos filosóficos: el empirismo geométrico, ligado a la experiencia espacial y sensible (como en los griegos o Newton), y el formalismo lógico, orientado hacia la abstracción simbólica y la estructura interna de los sistemas. La segunda mitad del siglo XIX marca una inflexión decisiva en esta tensión, y en el centro de esta transformación se encuentran Richard Dedekind y Georg Cantor.

Ambos autores compartían la preocupación por dotar de rigor lógico a las matemáticas, alejándose de las intuiciones geométricas tradicionales. Sin embargo, lo

hicieron desde posturas profundamente distintas, tanto en el plano epistemológico como ontológico.

En el caso de Dedekind, concebía la matemática como una construcción puramente lógica del pensamiento humano. En su célebre obra (Stetigkeit und irrationale Zahlen) Dedekind afirma "En mi opinión, los números no son cosas que existen independientemente de nosotros, sino creaciones de nuestro espíritu." (Dedekind, 1872)

Esta declaración no es meramente retórica: expresa un compromiso claro con una filosofía idealista del número. Para Dedekind, los números no se descubren en la naturaleza ni emergen de la experiencia, sino que son productos del pensamiento puro, generados mediante definiciones precisas, operaciones abstractas y relaciones formales. De ahí su insistencia en una construcción *aritmética* y no geométrica del número real.[46]

Esta concepción se ve reforzada en su obra "*¿Was sind und was sollen die Zahlen?"* (Dedekind, 1963) donde argumenta que incluso los números naturales pueden definirse en términos de lógica y teoría de conjuntos, esto quiere decir que para Dedekind las creaciones deben basarse en reglas formales y lógicas, siendo desprovistas de toda subjetividad, buscando la abstracción y la generalidad. Esta postura lo convierte en uno de los precursores del logicismo, corriente que influiría en autores cómo Frege y Russell.

En lo que respecta al continuo su visión se mantiene, de allí que Dedekind lo concibe como una estructura que debe definirse a partir de un principio lógico: su propiedad de las cortaduras (propiedad IV), la cual no es simplemente una observación geométrica sino una condición fundacional del sistema numérico.

En contraste con la visión de Dedekind, Cantor adoptó por una postura más ontológica, aunque no menos audaz. Para él, los números —especialmente los infinitos— sí tienen existencia objetiva dentro del universo matemático. En múltiples cartas y escritos, Cantor insiste en que el infinito no es una mera herramienta de cálculo, ni una noción potencial, sino una realidad matemática efectiva. "El ser del número está determinado por su ser pensado" (Cantor, carta a Dedekind) (Ferreirós, 1999)

[46] Esto según sus propias palabras, aun así, se reconoce que en la construcción de Dedekind también se encuentran involucrados conceptos conjuntistas.

Aunque esta frase parece coincidir con la perspectiva de Dedekind, en Cantor la implicación es otra: el acto de pensamiento descubre lo que ya está ahí, en un universo matemático independiente de la mente humana. De ahí que Cantor defienda con fervor la existencia de números transfinitos, y postule una jerarquía de infinitos que puede ser comparada, ordenada y clasificada según su cardinalidad.

Su enfoque es eminentemente *conjuntista*: los números, finitos o infinitos, son entendidos como clases de equivalencia o colecciones bien definidas. Esta postura, aunque criticada por muchos contemporáneos (como Kronecker), permitió el surgimiento de una nueva rama de la matemática: la teoría de conjuntos, la cual redefiniría por completo el paisaje del análisis moderno.

Esta visión se ve en sus trabajos, debido a que Cantor llega a la completez y a la continuidad como un resultado de la ampliación del nuevo dominio que él descubre, no los asume ni los demuestra en un sentido estricto, salen como un resultado "natural".

Tanto Dedekind como Cantor usan nociones de conjunto en sus construcciones; empero, Cantor se distingue por convertir la teoría de conjuntos en un programa fundacional, mientras que Dedekind enfatiza una fundamentación aritmético-ordenada (las cortaduras) aunque formalizada mediante subconjuntos.

2.2) Análisis comparativo entre los conceptos continuidad y completez

Gracias a todo el análisis previo, podemos embarcarnos de lleno en el análisis comparativo[47] que se viene avistando desde el capítulo 1, se optó por usar un enfoque naturalista, como lo expone (Camargo, 2021). Debido a que se pretende hacer una descripción fiel de los aportes históricos asociados a la construcción del concepto de continuidad y de completitud. Dentro de las estrategias naturalistas, se buscará implementar la "Estrategia investigativa: revisión documental", centrándose particularmente en las construcciones de los números reales realizadas por Dedekind y Cantor.

[47] Para este trabajo el análisis comparativo considerará tanto el plano definicional como la función que cada concepto cumple dentro de la estructura formal construida por cada autor.

Para esto se sistematiza el análisis en cuatro fases importante, La figura 9 resume de manera esquemática las cuatro fases del análisis, mostrando cómo se avanza desde las definiciones individuales hasta la comparación profunda de las correlaciones internas que cada autor establece entre continuidad y completitud, fases con las cuales se pretende abordar el análisis desde todos los enfoques posibles.

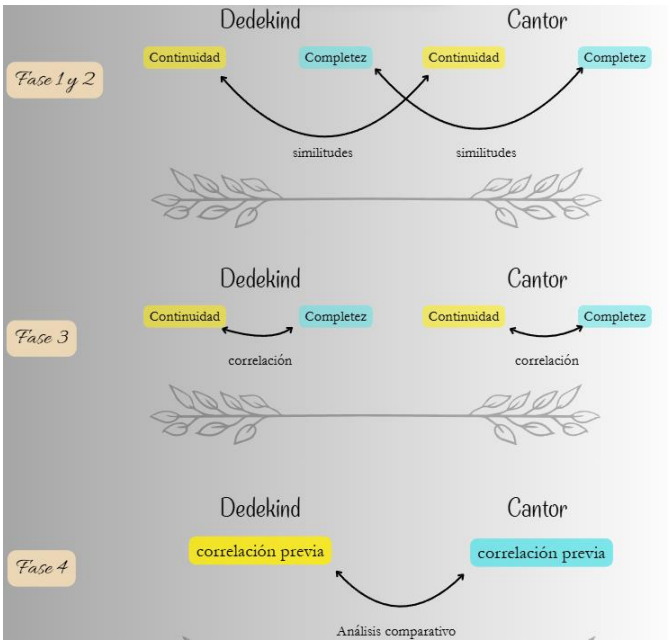


fig 9. Fases del análisis comparativo

Este análisis comparativo no solo pretende establecer diferencias y/o similitudes formales entre los autores, sino dilucidar si comparten o no una misma noción conceptual de continuidad y completitud, lo cual resulta clave para responder a la pregunta que moviliza esta investigación.

La primera fase corresponde a la fase de caracterización. En esta fase se busca ampliar rigurosamente las ideas previamente planteadas cuando describí *grosso modo* como Dedekind y Cantor concebían la completez y la continuidad.

La segunda está enfocada en las similitudes entre definiciones, lo que busca es encontrar los puntos de intersección entre las definiciones y/o concepciones que los dos autores tienen de la continuidad y de la completez

La tercera fase o fase de correlación, se enfoca en analizar la correlación entre continuidad y completez para Dedekind y Cantor, con el fin de entender como estos dos autores trabajan conjuntamente estos dos conceptos, de modo que se puedan sacar conclusiones relevantes que sean de ayuda para responder la pregunta problema que atañe a esta investigación.

La última fase o fase de análisis, busca comparar, confrontar y reflexionar sobre las dos correlaciones previas, queriendo precisar los datos o supuestos de las fases anteriores, llegando así a la culminación del análisis.

2.2.1) Primera y segunda fase: caracterización y similitudes

Con el objetivo de mostrar los análisis de la forma más concisa y clara posible, se consideró conveniente presentar al mismo tiempo la primera y segunda fase. Reconociendo que en esta unidad temática se hacen dos procesos distintos: identificación y comparación. Se inicia con el análisis de la continuidad, primero desde la perspectiva de Dedekind y segundo desde la de Cantor, para luego analizar la completez en el mismo orden enunciado para la continuidad.

Al hablar de continuidad es preciso iniciar por la definición que da Dedekind de este concepto. Para él la continuidad es:

> *Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes (Dedekind, 1998, p. 150).*

Tenemos que entender el marco teórico en el que Dedekind expresa estas palabras. Desde una mirada estructural, la continuidad en Dedekind se presenta como una propiedad constitutiva del sistema de los números reales, introducida desde el análisis de las cortaduras. Aunque en el capítulo anterior se exploró con detalle su construcción, interesa aquí indagar qué entendía realmente Dedekind por continuidad y cuál era su papel en la

fundamentación de los números reales; pues bien, si el lector se queda sólo con las palabras textuales dadas en la definición que acabo de presentar, podríamos pensar que la continuidad es una propiedad netamente geométrica, que dice que; para una colección de puntos colineales siempre existirá un punto que divida esa colección en dos ¿será esta interpretación acertada?

Para Dedekind, la continuidad no es simplemente una consecuencia técnica de una construcción, sino una exigencia lógica. Así lo muestra su famosa propiedad IV, conocida posteriormente como el axioma de Dedekind: si el conjunto de los números se divide en dos clases A_1 y A_2, tales que todo elemento de A_1 es menor que todo elemento de A_2, entonces debe existir un único número que determine dicha división. En esta formulación se condensa la esencia del continuo como estructura sin "interrupciones": cada corte real debe corresponder a un número del sistema.

Lo importante de esta concepción es que no se limita a describir el comportamiento de los números, sino que lo define. Dedekind no prueba la continuidad de los reales[48]: la *impone* como condición necesaria para el sistema que está construyendo. No se trata entonces de observar que "no hay huecos", sino de construir un sistema numérico en el cual, por definición, no puedan existir huecos. En este sentido, la continuidad es un criterio fundacional, no una propiedad derivada. Esta postura lo aleja de sus antecesores, que entendían el continuo desde la intuición geométrica, y lo acerca a una visión más formalista, aunque todavía impregnada de intuiciones algebraicas.

A diferencia de Dedekind, cuya concepción de continuidad está arraigada en la aritmética del orden y las propiedades de las cortaduras, Cantor elabora su definición desde una perspectiva conjuntista y *topológica* (Téllez Sánchez, 2022)**[49]**. En su obra, define

[48] A pesar de que en su libro Dedekind dice dar una demostración de esta propiedad esta demostración presupone la misma continuidad, por lo que muchos autores incluyéndome, toman a esta propiedad como una propiedad postulada, mas no demostrada en estricto sentido.

[49] La definición cantoriana de continuidad se enmarca en una incipiente visión topológica, ya que describe al continuo como un conjunto **perfecto** (cerrado y sin puntos aislados) y **conexo**, lo cual anticipa conceptos propios de la topología moderna. Aunque Cantor no usó este lenguaje formal, su noción de continuo ya implicaba propiedades estructurales del espacio que luego serían formalizadas con herramientas topológicas. En particular, su idea de "conjunto perfecto-conexo" aparece explícitamente en sus escritos de 1884 y 1885 como criterio definitorio del continuo.

formalmente el continuo de la siguiente forma: “Creo pues descubrir en estos dos predicados, «perfecto» y «conexo», las características necesarias y suficientes de un continuo de puntos, y por lo tanto defino un continuo de puntos en el interior de G_n como un conjunto perfecto-conexo.” (Gómez & Ferreirós, 2006, pág. 122) Esta formulación reorienta la discusión hacia las propiedades estructurales del conjunto de puntos de la recta.

Un conjunto es **perfecto** si todos sus puntos son puntos de acumulación, es decir, si alrededor de cada punto del conjunto existen infinitos puntos del mismo conjunto arbitrariamente cercanos. No hay puntos aislados. Por otro lado, es **conexo** si no puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos, abiertos y no vacíos; en términos sencillos, no admite divisiones internas que rompan su unidad.

Desde esta óptica, la continuidad ya no se deduce de una condición sobre cortes o límites, sino que se caracteriza intrínsecamente por las propiedades del conjunto que lo constituye. Para Cantor, entonces, la continuidad de la recta real no reside en el orden o la completitud algebraica, sino en la estructura del conjunto de puntos que la conforman. Esto significa que, para ser continuo, el conjunto debe ser indivisible (conexo) y sin “saltos” ni puntos solitarios (perfecto).

Esta concepción está íntimamente ligada a su trabajo sobre los números reales construidos como clases de equivalencia de sucesiones fundamentales. Estas clases generan un conjunto cerrado y denso que, según Cantor, es numéricamente equipotente con el conjunto de puntos de una línea continua, es decir, tienen la misma cardinalidad ($\aleph_1$[50] bajo la hipótesis del continuo[51]). No obstante, esta coincidencia cardinal no es lo que define el

---

La idea moderna de continuo en topología no se deriva exclusivamente del principio cantoriano, pero sí recibió de él una influencia estructural decisiva. Al concebir el continuo como un conjunto perfecto y conexo, Cantor aportó una caracterización que sería más tarde integrada, refinada y generalizada en la topología del siglo XX.

[50] Que es el número cardinal infinito que sigue a aleph-cero

[51] La HC afirma que: “No existe ningún conjunto cuya potencia esté entre la potencia del conjunto de los enteros naturales y la del continuo.” — *Cantor, en cartas y publicaciones de la década de 1870–1880.*

La HC es una de las conjeturas más famosas y enigmáticas de la teoría de conjuntos tanto que ni el mismo cantor logro demostrarla o desmentirla, y se cuenta que llego a entrar en depresión en parte por esto, sin embargo, no es un elemento relevante para el presente trabajo, debido a que no está directamente implicado en la pregunta problema que moviliza esta investigación.

continuo, sino sus propiedades topológicas: la continuidad no es una cuestión de cantidad, sino de estructura.

En este contexto, los números reales construidos por Cantor, una vez identificados con el conjunto B (sucesiones fundamentales de racionales), no solo forman un conjunto cerrado bajo operaciones algebraicas, sino que también constituyen un conjunto perfecto-conexo, completando así la construcción del continuo. Esto marca una diferencia sustancial respecto a Dedekind. Para Cantor, el continuo no es una condición sobre la relación de orden en $\mathbb{R}$, sino una propiedad emergente de la estructura del conjunto en su totalidad.

Aunque Dedekind y Cantor construyen la noción de continuidad desde marcos teóricos profundamente distintos —el primero desde la aritmética del orden y el segundo desde la teoría de conjuntos—, se pueden identificar algunas similitudes estructurales que permiten establecer puentes entre ambas concepciones.

Una primera similitud radica en que ambos consideran la continuidad como una propiedad del conjunto $\mathbb{R}$, es decir, como algo que caracteriza globalmente a los números reales y no como una propiedad local o de elementos individuales. Para Dedekind, esto se evidencia en su famoso teorema: *"Si todos los puntos de la recta se dividen en dos clases... entonces existe un y solo un punto que determina la división"*, lo que implica que $\mathbb{R}$ **no** tiene cortes "vacíos". Por su parte, Cantor concibe $\mathbb{R}$ como el conjunto perfecto-conexo por excelencia: todo punto es de acumulación y no existen separaciones internas, lo que también implica la ausencia de "huecos".

Una segunda convergencia importante se da en el hecho de que ambos entienden la continuidad como una propiedad que se opone a la fragmentación o discontinuidad. En Dedekind, esto se expresa en la necesidad de postular que a cada corte corresponde un número real (completitud en términos de orden). En Cantor, se da al demostrar que el conjunto de los reales construidos a partir de sucesiones fundamentales forma un todo cerrado y sin puntos aislados. En ambos casos, la noción de continuidad opera como una forma de consolidar la estructura del sistema numérico, cerrando posibles fisuras lógicas o topológicas.

Además, aunque Dedekind formula su continuidad en términos de cortaduras y Cantor en términos topológicos, ambos recurren a una especie de **"principio de completitud"** para sostener la idea de continuidad. Para Dedekind, la continuidad está garantizada porque *no hay cortes sin número*. Para Cantor, la continuidad está asegurada por la condición de perfección: *todo punto es límite de otros puntos*, lo que se traduce en una forma distinta —pero complementaria— de cubrir el espacio sin saltos.

Finalmente, otra similitud estructural es que ambos autores consideran su definición de continuidad como *una propiedad definitoria* del sistema de los números reales, y no simplemente como una característica adicional. Para Dedekind, la continuidad es "lo que hace" a la recta real ser lo que es, y para Cantor, el continuo se define precisamente como aquel conjunto perfecto y conexo que representa la línea real. En ambos casos, continuidad y $\mathbb{R}$ son conceptos íntimamente ligados, casi inseparables.

No obstante, conviene señalar que Cantor no consideraba que la definición de continuidad dada por Dedekind fuese del todo suficiente. En una carta dirigida a Dedekind, el propio Cantor expresó: "Me parece igualmente que en el escrito del señor (*Continuidad irracionales*) sólo se destaca unilateralmente *otra* de las propiedades del continuo, a saber, aquella que tiene en común con *todos* los «perfectos»" (Gómez & Ferreirós, 2006, pág. 122). Por supuesto Dedekind respondió a esta carta, diciendo que la objeción no tenía cabida debido a que, aunque él pone énfasis en la propiedad IV, se debe tener en cuenta la propiedad I y II las cuales de una u otra forma, dan cuenta de todo el espectro de la continuidad, lo que Cantor acepto y reafirmo en otra de sus cartas.

Este comentario subraya que, aunque las construcciones de ambos autores comparten un mismo objetivo (el de ampliar $\mathbb{Q}$ para obtener $\mathbb{R}$) y toman como verdadera la construcción del otro, sus fundamentos conceptuales son diferentes. Para Cantor, el continuo no puede definirse sólo desde el orden o las particiones, sino que requiere una estructura topológica más rica. Mientras que la definición de Dedekind solo puede aplicarse en el caso de ordenes totales

Por otro lado, en lo que respecta a la completez**,** Dedekind tiene a la completitud como algo a lo cual llegar, no como un teorema o postulado, o propiedad que demostrar. De hecho, su idea de número real se construye justamente para *llenar* los huecos de $\mathbb{Q}$, cómo se

mostró en el capítulo 1, siendo el principio que lo permite el que más tarde sería canonizado como axioma de completitud: *"Toda partición del conjunto de los racionales en dos clases no vacías, tal que cada elemento de una clase sea menor que cualquier elemento de la otra, está determinada por un único número real"*.

Esta propiedad —conocida también como la *propiedad IV* de Dedekind— no es simplemente una consecuencia de su construcción, sino su punto de partida. A través de ella, Dedekind justifica la necesidad de "completar" el sistema de los racionales, donde se puede afirmar que sin esa propiedad el sistema es incompleto y no puede representar correctamente fenómenos y/o aspectos geométricos ni analíticos.

Para Dedekind, entonces, un sistema numérico continuo y riguroso debe garantizar que todo corte admita un valor que lo determine, ya sea un racional o un irracional. Esa es en esencia la completitud: la idea de que no hay divisiones sin un elemento que las justifique internamente. Esto implica, por ejemplo, que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente debe tener supremo, aunque Dedekind no lo formuló exactamente así, sino a través de su lenguaje de particiones.

Es importante destacar que en Dedekind esta propiedad aparece al mismo tiempo como una condición estructural que sustenta a la definición del número real, algo a lo cual llegar o ratificar. A diferencia del enfoque moderno que asume la completitud como un axioma explícito, Dedekind no la postula ni la demuestra en sentido formal. En cambio, construye un sistema en el cual toda cortadura de racionales determina un número real. Esta propiedad, cumple de hecho la función que más tarde se identificará como el axioma de completitud.

En el caso de Cantor, la completez la aborda de forma distinta. Él no parte de una propiedad lógica o estructural para definir los reales, sino que construye el conjunto $\mathbb{R}$ desde las sucesiones fundamentales de racionales; es decir, desde las sucesiones de Cauchy, y posteriormente descubre que ese conjunto es completo. Es decir, la completitud no es su punto de partida, sino una propiedad emergente que surge de la estructura que ha definido.

Cantor no se limita a declarar esta propiedad, sino que la demuestra a través de un argumento recursivo y de forma muy elegante, que vimos en el capítulo anterior. Pues bien,

a partir del conjunto de todas las sucesiones fundamentales, define una clase de equivalencia (cada clase representa un número real). Luego, muestra que no es posible continuar el proceso más allá de este conjunto sin caer en redundancias. En otras palabras, toda sucesión fundamental de sucesiones fundamentales está representada ya por algún elemento del mismo conjunto, lo cual es dado por la correspondencia biunívoca que se empieza a evidenciar desde cierto punto en adelante, lo que indica que $\mathbb{R}$ es cerrado bajo su propio criterio de construcción.

Este *principio de clausura* es lo que le permite a Cantor afirmar que el sistema $\mathbb{R}$ es completo, aunque tampoco lo exprese con esa terminología formal moderna. Su argumento es más estructural y conjuntista, y se aleja del enfoque lógico-particional de Dedekind. Para Cantor, la completitud significa que ya no es necesario —ni posible— extender más el sistema numérico sin romper su naturaleza interna.

Además, para Cantor, esta completitud se vincula de manera profunda con la noción de límite. Al trabajar con sucesiones de Cauchy, está implícito que toda sucesión fundamental converge en el sistema que está construyendo, lo cual es precisamente la definición moderna del espacio completo en el análisis funcional.

Aunque Dedekind y Cantor desarrollaron construcciones radicalmente distintas de los números reales, ambas teorías comparten un mismo objetivo epistémico: completar el sistema racional. Esta necesidad emerge de una misma verificación: los racionales no son suficientes para abarcar todos los fenómenos y/o aspectos del análisis matemático, pues presentan “huecos” que impiden la formulación rigurosa de ciertos teoremas, límites y funciones.

Ambos autores coinciden en que ese “completar” no es solo una extensión cuantitativa, sino una transformación estructural del sistema. En Dedekind, se resuelve mediante las cortaduras, en Cantor, mediante las clases de equivalencia de sucesiones fundamentales. Pero en ambos casos, el resultado es el mismo: todo conjunto no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$ tiene un supremo. Es decir, se logra la completitud.

Otra coincidencia esencial es que, tanto para Dedekind como para Cantor, la completitud no es un añadido externo al sistema real, sino una propiedad inherente a su

construcción. En palabras actuales: no construyen $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$ y luego prueban que es completo, sino que $\mathbb{R}$ se define de tal manera que ya es completo por construcción. Esta idea se vuelve más evidente cuando se observa cómo ambos autores entienden el significado de los irracionales. Para Dedekind, un número irracional es la entidad que "completa" una cortadura que no corresponde a ningún racional. Para Cantor, es la clase de todas las sucesiones de racionales que tienden al mismo límite no racional. En ambos casos, el número real irracional es el objeto que cierra una brecha existente en $\mathbb{Q}$.

Además, ambas teorías descansan sobre una noción de orden compatible con $\mathbb{Q}$, lo que asegura que la completitud no destruye la estructura previa, sino que la expande respetuosamente. Esta conservación de la estructura de orden es clave para que el nuevo sistema pueda sostener el análisis.

Por último, aunque ninguno de los dos autores enuncia lo que hoy llamamos "axioma de completitud" en su forma moderna, ambos lo encarnan en sus construcciones. En Dedekind, es la famosa Propiedad IV; en Cantor, es la idea de que toda sucesión fundamental converge a un límite dentro del sistema ampliado B. En ambos casos, se trata de un compromiso profundo con la idea de que todo proceso convergente debe tener un término dentro del sistema, dicho de otro modo: que el sistema no admite "fugas" hacia lo inalcanzable.

2.2.2) Fase 3: correlación

Con lo dicho hasta aquí, se puede afirmar que los conceptos de continuidad y completitud surgen a la luz del carácter estructural que emerge de los números reales. Ambos conceptos tienen un papel protagónico en el proyecto de formalización del sistema numérico de los números reales dado por Dedekind y por Cantor, y surgen casi al mismo tiempo, condición que no se da al azar. Esto se analiza a continuación.

Como se ha venido enunciando, la base fundacional del sistema de Dedekind reside en una intuición poderosa: los números racionales, aunque ordenados y densos, no forman un continuo. Su gran innovación fue concebir una forma de "completar" este sistema, construyendo los números reales a través de lo que llamó *cortaduras*.

La propiedad IV, que Dedekind describe en su tratado *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, aparece como la piedra angular de esta propuesta. En ella se afirma que si se divide el conjunto de los números racionales en dos clases A_1 y A_2, de manera que cada elemento de A_1 es menor que todos los de A_2 entonces existe un número real r que determina esa división. Este enunciado no es una consecuencia de los axiomas previos, es la definición misma de continuidad para Dedekind.

En este sentido, continuidad y completitud no se presentan como propiedades separadas. De hecho, en Dedekind la continuidad es el principio que permite construir un conjunto completo. El número real r que completa el corte no necesariamente pertenece a los racionales, pero es "introducido" por la estructura del corte, como el mínimo de A_2 o el supremo de A_1.

Por tanto, la continuidad —entendida como la imposibilidad de que existan cortes sin un número que los determine— se convierte en la condición necesaria para la completitud del sistema. Así, lo que hoy se formula como el *axioma de completitud* (todo conjunto no vacío y acotado superiormente tiene supremo) queda subsumido en la noción de continuidad que propone Dedekind.[52]

Esta correlación implica que el sistema construido por Dedekind es completo porque es continuo. No se trata de una propiedad adicional o un resultado derivado, sino de una consecuencia directa del modo en que ha sido definido el sistema $\mathbb{R}$. Es decir, el sistema es completo porque se ha construido para ser continuo.

Desde este punto de vista, Dedekind no demuestra la completitud como un teorema posterior a su definición del sistema real. Al contrario, define los números reales como el sistema que llena todos los huecos de $\mathbb{Q}$, y esa definición exige que entre dos clases que cumplen la condición del corte haya siempre un número que las separe. Esa es, al mismo tiempo, su definición de continuidad y la raíz lógica de la completitud.

En el caso de Cantor, la relación entre continuidad y completitud no es tan inmediata como en Dedekind. El punto de partida es su construcción de los números reales

[52] A mi modo de ver no hay dos principios distintos, sino una misma idea expresada desde diferentes ángulos.

como clases de equivalencia de sucesiones fundamentales de racionales. Esto implica que el conjunto B de todos los signos b —es decir, de todas las sucesiones fundamentales $\{a_n\}$— incluye tanto los racionales como aquellos límites que no están en $\mathbb{Q}$, es decir, los irracionales.

Ahora bien, ¿cómo aparece la completitud? Cantor no parte de ella como un principio, pero la alcanza como una conclusión natural de su estructura. Su método demuestra que toda sucesión de Cauchy tiene un valor límite en el sistema B, lo cual equivale, en la formulación moderna, a decir que su sistema cumple el axioma de completitud: "todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo".

Es decir, la completitud se deriva en Cantor del hecho de que todas las sucesiones fundamentales —sin excepción— convergen a un "signo" en B. Esto incluye incluso aquellas sucesiones que tienden a irracionales, que no son representables en $\mathbb{Q}$. Así, el sistema B está cerrado bajo el proceso de convergencia de sucesiones fundamentales, como lo explique anteriormente en el apartado 1.3.5

Ahora bien, en cuanto a la continuidad, Cantor no la expresa en los mismos términos que Dedekind. De hecho, como vimos antes, él mismo critica que la propiedad IV (corte) no define por sí sola el continuo. Para Cantor, el continuo es un concepto más elaborado que depende de dos propiedades combinadas: la perfección y la conexidad. Tal como lo mencione anteriormente en su formulación clave: -Defino un continuo de puntos como un conjunto perfecto-conexo -.

Esto implica que el conjunto debe ser cerrado (contener todos sus puntos de acumulación) y no presentar separaciones (ser conexo en el sentido topológico). El sistema de los números reales cumple ambas condiciones: es perfecto porque toda sucesión convergente encuentra su límite dentro del conjunto, y es conexo porque no puede subdividirse en dos subconjuntos disjuntos no vacíos que sean ambos abiertos.

Entonces, ¿cómo se correlacionan continuidad y completitud en Cantor? La clave está en el hecho de que la perfección exige que las sucesiones converjan (completitud), mientras que la conexidad prohíbe "saltos" o discontinuidades (continuidad). De esta forma, la definición del continuo cantoriano integra simultáneamente las dos ideas: no hay

huecos (completitud) y no hay cortes abruptos (la otra cara de la continuidad). Pero —y esto es importante— en Cantor estas propiedades no emergen de una única condición como en Dedekind, sino que se articulan como requisitos independientes que un sistema debe cumplir para ser considerado continuo.

Podemos decir entonces que, para Cantor, la completitud es una condición necesaria para la continuidad, pero no suficiente: la continuidad se logra cuando a la completitud se le añade la conexidad. Esto representa una concepción más rica y estructural del continuo, más próxima a la futura formalización topológica del análisis matemático.

2.2.3) Fase 4: culminación del análisis

A lo largo de este recorrido, ha quedado en evidencia que los conceptos de completitud y continuidad, aunque frecuentemente tratados de forma individual[53], no surgen ni evolucionan como conceptos equivalentes en los marcos teóricos propuestos por Dedekind y Cantor. En cada uno de estos autores, ambas nociones aparecen fuertemente entrelazadas, pero no de forma intercambiable. Y es precisamente en este punto donde se hace necesario detenerse, pues el error de asumir una equivalencia inmediata entre continuidad y completitud puede ocultar la riqueza conceptual que las distingue, así como los caminos históricos, lógicos y estructurales que los sustentan.

En el caso de Dedekind, el principio de continuidad, formulado a través de su propiedad IV, no es una consecuencia de su construcción de los números reales mediante cortaduras, sino su punto de partida. Es decir, lo que hoy se denomina el "axioma de completitud" en los sistemas axiomáticos posteriores —aquel que establece que todo subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$ tiene supremo en $\mathbb{R}$— no es, en la obra de Dedekind, una propiedad demostrada, sino una condición impuesta desde el inicio para garantizar que su sistema represente adecuadamente la continuidad de la recta. En ese

[53] Esto se evidencia en algunos libros de texto usados en la presentación formal del número real, donde se da la aparición de forma explícita de solo uno de estos dos conceptos. En efecto, algunos libros de análisis solo hacen mención al axioma de completez, en algunos casos sin dar cuenta de su nombre. Por ejemplo, en libros como (Courant, 1979), (Rudin, 1980), (Apostol, 2020) (Jiménez, 2009), se admite el uso del axioma de completez pero es raro que se hable de la continuidad en las unidades donde se trabaja la estructura y propiedades de los reales.

sentido, en Dedekind, la continuidad es **postulada**, no verificada. Y desde ese postulado se deriva toda la estructura aritmética del sistema de los reales.

Lo interesante es que esta forma de continuidad —la famosa "cortadura"— no es una mera condición estructural, sino una idea que nace del análisis lógico del propio conjunto de los racionales. Así, el principio de continuidad en Dedekind asume la forma de una partición del conjunto $\mathbb{Q}$ en dos clases disjuntas con ciertas propiedades, y exige que dicha partición esté siempre determinada por un número real. Esta condición, al ser asumida como punto de partida, garantiza que no existan “saltos” en la recta, completando con nuevos elementos (irracionales) los “huecos” que los racionales no pueden llenar. Por ello, si bien Dedekind no enuncia el axioma de completitud tal como lo entendemos hoy, su construcción entera tiene como motor precisamente la intención de producir una recta completa. En otras palabras: en Dedekind, la continuidad es la forma mediante la cual se asegura la completitud.

En contraposición, Cantor parte de una idea completamente distinta: no asume continuidad alguna, ni postula una propiedad o una condición estructural general para garantizarla. Su aproximación es puramente aritmética: define los reales como clases de equivalencia de sucesiones fundamentales de racionales. Su objetivo es lograr que toda sucesión fundamental tenga un “límite” —aunque este límite no exista dentro de los racionales— y por ello amplía el conjunto de partida hasta que esas sucesiones encuentren un representante adecuado. El principio de completitud, tal como se lo denomina hoy, es aquí una consecuencia directa de la construcción: el conjunto B de las clases de equivalencia de sucesiones fundamentales es, por diseño, un conjunto completo, cualidad que se hereda de la condición isomorfa que tienen los conjuntos formados a partir de los representantes de los paquetes de sucesiones. No hay necesidad de postularlo por fuera: la completitud es construida, no asumida.

Ahora bien, el punto de inflexión aparece cuando Cantor intenta reflexionar sobre el continuo. Su definición, como se ha visto, se aleja del planteamiento de Dedekind. Cantor identifica el continuo con un conjunto perfecto y conexo, es decir, uno que no tiene puntos aislados y que no puede dividirse sin cortar alguna de sus conexiones internas. Esta forma de continuidad, si bien se complementa con la idea de completitud, no se reduce a ella.

Mientras que la completitud garantiza que no hay “huecos” respecto a los límites de sucesiones, la continuidad cantoriana apunta a una idea más topológica, donde la conexión entre los elementos es central. De ahí que Cantor critique el énfasis de Dedekind en la propiedad IV, señalando que tal propiedad también puede cumplirse en conjuntos discontinuos (como el conjunto de los enteros), y por lo tanto no es suficiente por sí sola para capturar la idea del continuo.

Por lo tanto, al mirar ambos autores, emerge una tensión reveladora: Dedekind asegura la completitud postulando continuidad, mientras que Cantor construye completitud y luego busca definir continuidad desde un enfoque más topológico. Esto muestra que, aunque ambos conceptos están íntimamente relacionados en sus construcciones, no son equivalentes. Uno no puede reducirse al otro. En Dedekind, la continuidad es condición suficiente para la completitud, pero no viceversa; en Cantor, la completitud es construida desde el rigor aritmético, y la continuidad es posteriormente definida como una propiedad adicional del conjunto resultante. No es casual entonces, que su definición del continuo aparezca tardíamente, cuando ya ha establecido la existencia de conjuntos perfectos-conexos.

Esta disparidad entre asumir y construir ha marcado profundamente las bases del análisis moderno. Además, ofrece una rica perspectiva didáctica: no basta con decir que los reales “no tienen huecos”; es necesario cuestionar qué significa realmente esa afirmación, bajo qué condiciones, y en qué sentido. La historia de estos dos autores muestra que el conocimiento matemático profundo no emerge de una definición universal e inmediata, sino de un proceso de construcción, reflexión y redefinición. Esta es una lección valiosa para la enseñanza: presentar las nociones de continuidad y completitud como equivalentes desde el inicio puede oscurecer la complejidad histórica y conceptual que las sustenta. Tal como lo veremos en el Capítulo 3, este enfoque tiene consecuencias directas sobre cómo los estudiantes comprenden o no, estos conceptos fundamentales.

Partiendo del análisis anterior, resulta pertinente preguntarse: ¿puede existir completitud sin continuidad? ¿Puede haber continuidad sin completitud? Las construcciones de Dedekind y Cantor no solo ofrecen respuestas diferentes a estas preguntas, sino que iluminan los límites de tratarlas como conceptos intercambiables.

Volvamos al caso de Dedekind. Como se expuso anteriormente, Dedekind impone una condición estructural —su propiedad IV— como base de su sistema. Esta propiedad exige que, toda partición del conjunto de racionales que respete el orden está determinada por un número real, genera un sistema sin "saltos" ni vacíos. Desde esta óptica, su definición del continuo presupone una completitud del sistema: no hay cortes sin elemento de corte. Pero lo interesante es que para Dedekind esta afirmación no se prueba, sino que se adopta como criterio de qué debe ser un sistema continuo. En otras palabras, si un sistema numérico no cumple esa propiedad, simplemente no puede llamarse continuo.

Lo anterior deja en claro que para Dedekind la continuidad no se deduce de la completitud: la define. Y a partir de esa definición, construye el sistema de los números reales como aquel que cumple dicha condición. Puede afirmarse, como se ha dicho en reiteradas ocasiones, que la continuidad en Dedekind es condición suficiente para la completitud, pero no al revés.

La situación cambia notablemente en Cantor. En su sistema, la completitud se construye paso a paso: parte de los racionales, define las sucesiones fundamentales, y considera como números reales a las clases de equivalencia de estas sucesiones. Este procedimiento garantiza que toda sucesión de Cauchy tiene un "límite" en el nuevo conjunto, algo que los racionales no podían ofrecer. La completitud, entonces, no es una propiedad *deseada*, sino una propiedad asegurada por la construcción misma.

Ahora bien, ¿qué ocurre con la continuidad? Como se mencionó en la primera parte de esta fase, Cantor propone una definición diferente: considera continuo a un conjunto que es perfecto (todos sus puntos son puntos de acumulación) y conexo (no puede dividirse sin romper su cohesión interna). Esta idea es más topológica que aritmética, y aparece como un concepto adicional que describe una cualidad del conjunto construido, pero no como su principio fundante.

Lo que esto sugiere es que en Cantor la continuidad es una propiedad emergente de la completitud, no su fundamento. El conjunto de los números reales, construido desde las sucesiones de Cauchy, resulta ser completo en el sentido de que no tiene huecos. Solo después de ese proceso Cantor define cuáles de esos conjuntos pueden llamarse continuos. De modo que, si bien hay una relación, no hay equivalencia. La continuidad en Cantor es

una cualidad que algunos conjuntos completos pueden tener, pero no todos los conjuntos completos serán continuos en su sentido estricto del término.

Este juego de relaciones cruzadas entre los conceptos dados por ambos autores permite concluir que la relación entre continuidad y completitud no son propiedades intercambiables entre sí: en Dedekind, la continuidad garantiza la completitud; en Cantor, la completitud hace posible definir y caracterizar la continuidad. En ninguno de los dos casos son equivalentes, ni tampoco son mutuamente necesarias. Más bien, cada autor sitúa uno de los conceptos como estructura originaria y utiliza el otro como consecuencia o refinamiento.

Este hallazgo es crucial, muestra que no existe una única forma de entender el continuo o la completitud, y que la supuesta equivalencia moderna es una síntesis que emerge de la axiomatización posterior —particularmente la formulación de los espacios completos en términos de supremos y límites— pero que no refleja con fidelidad las posiciones originales. Esta es una advertencia importante para cualquier intento de simplificación excesiva. Hablar solo de continuidad o solo de completitud puede ser útil en ciertos contextos pedagógicos, pero borra diferencias conceptuales que enriquecen el campo epistemológico de las matemáticas.

Después de examinar cuidadosamente las formas en que Dedekind y Cantor construyen, correlacionan y fundamentan los principios de continuidad y completitud, resulta inevitable advertir que entre estos conceptos no solo hay vínculos estructurales y epistemológicos, sino también tensiones latentes que merecen ser señaladas, aunque no necesariamente resueltas en el marco de esta tesis.

En el caso de Dedekind, se vuelve especialmente interesante observar cómo la propiedad IV, presentada como una definición de continuidad, opera de hecho como un *principio de completitud* en sentido moderno: asegura la existencia de un número real que "llena" cualquier partición del conjunto de racionales, lo cual impide la existencia de "huecos". Pero al mismo tiempo, Dedekind parece rehuir de enunciar explícitamente esta propiedad como completitud, insistiendo en que es la condición que define la continuidad de la recta numérica. ¿Estamos entonces ante una confusión conceptual? ¿O es que para

Dedekind ambas nociones apuntan a una misma idea estructural, aunque en registros diferentes?

La dificultad se intensifica si se considera que dicha propiedad IV no se demuestra, sino que se adopta como criterio constitutivo del sistema. Esto plantea una pregunta inquietante: ¿es posible distinguir con nitidez entre continuidad y completitud en Dedekind? ¿O son simplemente dos caras de una misma moneda, interpretadas bajo distintos lenguajes: uno geométrico (continuidad) y otro aritmético (completitud)? Esta ambigüedad no invalida su teoría, pero sí deja ver una cierta fragilidad semántica. La terminología moderna tiende a atribuirle a la propiedad IV el nombre de “axioma de completitud”, aunque para Dedekind el término "continuidad" parece más natural y amigable en su contexto de época y para su propósito.

En Cantor, como se ha visto, el enfoque es diferente: la completitud es construida y garantizada, mientras que la continuidad se enuncia después, como propiedad adicional de ciertos conjuntos (perfectos y conexos). Esto permite una separación más clara entre ambas nociones. Sin embargo, incluso aquí cabría preguntarse si el hecho de que los números reales satisfagan ambos principios —completitud por construcción y continuidad por definición— no indica también una fusión conceptual más profunda, que aún espera por ser desentrañada completamente.

A la luz de estas observaciones, surge una última pregunta que podría abrir el camino para una tesis futura:
¿Existe una propiedad más general, más fundamental, de la cual la completitud y la continuidad sean manifestaciones particulares?
¿Estamos ante dos registros conceptuales distintos que se superponen parcialmente, o ante una misma estructura epistémica leída desde dos lenguajes? [54]

Para terminar este apartado, se incluye en la tabla 7 una síntesis del análisis realizado, de manera que se presenta de forma esquemática aquellos aspectos importantes

[54]Estas preguntas, aunque fundamentales, no serán abordadas en profundidad dentro del presente trabajo por dos razones. Primero, porque la complejidad de la discusión excede el alcance de una tesis de pregrado; y segundo, porque su enfoque se aleja del objetivo principal de esta investigación. No obstante, estos cuestionamientos se dejan aquí planteados como una sugerencia para futuros trabajos académicos.

que hayan podido pasarse por alto en la lectura del documento; esto, para tener una mirada transversal de lo que implica hablar de continuidad y completitud. Esta tabla no busca repetir información anterior, sino condensar el análisis para que el lector pueda ver claramente cómo cada autor relaciona, construye y articula los conceptos de *continuidad* y *completitud*, y así ser consciente de la complejidad que emana de estos conceptos.

Tabla 7. Síntesis comparativa final: continuidad y completitud en Dedekind y Cantor

Aspecto clave	Dedekind	Cantor
Concepción general del número real	Definido como una cortadura del conjunto de racionales.	Definido como una clase de equivalencia de sucesiones fundamentales.
Fundamentación del irracional	Nace de la necesidad de llenar las cortaduras no determinadas por racionales.	Surge como límite simbólico de una sucesión que no converge a un racional.
Continuidad	Enunciada como la *propiedad IV*: toda partición del conjunto de racionales que preserve el orden es determinada por un único número. Se interpreta como **criterio estructural** para la continuidad de la recta.	Se define mediante conjuntos **perfectos y conexos**. La continuidad es una propiedad adicional del conjunto de los reales.
Completitud	Implícita en la propiedad IV, aunque no enunciada con ese nombre. Se asume como principio constitutivo.	Construida explícitamente: todo Cauchy (sucesión fundamental) converge dentro del dominio.
Relación entre continuidad y completitud	Están entrelazadas: la continuidad asegura la completitud, aunque el lenguaje empleado favorece lo geométrico.	Son propiedades distintas: la completitud es condición estructural; la continuidad es una propiedad del conjunto de reales.
Grado de separación conceptual	Bajo: ambos principios aparecen fusionados en una única afirmación fundacional.	Alto: la construcción garantiza completitud, y la continuidad se define después, sin dependencia directa.

La comparación entre Dedekind y Cantor nos revela mucho más que dos métodos distintos de construir los números reales. Muestra dos formas de concebir el rigor

matemático, dos perspectivas sobre el papel del infinito, y dos enfoques sobre cómo dar sentido a la noción de “número” más allá de lo racional. Dedekind apostó por una continuidad que absorbe a la completitud, mientras que Cantor construyó una completitud que permite la continuidad como propiedad derivada. La aparente equivalencia entre sus sistemas se ve atravesada por matices históricos, epistémicos y semánticos que solo pueden percibirse al mirar con detalle las estructuras internas de sus teorías.

En este capítulo se ha recorrido esa complejidad, de forma que se aborda las construcciones, interpretaciones y relaciones entre continuidad y completitud. Pero aún queda una tarea pendiente, preguntarse cómo estas concepciones afectan la enseñanza, la comprensión y el aprendizaje actual del análisis matemático. Ese será el desafío del próximo capítulo, donde el foco se trasladará desde la matemática formal hacia las implicaciones didácticas de los conceptos estudiados. ¿Cómo se enseña hoy la continuidad? ¿Qué nociones de completitud se presentan en las prácticas escolares? ¿Y cómo dialogan —o entran en conflicto— estas herencias históricas con los estándares educativos actuales?

La matemática, como se verá a continuación, no solo se construye; también se transmite, se transforma y se aprende.

Capítulo 3: Reflexiones de orden didáctico en la caracterización de la continuidad y la completitud

Los números reales suelen considerarse como el conjunto numérico más importante tanto para la educación secundaria como universitaria. Esto se debe a su gran alcance para modelar situaciones cotidianas —siendo la base del cálculo— y su importancia axiomática, porque son la piedra angular para la teoría de conjuntos; pero su alcance va mucho más allá de ser la base de ciertas teorías, ya que los números reales en sí mismos forman parte de una estructura rigurosa claramente definida que por sí sola tienen ciertas implicaciones teóricas importantes que permiten identificarlos y caracterizarlos.

Pues bien, los números reales dentro de su carácter estructural dejan a la luz dos de sus propiedades intrínsecas asociadas, la continuidad y la completitud, propiedades que habitualmente se suelen mencionar indistintamente, sin tener una claridad de cuando se está ante una y cuando ante la otra. No obstante, el análisis histórico, formal y epistémico desarrollado en los capítulos anteriores ha permitido observar que los conceptos de continuidad y completitud, si bien forman parte indisoluble de la estructura lógica de los números reales no son, en modo alguno, equivalentes ni reductibles el uno al otro. Por ejemplo, Dedekind y Cantor a través de sus respectivas construcciones, mostraron que es posible concebir cada noción desde fundamentos distintos, y que su articulación no es resultado de una necesidad lógica absoluta, sino de decisiones conceptuales profundamente ancladas en la filosofía matemática de cada autor.

Pero más allá de las diferencias conceptuales y formales, el recorrido realizado deja al descubierto una cuestión mayor: las ideas que hoy parecen “naturales” en el discurso matemático —como la densidad de la recta, la continuidad del conjunto real o la completitud como garantía de existencia— no emergieron como evidencias axiomáticas, sino que fueron objeto de disputas, tensiones y redefiniciones. Esta constatación histórica y lógica abre paso a una serie de reflexiones sobre el lugar que ocupan estas nociones; sobre los riesgos de su enseñanza mecánica, superficial y sin abrir paso a un análisis crítico. Y sobre la forma en que podrían ser abordadas en el aula sin sacrificar su complejidad conceptual.

Tal como advierten (Montoro, V., & Ferrero, M., 2022), es frecuente que en la educación matemática universitaria se parta del supuesto de que los estudiantes ya comprenden qué es un número real y cuáles son sus propiedades fundamentales. Al respecto, estos autores afirman que "se trabaja con la noción de número real como si fuese un contenido ya naturalizado en la escuela secundaria" (p. 62). Sin embargo, la práctica universitaria nos muestra que esto no es del todo cierto, pues la mayoría de los estudiantes al ingresar a la universidad no conocen la diferencia entre los diferentes conjuntos numéricos, siendo incapaces incluso de tareas sencillas como identificar si un número es natural, entero, racional, irracional o real. Este desfase entre el conocimiento asumido y el conocimiento real de los estudiantes revela una necesidad urgente de revisar no solo cómo se enseñan los números reales, sino también qué se entiende por enseñar su fundamento.

A esto se suma la advertencia de (Recalde, 2011), quien señala que el conjunto de los reales no es simplemente un producto formal de la matemática moderna, sino una síntesis de las actividades humanas de medir, contar y ordenar. Esta perspectiva refuerza la importancia de una mirada histórico-epistemológica en la enseñanza, especialmente cuando se trata de nociones tan estructurales como la continuidad y la completitud, dos propiedades que son la esencia de los números reales, por lo tanto, no entender a cabalidad estas propiedades sería no entender a cabalidad el conjunto de los reales y su alcance, llevando al estudiante a concepciones vagas e imprecisas de este conjunto.[55]

A lo largo de este capítulo, se busca esbozar algunas implicaciones didácticas derivadas de este estudio, con el objetivo de repensar el modo en que se enseña —y se entiende— los fundamentos del análisis. No se trata de mostrar instrucciones pedagógicas, sino de construir un puente entre la historia de los conceptos y la práctica educativa, reconociendo que la comprensión de estos conceptos requiere también una mirada hacia su génesis, sus tensiones internas y sus reconstrucciones formales. El recorrido no culmina

[55] Por ejemplo, algunos estudiantes tienen la falsa creencia de que los números reales se conforman por los racionales y los números $\pi, \mathcal{E}$ y $\sqrt{2}$, lo cual se debe principalmente a que no son conscientes de la infinidad de los números irracionales y se quedan con la idea de que la cualidad de número irracional sólo se les atribuyen a estos números, números que los docentes suelen tomar como ejemplo cuando se habla de número irracional.

aquí, pero sí propone una pausa para pensar qué enseñamos cuando se enseña los números reales.

3.1) Naturalización de los conceptos y dificultades en su presentación

Hablar de continuidad y completitud en el aula universitaria suele parecer un paso más dentro de la enseñanza del análisis matemático. Sin embargo, detrás de esa aparente naturalidad se esconden capas de complejidad epistemológica e histórica que muchas veces permanecen invisibilizadas. Tanto los docentes como los textos escolares y universitarios tienden a presentar estas nociones como si fueran conceptos "dados", sin resaltar las disonancias o dificultades conceptuales asociadas a su construcción, tanto en el contexto histórico (mostrado en el capítulo 2) como en el contexto del aprendizaje.

Esta situación ha sido advertida por diversos autores. (Montoro, V., & Ferrero, M., 2022) Que cómo se mostró en la introducción de este capítulo, señalan que los cursos universitarios de matemáticas frecuentemente tratan los números reales como un contenido ya dominado desde la secundaria, cuando en realidad arrastran un nivel de complejidad conceptual que pocos estudiantes han tenido oportunidad de abordar con profundidad. Pero no se trata simplemente de una omisión en los programas: es un fenómeno más profundo, la presentación acabada y/o "dogmática" de conceptos, lo que podríamos llamar la "naturalización didáctica" de conceptos que fueron históricamente problemáticos.

(Brolezzi, 1997) estudia precisamente esa tensión entre lo *discreto* y lo *continuo* en el pensamiento matemático, mostrando cómo estos dos polos han coexistido en conflicto desde la antigüedad y cómo ese conflicto reaparece, con otras formas, en los procesos de aprendizaje actuales. Lo interesante del enfoque de Brolezzi es que no se queda en la historia por la historia, sino que muestra la *relevancia pedagógica* de estas tensiones. El continuo no es simplemente un contenido nuevo, sino una reorganización radical del pensamiento matemático: obliga a abandonar las certezas del mundo discreto (números contables, estructuras claras, progresiones enteras) para adentrarse en un universo donde los elementos ya no se pueden enumerar, donde hay infinitos números entre cada dos puntos, y donde los límites no son siempre alcanzables.

Lo que Brolezzi evidencia, y que aquí conviene destacar, es que la dificultad no es exclusivamente epistemológica, sino también cognitiva y didáctica. Muchos estudiantes, al enfrentar por primera vez el concepto de número real o de continuidad, reproducen de manera intuitiva las concepciones históricas más antiguas: piensan el continuo como una sustancia divisible infinitamente, como una línea sin interrupciones hecha de algo más que puntos. Y en parte tienen razón en hacerlo, porque así fue concebido durante siglos. La historia de las matemáticas no les da la espalda, sino que más bien les da la bienvenida a una conversación muy antigua a la cual han llegado tarde.

Esta recuperación histórica tiene implicaciones didácticas importantes. Si los estudiantes reproducen concepciones históricas que fueron sostenidas por mentes brillantes —como Aristóteles o Newton—, ¿no debería eso invitarnos a repensar la forma en que enseñamos estos conceptos? ¿No será que la dificultad está en el propio concepto, y no tanto en la falta de habilidad del estudiante? Estas preguntas, lejos de buscar culpables, apuntan a resituar el problema: la enseñanza del continuo y la completitud requiere una atención particular, porque los obstáculos no son solo pedagógicos, sino conceptuales**.**

La cuestión se agrava cuando los textos escolares y universitarios presentan el continuo o los reales como estructuras ya cerradas, plenamente definidas, sin mostrar que su definición fue, en sí misma, un hito problemático. La presentación típica de los reales como una “recta continua” o como una “extensión de los racionales que llena los huecos” no siempre aclara qué significa esa continuidad, ni cómo se logra la completitud. En muchos casos, se enseña que todo número tiene una expresión decimal como si eso fuera una propiedad trivial, sin mostrar que esa representación misma depende de la estructura formal de los reales.

La invisibilización del problema de fondo no solo ocurre en el aula, también se manifiesta en cómo la historia de las matemáticas ha sido tratada —y a veces olvidada— en los programas de formación. En este sentido, el trabajo de (Dhombres, 1993) ofrece una mirada especialmente reveladora. Este autor analiza cómo, en el tránsito entre el pensamiento antiguo y moderno, los matemáticos del siglo XVII se enfrentaron a profundas tensiones conceptuales respecto al continuo. Uno de los escenarios clave de esta tensión fue la emergencia del cálculo infinitesimal: el uso de progresiones infinitas, de razones entre

cantidades "infinitamente pequeñas", y la intuición de que podía hablarse de movimientos o áreas sin tener que pasar por un análisis puntual o discreto.

Lo importante del análisis de Dhombres es que muestra cómo los conflictos conceptuales de entonces siguen latentes hoy bajo nuevas formas. Las dificultades que tienen los estudiantes actuales para comprender, por ejemplo, las sucesiones fundamentales, el concepto de límite, o la noción de densidad infinita entre dos números reales, son herencias directas de los dilemas filosóficos y técnicos que desafiaron a los propios fundadores del análisis y que nacen de nuestra intuición. De alguna manera, la enseñanza moderna del continuo arrastra un problema sin resolver del todo: cómo presentar lo infinitamente denso sin que se vuelva inabarcable; cómo enseñar el infinito sin perder el rigor**.**

A esta dimensión se suma otro punto crucial: la pluralidad de significados históricos del concepto de continuo. (Torre Gómez, 2011) aborda precisamente este fenómeno, mostrando cómo la noción de continuo ha sido interpretada de maneras distintas en diversos contextos históricos, filosóficos y matemáticos. Lo continuo ha sido lo divisible indefinidamente, lo lleno sin huecos, lo no discontinuo, lo conexo, lo perfecto, e incluso lo completado. Esta inestabilidad semántica explica, en parte, por qué los estudiantes muchas veces tienen ideas contradictorias o fragmentadas del concepto. No es que no comprendan; es que no se les muestra que el concepto mismo ha tenido múltiples lecturas, algunas de ellas mutuamente incompatibles.

Desde una perspectiva didáctica, esto implica que no basta con definir continuidad o completitud, ni siquiera con mostrar construcciones formales como las de Dedekind o Cantor. Es necesario abrir el espacio para la discusión conceptual, para que los estudiantes puedan transitar por las distintas interpretaciones, detectar sus propios supuestos, y comprender por qué ciertos caminos fueron abandonados y otros adoptados. Más aún, se vuelve clave mostrar que conceptos como el continuo y la completitud no nacieron como verdades evidentes, sino como respuestas históricas a problemas profundos, lo cual humaniza la matemática y permite un acceso más significativo a su aprendizaje.

Pero, esta falta conceptual y teórica solo ocurre por parte de los estudiantes, los docentes, instituciones y los libros de texto tienen, completa claridad a cerca de estos dos conceptos ¿verdad?

3.2) Una mirada desde lo curricular

Algunas concepciones históricas sobre el continuo parecen reflejarse, de manera implícita, en dificultades recurrentes del pensamiento estudiantil. No obstante, es necesario ampliar la mirada hacia el plano institucional. En Colombia, los documentos oficiales también parecen dar cuenta —aunque de forma indirecta— de una comprensión fragmentada y a veces insuficiente de las propiedades profundas de los números reales.

Los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* del MEN (2006) reconocen que entre los siglos XIV y XIX la enseñanza matemática se enfocaba en los números racionales, y solo en el siglo XX surgió un interés más estructurado por otros sistemas como los reales. Esta ampliación, según el mismo documento, representa una "fuerte carga cognitiva" tanto para estudiantes como docentes, debido a la complejidad estructural que implican propiedades como la completitud o la continuidad.

El MEN menciona explícitamente algunas competencias relacionadas con estas ideas: "Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos", y "Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales)" (MEN, 2006, pág. 88)

Sin embargo, aunque esta competencia abarca ciertas propiedades de los números reales, como la densidad y la completitud, es relevante señalar que en ella no se menciona explícitamente el concepto de *continuidad***.** La completitud recibe un enfoque más detallado a través de competencias que buscan que los estudiantes reconozcan la densidad e incompletitud de los números racionales y la completitud en el conjunto de los reales. En cambio, el estudio de la continuidad, una propiedad fundamental para entender la estructura del continuo y la recta numérica, no cuenta con un apartado específico, sino que, o bien se deja como una consecuencia de todo lo demás, o bien se deja de forma implícita. Esta omisión refleja un vacío conceptual en la enseñanza de las matemáticas a nivel básico y

secundario[56], dado que la continuidad es un concepto esencial para el análisis matemático y la comprensión profunda de los números reales en su totalidad, que de ninguna manera puede verse como consecuencia de la completitud, pues como se mostró en otros capítulos continuidad y completitud son propiedades de talantes diferentes.

A esto se suma que los *Derechos Básicos de Aprendizaje* (MEN, 2016) apenas mencionan dos veces a los números reales, y lo hacen de manera colateral, al hablar de aproximaciones o irracionales, sin que se aborde ni su densidad ni su completitud, y mucho menos su continuidad.

La primera evidencia de aprendizaje dice: "Considera el error que genera la aproximación de un número real a partir de números racionales." (MEN, 2016, p. 66) y la segunda afirma: "Argumenta la existencia de los números irracionales." (MEN, 2016, p. 74). En estas evidencias no se hace mención de forma explícita de las propiedades de los números reales, como lo hicieron los estándares, mostrando que en efecto hay un vacío conceptual asociado a las propiedades de los números reales.

Estas omisiones han sido documentadas por diversos investigadores. (Rojas, 1999) advierte que el concepto de número real, al ser el resultado de siglos de evolución teórica, plantea "problemas didácticos difíciles de resolver". (Bergé y Sessa., 2003) coinciden en que, en la escuela, los reales se trabajan más desde lo operable que desde lo estructural, lo que genera visiones incompletas o erróneas. En esa misma línea, Montoro y (Montoro, V., & Ferrero, M., 2022) afirman que se suele asumir que los estudiantes ya comprenden los números reales cuando llegan a la universidad, a pesar de que rara vez han reflexionado sobre sus propiedades profundas.

Por eso, se vuelve pertinente que investigaciones como esta propongan un análisis histórico-epistemológico riguroso que permita iluminar no solo el origen conceptual del continuo y la completitud, sino su tratamiento didáctico. Solo así se podrá aportar a una enseñanza más coherente, capaz de enfrentar el reto que el propio MEN ha señalado:

[56] No se dice que no se enseñe, lo que se dice es que en los estándares este tema se menciona tácitamente.

construir un pensamiento numérico sofisticado que no se limite a aplicar reglas, sino que sea capaz de comprender las estructuras que sostienen al sistema de los números reales.

3.3) Tensiones conceptuales reveladas por el análisis histórico

Uno de los aportes más significativos del recorrido desarrollado en esta tesis ha sido el de mostrar que, al analizar con detenimiento las construcciones de Dedekind y Cantor, surgen tensiones conceptuales que no se resuelven del todo dentro del marco de la pregunta problema. Si bien se logró establecer que continuidad y completitud son dos propiedades distintas en su formulación, tratamiento y contexto —y que, particularmente para Cantor, no están necesariamente asociadas como en Dedekind—, no es posible afirmar con contundencia que se trate de conceptos independientes. El análisis más bien sugiere una zona de fricción conceptual que abre nuevas preguntas y requiere atención más profunda.

Un caso paradigmático de esta tensión es el de la propiedad IV en la construcción de Dedekind, también conocida como la propiedad de la continuidad. Como se analizó en los capítulos anteriores, esta propiedad se basa en la idea de que todo corte en los racionales determina un número real, eliminando así cualquier posibilidad de "hueco" en la recta. Sin embargo, esta formulación coincide —en términos modernos— con lo que hoy se conoce como el axioma de completitud. En otras palabras, lo que Dedekind enuncia como una definición de continuidad es, bajo la lectura contemporánea, un principio de completitud.

Este hecho no es trivial. ¿Es entonces la continuidad, en Dedekind, una forma de expresar la completitud? ¿O acaso la completitud se ha colado como una propiedad necesaria para definir que los reales son completos? ¿Estamos ante un caso de "petición de principio"? Lo cierto es que esta dualidad genera un punto de tensión conceptual: Dedekind considera su propiedad IV como definitoria de la continuidad, pero el análisis lógico de su sistema revela que lo que está describiendo es más cercano a la completitud en sentido axiomático.[57]

[57] Personalmente, no considero conveniente hacer un juicio completo del trabajo de Dedekind, creo que es necesario comparar su construcción con otros autores aparte de cantor.

En contraste, Cantor opta por no utilizar la propiedad IV. Su enfoque no parte de cortes ni de una axiomática del orden, sino del análisis de sucesiones fundamentales y de la ampliación del dominio. Y aunque su construcción lleva a un sistema completo —en el sentido de que no admite sucesiones fundamentales sin valor límite dentro del sistema—, en ningún momento Cantor formula explícitamente un principio de completitud ni utiliza la palabra "continuo" en el mismo sentido que Dedekind. Para Cantor, lo continuo es un conjunto perfecto y conexo, una definición de corte topológico desligada de la estructura aritmética que mueve a Dedekind.

Estas diferencias no sólo responden a su terminología, sino que revela que la continuidad y la completitud son conceptos distintos que no tienen una relación conceptual única o universal. En Dedekind parecen ser inseparables, casi equivalentes en la práctica; mientras que en Cantor, pueden tratarse por separado. Esta divergencia abre una pregunta de enorme profundidad filosófica: ¿es posible formular una teoría del continuo sin asumir completitud? ¿O, a la inversa, puede sostenerse la completitud sin construir un continuo en el sentido clásico? Estos supuestos son tratados en algunos documentos interesantes como los de (Suárez, 2021) (Coaquira Torres, 2023) donde se propone un modelo basado en los números hiperreales[58].

Responder estas preguntas excede el marco de esta investigación, pero su formulación deja en evidencia que la relación entre continuidad y completitud no es tan clara como la axiomatización posterior hizo parecer. El análisis histórico revela, más bien, una tensión irresuelta, una zona donde los conceptos se entrelazan, se superponen, se contradicen o se reinterpretan, dependiendo del autor, del contexto y del marco teórico empleado.

Esta investigación ha logrado responder con rigor la pregunta problema y cumplir con su objetivo principal. Sin embargo, también ha mostrado que el cierre lógico de un sistema matemático puede dejar abiertas otras grietas conceptuales, que merecen su propia exploración. Personalmente creo que esta investigación, deja en claro que la conversación en cuanto a la continuidad y la completez está abierta, no es un tema ya zanjado, revisar

[58] En estos modelos, he encontrados conceptos como la super densidad, o situaciones de conjuntos numéricos completos pero discontinuos.

aportes como los de Hilbert, o la idea de los hiperreales, deja mucho por investigar, donde tal vez bajo un marco teórico más grande se puedan desprender afirmaciones más osadas, y resultados más contundentes. En ese sentido, este trabajo deja la puerta abierta a nuevas investigaciones, ya sea en el campo de la historia de la matemática, la epistemología o incluso en la filosofía de las matemáticas.

Conclusiones

La pregunta que guía esta investigación fue clara: ¿cuál es la relación entre el principio de completitud y el de continuidad en la estructura formal de los números reales? ¿Existe entre ellos una equivalencia conceptual? ¿Acaso uno constituye condición necesaria —o incluso suficiente— para el otro? O bien, ¿se trata de propiedades distintas, que han coincidido solo por razones históricas, estructurales o metodológicas? La intuición inicial que dio impulso a esta investigación suponía una fuerte conexión entre ambos conceptos, acaso una identidad disfrazada. El intentar dar respuesta a estas preguntas implica, como se mostró, un desafío que debe considerar diferentes panoramas de análisis.

Pues bien, el trabajo desarrollado a lo largo de los tres capítulos ha demostrado que *continuidad y completitud son propiedades distintas,* con historias conceptuales autónomas, fundamentos filosóficos diferenciables y alcances teóricos que, aunque en ocasiones se solapan, no son reducibles el uno al otro. La aparente equivalencia que algunos autores y manuales modernos sugieren se disuelve cuando se analizan las raíces históricas y las construcciones matemáticas de algunos de los autores que dieron forma rigurosa a los reales.

En Dedekind, la propiedad IV —que tradicionalmente se presenta como una caracterización de la continuidad— resulta, bajo la mirada axiomática moderna, una formulación del principio de completitud. Esto ha generado no pocas confusiones interpretativas. ¿Por qué llamar “continuidad” a lo que hoy entendemos como “completitud”? Un intento de respuesta, que se desarrolló en esta investigación, es de carácter filosófico y estructural, en Dedekind, el sistema de los números reales se construye como una extensión ordenada de los racionales, y dicha extensión debe satisfacer una propiedad que garantice que todo corte (corte de Dedekind) tenga un punto que lo “complete”. Es decir, el continuo para él no es otra cosa que un sistema en el que toda partición ordenada y compatible admite una cota suprema, lo cual —en términos actuales— es justamente el axioma de completitud.

La continuidad, en Dedekind, no aparece como un fenómeno geométrico ni topológico, sino como una consecuencia lógica del orden y la aritmética. En su visión, la

continuidad es un principio estructurante, un supuesto que organiza el sistema y le otorga coherencia. Pero si se toma la propiedad IV como el axioma de completitud se tendría que; la completitud no es algo que se derive dentro del sistema, sino algo que se postula para que el sistema funcione. Esta lectura transforma nuestra intuición inicial, la continuidad en Dedekind no implica la completitud; es la completitud —formulada como continuidad— lo que organiza su construcción de los reales.

En cambio, *en Cantor* se encuentra una pequeña brecha conceptual. Su concepción del continuo no depende del principio de completitud, ni lo formula como un axioma central. Cantor construye los reales a partir de sucesiones fundamentales de racionales, y demuestra que toda sucesión fundamental converge a un valor límite dentro del sistema. Esto garantiza la completitud de su construcción, pero no implica que el concepto de continuo esté definido por esa propiedad. De hecho, cuando Cantor define al continuo, lo hace apelando a nociones topológicas: un conjunto continuo es aquel que es *perfecto y conexo*, es decir, que no tiene puntos aislados y no puede descomponerse en partes disjuntas no vacías. Esta definición se aleja de la estructura ordinal dada por Dedekind y se inscribe en una visión topológica y conjuntista del continuo.

Aquí se produce una ruptura epistemológica significativa, mientras Dedekind parte del orden y la aritmética para definir la continuidad (que en realidad es completitud), Cantor parte del infinito actual, de la convergencia y de la estructura topológica de los conjuntos para definir el continuo. En Cantor, la completitud es consecuencia de la clausura del sistema respecto a sus propias sucesiones fundamentales, no una propiedad que defina al continuo. Esto permite tratar ambos conceptos como autónomos, analizar sus intersecciones sin reducirlos, y mostrar que pueden convivir o incluso desarrollarse por separado.

Este análisis histórico, además, desmonta una idea común en textos actuales: que la continuidad y la completitud son simplemente dos caras de una misma moneda. La tesis ha demostrado que no existe una equivalencia necesaria, ni una implicación lógica automática entre ambas. Su relación es contextual, histórica y conceptual. En Dedekind, se funden; en Cantor, se separan. En la matemática moderna, se las ha intentado unificar, pero esta tesis

invita a considerar que dicha unificación puede ser —en el mejor de los casos— una simplificación didáctica, útil en ciertos contextos, pero no teóricamente rigurosa.

Por ello, se puede afirmar con cierta contundencia que la continuidad y la completitud son dos pilares diferentes de la estructura de los números reales. Pilares que pueden estar articulados, según la arquitectura conceptual elegida. Y esta aparente independencia no es un defecto del sistema, sino una riqueza teórica que permite múltiples formas de entender al número real.

El análisis desarrollado en esta investigación no solo tiene valor teórico y/o epistemológico; también abre interrogantes y ofrece aportes significativos para el campo educativo. Si los conceptos de continuidad y completitud son más complejos, sutiles e independientes de lo que la enseñanza habitual sugiere, entonces es razonable preguntarse: ¿cómo estamos presentando estos conceptos a los estudiantes? ¿Qué lugar ocupan en los currículos, en los estándares y en la práctica docente?

Ya desde el capítulo 3 se mostraron algunas de estas tensiones: la tendencia a presentar los números reales como una extensión "natural" de los racionales, la omisión del concepto de continuidad como propiedad estructural, y la dificultad de abordar la completitud sin caer en simplificaciones. Tal como lo señalaron los Estándares del (MEN, 2006) y diversas investigaciones, las propiedades del sistema real no se enseñan como objetos matemáticos con historia y estructura, sino como simples consecuencias operativas. Esta omisión pedagógica alimenta una visión fragmentada y superficial de los reales, donde los irracionales aparecen como "extraños", y la recta se concibe como una simple colección densa de puntos, sin un sustento lógico que explique su construcción.

Pero lo más relevante que deja este trabajo para la educación matemática es la conciencia de que la historia y la epistemología no son adorno, ni un “plus cultural”, sino condiciones necesarias para una enseñanza crítica y profunda. Mostrar que la continuidad y la completitud fueron problemas, que los números reales no “existieron siempre”, que los métodos de Dedekind y Cantor implicaron decisiones conceptuales, filosóficas y técnicas, permite devolverle al aula un sentido formativo más amplio, donde se enseña no solo a resolver problemas, sino a comprender la estructura misma del pensamiento matemático.

Este enfoque tiene consecuencias curriculares claras. La formación docente debe incluir una preparación sólida no solo en los contenidos, sino en su genealogía conceptual. El docente que enseña los reales sin conocer qué significa el axioma de completitud, o por qué la continuidad no es simplemente “no saltar”, está limitado para responder a las preguntas profundas que los estudiantes se hacen. Por eso, esta investigación también es una invitación a repensar el rol del profesor como mediador epistemológico, capaz de traducir siglos de pensamiento en experiencias significativas para sus alumnos.

Finalmente, este trabajo deja planteadas nuevas preguntas. En particular, la tensión conceptual que se vislumbró entre continuidad y completitud en el caso de Dedekind —donde se confunden y se solapan— podría dar lugar a investigaciones más específicas que analicen si existe, en el fondo, una propiedad matemática más general que las englobe o explique su relación. Esta posibilidad fue sugerida en la fase final del análisis comparativo, y se deja planteada como línea de investigación futura.

Del mismo modo, queda abierta la reflexión sobre el estatus lógico de estos principios: ¿son axiomas, consecuencias, definiciones? ¿Cuál es su lugar en una axiomática moderna, y cómo se justifica su elección? ¿Es posible pensar una teoría de los números reales que parta de otros principios, o estas propiedades son verdaderamente insustituibles?

En suma, esta investigación ha respondido con rigor a la pregunta que la originó, pero también ha mostrado que la buena matemática nunca cierra del todo. Siempre deja abierta una grieta por donde se cuela la próxima pregunta, el próximo asombro, el próximo trabajo. Y esa es quizás su lección más profunda: entender que el conocimiento, como el continuo mismo, no se salta, pero tampoco se agota.

Referencias

Apostol, T. M. (2020). *Análisis matemático.* Reverté.

Arbeláez, G. &. (2011). *El conjunto de los números reales como objeto matemático: la 'construcción' de Dedekind. Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica.* Cali: Universidad del Valle, 135-162.

Aristóteles. (1998). *Física.* Madrid: Planeta DeAgostini.

Bergé y Sessa. (2003). *Completitud y continuidad revisadas durante 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica.* Relime, Vol 6, núm. 3, pp. 163-197.

Brolezzi, A. C. (1997). *A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.*

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática.* Universidad de Antioquia.

Cantor G & Domínguez, J. F. (2005). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos.* escritos y correspondencia selecta. Grupo Planeta (GBS).

Caveing, M. (1984). *Algunas observaciones sobre el trato que recibe el continuo en los" Elementos" de Euclides y en la" Física" de Aristóteles. In Pensar la matemática (pp. 17-42).* Tusquets.

Coaquira Torres, E. (2023). *Nuevo enfoque topológico de los reales a partir de los hiperreales: Una descripción de la continuidad, completitud y compacidad.*

Courant, R. &. (1979). *Introducción al cálculo y al análisis matemático.* Vol. I.

Dedekind. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Vieweg. El libro fue publicado en Brunswick.

Dedekind. (1963). *Essays on the theory of numbers.* (W. W. Beman, Trans.). Dover Publications. (Original work published 1888).

Dedekind, R. (1927). *Continuidad y números irracionales.* (J. B. Climent, Ed., & T. d. (1927)., Trad.) Recuperado desde http://www. uv. es/jkliment/Documentos/Dedekind. pc. pdf.

Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza.

Dhombres. (1993). *Dhombres, J. (1993). Las progresiones infinitas: el papel del discreto y del continuo en el siglo XVII. Llull.* Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 16(30), 43-114.

Ferreirós, J. (1999). *Labyrinth of thought: A history of set theory and its role in modern mathematics.* Birkhäuser.

Gómez, E., & Ferreirós, J. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos.* españa: Editorial Critica, S. L.,Diagonal, 662-664. 08034 Barcelona.

Jarník, V. (1981). *Bolzano and the foundatíons of mathematical analysis.* Incluido en el libro On the occasion of the bicentennial of Bernard Bolzano. Society of Czechoslovak mathematicians and physicists.

Jiménez, M. H. (2009). *Análisis matemático en R.* UCP Enrique José Varona. La Habana, Cuba.

López, L. (2008). *Los números reales y la noción de completez en Cantor, Dedekind e Hilbert: Un Análisis Histórico - Epistemológico.* Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciada en Matemáticas. Univalle, Cali, Colombia.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.* bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas.* bogotá.

Montoro, V., & Ferrero, M. (2022). *DIVERSIDAD DE IDEAS CONSTRUIDAS POR ESTUDIANTES SOBRE LOS NÚMEROS REALES, LOS NÚMEROS IRRACIONALES, EL ORDEN Y LA DENSIDAD.* REM, 37(1), 61-92.

Recalde, L. (2024). *Lecturas de historia de las matemáticas.* Universidad del Valle.

Recalde, L. C. (2011). *Los números reales como objeto matemático: Una perspectiva histórico epistemológica.* Universidad del Valle.

Rojas, L. (1999). *Reseña histórica de los números reales.* Revista de la Facultad de Ingeniería, pp.77-86. .

Rudin, W. S. (1980). *Principios de análisis matemático.* McGraw-Hill.

Stroyan K & Luxemburg, W. (1976). *Introduction to the theory of infinitesimals.* Acad. Press, Mathematics, 72.

Suárez, C. (2021). *El sistema de los números reales* $\mathbb{R}$*, como conjunto numérico discontinuo.* Universidad Politécnica Territorial del Oeste de Sucre .

Téllez Sánchez, A. (2022). *Continuidad y conexidad. .* Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Torre Gómez, A. (2011). *Aspectos históricos relativos al concepto de continuo. .*