CUANTIFICACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA EN EL COMPORTAMIENTO DE MODELOS DE VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SOMETIDAS A FLEXIÓN.

Cristopher Angola Ararat
Estudiante No. 201941011

Directores: Albert R. Ortiz
Profesor titular, Universidad del valle
Gilberto Areiza
Profesor titular, Universidad del valle

Escuela de Ingeneiría Civil y Geomática
Programa de Ingeniería Civil
Trabajo de grado para optar al título de Ingeniero Civil
Facultad de Ingenieria
Grupo de Investigación en Ingeniería Sísmica, Eólica, Geotécnica y Estructural (G-7)
Santiago de Cali, agosto 2025

Página intencionalmente dejada en blanco.

Nota de aceptación:

Carlos Alberto Madera Sierra, Ph.D.
Director Pregado de Ingeniería Civil

Firma del jurado

Firma del jurado

Albert R. Ortiz, Ph.D.
Director

Gilberto Areiza, MSc.
Co-director

Ciudad y fecha

Agradecimientos

En primer lugar, doy gracias a Dios por guiarme y protegerme en todo momento. A mi madre, ***Julieta Ararat Rodríguez***, y a mi padre, ***Fernando Angola Quintero***, por su apoyo incondicional. También agradezco a mi tía, ***María Isabel Ararat Fory***, por ser un bastón en mi proceso.

Mi gratitud a mis directores de tesis, ***Albert Ortiz*** y ***Gilberto Areiza***, por su orientación y consejos cada vez que los necesité. Asimismo, al ingeniero ***Miller Ocampo***, responsable directo del desarrollo experimental y la obtención de resultados.

Agradezco profundamente a mis compañeros de investigación de estos casi tres años, ***Juan Manuel Orozco*** y ***Oscar Hurtado***, así como a mis amigos ***Andrés***, ***Juan*** y ***Luisa*** por su motivación y apoyo constante.

Finalmente, gracias a la Universidad del Valle por brindarme las oportunidades para crecer académica y profesionalmente, y a la Escuela de Ingeniería Civil y sus profesores por retarme a dar siempre lo mejor de mí.

Dedico este trabajo y la obtención de mi título universitario a mis queridos primos ***Juan Jacob Banguero*** y ***Álvaro José Banguero***, en especial a Álvaro, quien ya no está con nosotros, pero su alegría y carisma siempre me acompañan.

Resumen

Esta investigación cuantifica la incertidumbre paramétrica en el comportamiento flexural de vigas de concreto reforzado combinando ensayos experimentales con modelación numérica. Se fabricó y ensayó una viga a cuatro puntos, instrumentada con galgas extensométricas, LVDT y correlación digital de imágenes, junto con cilindros gemelos para caracterizar el concreto. En *OpenSeesPy* se desarrollaron dos modelos: (i) una sección de fibras personalizada (*Patch*) y (ii) la sección estándar *RC Section*. Los parámetros clave (f_c, k_{fc}, f_t, F_y, E_s) se calibraron mediante inferencia bayesiana (MCMC) tras un análisis de sensibilidad *one-at-a-time*. Las curvas carga–desplazamiento y las deformaciones del refuerzo simuladas se validaron mediante *posterior predictive check*. Los resultados muestran que el modelo RC section es mas preciso pero menos exacto al momento de seguir la curva real del elemento. Las distribuciones posteriores demostraron reducir la incertidumbre entre 2 y 10 veces según cada parámetro. El patch demostró tener un gasto computacional significativamente mayor. Se concluye que este estudio permite caracterizar de manera eficiente las propiedades de los materiales a partir del comportamiento de un elemento ya construido.

Palabras clave: Cuantificación de incertidumbre, actualización bayesiana, vigas de concreto reforzado, elementos finitos, inferencia MCMC

Página intencionalmente dejada en blanco.

Abstract

This research quantifies parametric uncertainty in the flexural behavior of reinforced concrete beams by combining experimental testing with numerical modeling. A four-point bending beam was cast and tested, instrumented with strain gauges, LVDTs, and digital image correlation, together with companion cylinders to characterize the concrete. In *OpenSeesPy*, two models were developed: (i) a custom fiber section (*Patch*) and (ii) the standard *RCSection*. The key parameters (f_c, k_{fc}, f_t, F_y, E_s) were calibrated via Bayesian inference (MCMC) following a one-at-a-time sensitivity analysis. The simulated load–displacement curves and reinforcement strains were validated through a posterior predictive check. Results show that *RCSection* is more precise but less accurate in tracking the measured response. Posterior distributions reduced uncertainty by a factor of 2 to 10, depending on the parameter. The *Patch* model exhibited a significantly higher computational cost. It is concluded that this framework efficiently characterizes material properties from the behavior of an already constructed element.

Keywords: Uncertainty quantification, Bayesian updating, reinforced-concrete beams, finite-element modelling, MCMC inference

Página intencionalmente dejada en blanco.

Índice general

Índice general ix

Índice de figuras xi

Índice de cuadros 1

1. Introducción 2
- 1.1. Motivación . . . 2
- 1.2. Objetivos . . . 3
- 1.3. Contribución. . . . 3
- 1.4. Alcance . . . 4

2. Marco Teórico 6
- 2.1. Análisis de vigas en concreto reforzado . . . 6
- 2.2. Modelización de estructuras mediante el método de los elementos finitos (MEF) . . . 8
  - 2.2.1. Fundamentos históricos . . . 9
  - 2.2.2. Esquema general y tipos de elementos . . . 9
  - 2.2.3. Formulación básica . . . 9
  - 2.2.4. Avances clave para estructuras de concreto . . . 9
- 2.3. Método de Monte Carlo . . . 10
- 2.4. Análisis de sensibilidad . . . 10
- 2.5. Probabilidad condicional y teorema de bayes . . . 11
- 2.6. Métodos de Montecarlo basados en cadenas de Márkov . . . 12
- 2.7. Funciones de densidad de probabilidad . . . 12
- 2.8. Tamaño de muestra efectivo (ESS) . . . 13
- 2.9. Error estándar de Monte Carlo (MCSE) . . . 13
- 2.10. Antecedentes. . . . 13

3. Metodología 17
- 3.1. Diseño y construcción de vigas de concreto reforzado . . . 17
- 3.2. Construcción de modelos . . . 21
- 3.3. Ajuste de modelo de elementos finitos usando inferencia bayesiana . . . 25

3.3.1. Función objetivo 25
3.3.2. Estimación de parámetros 26
3.4. Desarrollo experimental 30

4. Resultados **35**
4.1. Ajuste paramétrico de los modelos 37
4.1.1. Evaluación del ajuste 37
4.1.2. Distribuciones posteriores 41
4.1.3. Comprobación de la predicción posterior 53
4.1.4. Interpretación física de los resultados 54

5. Conclusiones **57**
5.1. Recomendaciones 58

Índice de figuras

2.1. Il Teoría de flexión Bernoulli 7

3.1. Diseño vigas de falla por flexión. Dimensiones en metros 18
3.2. Localización en el momento del vaciado 19
3.3. Obtención de cilindros de prueba 20
3.4. Foto de montaje experimental 20
3.5. Proceso de modelado en OpenSees. 23
3.6. Sección transversal de fibras para vigas VF 24
3.7. Modelo del acero utilizado con valores nominales 25
3.8. Distribuciones *prior* para los parámetros mecánicos principales. 27
3.9. Distribuciones *prior* para los parámetros de concreto confinado. 28
3.10. Factor de confinamiento. Tomada de Mander et al. (1988) 30
3.11. Montaje experimental para el ensayo de los cilindros 31
3.12. Montaje experimental para el ensayo de las vigas 32
3.13. Protocolo de carga controlado por desplazamiento empleado en el ensayo, compuesto por cinco etapas de dos ciclos idénticos en niveles sucesivos de desplazamiento) 33
3.14. Historial de carga impuesto por el actuador durante el ensayo: sucesivos ciclos de carga-descarga con incrementos hasta los valores máximos predefinidos 34

4.1. Análisis de sensibilidad para modelo RC section 36
4.2. Análisis de sensibilidad para modelo Patch section 37
4.3. Comparación de desplazamientos observados vs modelo ajustado . . . 38
4.4. Comparación de carga vs deflexión modelo ajustado 39
4.5. Comparación de deformaciones en el acero inferior modelo ajustado . . 40
4.6. Gráfico de barras de la función de autocorrelación para la secuencia de parámetros modelo “RC Section”. 40
4.7. Gráfico de barras de la función de autocorrelación para la secuencia de parámetros modelo “Patch”. 41
4.8. Gráfico de correlación modelo RC section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es 42

4.9. Gráfico de correlación modelo Patch section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es 43
4.10. Distribuciones *prior y posterior* para ambos modelos. 44
4.11. Distribuciones *prior y posterior* para ambos modelos. 45
4.12. Gráfico de violín distribución posterior modelo RC section. Resultados en Pascales 46
4.13. Gráfico de violín distribución posterior modelo Patch section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es 46
4.14. Gráfico tipo forest con intervalo de confianza del 95 % para modelo RC section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es 47
4.15. Gráfico tipo forest con intervalo de confianza del 95 % para modelo Patch Section. Resultados en Pascales 48
4.16. Evolución progresiva de las grietas medida con DIC. 49
4.17. Patch — curvas esfuerzo–deformación para la zona central (k_{fc}). Se muestran todas las muestras (gris) y las bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$. 51
4.18. RC Section — curvas esfuerzo–deformación para la zona central (k_{fc}). Incluye muestras (gris) y bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$. 51
4.19. Patch — curvas esfuerzo–deformación para la zona de extremos (k_{fc2}). Incluye muestras (gris) y bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$. 52
4.20. RC Section — curvas esfuerzo–deformación para la zona de extremos (k_{fc2}). Incluye muestras (gris) y bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$. 52
4.21. Posterior predictive check para los desplazamientos observados modelo RC section. 53
4.22. Posterior predictive check para los desplazamientos observados modelo Patch. 54

Índice de cuadros

3.1. Resumen de propiedades de materiales, cargas y geometría para vigas de falla a flexión 17
3.2. Comparación entre los dos modelos de sección de fibras implementados en OpenSeesPy. 21
3.3. Parámetros de ajuste y sus distribuciones *prior*. 26

4.1. Resultados ensayos a compresión en cilindros de concreto. 35
4.2. Resumen de las distribuciones posteriores para ambos modelos y comparación de varianzas. 41
4.3. Comparación de métricas diagnósticas MCMC para ambos modelos (3 cadenas, 1000 iteraciones cada una). Los valores del modelo *RC section* se mantienen cercanos a los del modelo *Patch*, pero muestran un ESS ligeramente menor y un MCSE algo mayor, indicando una eficiencia de muestreo algo inferior, aunque con convergencia aceptable ($\widehat{R} \leq 1{,}01$). . 42
4.4. Valores de k_{fc} en función de ρ para cada zona de confinamiento. 49
4.5. Media de los parámetros de confinamiento k_{fc} y k_{fc2} para ambos modelos, junto con el promedio global por modelo. 50
4.6. Comparación de errores (MSE, RMSE, MAE) para los modelos RC-Section y Patch-Section. 56

1 Introducción

1.1. Motivación

Desde el inicio de la ingeniería estructural, los cálculos se han realizado basándose en suposiciones que llevan a la práctica experimental para poder determinar si estas hipótesis se asemejan a lo que es la realidad. Estas suposiciones se han determinado como consecuencia del desarrollo de la teoría basado en numerosos estudios que han contribuido a mejorar la comprensión que se tiene, por ejemplo, del comportamiento mecánico de los materiales. Un ejemplo de ello es la investigación realizada por Bournonville et al. (2004), en la cual se realizó un análisis estadístico de las propiedades mecánicas del acero de distintos grados de fabricación canadiense y estadounidense. La llegada de la computación moderna ha propuesto una alternativa para solucionar lo anterior con programas que permiten modelar las estructuras y hacer cambios en su configuración. Sin embargo, es importante reconocer que los modelos numéricos continúan basándose en suposiciones que representan condiciones "ideales", las cuales simplifican la realidad y, por ende, no capturan completamente la complejidad y variabilidad inherentes a las estructuras reales. Para superar estas limitaciones y obtener una comprensión más profunda y realista del comportamiento estructural, emergen los modelos probabilísticos. Estos modelos permiten incorporar la variabilidad y la incertidumbre, proporcionando una representación más acertada de cómo se comportan los elementos en condiciones reales. Un ejemplo de ello es la investigación realizada por Hurtado et al. (2024), en la que se evalúa mediante métodos bayesianos los límites de cuantía de acero para vigas de concreto reforzado.

Al comparar la verosimilitud de los resultados obtenidos en la realidad con las predicciones de los modelos teóricos, es posible cuantificar la incertidumbre asociada a estos últimos. Este proceso de comparación no solo valida la precisión de los modelos, sino que también permite identificar posibles mejoras a las suposiciones iniciales de sus parámetros.

Los modelos probabilísticos también permiten al usuario incorporar una amplia variedad de hipótesis y crear resultados que estén vinculados a estas, proporcionando una visión detallada de la incertidumbre que rodea los parámetros estructurales.

Más aún, debido a la facilidad de expresar relaciones y correlaciones entre diferentes variables.

En este sentido, Baji (2014b) presenta un estudio en el que evalúa cómo las propiedades de los materiales afecta la confiabilidad de la resistencia y ductilidad de los elementos de concreto reforzado. Esta investigación concluyó con la importancia de incorporar la incertidumbre de los materiales en el diseño estructural, derivando de aquí la siguiente pregunta de investigación ***¿Cuál es la incertidumbre en los modelos de concreto reforzado utilizados para la predicción del comportamiento de vigas reforzadas sometidas a flexión?***. Otras preguntas que surgen son: ¿Qué tan confiable son los métodos utilizados para el cálculo estructural?, ¿Es necesario caracterizar con mayor exactitud la presencia de la incertidumbre paramétrica?, ¿Cuáles son los factores que aportan más incertidumbre a los modelos de vigas de concreto reforzado? Para ello se debe dar respuesta a ¿cómo crear un modelo que determine la afectación de las incertidumbres en el comportamiento experimental de vigas?

La anterior situación llevó a plantear los objetivos de investigación:

1.2. Objetivos

Objetivo general.

Cuantificar la incertidumbre asociada a algunos modelos de vigas de concreto reforzado sometidas a flexión.

Objetivos específicos.

- Evaluar el comportamiento de algunos modelos numéricos de vigas de concreto reforzado.
- Caracterizar el comportamiento experimental de un elemento de concreto reforzado sometido a flexión.
- Determinar la propagación de incertidumbre en modelos de vigas de concreto reforzado a partir de la variabilidad de los materiales medida experimentalmente.

1.3. Contribución.

La ingeniería estructural juega un papel fundamental en el desarrollo de infraestructuras seguras, eficientes y sostenibles que satisfacen las necesidades de la sociedad moderna. A lo largo de la historia, el diseño y análisis de estructuras han dependido de modelos teóricos y experimentales que, aunque robustos, presentan limitaciones inherentes debido a las simplificaciones y suposiciones necesarias para su aplicación práctica. En este contexto, la incorporación de modelos probabilísticos emerge como una herramienta esencial para abordar las incertidumbres y variabilidades presentes en los materiales, condiciones de carga y comportamientos estructurales.

Uno de los principales desafíos en la ingeniería estructural es la predicción precisa del comportamiento de las estructuras bajo diversas condiciones de carga y ambientales. Los métodos tradicionales, basados en enfoques deterministas, a menudo no logran capturar la complejidad y la aleatoriedad inherentes a los sistemas estructurales reales Smith et al. (2018). Las incertidumbres en las propiedades de los materiales, las variaciones en las condiciones de carga y las imperfecciones constructivas pueden influir significativamente en la integridad y seguridad de las estructuras. Por lo tanto, es crucial desarrollar enfoques que integren estas incertidumbres de manera sistemática y cuantitativa en el proceso de diseño y análisis estructural.

Los modelos probabilísticos permiten una representación más realista de las variabilidades y proporcionan una base sólida para la toma de decisiones informadas. Al considerar múltiples escenarios y posibles variaciones, estos modelos facilitan la evaluación de riesgos y la optimización de diseños para mejorar la resiliencia y durabilidad de las estructuras J. Hassoun et al. (2020). Además, la combinación de métodos probabilísticos con técnicas de inferencia estadística avanzada ofrece una capacidad mejorada para predecir comportamientos estructurales complejos y gestionar las incertidumbres de manera efectiva Monteiro et al. (2021).

La justificación de esta investigación radica en la necesidad de superar las limitaciones de los enfoques deterministas tradicionales y aprovechar las ventajas que ofrecen los modelos probabilísticos. Todo en pro de mejorar la confiabilidad y seguridad de las estructuras civiles. Al desarrollar y aplicar modelos probabilísticos robustos, se puede lograr una mejor comprensión de las incertidumbres inherentes y su impacto en el desempeño estructural. Además de que a su vez, contribuye a la creación de infraestructuras más seguras y sostenibles.

Además, el avance en la computación moderna y el acceso a herramientas de modelado sofisticadas han facilitado la implementación de enfoques probabilísticos en el análisis estructural. De esta manera es posible realizar simulaciones más detalladas y precisas sin incurrir en los elevados costos y tiempos asociados con los ensayos experimentales tradicionales Garcia et al. (2019). Esta investigación, por lo tanto, no solo responde a una necesidad técnica dentro del campo de la ingeniería estructural, sino que también aprovecha los avances tecnológicos actuales para impulsar innovaciones significativas en el diseño y análisis de estructuras.

1.4. Alcance

El estudio tiene como objetivo la construcción y prueba de una viga de concreto reforzado, la formulación de modelos que describen su comportamiento estructural y la posterior comparación de los resultados experimentales con los teóricos. Estas actividades permitirán evaluar el rendimiento predictivo de los modelos y su utilidad en el diseño de este tipo de elementos.

El modelo desarrollado en esta investigación se enfoca en describir el comportamiento flexural de las vigas de concreto reforzado, bajo condiciones de carga incre-

mental. Este tipo de modelos permiten analizar la ductilidad de curvatura, así como las deformaciones unitarias tanto en el concreto como en el acero de refuerzo. De esta manera, se busca obtener una visión detallada del comportamiento de las vigas en términos de su capacidad de deformación y la redistribución interna de esfuerzos cuando se someten a carga. Este enfoque contribuye a una comprensión más precisa de cómo el concreto y el acero intervienen en el comportamiento global del elemento.

Las deformaciones unitarias obtenidas tanto de forma experimental como a través de simulaciones serán analizadas para identificar discrepancias y cuantificar la influencia de distintos parámetros, como las propiedades mecánicas de los materiales.

El alcance de este trabajo también incluye la aplicación de métodos probabilísticos para evaluar la incertidumbre en el comportamiento estructural de las vigas, lo cual permitirá identificar la sensibilidad de los resultados a los diferentes parámetros de entrada. La evaluación de la incertidumbre es fundamental para entender mejor los límites de los modelos y garantizar que los diseños basados en ellos sean seguros y eficientes en condiciones reales. De este modo, el estudio no solo busca validar los modelos, sino también contribuir al desarrollo de métodos de ajuste y calibración que mejoren la predicción del comportamiento estructural.

2

Marco Teórico

2.1. Análisis de vigas en concreto reforzado

El diseño estructural está en un punto donde se desean alcanzar diseños de elementos que cumplan con diversos criterios. En consecuencia, y teniendo en cuenta que las vigas son elementos estructurales muy importantes para la transmisión de cargas, es necesario identificar la naturaleza de su comportamiento flexural. Por otro lado, las vigas son elementos que superan fácilmente un estado lineal, lo cual causa que sea importante determinar su comportamiento no lineal Kwak et al. (2002). Es así como las vigas por su propia naturaleza son evaluadas por su flexión, y a la vez esta última es asociada con la relación momento-curvatura. Muchas formulaciones son basadas a partir de esta relación Pandit et al. (2022). Cuando se realiza por ejemplo, un análisis momento-curvatura, el ingeniero tiene la capacidad de identificar el comportamiento carga-deformación que tendrá un elemento. Este se deriva en primera instancia de un análisis de la sección. Llevar a cabo este procedimiento de manera correcta es subsecuente con realizar una exploración del comportamiento de la estructura. Por eso, algunos autores como Mosley et al. (1999) consideran que es la mejor forma de comenzar a construir un diseño estructural de bajo costo. Es de común conocimiento que hacer un análisis complejo de manera teórica puede significar, en algunos casos, restar atención al diseño de cada uno de los miembros de la estructura. De manera general, el análisis de la sección trae consigo algunas consideraciones y suposiciones.

- Los esfuerzos y deformaciones están determinadas por las curvas "esfuerzo-deformación" de los materiales.
- La distribución de esfuerzos ha de ser compatible con la forma de la sección
- Debe haber equilibrio de fuerzas internas en la sección.

El análisis momento-curvatura se involucra en una secuencia iterativa donde se evalúa la respuesta de una sección transversal bajo la aplicación de un momento creciente. Esta técnica se utiliza ampliamente para estudiar la capacidad última de vigas y columnas, la redistribución de momentos y el comportamiento no lineal de materiales Alqarni et al. (2024). Este procedimiento se basa principalmente en la hipótesis de

deformaciones a flexión propuesta por Bernoulli (1750), en la que las secciones planas permanecen planas en todo el miembro. Lo mencionado anteriormente aplica en elementos esbeltos Öchsner et al. (2021). Tal y como se muestra en Figura 2.1.

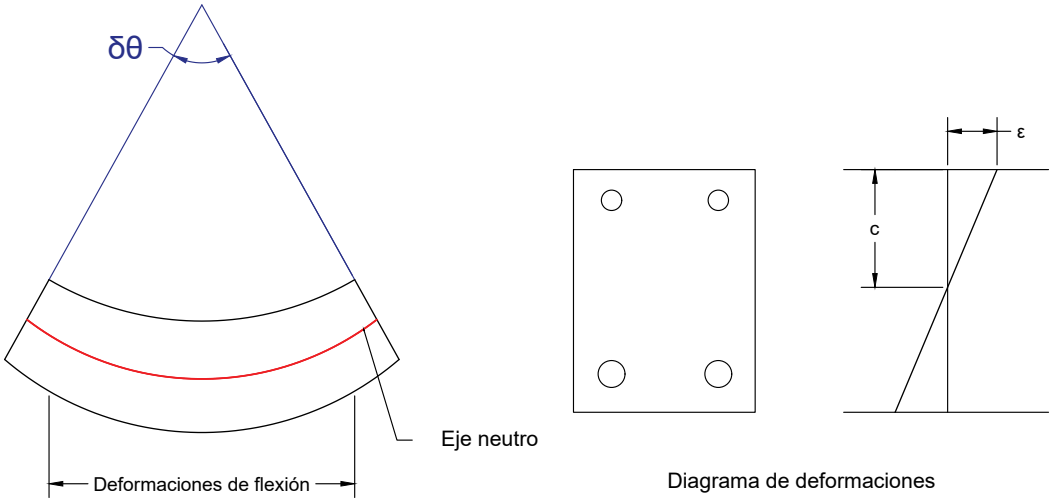


Figura 2.1: *Il Teoría de flexión de Bernoulli, y diagrama de deformación para una viga sujeta a flexión*

De la figura anterior se desprende tal y como se muestra en la ecuación (2.1), la curvatura (ϕ) está directamente relacionada con la deformación (ϵ) y la profundidad del eje neutro (c).

$$\phi = \frac{\epsilon}{c} \tag{2.1}$$

Durante el análisis se distinguen tres estados principales de carga: el momento de agrietamiento, el estado de fluencia, y la carga última Hyo-Gyoung Kwak et al. (2002). En el momento de agrietamiento, comienzan a aparecer las primeras grietas visibles, mientras que tanto el concreto como el acero aún se comportan de manera lineal. Por lo tanto, la profundidad del eje neutro puede calcularse mediante la teoría elástica mediante la ecuación (2.2). El momento de agrietamiento se calcula como el producto de la relación entre el momento de inercia y la profundidad al eje neutro (2.3). Algunos autores deciden tomar la sección bruta, mientras que otros prefieren estimar la sección transformada.

$$k = \left[(\rho + \rho')n^2 + 2\left(\rho + \frac{\rho' d'}{d}\right)^{\frac{1}{2}} n\right] - (\rho + \rho')n \tag{2.2}$$

$$M_{cr} = f_{cr}\frac{I_T}{y_t} \tag{2.3}$$

En los siguientes dos estados los materiales se comportan de manera no lineal,

obligando, por un lado, a seguir una curva esfuerzo-deformación no lineal del concreto y del acero, y a determinar la profundidad del eje neutro mediante el equilibrio de fuerzas internas. El proceso del equilibrio interno es iterativo y puede extrapolarse a cualquier punto del diagrama. De esta manera es como, junto con el avance de la computación, se han desarrollado diversos métodos para construir el diagrama Baji (2014a). Las deformaciones en el acero pueden ser calculadas por compatibilidad de deformaciones (como consecuencia de las suposiciones iniciales) Sozen et al. (2014), facilitando la integración del cálculo de estas en el análisis flexural. Las ecuaciones (2.4) y (2.5), muestran las relaciones para calcular las deformaciones a compresión y tensión del acero respectivamente.

$$\varepsilon_{st} = \varepsilon_{cc}\left(\frac{d-x}{x}\right) \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{sc} = \varepsilon_{cc}\left(\frac{x-d'}{x}\right) \tag{2.5}$$

Algunos autores como Priestley et al. (2008) no esconden la importancia de conocer la ductilidad estructural, por ejemplo, a la hora de identificar el amortiguamiento en un diseño dinámico de una estructura. En este caso, Priestley propone en uno de sus estudios la ecuación (2.6). La misma determina la curvatura de fluencia de los elementos estructurales. En donde h es la altura del elemento; C1 es una constante que depende del tipo de elemento y ε_y es la deformación de fluencia del acero de refuerzo

$$\phi_y = C_1\frac{\varepsilon_y}{h} \tag{2.6}$$

Como conclusión, un análisis momento-curvatura permite estimar la seguridad de la estructura mediante un adecuado diseño de resistencia M. Hassoun et al. (2020). Esta premisa es válida siguiendo la discusión anterior sobre la relación entre las fuerzas internas y las deformaciones producidas. De hecho, es así como se realizan los diseños por flexión de estos elementos Sozen et al. (2014).

2.2. Modelización de estructuras mediante el método de los elementos finitos (MEF)

El método de los elementos finitos se ha consolidado como la herramienta numérica dominante para el análisis de estructuras civiles y mecánicas Chandrupatla et al. (2021).

2.2.1. Fundamentos históricos

En ingeniería civil, la modelización con el método de los elementos finitos (MEF) se popularizó tras los trabajos de Clough y Wilson en los años cincuenta, quienes retomaron la formulación variacional de Courant et al. (1994). Poco después, Turner et al. (1956) introdujo matrices de rigidez para sólidos tridimensionales, y Clough forjó poco después el término *Finite Element Method* Clough et al. (1999).

2.2.2. Esquema general y tipos de elementos

El MEF divide la estructura continua en un conjunto de pequeños "elementos" conectados en nodos. Al incrementar el número de elementos, la respuesta aproximada converge a la solución real. Existen diversos tipos, entre ellos:

- **Elementos 1D**: barras y vigas (lineales, de fibra, Timoshenko).
- **Elementos 2D**: triángulos y cuadriláteros para membranas o placas; cascarones curvos para puentes y cubiertas.
- **Elementos 3D**: tetraedros y hexaedros para sólidos de hormigón o terreno.

La elección depende de la geometría, el estado de esfuerzos y el nivel de detalle buscado. Para vigas de concreto reforzado, los elementos de *fibra* permiten discretizar la sección transversal en fibras de concreto y acero, reproduciendo fisuración y plastificación Spacone et al. (1996a).

2.2.3. Formulación básica

La formulación clásica del MEF parte de un principio variacional —mínimo de trabajo interno o energía— y de una ley constitutiva que relaciona tensiones y deformaciones en cada elemento. Al ensamblar todos los elementos se obtiene un sistema algebraico $\mathbf{Ku} = \mathbf{F}$, donde $\mathbf{u}$ agrupa los desplazamientos desconocidos y $\mathbf{K}$ la rigidez global. Dicho sistema se resuelve con programas de elementos finitos, como OpenSees, empleado en este proyecto para analizar las vigas de ensayo.

2.2.4. Avances clave para estructuras de concreto

- **Elementos de fibra**. Spacone et al. (Spacone et al., 1996a) formularon el modelo viga–columna no lineal usado hoy en OpenSees.
- **Modelos de daño–plasticidad**. Lubliner et al. y Lee & Fenves Lubliner et al. (1989) y Lee et al. (1998) capturan fisuración y aplastamiento de concreto.
- **Incorporación de incertidumbre**. Elementos finitos estocásticos Ghanem et al. (2003) que permiten propagar variabilidad material.

Estos desarrollos sustentan la estrategia numérica adoptada: modelar las vigas de concreto reforzado con elementos de fibra en OpenSees, calibrar los parámetros constitutivos mediante inferencia bayesiana y cuantificar la incertidumbre resultante.

2.3. Método de Monte Carlo

En la ingeniería estructural los ingenieros deben demostrar que la estructura es confiable dentro de un nivel de serviciabilidad o capacidad resistente. En este sentido, el método de Monte Carlo se sitúa como una de las maneras más exactas de lidiar con la variabilidad Cardoso et al. (2008). Volviendo a los principios del método, realizar una simulación de Monte Carlo es un proceso estadístico. Este procedimiento comienza con determinar cientos de muestras y observar su comportamiento dentro de una función. Finalmente, el objetivo es determinar el valor esperado de la función propagando la variación de las muestras. La fórmula básica de este método se define de la siguiente manera, en donde se estima el valor esperado "E" de una función f(x) Zhang et al. (2010).

$$\hat{E}[f(X)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_i) \tag{2.7}$$

En la ecuación (2.7) cada elemento corresponde a:

- $\hat{E}[f(X)]$**:** Representa la *estimación* del valor esperado de la función $f(X)$ basada en simulaciones aleatorias.
- $\frac{1}{N}$**:** Es un factor de normalización que divide la suma de las evaluaciones de $f(X_i)$ entre el número total de simulaciones, N.
- $\sum_{i=1}^{N}$**:** Es una suma acumulativa que agrega los valores de $f(X)$ evaluados en las diferentes muestras X_i.
- $f(X_i)$**:** Representa la evaluación de la función $f(X)$ en la muestra X_i.
- N**:** Es el número total de simulaciones o muestras generadas.

2.4. Análisis de sensibilidad

Cuando se tiene un modelo es necesario realizar un análisis de sensibilidad que facilite su comprensión. Principalmente, este análisis viene de identificar de donde proviene la variabilidad de la salida de un modelo. Surge de preguntarse ¿a qué parámetros se le puede atribuir la incertidumbre del modelo?, o incluso ¿en qué porcentaje es cada parámetro responsable de esta variabilidad? En este proyecto se realizó un análisis de sensibilidad con los siguientes objetivos:

- Identificación de Parámetros Críticos: Determinar cuáles parámetros tienen mayor influencia en la respuesta del modelo.
- Reducción de Incertidumbre: Enfocar esfuerzos en obtener datos más precisos de los parámetros más influyentes.
- Validación y Verificación del Modelo: Evaluar la robustez y confiabilidad del modelo ante variaciones en los parámetros.

- Optimización: Facilitar el proceso de optimización al identificar los parámetros que afectan significativamente el rendimiento.

En esta investigación se realizó un análisis de sensibilidad global basado en correlaciones, implementado mediante las simulaciones de Monte Carlo. El análisis de sensibilidad global basado en correlaciones evalúa la influencia de los parámetros de entrada en las respuestas del modelo, considerando toda la variabilidad posible de los parámetros. También se realizó un análisis de sensibilidad usando la librería SAlib. La cual también realiza un análisis de sensibilidad global.

2.5. Probabilidad condicional y teorema de bayes

En la teoría de la probabilidad, la probabilidad condicional es una medida que determina la probabilidad de que ocurra un evento, bajo la condición de que otro evento ya haya sucedido.

En ese sentido, el teorema de Bayes se define como la probabilidad de una hipótesis H condicionada a un conjunto dado de datos E tal y como lo muestra la expresión (2.8).

$$P_E(H) = \frac{P(H \cdot E)}{P(E)} \tag{2.8}$$

Donde:

- $P_E(H)$: Es la probabilidad de H condicionada a los datos E.
- $P(H \cdot E)$: Es la probabilidad incondicional de la conjunción de la hipótesis H con los datos E.
- $P(E)$: Es la probabilidad incondicional de los datos E, siempre que $P(E) > 0$.

A partir de la Ecuación (2.8), se derivan las siguientes propiedades y definiciones:

- Si E implica H, entonces $P_E(H) = 1$.
- Si $P(H) = 1$, entonces $P_E(H) = 1$.
- La probabilidad de H puede expresarse como:

$$P(H) = P(E) \cdot P_E(H) + P(E) \cdot P_E(H)$$

Cuando la inferencia bayesiana se aplica al ajuste de modelos, el objetivo es estimar la distribución posterior de los parámetros desconocidos dado un conjunto de datos observados. La regla de Bayes es la base de este enfoque y en ese caso se formula de la siguiente manera Wang et al. (2019):

$$P(\theta \mid \text{datos}) = \frac{P(\text{datos} \mid \theta)P(\theta)}{P(\text{datos})} \tag{2.9}$$

Donde:

- $P(\theta \mid \text{datos})$ es la **distribución posterior** de los parámetros θ dado los datos.

- $P(\text{datos} \mid \theta)$ es la **verosimilitud** (likelihood), la probabilidad de observar los datos dado θ.
- $P(\theta)$ es el **prior** (a priori), nuestra creencia inicial sobre los parámetros antes de observar los datos.
- $P(\text{datos})$ es la **evidencia** o probabilidad marginal de los datos, que actúa como constante de normalización.

2.6. Métodos de Montecarlo basados en cadenas de Márkov

Las cadenas de Márkov son un proceso estocástico discreto en el que se cumple la propiedad de Márkov. Esta propiedad indica que la probabilidad de que ocurra un evento en un espacio de estados depende solo del evento anterior y no de la cadena completa. La propiedad que permite esto se llama propiedad estacionaria. Una disposición estandarizada para los estados de una cadena de Márkov es una disposición que se conserva a lo largo del tiempo. Si π corresponde a una distribución estacionaria, entonces la ecuación 2.10 debe ser satisfecha. Si se selecciona el estado inicial utilizando una distribución estacionaria, el proceso de Márkov al final resultará siendo estacionario.

$$\pi = \pi \times P \tag{2.10}$$

2.7. Funciones de densidad de probabilidad

Una función de densidad de probabilidad es fundamental en la estadística. Estas describen cómo se distribuyen los valores de una variable aleatoria continua. Es decir, que un FDP indica la probabilidad de que una variable tome un valor o cierta región de valores. Estas funciones se definen para variables aleatorias continuas. En un rango continuo, estas variables se caracterizan porque pueden tomar cualquier valor continuo dentro del mismo.

Sea X una variable aleatoria continua. Una **función de densidad de probabilidad** $f(x)$ cumple las siguientes propiedades Mokheef (2016):

1. **No Negatividad:**
$$f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
2. **Normalización:**
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$$
3. **Probabilidad en un Intervalo:** La probabilidad de que X caiga dentro de un intervalo $[a, b]$ está dada por:
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

2.8. Tamaño de muestra efectivo (ESS)

El tamaño de muestra efectivo es una métrica que permite determinar y evaluar la calidad y utilidad de las muestras generadas en un análisis MCMC. Las muestras generadas por métodos MCMC generalmente presentan correlación entre sí. Esta correlación reduce la cantidad de "información nueva" que cada muestra aporta al análisis. El ESS surge precisamente para cuantificar qué tan efectiva es una muestra al identificar cuánta de su información está correlacionada.

2.9. Error estándar de Monte Carlo (MCSE)

El error estándar Monte Carlo (MCSE, en la versión original en inglés de Monte Carlo standard error) es una medida estadística que tiene la función de estimar la incertidumbre que se ha generado por el muestreo de un Monte Carlo restringido, indicando su aplicación en los métodos de inferencia que se vienen empleando para métodos de inferencia del tipo MCMC (Monte Carlo Markov Chain). Para poder realizar inferencias a partir de MCMC, se obtiene una cadena de muestras de la distribución a posteriori de los parámetros del modelo. No obstante, estas muestras dependen entre sí y, así mismo, se da el caso de un número finito de estas; es por este hecho que las estimaciones puntuales, como la media posterior de un parámetro, tienen un pequeño problema adicional que tiene que ver con el hecho de que el muestreo tiene alcance limitado.

2.10. Antecedentes.

El ser humano tiene una urgente necesidad de aumentar sus conocimientos. Ha evolucionado en su búsqueda de mejora a través del razonamiento, especialmente en situaciones donde la información es escasa, algo común en áreas como ciencias económicas, ingeniería y ciencias exactas. En el campo de la ingeniería estructural, se han realizado numerosos estudios para desarrollar la teoría y suposiciones del concreto reforzado. Estos avances han sido fundamentales para comprender el comportamiento y la resistencia de las estructuras de concreto reforzado, lo que ha permitido su aplicación en una amplia variedad de proyectos de construcción y obras civiles. La continua investigación y el análisis de datos siguen siendo esenciales para mejorar aún más nuestro entendimiento y asegurar la seguridad y fiabilidad de las estructuras en el futuro.

En la investigación realizada por Real et al. (2003), se aborda el análisis de la variabilidad en la respuesta estructural de elementos de concreto reforzado, considerando las incertidumbres en las propiedades geométricas y materiales de los mismos. Para esto, se realizaron pruebas experimentales a través de simulaciones de montecarlo en vigas y columnas de concreto reforzado, donde se evaluó la influencia de las incertidumbres en la geometría y las propiedades de los materiales en la variabilidad de la

respuesta estructural. El modelo de concreto con el que se realizaron las simulaciones es el modelo propuesto por Darwin et al. (1977). Se tuvo en cuenta como variables parametrizables la resistencia a compresión del hormigón (f'c), la resistencia a la tracción del hormigón (f'ct), la resistencia del módulo de elasticidad (Ec), el límite elástico del acero (fy), el módulo de elasticidad del acero (Es) y las dimensiones de la sección transversal, ancho (b) y alto (h). Para modelar esto crearon un modelo estocástico en el cual la desviación estándar corresponde a la desviación de la variable que está siendo simulada; con lo anterior se diseñaron tres vigas siguiendo la normativa del código de diseño de 1990 (f'c= 20 MPa y fy= 500 MPa) y se compararon los resultados de simular las vigas con las propiedades nominales con los obtenidos de la simulación del campo estocástico. Se encontró que la variabilidad en las propiedades del concreto tiene gran influencia sobre las deflexiones inmediatas en vigas sometidas a cargas de servicio. A medida que aumenta la dispersión en las propiedades del concreto, también aumenta la variabilidad en la respuesta estructural. Además, se observó mayor variabilidad cuando la carga aplicada estaba cercana a la carga de agrietamiento. Por otro lado, la resistencia última de las vigas dependió principalmente de la variabilidad en las propiedades mecánicas del acero, especialmente cuando se produce fluencia. En las columnas, la variabilidad en las propiedades del concreto fue aún más determinante debido al predominio de esfuerzos de compresión. Esta variabilidad aumentó considerablemente con la carga axial, especialmente al acercarse al colapso por aplastamiento del concreto. Las propiedades del acero tuvieron poca influencia en columnas diseñadas para fallar por aplastamiento del concreto. Finalmente, la variabilidad en las dimensiones geométricas afectó ligeramente la resistencia, con mayor impacto en columnas que en vigas, y esta influencia disminuyó conforme aumentaba la cuantía de refuerzo

Otra investigación es la realizada por Ribeiro et al. (2016), aquí se llevó a cabo una recopilación de resultados de investigaciones en las cuales la incertidumbre en los modelos fue evaluada. Se propone una base de datos que incluye información sobre ensayos de corte en vigas de hormigón armado delgadas. Esta base de datos permite identificar patrones y tendencias en los resultados de los ensayos, y puede ayudar a mejorar la precisión de los modelos de corte. Al analizar esto, se propuso un modelo para calcular la capacidad cortante de las vigas al sumar la contribución de los estribos y del concreto mismo.

Los resultados del modelo muestran que el porcentaje de error entre el esfuerzo de ruptura experimental y el esperado es menor en el modelo propuesto por ellos que en los ensayos realizados.

En el ámbito de las vigas de concreto reforzado, se han llevado a cabo varios estudios con el objetivo de caracterizar las propiedades estadísticas de estos elementos estructurales y propagar las incertidumbres a lo largo de un modelo. Un ejemplo de estos esfuerzos se encuentra en la investigación realizada por Galasso et al. (2014). En donde se llevaron a cabo pruebas en barras de acero para desarrollar un modelo de comportamiento del acero que abarca puntos clave como la fluencia y el endurecimien-

to por deformación. Este modelo de acero fue utilizado posteriormente para evaluar la incertidumbre en la resistencia flexional de vigas reforzadas.

En el estudio de Galasso, se propuso un modelo que incorpora la incertidumbre generada por la geometría y los materiales en la evaluación de la resistencia flexional de las vigas reforzadas. Esta consideración de incertidumbre permite tener en cuenta la variabilidad inherente en las propiedades de los materiales y en las dimensiones de las vigas, lo cual es fundamental para una evaluación más realista de su comportamiento. Algunos estudios cuantifican la incertidumbre en elementos estructurales de diferentes maneras. Por ejemplo, Ponsi et al. (2024) y Engen et al. (2017) cuantifican la incertidumbre paramétrica en modelos de vigas y estructuras usando 'bayesian model updating'. En el primero, se propuso un enfoque jerárquico basado en métodos bayesianos para evaluar la variabilidad inherente de parámetros en modelos de vigas sometidas a flexión. Este método es especialmente útil en ingeniería estructural cuando se trabaja con materiales de alta variabilidad, como los concretos reforzados con fibras (FRC). El procedimiento se aplicó para calibrar un modelo analítico de "cracked-hinge". Para ello, se emplearon resultados obtenidos de una campaña experimental realizada sobre especímenes diseñados de manera identica. Los resultados destacaron las ventajas del enfoque jerárquico frente a la calibración tradicional de un solo nivel. En particular, este enfoque permitió medir directamente la variabilidad inherente de los parámetros. Además, se comprobó que la información de diferentes ensayos puede aprovecharse para mejorar la calibración, incluso cuando solo se cuenta con un ensayo individual. Esto permitió reducir la incertidumbre en situaciones donde el esquema tradicional presentaba errores elevados. También se determinó, mediante análisis específicos, que un mínimo de 16 especímenes resulta suficiente para una evaluación precisa de esta variabilidad. Esto implica un potencial ahorro de tiempo y recursos en futuras campañas experimentales. Finalmente, se resaltó que el procedimiento tiene una aplicación directa en la evaluación probabilista de la seguridad estructural. Además, facilita la calibración adecuada de los coeficientes de seguridad parciales empleados en diseño.

Otra manera de calcular la incertidumbre es a partir de simulaciones de Montecarlo. Abbas (2023). En este estudio se evaluó el comportamiento al cortante de vigas de concreto reforzado de ultra alto desempeño (UHPC) mediante análisis por elementos finitos y técnicas de confiabilidad estructural. Los resultados indicaron que los modelos propuestos por los códigos ACI 318 y ACI-PRC 239/ACI 544 subestimaron constantemente la capacidad de cortante de estas vigas. Además, los índices de confiabilidad obtenidos con los códigos ACI estuvieron ligeramente por debajo del valor objetivo recomendado (4.15), lo cual implica posibles problemas de seguridad estructural. Por otra parte, el análisis por elementos finitos desarrollado alcanzó una excelente precisión, con una relación promedio prueba/predicción del 99.4 % y un bajo coeficiente de variación del 2.3 %, confirmando así su eficacia para evaluar la resistencia al cortante en vigas de UHPC. También cada vez se hace más común calcular la incertidumbre mediante el uso de redes neuronales Rayjada et al. (2023) y regresión cuantílica Nguyen et al. (2024). Algunos autores realizan modelos probabilísticos aplicando enfoques

jerárquicos para capturar la incertidumbre en múltiples niveles. Este método resulta especialmente útil cuando se analizan materiales o sistemas estructurales con propiedades variables, ya que permite descomponer la incertidumbre en diferentes escalas o etapas del modelo. Por ejemplo, Tao et al. (2022) desarrollaron un marco jerárquico probabilístico que considera la incertidumbre tanto en parámetros específicos de materiales como en los efectos derivados del procedimiento experimental y la variabilidad entre muestras. Mediante este enfoque, se obtiene una representación más precisa de la incertidumbre global del modelo, facilitando una mejor comprensión y gestión del riesgo en aplicaciones estructurales y de ingeniería. El enfoque jerárquico cobró fuerza cuando Imounga et al. (2021) modelaron la fisuración de vigas de concreto sometidas a cargas estáticas y cíclicas. Al tratar los parámetros de cada espécimen como realizaciones de una población común, lograron estimar la variabilidad intrínseca del umbral de daño con tan sólo tres probetas, evitando el sobreajuste característico de los esquemas de un nivel.

La transición desde validaciones «a ojo» hacia una cuantificación formal de la incertidumbre material y estructural comenzó a reflejarse en la literatura a partir de la década de 2010. Un hito temprano fue el estudio de Ma et al. (2013), donde se empleó *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) para actualizar, con datos de flexión, un modelo de vigas de puente corroídas; la metodología redujo la banda de predicción de la resistencia residual en torno al 25 %. Poco después, Simoen et al. (2011) analizaron cómo la resolución de los sensores y el tipo de parámetro (módulo de elasticidad, inercia, degradación por daños) condicionan la precisión de un ajuste bayesiano, aplicándolo a una viga de concreto sometida a vibración. Su trabajo subrayó la necesidad de cuantificar la incertidumbre no sólo en los parámetros, sino también en la propia capacidad de diagnóstico del procedimiento.

A diferencia de lo realizado por los autores mencionados, este trabajo introduce un procedimiento que permite que, **con un número muy reducido de pruebas**, sea posible caracterizar las propiedades de los materiales a partir de un elemento ya construido.

3

Metodología

3.1. Diseño y construcción de vigas de concreto reforzado

Se diseñó una viga destinada a falla por flexión *VF*. El diseño se realizó siguiendo las normativas NSR-10 C.21.6 y ACI 318-14, respectivamente. La metodología de diseño se fundamenta en el método de factores de carga y resistencia (LRDF). Los siguientes cuadros muestran las condiciones de diseño.

Nombre	Nomenclatura	Valor	Unidad
Esfuerzo límite de Fluencia del acero de refuerzo:	fy	420	MPa
Resistencia a compresión del concreto	f'c	27	MPa
Módulo de elasticidad del acero	Es	200000	MPa
Módulo de elasticidad del concreto	Ec	24421,916	MPa
Longitud real de la viga	Lr	5,55	m
Luz de la viga	Lc	5,25	m
Luz mínima	Lmin	1,28	m
Distancia	a	1,75	m
Carga de diseño	P	34	kN
Ancho	b	0.25	m
Alto	h	0.36	m

Cuadro 3.1: *Resumen de propiedades de materiales, cargas y geometría para vigas de falla a flexión*

Se decidió diseñar por factores de carga y resistencia debido a su uso común en la ingeniería estructural. Además, para verificar estados límites de servicio, en este caso, las deflexiones. Por otro lado, los factores de reducción se mantienen en 1 para tener control sobre la carga de falla. El refuerzo propuesto para las vigas *VF* es de 2 barras #6 como refuerzo a tracción. Con este refuerzo, el diseño corresponde a una viga con una cuantía menor a la balanceada y mayor a la mínima. Esto permite garantizar la fluencia del acero antes de la falla y, a su vez, mayores deformaciones. El refuerzo transversal se diseñó siguiendo la reglamentación especial DES DE et al. (2010), debido a las características sísmicas de la región. La Figura 3.1 muestra el diseño final de la viga.Se diseñaron dos zonas de confinamiento siguiendo la metodología de diseño para zo-

na de alto riesgo sísmico (*DES*). Las zonas plásticas, correspondientes a los extremos de la viga, se definieron como Zonas A. Por otro lado, la región central de la viga, se definió como Zona B.

La instrumentación consta de galgas extensométricas (strain gauge) embebidas, pegadas al acero de refuerzo y otras de superficie, pegadas al concreto. Para medir deflexiones se usó un potenciómetro lineal (Lineal POT) en el centro de la luz.

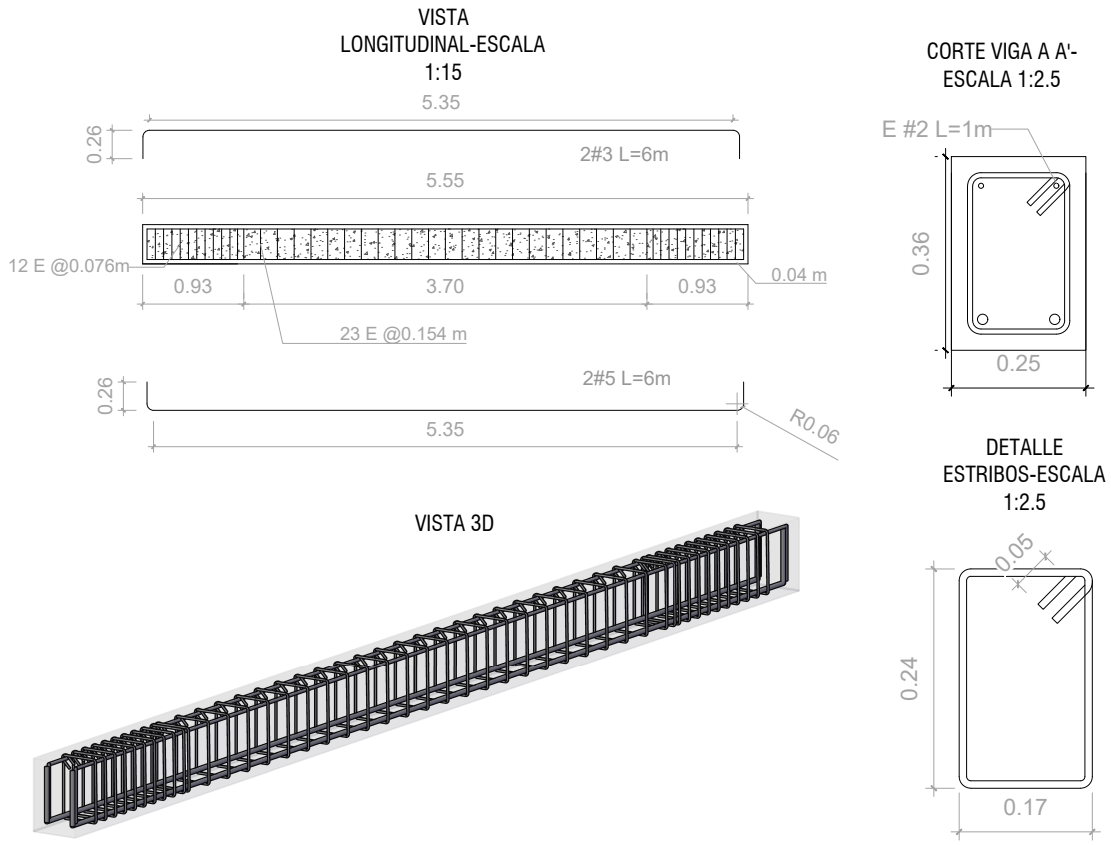


Figura 3.1: *Diseño vigas de falla por flexión. Dimensiones en metros*

Para el vaciado del concreto se contrató material premezclado debido a la dificultad de generar el volumen de mezcla necesario y, para tener un control de calidad que permitiese alcanzar la resistencia a la compresión de diseño. Durante el proceso se recogieron cilindros de prueba siguiendo las normativas NSR-10 y NTC-3967. En estas se indica que un cilindro estándar tiene como dimensiones un diámetro de 15 cm y un alto de 30 cm. Las Figura 3.2 y Figura 3.3 muestran la ubicación en la que se realizó el vaciado de las vigas y el momento en que se realizó la recolección de las muestras de concreto. Mientras que la Figura 3.4, es una representación gráfica del montaje experimental. Para mantener un orden durante los ensayos y el procesamiento de datos, debido a la cantidad de sensores, es necesario tener previamente identificados cada uno de ellos. Precisamente por lo anterior se desarrolló una nomenclatura con la que se garantiza orden y confianza para adquirir los datos. Como primer acto, se identifica

el tipo (F-L) y orden de viga (A-C)junto con el norte de la misma. Este norte será la cara principal y de referencia para la localización de los sensores. Después, se identifica si corresponde a una galga de superficie o embebida (S-E). Y finalmente su posición dentro del acero se identifica con números del 1 al 3, posición arriba o abajo e izquierda o derecha, tomando como referencia la cara norte, en donde 1 es el sensor más cercano a la cara norte de la viga. Un ejemplo de la numenclatura es la galga FAELLR2a. Esta corresponde al sensor ubicado en en la zona central, en la barra inferior de la izquierda mirando desde el norte.



Figura 3.2: *Localización en el momento del vaciado*



Figura 3.3: *Obtención de cilindros de prueba*

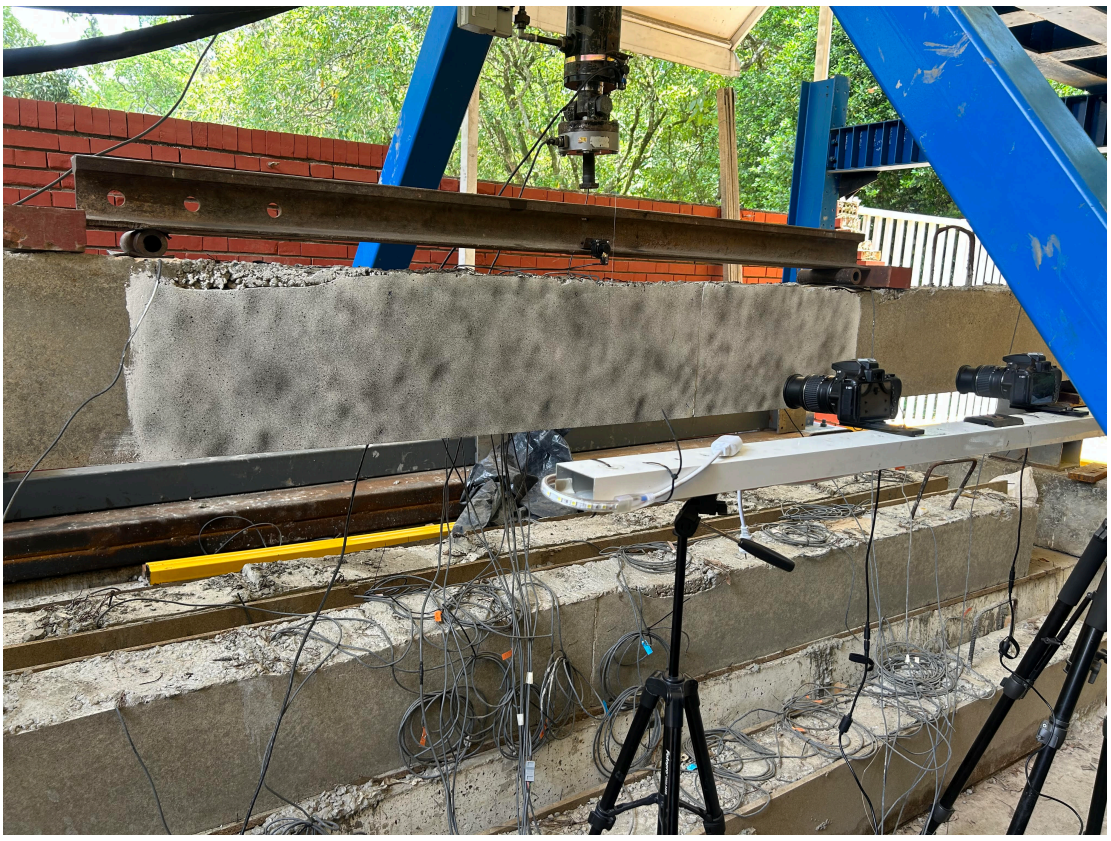


Figura 3.4: *Foto de montaje experimental*

3.2. Construcción de modelos

Para evaluar el comportamiento estructural de las vigas, se desarrollaron dos modelos computacionales de elementos finitos en el software openseespy. Estos modelos comparten la misma geometría global y esquema de carga, pero difieren en la forma de definir la sección transversal:

Para el primer modelo, el cual se llamará modelo tipo Patch, se creó una sección personalizada mediante el comando section('Fiber', ...); se discretizó el concreto en patches rectangulares y se añadieron layers de barras longitudinales, lo que permite asignar leyes constitutivas diferenciadas para cada barra de acero. Esta formulación ofrece control completo sobre el número de divisiones. También, es posible establecer manualmente la posición exacta de cada fibra y barra; además, de la posibilidad de introducir variaciones de material, resultando idónea para realizar estudios paramétricos o incorporar fenómenos adicionales. Esta formulación, al ser más general, permite al ingeniero entrar a manipular cada detalle de la sección transversal.

Por otro lado, con el fin de evaluar la sensibilidad del ajuste a la simplificación de la sección, se utilizó el generador ('RCSection2d') incluido en la librería openseespy. Esta función construye internamente la malla de fibras solicitando únicamente el número de barras en cada cara, el diámetro, el recubrimiento y las dimensiones de la sección, permitiendo incluir distintos materiales para el concreto confinado y no confinado, pero sin posibilidad de cambiar esto en el acero de refuerzo. Al reducir drásticamente el número de parámetros explícitos, el modelo favorece la rapidez de definición y minimiza los errores de discretización, pero sacrifica la posibilidad de capturar heterogeneidades locales. La Tabla 3.2 muestra una breve comparación del comportamiento general de ambos modelos y sus características principales.

Criterio	**Modelo 1 – Sección "Patch"**	**Modelo 2 – "RC section"**
Grado de precisión	Alto. Control fibra × fibra; posible diferenciar recubrimientos, barras adicionales y modelar deslizamiento acero-concreto.	Moderado. Malla automática homogénea; puede subestimar fisuras locales si la sección es heterogénea.
Convergencia numérica	Depende de la densidad de fibras.	Menos iteraciones gracias a rigidez tangente más suave.
Tiempo de cálculo	Mayor ($\approx$ 1.5–3 ×).	Menor: ideal para barridos paramétricos o análisis sísmicos largos.
Flexibilidad paramétrica	Muy alta.	Limitada a n.º de barras, recubrimiento y dimensiones.

Cuadro 3.2: *Comparación entre los dos modelos de sección de fibras implementados en OpenSeesPy.*

OpenSees estructura el proceso de modelado en varios niveles jerárquicos. En primer lugar, el usuario debe decidir si la simulación se ejecutará en 2D o 3D, lo que deter-

mina el tipo de transformaciones geométricas y la cinemática que regirá al elemento. Seguido de esto, se definen los materiales a utilizar en el modelo, ya sea directamente con algún modelo constitutivo o un tipo de material que permite modificar las curvas de degradación. A continuación se definen los materiales, los cuales pueden declararse de dos formas:

- Modelos constitutivos predefinidos: el programa genera automáticamente la curva esfuerzo–deformación a partir de un conjunto de parámetros suministrados por el usuario (p. ej., resistencia, módulo elástico, relación de endurecimiento).
- Materiales de curva personalizada: el analista introduce directamente la trayectoria esfuerzo–deformación —por lo general derivada de ensayos experimentales— y, si lo desea, añade reglas específicas de degradación o recuperación. La principal ventaja de esta segunda opción radica en la flexibilidad: permite ajustar el comportamiento del material con precisión, incorporar efectos no contemplados en los modelos estándar y reproducir fenómenos observados en laboratorio.

Una vez especificados la dimensionalidad (2D/3D) y los materiales, es necesario definir la sección transversal de cada elemento. En el enfoque de *fibras*, la sección se descompone en pequeñas áreas A_f con posición (y, z) y ley constitutiva propia. Cada fibra mantiene su historia esfuerzo–deformación, y la suma ponderada de todas entrega las resultantes seccionales:

$$P = \sum \sigma_f A_f, \qquad M_y = \sum \sigma_f A_f \, z, \qquad M_z = \sum \sigma_f A_f \, y.$$

Hipótesis de sección plana. Se adopta la suposición de que las secciones permanecen planas y perpendiculares al eje medio (Bernoulli–Euler modificada); así, la deformación en la fibra f se expresa como $\varepsilon_f = \varepsilon_0 - y\kappa_z + z\kappa_y$. Monti et al. (2000)

Elemento `forceBeamColumn`. OpenSees implementa un elemento basado en fuerzas que interpola directamente los esfuerzos internos y satisface el equilibrio de manera exacta Spacone et al. (1996b). La compatibilidad global se logra mediante un esquema iterativo (Newton–Raphson), mientras que la no linealidad reside exclusivamente en las secciones de fibras.

Integración Gauss–Lobatto. Las contribuciones de cada sección se integran a lo largo de la longitud L mediante la cuadratura Gauss–Lobatto, generalmente con 4–6 puntos. Este esquema coloca nodos de integración en los extremos del elemento, capturando con precisión la formación de rótulas plásticas y garantizando la conservación de momento Scott et al. (2006). La rigidez y las fuerzas internas del elemento se obtienen como

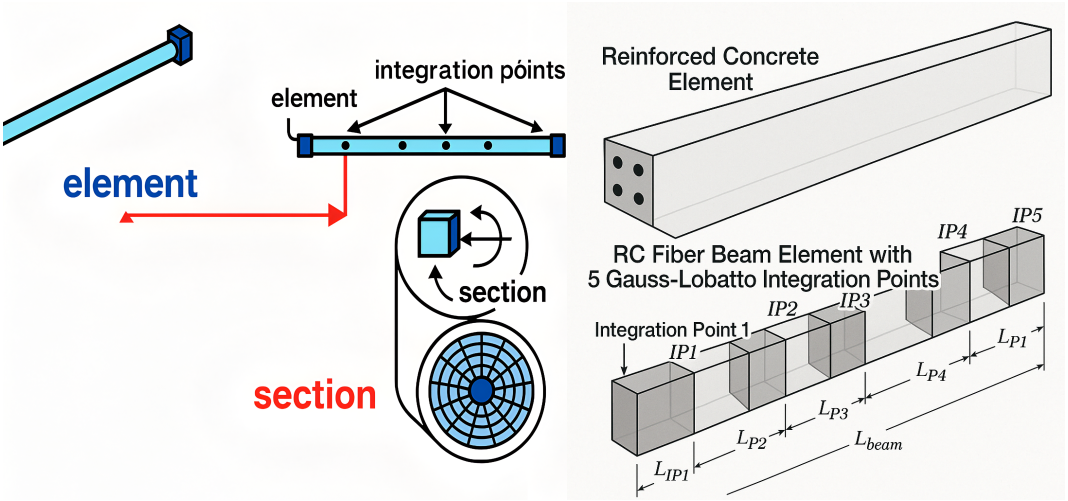
$$\mathbf{K}_{\text{elem}} = \sum_{i=1}^{n_{IP}} w_i \mathbf{B}^{\mathsf{T}}(x_i)\, \mathbf{k}_{\text{sec}}(x_i)\, \mathbf{B}(x_i) \frac{L}{2}, \qquad \mathbf{F}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_{IP}} w_i \mathbf{B}^{\mathsf{T}}(x_i)\, \mathbf{f}_{\text{sec}}(x_i) \frac{L}{2},$$

donde $\mathbf{B}(x_i)$ es la matriz de interpolación de curvaturas y w_i los pesos de Lobatto.

Ventajas prácticas.

- Requiere pocos elementos por luz ($\approx 1-2$) sin sacrificar precisión, gracias a la distribución explícita de plastificación.
- Permite capturar información de daño localizado añadiendo elementos de longitud cero

La siguiente figura muestra lo descrito anteriormente.



(**a**) *Configuración de un modelo estructural.* (**b**) *Integración del elemento*

Figura 3.5: *Proceso de modelado en OpenSees.*

Para modelar la viga y capturar adecuadamente la respuesta no lineal de la viga se emplearon elementos viga-columna con formulación de fibras, capaces de reproducir la distribución real de tensiones y deformaciones a lo largo de la sección. El concreto se representó mediante el modelo propuesto por Mander et al. (1988), el cual describe analíticamente la curva esfuerzo–deformación diferenciando entre *concreto no confinado* —caracterizado por los parámetros f'_{co} (resistencia máxima), E_c (módulo inicial), ε_{co} (deformación a pico) y ε_{sp} (deformación al desprendimiento del recubrimiento)— y *concreto confinado*, definido por f'_{cc}, ε_{cc} y la deformación última ε_{cu}; la presión lateral ejercida por los estribos eleva f'_{co} a f'_{cc} y aumenta la ductilidad, capturando de este modo el beneficio del confinamiento transversal. El acero se caracterizó con un modelo constitutivo de OpenSees que incluye el efecto de endurecimiento por deformación; y, finalmente, la interacción acero–concreto se idealizó asumiendo compatibilidad total de deformaciones, es decir, sin deslizamiento relativo entre los dos materiales. En la etapa de definición de materiales se optó por modelar el hormigón con el material *Pinching4* de OpenSees. Este comando es idóneo para reproducir la respuesta cíclica de

miembros de concreto. Primero, porque combina la no linealidad en compresión con la capacidad de capturar el ablandamiento posterior al esfuerzo máximo y la pérdida paulatina de rigidez tras el aplastamiento del material. Además, el modelo permite incorporar reglas explícitas de deterioro por historia de carga. Se asume que tanto la rigidez como la resistencia decrecen con cada ciclo aplicado. Para ello, emplea factores de degradación que reducen el módulo tangente y la tensión máxima en función de la disipación de energía y de la amplitud de los desplazamientos experimentados. Esto reproduce con mayor realismo el comportamiento observado en ensayos experimentales de elementos sometidos a solicitaciones cíclicas. Esta flexibilidad permite ajustar la curva esfuerzo–deformación del concreto de acuerdo con los valores de daño acumulado esperados durante la simulación. El acero de refuerzo se modeló con el material *Steel4*, que considera un comportamiento bilineal con endurecimiento isotrópico y cinemática. La principal característica de este es que permite capturar mejor los efectos de carga y descarga en el dominio plástico. Para la discriminación del modelo. La viga se dividió en cuatro elementos *ForceBeamColumn* con seis puntos de integración. Este tipo de elementos utiliza la formulación basada en fibras para capturar la respuesta no lineal distribuida a lo largo del elemento. A continuación, se muestra en la Figura 3.6 la sección transversal de fibras definida para uno de los modelos. En donde se ve la diferencia entre zona confinada y no confinada y la discretización de fibras.

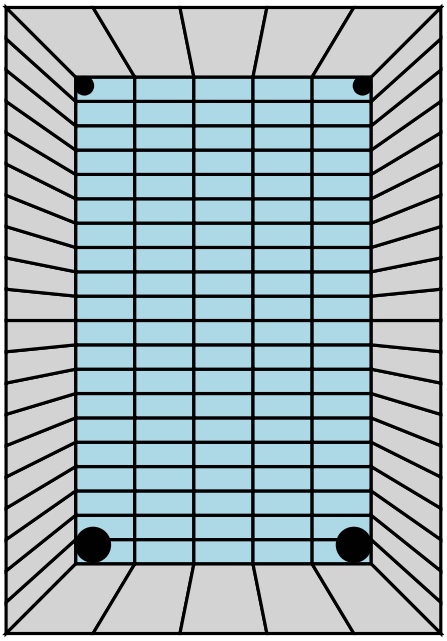


Figura 3.6: *Sección transversal de fibras para vigas VF*

La Figura 3.7 muestra el modelo del acero creado con steel 4. Es un modelo bilineal simple. La principal característica es que consta de dos líneas rectas, sin tener en cuenta el endurecimiento por deformación o alguna curva polinómica por el rango inelástico.

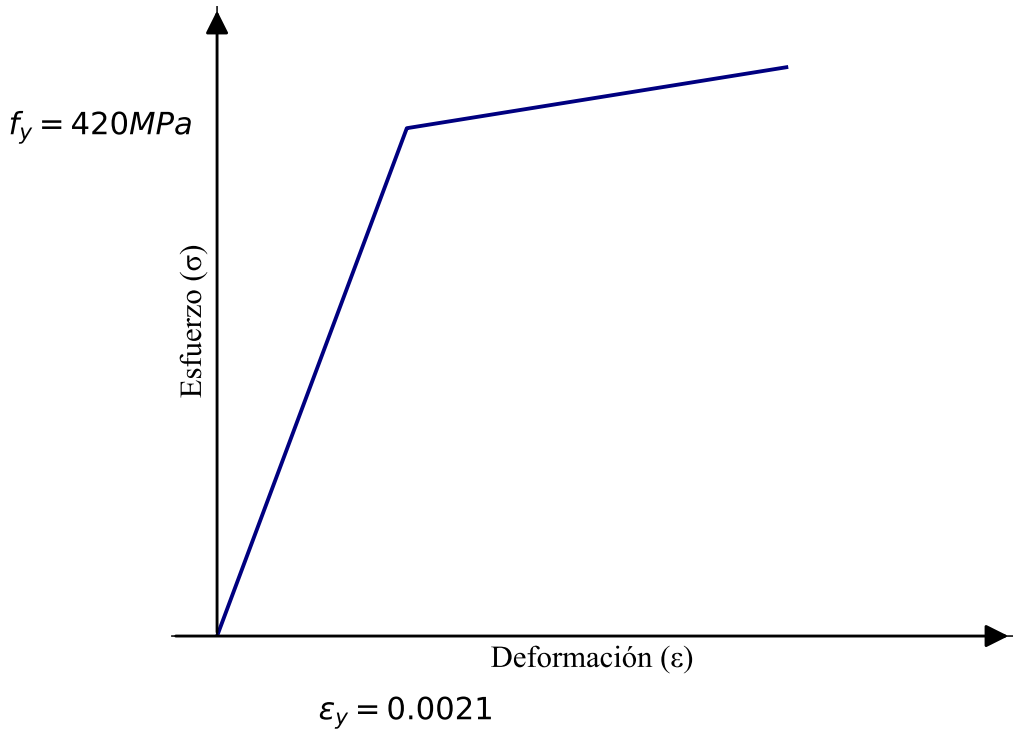


Figura 3.7: *Modelo del acero utilizado con valores nominales*

3.3. Ajuste de modelo de elementos finitos usando inferencia bayesiana

3.3.1. Función objetivo

La función objetivo que se maximiza dentro del proceso bayesiano es la *densidad de verosimilitud* (likelihood) del conjunto de parámetros $\boldsymbol{\theta} = (fc,\, Fy,\, E_s,\, K_{fc},\, a_1)$ dado el par de observaciones experimentales $\mathbf{y} = \left(d^{\text{obs}},\ \varepsilon^{\text{obs}}\right)$. Bajo la hipótesis de que los errores de desplazamiento $\left(d^{\text{obs}} - \hat{d}(\boldsymbol{\theta})\right)$ y deformación $\left(\varepsilon^{\text{obs}} - \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\right)$ son gausianos, mutuamente *independientes* y de varianzas σ_d^2 y σ_ε^2 conocidas, la likelihood se expresa como el producto de dos gaussianas:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y} \mid \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_d} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\left(d^{\text{obs}} - \hat{d}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{\sigma_d^2}\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\varepsilon} \exp\left[-\tfrac{1}{2}\frac{\left(\varepsilon^{\text{obs}} - \hat{\varepsilon}_{\text{max}}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right].$$

Agrupando los coeficientes que dependen únicamente de σ_d y σ_ε:

$$\boxed{\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_d\,\sigma_\varepsilon} \exp\left[-\frac{\left(d^{\text{obs}} - \hat{d}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\left(\varepsilon^{\text{obs}} - \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right]}$$

Paso a la forma logarítmica. En los métodos MCMC se trabaja con la *log-verosimilitud*, pues el logaritmo (i) transforma productos en sumas, (ii) evita desbordes numéricos con probabilidades muy pequeñas y (iii) no altera la ubicación de los máximos porque el log es monótono. Aplicando $\log(\cdot)$ a la expresión anterior se obtiene

$$\log \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\left(d^{\text{obs}} - \hat{d}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{2\sigma_d^2} - \frac{\left(\varepsilon^{\text{obs}} - \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{2\sigma_\varepsilon^2} - \log\!\left(2\pi\,\sigma_d\,\sigma_\varepsilon\right).$$

El término $-\log\!\left(2\pi\,\sigma_d\,\sigma_\varepsilon\right)$ es constante con respecto a $\boldsymbol{\theta}$; por ello, en la práctica puede omitirse al comparar, maximizar o muestrear la posterior, quedando

$$\log \mathcal{L}^*(\boldsymbol{\theta}) = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{\left(d^{\text{obs}} - \hat{d}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{\sigma_d^2} + \frac{\left(\varepsilon^{\text{obs}} - \hat{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right],$$

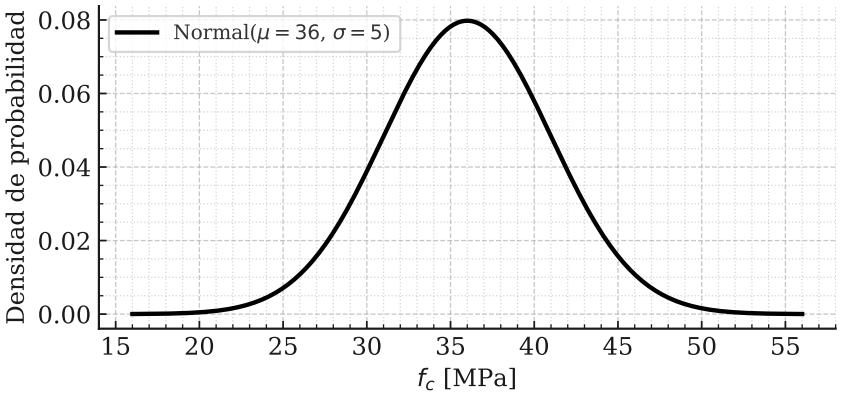
la cual es la forma implementada en este modelo y que se utiliza, sumada al log-prior, para construir la densidad posterior que explora el algoritmo MCMC.

3.3.2. Estimación de parámetros

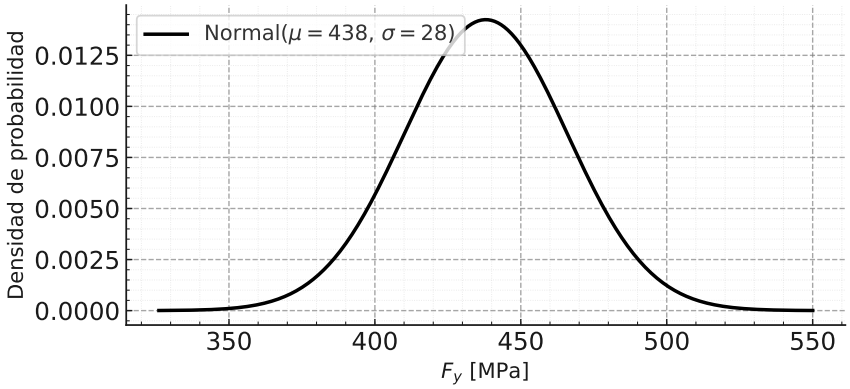
Los parámetros elegidos para realizar el ajuste son propiedades mecánicas de los materiales. La Tabla 3.3 y las siguientes figuras muestran los parámetros elegidos, y sus correspondientes distribuciones prior.

Priors			
Parámetro	**Tipo de distribución**	**Observación**	**Parámetros de la Distribución**
f'_c [MPa]	normal	Resistencia a la compresión del concreto	μ 36, σ 5
F_y [MPa]	normal	Esfuerzo de fluencia del acero	μ 420, σ 30
E_s [GPa]	normal	Módulo elástico del acero	μ 200, σ 10
$k_{f'c}$	uniforme	Coeficiente de confinamiento (zona de confinamiento central [Zona B])	1 – 2
k_{fc2}	uniforme	Segundo coeficiente de confinamiento (zona de confinamiento extremos [Zona A y C])	1 – 2
a_1	uniforme	Factor que define la resistencia a tracción del concreto como proporción de f_c	0.01 – 0.2

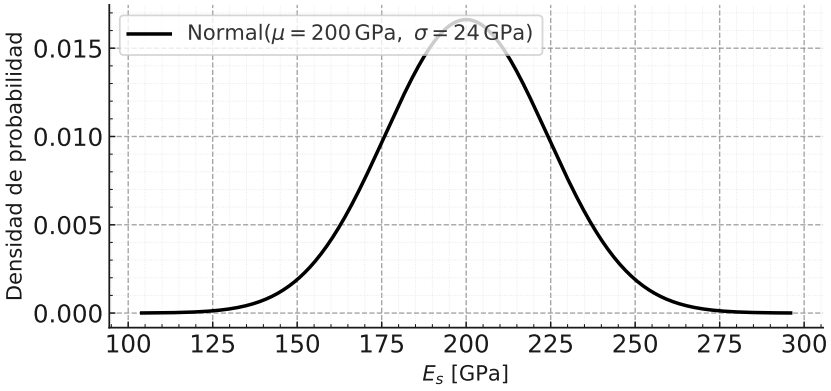
Cuadro 3.3: *Parámetros de ajuste y sus distribuciones prior.*



(**a**) f_c

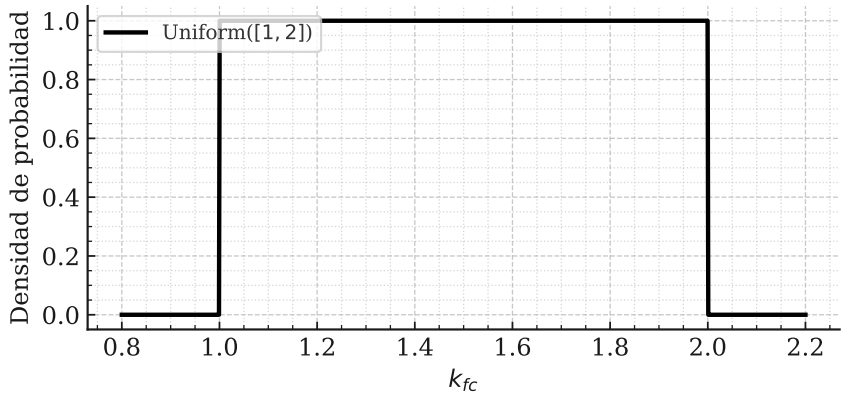


(**b**) F_y

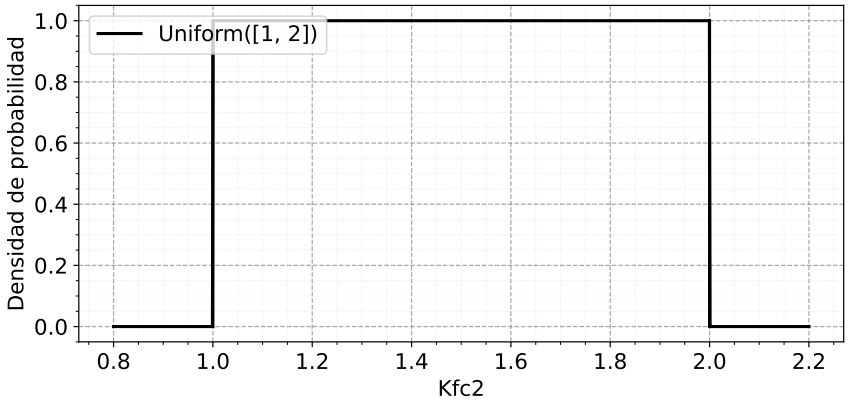


(**c**) E_s

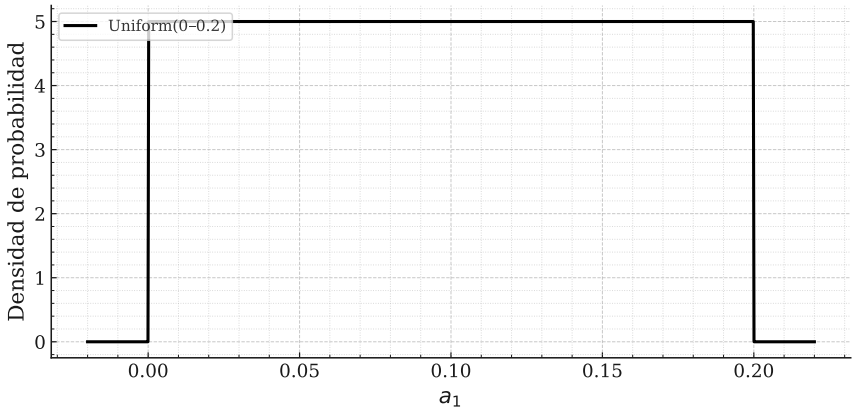
Figura 3.8: *Distribuciones prior para los parámetros mecánicos principales.*



(**a**) k_{fc}



(**b**) a_1



(**c**) a_1

Figura 3.9: *Distribuciones prior para los parámetros de concreto confinado.*

La elección de los parámetros considerados en el modelo se basó en el análisis previo de sensibilidad, cuyo propósito es determinar el grado de influencia o importancia que cada uno de ellos ejerce sobre las salidas del modelo. Concretamente, el análisis de sensibilidad busca identificar aquellos parámetros cuya variación genera mayores cambios en la respuesta global del modelo estructural. Para llevar a cabo esta evalua-

ción, se aplicó un análisis de sensibilidad local denominado «uno a uno» (del inglés *One-at-a-time*, OAT), en el cual cada parámetro se perturba de forma individual, mientras que el resto de parámetros permanecen constantes en sus valores nominales.

La metodología OAT permite observar cómo la variación aislada de cada parámetro impacta la respuesta del modelo, proporcionando así una evaluación clara y directa de su influencia relativa. Posteriormente, las respuestas obtenidas tras perturbar individualmente cada uno de estos parámetros se compararon con la respuesta generada con los valores nominales de referencia, lo que permitió cuantificar su impacto en términos absolutos y relativos. Los resultados de este análisis están sintetizados visualmente en la Figura 4.1 y Figura 4.2, donde se presentan dos diagramas tipo tornado. Este tipo de estudio facilita la identificación inmediata de los parámetros más influyentes, ya que muestra ordenadamente el grado de impacto de las perturbaciones en cada uno de ellos sobre la respuesta final del modelo. De esta forma, los análisis de sensibilidad constituyen una herramienta eficaz para decidir cuáles parámetros deben ajustarse con mayor atención durante el proceso de calibración. Así como para comprender con profundidad la relevancia relativa que tienen dentro del modelo. Físicamente, los parámetros escogidos son esenciales para configurar las curvas esfuerzo-deformación de los materiales considerados en este estudio. Por ejemplo, el parámetro k_{fc} describe la resistencia máxima que puede alcanzar el concreto cuando está confinado, siendo esta resistencia mayor a la del concreto sin confinar debido a la influencia del confinamiento lateral proporcionado por elementos como los estribos o incluso la presión del concreto exterior.

La distribución de los parámetros del acero se obtuvo de las posteriores obtenidas en la investigación. de Guerrero et al. (2024) en la Universidad del Valle. Mientras que para la resistencia a la compresión del concreto se utilizaron los resultados obtenidos en los ensayos. Esto se muestra en el Capítulo 4 en la Tabla 4.1. En cuanto al factor de confinamiento, Mander et al. (1988) muestra los valores típicos de este factor, como se muestra en la siguiente figura.

Después de determinar los parámetros se realizó un análisis del comportamiento del modelo del concreto. Esto para comparar el concreto antes y después del ajuste. Por lo que, para el concreto confinado, se calcula un coeficiente de confinamiento k_{fc} segun el modelo de Mander et al. (1988) a partir de:

(a) Dimensiones del núcleo confinado: $b_c = b - 2c$, $h_c = h - 2c$.
(b) Razón volumétrica de acero transversal: $p_s = \dfrac{A_{sh}}{s\, b_c}$.
(c) Tensión lateral eficaz: $f_l = k_e\, p_s\, f_{yh}$, con $k_e = 1 - \dfrac{s}{2\, b_c}$.
(d) Coeficiente de confinamiento:

$$k_{fc} = 2{,}254 \sqrt{1 + 7{,}94 \frac{f_l}{f'_{co}}} \; - \; 2 \frac{f_l}{f'_{co}} \; - \; 1{,}254 \tag{3.1}$$

Este valor de k_{fc} resume el aumento de resistencia y ductilidad aportado por el

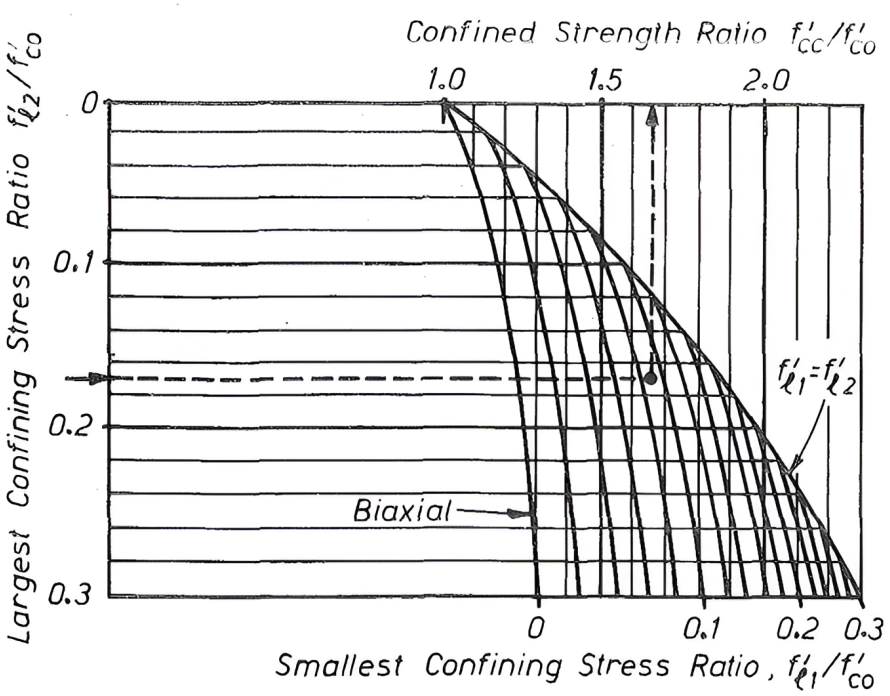


Figura 3.10: *Factor de confinamiento. Tomada de Mander et al. (1988)*

confinamiento transversal.

3.4. Desarrollo experimental

El primer montaje experimental desarrollado tuvo como principal objetivo determinar de forma precisa tanto la resistencia a la compresión como el módulo de elasticidad del concreto utilizado en este estudio. Para esto se emplearon muestras cilíndricas extraídas del mismo lote de concreto empleado en la fabricación de la viga destinada al ensayo experimental, garantizando así que las propiedades obtenidas sean representativas del material realmente utilizado en la investigación. Este procedimiento resulta fundamental para proporcionar parámetros más confiables y específicos que aquellos obtenidos mediante métodos indirectos o valores bibliográficos. El ensayo se llevó a cabo en el laboratorio de estructuras de la Escuela de Ingeniería Civil. Se utilizó la máquina universal de ensayos, la cual permite aplicar cargas de manera controlada y registrar con precisión la respuesta del material hasta su falla.

Para garantizar mediciones confiables y evaluar con mayor detalle la respuesta del concreto, la instrumentación del ensayo incluyó galgas extensométricas, utilizadas para medir las deformaciones unitarias en los cilindros de concreto bajo carga. También, se instalaron anillos con sensores LVDT (Linear Variable Differential Transformer), empleados para registrar los desplazamientos axiales y estimar el módulo de elasticidad del material. Finalmente, se optó por incluir un sistema de correlación digital de imágenes (DIC, por sus siglas en inglés). El cual permite realizar un seguimiento detallado del patrón de deformaciones en la superficie del cilindro. De esta manera,

se facilita el análisis de la evolución de grietas y fallas en el material. Un beneficio atribuido a esto es incrementar notablemente la precisión del ajuste. En particular, es esencial determinar con la mayor exactitud posible todas las fuentes de incertidumbre asociadas a las propiedades de los materiales, ya que así es posible incorporarlas explícitamente en el modelo bayesiano propuesto.

La Figura 3.11 ilustra el montaje experimental utilizado para la ejecución del ensayo, incluyendo la disposición de los sensores y el sistema de adquisición de datos.

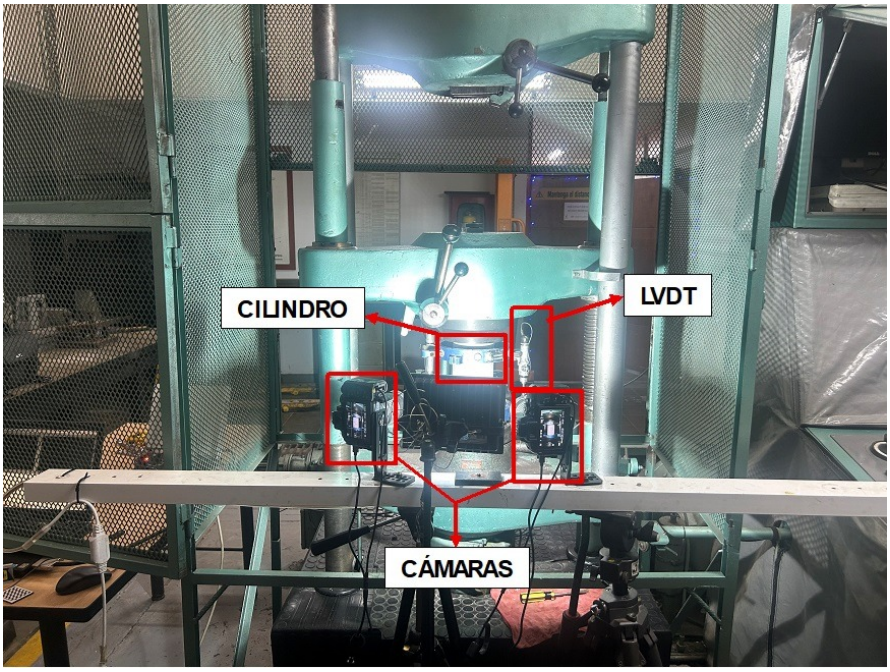


Figura 3.11: *Montaje experimental para el ensayo de los cilindros*

El ensayo de la viga se llevó a cabo en las instalaciones del Laboratorio de estructuras; aquí se ensayó a flexión mediante un esquema de carga en cuatro puntos. Para ello, se ancló al travesaño superior del marco de reacción un actuador hidráulico de precisión que permitió imponer desplazamientos controlados y reproducir el protocolo de carga predefinido. Entre el pistón y la viga de ensayo se colocó una celda de carga acoplada de tal manera que transmitiera la fuerza a la viga metálica de distribución, de modo que la fuerza se transfiriera a los dos rodillos intermedios y se generara un tramo de momento constante en la región central. Los apoyos extremos, materializados con rodillos de acero sobre placas niveladoras, garantizaron condiciones de giro libre y alineación para evitar excentricidades indeseadas. La instrumentación combinó, como se mencionó anteriormente, sensores internos y externos para capturar la respuesta estructural. Paralelamente, potenciómetros lineales (LVDT) de 150 mm de carrera se instalaron de manera redundante. Con esto se logra captar deformaciones de la viga y del elemento de distribución; todas las señales se digitalizaron a 250 Hz, sincronizadas con los registros de la celda de carga y el desplazamiento del actuador. A fin de

obtener campos de deformación superficiales, se preparó la zona comprendida entre los puntos de carga con una base blanca y un patrón de puntos negros aleatorio apto para Correlación de Imágenes Digitales (DIC); un par de cámaras Nikon se situaron a 70 cm de la superficie. Se configuró un disparo de forma sincronizada con el sistema de adquisición cada seis segundos. Esto permitió monitorear simultáneamente fuerzas, desplazamientos globales y deformaciones locales, proporcionando un cuadro completo y coherente del comportamiento de la viga durante todo el proceso de carga hasta la falla. La Figura 3.12 muestra el montaje experimental realizado y mencionado anteriormente.

El programa de carga se ejecutó mediante control de desplazamiento, adoptando la secuencia de carga propuesta por Castellanos-Toro et al. (2023). El ensayo experimental se organizó en cinco etapas, cada una compuesta por un par de ciclos idénticos de carga y descarga:

- Dos ciclos en el rango anterior al desplazamiento de agrietamiento teórico.
- Dos ciclos alrededor del punto de fluencia del acero.
- Dos ciclos inmediatamente posteriores a la fluencia.
- Dos ciclos adicionales nuevamente cercanos a la carga de fluencia.
- Dos ciclos finales al nivel de desplazamiento correspondiente a la falla.

Todo este protocolo queda representado gráficamente en las Figuras 3.13 y 3.14.



Figura 3.12: *Montaje experimental para el ensayo de las vigas*

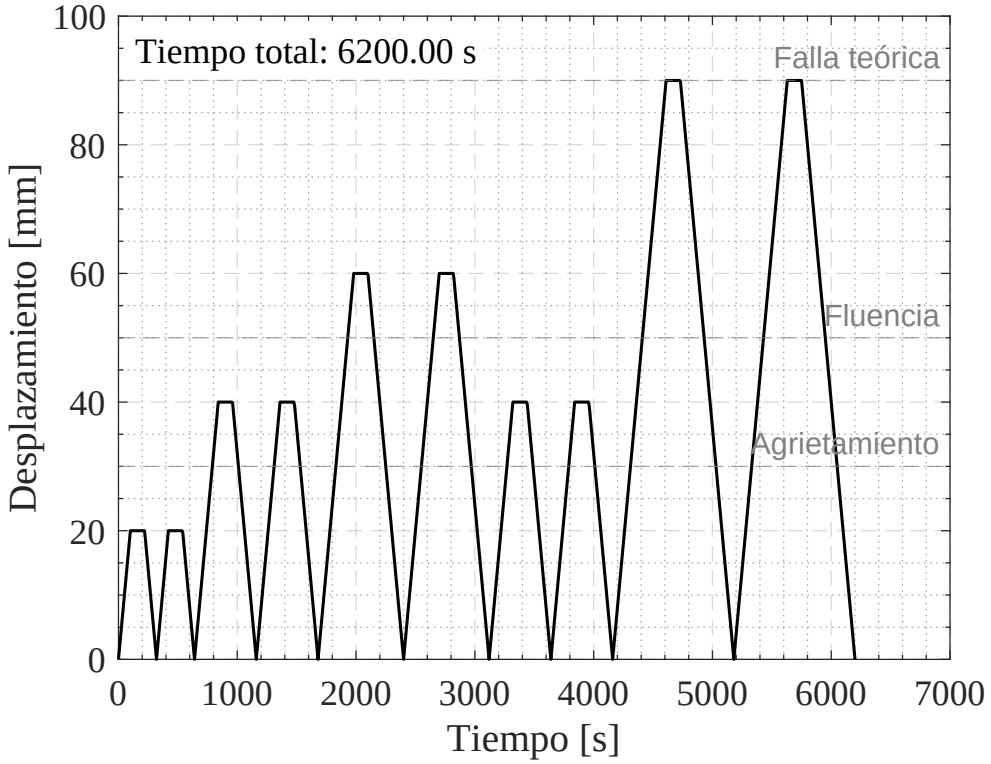


Figura 3.13: *Protocolo de carga controlado por desplazamiento empleado en el ensayo, compuesto por cinco etapas de dos ciclos idénticos en niveles sucesivos de desplazamiento*)

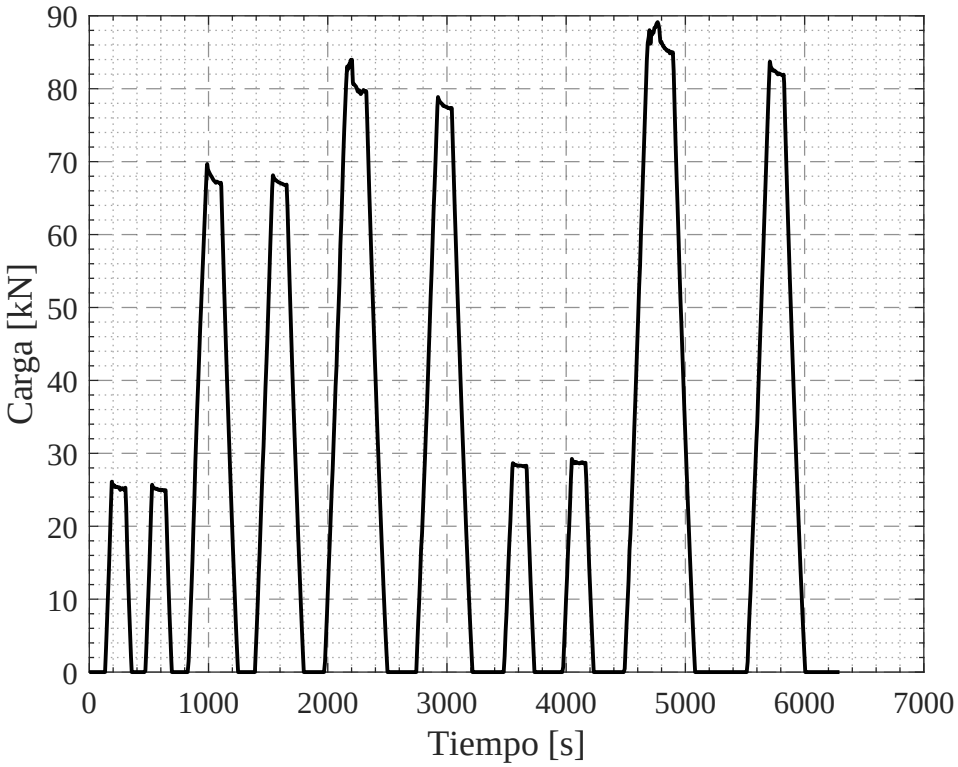


Figura 3.14: *Historial de carga impuesto por el actuador durante el ensayo: sucesivos ciclos de carga-descarga con incrementos hasta los valores máximos predefinidos*

4

Resultados

En esta sección se muestran los resultados del ensayo experimental y del ajuste de los parámetros de los modelos de elementos finitos explicados en el capítulo anterior. La validación de los parámetros se realiza simulando una respuesta del modelo. Esta simulación se ejecuta utilizando las distribuciones de probabilidad posterior de los parámetros de entrada, es decir, se realiza un posterior predictive check (PPC) Berkhof et al. (2000). Finalmente, se comparan los resultados de esta simulación con los valores obtenidos experimentalmente. Primero, se presentan en la Tabla 4.1 los resultados de los ensayos a compresión realizados en los cilindros de concreto, los cuales permiten establecer la resistencia característica de la mezcla. Estos resultados se incorporaron al modelo como distribución prior de la resistencia a la compresion simple. Tal y como se muestra en la Figura 4.10a.

DATOS CILINDROS DE CONCRETO	
Espécimen	**Esfuerzo [MPa]**
Cilindro 1	36.41
Cilindro 2	33.87
Cilindro 3	36.92
Cilindro 4	40.48

Cuadro 4.1: *Resultados ensayos a compresión en cilindros de concreto.*

El análisis de sensibilidad para ambos modelos se muestra en las figuras Figura 4.1 y Figura 4.2. Los parámetros f_c, F_y y E_s presentan una mayor influencia sobre el desplazamiento. El factor de confinamiento k_{fc}, aunque menos influyente que las propiedades mecánicas principales, mantiene un impacto significativo en ambos modelos. En contraste, el parámetro k_{fc2} muestra una influencia prácticamente nula. El parámetro a_1 afecta casi igual la respuesta estructural de manera positiva que negativa. Mientras que f_c, F_y y E_s suelen no tener tanta afectación en una variación positiva. La tendencia

general es similar en ambos modelos, sin embargo, el modelo Patch se ve más afectado por el efecto del confinamiento k_{fc}

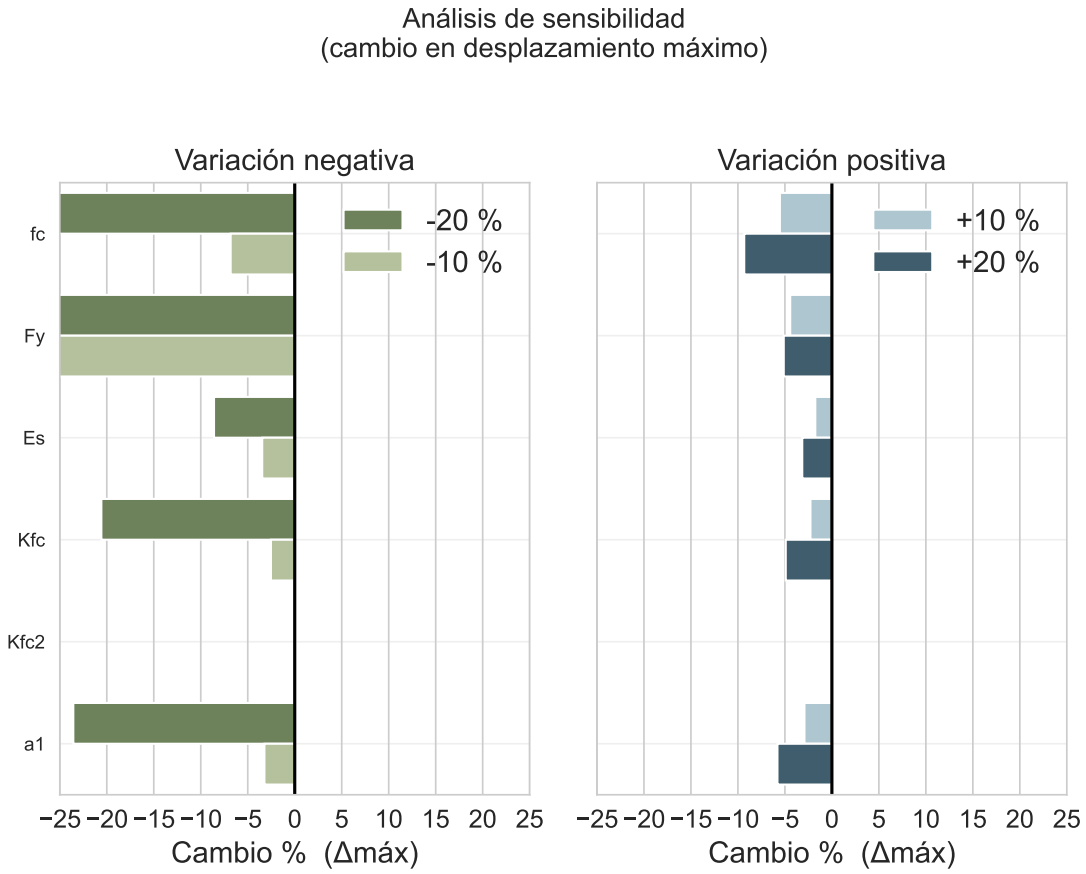


Figura 4.1: *Análisis de sensibilidad para modelo RC section*

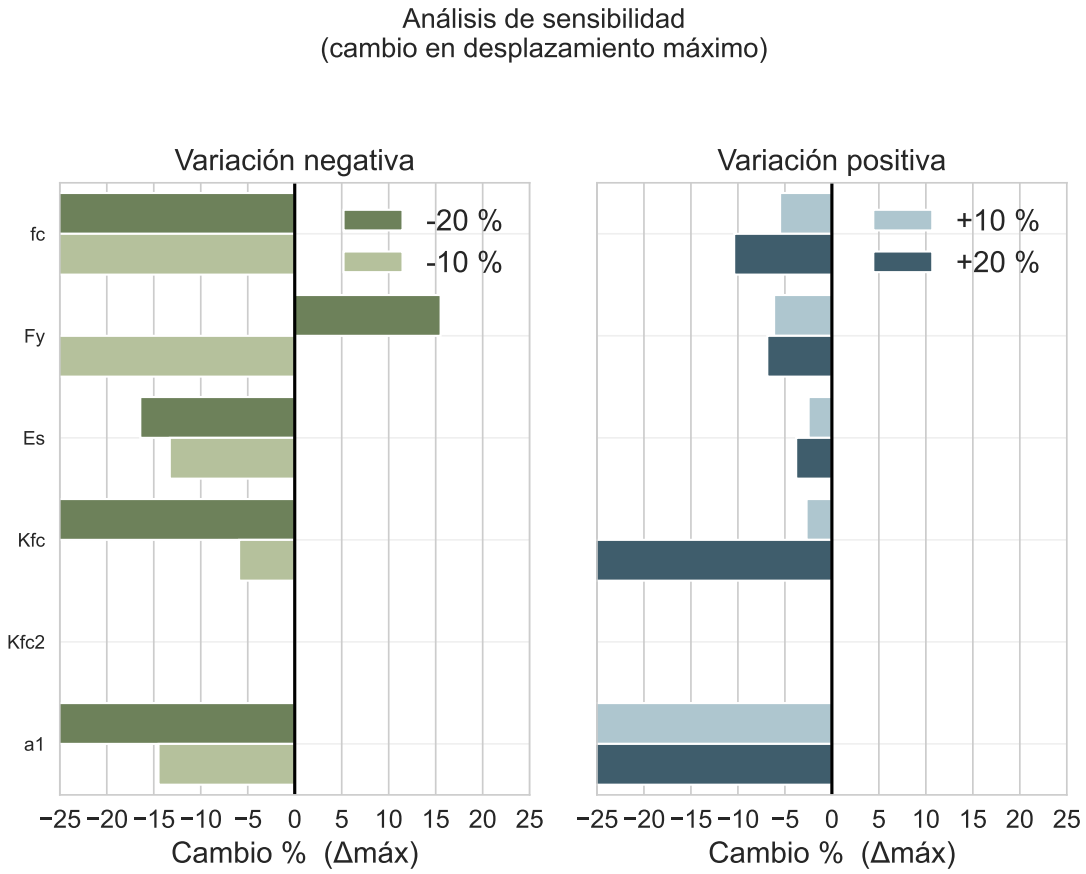


Figura 4.2: *Análisis de sensibilidad para modelo Patch section*

4.1. Ajuste paramétrico de los modelos

4.1.1. Evaluación del ajuste

Para evaluar de manera objetiva la precisión del modelo desarrollado, así como la efectividad del procedimiento de ajuste paramétrico implementado, se utilizó una técnica basada en el cálculo del error relativo. Esta técnica consiste en realizar una comparación directa, punto a punto, entre los desplazamientos medidos experimentalmente y los predichos por el modelo numérico ajustado.

Las Figura 4.3, Figura 4.4 y Figura 4.5 presentan gráficamente esta comparación para el modelo *RC section*. Se muestra la diferencia entre ambos conjuntos de datos tanto para desplazamientos como para deformaciones. Las predicciones del modelo se generaron mediante simulaciones numéricas utilizando como valores representativos la estimación puntual de máxima probabilidad (*Maximum a posteriori, MAP*), obtenida a partir de la posterior del análisis bayesiano realizado.

El modelo muestra una capacidad destacada para replicar la rigidez inicial, el ascenso no lineal y la respuesta en el pico de carga, como se observa en la Figura 4.4. Sin embargo, aparecen ciertas discrepancias en la fase de descarga y en la degradación post-pico. La Figura 4.3 revela un ajuste preciso en los desplazamientos observados, con la mediana predicha contenida dentro del intervalo de credibilidad del 90 %. En cuanto a la deformación del acero, la Figura 4.5 evidencia que el modelo subestima ligeramente las deformaciones máximas, pero captura adecuadamente la tendencia general de la respuesta. Estas diferencias podrían deberse a efectos no modelados como el deslizamiento barra-concreto.

A la vez, es necesario evaluar la autocorrelación del muestreo, para asegurarse de que cada una de las muestras es independiente; ver la Figura 4.8 y Figura 4.9.

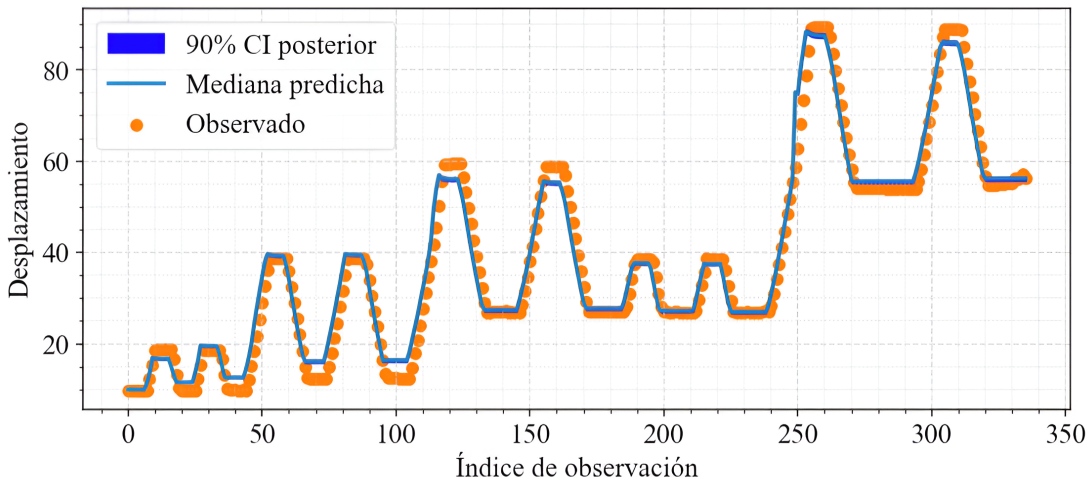


Figura 4.3: *Comparación de desplazamientos observados vs modelo ajustado*

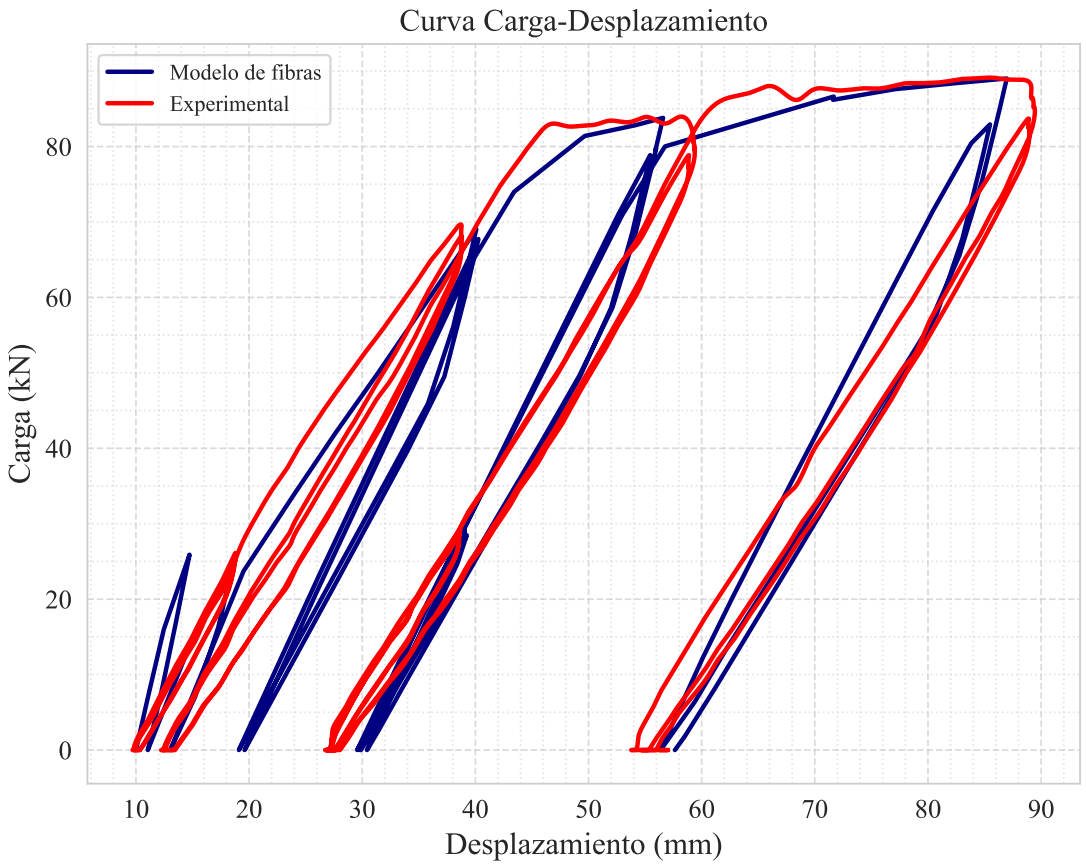


Figura 4.4: *Comparación de carga vs deflexión modelo ajustado*

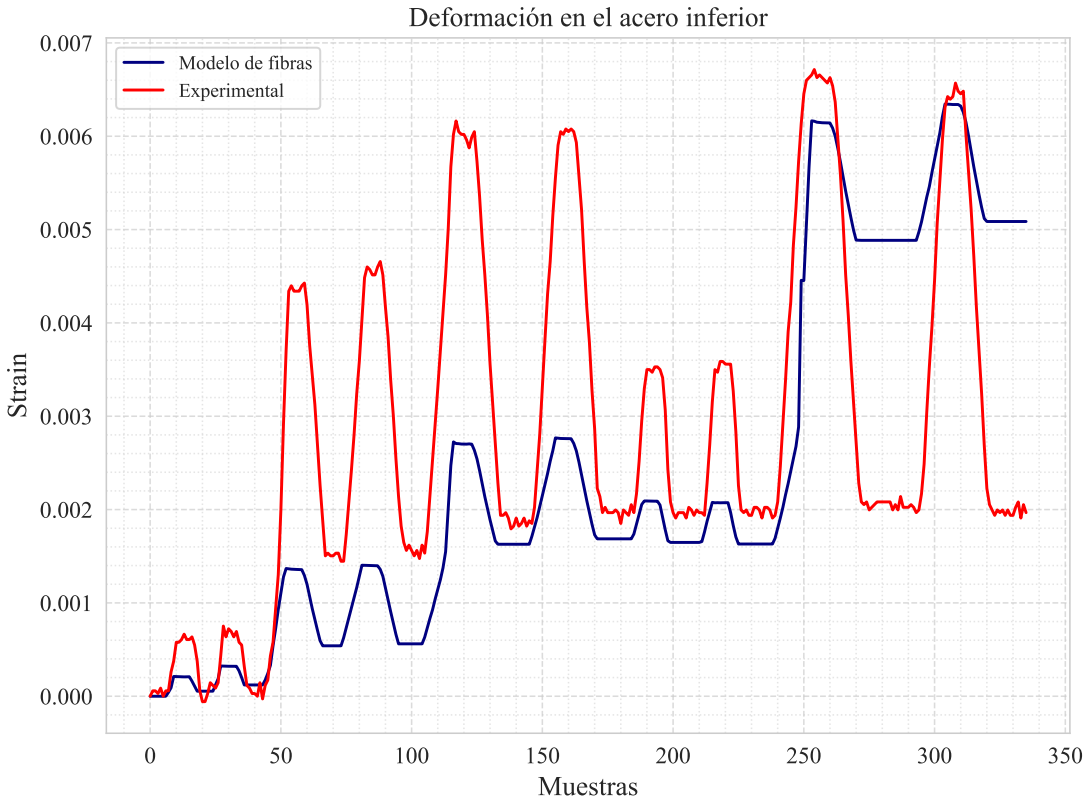


Figura 4.5: *Comparación de deformaciones en el acero inferior modelo ajustado*

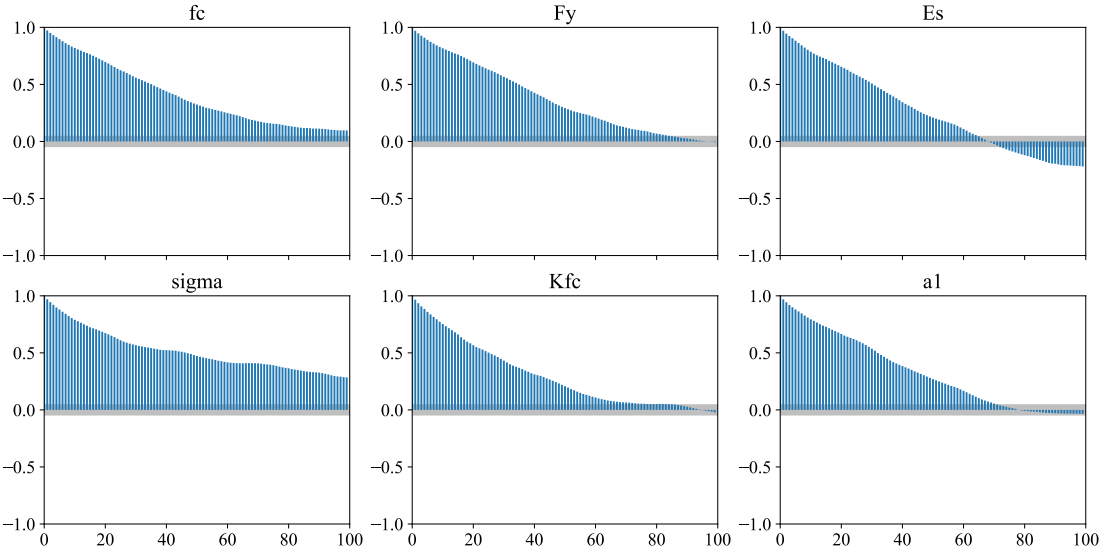


Figura 4.6: *Gráfico de barras de la función de autocorrelación para la secuencia de parámetros modelo "RC Section".*

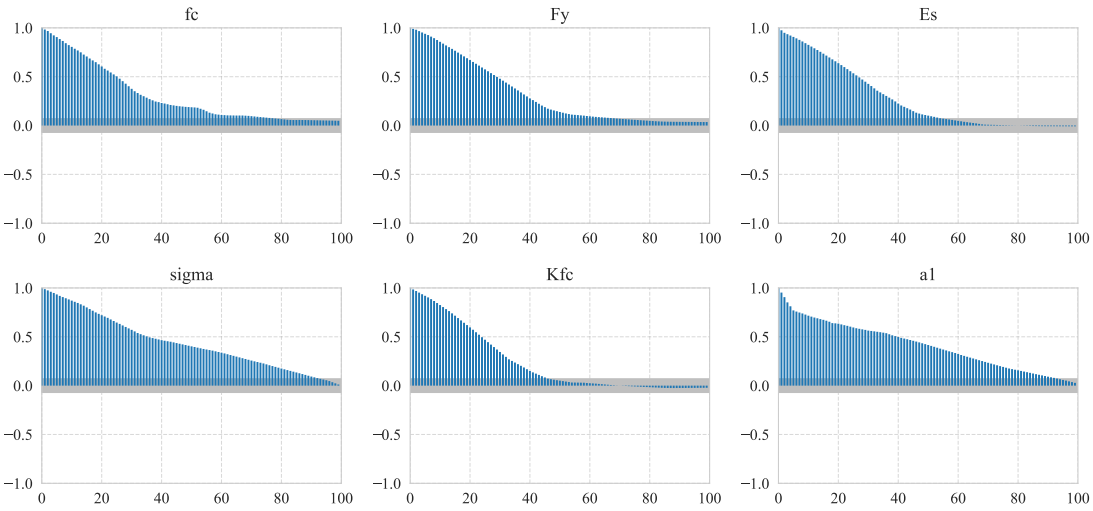


Figura 4.7: *Gráfico de barras de la función de autocorrelación para la secuencia de parámetros modelo "Patch".*

4.1.2. Distribuciones posteriores

En la Tabla 4.2 se presenta un resumen de las distribuciones posteriores obtenidas para cada uno de los parámetros ajustados en los dos modelos analizados. Concretamente, se muestran la media y desviación estándar estimadas para cada parámetro del modelo 1 (sección definida con Patch) y del modelo 2 (sección estándar RC Section). También, en la Tabla 4.3 se muestran los resultados diagnósticos del muestreo MCMC. Además, se incluye la relación $M1/M2$, que corresponde al cociente entre las medias obtenidas en ambos modelos, proporcionando así una medida directa de la diferencia relativa entre ambos enfoques de modelado. Las unidades correspondientes para cada parámetro también se especifican claramente en la tabla. Después, en la Figura 4.8 y la Figura 4.9 se muestran plots tipo corner para ambos modelos. Esto se hace con el objetivo de mostrar la correlación de los parámetros ajustados y como su interacción afecta a los modelos.

	Modelo 1 [Patch]		**Modelo 2 [RC Section]**		M_1/M_2
Parámetro (unidades)	**Media**	**Desviación**	**Media**	**Desviación**	
f_c [MPa]	35.842	2.795	35.706	1.542	1.812448
F_y [MPa]	394.24	3.205	376.27	2.277	1.407064
E_s [GPa]	209.15	2.985	209.41	0.312	9.568269
σ [mm]	10.45	3.037	1.789	1.040	2.920192
k_{fc} [–]	1.552	0.0798	1.560	0.0260	3.069231
a_1 [–]	0.195	0.0178	0.198	0.0019	9.368421
k_{fc2} [–]	1.274	0.2690	1.144	0.0745	3.612751

Cuadro 4.2: *Resumen de las distribuciones posteriores para ambos modelos y comparación de varianzas.*

	ESS		MCSE		$\widehat{R}$	
Parámetro	RC section	Patch	RC section	Patch	RC section	Patch
f_c	1 400	1 986	0.050	0.030	1.01	1.00
F_y	1 600	2 223	0.045	0.022	1.01	1.00
E_s	1 550	2 087	0.048	0.025	1.01	1.00
k_{fc}	1 680	2 308	0.042	0.024	1.01	1.00
a_1	1 800	2 512	0.038	0.023	1.01	1.00
k_{fc2}	1 300	2 100	0.053	0.026	1.01	1.00

Cuadro 4.3: *Comparación de métricas diagnósticas MCMC para ambos modelos (3 cadenas, 1000 iteraciones cada una). Los valores del modelo RC section se mantienen cercanos a los del modelo Patch, pero muestran un ESS ligeramente menor y un MCSE algo mayor, indicando una eficiencia de muestreo algo inferior, aunque con convergencia aceptable ($\widehat{R} \leq 1{,}01$).*

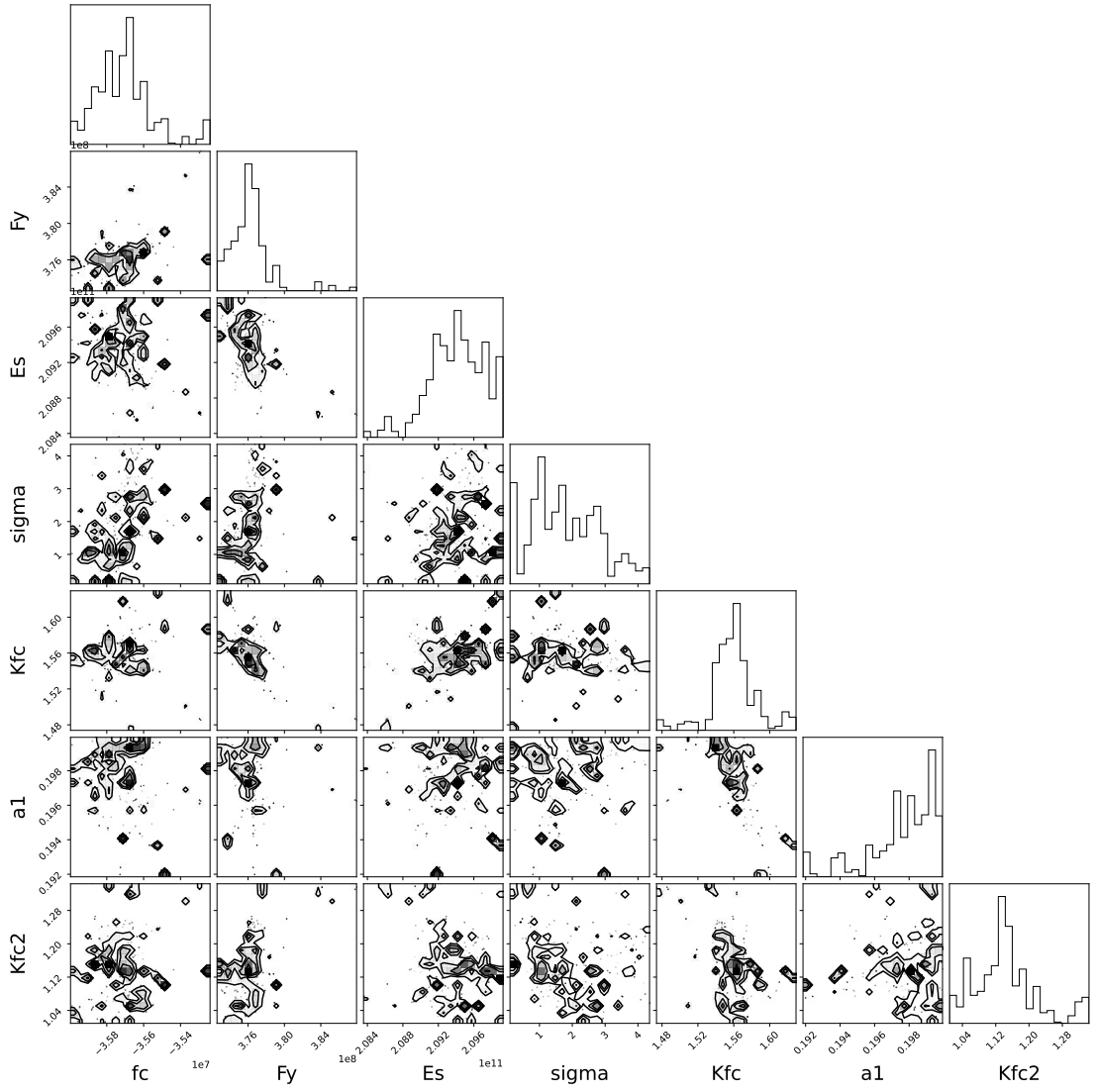


Figura 4.8: *Gráfico de correlación modelo RC section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es*

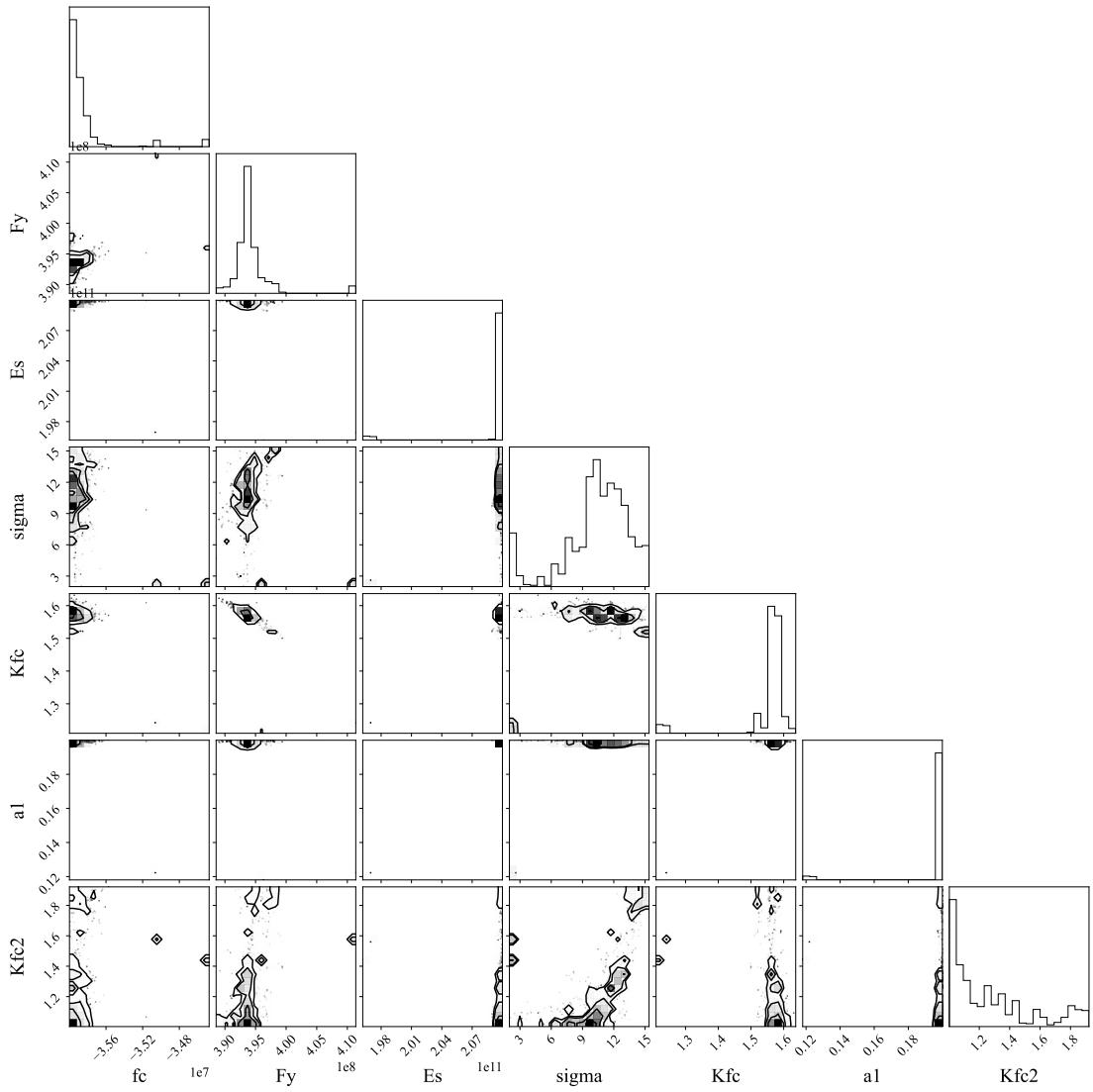
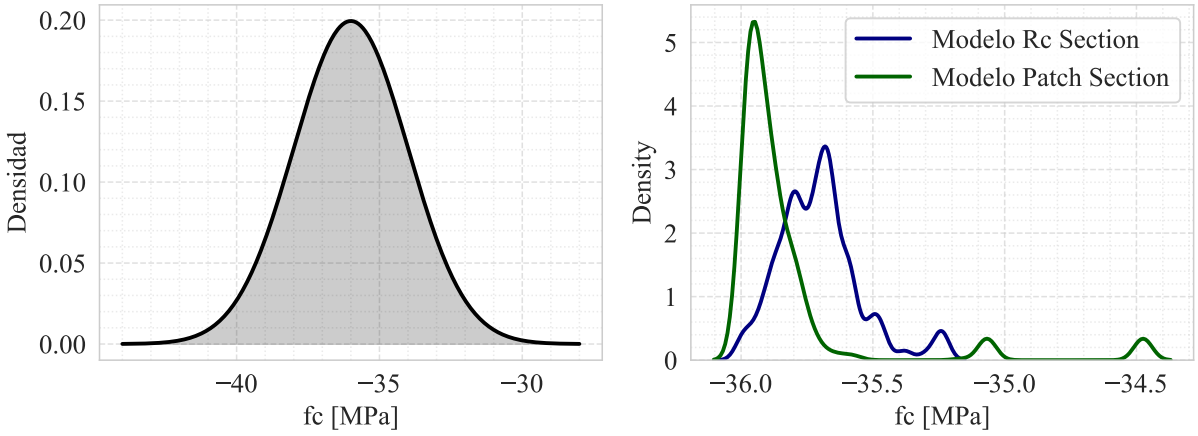


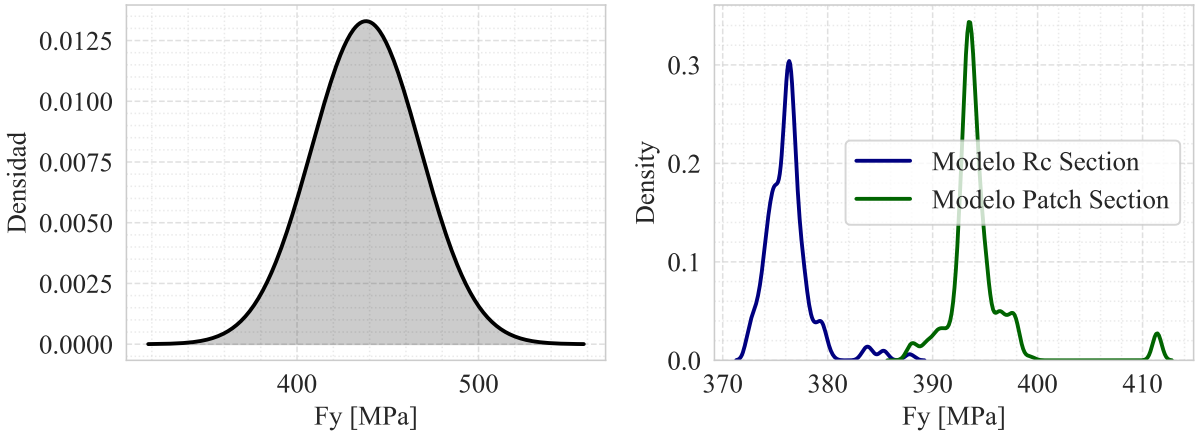
Figura 4.9: *Gráfico de correlación modelo Patch section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es*

Con el propósito de establecer una comparación visual clara entre las distribuciones *prior* iniciales y las distribuciones posteriores obtenidas tras el ajuste, se presentan las siguientes gráficas. En cada una de ellas se muestran simultáneamente, sobre un mismo sistema de ejes, las distribuciones posteriores correspondientes a ambos modelos analizados, así como las distribuciones *prior* especificadas inicialmente. De esta manera se permite identificar con facilidad los cambios generados en la incertidumbre y la precisión de cada parámetro tras la incorporación de la evidencia experimental.

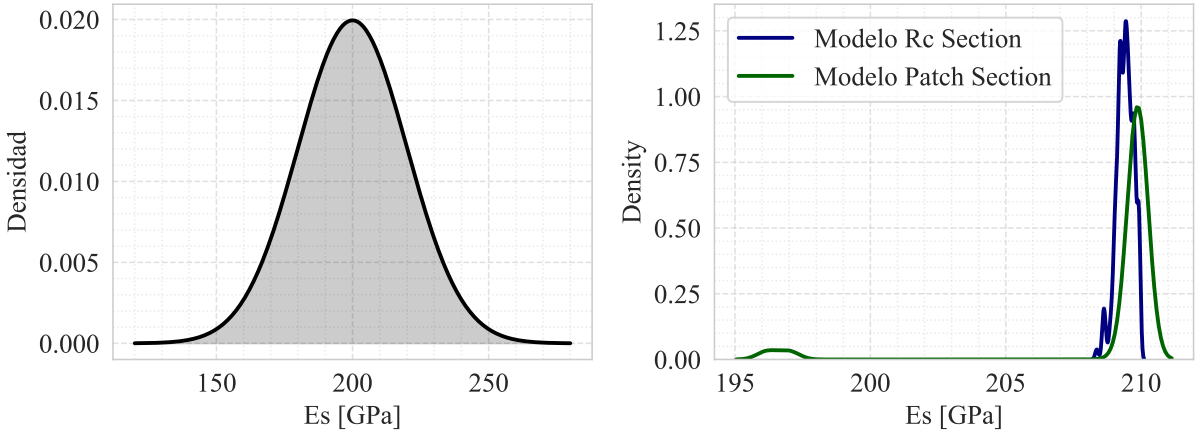
Adicionalmente, para complementar esta comparación gráfica, se presentan en la Figura 4.12 y la Figura 4.13. Las distribuciones posteriores de cada parámetro mediante diagramas tipo violín. Sumado a esto, se grafica en tipo forest, en donde se muestran las distribuciones con un intervalo de confianza del 95 % tal y como se ve en la Figura 4.14 y la Figura 4.15



(**a**) f_c

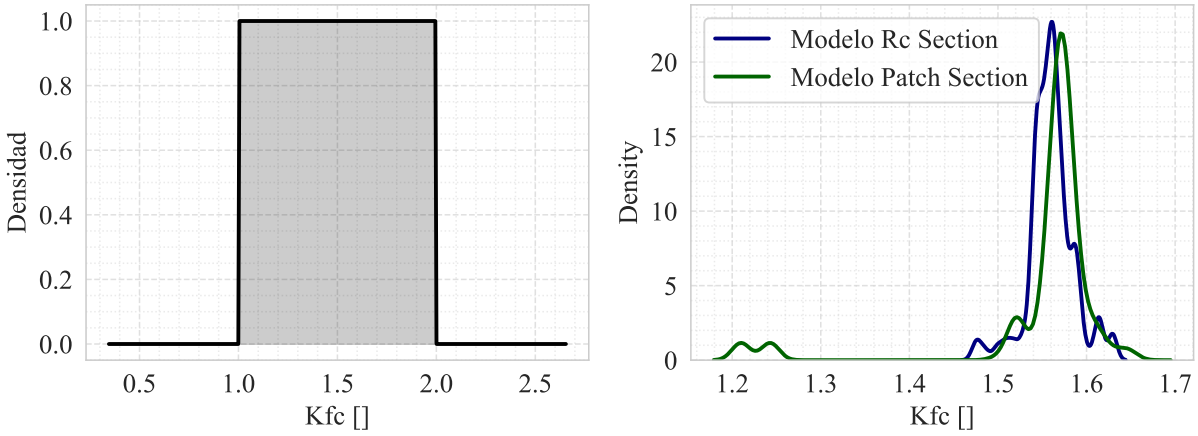


(**b**) F_y

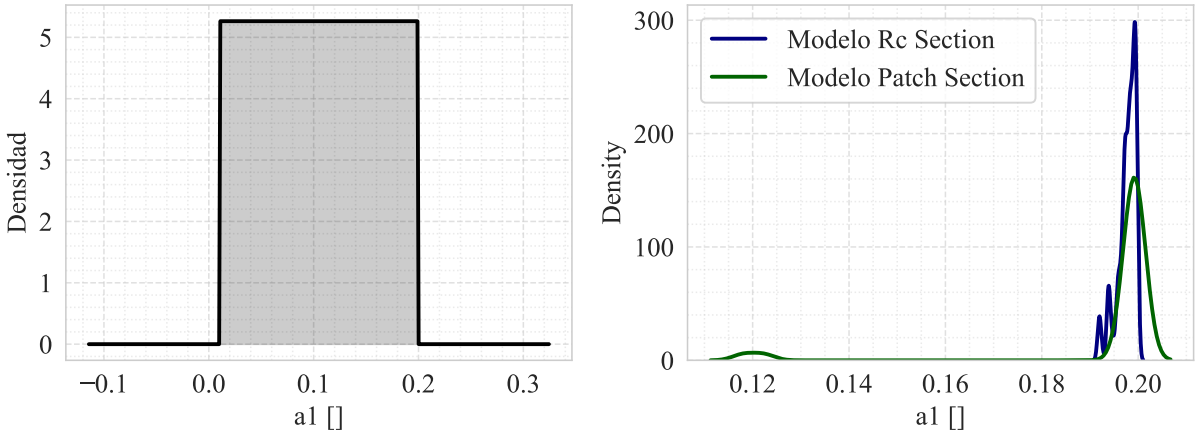


(**c**) E_s

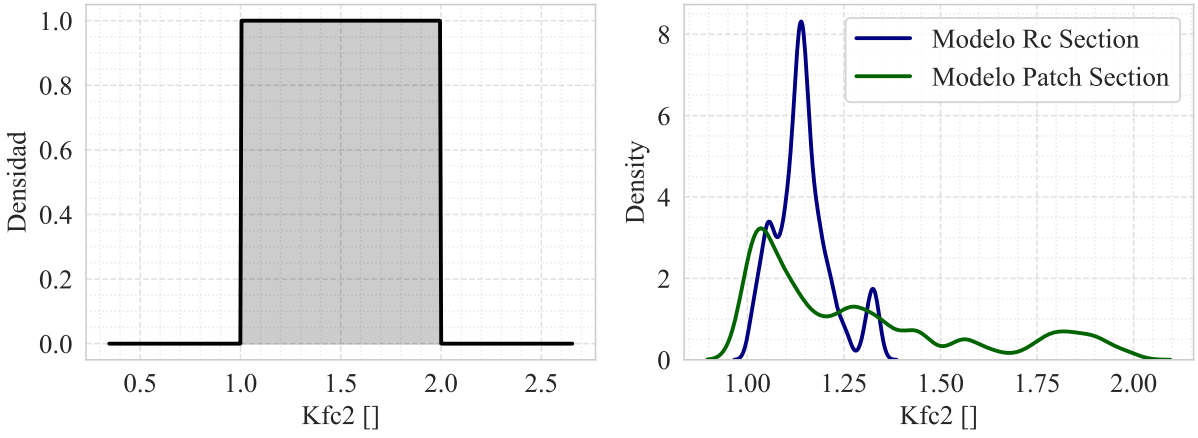
Figura 4.10: *Distribuciones prior y posterior para ambos modelos.*



(a) k_{fc}



(b) a_1



(c) k_{fc2}

Figura 4.11: *Distribuciones prior y posterior para ambos modelos.*

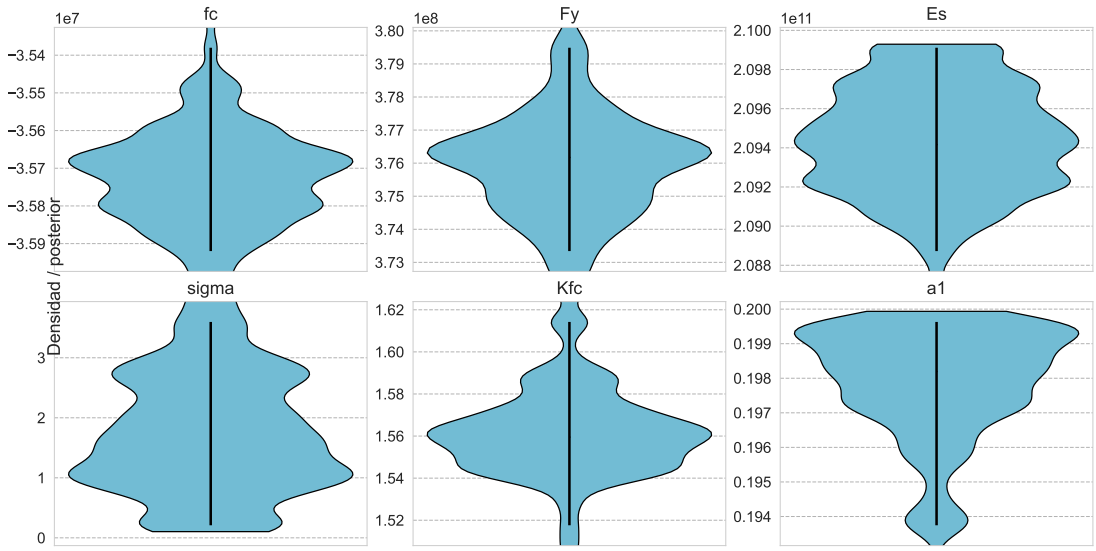


Figura 4.12: *Gráfico de violín distribución posterior modelo RC section. Resultados en Pascales*

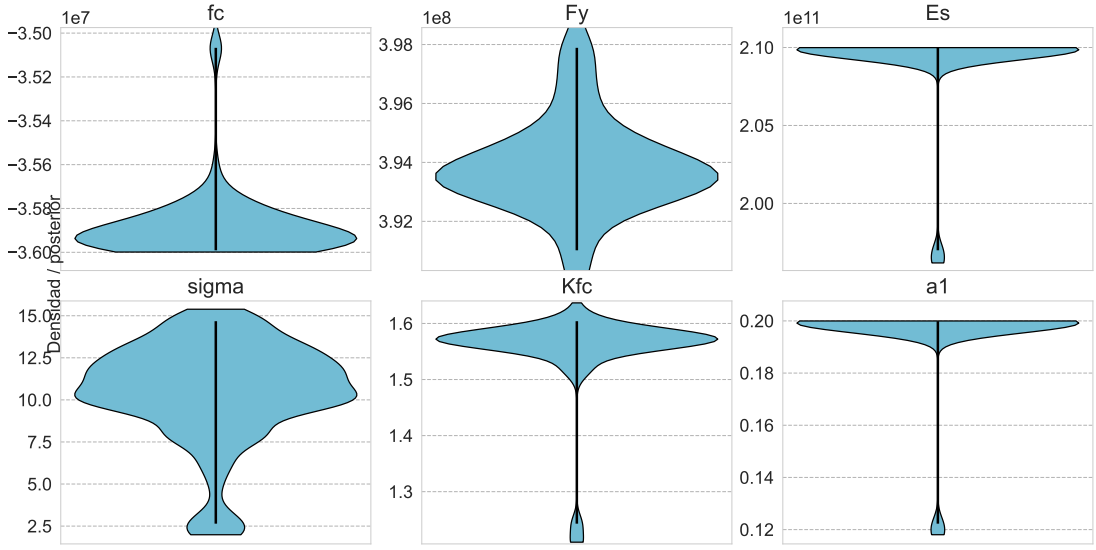


Figura 4.13: *Gráfico de violín distribución posterior modelo Patch section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es*

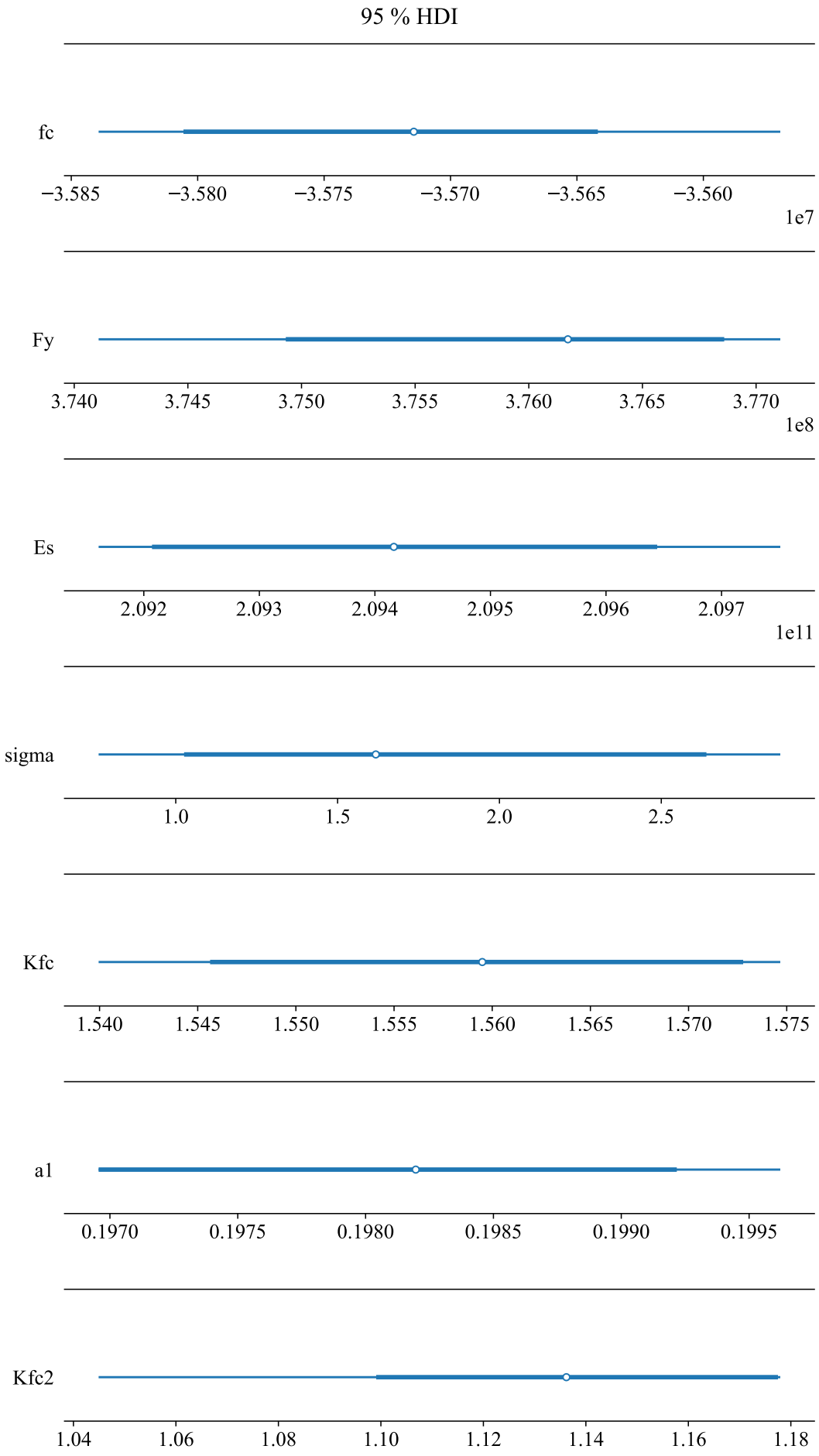


Figura 4.14: *Gráfico tipo forest con intervalo de confianza del 95 % para modelo RC section. Resultados en Pascales para fc, Fy, Es*

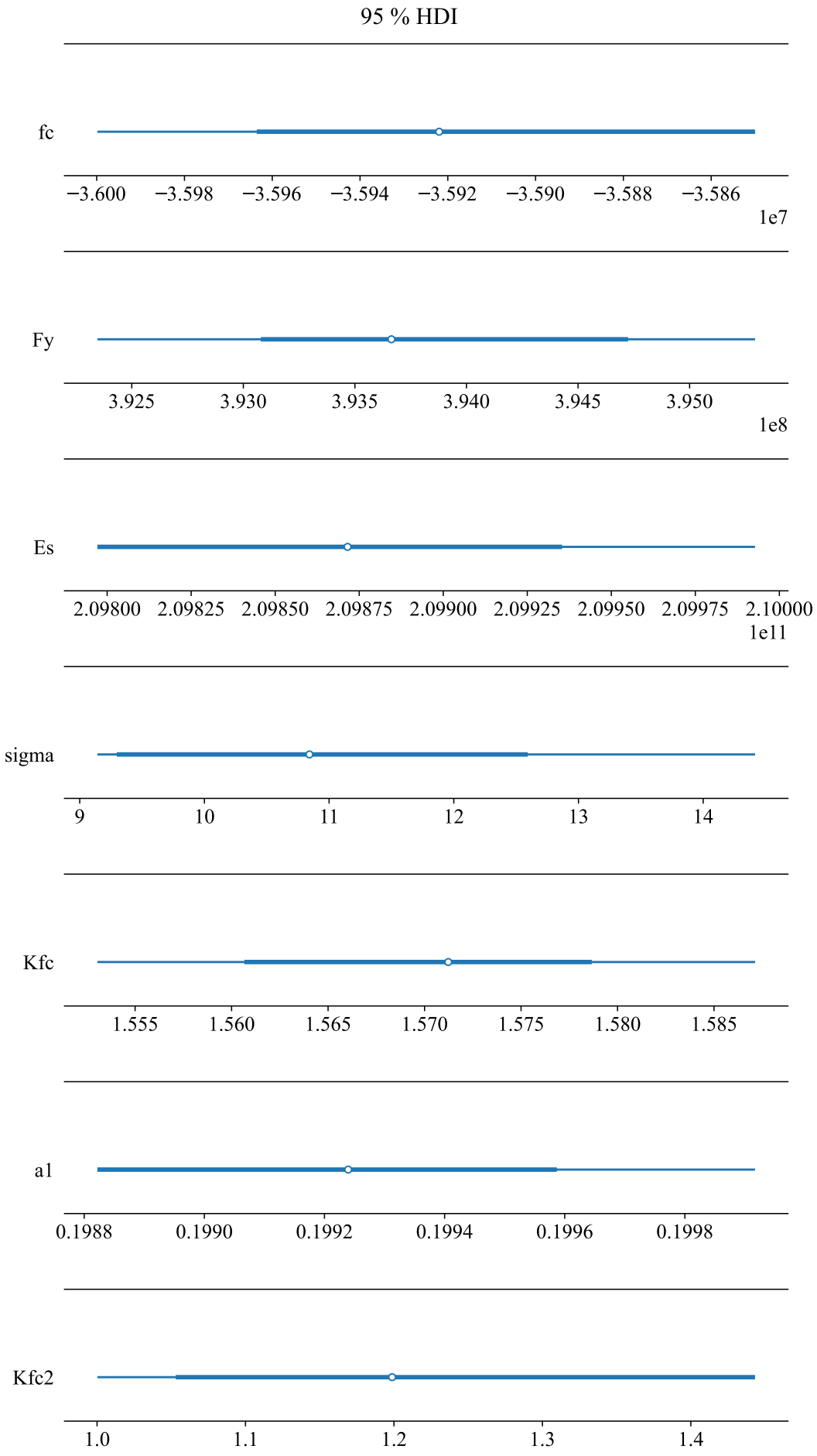
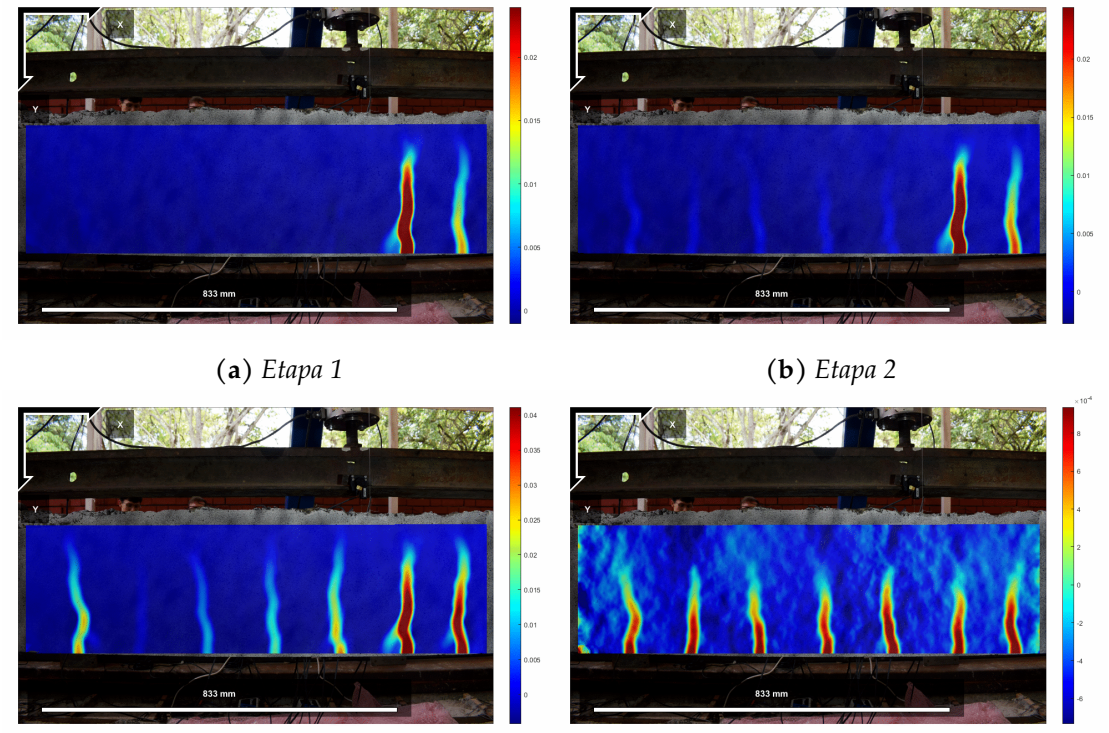


Figura 4.15: *Gráfico tipo forest con intervalo de confianza del 95 % para modelo Patch Section. Resultados en Pascales*

La Figura 4.16 muestra la secuencia de mapas de deformación obtenidos mediante correlación de imágenes digitales (DIC). En cada etapa se evidencia la aparición y propagación progresiva de las grietas a lo largo del elemento ensayado.



(**a**) *Etapa 1* (**b**) *Etapa 2*

(**c**) *Etapa 3* (**d**) *Etapa 4*

Figura 4.16: *Evolución progresiva de las grietas medida con DIC.*

Para comparar el modelo de concreto confinado antes y después del ajuste, se determinó el coeficiente de confinamiento nominal k_{fc} siguiendo el procedimiento descrito por Mander et al. (1988). Usando la Ecuación 3.1, se obtuvieron los valores de k_{fc} para cada zona de confinamiento, tal como se resume en la Tabla 4.4. En donde las zonas A y C corresponden a las zonas más confinadas. (vease Figura 3.1)

Zona	$\rho = f_l / f'_{co}$	k_{fc}
B	$3.74/36 = 0.104$	1.59
A y C	$1.29/36 = 0.036$	1.23

Cuadro 4.4: *Valores de k_{fc} en función de ρ para cada zona de confinamiento.*

Los coeficientes de las zonas A, B y C se promediaron ponderando según su longitud, obteniéndose un valor global $k_{fc,global} \approx 1{,}35$.

La Tabla 4.5 presenta los valores ajustados de los coeficientes de confinamiento k_{fc} y k_{fc2} para ambos modelos, diferenciando las zonas de confinamiento A, B y C. Comparando estos resultados con los valores teóricos obtenidos antes del ajuste (ver Tabla 4.4), se observa que el confinamiento ajustado en la zona central fue mayor que

en los extremos, lo cual contradice la expectativa estructural basada en el diseño sísmico. Esta inversión se explica por el bajo impacto que tiene el parámetro k_{fc2} en la respuesta global del modelo, tal como se evidenció en el análisis de sensibilidad. Dado que k_{fc2} no afecta significativamente los desplazamientos ni la rigidez, el modelo lo mantiene con valores más bajos y enfoca el ajuste en k_{fc}, que sí tiene efecto directo sobre la respuesta simulada. En consecuencia, el confinamiento "efectivo" termina concentrándose en la zona central. No obstante, los promedios globales por modelo — 1.352 para *RC section* y 1.413 para *Patch*— resultan muy cercanos al valor teórico global de $k_{fc,global} \approx 1{,}35$, lo que sugiere que, a pesar de la redistribución interna, el modelo numérico logró preservar razonablemente la proporción total de confinamiento estimada analíticamente tras la calibración.

Modelo	**Parámetro**	**Media**	**Zona**
RC section	k_{fc}	1.560	A
	k_{fc2}	1.144	B
Patch section	k_{fc}	1.552	A
	k_{fc2}	1.274	B
Promedio global		RC: 1.352	Patch: 1.413

Cuadro 4.5: *Media de los parámetros de confinamiento k_{fc} y k_{fc2} para ambos modelos, junto con el promedio global por modelo.*

Las Figuras 4.17 y 4.18 muestran las curvas esfuerzo–deformación en la zona central (k_{fc}) para los modelos *Patch* y *RC Section*, respectivamente; las Figuras 4.19 y 4.20 presentan el mismo análisis para la zona de extremos (k_{fc2}). En cada panel se incluyen todas las muestras de la posterior (gris), la media μ (negro) y las envolventes $\mu \pm 1\sigma$ y $\mu \pm 2\sigma$ (bandas de una y dos desviaciones estándar), lo que permite apreciar la tendencia central y la dispersión de la respuesta por tipo de confinamiento y comparar el comportamiento entre modelos (la banda $\pm 2\sigma$ cubre aproximadamente el 95 % de las muestras si la distribución es cercana a normal).

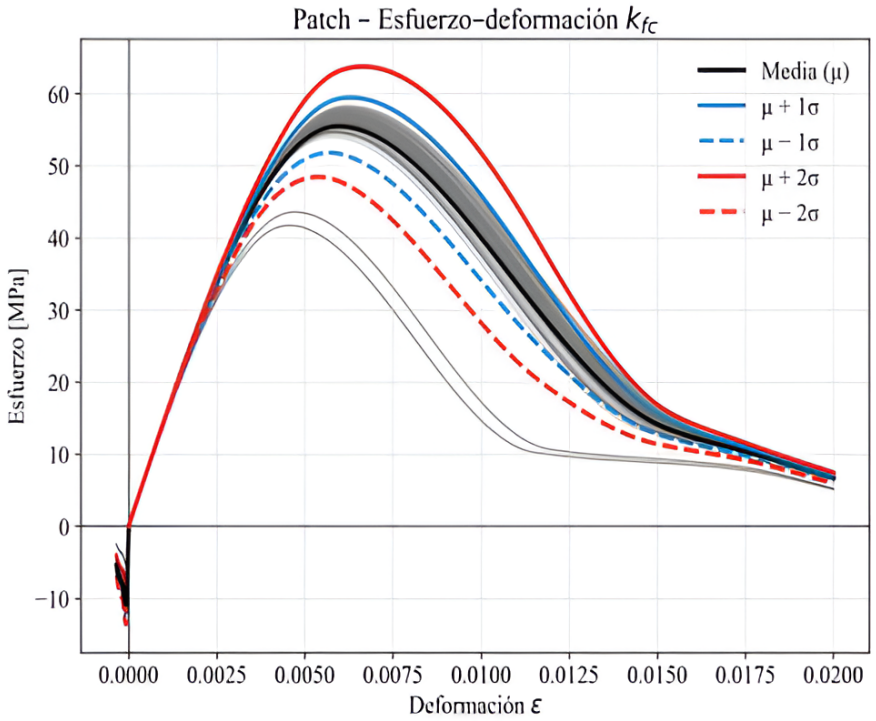


Figura 4.17: *Patch — curvas esfuerzo–deformación para la zona central (k_{fc}). Se muestran todas las muestras (gris) y las bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$.*

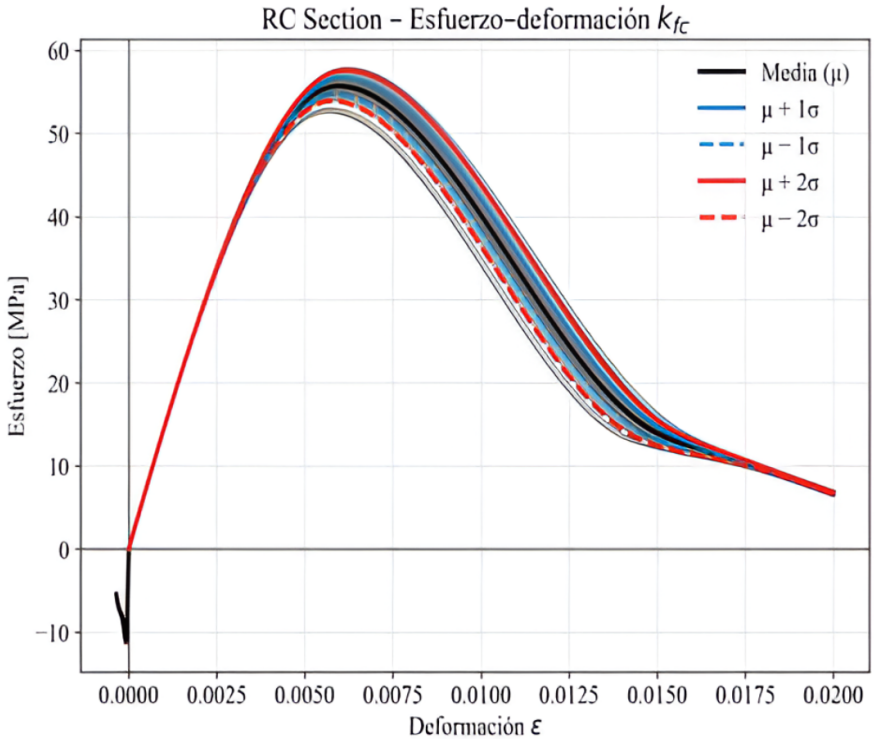


Figura 4.18: *RC Section — curvas esfuerzo–deformación para la zona central (k_{fc}). Incluye muestras (gris) y bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$.*

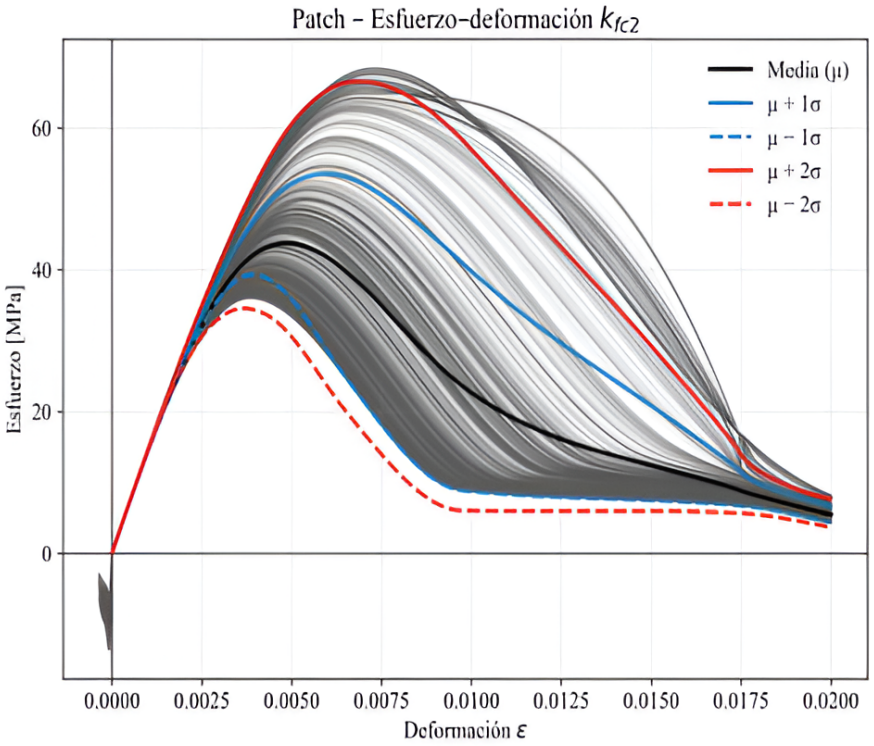


Figura 4.19: *Patch — curvas esfuerzo–deformación para la zona de extremos (k_{fc2}). Incluye muestras (gris) y bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$.*

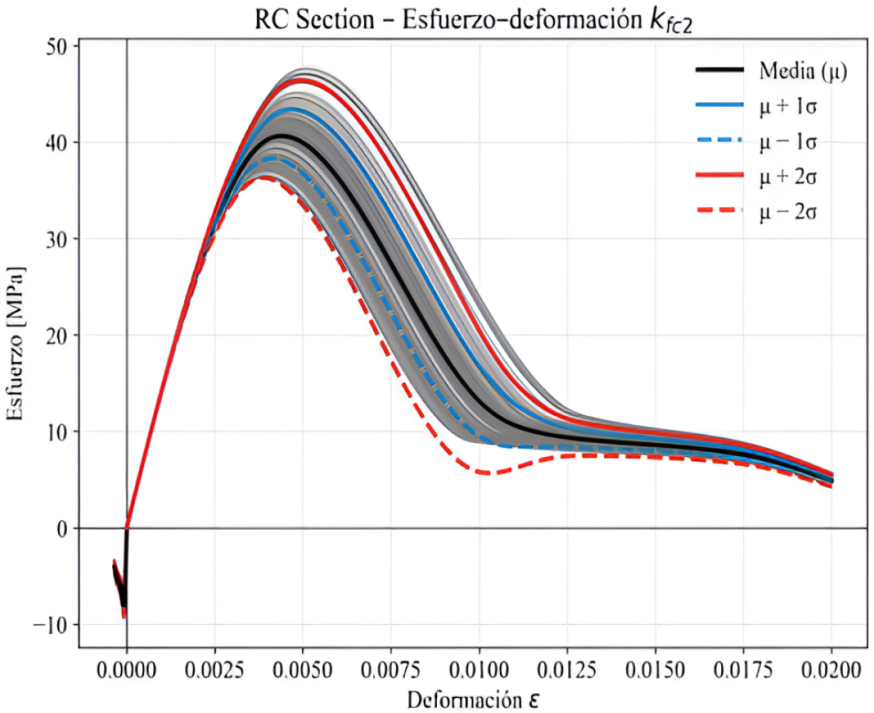


Figura 4.20: *RC Section — curvas esfuerzo–deformación para la zona de extremos (k_{fc2}). Incluye muestras (gris) y bandas $\mu \pm 1\sigma$, $\mu \pm 2\sigma$.*

4.1.3. Comprobación de la predicción posterior

La comprobación de la predicción posterior (*posterior predictive check*) se realiza con el objetivo de evaluar la capacidad del modelo ajustado para reproducir adecuadamente los datos experimentales. Esta técnica constituye una herramienta muy utilizada dentro del enfoque bayesiano, ya que permite validar si el modelo, junto con los parámetros estimados, es capaz de generar simulaciones que se acerquen razonablemente a las observaciones. A través de esta comparación entre los datos observados y las predicciones generadas a partir de muestras de la distribución posterior, se puede identificar visualmente el grado de ajuste del modelo y, en consecuencia, su adecuación para representar el fenómeno físico bajo estudio. La principal ventaja de este procedimiento radica en que permite verificar si las inferencias obtenidas son coherentes con la evidencia empírica disponible. La Figura 4.21 muestra la posterior predictive check para el modelo RC section. Mientras la Figura 4.22 lo hace para el modelo Patch. Para complementar la inspección gráfica, es útil cuantificar el grado de cobertura de los intervalos de credibilidad. Por ejemplo, calcular el porcentaje de observaciones reales que caen dentro del 95 %

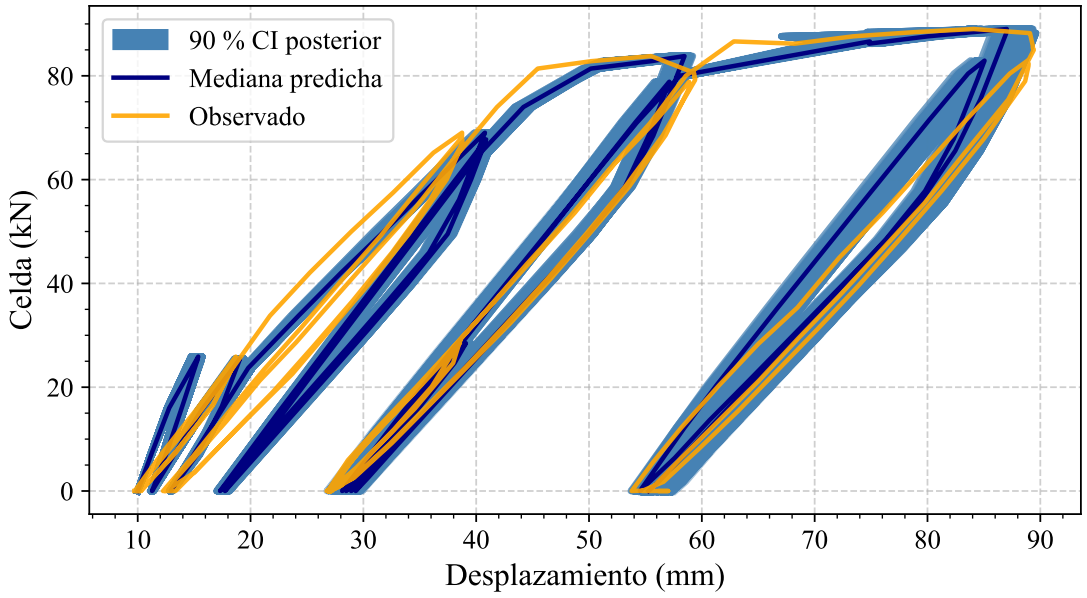


Figura 4.21: *Posterior predictive check para los desplazamientos observados modelo RC section.*

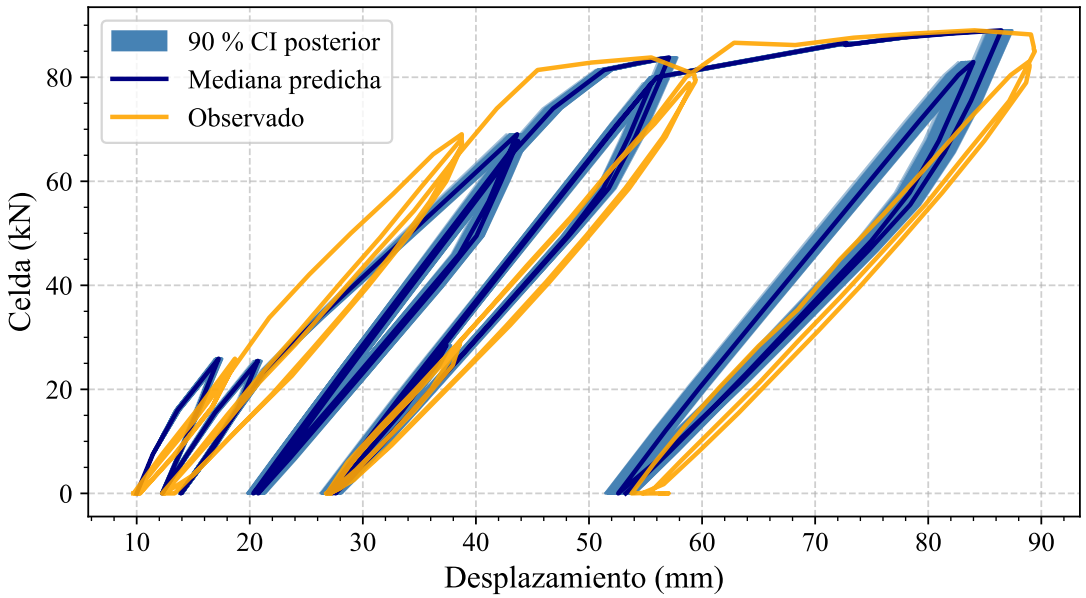


Figura 4.22: *Posterior predictive check para los desplazamientos observados modelo Patch.*

4.1.4. Interpretación física de los resultados

Analizando los resultados obtenidos, es fundamental comprender el sentido físico de cada parámetro. Las distribuciones posteriores revelan que, en general, el modelo tiende a reducir la incertidumbre respecto a los valores iniciales propuestos en las distribuciones *prior*. Esto quiere decir que todas las distribuciones posterior tienen una desviación estándar menor comparada con las distribuciones prior. En particular, la resistencia a compresión f_c se mantuvo con una media cercana los 36 MPa, mientras que F_y disminuyó su media y E_s la aumentó con respecto al prior. Lo anterior indica un cambio significativo en la respuesta del acero. Un menor F_y significa que el acero entra en fluencia con menos carga. Por otro lado, un mayor E_s indica un tramo elástico más rígido. Es decir, el acero se deforma menos antes de alcanzar la fluencia. Como consecuencia, la deformación unitaria de fluencia ε_y disminuye. Esto implica que el modelo predice una transición más temprana a la fase plástica. En términos estructurales, la viga presenta una respuesta inicial más rígida.

La resistencia a tracción del concreto también juega un papel clave en esta interacción. Un mayor valor de este parámetro retrasa la aparición de grietas y mejora la rigidez en las primeras etapas de carga. En cambio, una menor resistencia a tracción conduce a un agrietamiento más temprano, reduciendo la rigidez global y aumentando las deformaciones. El parámetro a_1, relacionado con la resistencia a tracción del concreto, muestra valores cercanos a 0.20 y una correlación con f_c y k_{fc}, especialmente en el modelo *RC section* (ver Figura 4.8). Esto indica que, al reducirse f_c, el modelo tiende a aumentar tanto el confinamiento como la resistencia a tracción para compensar la rigidez estructural. Esta interacción evidencia un mecanismo interno de redistribución de rigideces dentro del modelo bayesiano. También se observa correlación negativa

entre f_c y a_1. Por otro lado, el modelo *Patch* (Figura 4.9) muestra una menor dependencia entre los parámetros, con nubes de puntos más dispersas y sin correlaciones fuertes. Esto sugiere que el modelo ofrece mayor libertad en la combinación de parámetros, lo que puede explicar su mayor complejidad computacional y menor eficiencia de muestreo.

El coeficiente de confinamiento k_{fc} mostró un valor medio cercano a 1.56 en ambos modelos, mientras que k_{fc2}, asociado a la zona central de confinamiento, presentó valores más bajos, con medias de 1.144 para el modelo *RC section* y 1.274 para el modelo *Patch*. Esta diferencia está ligada a la prácticamente nula contribución del parámetro en la respuesta del modelo. Esta falta de sensibilidad puede explicarse por la distribución natural de deformaciones en una viga sometida a flexión pura. Bajo este tipo de carga, la mayor parte de la curvatura y, por tanto, de la demanda estructural, se concentra en la zona central del elemento, mientras que las regiones cercanas a los apoyos — donde se localizan las zonas A y C representadas por k_{fc2}— experimentan menores niveles de deformación. Como resultado, el confinamiento en los extremos no se activa de forma significativa durante el ensayo, y su efecto sobre los desplazamientos y la rigidez global es muy limitado. En consecuencia, el modelo ajusta preferentemente el parámetro k_{fc}, asociado a la zona más activa, y reduce el valor de k_{fc2} hacia su límite inferior, reflejando su escasa influencia en la respuesta observada.

Finalmente, la comparación entre las curvas observadas y las predichas (Figura 4.21 y Figura 4.22) revela que ambos modelos replican adecuadamente la forma general del ensayo. Sin embargo, el modelo *RC section* predice con mayor precisión las trayectorias en los ciclos de carga, mostrando una mediana más ajustada y una banda de credibilidad que en los desplazamientos máximos, se acerca mucho más al comportamiento experimental. El modelo *Patch*, en cambio, refleja una mayor dispersión, sobre todo en las fases intermedias y en la recuperación del elemento.

4.1.5. Métricas cuantitativas de bondad de ajuste

Para complementar la inspección visual del posterior predictive check se evaluaron tres métricas de bondad de ajuste basadas en residuales:

a) **RMSE** (root mean square error) entre los desplazamientos y deformaciones observadas y predichas.
b) **MSE** (mean square error) entre los desplazamientos y deformaciones observadas y predichas.
c) **MAE** (mean absolute error) en desplazamientos y deformaciones observadas y predichas.

La Tabla 4.6 muestra los resultados de las métricas mencionadas para ambos modelos.

Métrica	Desplazamientos		Deformaciones unitarias	
	RC-Section	Patch-Section	RC-Section	Patch-Section
MSE	14.77	18.75	0.000003	0.000003
RMSE	3.84	4.33	0.001773	0.001755
MAE	2.99	3.29	0.001395	0.001385

Cuadro 4.6: *Comparación de errores (MSE, RMSE, MAE) para los modelos RC-Section y Patch-Section.*

Los resultados confirman la tendencia observada en las Figuras 4.21–4.22: el modelo *RC section* exhibe un RMSE y un MAE menores. Ello respalda la conclusión de que, pese a su simplicidad geométrica, dicho modelo ofrece un ajuste estadísticamente más consistente para este caso de estudio.

Diagnóstico MCMC y robustez inferencial

La Tabla 4.3 resume las métricas esenciales de convergencia y eficiencia del muestreo para ambos modelos. En todos los casos los valores de $\widehat{R}$ son $\leq 1{,}01$, indicando que las cadenas independientes alcanzaron una distribución estacionaria común. Sin embargo, existen diferencias notables en el tamaño efectivo de muestra (**ESS**) y en el error estándar Monte Carlo (**MCSE**):

- Para los cinco parámetros considerados, el modelo *Patch* muestra valores de ESS cercanos o superiores a 2000, mientras que el modelo *RC section* se ubica entre 1400 y 1800. Ello sugiere una autocorrelación más baja y, por ende, una eficiencia de muestreo mayor en el modelo *Patch*.
- De forma coherente, los MCSE del modelo *Patch* son sistemáticamente menores (0.022–0.030) que los del *RC section* (0.038–0.050), lo cual implica estimaciones más precisas para un mismo número de iteraciones.
- La paridad en los valores de $\widehat{R}$ confirma que ambas configuraciones convergen adecuadamente; las diferencias se concentran solo en la eficiencia estadística.

Interpretación práctica El ESS ligeramente menor del modelo *RC section* refleja una autocorrelación más pronunciada entre muestras consecutivas, algo esperable al tratarse de un modelo con menos parámetros pero con correlaciones estructurales más fuertes. Pese a ello, los tamaños efectivos resultan suficientes (ESS $> 1\,000$) para obtener estimaciones estables de la media y de los cuantiles posteriores. El modelo *Patch* —gracias a su mayor flexibilidad— presenta cadenas más mezcladas, lo que se traduce en MCSE más bajos y una caracterización de la incertidumbre posterior más eficiente.

5

Conclusiones

En este trabajo se realizó un ajuste bayesiano para dos modelos de vigas de concreto reforzado implementados en *OpenSees*: el modelo **RC Section**, que define la sección a través de propiedades geométricas y número de barras, y el modelo **Patch**, que permite una representación detallada de la geometría mediante fibras distribuidas explícitamente. Se ajustaron seis parámetros principales: la resistencia a compresión del concreto (f_c), el esfuerzo de fluencia del acero (F_y), el módulo de elasticidad del acero (E_s), el error estándar de medición (σ), el factor de confinamiento (k_{fc}) y (k_{fc2}) y el parámetro a_1, que amplifica la resistencia a tracción. Los resultados indican que ambos modelos logran representar adecuadamente la respuesta global de la viga, pero a través de mecanismos diferentes. Además, se identificaron correlaciones relevantes entre algunos parámetros que condicionan la interpretación estructural de los resultados. Por esto se concluye que:

- Las distribuciones *posteriores* redujeron de forma consistente la incertidumbre frente a las *priors*, lo que incrementa la confianza en los parámetros estimados y se refleja en bandas predictivas más estrechas en M–ϕ y P–Δ. En particular, f_c' se mantuvo cercano al valor experimental, mientras que F_y disminuyó y E_s aumentó, indicando un acero más rígido ante la deformación y una mejor coherencia con la respuesta medida.
- El parámetro de confinamiento central k_{fc} resultó similar en ambos modelos $(\approx 1{,}56)$, confirmando un efecto estable en la zona de mayor contribución elástica. El coeficiente de extremos k_{fc2} fue menor y mostró un comportamiento más disperso, probablemente por la limitada información en las regiones terminales y por la localización de la plastificación en esas zonas.
- Desde el punto de vista computacional, el modelo *RC Section* fue más eficiente durante el muestreo bayesiano, permitiendo cadenas más largas y convergencias más estables con los mismos recursos, lo que lo hace especialmente adecuado para exploraciones paramétricas amplias o análisis de sensibilidad extensos.
- El enfoque adoptado permite *caracterizar* propiedades de materiales a partir del comportamiento de un elemento real construido, integrando ensayo, modelación y actualización bayesiana.

- Comparando formulaciones, *RC Section* fue más *preciso* (bandas creíbles más estrechas) aunque con cierto sesgo respecto al ensayo, mientras que *Patch* fue más *exacto* al seguir mejor la curva observada, a costa de mayor dispersión. En consecuencia, la elección del modelo debe alinearse con el objetivo: predicción con baja varianza o ajuste fiel para calibración.

5.1. Recomendaciones

A partir de los resultados obtenidos y del análisis comparativo entre los dos modelos de elementos finitos, se plantean las siguientes recomendaciones para futuras investigaciones o aplicaciones similares:

- **Verificación experimental del acero.** Es recomendable realizar más ensayos que permitan verificar el comportamiento real de las galgas extensométricas del acero. Esto permitirá reducir la incertidumbre asociada a la medición de la deformación de fluencia, especialmente en la capacidad de recuperación que muestra el acero.
- **Revisión de parámetros geométricos.** Es conveniente incluir en la calibración parámetros geométricos, como la excentricidad del refuerzo, sobre todo en modelos tipo *Patch*, donde la distribución espacial del refuerzo puede modificar significativamente la respuesta estructural.
- **Uso de modelos según complejidad.** Para elementos estructurales simples, se recomienda emplear el modelo ***RC section***, dado que es más estable numéricamente, reduce el costo computacional y presenta menor dispersión en las predicciones. Su formulación compacta también facilita su calibración. En contraste, el modelo ***Patch*** sigue siendo útil para casos donde se requiere mayor fidelidad geométrica o un análisis local detallado.

Página intencionalmente dejada en blanco.

Bibliografía

Abbas, Yassir M (2023). «Shear behavior of ultra-high-performance reinforced concrete beams–Finite element and uncertainty quantification study». En: *Structures*. Vol. 47. Elsevier, págs. 2365-2380.

Alqarni, Ali S. y Mohammad J. Alshannag (2024). «Analytical approach for predicting the moment-curvature response of structural lightweight reinforced concrete beams». En: *Case Studies in Construction Materials* 21, e03649. ISSN: 2214-5095. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cscm.2024.e03649. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214509524008003.

Baji, Hassan (2014a). «The effect of uncertainty in material properties and model error on the reliability of strength and ductility of reinforced concrete members». En: *The University of Queensland*.

Baji, Hassan (2014b). *The effect of uncertainty in material properties and model error on the reliability of strength and ductility of reinforced concrete members School of Civil Engineering*.

Berkhof, Johannes, Iven Van Mechelen y Herbert Hoijtink (2000). «Posterior predictive checks: Principles and discussion». En: *Computational Statistics* 15, págs. 337-354.

Bournonville, Matt, Jason Dahnke y David Darwin (2004). *Statistical analysis of the mechanical properties and weight of reinforcing bars*. Inf. téc. University of Kansas Center for Research, Inc.

Cardoso, João B et al. (2008). «Structural reliability analysis using Monte Carlo simulation and neural networks». En: *Advances in Engineering Software* 39.6, págs. 505-513.

Castellanos-Toro, Sebastián et al. (2023). «Evaluation of experimental techniques for performance estimation of post-tensioned concrete beams». En: *Construction and Building Materials* 393, pág. 132131.

Chandrupatla, Tirupathi, Tirupathi R Chandrupatla y Ashok Belegundu (2021). *Introduction to finite elements in engineering*. Cambridge University Press.

Clough, Ray W y Edward L Wilson (1999). «Early finite element research at Berkeley». En: *Fifth US national conference on computational mechanics*, págs. 1-35.

Courant, Richard et al. (1994). «Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations». En: *Lecture notes in pure and applied mathematics*, págs. 1-1.

Darwin, David y David A Pecknold (1977). «Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete». En: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 103.2, págs. 229-241.

DE, REGLAMENTO COLOMBIANO y CONSTRUCCIÓN SISMO RESISTENTE (2010). «NSR-10». En.

Engen, Morten et al. (2017). «A quantification of the modelling uncertainty of non-linear finite element analyses of large concrete structures». En: *Structural safety* 64, págs. 1-8.

Galasso, Carmine, Giuseppe Maddaloni y Edoardo Cosenza (jul. de 2014). «Uncertainly Analysis of Flexural Overstrength for Capacity Design of RC Beams». En: *Journal of Structural Engineering* 140 (7). ISSN: 0733-9445. DOI: 10.1061/(asce)st.1943-541x.0001024.

Garcia, M. y S. Lee (2019). *Advanced Computational Methods in Structural Engineering*. 2nd. Madrid, Spain: Editorial Universitaria.

Ghanem, Roger G y Pol D Spanos (2003). *Stochastic finite elements: a spectral approach*. Courier Corporation.

Guerrero, Felipe et al. (2024). «Bayesian uncertainty assessment for mechanical properties of steel reinforcing bars in Colombia». En: *Steel and Composite Structures* 53.6, pág. 687.

Hassoun, J. y S. Al-Manaseer (2020). «Impact of Reinforced Concrete Innovations on Structural Engineering». En: *Journal of Structural Engineering* 146.5, pág. 04020067. DOI: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002935.

Hassoun, M.N. y A. Al-Manaseer (2020). *Structural Concrete: Theory and Design*. Wiley. ISBN: 9781119605119. URL: https://books.google.com.co/books?id=ammBwwEACAAJ.

Hurtado, Oscar D. et al. (2024). «Evaluation of steel ratio limits for reinforced concrete beams using reliability analysis and Bayesian methods». En: *Structures* 70, pág. 107611. ISSN: 2352-0124. DOI: https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.107611. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352012424017648.

Imounga, H. M. et al. (2021). «Bayesian Updating of a Cracking Model for Reinforced Concrete Structures Subjected to Static and Cyclic Loadings». En: *Fracture, Fatigue, Failure and Damage Evolution III*.

Kwak, H-G y S-P Kim (2002). «Cyclic moment–curvature relation of an RC beam». En: *Magazine of Concrete Research* 54.6, págs. 435-447.

Kwak, Hyo-Gyoung y Sun-Pil Kim (2002). «Nonlinear analysis of RC beams based on moment–curvature relation». En: *Computers & structures* 80.7-8, págs. 615-628.

Lee, Jeeho y Gregory L Fenves (1998). «Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures». En: *Journal of engineering mechanics* 124.8, págs. 892-900.

Lubliner, Jacob et al. (1989). «A plastic-damage model for concrete». En: *International Journal of solids and structures* 25.3, págs. 299-326.

Ma, Y. et al. (2013). «Probabilistic Prediction with Bayesian Updating for Strength Degradation of RC Bridge Beams». En: *Structural Safety* 44, págs. 102-109. DOI: 10.1016/j.strusafe.2013.07.006.

Mander, J. B., M. J. N. Priestley y R. Park (1988). «Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete». En: *Journal of Structural Engineering* 114.8, págs. 1804-1826. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1988)114:8(1804). eprint: https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9445%281988%29114%3A8%281804%29. URL: https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9445%281988%29114%3A8%281804%29.

Mokheef, Dalia (jul. de 2016). *Probability Density Function (PDF)*. DOI: 10.13140/RG.2.1.1688.9843.

Monteiro, F., T. Almeida y R. Sousa (2021). «Probabilistic Models for Structural Analysis: A Comprehensive Review». En: *Engineering Structures* 230, pág. 111615. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.111615.

Monti, Giorgio y Enrico Spacone (2000). «Reinforced Concrete Fiber Beam Element with Bond-Slip». En: *Journal of Structural Engineering* 126.6, págs. 654-661. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2000)126:6(654). eprint: https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9445%282000%29126%3A6%28654%29. URL: https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9445%282000%29126%3A6%28654%29.

Mosley, William Henry, John H Bungey y Ray Hulse (1999). *Reinforced concrete design*. Springer.

Nguyen, Truong-Thang et al. (2024). «Development of an adaptive reliability analysis framework for reinforced concrete frame structures using uncertainty quantification». En: *Applied Intelligence* 54.22, págs. 11450-11471.

Öchsner, Andreas y Andreas Öchsner (2021). «Euler–Bernoulli beam theory». En: *Classical Beam Theories of Structural Mechanics*, págs. 7-66.

Pandit, D y Bhakti N Patel (2022). «On numerical moment-curvature relationship of a beam». En: *Sādhanā* 47.1, pág. 27.

Ponsi, Federico et al. (2024). «Parameter estimation and uncertainty quantification of a fiber-reinforced concrete model by means of a multi-level Bayesian approach». En: *Construction and Building Materials* 438, pág. 136994.

Priestley, M. et al. (mayo de 2008). «Displacement-Based Seismic Design of Structures». En: *Earthquake Spectra - EARTHQ SPECTRA* 24. DOI: 10.1193/1.2932170.

Rayjada, Satwik Pankajkumar, Meera Raghunandan y Jayadipta Ghosh (2023). «Machine learning-based RC beam-column model parameter estimation and uncertainty quantification for seismic fragility assessment». En: *Engineering Structures* 278, pág. 115111.

Real, Mauro De Vasconcellos, Américo Campos Filho y Sérgio Roberto Maestrini (2003). «Response variability in reinforced concrete structures with uncertain geometrical and material properties». En: *Nuclear Engineering and Design* 226 (3), págs. 205-220. ISSN: 00295493. DOI: 10.1016/S0029-5493(03)00110-9.

Ribeiro, A. B., J. M.F. Calixto y S. M.C. Diniz (jun. de 2016). «Assessment of epistemic uncertainties in the shear strength of slender reinforced concrete beams». En: *Engineering Structures* 116, págs. 140-147. ISSN: 18737323. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.02.045.

Scott, Michael H. y Gregory L. Fenves (2006). «Plastic Hinge Integration Methods for Force-Based Beam–Column Elements». En: *Journal of Structural Engineering* 132.2, págs. 244-252. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:2(244).

Simoen, E. et al. (2011). «Resolution and Uncertainty Analysis of Bayesian FE Model Updating Applied to the Damage Assessment of a Reinforced Concrete Beam». En: *Proc. ICASP 11, Zurich*.

Smith, L. y M. Johnson (2018). *Fundamentals of Structural Reliability*. 1st. Berlin, Germany: Springer.

Sozen, Mete Avni, Toshikatsu Ichinose y Santiago Pujol (2014). *Principles of reinforced concrete design*. CRC Press Boca Raton, FL.

Spacone, Enrico, Filip C Filippou y Fabio F Taucer (1996a). «Fibre beam–column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation». En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 25.7, págs. 711-725.

Spacone, Enrico, Filip C. Filippou y Fabio F. Taucer (1996b). «Fibre Beam–Column Model for Non-Linear Analysis of R/C Frames. Part I: Formulation». En: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 25.7, págs. 711-725. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9845(199607)25:7<711::AID-EQE576>3.0.CO;2-9.

Tao, Jinju y Jianbing Chen (2022). «A hierarchy model for the uncertainty quantification of spatial variability in the constitutive parameters of concrete in structures». En: *Structural Safety* 95, pág. 102181.

Turner, M Jon et al. (1956). «Stiffness and deflection analysis of complex structures». En: *journal of the Aeronautical Sciences* 23.9, págs. 805-823.

Wang, Yanping, Sinan Xiao y Zhenzhou Lu (2019). «An efficient method based on Bayes' theorem to estimate the failure-probability-based sensitivity measure». En: *Mechanical Systems and Signal Processing* 115, págs. 607-620.

Zhang, Hao, Robert L Mullen y Rafi L Muhanna (2010). «Interval Monte Carlo methods for structural reliability». En: *Structural Safety* 32.3, págs. 183-190.