

**METODO DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA EN SISTEMAS ESTRATIFICADOS CON
AISLANTES TOPOLÓGICOS**

DAVID FERNANDO ROJAS VALLECILLA



UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRIA EN CIENCIAS-FISICA

SANTIAGO DE CALI

2019

**METODO DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA EN SISTEMAS ESTRATIFICADOS CON
AISLANTES TOPOLÓGICOS**

DAVID FERNANDO ROJAS VALLECILLA

Trabajo de investigación presentado para optar el título en Maestría en Ciencias-Física

Director

JUAN CARLOS GRANADA

Ph.D.

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN CIENCIAS-FÍSICA

SANTIAGO DE CALI

2019

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO MAESTRÍA EN CIENCIAS-FÍSICA
SANTIAGO DE CALI

DAVID FERNANDO ROJAS VALLECILLA

**METODO DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA EN SISTEMAS ESTRATIFICADOS CON
AISLANTES TOPOLÓGICOS**

TEMAS:

1 Matriz de transferencia

2 Aislantes topológicos

3 Sistemas estratificados

RESUMEN

En el marco de la electrodinámica del axion, se examinaron las propiedades electrodinámicas en sistemas estratificados que contienen aislantes topológicos (TI) a través del método de matriz de transferencia. Se obtuvieron los elementos de la matriz de transferencia para una interfaz que separa dos medios con una topología no trivial y para una película compuesta por un aislante topológico. Se mostró que el término topológico induce un acople de los modos de propagación TM (transversal magnético) y TE (transversal eléctrico). Este acople se ve reflejado en la presencia de nuevos términos en la matriz de transferencia, los cuales dependen linealmente del término, $\alpha\Delta\theta/\pi$ (donde α es el coeficiente de estructura fina y $\Delta\theta$ es la diferencia de los parámetros topológicos de los medios involucrados). Demostramos que la presencia de estos nuevos elementos de matriz introduce correcciones del orden de $\alpha^2 \sim 5,32 \times 10^{-5}$ en los coeficientes de transmisión y reflexión. Además, se da lugar a la transmisión y reflexión de ondas en modo TM a partir de ondas TE incidentes y viceversa. Se demostró que si la película tiene un índice de refracción mayor al índice de refracción del medio que la rodea, aparecen las oscilaciones de Fabry-Perót con una ligera corrección del orden de α^2 en los picos máximos. Por otro lado, cuando el índice de refracción del medio circundante es mayor, entonces las ondas electromagnéticas atraviesan la película por tunelamiento con la misma corrección de α^2 . Se mostró que en una estructura de doble capa con aislantes topológicos, el porcentaje de energía transmitido en forma de ondas se restringe a intervalos de frecuencia más pequeños al incrementar el espesor de cada capa. Realizamos una extensión del formalismo obtenido a sistemas multicapa con aislantes topológicos, en los cuales se observan intervalos de frecuencia en que la transmisión de ondas puras (transmisión de ondas en modo TM/TE a partir de ondas TM/TE incidentes) es cero. Sin embargo, se muestra que en estos intervalos aparece la transmisión de pequeñas cantidades de energía en forma de ondas mixtas (es decir, transmisión de ondas en modo TM a partir de ondas TE incidentes y viceversa) debido a la introducción del término del axion.

ABSTRACT

In the framework of axion electrodynamics, the electrodynamic properties in stratified systems containing topological insulators (TI) were examined through the transfer matrix method. The elements of the transfer matrix were obtained for an interface that separates two media with a nontrivial topology and for a slab composed of a topological insulator. It was shown that the topological term induces a coupling of the propagation modes TM (transversal magnetic) and TE (transversal electric). This coupling is reflected in the presence of new terms in the transfer matrix which depend linearly on the term, $\alpha\Delta\theta/\pi$ (where α is the coefficient of fine structure and $\Delta\theta$ is the difference of the topological parameters of the mediums involved). We show that the presence of these new matrix elements introduces corrections of the order of $\alpha^2 \sim 5,32 \times 10^{-5}$ in the transmission and reflection coefficients. In addition, the transmission and reflection of waves in TM mode is generated from incident TE waves and vice versa. It was demonstrated that if the film has a refractive index higher than the refractive index of the surrounding medium, the oscillations of Fabry-Perot appear with a slight correction of the order of α^2 in the maximum peaks. On the other hand, when the refractive index of the surrounding medium is greater, then the electromagnetic waves pass through the film by tunneling with the same correction of α^2 . It was shown that in a double layer structure with topological insulators, the percentage of energy transmitted in the form of waves are restricted to smaller frequency intervals by increasing the thickness of each layer. We made an extension of the formalism obtained to multilayer systems with topological insulators, in which were observed intervals of forbidden frequencies for the transmission of pure waves (transmission of waves in TM / TE mode from incident TM / TE waves). However, due to the introduction of the axion term, the transmission of small amounts of energy in the form of mixed waves (i.e. transmission of TM mode waves from incident TE waves and vice versa) appears within these intervals.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	9
2. ELECTRODINÁMICA EN AISLANTES TOPOLÓGICOS.....	15
2.1 Ecuaciones de Maxwell en aislantes topológicos.....	16
2.2 Relaciones constitutivas para aislantes topológicos.....	20
3. MÉTODO DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA APLICADO A INTERFACES CON AISLANTES TOPOLÓGICOS	21
3.1 Descripción de los campos en un sistema de dos capas con una topología no trivial	21
3.2 Análisis en la frontera de los dos medios y matriz de transferencia.....	23
3.3.1 Coeficientes de transmisión y reflexión para un interfaz entre TI/vacío para una onda TM incidente	27
3.3.2 Coeficientes de transmisión y reflexión para un interfaz entre TI/vacío para una onda TE incidente	32
3.4 Efectos Faraday y Kerr	35
3.5 Modos localizados.....	37
3.6 Resumen	38
4. MÉTODO DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA APLICADO A PELÍCULAS CON AISLANTES TOPOLÓGICOS.....	39
4.1 Configuración y campos del sistema	39
4.2 Condiciones de frontera en las dos interfaces.....	42
4.3 Película delgada compuesta por TI y rodeada por vacío	47
4.4 Coeficientes de transmisión y reflexión.....	48
4.5 Incidencia normal	58
4.6 Resumen.....	62

5. TUNELAMIENTO EN UNA PELÍCULA Y EN SISTEMAS DE DOBLE CAPA CON AISLANTES TOPOLÓGICOS	63
5.1 Película con índice de refracción menor al del medio circundante.....	63
5.2 Tunelamiento a través de una película compuesta por un TI.....	68
5.3 Tunelamiento resonante a través de una estructura de doble capa con TI.....	73
5.4 Resumen	77
6. EXTENSIÓN A SISTEMAS MULTICAPA CON AISLANTES TOPOLÓGICOS.....	78
6.1 Matriz de transferencia en un sistema multicapa	78
6.2 Coeficientes de transmisión y reflexión en sistemas multicapa con aislantes topológicos.....	81
6.3 Resumen	85
7. CONCLUSIONES	86
APÉNDICE A	88
A.1 Modos de propagación transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM)....	88
A.2 Continuidad de los campos en una interfaz entre dos medios polarizables y magnetizables con aislantes topológicos.	90
APÉNDICE B	94
B.1 Sistema de ecuaciones para ondas TM incidentes.....	94
B.1.1 Vectores de Poynting para ondas TM incidentes	95
B.1.2 Coeficientes de reflexión y transmisión para ondas TM incidentes.....	97
B.2. Sistema de ecuaciones para ondas TE incidentes	98
B.2.1 Vectores de Poynting para ondas TE incidentes.....	99
B.2.2. Coeficientes de reflexión y transmisión para ondas TM incidentes.....	101
APÉNDICE C.....	103
C.1 Matriz de propagación para una onda que viaja a través de un medio homogéneo e isotrópico	103

C.2 Matriz de transferencia para un una onda que se propaga a traves de un sistema de tres capas.....	105
--	------------

REFERENCIAS	110
--------------------------	------------

1. INTRODUCCIÓN

Los aislantes topológicos (TI) son nuevos estados cuánticos de la materia que se comportan como un aislante en el interior, pero al mismo tiempo presentan estados de conducción superficiales [1-5]. Estos estados superficiales son el resultado del fuerte acoplamiento espín-orbita que presenta el material y se encuentran topológicamente protegidos respecto a la simetría de inversión temporal [5]. En el 2006, los científicos Andrei Bernevig, Taylor Hughes y Zhang Shou-Cheng propusieron un mecanismo de inversión de bandas para encontrar materiales con estas características [6,7]. En este mecanismo, el ordenamiento normal de la banda de conducción se invierte con la banda de valencia debido al fuerte acoplamiento spin-orbita que presenta el material. Además, predijeron que el crecimiento de pozos de *HgTe* (telurio de mercurio) en medio de capas de *CdTe* (teluro de cadmio) eran candidatos para ser aislantes topológicos [6-8].

En semiconductores comunes, la banda de conducción es formada por electrones en orbitales *s* y la banda de valencia es formada por electrones en orbitales *p*. Sin embargo, en elementos pesados como *Hg* y *Te*, la banda con orbitales *p* se encuentra por encima de la banda con orbitales *s* debido al fuerte acoplamiento espín-orbita [1,8]. Por otro lado, el *CdTe* tiene una red similar a la del *HgTe* pero con acoplamiento espín-orbita más débil. Cuando se crecen pozos de *HgTe* en medio de capas de *CdTe*, es posible controlar la estructura de bandas del sistema al variar el espesor de las capas. Si la capa de *HgTe* tiene un espesor *d* por debajo de un determinado valor crítico d_c , la estructura de bandas predominante es la del *CdTe* [1,8].

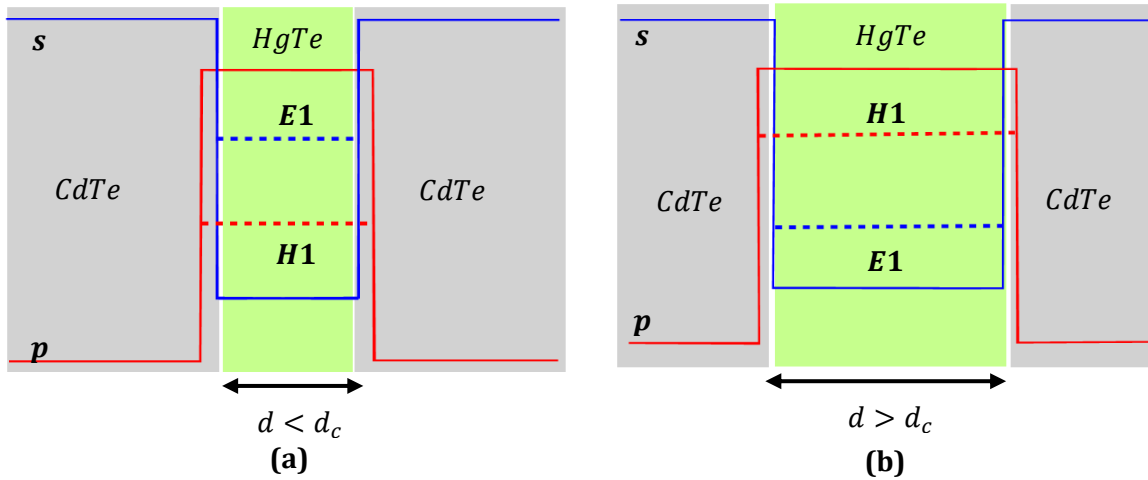


Figura 1. 1: En (a) se esquematiza el efecto dominante que posee el *CdTe*, cuando la capa de *HgTe* tiene un espesor por debajo del valor crítico ($d < d_c$). En (b) se muestra la inversión de bandas que presenta el sistema cuando la capa *HgTe* supera el valor crítico ($d > d_c$). Los gráficos fueron adaptados de [1].

1. Introducción

En la figura 1(a) se muestra como la banda $E1$, (la cual corresponde a la banda con orbitales s) se encuentra por encima de la banda $H1$ (la cual corresponde a la banda con orbitales p), dando lugar al ordenamiento normal del $CdTe$. En la figura 1(b) se muestra un sistema en cual el espesor de la capa de $HgTe$ se encuentra por encima del valor crítico, dando lugar a la inversión de la estructura de bandas del sistema (en este caso la banda $H1$ se encuentra por encima de la banda $E1$) debido al fuerte acoplamiento espín-órbita del $HgTe$. El espesor crítico d_c para el cual se presenta la inversión de bandas en este caso es de $\sim 6,3nm$ [1,8].

El comportamiento que presenta $HgTe$ puede ser descrito por un modelamiento de dos bandas para $E1$ y $H1$ [1]. La solución explícita del modelo, da lugar a una solución sin estados de superficie en el régimen $d < d_c$ y una solución con un par de estados superficiales cuando $d > d_c$, tal y como se muestra en las figuras 1.2(a) y 1.2(b) respectivamente [1]. Poco tiempo después de la predicción teórica, un equipo de la Universidad de Wurzburg liderado por Laurens Molenkamp observó la inversión de bandas en pozos cuánticos de $HgTe$ que fueron crecidos por medio de epitaxia de haz molecular [7]. Posteriormente, este fenómeno fue predicho y observado experimentalmente en varios sistemas 3-dimensionales [9-11] tales como $Bi_{1-x}Sb_x$, Bi_2Se_3 , Bi_2Te_3 y Sb_2Te_3 [12,14].

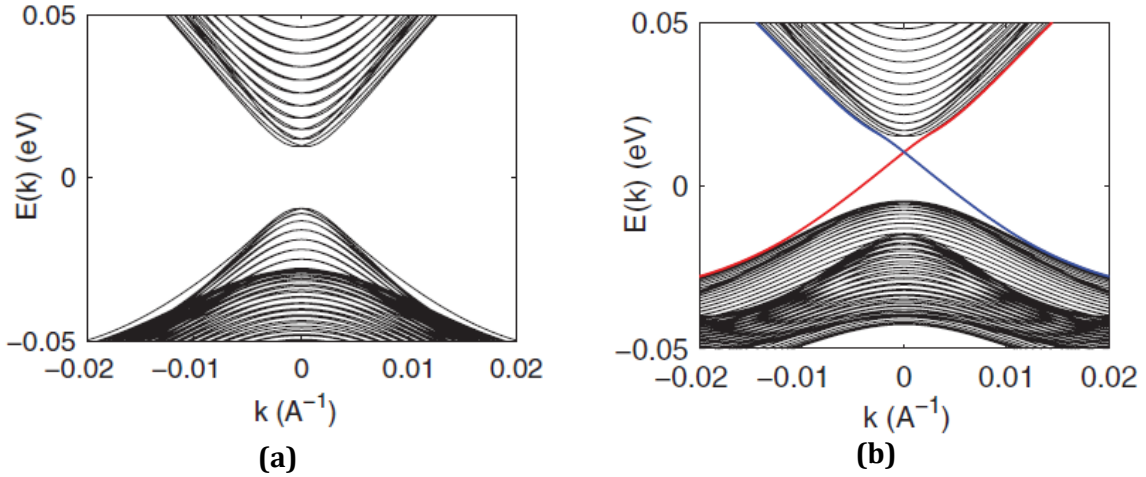


Figura 1. 2: En (a) se muestra el espectro de energía que presenta el sistema $HgTe/CdTe$ cuando $d < d_c$. En (b) el pozo de potencial presenta un gap de energía, pero dentro de este aparecen dos estados de superficie que se representa por una línea roja y una línea azul. Los gráficos fueron adaptados de [8].

1. Introducción

Recientemente se han hecho extensivos estudios en las propiedades electrodinámicas que presentan los TI. La respuesta electromagnética en estos materiales se encuentra caracterizada por la introducción del término del axion [15-17]:

$$\Delta L_{axion} \sim \theta \vec{E} \cdot \vec{B}, \quad (1.1)$$

donde θ es un parámetro que indica la topología del medio en que se propagan las ondas, $\vec{E}$ el campo eléctrico y $\vec{B}$ el campo magnético. La forma del lagrangiano (1.1) implica que un campo eléctrico puede inducir una polarización magnética, mientras que un campo magnético puede inducir una polarización eléctrica. Este efecto es conocido como efecto magneto-eléctrico topológico y θ adopta el significado de polarización magneto-eléctrica [18-21]. Además, La inclusión del lagrangiano (1.1) en la acción del campo electromagnético modifica el sistema de las ecuaciones de Maxwell (en particular la ley de inducción de Faraday y la ley de Ampere) y conlleva a una discretización de la respuesta electromagnética en términos de la constante de estructura fina ($\alpha = e^2/\hbar c$) [22,23], tal y como se demostrara en la sección 2.1. De igual forma, el término del axion dentro de las ecuaciones de Maxwell implica la existencia de nuevas fuentes de carga y corriente que producen cambios en el desplazamiento eléctrico e intensidad magnética respectivamente tal como se presentara en la sección 2.2. Por otro lado, la presencia del parámetro topológico lleva a efectos inusuales y exóticos, como el efecto Hall cuántico de espín [22-23], el efecto magneto-eléctrico cuántico [24], imagen monopolo magnético [1], efecto magneto-óptico Kerr/Faraday y el efecto Witten [24-35].

En particular, se ha prestado especial atención al estudio de las excitaciones colectivas que podrían manifestarse en la interface entre dos medios con diferentes propiedades topológicas. Para estos sistemas se han predicho ondas de densidad de carga y de densidad de espín, cuya existencia está íntimamente asociada a las propiedades no triviales de los aislantes topológicos [36-39]. Para este tipo de sistemas se ha estudiado la respuesta del espín electrónico [40] al aplicar un campo magnético perpendicular a la superficie de un aislante topológico; además de las excitaciones colectivas [41,42] localizadas en la frontera entre un aislante con una topología trivial y un aislante con una topológica no trivial, se observó que la inclusión del término del axion en las relaciones constitutivas produce un acople de los campos eléctrico/magnético en la interface y se encontró que la relación de dispersión para la propagación de las ondas en el material depende del cuadrado del termino topológico [42]. Por otro lado, se ha analizado la estructura electrónica en interfaces aislantes topológicos/aislantes ferromagnéticos [43] así como la unión entre superficies tipo p y superficies tipo n en TI para el desarrollo de futuros dispositivos electrónicos [44].

Los resultados (obtenidos al analizar la respuesta electromagnética que presentan interfaces entre materiales que poseen una topología no trivial) se han extendido a sistemas más complejos. Se ha hecho énfasis en la investigación de las propiedades ópticas que exhiben las películas delgadas rodeadas por aislantes topológicos [45,46]. Es bien sabido, [47,48] que si una película delgada está rodeada por aislantes convencionales, en el límite de no retardo para grandes longitudes de onda, las excitaciones colectivas en las superficies están acopladas electromagnéticamente y las curvas de dispersión para los modos localizados en cada una de

1. Introducción

las superficies se desdoblan en estados análogos a los estados ligados y antiligados. En el trabajo realizado en [49] se estudia un sistema semejante al presentado en la figura 1.3; en los resultados obtenidos se muestra como los efectos causados con la introducción del término topológico pueden llevar a un comportamiento no-oscilatorio de la función de estado superficial, lo cual modifica las leyes de dispersión y producen un acople entre los modos de propagación transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM) que depende del cuadrado de la variación del parámetro topológico de los medios involucrados [49], tal y como se presenta en las ecuaciones (1.2) y (1.3).

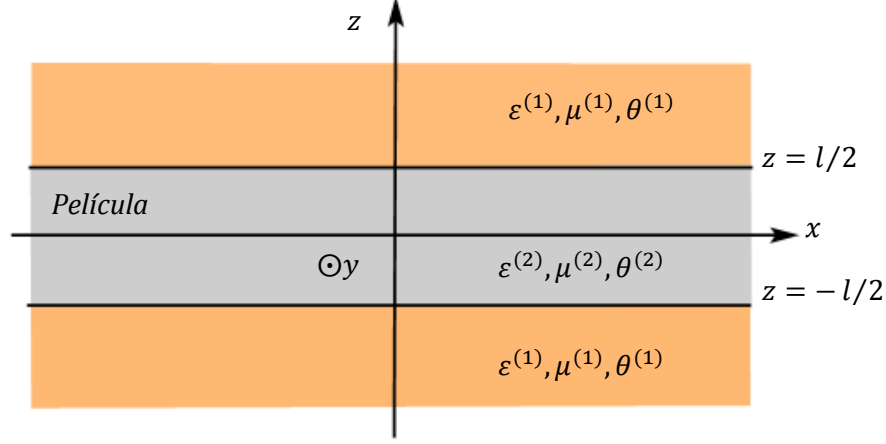


Figura 1.3: Se muestra una película delgada de espesor l con una permitividad dieléctrica $\epsilon^{(2)}$, una permeabilidad magnética $\mu^{(2)}$ y un parámetro topológico $\theta^{(2)}$ rodeada por un medio con una permitividad dieléctrica $\epsilon^{(1)}$, una permeabilidad magnética $\mu^{(1)}$ y un parámetro topológico $\theta^{(1)}$.

$$\left[\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \tanh \left(\kappa_2 \frac{l}{2} \right) \right] \left[\epsilon^{(1)} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + \epsilon^{(2)} \tanh \left(\kappa_2 \frac{l}{2} \right) \right] + \quad (1.2)$$

$$\left[\alpha \frac{\Delta\theta}{\pi} \right]^2 \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \mu^{(1)} \mu^{(2)} \tanh \left(\kappa_2 \frac{l}{2} \right) = 0,$$

$$\left[\mu^{(1)} + \mu^{(2)} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \coth \left(\kappa_2 \frac{l}{2} \right) \right] \left[\epsilon^{(1)} \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) + \epsilon^{(2)} \coth \left(\kappa_2 \frac{l}{2} \right) \right] + \quad (1.3)$$

$$\left[\alpha \frac{\Delta\theta}{\pi} \right]^2 \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \mu^{(1)} \mu^{(2)} \coth \left(\kappa_2 \frac{l}{2} \right) = 0,$$

donde $\epsilon^{(i)}$ y $\mu^{(i)}$ (con $i = 1, 2$) son respectivamente: la permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética en el i -ésimo medio. El término $\Delta\theta$ contiene la diferencia de parámetros topológicos de los medios separados por cada interface, $\kappa^{(i)}$ es el vector de onda en el i -ésimo medio y l es el espesor de la película. En las ecuaciones (1.2) y (1.3), el primer corchete a la izquierda corresponde a los estados ligados y anti ligados (respectivamente) para los modos TE, mientras el segundo corchete contiene los estados ligados y anti ligados (respectivamente) para los modos TM. La presencia del término $(\alpha \Delta\theta/\pi)^2$, hace posible el acople de ambos modos. En particular, existe una región del espectro en la cual aparece una onda cuya velocidad de grupo es negativa y el término asociado a la topología no trivial es

1. Introducción

independiente del espesor de la película. Adicionalmente se han realizado estudios de la magnetización [51], magneto-resistencia [52] y del transporte de portadores de carga y espín [53,54] para la fabricación de dispositivos.

También se han predicho modos acoplados plasmón-polaritón bajo las condiciones del efecto magnetoeléctrico topológico [42,55-57]. Así mismo se han realizado estudios teóricos y experimentales de modos acoplados electrón-fonón [58-60] y excitón-polaritón [61] en las superficies de sistemas que contienen aislantes topológicos. En particular, se demostró que la interface entre un metal y un aislante topológico dopado lleva a que el plano de polarización del plasmón superficial esté rotado con respecto al plano de la interfaz. Desde el punto de vista experimental, esta clase de plasmones se han podido excitar en los estados superficiales del aislante topológico Bi_2Se_3 [62,63] y se ha demostrado que dichas excitaciones juegan un papel importante en el incremento del espectro de fotoluminiscencia en la superficie de un aislante topológico [64] y llevan a la formación de brechas no-triviales asociadas a la aparición de estados topológicos protegidos en microcavidades de aislantes topológicos [65].

También se ha considerado la posibilidad de separar las excitaciones de espín y de carga en películas delgadas de aislantes topológicos [39]. En este caso, las excitaciones superficiales correspondientes a oscilaciones en fase de las funciones de onda electrónicas son de tipo plasmónico puro, mientras que las excitaciones de espín están asociadas a oscilaciones en oposición de fase.

Estos resultados indican que el espectro de las excitaciones colectivas en arreglos de capas alternantes de aislantes convencionales y aislantes topológicos puede presentar una gran variedad de nuevos efectos, asociados a la aparición de brechas de Bragg relacionadas con la invariancia traslacional. Adicionalmente, puede ser de interés investigar cómo la presencia del parámetro topológico influye en las características de los modos localizados que surgen cuando se rompe la simetría de traslación ya sea por defectos de inclusión [66] o por introducción de un ordenamiento cuasi-periódico [67].

Por otro lado, el espectro de excitaciones colectivas en sistemas con gases electrónicos de baja dimensionalidad puede verse alterado al incluir efectos de interacción espín-órbita, tales como las interacciones Rashba y Dresselhauss [68,69]. Cabe esperar que estas interacciones puedan afectar el espectro de las excitaciones colectivas en aislantes topológicos dopados.

Actualmente se están examinando las propiedades electrodinámicas en superficies y sistemas multicapa que contienen aislantes topológicos con ayuda del método de matriz de transferencia (o MMT) [70-76] y por medio del método de funciones de Green [77]. Estos métodos se han utilizado para analizar la propagación de ondas electromagnéticas, acústicas y ondas elásticas cuando pasan de un medio a otro, así como sus coeficientes de transmisión y reflexión [75,76]. Al considerar una interface entre un dieléctrico convencional y un aislante topológico podemos obtener las amplitudes de los campos (eléctrico y magnético) de uno de los medios en términos de los campos presentes en el otro medio [78]. Con ayuda de este método se observó como la topología no trivial de los medios induce correcciones del orden del cuadrado del coeficiente de estructura fina en los coeficientes de transmisión y reflexión. De

1. Introducción

igual forma, se encontró que los ángulos de rotación no trivial Kerr/Faraday de la luz reflejada/transmitida en este caso, presentaban no solo una dependencia lineal con la diferencia de los términos topológicos involucrados sino también con la relación entre el ángulo incidente y el ángulo de Brewster [70]. En ausencia del aislante topológico o para medios cuyos parámetros topológicos son iguales, estos efectos desaparecen. Además, muchos de los resultados obtenidos con el MMT aplicado a sistemas que poseen una topológica no trivial han permitido hacer estudios en otros efectos interesantes, tales como el efecto Casimir repulsivo [72-74,79], así como los cambios que sufren las propiedades ópticas en sistemas que contienen aislantes topológicos y metamateriales [46].

Como se mencionó anteriormente, en los últimos años se ha prestado especial atención a los efectos que se producen en la frontera que separa dos aislantes que poseen una topología no trivial. Esto ha llevado a estudiar superficies más complejas, las cuales modifican las condiciones de contorno, tales como estructuras esféricas y cilíndricas [80-83]. Con ayuda del método de función de Green se ha logrado estudiar el monopólo magnético imagen que se produce cuando una carga eléctrica se encuentra cerca de la superficie de un TI [82-84], además de evidencia teórica de radiación electromagnética invertida de Vavilov-Čerenkov [85]. También se han observado otros fenómenos interesantes como el efecto Casimir anómalo [86] y el efecto anómalo de Nernst [87] en la superficie de aislantes topológicos. Por otro lado, un formalismo similar ha sido utilizado para estudiar las propiedades ópticas en la superficie de otros materiales con orden topológico no trivial, como por ejemplo en la interfaces que aparecen cuando se combinan aislantes de Chern y metamateriales quirales [88-90]. Otro tipo de materiales topológicos, son los semimetales de Weyl [91], sobre los cuales se han tratado problemas de condiciones de frontera [92] en la superficie e interacciones de cargar con la misma [93]. Además, se han predicho diversos efectos ópticos en su superficie tal y como sucede con los aislantes topológicos, por ejemplo plasmónes y polaritónes superficiales [94], efecto casimir repulsivo [95] y efecto Kerr/Faraday [96].

En este trabajo se estudia el papel que juega la presencia de una topología no trivial en las propiedades ópticas de sistemas que contienen superficies entre aislantes topológicos y aislantes convencionales. Se propone un formalismo de matriz de transferencia 4x4 para analizar la respuesta electromagnética en diferentes sistemas estratificados que contienen aislantes topológicos. Se obtienen los cambios que sufre la matriz de transferencia en una película y en un sistema multicapa, al incluir el término del axion en las relaciones constitutivas de los medios comprometidos. Se examinan las modificaciones que introduce el TI en los coeficientes de Fresnel en películas delgadas y en sistemas multicapa cuando se consideran medios con diferentes parámetros topológicos. De igual modo, se estudia el tunelamiento resonante a través de una película sumergida en un medio con una topología no trivial y para una estructura de doble capa con TI.

2. ELECTRODINÁMICA EN AISLANTES TOPOLÓGICOS

En electrodinámica clásica la función de acción S_{Maxwel} de un sistema de cargas en un campo electromagnético consiste de tres partes:

$$S_{Maxwel} = S_m + S_{mf} + S_f + S_c, \quad (2.1)$$

donde el primer termino $S_m = -\sum mc_0 \int ds$, es la acción de las partículas libres en ausencia de campo y contiene la masa m de la partícula, la velocidad de la luz c_0 y el intervalo entre eventos $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$ (con dx_μ y dx^μ como 4-vectores de espacio-tiempo). El segundo término $S_{mf} = -\frac{1}{c_0} \int A_\mu J^\mu d\Omega$ es la acción que corresponde a la interacción entre las partículas y el campo, siendo J^μ el 4-vector de densidad de corriente y A_μ el 4-potencial del campo en el punto del espacio-tiempo en el que la partícula está localizada. El término S_f corresponde a la acción del campo, la cual sólo depende de las propiedades del campo en sí, es decir en ausencia de cargas y está dada por $S_f = -\frac{c_0 \epsilon_0}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega$, donde $F^{\mu\nu}/F_{\mu\nu}$ es el tensor del campo electromagnético en forma contravariante/covariante respectivamente, ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío y $d\Omega = dV dt$ (con dV el diferencial de volumen y dt el diferencial de tiempo). Finalmente, el término $S_c = -\frac{1}{2c_0} \int F_{\mu\nu} P^{\mu\nu} d\Omega$ describe las características polarizables y magnetizables del sistema con $P^{\mu\nu}$ el tensor de magnetización y polarización. Por lo tanto, se tiene que la acción de un sistema de cargas en un campo electromagnético tiene la forma [97,98],

$$S_{Maxwel} = -mc_0 \int ds - \frac{1}{c_0} \int A_\mu J^\mu d\Omega - \frac{c_0 \epsilon_0}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d\Omega - \frac{1}{2c_0} \int F_{\mu\nu} P^{\mu\nu} d\Omega, \quad (2.2)$$

Al variar la acción de Maxwell, la primera integral a la derecha de la ecuación (2.2) se hace cero [97,98]. Luego,

$$S_{Maxwel} = \int \left(-\frac{c_0 \epsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c_0} A_\mu J^\mu - \frac{1}{2c_0} F_{\mu\nu} P^{\mu\nu} \right) d\Omega. \quad (2.3)$$

Obsérvese que en las expresiones (2.2) y (2.3) aparece solamente uno de los invariantes del campo electromagnético, el cual está definido por el término $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Esto se debe a que el otro invariante del campo dado por la magnitud $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$, (donde $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ es el tensor Levi-Civita en 4-dimensiones) es una 4-divergencia y al integrarla no realiza ningún aporte a las ecuaciones de movimiento [97,98]. Este segundo invariante es precisamente el término que debe ser incluido para explicar el comportamiento electrodinámico de los aislantes topológicos. Los aislantes topológicos son sólidos cristalinos invariantes bajo inversión temporal, los cuales poseen una estructura de bandas la cual está caracterizada por un invariante topológico Z_2 [1-5,21].

2. Electrodinámica en aislantes topológicos

Estos materiales poseen una topología no trivial y se comportan como un aislante en el bulk pero conducen en la superficie. Los estados superficiales se encuentran protegidos bajo inversión temporal y se manifiestan en forma de corrientes superficiales, las cuales se representan con la introducción del término del axion [15, 20-22]:

$$\Delta L_{axion} = \frac{\alpha}{8\pi\mu_0 c_0} \theta(\mathbf{x}) \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

donde $\theta(\mathbf{x})$ es el término topológico, α la constante de estructura fina, μ_0 la permeabilidad magnética del vacío y c la velocidad de la luz [21]. Al adicionar la densidad lagrangiana (2.4) a la acción del campo electromagnético convencional (2.3) obtenemos la acción total,

$$S_T = S_{Maxwel} + S_{Axion}, \quad (2.5)$$

$$S_T = \frac{1}{c_0} \int \left(-\frac{c_0 \varepsilon_0}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c_0} A_\mu J^\mu - \frac{1}{2c_0} F_{\mu\nu} P^{\mu\nu} \right) d\Omega + \frac{\alpha}{8\pi\mu_0 c_0} \int \theta(\mathbf{x}) \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} d\Omega, \quad (2.6)$$

La adición del nuevo término a la derecha de la ecuación (2.5) altera la estructura de las ecuaciones de Maxwell convencionales así como las relaciones constitutivas en materiales que contienen aislantes topológicos [15,21].

2.1 Ecuaciones de Maxwell en aislantes topológicos

A continuación vamos a observar los cambios que sufren las ecuaciones de Maxwell en los aislantes topológicos; para ello vamos a calcular las ecuaciones de movimiento que resultan de la ecuación (2.6). En términos de ϕ , $\mathbf{A}$, ρ , $\mathbf{J}$, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ la acción S_T queda expresada de la siguiente forma [97,98],

$$S_T = -\frac{1}{c_0} \int (\rho\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\Omega - \frac{c_0 \varepsilon_0}{4} \int 2 \left(\mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 \right) d\Omega - \frac{1}{2c_0} \int [-2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M})] d\Omega + \frac{\alpha}{8\pi\mu_0 c_0} \int \theta(\mathbf{x}) \left(-\frac{8}{c_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \right) d\Omega, \quad (2.7)$$

donde

$$\rightarrow \begin{cases} A_\mu J^\mu = \rho\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \\ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \left(\mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 \right) \\ \theta(\mathbf{x}) \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} = \theta(\mathbf{x}) \left(-\frac{8}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \right), \\ F_{\mu\nu} P^{\mu\nu} = -2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \\ \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \text{ constante de estructura fina} \end{cases} \quad (2.8)$$

Con $\mathbf{P}$ y $\mathbf{M}$ son los vectores de polarización y magnetización respectivamente.

2. Electrodinámica en aislantes topológicos

Puesto que [97,98],

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{E} = -\left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right), \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}, \quad (2.9)$$

La acción adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_T = & -\frac{1}{c_0} \int (\rho\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\Omega - \frac{c_0\epsilon_0}{2} \int \left[(\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{c_0^2} \left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega \\ & + \frac{1}{c_0} \int \left[-\left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{P} + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{M} \right] d\Omega \\ & - \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int \theta(\mathbf{x}) \left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

Variemos la acción (2.10) con respecto a ϕ de tal forma que podamos obtener las ecuaciones de movimiento correspondientes al sistema en consideración. Al realizar el cambio $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ es posible calcular la variación [97-99],

$$\delta S \equiv S[\phi + \delta\phi] - S[\phi]. \quad (2.11)$$

En nuestro caso debemos analizar la variación de dos acciones, $S_{Maxwell}$ y S_{Axion} . Comencemos con la variación de la primera, $\delta S_{Maxwell}$.

$$\begin{aligned} S_{Maxwell}[\phi + \delta\phi] &= -\frac{1}{c_0} \int [\rho(\phi + \delta\phi) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}] d\Omega \\ &\quad - \frac{c_0\epsilon_0}{2} \int \left\{ (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{c_0^2} \left[\nabla(\phi + \delta\phi) + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right]^2 \right\} d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{c_0} \int \left\{ -\left[\nabla(\phi + \delta\phi) + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{P} + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{M} \right\} d\Omega = \\ &= -\frac{1}{c_0} \int [\rho\phi + \rho\delta\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}] d\Omega - \frac{c_0\epsilon_0}{2} \int \left\{ (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{c_0^2} \left[\left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla(\delta\phi) \right]^2 \right\} d\Omega + \\ &\quad \frac{1}{c_0} \int \left\{ -\left[\left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) + \nabla(\delta\phi) \right] \cdot \mathbf{P} + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{M} \right\} d\Omega, \end{aligned} \quad (2.12)$$

En este caso podemos despreciar los términos de orden superior $(\nabla(\delta\phi))^2 \cong 0$. Luego,

$$\begin{aligned} S_{Maxwell}[\phi + \delta\phi] &= -\frac{1}{c_0} \int [\rho\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}] d\Omega - \frac{c_0\epsilon_0}{2} \int \left\{ (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{c_0^2} \left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \right\} d\Omega \\ &\quad + \frac{1}{c_0} \int \left\{ -\left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{P} + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{M} \right\} d\Omega - \int \rho\delta\phi d\Omega \\ &\quad + \frac{\epsilon_0}{c_0} \int \left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \nabla(\delta\phi) d\Omega - \frac{1}{c_0} \int \nabla(\delta\phi) \cdot \mathbf{P} d\Omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos

Adicionalmente, integramos por partes el quinto y el sexto termino que se encuentran a la derecha de la ecuación (2.13). Luego,

$$\begin{aligned}
 S_{Maxwell}[\phi + \delta\phi] = & \\
 = & -\frac{1}{c} \int [\rho\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}] d\Omega - \frac{c_0 \epsilon_0}{2} \int \left\{ (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \frac{1}{c_0^2} \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \right\} d\Omega \\
 & + \frac{1}{c_0} \int \left\{ - \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{P} + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{M} \right\} d\Omega - \int \rho \delta\phi d\Omega \\
 & - \frac{\epsilon_0}{c_0} \int \nabla \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) (\delta\phi) d\Omega + \frac{1}{c_0} \int (\delta\phi) \nabla P d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Donde hemos despreciado los términos superficiales $\int \nabla \left[\left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) (\delta\phi) \right] d\Omega = 0$ y $\int \nabla[(\delta\phi)\mathbf{P}]d\Omega = 0$. En la ecuación (2.14) podemos observar que los primeros tres términos a la derecha definen la acción $S_{Maxwell}[\phi]$ para el campo electromagnético en materiales convencionales,

$$\begin{aligned}
 S_{Maxwell}[\phi + \delta\phi] = S_{Maxwell}[\phi] & \\
 - \int \rho \delta\phi d\Omega - \frac{\epsilon_0}{c_0} \int \nabla \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) (\delta\phi) d\Omega + \frac{1}{c_0} \int (\delta\phi) \nabla P d\Omega. &
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

El segundo término al lado derecho de la igualdad en la ecuación (2.15) hace referencia la acción en función del potencial ϕ . Luego,

$$\delta S_{Maxwell} = - \int \rho \delta\phi d\Omega - \frac{\epsilon_0}{c_0} \int \nabla \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) (\delta\phi) d\Omega + \frac{1}{c_0} \int (\delta\phi) \nabla P d\Omega. \tag{2.16}$$

A continuación calculemos la variación, δS_{Axion} respecto a ϕ :

$$\begin{aligned}
 S_{Axion}[\phi + \delta\phi] &= \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int \theta(\mathbf{x}) \left[\nabla(\phi + \delta\phi) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega \\
 &= \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int \theta(\mathbf{x}) \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega + \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int \theta(\mathbf{x}) \nabla(\delta\phi) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega,
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Integrando por partes el segundo término a la derecha de la ecuación (2.17) se obtiene,

$$\begin{aligned}
 S_{Axion}[\phi + \delta\phi] &= \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int \theta(\mathbf{x}) \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\Omega \\
 &\quad - \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int (\delta\phi) \cdot \nabla[\theta(\mathbf{x})(\nabla \times \mathbf{A})] d\Omega,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $\int \nabla[\theta(\mathbf{x})(\delta\phi) \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] d\Omega = 0$. En la ecuación (2.18) podemos observar que el primer término al lado derecho de la igualdad corresponde a la acción $S_{Axion}[\phi]$

$$S_{Axion}[\phi + \delta\phi] = S_{Axion}[\phi] - \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int (\delta\phi) \cdot \nabla[\theta(\mathbf{x})(\nabla \times \mathbf{A})] d\Omega. \tag{2.19}$$

2. Electrodinámica en aislantes topológicos

El segundo término al lado derecho de la igualdad en la ecuación (2.19) hace referencia a la variación de la acción del término del axion respecto al potencial ϕ :

$$\delta S_{Axion} = -\frac{\alpha}{\pi\mu_0 c^2} \int (\delta\phi) \cdot \nabla[\theta(x)(\nabla \times \mathbf{A})] d\Omega. \quad (2.20)$$

Así, la variación de la acción total, respecto al potencial escalar ϕ es:

$$\begin{aligned} \delta S_T &= \delta S_{Maxwell} + \delta S_{Axion} = \\ \delta S_T &= - \int \rho \delta\phi d\Omega - \frac{\epsilon_0}{c_0} \int \nabla \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) (\delta\phi) d\Omega + \frac{1}{c_0} \int (\delta\phi) \nabla P d\Omega \\ &\quad - \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \int (\delta\phi) \nabla[\theta(x)(\nabla \times \mathbf{A})] d\Omega = 0 \\ &= \int d\Omega \left\{ -\rho - \frac{\epsilon_0}{c_0} \nabla \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c_0} \nabla P - \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \nabla[\theta(x)(\nabla \times \mathbf{A})] \right\} \delta\phi = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

es decir que,

$$-\rho - \frac{\epsilon_0}{c_0} \nabla \left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c_0} \nabla P - \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0^2} \nabla[\theta(x)(\nabla \times \mathbf{A})] = 0. \quad (2.22)$$

En términos de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ la expresión (2.22) se transforma en la ley de Gauss modificada para los aislantes topológicos [21],

$$\epsilon_0 \nabla \mathbf{E} + \nabla P = \rho + \frac{\alpha}{\pi\mu_0 c_0} \nabla[\theta(x)\mathbf{B}], \quad (2.23)$$

Si realizamos una variación con respecto al campo vectorial $\mathbf{A}$, obtenemos la ley de Ampere modificada para los aislantes topológicos [21],

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right] = \mathbf{J} - \frac{\alpha\mu}{\pi\mu_0^2 c_0} [\nabla \times \theta(x)\mathbf{E}], \quad (2.24)$$

En la expresión (2.24) hemos considerado $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$. Es necesario resaltar que los efectos del parámetro topológico θ solo se presentan en la superficie de los aislantes topológicos, es decir, lejos de la superficie el parámetro cuando θ se anula y las leyes de Gauss y Ampere modificadas en las ecuaciones (2.23) y (2.24) se reducen a las ecuaciones para medios convencionales [1-5, 21].

2.2 Relaciones constitutivas para aislantes topológicos

De las ecuaciones (2.23) y (2.24) podemos calcular las relaciones constitutivas para los aislantes topológicos. De la ley de Gauss modificada (2.23) obtenemos lo siguiente [21],

$$\nabla \cdot \left[\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} - \frac{\alpha}{\pi \mu_0 c_0} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{B} \right] = \rho, \quad (2.25)$$

De la ecuación (2.25) observamos que la inclusión del término topológico en la acción del campo electromagnético introduce un aporte a la densidad de cargas. Luego, el desplazamiento eléctrico es [21],

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} - \frac{\alpha}{\pi \mu_0 c_0} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{B}, \quad (2.26)$$

Puesto que el vector de polarización está dado por $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ y la permitividad eléctrica $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ (con χ es la susceptibilidad eléctrica)

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} - \alpha \frac{\theta}{\pi} \epsilon_0 (c \mathbf{B}), \quad (2.27)$$

donde $\frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c$. Por otro lado, al reordenar la ecuación (2.24) observamos que la inclusión del término topológico en la acción del campo electromagnético introduce un aporte a la densidad de corriente,

$$\nabla \times \left[\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) + \frac{\alpha \mu}{\pi \mu_0^2 c_0} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{E} \right] = \mathbf{J}. \quad (2.28)$$

Luego, la intensidad magnética es,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} + \frac{\alpha \mu}{\pi \mu_0^2 c_0} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{E}, \quad (2.29)$$

Puesto que los vectores de campo magnético y magnetización están dados por: $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ y $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$ (con χ_m es la susceptibilidad magnética),

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \chi_m \mathbf{H} + \frac{\alpha \mu}{\pi \mu_0 c_0} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{E}, \quad (2.30)$$

Adicionalmente, la permeabilidad magnética esta por $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$. Luego, la intensidad magnética para los aislantes topológicos está dada por la siguiente expresión [21],

$$c_0 \mathbf{H} = \frac{c_0 \mathbf{B}}{\mu} + \frac{\alpha}{\pi \mu_0} \theta(\mathbf{x}) \mathbf{E}, \quad (2.31)$$

Observe que en ausencia del aislante topológico $\theta = 0$ o lejos de la superficie del material las relaciones constitutivas para los aislantes topológicos (2.27) y (2.31) se reducen a las relaciones constitutivas materiales convencionales [97,100].

3. MÉTODO DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA APLICADO A INTERFACES CON AISLANTES TOPOLÓGICOS

En la sección anterior se observaron los cambios que presentan las ecuaciones de Maxwell (en particular la ley Gauss y la ley de Ampere) cuando se introduce el término del axion en la acción del campo electromagnético. La presencia del término topológico demostró que el campo eléctrico puede inducir una polarización magnética mientras que el campo magnético puede inducir una polarización eléctrica. Estos cambios se ven reflejados directamente en la presencia de nuevas fuentes de carga y de corriente, las cuales conllevan a un acople del campo eléctrico con el campo magnético dentro de las relaciones constitutivas.

En este capítulo, estudiaremos la propagación de una onda electromagnética a través de una interfaz que separa dos medios con una topología no trivial. Con ayuda de las ecuaciones constitutivas para los aislantes topológicos obtendremos la matriz de transferencia, la cual describe la propagación de la onda en el sistema completo. Esto nos permitirá demostrar como la topología no trivial de los medios, induce correcciones del orden del cuadrado del coeficiente de estructura fina en los coeficientes de trasmisión y reflexión. De igual forma, se mostrara que los ángulos de rotación no trivial Kerr/Faraday de la luz reflejada/transmitida en este caso, presentan una dependencia lineal con la diferencia de los términos topológicos involucrados [70].

3.1 Descripción de los campos en un sistema de dos capas con una topología no trivial

Consideremos dos medios isotrópicos semi-infinitos, polarizables y magnetizables separados por una interfaz en $z = 0$. El medio en $z < 0$ posee una permitividad dieléctrica $\epsilon^{(1)}$ y una permeabilidad magnética $\mu^{(1)}$; El medio en $z > 0$ tiene permitividad dieléctrica $\epsilon^{(2)}$ y permeabilidad magnética $\mu^{(2)}$. Una onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}^{(1)+} = (k_x, k_z^{(1)+})$ se aproxima desde la izquierda de la interfaz, parte de esta onda es reflejada con un vector de onda $\vec{k}^{(1)-} = (k_x, k_z^{(1)-})$. Otra onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}^{(2)-} = (k_x, k_z^{(2)-})$ se aproxima desde la derecha de la interfaz y parte de ella es reflejada con un vector de onda $\vec{k}^{(2)+} = (k_x, k_z^{(2)+})$. El sistema en consideración se muestra en la figura 3.1.

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

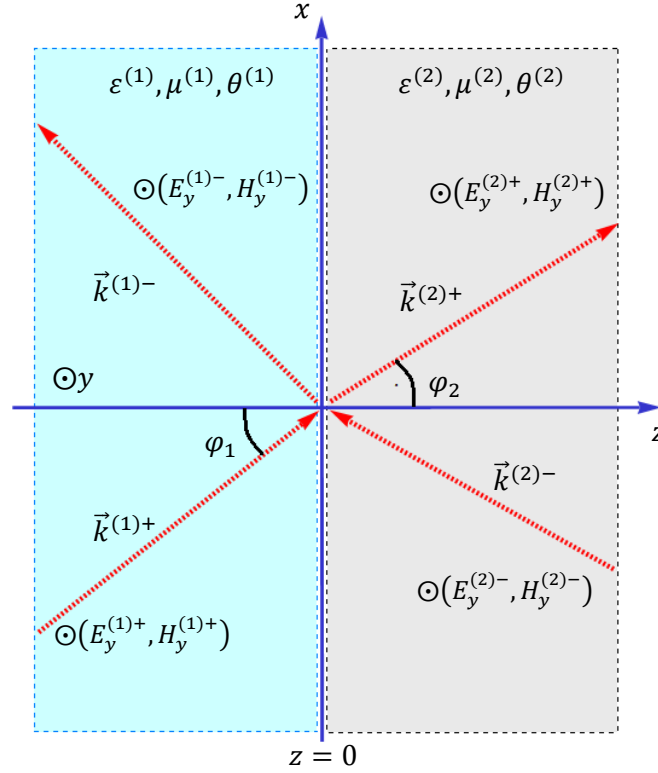


Figura 3. 1: Interfaz entre dos aislantes topológicos.

La estructura de los campos eléctricos y de las intensidades magnéticas tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} E_y^{(1)} \\ H_y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(1)+} \\ H_y^{(1)+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_y^{(1)-} \\ H_y^{(1)-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(1)+} \\ H_{y0}^{(1)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(1)}z} e^{i(k_x x - \omega t)} + \begin{pmatrix} E_{y0}^{(1)-} \\ H_{y0}^{(1)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(1)}z} e^{i(k_x x - \omega t)}, z < 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ H_y^{(2)+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_y^{(2)-} \\ H_y^{(2)-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(2)}z} e^{i(k_x x - \omega t)} + \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(2)}z} e^{i(k_x x - \omega t)}, z > 0 \quad (3.2)$$

donde $k_z^{(i)} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(i)} \mu^{(i)} - (k_x)^2}$, $(i) = 1, 2$ [78]. Los términos $E_{y0}^{(i)\pm}$ y $H_{y0}^{(i)\pm}$ son las amplitudes de las componentes $E_y^{(i)\pm}$ y $H_y^{(i)\pm}$ respectivamente. Los signos (+) y (-) en los campos indican el sentido en que se propaga la onda, (+) hacia la derecha y (-) hacia a la izquierda. Para obtener las componentes restantes para los campos E y B se puede hacer uso de las ecuaciones de Lorentz-Maxwell convencionales para medios polarizables y magnetizables las cuales están dadas por las ecuaciones (3.3)-(3.6), junto con las relaciones constitutivas [97-100], $\vec{D}^{(i)\pm} = \varepsilon^{(i)}(\omega, z) \vec{E}^{(i)\pm}$ y $\vec{B}^{(i)\pm} = \mu^{(i)}(\omega, z) \vec{H}^{(i)\pm}$ (donde $\vec{D}^{(i)\pm}$ y $\vec{H}^{(i)\pm}$ son el desplazamiento eléctrico e intensidad magnética respectivamente).

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

$$\text{rot} \vec{E}^{(i)\pm} = -\mu^{(i)}(\omega, z) \frac{\partial \vec{H}^{(i)\pm}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\text{div}[\varepsilon^{(i)}(\omega, z) \vec{E}^{(i)\pm}] = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{div}[\mu^{(i)}(\omega, z) \vec{H}^{(i)\pm}] = 0, \quad (3.5)$$

$$\text{rot} \vec{H}^{(i)\pm} = \varepsilon^{(i)}(\omega, z) \frac{\partial \vec{E}^{(i)\pm}}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Reagrupando las componentes en las ecuaciones (3.3)-(3.6), obtenemos los sistemas de ecuaciones correspondientes a los modos de propagación, (ver apéndice A.1) los cuales se muestran a continuación:

Modos TE:

$$\begin{aligned} \mp k_z^{(i)} E_y^{(i)\pm} &= \omega \mu^{(i)} H_x^{(i)\pm}, \\ \left(\pm k_z^{(i)} H_x^{(i)\pm} - k_x H_z^{(i)\pm} \right) &= -\omega \varepsilon^{(i)} E_y^{(i)\pm}, \\ k_x E_y^{(i)\pm} &= \omega \mu^{(i)} H_z^{(i)\pm}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

Modos TM:

$$\begin{aligned} \mp k_z^{(i)} H_y^{(i)\pm} &= -\omega \varepsilon^{(i)} E_x^{(i)\pm}, \\ \left(\pm k_z^{(i)} E_x^{(i)\pm} - k_x E_z^{(i)\pm} \right) &= \omega \mu^{(i)} H_y^{(i)\pm}, \\ k_x H_y^{(i)\pm} &= -\omega \varepsilon^{(i)} E_z^{(i)\pm}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) para los modos TE (transversal eléctrico) y TM (transversal magnético) respectivamente, nos permiten obtener las componentes x y z del campo eléctrico/magnético en términos de la componente y del campo magnético/eléctrico [83].

3.2 Análisis en la frontera de los dos medios y matriz de transferencia

Para estudiar la propagación de las ondas electromagnéticas en el sistema mostrado en la figura 3.1, debemos considerar la continuidad que poseen los campos cuando la onda atraviesa la interfaz que divide los dos medios. Luego, se escriben las amplitudes de las ondas transmitidas en términos de las amplitudes de las ondas incidentes. Esto nos permite definir la matriz de transferencia [78], a partir de la cual se obtienen algunas de las características

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

ópticas del sistema. Para realizar el análisis en la frontera de los dos medios hacemos uso de las relaciones constitutivas de los aislantes topológicos [42]:

$$\vec{D}^{(i)\pm} = \varepsilon^{(i)} \vec{E}^{(i)\pm} - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} (c_0 \vec{B}^{(i)\pm}), \quad (3.9)$$

$$c_0 \vec{H}^{(i)\pm} = \frac{c_0 \vec{B}^{(i)\pm}}{\mu^{(i)}} + \alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} \frac{\vec{E}^{(i)\pm}}{\mu_0}, \quad (3.10)$$

siendo $\vec{D}^{(i)\pm}$ y $\vec{H}^{(i)\pm}$ el desplazamiento eléctrico y la intensidad magnética en el i -ésimo medio respectivamente. El parámetro α es el coeficiente de estructura, $\theta^{(i)}$ es el parámetro topológico en el i -ésimo medio, c_0 es la velocidad de luz en el vacío, $\varepsilon^{(i)}$ y $\mu^{(i)}$ son la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética en el i -ésimo medio respectivamente. El subíndice i varía de acuerdo al medio de propagación. Al analizar los campos en la frontera entre los dos medios se presentan las siguientes relaciones de continuidad [78, 97-100]:

$$\begin{cases} D_z^{(i)\pm} = D_z^{(j)\pm} \\ B_z^{(i)\pm} = B_z^{(j)\pm} \end{cases} \quad \begin{cases} E_x^{(i)\pm} = E_x^{(j)\pm} \\ E_y^{(i)\pm} = E_y^{(j)\pm} \end{cases} \quad \begin{cases} H_x^{(i)\pm} = H_x^{(j)\pm} \\ H_y^{(i)\pm} = H_y^{(j)\pm} \end{cases} \quad (3.11)$$

En este caso haremos uso de las continuidades de $E_x^{(i)\pm}$, $E_y^{(i)\pm}$, $H_x^{(i)\pm}$ y $D_z^{(i)\pm}$. Combinando las ecuaciones (3.7) y (3.8) con las ecuaciones (3.9) y (3.10), obtenemos el siguiente sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (ver apéndice A.2):

- Continuidad de $E_y^{(i)\pm} = E_y^{(j)\pm}$:

$$E_y^{(1)+} + E_y^{(1)-} + (0)H_y^{(1)+} + (0)H_y^{(1)-} = E_y^{(2)+} + E_y^{(2)-} + (0)H_y^{(2)+} + (0)H_y^{(2)-} \quad (3.12)$$

- Continuidad de $H_x^{(i)\pm} = H_x^{(j)\pm}$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}} \right) E_y^{(1)+} + \left(\frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}} \right) E_y^{(1)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{k_z^{(1)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)+} \\ & \quad + \left(-\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{k_z^{(1)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)-} \\ & = \left(-\frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}} \right) E_y^{(2)+} + \left(\frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}} \right) E_y^{(2)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{k_z^{(2)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(2)}} \right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)+} \\ & \quad + \left(-\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{k_z^{(2)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(2)}} \right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)-} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

- Continuidad de $D_z^{(i)\pm} = D_z^{(j)\pm}$:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(1)}}{\pi} E_y^{(1)+} + \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(1)}}{\pi} E_y^{(1)-} + \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)+} + \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)-} \right. \\ & = \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(2)}}{\pi} E_y^{(2)+} + \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(2)}}{\pi} E_y^{(2)-} + \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)+} + \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)-} \right. \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Continuidad de $E_x^{(i)\pm} = E_x^{(j)\pm}$

$$\begin{aligned} & (0)E_y^{(1)+} + (0)E_y^{(1)-} + \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)+} - \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)-} \\ & = (0)E_y^{(2)+} + (0)E_y^{(2)-} + \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)+} - \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)-} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ordenando el conjunto de ecuaciones en forma matricial obtenemos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}} & \frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}} & -\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{k_z^{(1)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(1)} c^{(1)} \mu^{(1)}} & \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{k_z^{(1)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(1)} c^{(1)} \mu^{(1)}} \\ \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(1)}}{\pi} & \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(1)}}{\pi} & -\frac{1}{c^{(1)} \mu^{(1)}} & -\frac{1}{c^{(1)} \mu^{(1)}} \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)} c^{(1)} \mu^{(1)}} & \frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)} c^{(1)} \mu^{(1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^{(1)+} \\ E_y^{(1)-} \\ -c^{(1)} \mu^{(1)} H_y^{(1)+} \\ -c^{(1)} \mu^{(1)} H_y^{(1)-} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}} & \frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}} & -\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{k_z^{(2)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(2)} c^{(2)} \mu^{(2)}} & \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{k_z^{(2)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(2)} c^{(2)} \mu^{(2)}} \\ \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(2)}}{\pi} & \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(2)}}{\pi} & -\frac{1}{c^{(2)} \mu^{(2)}} & -\frac{1}{c^{(2)} \mu^{(2)}} \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)} c^{(2)} \mu^{(2)}} & \frac{k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)} c^{(2)} \mu^{(2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ E_y^{(2)-} \\ -c^{(2)} \mu^{(2)} H_y^{(2)+} \\ -c^{(2)} \mu^{(2)} H_y^{(2)-} \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos la matriz de transferencia que describe la propagación de la onda electromagnética del medio 1 al medio 2, la cual está dada por la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ E_y^{(2)-} \\ -c^{(2)} \mu^{(2)} H_y^{(2)+} \\ -c^{(2)} \mu^{(2)} H_y^{(2)-} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{(21)} \begin{pmatrix} E_y^{(1)+} \\ E_y^{(1)-} \\ -c^{(1)} \mu^{(1)} H_y^{(1)+} \\ -c^{(1)} \mu^{(1)} H_y^{(1)-} \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

Los elementos de la matriz $M^{(21)}$ son:

$$\begin{cases} M_{11}^{(21)} = M_{22}^{(21)} = \frac{1}{2} \left(1 + z_{(s)}^{(12)} \right) \\ M_{12}^{(21)} = M_{21}^{(21)} = \frac{1}{2} \left(1 - z_{(s)}^{(12)} \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$M_{13}^{(21)} = M_{24}^{(21)} = -M_{23}^{(21)} = -M_{14}^{(21)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)}, \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} M_{33}^{(21)} = M_{44}^{(21)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} \left(1 + z_{(p)}^{(12)} \right) \\ M_{34}^{(21)} = M_{43}^{(21)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} \left(1 - z_{(p)}^{(12)} \right) \end{cases}, \quad (3.20)$$

$$M_{31}^{(21)} = M_{32}^{(21)} = M_{41}^{(21)} = M_{42}^{(21)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)}. \quad (3.21)$$

Los términos $z_{(s)}^{(12)} = \frac{\mu^{(2)} k_z^{(1)}}{\mu^{(1)} k_z^{(2)}}$ y $z_{(p)}^{(12)} = \frac{\varepsilon^{(2)} k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)} k_z^{(2)}}$ son las impedancias para los modos de propagación TE y TM respectivamente [78]. El parámetro, $\delta^{(12)} = \alpha \frac{\Delta\theta^{(12)}}{\pi} = \alpha \frac{\theta^{(1)} - \theta^{(2)}}{\pi}$ corresponde a la diferencia entre los términos topológicos. Observe que los elementos de matriz $M_{11}^{(21)}$, $M_{22}^{(21)}$, $M_{21}^{(21)}$ y $M_{12}^{(21)}$ conforman la matriz de transferencia para ondas TE, de igual forma los elementos de matriz $M_{33}^{(21)}$, $M_{44}^{(21)}$, $M_{34}^{(21)}$ y $M_{43}^{(21)}$ conforman la matriz de transferencia para ondas TM en ausencia del aislante topológico [78]. Se Puede observar también cómo los términos de la matriz asociados con los parámetros topológicos $\theta^{(1)}$ y $\theta^{(2)}$ acoplan los modos TE y TM. Estos términos dependen de la diferencia, $\theta^{(1)} - \theta^{(2)}$ y dependen linealmente de la constante de estructura fina α . Algunos de los resultados presentados en este capítulo fueron publicados en el artículo titulado: *Transfer matrix method in systems with topological insulators* en el año 2017 (ver referencia [70]).

El método de matriz de transferencia aplicado a sistemas estratificados con una topología no trivial, ha permitido estudiar las propiedades ópticas en diferentes estructuras que contienen aislantes topológicos. Con ayuda de este método se han observado fenómenos ópticos tales como el efecto Faraday y el efecto Kerr [70], para los cuales se han reportado resultados de las mediciones de espectroscopia en películas de sistemas que contienen aislantes topológicos 3-dimensionales tales como $BI_{1-x}Sb_x$ [101]. También se ha demostrado que es posible diseñar lentes compuestas por metamateriales y aislantes topológicos [46]. Además, se han hecho estudios de los coeficientes de Fresnel en interfaces con aislantes topológicos mediante el método de funciones de Green [77]. En capítulos posteriores, haremos uso del formalismo presentado en esta sección para examinar las propiedades ópticas de sistemas más complejos, tales como películas y sistemas de múltiples capas.

3.3 Coeficientes de transmisión y reflexión para un interfaz entre TI/vacío

Podemos hacer uso de los elementos de matriz obtenidos anteriormente para describir muchas de las propiedades electrodinámicas de sistemas que contienen aislantes topológicos. A continuación, vamos a calcular los coeficientes de transmisión y reflexión para una interfaz entre un aislante topológico y vacío. Es decir, los parámetros ópticos son: $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon_0$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu_0$ y $\theta^{(1)} - \theta^{(2)} = \pi$. Además, el medio 2 tiene un índice de refracción $n^{(2)} = \sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}$ [78]. Para analizar la reestructuración que sufren los coeficientes con la inclusión del término topológico, estudiaremos dos casos: en el primero, solo tomaremos en cuenta una onda con polarización TE que incide sobre la interfaz y en el segundo, solo consideraremos una onda incidente con polarización TM.

3.3.1 Coeficientes de transmisión y reflexión para un interfaz entre TI/vacío para una onda TM incidente

Supongamos una onda electromagnética en modo TM con amplitud $H_y^{(1)+}$, la cual incide desde la región en $z < 0$ con ángulo de incidencia φ_1 ; en la región $z > 0$ solo consideramos campos que se alejan de la película. El sistema de ecuaciones en (3.17) se transforma en,

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ 0 \\ -\mu^{(2)} c^{(2)} H_y^{(2)+} \\ 0 \end{pmatrix} = M^{(21)} \begin{pmatrix} 0 \\ E_y^{(1)-} \\ -\mu^{(1)} c^{(1)} H_y^{(1)+} \\ -\mu^{(1)} c^{(1)} H_y^{(1)-} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

El sistema presentado en (3.22) nos permite obtener las expresiones para las amplitudes de los modos TE /TM reflejados y transmitidos (ver apéndice B.1):

$$H_y^{(1)-} = r_{pp}^{(21)} H_y^{(1)+}, H_y^{(3)+} = t_{pp}^{(21)} H_y^{(1)+}, \quad (3.23)$$

$$E_y^{(1)-} = r_{ps}^{(21)} H_y^{(1)+}, E_y^{(3)+} = t_{ps}^{(21)} H_y^{(1)+}, \quad (3.24)$$

$$t_{pp}^{(21)} = -\left(M_{32}^{(21)} r_{sp}^{(21)} - M_{33}^{(21)} - M_{34}^{(21)} r_{pp}^{(21)}\right), \quad (3.25)$$

$$t_{ps}^{(21)} = M_{12}^{(21)} r_{ps}^{(21)} - M_{13}^{(21)} - M_{14}^{(21)} r_{pp}^{(21)}, \quad (3.26)$$

$$r_{pp}^{(21)} = \frac{M_{42}^{(21)} M_{23}^{(21)} - M_{22}^{(21)} M_{43}^{(21)}}{M_{44}^{(21)} M_{22}^{(21)} - M_{24}^{(21)} M_{42}^{(21)}}, \quad (3.27)$$

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

$$r_{ps}^{(21)} = \frac{M_{44}^{(21)}M_{23}^{(21)} - M_{24}^{(21)}M_{43}^{(21)}}{M_{44}^{(21)}M_{22}^{(21)} - M_{24}^{(21)}M_{42}^{(21)}} \quad (3.28)$$

El primer subíndice en las amplitudes de transmisión y reflexión ($t_{pp}^{(21)}$, $t_{ps}^{(21)}$, $r_{pp}^{(21)}$, $r_{ps}^{(21)}$) hace referencia al tipo de polarización de la onda incidente. Mientras que el segundo subíndice indica el tipo de polarización de la onda que se obtiene a partir de la onda incidente. Además, la polarización p corresponde al modo de propagación TM y la polarización s corresponde al modo de propagación TE.

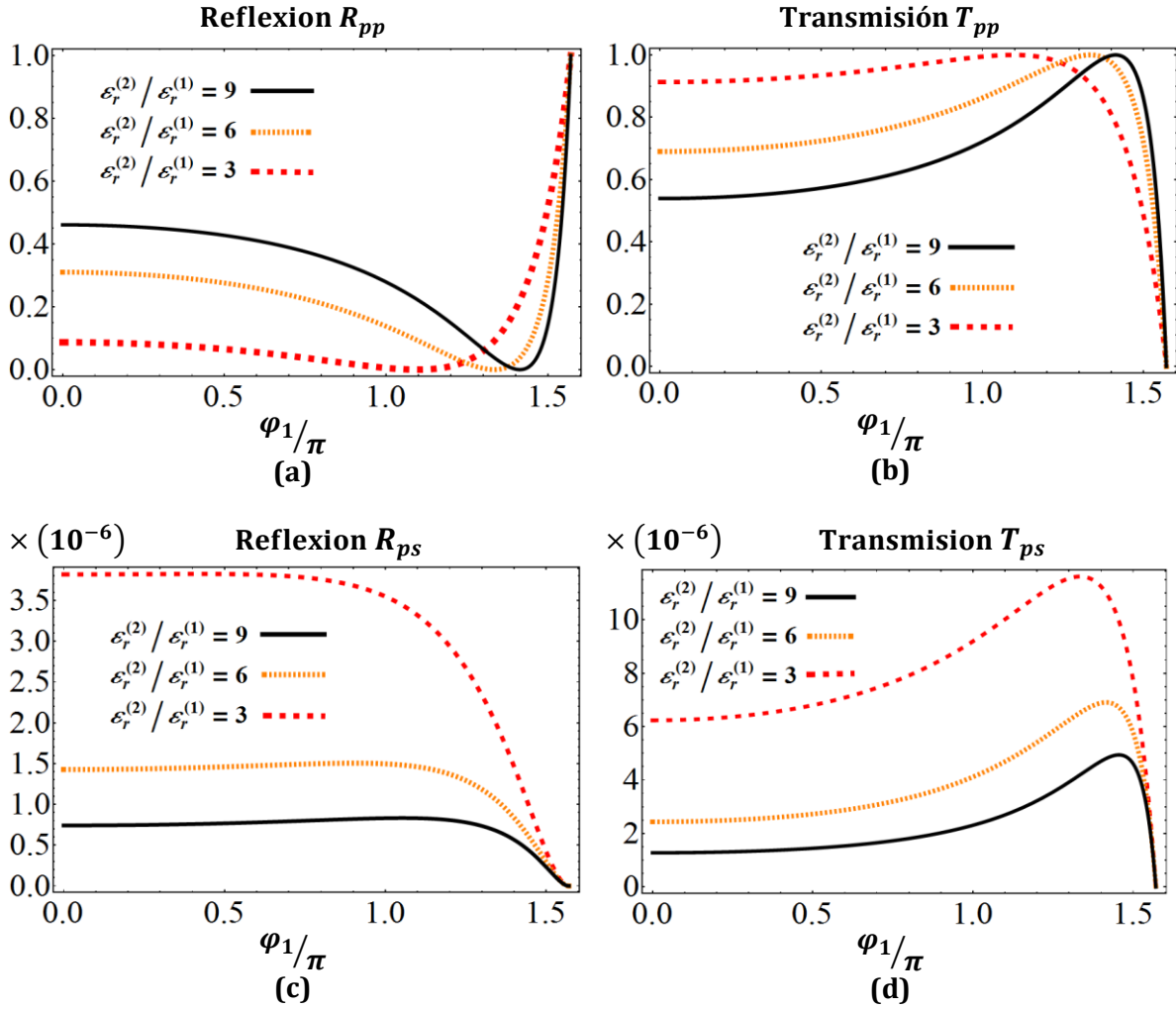


Figura 3. 2: Comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión respecto al ángulo para una interfaz entre dos medios para tres permitividades $\epsilon_r^{(2)} = \{3, 6, 9\}$. **(a)** Coeficiente de reflexión de una onda TM para una onda TM incidente. **(b)** Coeficiente de transmisión de una onda TM para una onda TM incidente. **(c)** Coeficiente de reflexión de una onda TE para una onda TM incidente. **(d)** Coeficiente de transmisión de una onda TE para una onda TM incidente. Los parámetros restantes para este sistema están dados por: $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$.

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

Entonces, los términos $r_{pp}^{(21)}$ y $r_{ps}^{(21)}$ son las amplitudes de reflexión de una onda en modo TE y una onda en modo TM para una onda incidente en modo TM. Las expresiones para $t_{pp}^{(21)}$ y $t_{ps}^{(21)}$ son las amplitudes de transmisión de un modo TE y un modo TM para un modo incidente TM respectivamente. En la figura 3.2(a) se observa como los coeficientes de reflexión R_{pp} primero disminuyen y luego crecen rápidamente a medida que el ángulo se aproxima a $\pi/2$, mientras los coeficientes de transmisión T_{pp} en la figura 3.2(b) se hacen cero para un ángulo de incidencia normal a la interfaz. Los comportamientos que presentan los coeficientes con respecto al ángulo de incidencia son similares a los mostrados en un material convencional [78]. Sin embargo la inclusión del término topológico introduce una pequeña corrección del orden de $(\delta^{(12)})^2$. Por ejemplo, al despreciar los términos de orden superior a $(\delta^{(12)})^2$ podemos obtener las siguientes expresiones analíticas aproximadas para los coeficientes de reflexión y transmisión puros (R_{pp} y T_{pp}):

$$R_{pp} = |r_{pp}^{(21)}|^2 \approx |r_p^{(21)}|^2 \left[1 + \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}} \frac{4z_{(s)}^{(21)} z_{(p)}^{(21)}}{(1+z_{(s)}^{(21)})(1-(z_{(p)}^{(21)})^2)} (\delta^{(12)})^2 \right], \quad (3.29)$$

$$T_{pp} = z_{(s)}^{(21)} |t_{pp}^{(21)}|^2 \approx \frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}} |t_p^{(21)}|^2 - \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \frac{2z_{(p)}^{(12)} z_{(s)}^{(12)}}{(1+z_{(p)}^{(12)})(1+z_{(s)}^{(12)})^2} \left[1 + \frac{2z_{(p)}^{(12)}(1-z_{(p)}^{(12)})}{(1+z_{(s)}^{(12)})(1+z_{(p)}^{(12)})} \right] (\delta^{(12)})^2, \quad (3.30)$$

donde $t_p^{(21)}$ y $r_p^{(21)}$ están determinados por la amplitudes (3.25) y (3.27) cuando $\delta^{(12)} = 0$. Es decir, corresponden a las amplitudes de transmisión y reflexión de ondas TM para materiales en ausencia de aislante topológico [78]. Por otro lado, cuando el coeficiente R_{pp} se aproxima a cero en la figura 3.2 (a) el coeficiente de transmisión T_{pp} alcanza su valor máximo en la figura 3.2 (b). El ángulo bajo el cual se presenta la transmisión total es conocido como ángulo de Brewster φ_B [70]. Al despreciar términos superiores a $(\delta^{(12)})^2$ podemos llegar a una expresión aproximada que nos permita obtener el ángulo φ_B :

$$\tan^2 \varphi_B \approx \left\{ 1 - 2 \left[\frac{n^{(1)} n^{(2)}}{(n^{(1)})^2 + (n^{(2)})^2} \right]^2 (\delta^{(12)})^2 \right\} \left(\frac{n^{(2)}}{n^{(1)}} \right)^2, \quad (3.31)$$

donde $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)}$, $n^{(1)} = \sqrt{\varepsilon_r^{(1)}}$ y $n^{(2)} = \sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}$ [70].

El ángulo de transmisión $\varphi_2 = \sin^{-1} \left(\frac{n^{(1)}}{n^{(2)}} \sin \varphi_B \right)$ es además,

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_B + \frac{n^{(2)}}{n^{(1)}} \left[\frac{n^{(1)}}{(n^{(1)})^2 + (n^{(2)})^2} \right]^2 (\delta^{(12)})^2, \quad (3.32)$$

Este resultado indica que para el ángulo de incidencia φ_B , el vector de propagación de la onda reflejada ya no es perpendicular al de la onda transmitida, lo que está de acuerdo con [102].

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

Por otra parte, el parámetro topológico ocasiona la presencia de nuevos términos en la matriz de transferencia, los cuales dependen directamente del término δ_{12} . En materiales convencionales se espera la transmisión o reflexión de ondas con la misma polarización de la onda incidente, es decir, si hacemos incidir una onda tipo s (o modo TE), parte de esta onda es transmitida en forma de una onda tipo s , otra parte se refleja en forma de una onda tipo s y en ciertos casos, cuando el material es disipativo parte de esta onda es absorbida [78]. De igual forma sucede para ondas incidentes tipo p (o modo TM). Sin embargo, con la presencia del parámetro topológico, puede aparecer una onda s transmitida y una onda s reflejada como resultado de una p incidente (T_{ps} y R_{ps} respectivamente). En la figura 3.2(c)-(d) se presenta la dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión de los modos acoplados con respecto al ángulo de incidencia. Estos coeficientes se hacen cero cuando el ángulo de incidencia es $\pi/2$. Al despreciar los términos de orden superior a $(\delta^{(12)})^2$ podemos obtener las siguientes expresiones analíticas aproximadas para los coeficientes de reflexión y transmisión acoplados (R_{ps} y T_{ps}):

$$R_{ps} = \left| r_{ps}^{(21)} \right|^2 \approx \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}} \frac{4(z_{(s)}^{(21)})^2}{(1+z_{(p)}^{(21)})^2 (1+z_{(s)}^{(21)})^2} (\delta^{(12)})^2, \quad (3.33)$$

$$T_{ps} = z_{(s)}^{(21)} \left| t_{ps}^{(21)} \right|^2 \approx \frac{1}{4} \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}} (z_{(s)}^{(12)})^2 \left[1 - \frac{1-z_{(p)}^{(12)}}{1+z_{(p)}^{(12)}} + \frac{2(1-z_{(s)}^{(12)})}{(1+z_{(p)}^{(12)})(1+z_{(s)}^{(12)})} \right]^2 (\delta^{(12)})^2. \quad (3.34)$$

Adicionalmente, en la figura 3.2 se presenta el comportamiento de los coeficientes de reflexión y transmisión respecto al ángulo de incidencia para diferentes permitividades eléctricas. Para ángulos de incidencia menores que $\pi/2$, la cantidad de energía reflejada en forma de *ondas pp* (ondas TM reflejadas a partir de ondas TM incidentes) se incrementa a medida que el índice de refracción $n^{(2)} = \sqrt{\varepsilon^{(2)}}$ aumenta respecto al índice de refracción $n^{(1)} = 1$, tal y como se observa en la figura 3.2(a). El coeficiente T_{pp} en la figura 3.2(b), presenta el comportamiento inverso al mostrado por el coeficiente R_{pp} , es decir, a mayor reflexión de *ondas pp* menor será la transmisión de las mismas y además, cuanto mayor sea el índice de refracción del medio 2, menor será la cantidad de *ondas pp* transmitidas (para ángulos de incidencia menores que $\pi/2$). Además, aunque el pico transmisión T_{pp} se alcanza para diferentes valores del ángulo incidente, (según sea la permitividad del medio 2) el máximo siempre es ~ 1 . En la figura 3.2(c) se observa que el incremento del índice de refracción $n^{(2)}$ produce un decaimiento en la energía reflejada en forma de *ondas ps* (ondas TE reflejadas a partir de ondas TM incidentes), es decir, cuanto mayor es la cantidad de energía reflejada en forma de *ondas pp* menor será la cantidad de energía reflejada en forma de *ondas ps* cuando el índice de refracción $n^{(2)}$ aumenta. En la figura 3.2(d), la energía transmitida al medio 2 en forma de *ondas ps* se incrementa con la disminución del índice de refracción en el medio 2, adicionalmente, el pico de transmisión máximo para el coeficiente T_{ps} aumenta cuando $n^{(2)}$ se hace menor. Resultados similares a los presentados en esta

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

sección fueron obtenidos en [77] mediante el método de funciones de Green para otros parámetros ópticos ($\varepsilon_r^{(i)}$ y $\mu_r^{(i)}$ donde $i = 1, 2$).

Note como en las ecuaciones (3.29) y (3.30), los modos TM y TE sufren un acople inducido por el término $(\delta^{(12)})^2$, el cual agrega una corrección δR_{pp} y δT_{pp} a los coeficientes de transmisión y reflexión convencionales [70, 78],

$$\delta R_{pp} \approx \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}} \frac{4z_{(s)}^{(21)} z_{(p)}^{(21)}}{(1+z_{(s)}^{(21)})(1-(z_{(p)}^{(21)})^2)} (\delta^{(12)})^2, \quad (3.35)$$

$$\delta T_{pp} \approx \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \frac{2z_{(p)}^{(12)} z_{(s)}^{(12)}}{(1+z_{(p)}^{(12)})(1+z_{(s)}^{(12)})^2} \left[1 + \frac{2z_{(p)}^{(12)}(1-z_{(p)}^{(12)})}{(1+z_{(s)}^{(12)})(1+z_{(p)}^{(12)})} \right] (\delta^{(12)})^2, \quad (3.36)$$

En las ecuaciones (3.35) y (3.36) se observa como la corrección depende del término $(\delta^{(12)})^2$ y como se presenta el acople de los dos modos de polarización con los productos $z_{(s)}^{(21)} z_{(p)}^{(21)}$. En la figura 3.3 se muestran las correcciones para los coeficientes.

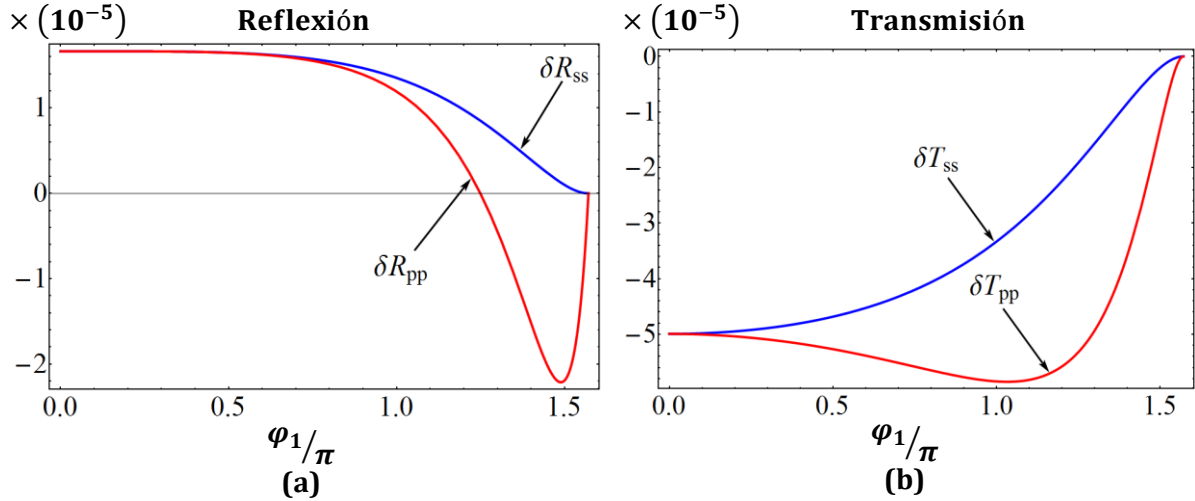


Figura 3. 3: Correcciones en el coeficiente de transmisión y reflexión para una para una interfaz con un aislante topológico. **(a)** Línea roja: cambio en el coeficiente de reflexión para una onda TM para una onda TM incidente, $|R_{pp} - R_p|$. Línea azul: cambio en el coeficiente de reflexión para una onda TE para una onda TE incidente, $|R_{ss} - R_s|$. **(b)** Línea azul: cambio en el coeficiente de transmisión para una onda TE para una onda TE incidente, $|T_{ss} - T_s|$. Línea roja: cambio en el coeficiente de transmisión para una onda TM para una onda TM incidente, $|T_{pp} - T_p|$. Las permitividades eléctricas y las permeabilidades magnéticas son $\varepsilon_r^{(2)} = 9$, $\varepsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$.

3.3.2 Coeficientes de transmisión y reflexión para un interfaz entre TI/vacío para una onda TE incidente

De forma similar, consideremos ahora una onda electromagnética en modo TE con amplitud $E_y^{(1)+}$, la cual incide desde la región $z < 0$ con ángulo de incidencia φ_1 ; en la región $z > 0$ solo consideramos los campos que se alejan de la película. Luego, el sistema de ecuaciones en (3.17) se reduce a,

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ 0 \\ -\mu^{(2)} c^{(2)} H_y^{(2)+} \\ 0 \end{pmatrix} = M^{(21)} \begin{pmatrix} E_y^{(1)+} \\ E_y^{(1)-} \\ 0 \\ -\mu^{(1)} c^{(1)} H_y^{(1)-} \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

El sistema presentado en (3.37) nos permite obtener las expresiones para las amplitudes de los modos TE /TM reflejados y transmitidos (ver apéndice B.2):

$$E_y^{(1)-} = r_{ss}^{(21)} E_y^{(1)+}, E_y^{(2)+} = t_{ss}^{(21)} E_y^{(1)+}, \quad (3.38)$$

$$H_y^{(1)-} = r_{sp}^{(21)} E_y^{(1)+}, H_y^{(2)+} = t_{sp}^{(21)} E_y^{(1)+}, \quad (3.39)$$

$$t_{ss}^{(21)} = M_{11}^{(21)} + M_{12}^{(21)} r_{ss}^{(21)} - M_{14}^{(21)} r_{sp}^{(21)}, \quad (3.40)$$

$$t_{sp}^{(21)} = -\left(M_{31}^{(21)} + M_{32}^{(21)} r_{ss}^{(21)} - M_{34}^{(21)} r_{sp}^{(21)}\right), \quad (3.41)$$

$$r_{ss}^{(21)} = \frac{M_{24}^{(21)} M_{41}^{(21)} - M_{44}^{(21)} M_{21}^{(21)}}{M_{44}^{(21)} M_{22}^{(21)} - M_{24}^{(21)} M_{42}^{(21)}}, \quad (3.42)$$

$$r_{sp}^{(21)} = \frac{M_{22}^{(21)} M_{41}^{(21)} - M_{42}^{(21)} M_{21}^{(21)}}{M_{44}^{(21)} M_{22}^{(21)} - M_{24}^{(21)} M_{42}^{(21)}}, \quad (3.43)$$

donde el primer subíndice en las amplitudes de transmisión y reflexión ($t_{ss}^{(21)}$, $t_{sp}^{(21)}$, $r_{ss}^{(21)}$, $r_{sp}^{(21)}$) de nuevo hace referencia al tipo de polarización de la onda incidente. Mientras que el segundo subíndice indica el tipo de polarización de la onda que se obtiene a partir de la onda incidente. Además, la polarización p corresponde al modo de propagación TM y la polarización s corresponde al modo de propagación TE. Las expresiones para $r_{ss}^{(21)}$ y $r_{sp}^{(21)}$ son las amplitudes de reflexión de un modo TE y un modo TM reflejado para un modo incidente TE. Las expresiones para $t_{ss}^{(21)}$ y $t_{sp}^{(21)}$ son las amplitudes de transmisión de un modo TE y un modo TM para un modo incidente TE respectivamente.

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

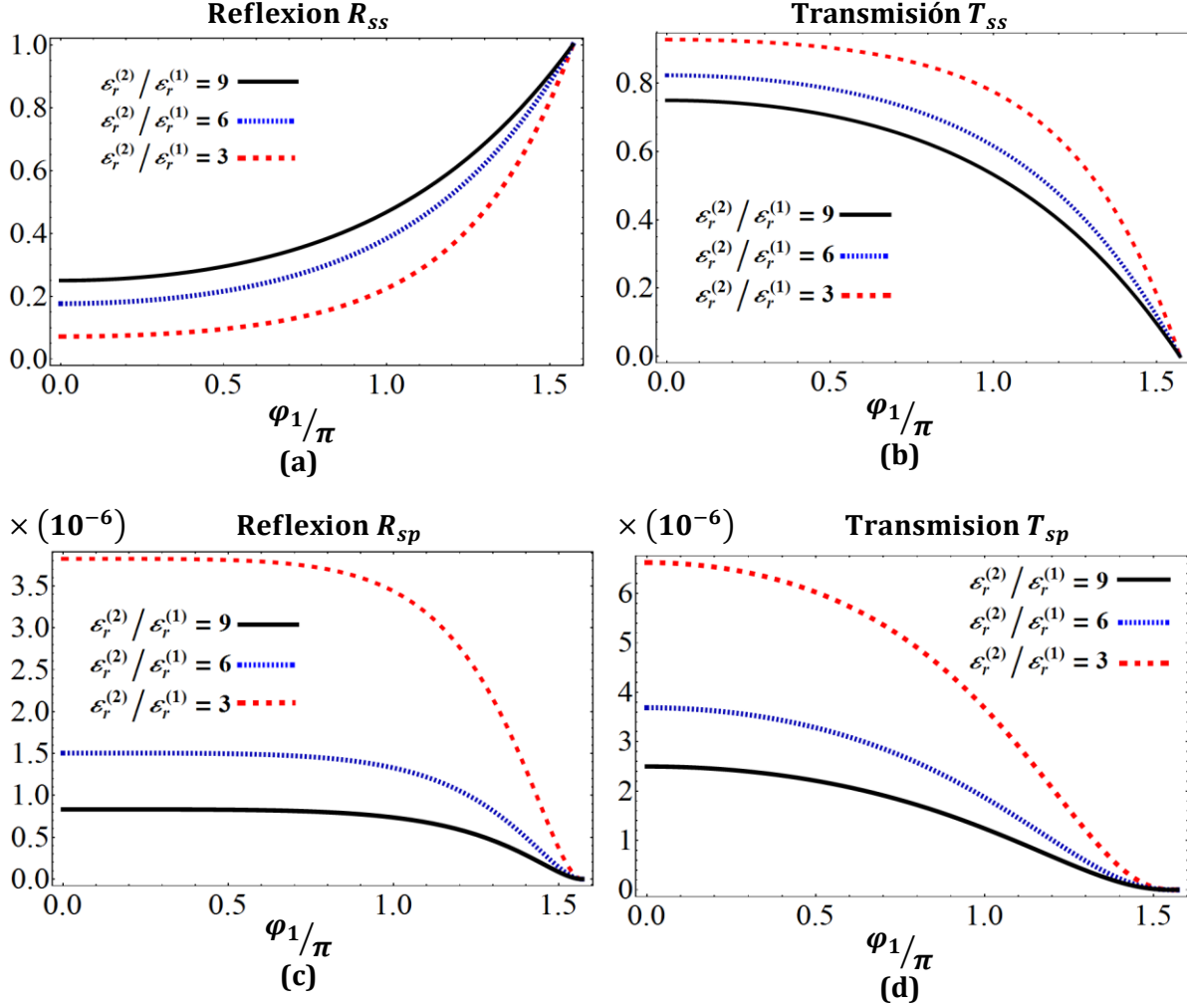


Figura 3. 4: Comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión respecto al ángulo de incidencia para una interfaz entre dos medios para tres permitividades $\epsilon_r^{(2)} = \{3, 6, 9\}$ **(a)** Coeficiente de reflexión de una onda TE para una onda TE incidente. **(b)** Coeficiente de transmisión de una onda TE para una onda TE incidente. **(c)** Coeficiente de reflexión de una onda TM para una onda TE incidente. **(d)** Coeficiente de transmisión de una onda TM para una onda TE incidente. Los parámetros restantes para este sistema están dados por: $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$.

En la figura 3.4 (a) se presenta el crecimiento que sufre el coeficiente de reflexión R_{ss} cuando el ángulo varía desde cero hasta alcanzar la reflexión total en $\pi/2$. En la figura 3.4(b), T_{ss} decrece desde su valor máximo en $\varphi_1 = 0$ hasta llegar a cero en $\varphi_1 = \pi/2$, el comportamiento es inverso al de R_{ss} . De nuevo, igual que en la sección anterior (sección 3.3.1), los coeficientes R_{ss} y T_{ss} en materiales con aislantes topológicos describen el mismo patrón presentado para materiales convencionales [78] con una ligera corrección, dada por $(\delta_{12})^2$. Resultados similares a los presentados en la figura 3.4 fueron obtenidos en [77] mediante el método de funciones de Green para otros parámetros ópticos ($\epsilon_r^{(i)}$ y $\mu_r^{(i)}$ donde $i = 1, 2$).

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

Despreciando términos de orden superior a $(\delta_{12})^2$, encontramos las siguientes expresiones aproximadas:

$$R_{ss} = |r_{ss}^{(21)}|^2 \approx |r_s^{(21)}|^2 \left[1 + \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}} \frac{4(z_{(s)}^{(21)})^2}{(1+z_{(p)}^{(21)})(1+z_{(s)}^{(21)})^2} (\delta^{(12)})^2 \right], \quad (3.44)$$

$$T_{ss} = z_{(s)}^{(21)} |t_{ss}^{(21)}|^2 \approx |t_s^{(21)}|^2 - \frac{4z_{(s)}^{(12)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}}}{(1+z_{(p)}^{(21)})(1+z_{(s)}^{(21)})^2} \left[1 + (z_{(s)}^{(21)})^2 (1 - z_{(s)}^{(12)}) \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}}} \right] (\delta^{(12)})^2. \quad (3.45)$$

donde $t_s^{(21)}$ y $r_s^{(21)}$ están determinados por las amplitudes (3.40) y (3.42) cuando $\delta^{(12)} = 0$ [78]. Es decir, corresponden a las amplitudes de transmisión y reflexión de ondas TE para materiales en ausencia de aislante topológico. Cuando el coeficiente R_{ss} es cero en la figura 3.4 (a), el coeficiente de transmisión T_{ss} se encuentra en su valor máximo en la figura 3.4 (b); sin embargo, a diferencia de los coeficientes R_{pp} y T_{pp} , las reflexiones y las transmisiones en este caso no tienen pico marcado por algún valor máximo.

La presencia del termino $\delta^{(12)}$, ocasiona la transmisión y reflexión de ondas p cuando inciden ondas s sobre la interfaz (T_{sp} y R_{sp} respectivamente). En la figuras 3.4(c)-(d) se presenta la dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión de los modos acoplados con respecto al ángulo de incidencia. Estos coeficientes tienden a cero cuando el ángulo de incidencia tiende a $\pi/2$.

Al despreciar los términos de orden superior a $(\delta^{(12)})^2$ obtenemos las siguientes expresiones (R_{sp} y T_{sp}):

$$R_{sp} = |r_{sp}^{(21)}|^2 \approx \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}} \frac{4(z_{(s)}^{(12)})^2}{(1+z_{(p)}^{(12)})^2 (1+z_{(s)}^{(12)})^2} (\delta^{(12)})^2, \quad (3.46)$$

$$T_{sp} = z_{(s)}^{(21)} |t_{sp}^{(21)}|^2 \approx \frac{1}{4} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \left[1 - \frac{(1-z_{(s)}^{(21)})}{(1+z_{(s)}^{(21)})} - \frac{2z_{(s)}^{(21)}(1-z_{(p)}^{(12)})}{(1+z_{(p)}^{(21)})(1+z_{(s)}^{(21)})} \right]^2 (\delta^{(12)})^2, \quad (3.47)$$

En la figura 3.4 vemos también como el incremento de la permitividad en el segundo medio afecta la cantidad de energía reflejada y transmitida. La cantidad de energía reflejada en forma de *ondas ss* en la figura 3.4(a), se incrementa cuando la permitividad $\varepsilon^{(2)}$ crece. Por el contrario, la cantidad de energía transmitida en forma de *ondas ss* en la figura 3.4(b), disminuye cuando $\varepsilon^{(2)}$ se hace más grande. En las figuras 3.4(c)-(d), la cantidad de energía en forma de *ondas sp* disminuye con el incremento de la permitividad en el medio 2.

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

Por otro lado, con ayuda de las ecuaciones (3.40) y (3.42), podemos obtener las correcciones (δR_{ss} y δT_{ss}) que sufren los coeficientes R_{ss} y T_{ss} con el término $(\delta^{(12)})^2$. Despreciando términos superiores a $(\delta^{(12)})^2$ se obtiene [70],

$$\delta R_{ss} \approx \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}} \frac{4(z_{(s)}^{(21)})^2}{(1+z_{(p)}^{(21)})(1+z_{(s)}^{(21)})^2} (\delta^{(12)})^2, \quad (3.48)$$

$$\delta T_{ss} \approx -\frac{4z_{(s)}^{(12)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}}}{(1+z_{(p)}^{(21)})(1+z_{(s)}^{(21)})^2} \left[1 + (z_{(s)}^{(21)})^2 (1 - z_{(s)}^{(12)}) \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}}} \right] (\delta^{(12)})^2, \quad (3.49)$$

En las correcciones, δR_{ss} y δT_{ss} , se muestra el acople de los modos de polarización TM y TE con el producto de las impedancias $z_{(s)}^{(12)}$ y $z_{(p)}^{(21)}$. En la figura 3.3 se muestra el comportamiento de las correcciones para los coeficientes con respecto al ángulo de incidencia.

En ausencia de aislante topológico, se obtienen los elementos de la matriz de transferencia para los modos TM y TE convencionales [19]. Cuando $\delta_{12} = 0$, se tiene que $M_{13}^{(21)} = M_{14}^{(21)} = M_{23}^{(21)} = M_{24}^{(21)} = 0$ y $M_{31}^{(21)} = M_{32}^{(21)} = M_{41}^{(21)} = M_{42}^{(21)} = 0$, lo cual implica que $r_{ps}^{(21)} = r_{sp}^{(21)} = 0$, $t_{ps}^{(21)} = t_{sp}^{(21)} = 0$. De esta forma, las amplitudes $t_{pp}^{(21)}$, $r_{pp}^{(21)}$, $t_{ss}^{(21)}$ y $t_{pp}^{(21)}$ se reducen a las amplitudes de reflexión y transmisión convencionales $t_p^{(21)}$, $r_p^{(21)}$, $t_s^{(21)}$ y $r_s^{(21)}$ para una película en ausencia de aislante topológico [70, 78].

3.4 Efectos Faraday y Kerr

Como se vio en las secciones anteriores la introducción del termino topológico produce un acople del campo eléctrico con el campo magnético en los elementos de la matriz de transferencia. Adicionalmente, el acople de los campos da lugar a la rotación del plano de polarización de las ondas reflejadas. Este fenómeno es conocido como efecto Kerr. De forma similar, la presencia del término topológico ocasiona una rotación del plano de polarización de la onda transmitida, este efecto es conocido como rotación de Faraday o efecto Faraday. Las expresiones (3.18)-(3.21) para los elementos de la matriz de transferencia, se pueden utilizar para calcular los ángulos de rotación no-triviales de Kerr y Faraday (ν_K y ν_F respectivamente) en sistemas que poseen una topología no trivial. Para una onda TM incidente los ángulos de rotación están dados de la siguiente forma:

$$\tan(\nu_K^{(p)}) = \frac{E_y^{(1)-}}{E_x^{(1)-}} = -\frac{\omega}{c^{(1)}k_z^{(1)}} \frac{r_{ps}^{(21)}}{r_{pp}^{(21)}}, \quad (3.50)$$

3. Método de matriz de transferencia aplicado a interfaces con aislantes topológicos

$$\tan(\nu_F^{(p)}) = \frac{E_y^{(2)+}}{E_x^{(2)+}} = -\frac{\omega}{c^{(2)}k_z^{(2)}} \frac{t_{ps}^{(21)}}{t_{pp}^{(21)}}, \quad (3.51)$$

De igual forma, para una onda TE incidente los ángulos de rotación están dados por las siguientes expresiones:

$$\tan(\nu_K^{(s)}) = \frac{H_y^{(1)-}}{H_x^{(1)-}} = -\frac{\omega}{c^{(1)}k_z^{(1)}} \frac{r_{sp}^{(21)}}{r_{ss}^{(21)}}, \quad (3.52)$$

$$\tan(\nu_F^{(s)}) = \frac{H_y^{(2)+}}{H_x^{(2)+}} = -\frac{\omega}{c^{(2)}k_z^{(2)}} \frac{t_{sp}^{(21)}}{t_{ss}^{(21)}}, \quad (3.53)$$

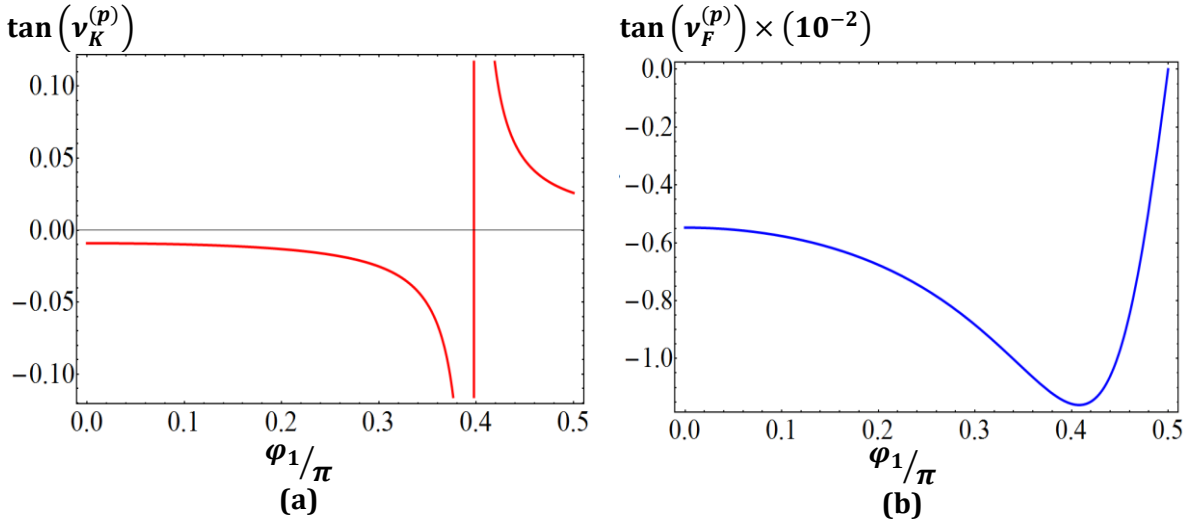


Figura 3. 5: **(a)** Ángulo de rotación no-triviales de Kerr para una onda TM reflejada a partir de una TM incidente. **(b)** Ángulo de rotación no-triviales de Faraday para una onda TM transmitida a partir de una TM incidente. Las permitividades eléctricas y las permeabilidades magnéticas son $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$.

Observe que estas magnitudes dependen del parámetro $\delta^{(12)}$, pero su comportamiento depende adicionalmente de la relación entre el ángulo incidente y el ángulo de Brewster como se observa en la figura 3.5. El ángulo $\nu_K^{(p)}$ se incrementa para $\varphi_1 < \varphi_B$ mientras disminuye $\varphi_B < \varphi_1 < \pi/2$ (φ_B es el ángulo de Brewster) y se hace despreciable para $\varphi_1 = \pi/2$. Por otro lado la dirección de rotación del plano de polarización de la luz reflejada cambia cuando el ángulo de la onda incidente pasa a través del ángulo de Brewster. La dirección de la rotación del plano de polarización de la luz transmitida es conservada en el intervalo $0 < \varphi_1 < \pi/2$, pero $\nu_F^{(p)}$ cambia como una función no monótona del ángulo incidente φ_1 y se desprecia para $\varphi_1 = \pi/2$ [70].

3.5 Modos localizados

Al considerar modos localizados sobre la superficie del material se hace necesario confinar los campos de las ondas sobre la interfaz en $z = 0$. Es decir, debemos hacer cero los siguientes campos: $E_y^{(1)+} = 0$, $H_y^{(1)+} = 0$, $E_y^{(2)-} = 0$ y $H_y^{(2)-} = 0$. Además, para garantizar la convergencia de los campos cuando $z \rightarrow \pm\infty$ debemos considerar los vectores de onda imaginarios; $k_z^{(1)} = i\kappa_z^{(1)}$ y $k_z^{(2)} = i\kappa_z^{(2)}$.

Luego, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ 0 \\ -\mu^{(2)}c^{(2)}H_y^{(2)+} \\ 0 \end{pmatrix} = M^{(21)} \begin{pmatrix} 0 \\ E_y^{(1)-} \\ 0 \\ -\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-} \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

donde $M^{(21)}$ es la matriz de transferencia con elementos dados por las ecuaciones (3.18)-(3.21). Del sistema en (3.54) obtenemos el siguiente grupo de ecuaciones:

$$E_y^{(2)+} = M_{12}^{(21)}E_y^{(1)-} + M_{14}^{(21)}H_y^{(1)-}, \quad (3.55)$$

$$0 = M_{22}^{(21)}E_y^{(1)-} + M_{24}^{(21)}H_y^{(1)-}, \quad (3.56)$$

$$H_y^{(2)+} = M_{32}^{(21)}E_y^{(1)-} + M_{34}^{(21)}H_y^{(1)-}, \quad (3.57)$$

$$0 = M_{42}^{(21)}E_y^{(1)-} + M_{44}^{(21)}H_y^{(1)-}. \quad (3.58)$$

Al combinar las ecuaciones (3.56) y (3.58) obtenemos la relación de dispersión para los modos localizados:

$$M_{22}^{(21)}M_{44}^{(21)} - M_{24}^{(21)}M_{42}^{(21)} = 0. \quad (3.59)$$

Reemplazando los términos de la matriz de transferencia en la ecuación (3.59) encontramos la siguiente expresión:

$$\left(1 + z_{(s)}^{(21)}\right)\left(1 + z_{(p)}^{(21)}\right) + \frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}z_{(s)}^{(21)}(\delta_{12})^2 = 0, \quad (3.60)$$

donde $z_{(s)}^{(21)} = \frac{\mu^{(2)}k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}k_z^{(2)}}$, $z_{(p)}^{(21)} = \frac{\varepsilon^{(2)}k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}k_z^{(2)}}$, $\delta^{(12)} = \alpha \frac{\Delta\theta^{(12)}}{\pi} = \alpha \frac{\theta^{(1)} - \theta^{(2)}}{\pi}$. La ecuación (3.60) es equivalente al resultado obtenido en [42].

3.6 Resumen

A través de las ecuaciones (3.1) y (3.2) se describieron los campos eléctricos y magnéticos en un sistema compuesto por dos aislantes topológicos, los cuales están separados por una interfaz. Con ayuda de las relaciones de continuidad para los campos (3.11) y las ecuaciones constitutivas para aislantes topológicos (3.9)-(3.10), se obtuvo en forma matricial un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas (siendo las amplitudes de los campos dichas incógnitas). En este formalismo de matriz de transferencia 4x4, se observó que la presencia del termino topológico acopla los modos de propagación TM y TE. Se estudió el comportamiento de los coeficientes de transmisión respecto al ángulo con el cual incide la onda sobre la interface. Encontramos que la presencia del termino del axion produce una corrección del orden de α^2 en los coeficientes de transmisión. Adicionalmente, el acople de los campos da lugar a la rotación del plano de polarización de las ondas reflejadas y transmitidas (efecto Kerr y Faraday respectivamente).

4. MÉTODO DE MATRIZ DE TRANSFERENCIA APLICADO A PELÍCULAS CON AISLANTES TOPOLÓGICOS

En el capítulo anterior, se describió la propagación de una onda electromagnética a través de una interfaz que separa dos medios compuestos por aislantes topológicos. Se demostró que la introducción del parámetro topológico en las relaciones constitutivas producía: (1) correcciones del orden del cuadrado del coeficiente de estructura fina (α^2) en los coeficientes de transmisión y reflexión; (2) la transmisión y reflexión de ondas con modo TM a partir de ondas incidentes con modo TE; (3) la transmisión y reflexión de ondas con modo TE a partir de ondas incidentes con modo TM.

En este capítulo haremos uso del método de matriz de transferencia para investigar el comportamiento que tienen los coeficientes de transmisión y reflexión cuando una onda electromagnética incide sobre una película con una topología no trivial. Además, se estudiara el acople de los modos TE con los modos TM dentro de la matriz de transferencia. Se demostrara que el acople ocasiona una redistribución de los porcentajes de energía de las ondas electromagnéticas en el sistema cuando estas inciden sobre la superficie del material

4.1 Configuración y campos del sistema

Consideremos tres medios isotrópicos semi-infinitos, polarizables, magnetizables y con una topología no trivial θ , separados por una interfaz en $z = -l/2$ y otra interfaz en $z = l/2$ dispuestos como se muestra en la figura 4.1. En $z < -l/2$ la permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética son respectivamente $\epsilon^{(1)}$ y $\mu^{(1)}$; en $-l/2 \leq z \leq l/2$ las respectivas características ópticas son $\epsilon^{(2)}$ y $\mu^{(2)}$; por último en $z > l/2$ tenemos $\epsilon^{(3)}$ y $\mu^{(3)}$. Una onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}^{(1)+} = (k_x, k_z^{(1)+})$ se aproxima desde la izquierda de la interfaz en $z = -l/2$, parte de esta onda es reflejada con un vector de onda $\vec{k}^{(1)-} = (k_x, k_z^{(1)-})$ y otra parte es transmitida al interior del medio 2 con vector de onda $\vec{k}^{(2)+} = (k_x, k_z^{(2)+})$. La onda con $\vec{k}^{(2)+}$ se propaga en el medio homogéneo e incide en la interfaz en $z = l/2$. Parte de la onda en el medio 2 es reflejada con $\vec{k}^{(2)-} = (k_x, k_z^{(2)-})$ y otra parte es transmitida al medio 3 con vector de onda $\vec{k}^{(3)+} = (k_x, k_z^{(3)+})$. Los signos (+) y (-) indican el sentido en que se propaga la onda, (+) hacia la derecha y (-) hacia a la izquierda.

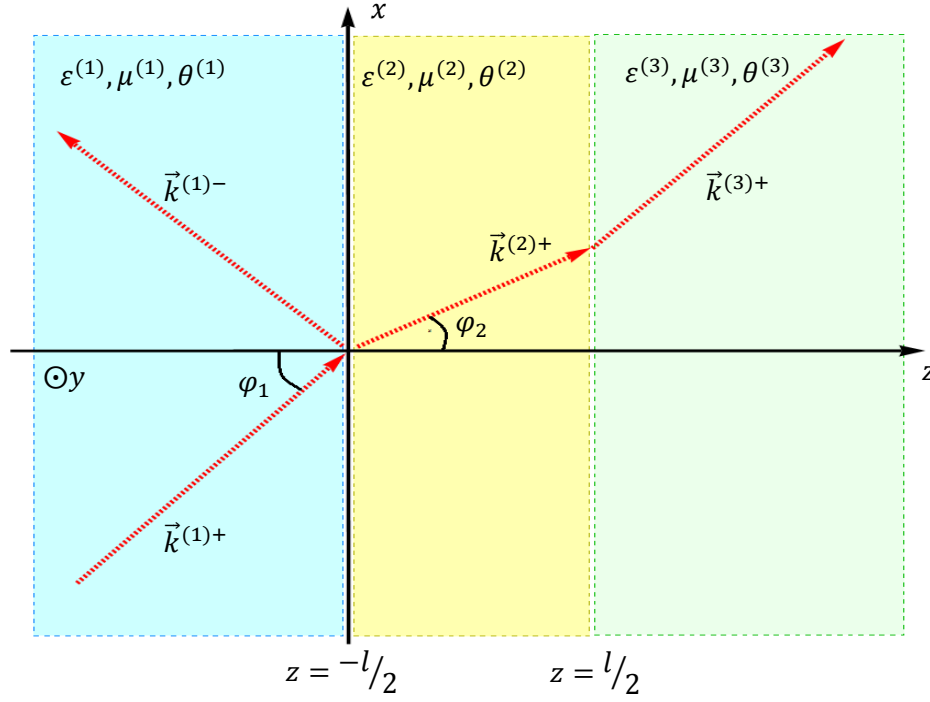


Figura 4. 1: descripción esquemática de la propagación de una onda electromagnética a través de un sistema compuesto por tres medios separados por dos interfaces en $z = \pm l/2$. En la figura las ondas reflejadas y transmitidas por una flecha roja en la respectiva dirección de propagación. En el medio delimitado por $-l/2 < z < l/2$ solamente se muestra la propagación de la onda en una dirección y no se representan las múltiples reflexiones que se experimentan en esta región.

En la figura 4.1 se ha elegido un sistema de coordenadas en el cual las dos interfaces están definidas por superficies que descansan y se extienden sobre todo el plano xy , y cuya normal se encuentra en el eje z . Por otra parte, el plano de incidencia xz , el cual es determinado por la normal a la interfaz y la dirección de propagación de las ondas electromagnéticas, es perpendicular al eje y . Conforme las ondas se propagan a través de los tres medios, los vectores de onda van cambiando en su componente $k_z^{\pm(i)}$ (donde i corresponde a los medios 1, 2 o 3) debido a la transición que sufre la onda al pasar de un medio al otro. En las direcciones $\vec{x}$ e $\vec{y}$ hay homogeneidad, esto implica que las componentes x e y de los vectores de onda en los tres medios se conservan, es decir tenemos que $k_x^{(i)} = k_x$ y $k_y^{(i)} = k_y$. Sin embargo, para la configuración del sistema de la figura 4.1, se tiene que $k_y^{(i)} = k_y = 0$. Con lo anterior se deduce que las leyes de reflexión y refracción siguen siendo válidas incluso en la interfaz donde el parámetro topológico es $\theta^{(i)}$.

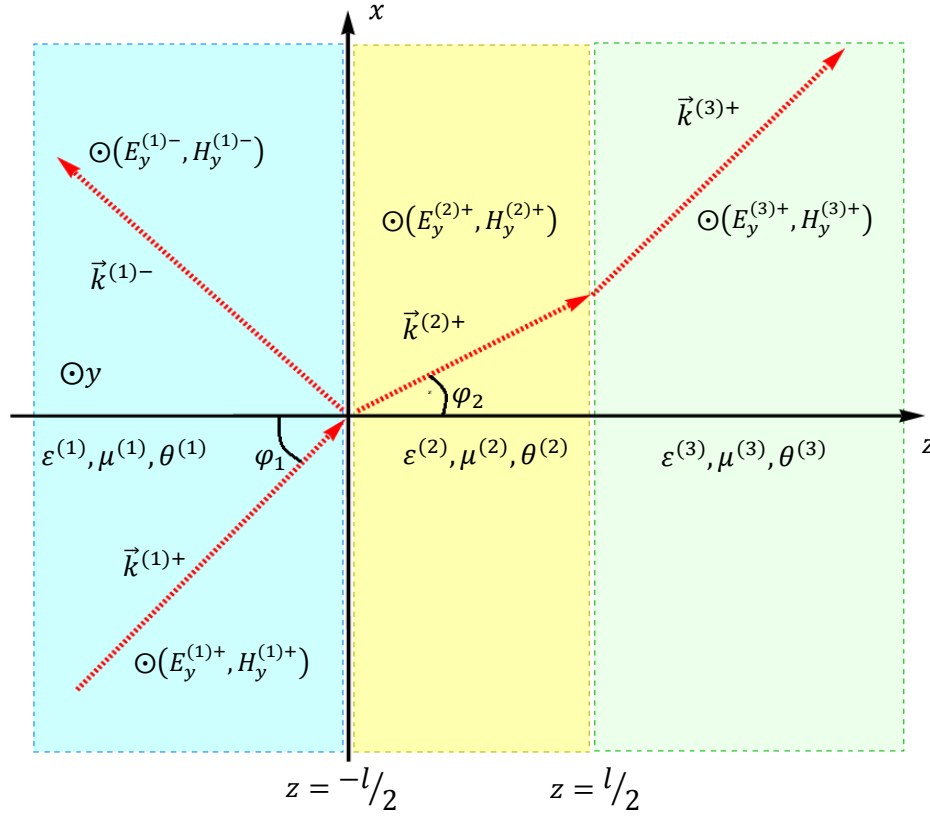


Figura 4. 2: descripción esquemática de la configuración de los campos en el sistema compuesto por tres medios, los cuales se encuentran separados por interfaces en $z = \pm l/2$.

De acuerdo con estas consideraciones, las componentes y de los campos eléctricos y magnéticos presentes en los tres medios, están dadas de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} E_y^{(1)} \\ H_y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(1)+} \\ H_y^{(1)+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_y^{(1)-} \\ H_y^{(1)-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(1)+} \\ H_{y0}^{(1)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(1)}(z+l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)} + \begin{pmatrix} E_{y0}^{(1)-} \\ H_{y0}^{(1)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(1)}(z+l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad z < -l/2, \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ H_y^{(2)+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_y^{(2)-} \\ H_y^{(2)-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(2)}z} e^{i(k_x x - \omega t)} + \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(2)}z} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad -l/2 < z < l/2, \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} E_y^{(3)} \\ H_y^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(3)+} \\ H_y^{(3)+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_y^{(3)-} \\ H_y^{(3)-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(3)+} \\ H_{y0}^{(3)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(3)}(z-l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)} + \begin{pmatrix} E_{y0}^{(3)-} \\ H_{y0}^{(3)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(3)}(z-l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad z > l/2 \quad (4.3)$$

donde $k_z^{(i)\pm} = \mp k_z^{(i)} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(i)} \mu^{(i)} - (k_x)^2}$, con $(i) = 1, 2, 3$, ω y c son la frecuencia de la onda y la velocidad de la luz respectivamente [78]. Los términos $E_{y0}^{(i)\pm}$ y $H_{y0}^{(i)\pm}$ son las amplitudes respectivas de las componentes $E_y^{(i)\pm}$ y $H_y^{(i)\pm}$. Los signos (+) y (-) indican el sentido en que se propaga la onda, (+) hacia la derecha y (-) hacia a la izquierda. En las ecuaciones (4.1)-(4.3) la estructura de los campos corresponde al de una onda monocromática, por lo cual poseen una

dependencia con $e^{i(\vec{k}^{(i)\pm} \cdot \vec{R} - \omega t)}$ (donde $\vec{R} = (x, y, z)$). Debido a la homogeneidad en las direcciones $\vec{x}$ e $\vec{y}$ ($k_x^{(i)} = k_x$ y $k_y^{(i)} = k_y = 0$) esta dependencia se transforma en $e^{ik_z^{(i)\pm} z'} e^{i(k_x x - \omega t)}$ (donde z' cambia según el medio en el que se propague la onda). Las componentes $E_y^{(i)}$ y $H_y^{(i)}$, son tangenciales a las superficies de división. En la figura 4.2 se muestra la estructura del sistema con la configuración de los campos. Las expresiones para las componentes restantes de los campos pueden obtenerse con ayuda de las ecuaciones de Lorentz-Maxwell convencionales (ver apéndice A.1).

4.2 Condiciones de frontera en las dos interfaces

Al estudiar la propagación de las ondas electromagnéticas a través de un sistema de tres capas como el que se muestra la figura 4.2, es necesario analizar la redistribución de la energía que presentan las ondas cuando inciden en cada una de las interfaces. Para describir el salto que realizan los campos al atravesar las dos interfaces, se hacen coincidir las fases de las ondas planas (4.1)-(4.3) en $z = \pm l/2$. Puesto que los medios que componen el sistema son materiales que presentan una topología no trivial, es necesario hacer uso de las relaciones constitutivas para los aislantes topológicos (3.9) y (3.10).

$$\vec{D}^{(i)\pm} = \varepsilon^{(i)} \vec{E}^{(i)\pm} - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} (c_0 \vec{B}^{(i)\pm}), \quad (3.9)$$

$$c_0 \vec{H}^{(i)\pm} = \frac{c_0 \vec{B}^{(i)\pm}}{\mu^{(i)}} + \alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} \frac{\vec{E}^{(i)\pm}}{\mu_0}, \quad (3.10)$$

donde $\vec{D}^{(i)\pm}$, $\vec{H}^{(i)\pm}$, $\vec{E}^{(i)\pm}$, $\vec{B}^{(i)\pm}$ son respectivamente, el desplazamiento eléctrico, la intensidad magnética, el campo eléctrico y el campo magnético en el i – ésimo medio.

En particular, analizaremos la continuidad que presentan las componentes de los campos $E_x^{(i)\pm}$, $E_y^{(i)\pm}$, $H_x^{(i)\pm}$ y $D_z^{(i)\pm}$ en las interfaces en $z = \pm l/2$. En la figura 4.2 se muestra una onda electromagnética que viaja desde el medio 1 e incide sobre la interfaz en $z = -l/2$ con un ángulo φ_1 . Una fracción de energía de la onda se transmite al medio 2 y otra fracción se refleja. La onda transmitida en el medio 2, viaja a través de éste y luego incide sobre una segunda interfaz en $z = +l/2$. De nuevo, la energía se redistribuye de forma tal que, una fracción se refleja hacia el medio 2 y otra se transmite en forma de ondas hacia el medio 3. Es decir, debemos analizar la transición del medio 1 al medio 2 en la primera interfaz, luego se describe el desplazamiento de la onda en el medio 2 hasta llegar a la segunda interfaz y finalmente la transición desde el medio 2 al medio 3.

Cuando una onda pasa desde el i – ésimo medio al j – ésimo medio ($(j) > (i)$), tenemos las siguientes relaciones de continuidad para los campos: $E_y^{(i)\pm} = E_y^{(j)\pm}$, $H_x^{(i)\pm} = H_x^{(j)\pm}$,

$D_z^{(i)\pm} = D_z^{(j)\pm}$ y $E_x^{(i)\pm} = E_x^{(j)\pm}$ (donde $(i), (j) = 1, 2, 3$ corresponden a los medios en consideración). Con ayuda de las ecuaciones (3.9) y (3.10) y las condiciones de frontera mencionadas anteriormente tenemos lo siguiente:

- Continuidad de $E_y^{(i)\pm} = E_y^{(j)\pm}$:

$$E_y^{(i)+} + E_y^{(i)-} + (0)H_y^{(i)+} + (0)H_y^{(i)-} = E_y^{(j)+} + E_y^{(j)-} + (0)H_y^{(j)+} + (0)H_y^{(j)-} \quad (4.4)$$

- Continuidad de $H_x^{(i)\pm} = H_x^{(j)\pm}$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{k_z^{(i)}}{\mu^{(i)}} \right) E_y^{(i)+} + \left(\frac{k_z^{(i)}}{\mu^{(i)}} \right) E_y^{(i)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} \frac{k_z^{(i)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(i)}} \right) \left(\frac{-c^{(i)} \mu^{(i)}}{-c^{(i)} \mu^{(i)}} \right) H_y^{(i)+} \\ & \quad + \left(-\alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} \frac{v}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(i)}} \right) \left(\frac{-c^{(i)} \mu^{(i)}}{-c^{(i)} \mu^{(i)}} \right) H_y^{(i)-} \\ & = \left(-\frac{k_z^{(j)}}{\mu^{(j)}} \right) E_y^{(j)+} + \left(\frac{k_z^{(j)}}{\mu^{(j)}} \right) E_y^{(j)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(j)}}{\pi} \frac{k_z^{(j)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(j)}} \right) \left(\frac{-c^{(j)} \mu^{(j)}}{-c^{(j)} \mu^{(j)}} \right) H_y^{(j)+} \\ & \quad + \left(-\alpha \frac{\theta^{(j)}}{\pi} \frac{k_z^{(j)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(j)}} \right) \left(\frac{-c^{(j)} \mu^{(j)}}{-c^{(j)} \mu^{(j)}} \right) H_y^{(j)-} \end{aligned} \quad (4.5)$$

- Continuidad de $D_z^{(i)\pm} = D_z^{(j)\pm}$:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(i)}}{\pi} \right) E_y^{(i)+} + \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(i)}}{\pi} \right) E_y^{(i)-} + \left(\frac{-c^{(i)} \mu^{(i)}}{-c^{(i)} \mu^{(i)}} \right) H_y^{(i)+} + \left(\frac{-c^{(i)} \mu^{(i)}}{-c^{(i)} \mu^{(i)}} \right) H_y^{(i)-} \\ & = \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(j)}}{\pi} \right) E_y^{(j)+} + \left(\alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(j)}}{\pi} \right) E_y^{(j)-} + \left(\frac{-c^{(j)} \mu^{(j)}}{-c^{(j)} \mu^{(j)}} \right) H_y^{(j)+} + \left(\frac{-c^{(j)} \mu^{(j)}}{-c^{(j)} \mu^{(j)}} \right) H_y^{(j)-} \end{aligned} \quad (4.6)$$

- Continuidad de $E_x^{(i)\pm} = E_x^{(j)\pm}$:

$$\begin{aligned} & (0)E_y^{(i)+} + (0)E_y^{(i)-} + \left(\frac{k_z^{(i)}}{\varepsilon^{(i)}} \right) \left(\frac{-c^{(i)} \mu^{(i)}}{-c^{(i)} \mu^{(i)}} \right) H_y^{(i)+} - \left(\frac{k_z^{(i)}}{\varepsilon^{(i)}} \right) \left(\frac{-c^{(i)} \mu^{(i)}}{-c^{(i)} \mu^{(i)}} \right) H_y^{(i)-} \\ & = (0)E_y^{(j)+} + (0)E_y^{(j)-} + \left(\frac{k_z^{(j)}}{\varepsilon^{(j)}} \right) \left(\frac{-c^{(j)} \mu^{(j)}}{-c^{(j)} \mu^{(j)}} \right) H_y^{(j)+} - \left(\frac{k_z^{(j)}}{\varepsilon^{(j)}} \right) \left(\frac{-c^{(j)} \mu^{(j)}}{-c^{(j)} \mu^{(j)}} \right) H_y^{(j)-} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ordenando el conjunto de ecuaciones en forma matricial obtenemos,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_z^{(i)}}{\mu^{(i)}} & \frac{k_z^{(i)}}{\mu^{(i)}} & -\alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} \frac{k_z^{(i)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(i)} c^{(i)} \mu^{(i)}} & \alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} \frac{k_z^{(i)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(i)} c^{(i)} \mu^{(i)}} \\ \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(i)}}{\pi} & \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(i)}}{\pi} & -\frac{1}{c^{(i)} \mu^{(i)}} & -\frac{1}{c^{(i)} \mu^{(i)}} \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} c^{(i)} \mu^{(i)}} & \frac{k_z^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} c^{(i)} \mu^{(i)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^{(i)+} \\ E_y^{(i)-} \\ -c^{(i)} \mu^{(i)} H_y^{(i)+} \\ -c^{(i)} \mu^{(i)} H_y^{(i)-} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_z^{(j)}}{\mu^{(j)}} & \frac{k_z^{(j)}}{\mu^{(j)}} & -\alpha \frac{\theta^{(j)}}{\pi} \frac{k_z^{(j)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(j)} c^{(j)} \mu^{(j)}} & \alpha \frac{\theta^{(j)}}{\pi} \frac{k_z^{(j)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(j)} c^{(j)} \mu^{(j)}} \\ \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(j)}}{\pi} & \alpha \frac{c_0 \varepsilon_0 \theta^{(j)}}{\pi} & -\frac{1}{c^{(j)} \mu^{(j)}} & -\frac{1}{c^{(j)} \mu^{(j)}} \\ 0 & 0 & -\frac{k_z^{(j)}}{\varepsilon^{(j)} c^{(j)} \mu^{(j)}} & \frac{k_z^{(j)}}{\varepsilon^{(j)} c^{(j)} \mu^{(j)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^{(j)+} \\ E_y^{(j)-} \\ -c^{(j)} \mu^{(j)} H_y^{(j)+} \\ -c^{(j)} \mu^{(j)} H_y^{(j)-} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

La expresión (4.8) nos conduce a la siguiente relación entre las amplitudes de los campos eléctrico y magnético:

$$\begin{pmatrix} E_y^{(j)+} \\ E_y^{(j)-} \\ -c^{(j)} \mu^{(j)} H_y^{(j)+} \\ -c^{(j)} \mu^{(j)} H_y^{(j)-} \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{(ij)} \begin{pmatrix} E_y^{(i)+} \\ E_y^{(i)-} \\ -c^{(i)} \mu^{(i)} H_y^{(i)+} \\ -c^{(i)} \mu^{(i)} H_y^{(i)-} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

donde

$$\mathbf{M}^{(ji)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z_{(s)}^{(ij)} & 1 - z_{(s)}^{(ij)} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(i)}}{\varepsilon_r^{(i)}}} z_{(s)}^{(ij)} \delta_{ij} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(i)}}{\varepsilon_r^{(i)}}} z_{(s)}^{(ij)} \delta_{ij} \\ 1 - z_{(s)}^{(ij)} & 1 + z_{(s)}^{(ij)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(i)}}{\varepsilon_r^{(i)}}} z_{(s)}^{(ij)} \delta_{ij} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(i)}}{\varepsilon_r^{(i)}}} z_{(s)}^{(ij)} \delta_{ij} \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)}}} \delta_{ij} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)}}} \delta_{ij} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(i)} \mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)} \mu_r^{(i)}}} (1 + z_{(p)}^{(ij)}) & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(i)} \mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)} \mu_r^{(i)}}} (1 - z_{(p)}^{(ij)}) \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)}}} \delta_{ij} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)}}} \delta_{ij} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(i)} \mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)} \mu_r^{(i)}}} (1 - z_{(p)}^{(ij)}) & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(i)} \mu_r^{(j)}}{\varepsilon_r^{(j)} \mu_r^{(i)}}} (1 + z_{(p)}^{(ij)}) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

En la expresión (4.10), $\mathbf{M}^{(ji)}$ es la matriz de transferencia del i –ésimo medio al j –ésimo medio. Los términos $z_{(s)}^{(ij)} = \frac{\mu^{(j)} k_z^{(i)}}{\mu^{(i)} k_z^{(j)}}$ y $z_{(p)}^{(ij)} = \frac{\varepsilon^{(j)} k_z^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} k_z^{(j)}}$ son las impedancias para los modos de propagación TE y TM respectivamente [78]. El parámetro, $\delta^{(ij)} = \alpha \frac{\Delta \theta^{(ij)}}{\pi} = \alpha \frac{\theta^{(i)} - \theta^{(j)}}{\pi}$ es proporcional a la diferencia entre los términos topológicos.

Ahora, con ayuda de la matriz (4.10) podemos calcular la matriz de transferencia que representa la transición total de la onda cuando atraviesa las dos interfaces. En primer lugar,

tenemos una matriz $\mathbf{M}^{(21)}$ que representa la propagación de la onda desde el medio 1 hasta el medio 2 cuando atraviesa la interfaz en $z = -l/2$. En segundo lugar, tenemos una matriz $\mathbf{M}^{(32)}$ que representa la propagación de la onda desde el medio 2 hasta el medio 3 cuando atraviesa la interfaz en $z = +l/2$. Sin embargo, las interfaces en $z = \pm l/2$, se encuentran separadas por una capa de espesor l (en la cual se encuentra el medio 2). Con el objetivo de describir la propagación de la onda entre las dos interfaces es preciso introducir una matriz adicional. Esta matriz está dada por la expresión (4.11) y representa la propagación de la onda a través del medio homogéneo 2 entre las interfaces en $z = \pm l/2$ (ver apéndice C.1).

$$\mathbf{M}^{(hom2)} = \begin{pmatrix} e^{ik_z^{(2)}l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_z^{(2)}l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_z^{(2)}l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_z^{(2)}l} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

El producto de las matrices $\mathbf{M}^{(21)}$, $\mathbf{M}^{(hom2)}$ y $\mathbf{M}^{(32)}$ da como resultado la matriz de transferencia desde el medio 1 al medio 3:

$$\mathbf{M}^{(slab)} = \mathbf{M}^{(32)}\mathbf{M}^{(hom2)}\mathbf{M}^{(21)}, \quad (4.12)$$

donde $\mathbf{M}^{(21)}$ y $\mathbf{M}^{(32)}$ están dados por la matriz (4.10). Los elementos de matriz de $\mathbf{M}^{(slab)}$ están dados por:

$$M_{11}^{(slab)} = \frac{1}{2} \left(1 + z_{(s)}^{(13)} \right) \cos \left(lk_z^{(2)} \right) + \frac{i}{2} \left[z_{(s)}^{(12)} + z_{(s)}^{(23)} \left(1 - \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right) \right] \sin \left(lk_z^{(2)} \right), \quad (4.13)$$

$$M_{12}^{(slab)} = \frac{1}{2} \left(1 - z_{(s)}^{(13)} \right) \cos \left(lk_z^{(2)} \right) + \frac{i}{2} \left[z_{(s)}^{(23)} \left(1 - \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right) - z_{(s)}^{(12)} \right] \sin \left(lk_z^{(2)} \right), \quad (4.14)$$

$$M_{21}^{(slab)} = \bar{M}_{12}^{(slab)}, \quad M_{22}^{(slab)} = \bar{M}_{11}^{(slab)}, \quad (4.15)$$

$$M_{13}^{(slab)} = \frac{z_{(s)}^{(13)}}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} (\delta^{(12)} + \delta^{(23)}) \cos \left(lk_z^{(2)} \right) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \left(z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} + z_{(s)}^{(23)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(23)} \right) \sin \left(lk_z^{(2)} \right) \quad (4.16)$$

$$M_{14}^{(slab)} = -\frac{z_{(s)}^{(13)}}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} (\delta^{(12)} + \delta^{(23)}) \cos \left(lk_z^{(2)} \right) - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \left(z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} - z_{(s)}^{(23)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(23)} \right) \sin \left(lk_{2z} \right) \quad (4.17)$$

$$M_{24}^{(slab)} = \bar{M}_{13}^{(slab)}, \quad M_{23}^{(slab)} = \bar{M}_{14}^{(slab)}, \quad (4.18)$$

$$M_{31}^{(slab)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} (\delta^{(23)} + \delta^{(12)}) \cos(lk_z^{(2)}) - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} (z_{(s)}^{(12)} \delta^{(23)} + z_{(p)}^{(23)} \delta^{(12)}) \sin(lk_z^{(2)}) \quad (4.19)$$

$$M_{32}^{(slab)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} (\delta^{(23)} + \delta^{(12)}) \cos(lk_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} (z_{(s)}^{(12)} \delta^{(23)} - z_{(p)}^{(23)} \delta^{(12)}) \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.20)$$

$$M_{41}^{(slab)} = \bar{M}_{32}^{(slab)}; \quad M_{42}^{(slab)} = \bar{M}_{31}^{(slab)}, \quad (4.21)$$

$$M_{33}^{(slab)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(1)}}} (1 + z_{(p)}^{(13)}) \cos(lk_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(1)}}} \left[z_{(p)}^{(23)} + z_{(p)}^{(12)} \left(1 - \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right) \right] \sin(lk_z^{(2)}) \quad (4.22)$$

$$M_{34}^{(slab)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(1)}}} (1 - z_{(p)}^{(13)}) \cos(lk_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(1)}}} \left[z_{(p)}^{(23)} - z_{(p)}^{(12)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right) \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.23)$$

$$M_{43}^{(slab)} = \bar{M}_{34}^{(slab)}; \quad M_{44}^{(slab)} = \bar{M}_{33}^{(slab)}, \quad (4.24)$$

con $z_{(s)}^{(ij)} = \frac{\mu^{(j)} k_z^{(i)}}{\mu^{(i)} k_z^{(j)}}$, $z_{(p)}^{(ij)} = \frac{\varepsilon^{(j)} k_z^{(i)}}{\varepsilon^{(i)} k_z^{(j)}}$, $\delta^{(ij)} = \alpha \frac{\Delta \theta^{(ij)}}{\pi} = \alpha \frac{\theta^{(i)} - \theta^{(j)}}{\pi}$ para $(i), (j) = 1, 2, 3$. Los parámetros $\varepsilon_r^{(i)}$ y $\mu_r^{(i)}$ son respectivamente; la permeabilidad eléctrica relativa y la permeabilidad magnética relativa.

En la matriz $\mathbf{M}^{(slab)}$ se puede observar cómo el parámetro topológico da lugar al acople de los dos modos de propagación TM y TE con la presencia de los términos $M_{13}^{(slab)}$, $M_{14}^{(slab)}$, $M_{23}^{(slab)}$, $M_{24}^{(slab)}$, $M_{31}^{(slab)}$, $M_{32}^{(slab)}$, $M_{41}^{(slab)}$ y $M_{42}^{(slab)}$. Además, adiciona una pequeña corrección a los elementos de la matriz de transferencia para los modos puros, transversal magnético TM y transversal eléctrico TE, presentes en una película convencional [78]. Esta corrección está dada por el término $\left[1 \pm \left(\mu_r^{(2)} / \varepsilon_r^{(2)} \right) \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right]$. Por otra parte, observe que si $l = 0$, obtenemos los elementos de la matriz de transferencia para una onda que atraviesa la interfaz

entre dos medios con topologías no triviales. Por otro lado, si hacemos $\delta^{(ij)} = 0$, desaparece el acople de los modos TE/TM y se obtienen los elementos de matriz convencionales [78].

4.3 Película delgada compuesta por TI y rodeada por vacío

Las relaciones generales (4.13)-(4.24) pueden ser usadas para describir varias propiedades electrodinámicas de sistemas que contienen medios con aislantes topológicos. Consideremos el caso en que $\varepsilon_r^{(1)} = \varepsilon_r^{(3)}$, $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = \mu_r^{(3)}$ y $\delta^{(12)} = -\delta^{(23)}$. Realizando estos cambios, obtenemos los elementos de matriz para una película delgada con TI rodeada por un medio isotrópico, polarizable y magnetizable. Los elementos para la matriz de transferencia en este sistema se muestran a continuación:

$$M_{11}^{(slab)} = \cos(lk_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \left[z_{(s)}^{(12)} + z_{(s)}^{(21)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.25)$$

$$M_{12}^{(slab)} = \frac{i}{2} \left[z_{(s)}^{(21)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) - z_{(s)}^{(12)} \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.26)$$

$$M_{21}^{(slab)} = \bar{M}_{12}^{(slab)}, \quad M_{22}^{(slab)} = \bar{M}_{11}^{(slab)}, \quad (4.27)$$

$$M_{13}^{(slab)} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \delta^{(12)} \left(z_{(s)}^{(12)} - z_{(s)}^{(21)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \right) \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.28)$$

$$M_{14}^{(slab)} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \delta^{(12)} \left(z_{(s)}^{(12)} + z_{(s)}^{(21)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \right) \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.29)$$

$$M_{24}^{(slab)} = \bar{M}_{13}^{(slab)}, \quad M_{23}^{(slab)} = \bar{M}_{14}^{(slab)}, \quad (4.30)$$

$$M_{31}^{(slab)} = -\frac{i}{2} \delta^{(12)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \left(z_{(p)}^{(21)} - z_{(s)}^{(12)} \right) \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.31)$$

$$M_{32}^{(slab)} = -\frac{i}{2} \delta^{(12)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \left(z_{(p)}^{(21)} + z_{(s)}^{(12)} \right) \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.32)$$

$$M_{41}^{(slab)} = \bar{M}_{32}^{(slab)}; \quad M_{42}^{(slab)} = \bar{M}_{31}^{(slab)}, \quad (4.33)$$

$$M_{33}^{(slab)} = \cos(lk_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \left[z_{(p)}^{(21)} + z_{(p)}^{(12)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.34)$$

$$M_{34}^{(slab)} = \frac{i}{2} \left[z_{(p)}^{(21)} - z_{(p)}^{(12)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.35)$$

$$M_{43}^{(slab)} = \bar{M}_{34}^{(slab)}; \quad M_{44}^{(slab)} = \bar{M}_{33}^{(slab)}, \quad (4.36)$$

Cuando $\delta^{(12)} = 0$, las ecuaciones (4.25)-(4.36) se reducen a los términos de la matriz de transferencia para una película convencional rodeada por un medio homogéneo, polarizable y magnetizable [78]. Recientemente, se ha investigado la interacción entre las superficies de películas que contienen aislantes topológicos [73, 103]. Estos estudios se han realizado con ayuda de formalismos similares a los que se muestran en este capítulo. En particular, se ha examinado la fuerza de Casimir que experimentan dos superficies (las cuales poseen una topología no trivial) cuando se aproximan [71-74, 103].

4.4 Coeficientes de transmisión y reflexión

Suponga una onda electromagnética en modo TE con amplitud $E_y^{(1)+}$, la cual incide desde la región $z < 0$ con ángulo de incidencia φ_1 ; en la región $z > l/2$ solo consideramos los campos que se alejan de la película. Luego, los campos en cada una de las regiones se pueden agrupar en vectores: $\Psi^{(1)} = (E_y^{(1)+}, E_y^{(1)-}, 0, -\mu^{(1)} c^{(1)} H_y^{(1)-})^T$ y $\Psi^{(3)} = (E_y^{(3)+}, 0, -\mu^{(3)} c^{(3)} H_y^{(3)+}, 0)^T$. El sistema de ecuaciones, $\Psi^{(3)} = M^{(slab)} \Psi^{(1)}$, nos permite obtener las expresiones para las amplitudes de transmisión y reflexión de los modos TE/TM (ver apéndice B):

$$E_y^{(1)-} = r_{ss}^{(slab)} E_y^{(1)+}, \quad E_y^{(1)+} = t_{ss}^{(slab)} E_y^{(1)+}, \quad (4.37)$$

$$H_y^{(1)-} = r_{sp}^{(slab)} E_y^{(1)+}, \quad H_y^{(1)+} = t_{sp}^{(slab)} E_y^{(1)+}, \quad (4.38)$$

$$t_{ss}^{(slab)} = M_{11}^{(slab)} + M_{12}^{(slab)} r_{ss}^{(slab)} - M_{14}^{(slab)} r_{sp}^{(slab)}, \quad (4.39)$$

$$t_{sp}^{(slab)} = - (M_{31}^{(slab)} + M_{32}^{(slab)} r_{ss}^{(slab)} - M_{34}^{(slab)} r_{sp}^{(slab)}), \quad (4.40)$$

$$r_{ss}^{(slab)} = \frac{M_{24}^{(slab)} M_{41}^{(slab)} - M_{44}^{(slab)} M_{21}^{(slab)}}{M_{44}^{(slab)} M_{22}^{(slab)} - M_{24}^{(slab)} M_{42}^{(slab)}}, \quad (4.41)$$

$$r_{sp}^{(slab)} = \frac{M_{22}^{(slab)} M_{41}^{(slab)} - M_{42}^{(slab)} M_{21}^{(slab)}}{M_{44}^{(slab)} M_{22}^{(slab)} - M_{24}^{(slab)} M_{42}^{(slab)}}, \quad (4.42)$$

Los términos $r_{ss}^{(slab)}$ y $r_{sp}^{(slab)}$ son las amplitudes de reflexión de los modos TE y TM para ondas incidentes con modo TE. Mientras que los términos $t_{ss}^{(slab)}$ y $t_{sp}^{(slab)}$ son las amplitudes

de transmisión de los modos TE y TM para ondas incidente con modo TE. Las ondas TE son las mismas ondas con polarización s y las ondas TM son las mismas ondas con polarización p .

De forma similar, suponga que una onda electromagnética en modo TM con amplitud H_y^{1+} , incide desde la región en $z < 0$. Los vectores para los campos están dados por: $\Psi^{(1)} = (0, E_y^{(1)-}, -\mu^{(1)} c^{(1)} H_y^{(1)+}, -\mu^{(1)} c^{(1)} H_y^{(1)-})^T$ y $\Psi^{(3)} = (E_y^{(3)+}, 0, -\mu^{(3)} c^{(3)} H_y^{(3)+}, 0)^T$. Así, la relación, $\Psi^{(3)} = \mathbf{M}^{(slab)} \Psi^{(1)}$, nos permite obtener las amplitudes de transmisión y reflexión para de los modos TE /TM para ondas incidentes en modo TM (ver apéndice B):

$$H_y^{(2)-} = r_{pp}^{(slab)} H_y^{1+}, H_y^{(3)+} = t_{pp}^{(slab)} H_y^{(1)+}, \quad (4.43)$$

$$E_y^{1-} = r_{ps}^{(slab)} H_y^{(1)+}, E_y^{(3)+} = t_{ps}^{(slab)} H_y^{(1)+}, \quad (4.44)$$

$$t_{pp}^{(slab)} = - \left(M_{32}^{(slab)} r_{sp}^{(slab)} - M_{33}^{(slab)} - M_{34}^{(slab)} r_{pp}^{(slab)} \right), \quad (4.45)$$

$$t_{ps}^{(slab)} = M_{12}^{(slab)} r_{ps}^{(slab)} - M_{13}^{(slab)} - M_{14}^{(slab)} r_{pp}^{(slab)}, \quad (4.46)$$

$$r_{pp}^{(slab)} = \frac{M_{42}^{(slab)} M_{23}^{(slab)} - M_{22}^{(slab)} M_{43}^{(slab)}}{M_{44}^{(slab)} M_{22}^{(slab)} - M_{24}^{(slab)} M_{42}^{(slab)}}, \quad (4.47)$$

$$r_{ps}^{(slab)} = \frac{M_{44}^{(slab)} M_{23}^{(slab)} - M_{24}^{(slab)} M_{43}^{(slab)}}{M_{44}^{(slab)} M_{22}^{(slab)} - M_{24}^{(slab)} M_{42}^{(slab)}}, \quad (4.48)$$

donde $r_{pp}^{(slab)}$ y $r_{ps}^{(slab)}$ son respectivamente, las amplitudes de reflexión de los modos TM y TE para ondas incidentes con modo TM. Las expresiones para $t_{pp}^{(slab)}$ y $t_{ps}^{(slab)}$ son respectivamente, las amplitudes de transmisión de los modos TM y TE para ondas incidentes con modo TM. Las ondas TE son las mismas ondas con polarización s y las ondas TM son las mismas ondas con polarización p . En ausencia de aislante topológico, los términos que dependen de δ_{12} desaparecen; $M_{13}^{(slab)} = M_{14}^{(slab)} = M_{23}^{(slab)} = M_{24}^{(slab)} = 0$ y $M_{31}^{(slab)} = M_{32}^{(slab)} = M_{41}^{(slab)} = M_{42}^{(slab)} = 0$. Lo anterior, implica que $r_{ps}^{(slab)} = r_{sp}^{(slab)} = 0$ y $t_{ps}^{(slab)} = t_{sp}^{(slab)} = 0$. Con esto, las amplitudes $t_{pp}^{(slab)}$, $r_{pp}^{(slab)}$, $t_{ss}^{(slab)}$ y $r_{ss}^{(slab)}$ se reducen a las amplitudes de reflexión y transmisión convencionales ($t_p^{(slab)}$, $r_p^{(slab)}$, $t_s^{(slab)}$ y $r_s^{(slab)}$) para una película en ausencia de aislante topológico [78].

En las figuras 4.3 y 4.4 se presentan los coeficientes de transmisión (T_{ss} y T_{pp}) y reflexión (R_{ss} y R_{pp}) en función de la frecuencia normalizada ($\sqrt{\epsilon_1} \omega l / c$) para diferentes ángulos de incidencia. Los comportamientos obtenidos son similares a los presentados por los coeficientes de transmisión (T_s , T_p) y reflexión (R_s , R_p) para una película sumergida en un medio dieléctrico con $\delta_{12} = 0$. Los picos en T_{ss} y T_{pp} corresponden a la transmisión máxima de la onda a través de la película (ver figuras 4.3). Esto se debe a que los campos dentro de la película experimentan múltiples reflexiones cuando interactúan con las interfaces en

$z = \pm l/2$. Cuando todas las ondas que se propagan dentro de la película tienen la misma fase aparece una frecuencia resonante, ω_{mr} , (m es un numero entero positivo que indica la frecuencia para cada pico) para la cual el coeficiente de transmisión toma su valor máximo. Este fenómeno se conoce como resonancia de Fabry-Perot [78]. Bajo dichas frecuencias resonantes los coeficientes de reflexión se reducen a su valor mínimo.

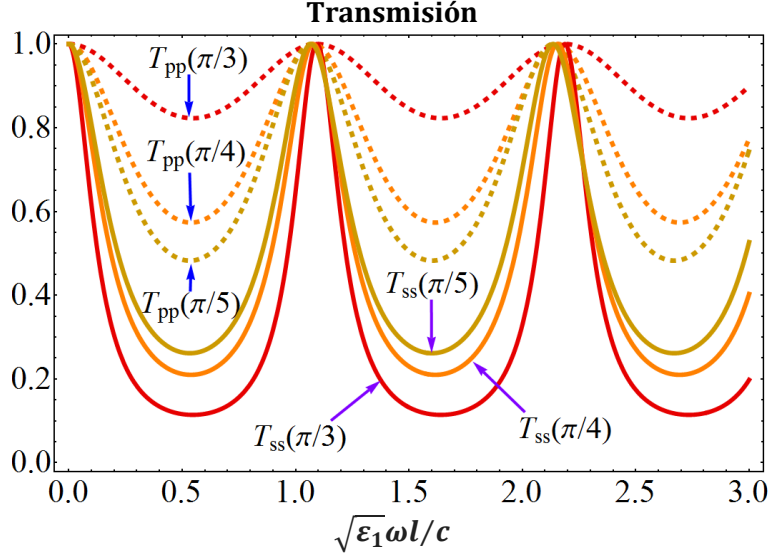


Figura 4. 3: Coeficientes de transmisión para ondas tipo TE y tipo TM con tres ángulos de incidencia diferentes $\varphi_1 = \pi/3, \pi/4, \pi/5$, a través de una película con $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. Las líneas discontinuas corresponden a los coeficientes de transmisión de ondas p -polarizadas provenientes de ondas p -incidentes. Las líneas continuas corresponden a los coeficientes de transmisión de ondas s -polarizadas provenientes de ondas s -incidentes.

En la figura 4.3 se presentan los coeficientes de transmisión T_{ss} y T_{pp} como función de la frecuencia de la onda incidente. Además, se muestran los cambios que sufren las curvas cuando se cambia el ángulo de incidencia. Se observa que para determinados ángulos, el coeficiente T_{pp} oscila en un rango de valores menor al rango de valores presentado por el coeficiente T_{ss} . Por ejemplo, para un ángulo $\pi/3$ se puede observar que T_{ss} disminuye rápidamente al incrementar la frecuencia hasta alcanzar su valor mínimo en $\sim 0,1$ para una frecuencia normalizada de $\sim 0,5$; en contraste, el coeficiente T_{pp} disminuye de una forma menos drástica, alcanzando su valor mínimo en $\sim 0,8$ para la misma frecuencia. Es decir, en este caso la energía transmitida en forma de *ondas pp* (transmisión de ondas con polarización p a partir de ondas p incidentes) es mayor o igual que la energía transmitida en forma de *ondas ss* (transmisión de ondas con polarización s a partir de ondas s incidentes) dependiendo de la frecuencia elegida.

Al reducir el ángulo de incidencia, el valor mínimo de T_{pp} va disminuyendo, mientras que el valor mínimo de T_{ss} va creciendo; el rango de valores alcanzado por T_{pp} va creciendo y el rango de valores de T_{ss} va decreciendo con la reducción del ángulo de incidencia. Visto de otra forma, para una frecuencia determinada los porcentajes de energía transmitida en forma de ondas pp disminuyen conforme el ángulo se reduce, mientras la energía transmitida en forma de ondas ss aumenta. Este comportamiento se conserva siempre que el ángulo de incidencia sea mayor que cero y menor que el ángulo de incidencia rasante a la película. Recuerde que las ondas TM (o modo transversal magnético) son las mismas ondas con polarización p y las ondas TE (o modo transversal eléctrico) son las mismas ondas con polarización s . Haremos uso de ambas notaciones en el resto del capítulo sin distinción.

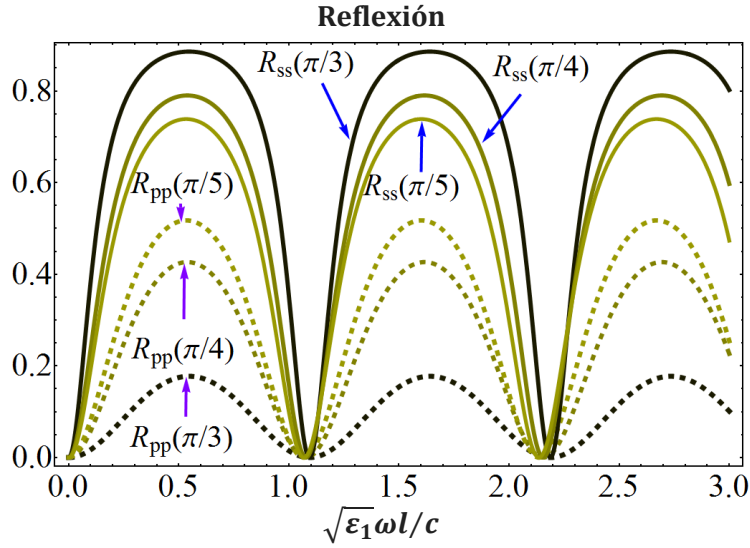


Figura 4. 4: Coeficientes de reflexión para ondas tipo TE y tipo TM con tres ángulos de incidencia diferentes $\varphi_1 = \pi/3, \pi/4, \pi/5$, a través de una película con $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. Las líneas discontinuas representan los coeficientes de reflexión de ondas p -polarizadas para onda p -incidentes. Las líneas continuas corresponden a los coeficientes de reflexión de ondas de s -polarizadas para onda s -incidentes.

En la figura 4.4 los coeficientes R_{ss} y R_{pp} alcanzan su valor máximo cuando los coeficientes T_{ss} y T_{pp} alcanzan su valor mínimo y viceversa. Se muestra cómo el rango de valores en los que oscila el coeficiente R_{pp} se incrementa con la reducción del ángulo de incidencia mientras que el rango de valores de R_{ss} va disminuyendo. Para un ángulo de incidencia $\pi/3$ los valores máximos alcanzados por R_{ss} y R_{pp} son respectivamente ~ 0.88 y ~ 0.17 , mientras que sus valores mínimos son aproximadamente cero. Si el ángulo de incidencia se reduce, se puede observar que el máximo de R_{ss} también se reduce y el máximo de R_{pp} aumenta. Luego, la energía reflejada en forma de ondas pp (reflexión de ondas con polarización s a partir de ondas s incidentes) aumenta conforme el ángulo se reduce, mientras que la energía reflejada

en forma de *ondas ss* (reflexión de ondas con polarización *s* a partir de ondas *s* incidentes) aumenta.

Cuando incide una onda TM en $z = -l/2$, parte de esta onda es reflejada y transmitida en forma de ondas TM pero una cierta cantidad de energía, muy pequeña, se transmite y se refleja en forma de ondas tipo TE. En la figura 4.5 se muestran los coeficientes de transmisión (T_{ps} y T_{sp}) y reflexión (R_{ps} y R_{sp}) en función de las frecuencias normalizadas. Se puede observar que las amplitudes de los coeficientes son del orden de 10^{-6} . Estos coeficientes dependen de los términos de la matriz que aparecen cuando se considera una topología no trivial en la película y presentan una dependencia con $(\delta^{(12)})^2 = \alpha^2$, donde $\alpha^2 \approx 5.32 \times 10^{-5}$.

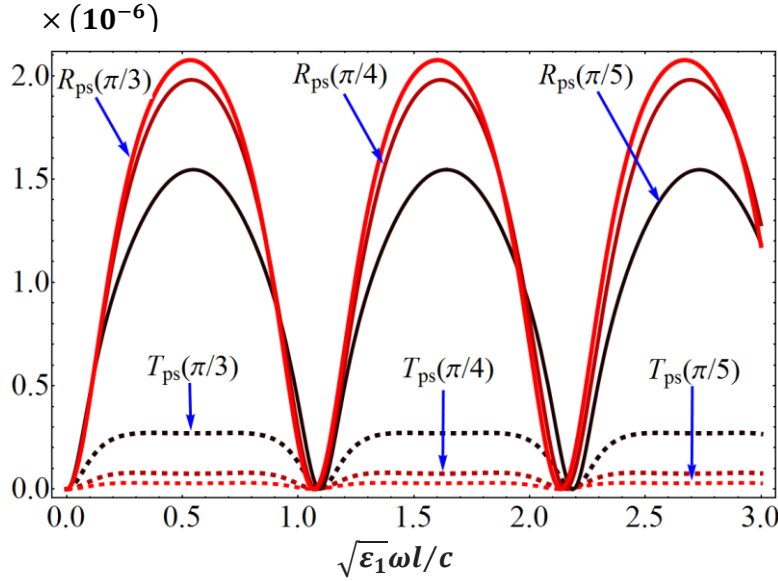


Figura 4. 5: Coeficientes de transmisión y reflexión para ondas tipo TE y tipo TM con tres ángulos de incidencia diferentes $\varphi_1 = \pi/3, \pi/4, \pi/5$, a través de una película con $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(2)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. Líneas discontinuas: Coeficientes de transmisión de ondas TE para ondas TM incidentes. Líneas continuas: Coeficientes de reflexión de ondas TE para ondas TM incidentes. Las ondas TE son las mismas ondas con polarización *s*. Las ondas TM son las mismas ondas con polarización *p*.

En la figura 4.5 aparece el comportamiento de los coeficientes T_{ps} y R_{ps} respecto a la frecuencia de la onda incidente, para diferentes ángulos de incidencia. Para un ángulo de incidencia $\pi/3$ el coeficiente de transmisión T_{ps} oscila entre un rango de valores menor al rango de valores en el que se encuentra T_{pp} en la figura 4.4. Es decir, la cantidad de energía transmitida en forma de *ondas ps* (transmisión de ondas con polarización *s* a través de la película a partir de ondas *p* incidentes) es siempre menor que la cantidad de energía transmitida en forma de *ondas pp*. Cuando T_{ps} crece con la frecuencia hasta que alcanza su valor máximo, ($\sim 0,26 \times 10^{-6}$) el coeficiente T_{pp} decrece en el mismo intervalo de frecuencias

hasta alcanzar su valor mínimo y viceversa. Dicho de otra forma, cuando se transmite mayor cantidad de energía en forma de *ondas pp*, la cantidad de energía transmitida en forma de *ondas ps* se reduce y viceversa. Con la reducción del ángulo de incidencia, la amplitud de oscilación de T_{ps} disminuye mientras la amplitud de T_{pp} aumenta. Por otro lado, el coeficiente R_{ps} (reflexión de ondas con polarización *s* a partir de ondas *p* incidentes) crece con la frecuencia hasta alcanzar su valor máximo, ($\sim 2,072 \times 10^{-6}$) mientras que el coeficiente T_{pp} decrece en el mismo intervalo de frecuencias hasta alcanzar su valor mínimo y viceversa, esto quiere decir que, se reflejan mas *ondas ps* cuando la trasmisión de *ondas pp* es mínima. Al disminuir el ángulo de incidencia, la amplitud del coeficiente R_{ps} decrece; este comportamiento contrasta con el crecimiento de R_{pp} con la reducción del ángulo de incidencia.

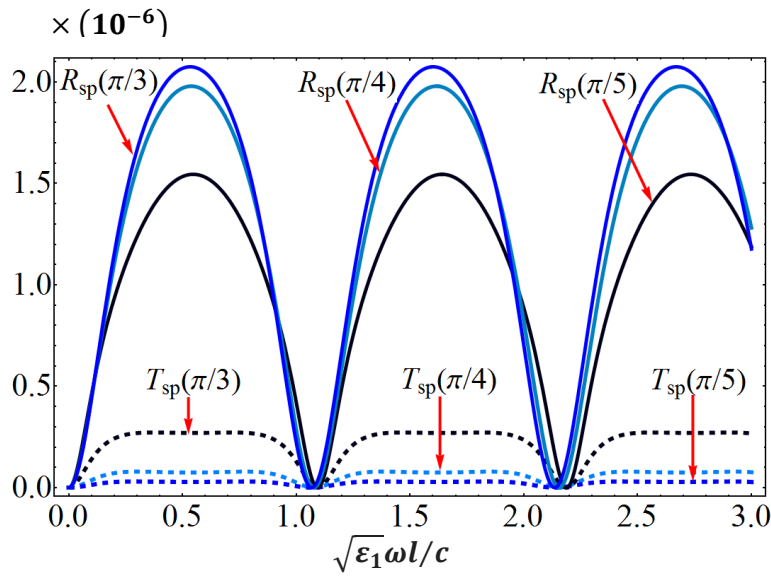


Figura 4. 6: Coeficientes de transmisión y reflexión para ondas tipo TE y tipo TM con tres ángulos de incidencia diferentes $\varphi_1 = \pi/3, \pi/4, \pi/5$, a través de una película con $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(2)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. Línea discontinua amarilla. Coeficiente de trasmisión de ondas TE para ondas TM incidentes. Líneas continuas: Coeficientes de reflexión de ondas TM para ondas TE incidentes. Las ondas TE son las mismas ondas con polarización *s*. Las ondas TM son las mismas ondas con polarización *p*.

En la figura 4.6 se muestran los coeficientes T_{sp} y R_{sp} como función de la frecuencia de la onda incidente, para diferentes ángulos de incidencia. Las curvas que presentan estos coeficientes son similares a las curvas de los coeficientes T_{ps} y R_{ps} . Sin embargo el comportamiento T_{sp} y R_{sp} con respecto a T_{ss} y R_{ss} es un poco diferente. Al comparar los coeficientes T_{sp} y T_{ss} se puede observar una reducción en la amplitud de ambos coeficientes cuando el ángulo de incidencia se reduce. Luego, en este caso el porcentaje energía transmitido en forma de ondas *sp* disminuye conforme el ángulo de incidencia se reduce, mientras que el porcentaje de

energía transmitido en forma de *ondas ss* se incrementa. Cuando la amplitud de R_{sp} disminuye con la reducción del ángulo de incidencia entonces la amplitud de R_{ss} también decrece. Esto quiere decir que el porcentaje energía reflejado en forma de ondas *sp* disminuye cuando el porcentaje de energía reflejado en forma *ondas ss* se reduce.

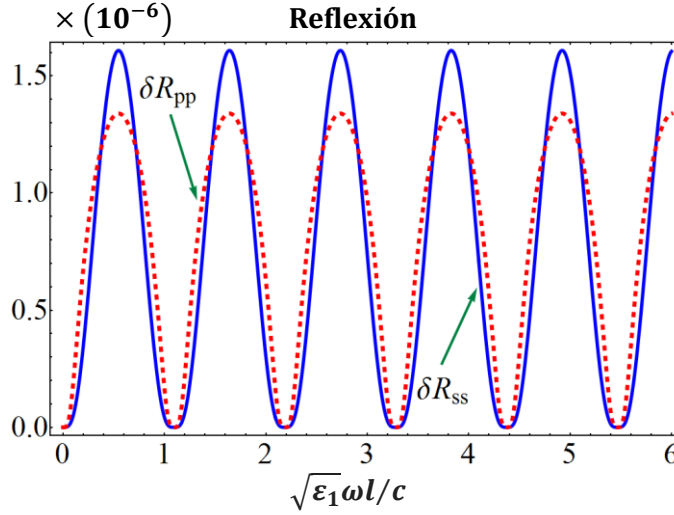


Figura 4. 7: Correcciones en el coeficiente de transmisión y reflexión para una película con $\delta_{12} = \alpha$ con respecto a una película con $\delta_{12} = 0$. El ángulo de incidencia es $\varphi_1 = \pi/3$. La película con $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ esta sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. Línea discontinua roja: cambio en el coeficiente de reflexión de una onda TM para una onda TM incidente, $|R_{pp} - R_p|$. Línea continua azul: cambio en el coeficiente de reflexión de una onda TE para una onda TE incidente, $|R_{ss} - R_s|$.

En las figura 4.7 y 4.8 se consideran las correcciones que induce el término δ_{12} en los coeficientes de transmisión y reflexión en una película compuesta por un TI con respecto a una película convencional. Las correcciones en los coeficientes de transmisión y reflexión están dadas por:

$$\delta T_{pp} = |T_{pp} - T_p| = z_{(s)}^{(21)} \left| \left| M_{32}^{(slab)} r_{ps}^{(slab)} - M_{34}^{(slab)} r_{pp}^{(slab)} - M_{34}^{(slab)} \right|^2 - \left| r_p^{(slab)} \right|^2 \right|, \quad (4.49)$$

$$\delta T_{ss} = |T_{ss} - T_s| = z_{(s)}^{(21)} \left| \left| M_{11}^{(slab)} + M_{12}^{(slab)} r_{ss}^{(slab)} - M_{14}^{(slab)} r_{sp}^{(slab)} \right|^2 - \left| r_s^{(slab)} \right|^2 \right|, \quad (4.50)$$

$$\delta R_{ss} = |R_{ss} - R_s| = \left| \left| r_{ss}^{(slab)} \right|^2 - \left| r_s^{(slab)} \right|^2 \right|, \quad (4.51)$$

$$\delta R_{pp} = |R_{pp} - R_p| = \left| \left| r_{pp}^{(slab)} \right|^2 - \left| r_p^{(slab)} \right|^2 \right|, \quad (4.52)$$

Los términos $r_s^{(slab)}$, $r_p^{(slab)}$, $t_s^{(slab)}$ y $t_p^{(slab)}$ son respectivamente, las amplitudes de reflexión y transmisión en una película con $\delta^{(12)} = 0$. Los coeficientes R_p , R_s , T_p y T_s son los coeficientes de reflexión y transmisión para ondas con modos TE y TM respectivamente, en ausencia del aislante topológico [78].

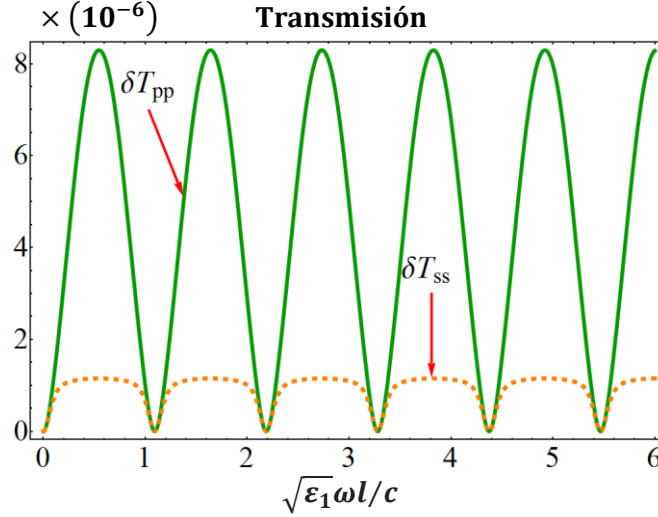


Figura 4. 8: Correcciones en el coeficiente de transmisión y reflexión para una película con $\delta_{12} = \alpha$ con respecto a una película con $\delta_{12} = 0$. El ángulo de incidencia es $\varphi_1 = \pi/3$. La película con $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ esta sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. Línea discontinua naranja: cambio en el coeficiente de transmisión para una onda TE para una onda TE incidente, $|T_{ss} - T_s|$. Línea continua verde: cambio en el coeficiente de transmisión para una onda TM para una onda TM incidente, $|T_{pp} - T_p|$.

En la figura 4.9 se presenta la dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas *pp* y *ss*, respecto al ángulo de incidencia. Además, se muestran los cambios que sufren las amplitudes de los coeficientes cuando se cambian las frecuencias de la onda incidente. Los valores de las frecuencias se toman con respecto a las frecuencias resonantes $\omega_{mr} = m \times \omega_r$ (donde ω_r es la frecuencia para la cual, el coeficiente de transmisión alcanza su máximo y m es un numero entero). En este caso, haremos uso de la frecuencia normalizada, $\omega_r \approx 1,095$, la cual corresponde al segundo máximo de los coeficientes T_{ss} y T_{pp} en la figura 4.3. Cuando $m = 1$ y para un ángulo de incidencia por debajo de $\varphi_1 = \pi/2$, los coeficientes de transmisión en las figuras 4.9(a) y 4.9(b) crecen lentamente hasta alcanzar valores próximos a 1. Cuando el ángulo alcanza la incidencia rasante a la superficie, los coeficientes de transmisión caen rápidamente a valores próximos a cero. Es decir, para ángulos por debajo de $\pi/2$ ($\sim 0,46\pi$ para T_{pp} y $\sim 0,36\pi$ para T_{ss}) se transmite casi toda la energía en forma de ondas *pp* u ondas *ss* según el tipo de onda incidente. Conforme incrementamos la frecuencia ω_{mr} , aparecen los máximos de resonancia. En T_{pp} , el crecimiento de la frecuencia se manifiesta en un comportamiento oscilatorio en la amplitud del coeficiente con un decrecimiento de su periodo

de oscilación. Conforme el ángulo crece, la amplitud se reduce hasta que el coeficiente T_{pp} deja de oscilar y comienza a decrecer rápidamente (en $\sim 0,4\pi$ para $m = 20$ y $\sim 0,42\pi$ para $m = 100$).

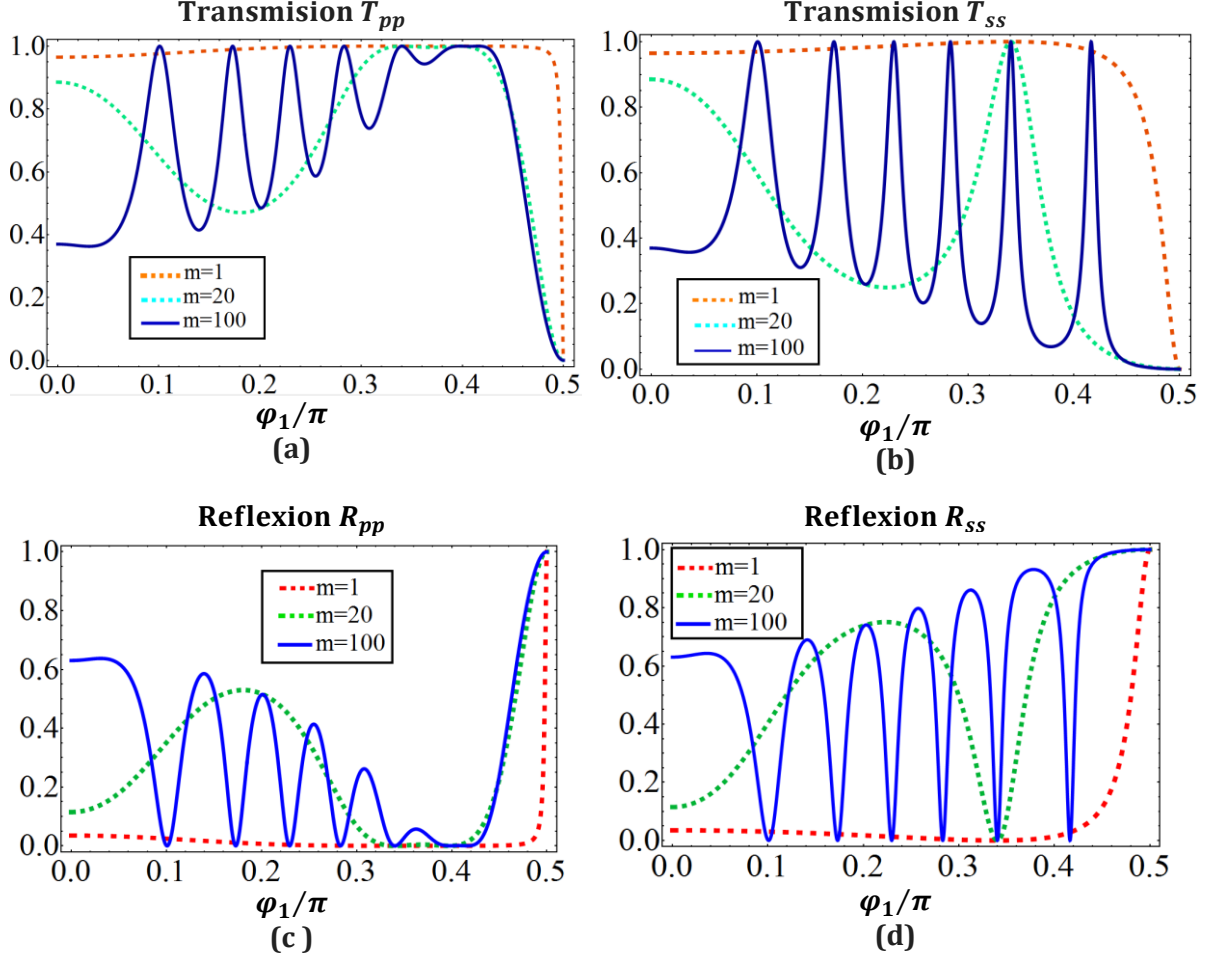


Figura 4. 9: Coeficientes de transmisión para una onda tipo TE(TM) a partir de ondas TE(TM) incidentes con una frecuencia de incidencia resonante en función del ángulo de incidencia φ_1 . Las permitividades son $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$ para (a) y (b), $\epsilon_r^{(2)} = 0.8$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$ para (c) y (d), las permeabilidades de la película y del medio en que se encuentra sumergida están dados por: $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. La frecuencia de incidencia se eligió como $m \times \omega_r$, donde $\omega_r \approx 1,095$ es la frecuencia de resonancia y m un número entero positivo.

De igual forma, la amplitud de T_{ss} comienza a oscilar con el aumento de ω_{mr} . Sin embargo, esta oscilación viene acompañada con un incremento de la amplitud. Lo anterior demuestra que para una onda incidente con una frecuencia determinada, el porcentaje de energía transmitida en forma de ondas pp u ondas ss también oscila conforme cambiamos el ángulo de incidencia. En las figuras 4.9(c) y 4.9(d) los coeficientes de reflexión R_{pp} y R_{ss}

respectivamente, se comportan de forma inversa a los coeficientes de transmisión correspondientes.

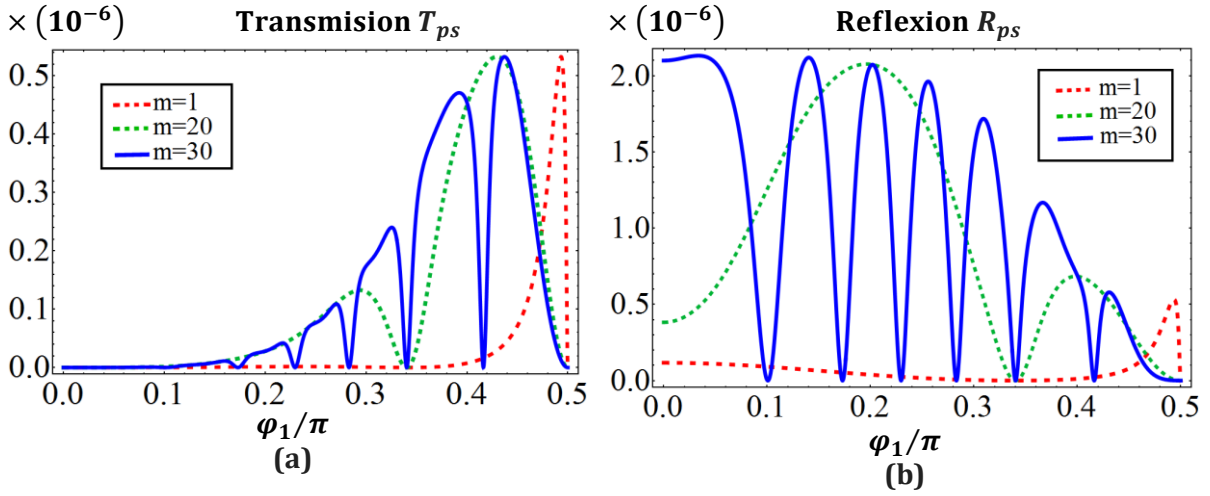


Figura 4. 10: (a) Coeficientes de transmisión de ondas tipo TE a partir de ondas TM incidentes con una frecuencia de incidencia resonante en función del ángulo de incidencia. **(b)** Coeficientes de reflexión de ondas tipo TE a partir de ondas TM incidentes con una frecuencia de incidencia resonante en función del ángulo de incidencia. Las permitividades eléctricas son $\epsilon_r^{(2)} = 9$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$. Las permeabilidades magnéticas de la película y del medio en que se encuentra sumergida la película son $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. La frecuencia de incidencia se eligió como $m \times \omega_r$, donde $\omega_r \approx 1,095$ es la frecuencia de resonancia y m un número entero positivo.

En la figura 4.10 se muestra la dependencia de los coeficientes mixtos ps y sp con el ángulo de incidencia. De nuevo, la frecuencia de la onda incidente está dada por $\omega_{mr} = m \times \omega_r$. Para $m = 1$, el coeficiente T_{ps} demuestra que la transmisión de ondas ps es casi nula para ángulos de incidencia menores que $\sim 0,4\pi$, a partir de este ángulo la transmisión de ondas ps crece rápidamente hasta alcanzar un valor máximo de $\sim 0,49 \times 10^{-6}$ en $\sim 0,48\pi$ y luego decrece rápidamente. Al comparar los coeficientes T_{pp} y T_{ps} (en las figuras 4.9(a) y 4.10(a) respectivamente) con $m = 1$, vemos que la transmisión de ondas ps es casi cero cuando la transmisión de ondas pp es máxima y cuando T_{pp} decrece la transmisión de ondas ps se acerca a su máximo. Con el incremento de m , la amplitud de T_{ps} comienza a oscilar. Conforme el ángulo crece, el máximo de resonancia crece también. Es decir, el porcentaje de ondas ps que se transmite, se incrementa con la frecuencia y el ángulo de incidencia.

Por otra parte, cuando $m = 1$, el coeficiente R_{ps} en la figura 4.10(b) presenta solamente un pico, cuyo valor es $\sim 0,52 \times 10^{-6}$ para un ángulo de $\sim 0,49\pi$. Cuando m crece, R_{ps} comienza a oscilar y entre mayor es ω_{mr} el número de picos se incrementa (para ángulos de incidencia entre 0 y $\pi/2$).

4.5 Incidencia normal

En las figuras 4.9 y 4.10 podemos observar que la transmisión y reflexión de *ondas pp, ss, ps* y *sp* es diferente de cero para un ángulo de incidencia normal. Como caso especial consideremos una onda electromagnética que incide perpendicularmente sobre la superficie de la película, es decir, cuando $\varphi_1 = 0$. Luego, los elementos de matriz (4.25)-(4.36) adoptan la siguiente forma:

$$M_{11}^{(slab)} = \cos(lk_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}} \left[1 + \varepsilon_r^{(2)} + (\delta^{(12)})^2 \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.53)$$

$$M_{12}^{(slab)} = -\frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}} \left[1 - \varepsilon_r^{(2)} - (\delta^{(12)})^2 \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.54)$$

$$M_{21}^{(slab)} = \bar{M}_{12}^{(slab)}, \quad M_{22}^{(slab)} = \bar{M}_{11}^{(slab)}, \quad (4.55)$$

$$M_{13}^{(slab)} = 0, \quad (4.56)$$

$$M_{14}^{(slab)} = i \frac{\delta^{(12)}}{\sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}} \sin(lk_{2z}), \quad (4.57)$$

$$M_{24}^{(slab)} = \bar{M}_{13}^{(slab)}, \quad M_{23}^{(slab)} = \bar{M}_{14}^{(slab)}, \quad (4.58)$$

$$M_{31}^{(slab)} = 0, \quad (4.59)$$

$$M_{32}^{(slab)} = -i \frac{\delta^{(12)}}{\sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}} \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.60)$$

$$M_{41}^{(slab)} = \bar{M}_{32}^{(slab)}; \quad M_{42}^{(slab)} = \bar{M}_{31}^{(slab)}, \quad (4.61)$$

$$M_{33}^{(slab)} = \cos(lk_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}} \left[1 + \varepsilon_r^{(2)} + (\delta^{(12)})^2 \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.62)$$

$$M_{34}^{(slab)} = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r^{(2)}}} \left[1 - \varepsilon_r^{(2)} - (\delta^{(12)})^2 \right] \sin(lk_z^{(2)}), \quad (4.63)$$

$$M_{43}^{(slab)} = \bar{M}_{34}^{(slab)}; \quad M_{44}^{(slab)} = \bar{M}_{33}^{(slab)}, \quad (4.64)$$

Con las expresiones (4.53)-(4.64) se obtienen las nuevas expresiones reducidas para las amplitudes de reflexión cuando la onda incide perpendicular a la superficie:

- Las amplitudes de reflexión cuando incide una onda en modo TM sobre la película son:

$$r_{pp}^{(slab)} = \frac{1 - 2i \frac{\epsilon_r^{(2)}}{[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2]} \cot(lk_z^{(2)})}{\frac{4\epsilon_r^{(2)}}{[\epsilon_r^{(2)} + (\delta^{(12)})^2]^2 - 1} \cot^2(lk_z^{(2)}) + \frac{[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2]}{[(\epsilon_r^{(2)} - 1) + (\delta^{(12)})^2]}}, \quad (4.65)$$

$$r_{ps}^{(slab)} = \frac{[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2] - 2i\sqrt{\epsilon_r^{(2)}} \cot(lk_{zz}^{(2)})}{2\epsilon_r^{(2)} \cot^2(lk_z^{(2)}) + \frac{1}{2}[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2]^2} \delta^{(12)}, \quad (4.66)$$

- Las amplitudes de reflexión cuando incide una onda en modo TE sobre la película son :

$$r_{ss}^{(slab)} = - \frac{1 - \frac{2i\epsilon_r^{(2)}}{[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2]} \cot(lk_z^{(2)})}{\frac{4\epsilon_r^{(2)}}{[\epsilon_r^{(2)} + (\delta^{(12)})^2]^2 - 1} \cot^2(lk_z^{(2)}) + \frac{[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2]}{[(\epsilon_r^{(2)} - 1) - (\delta^{(12)})^2]}}, \quad (4.67)$$

$$r_{sp}^{(slab)} = - \frac{[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2] - 2i\sqrt{\epsilon_r^{(2)}} \cot(lk_z^{(2)})}{2\epsilon_r^{(2)} \cot^2(lk_z^{(2)}) + \frac{1}{2}[(\epsilon_r^{(2)} + 1) + (\delta^{(12)})^2]^2} \delta^{(12)}, \quad (4.68)$$

Con ayuda de los elementos (4.53)-(4.64) y las amplitudes de reflexión (4.65)-(4.68) es posible obtener las amplitudes de transmisión al reemplazar los términos en las ecuaciones (4.39), (4.40), (4.45) y (4.46).

En la figura 4.11 se muestran los coeficientes de transmisión para ondas *pp* y *ss* en función de la frecuencia normalizada. En este caso se consideran cuatro permitividades dieléctricas relativas $\epsilon_r^{(2)} = \{1, 3, 6\}$. Cuando $\epsilon_r^{(2)} = 1$, se observa que los coeficientes de transmisión son constantes respecto a la frecuencia y su valor siempre es próximo a 1 ($T_{pp} \sim T_{ss} \sim 1$). Esto se debe a que el medio que rodea la película tiene una permitividad eléctrica $\epsilon_r^{(1)} = 1$ (además $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$). Luego, las interfaces que separan la película del medio circundante desaparecen y obtenemos la propagación de una onda electromagnética a través de un medio homogéneo e isotrópico.

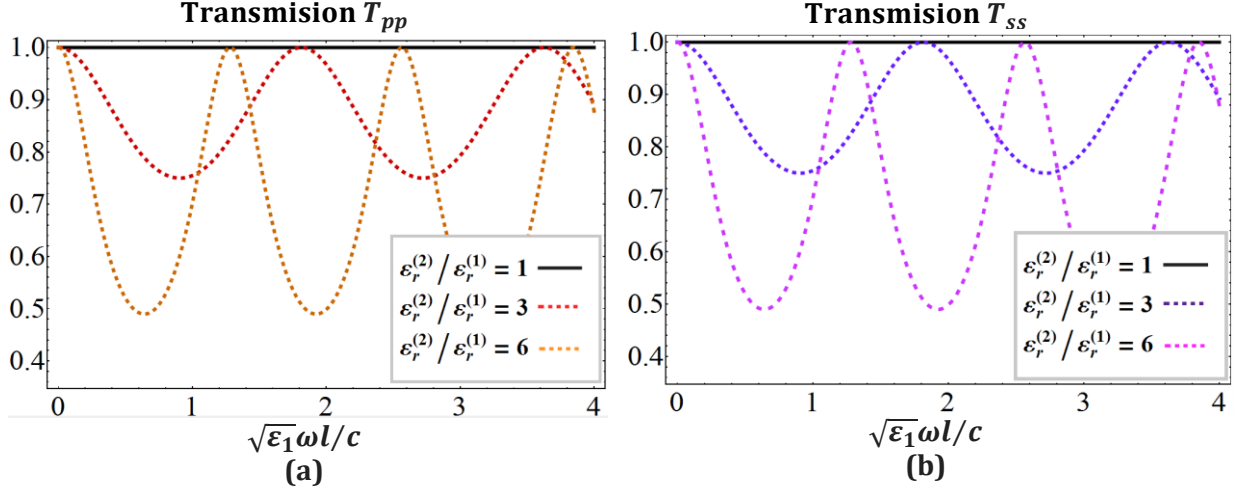


Figura 4. 11: Coeficientes de transmisión y reflexión para ondas tipo TE y tipo TM para una película con cuatro permitividades diferentes $\epsilon_r^{(2)} = \{1, 3, 6\}$. Los otros parámetros del sistema son $\mu_r^{(2)} = \mu_r^{(1)}$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$, y $\delta^{(12)} = \alpha$. **(a)** Coeficientes de trasmisión de ondas TM para ondas TM incidentes. **(b)** Coeficientes de trasmisión de ondas TE para ondas TE incidentes. Las ondas TE son las mismas ondas con polarización s . Las ondas TM son las mismas ondas con polarización p . El ángulo de incidencia es $\varphi_1 = 0$.

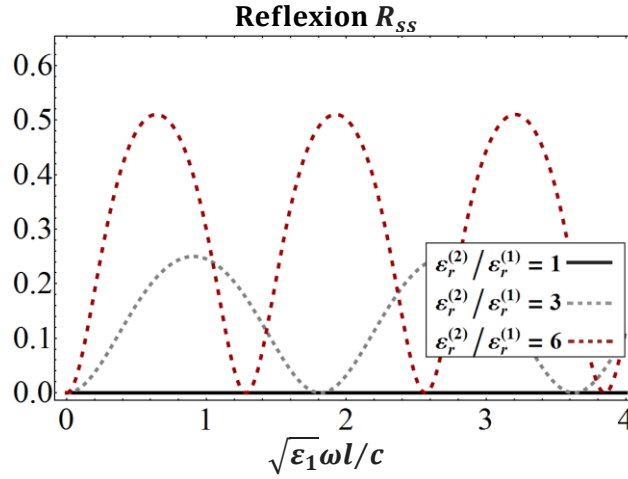


Figura 4. 12: Coeficientes de reflexión para **ondas ss** en una película con tres permitividades diferentes $\epsilon_r^{(2)} = \{1, 3, 6\}$. Los otros parámetros del sistema son $\mu_r^{(2)} = \mu_r^{(1)}$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$, y $\delta^{(12)} = \alpha$. Las ondas TE son las mismas ondas con polarización s y el ángulo de incidencia es $\varphi_1 = 0$

Conforme la permitividad $\epsilon_r^{(2)}$ crece respecto a $\epsilon_r^{(1)}$, los coeficientes de transmisión comienzan a mostrar las resonancias de Fabry-Perot. Con el incremento de la permitividad, la amplitud de los coeficientes T_{pp} y T_{ss} también crece. Dicho de otra manera, la porción de energía transmitida en forma de ondas pp y ss disminuye para determinado valor de frecuencia (cuando se comparan las curvas con diferentes valores de $\epsilon_r^{(2)}$). Note, cuando el ángulo de incidencia es cero, no se presenta una distinción clara entre la transmisión de ondas pp y ss , ya que las curvas T_{pp} y T_{ss} se comportan de la misma manera.

En la figura 4.12, se presenta el comportamiento del coeficiente de reflexión R_{ss} respecto a la frecuencia de la onda incidente. Cuando $\epsilon_r^{(2)} = 1$ podemos observar que la reflexión es nula. Sin embargo, conforme la permitividad $\epsilon_r^{(2)}$ crece respecto a $\epsilon_r^{(1)}$, la amplitud del coeficiente y comienza a oscilar.

Por otra parte, en las figuras 4.11(a)-(b) se observa que los coeficientes de transmisión T_{pp} y T_{ss} son constantes cuando $\epsilon_r^{(2)} = \epsilon_r^{(1)} = 1$. Esto se debe a que la interfaz que aparece debido a la diferencia entre permitividades eléctricas y las permeabilidades magnéticas desaparece. Sin embargo, los parámetros topológicos de ambos medios son diferentes. Es decir, que aún existe una interfaz debida a la diferencia de los parámetros topológicos de los medios involucrados ($\delta_{12} = \alpha$), lo que da lugar a la transmisión y reflexión de pequeñas cantidades de energía en forma de ondas ps y sp .

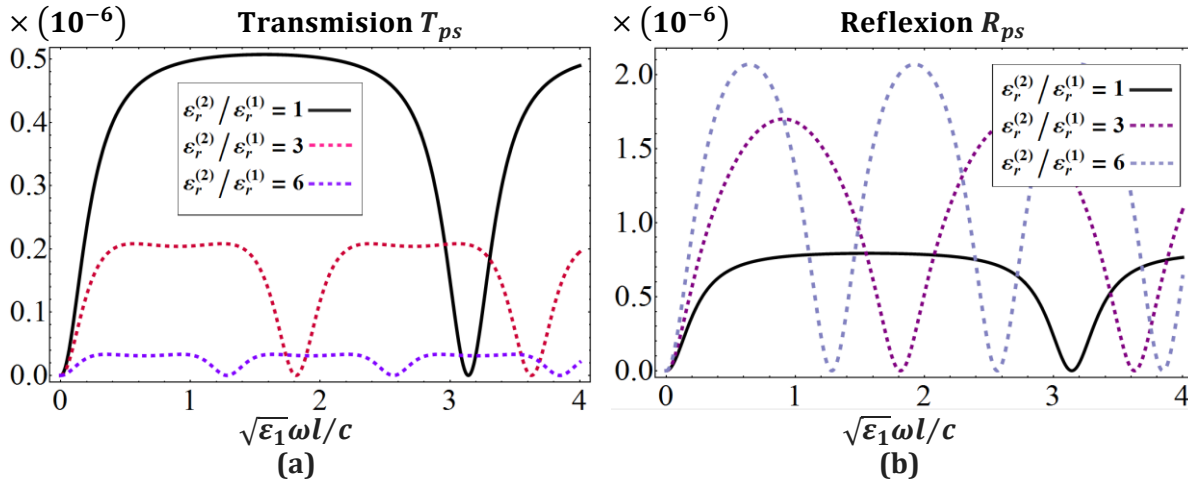


Figura 4. 13: Coeficientes de transmisión y reflexión para ondas tipo TE y tipo TM para una película con cuatro permitividades diferentes $\epsilon_r^{(2)} = \{1, 3, 6, 9\}$. Los otros parámetros del sistema son $\mu_r^{(2)} = \mu_r^{(1)}$, $\epsilon_r^{(1)} = 1$, y $\delta^{(12)} = \alpha$. **(a)** Coeficientes de trasmisión de ondas TE para ondas TM incidentes. **(b)** Coeficientes de reflexión de ondas TE para ondas TM incidentes. Las ondas TE son las mismas ondas con polarización s . Las ondas TM son las mismas ondas con polarización p . El ángulo de incidencia es $\varphi_1 = 0$.

En la figura 4.13, se muestran los coeficientes de transmisión y reflexión mixtos ps . En este caso, el crecimiento de $\varepsilon_r^{(2)}$ produce una disminución de la amplitud y del periodo en el coeficiente T_{ps} . Además, se muestra que si $\varphi_1 = 0$, la transmisión de ondas ps no es constante como en el caso de T_{pp} sino que oscila. Por otro lado el coeficiente R_{ps} incrementa su amplitud cuando la permitividad $\varepsilon_r^{(2)}$ crece.

4.6 Resumen

Se describieron los campos eléctricos y magnéticos en un sistema compuesto por tres medios isotrópicos, semi-infinitos, polarizables, magnetizables y con una topología no trivial. Posteriormente se estudió la transición que sufren los campos al pasar de un medio al otro con ayuda de las relaciones constitutivas para los aislantes topológicos. Esto nos permitió obtener la matriz de transferencia que describe la propagación de la onda a través de todo el sistema. Se estudió el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión con respecto a la frecuencia de la onda incidente y con respecto al ángulo de incidencia. Se observó que la presencia del término topológico ocasiona una redistribución de la energía de las ondas cuando interactúan con la interfaz que separa cada medio. Esto nos permite transmitir/reflejar energía en forma de ondas con polarización p a partir de ondas incidentes con polarización s y viceversa. En el caso particular de la incidencia normal, desaparece la distinción entre las ondas pp y ss .

5. TUNELAMIENTO EN UNA PELÍCULA Y EN SISTEMAS DE DOBLE CAPA CON AISLANTES TOPOLÓGICOS

Hasta el momento se ha analizado la propagación de una onda electromagnética (TM y TE) cuando pasa de un medio con índice refracción menor a un medio con índice de refracción mayor, $n^{(2)}/n^{(1)} > 1$. Luego, de acuerdo con la ley de Snell [78] obtenemos,

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{n^{(2)}}{n^{(1)}} \Rightarrow \varphi_1 > \varphi_2. \quad (5.1)$$

Sin embargo, si la onda incidente se propaga en el medio con mayor índice de refracción, ($n^{(1)} > n^{(2)}$), entonces existe un ángulo de incidencia crítico, φ_{crit} , para el cual $\varphi_2 = \pi/2$ [78]. De la ley de Snell tenemos que, si $n^{(1)} > n^{(2)}$, entonces $\varphi_2 > \varphi_1$. Esto quiere decir que, si el ángulo φ_1 aumenta, el ángulo φ_2 crece más rápidamente. Cuando el ángulo de incidencia supera el valor crítico, ($\varphi_1 > \varphi_{crit}$), entonces la transmisión de la onda a través del medio con índice de refracción $n^{(2)}$ es nula. Con las consideraciones anteriores y con ayuda de la expresión (5.1) tenemos que,

$$\sin\varphi_1 > \sin\varphi_{crit} = n^{(2)}/n^{(1)}. \quad (5.2)$$

Se esperarí que cualquier onda incidente con ángulo $\varphi_1 > \varphi_{crit}$ sea reflejada totalmente dentro del medio con índice $n^{(1)}$. Sin embargo, en las secciones posteriores se demostrará que es posible transmitir energía en forma de ondas electromagnéticas a través de una película por efecto de tunelamiento cuando $n^{(1)} > n^{(2)}$ y $\varphi_1 > \varphi_{crit}$ [78].

5.1 Película con índice de refracción menor al del medio circundante

Consideremos dos medios isotrópicos semi-infinitos, polarizables, magnetizables y con una topología no trivial $\theta^{(i)}$, (donde $(i) = 1, 2$ corresponde al respectivo medio) dispuestos como se muestra en la figura 5.1. La configuración del sistema es tal, que se tiene una película delgada de espesor l con dos interfaces en $z = -l/2$ y en $z = l/2$. Las regiones $z < -l/2$ y $z > l/2$ están ocupadas por el mismo material con una permitividad dieléctrica $\varepsilon^{(1)}$, una permeabilidad magnética $\mu^{(1)}$ y un parámetro topológico $\theta^{(1)}$. En la región $-l/2 \leq z \leq l/2$, se tiene un medio con permitividad dieléctrica $\varepsilon^{(2)}$, una permeabilidad magnética $\mu^{(2)}$ y un parámetro topológico $\theta^{(2)}$. Supongamos ahora que una onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}^{(1)+} = (k_x, k_z^{(1)+})$ se aproxima desde la izquierda de la interfaz en $z = -l/2$ e incide sobre ésta; parte de esta onda es reflejada con un vector de onda $\vec{k}^{(1)-} = (k_x, k_z^{(1)-})$ y otra parte es transmitida al interior de la película con vector de onda $\vec{k}^{(2)+} = (k_x, k_z^{(2)+})$. La onda

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

con $\vec{k}^{(2)+}$ se propaga en el medio homogéneo e incide en la interfaz en $z = l/2$. De nuevo, parte de la onda en el medio 2 es reflejada dentro de la película con vector de onda $\vec{k}^{(2)-} = (k_x, k_z^{(2)-})$ y otra parte es transmitida al medio 1 con vector de onda $\vec{k}^{(1)+} = (k_x, k_z^{(1)+})$. Las componentes $E_y^{(i)}$ y $H_y^{(i)}$, (con $(i) = 1, 2, 3$) son tangenciales a las superficies de división y los signos (+)/(-) indican el sentido en que se propaga la onda, (+) hacia la derecha y (-) hacia a la izquierda.

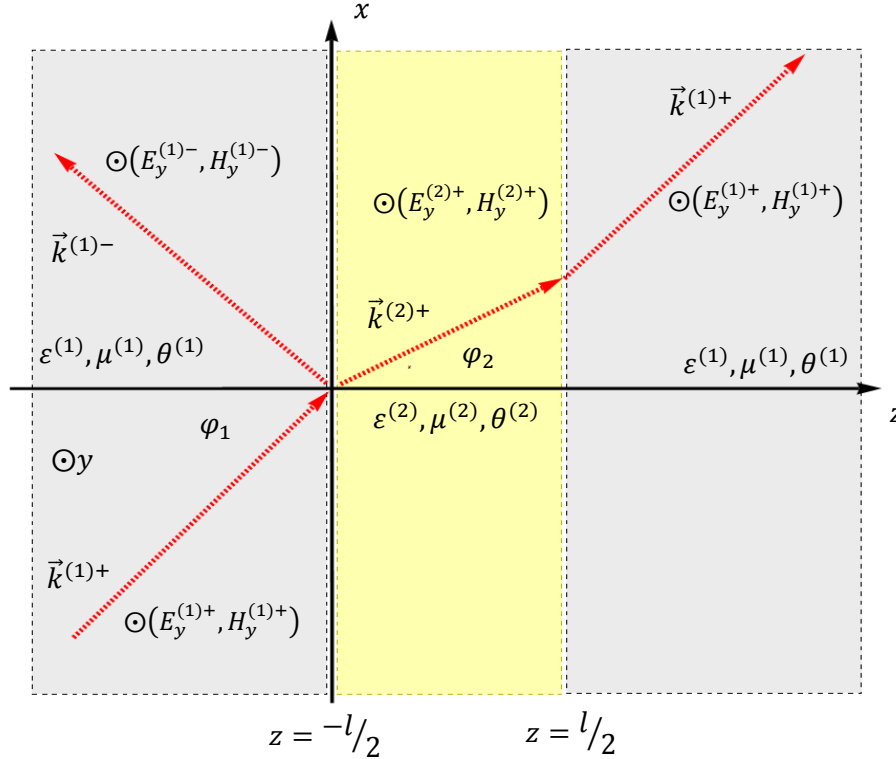


Figura 5. 1: descripción esquemática de la transmisión de una onda electromagnética a través de una película de espesor l . El índice de refracción $n^{(2)}$ de la película, es menor al índice de refracción $n^{(1)}$ del medio que la rodea.

A continuación, vamos a estudiar la propagación de las ondas electromagnéticas a través del sistema que se muestra en la figura 5.1. Para esto, hacemos uso de las amplitudes de transmisión y reflexión obtenidas en la sección 4.4: las ecuaciones (4.39)-(4.42) para ondas incidentes con polarización TE y las ecuaciones (4.45)-(4.48) para ondas incidentes con polarización TM. Los elementos de matriz utilizados en este caso están dados por las expresiones (4.25)-(4.36) que se obtuvieron en la sección 4.3.

En la figura 5.2 se muestran los cambios que sufren los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas ss, cuando varía la frecuencia de la onda incidente. En este caso, también se ha considerado el comportamiento que tienen los coeficientes respecto a la razón de las

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

permitividades dieléctricas de los medios involucrados, en particular; $\varepsilon^{(2)}/\varepsilon^{(1)} = \{0,1, 0,3, 0,6\}$ y para ángulos de incidencia tal que $\varphi_1 < \varphi_{crit}$. Adicionalmente, la diferencia de los parámetros topológicos de los medios está dada por $\delta^{(12)} = \alpha$. En la figura 5.2(a) se puede observar la presencia de las oscilaciones de Fabry-Perot en los picos máximos del coeficiente de transmisión T_{ss} . El coeficiente de reflexión puro R_{ss} tiene un comportamiento inverso al mostrado por el coeficiente de transmisión, tal y como aparece en la figura 5.2(b).

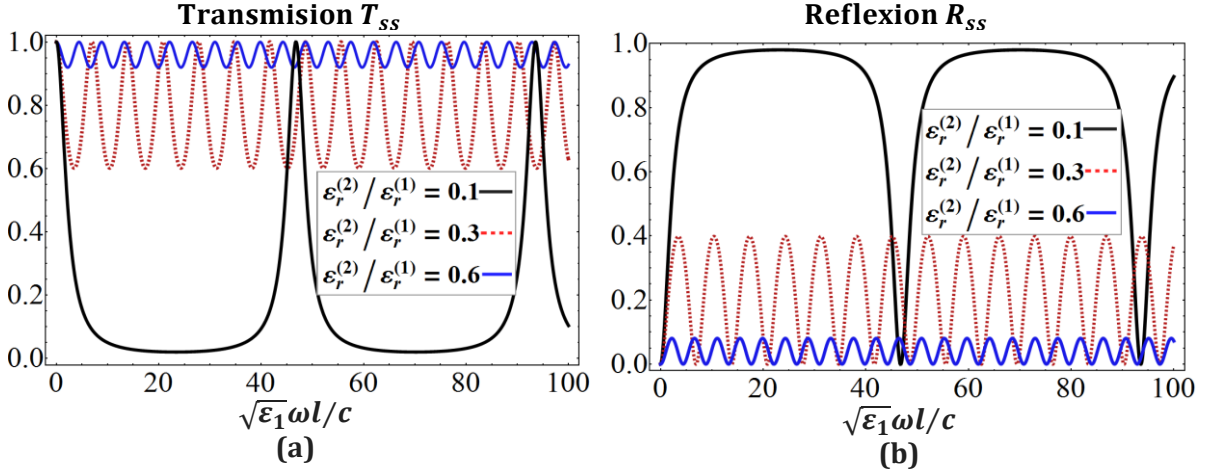


Figura 5. 2: Comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión puros para *ondas ss*, respecto a la frecuencia y con un ángulo de incidencia $\varphi_1 = \pi/10$. En **(a)** se muestran los coeficientes de transmisión de una onda TE para una onda TE incidente. En **(b)** se presentan los coeficientes de reflexión de una onda TE para una onda TE incidente. Las permeabilidades magnéticas del sistema son: $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$. Las permitividades eléctricas están dadas por la razón: $\varepsilon_r^{(2)}/\varepsilon_r^{(1)} = \{0,1, 0,3, 0,6\}$ y los parámetros topológicos del sistema son tales que $\delta^{(12)} = \alpha$.

Por otro lado, al incrementar la permitividad dieléctrica de la película, $\varepsilon^{(2)}$, respecto a la permitividad $\varepsilon^{(1)}$ del medio que la rodea, el coeficiente transmisión T_{ss} reduce su amplitud y período, pero restringe al coeficiente T_{ss} a oscilar entre valores más cercanos a 1; así, al incrementar la permitividad en la película, es posible transmitir mayor cantidad de energía en forma de *ondas ss* (ondas s transmitidas a partir de ondas s incidentes) a través de ella. Cabe resaltar que este fenómeno se presenta solo para ciertos valores de $\varepsilon^{(2)}/\varepsilon^{(1)}$. Como se observó en la sección 4.3, los coeficientes de transmisión y reflexión dependen de los términos de la matriz de transferencia, los cuales contienen funciones armónicas $\sin(lk_z^{(2)})$ y $\cos(lk_z^{(2)})$. Puesto que el vector de onda $k_z^{(2)}$ depende implícitamente de $\varepsilon^{(2)}/\varepsilon^{(1)}$, se espera que la amplitud de los coeficientes oscile. Bajo las mismas consideraciones y parámetros utilizados en la figura 5.2, es posible obtener los coeficientes T_{pp} y R_{pp} , los cuales se comportan de forma similar a los coeficientes T_{ss} y R_{ss} .

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

En la figura 5.3 se muestran los coeficientes de transmisión y reflexión, T_{sp} y R_{sp} respectivamente (transmisión y reflexión de ondas p a partir de ondas s incidentes) como función de la frecuencia. Adicionalmente, se presentan los cambios que sufren dichos coeficientes al variar la relación entre las permitividades dieléctricas relativas (dadas por el cociente $\epsilon_r^{(2)}/\epsilon_r^{(1)}$) de los medios que componen el sistema. En la figura 5.3(a), se observa que el coeficiente de transmisión T_{sp} también experimenta las oscilaciones de Fabry-Perot. El incremento de $\epsilon_r^{(2)}/\epsilon_r^{(1)}$ desde 0,1 a 0,6, ocasiona un aumento en la amplitud de T_{sp} . Es decir que, es posible transmitir mayor cantidad de energía transmitido en forma de ondas sp (ondas p transmitidas a partir de ondas s incidentes).

En la figura 5.3(b), la amplitud de R_{sp} se reduce cuando $\epsilon_r^{(2)}/\epsilon_r^{(1)}$ crece desde 0,1 a 0,6; este cambio restringe a R_{sp} a oscilar entre valores cada vez más cercanos a cero. Esto implica, una reducción del porcentaje de energía reflejado en forma de onda sp (ondas p reflejadas a partir de ondas s incidentes). Por otro lado, los coeficientes T_{ps} y R_{ps} se comportan exactamente como los coeficientes T_{sp} y R_{sp} respectivamente.

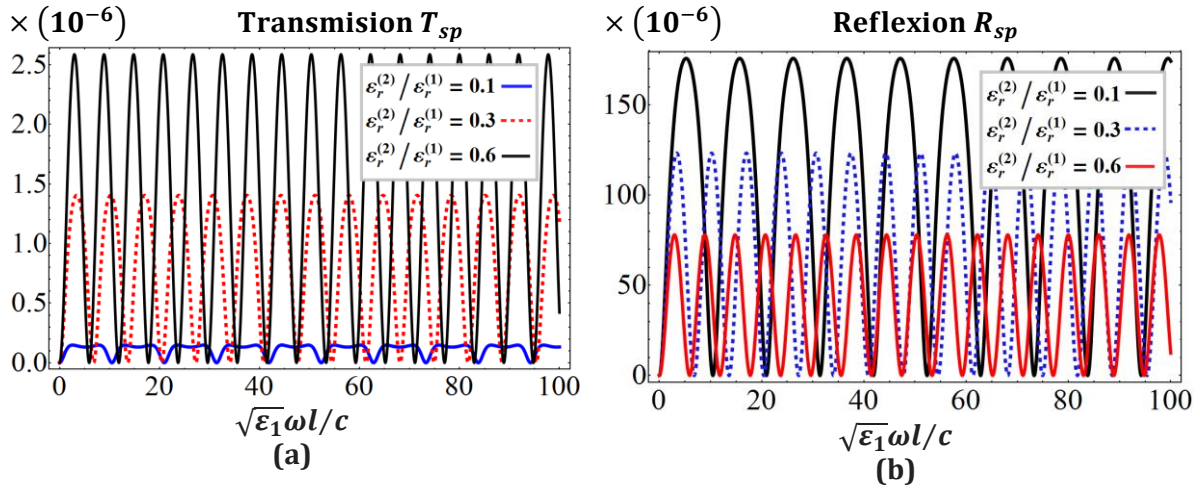


Figura 5. 3: Coeficientes de transmisión y reflexión mixtos sp como función de la frecuencia. El ángulo de incidencia es $\varphi_1 = \pi/10$. Las permitividades dieléctricas del sistema son tales que $\epsilon_r^{(2)}/\epsilon_r^{(1)} = \{0, 1, 0, 3, 0, 6\}$. Por su parte las permeabilidades magnéticas están dadas por $\mu_r^{(1)} = \mu_r^{(2)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. En (a) se muestran los coeficientes de trasmisión y en (b) se presentan los coeficientes de reflexión.

En la figura 5.4 se muestra el comportamiento que tienen los coeficientes de transmisión y reflexión pp y ss respecto al ángulo de incidencia para $n^{(1)} > n^{(2)}$. Los valores de las frecuencias se toman con respecto a las frecuencias resonantes $\omega_{mr} = m \times \omega_r$ (donde ω_r es la frecuencia para la cual, el coeficiente de transmisión alcanza su máximo y m es un número entero que indica el pico de resonancia).

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

De nuevo, haremos uso de la frecuencia normalizada, $\omega_r \approx 1,095$, la cual corresponde al segundo máximo de los coeficientes T_{pp} y T_{ss} en la figura 4.3 de la sección 4.4.

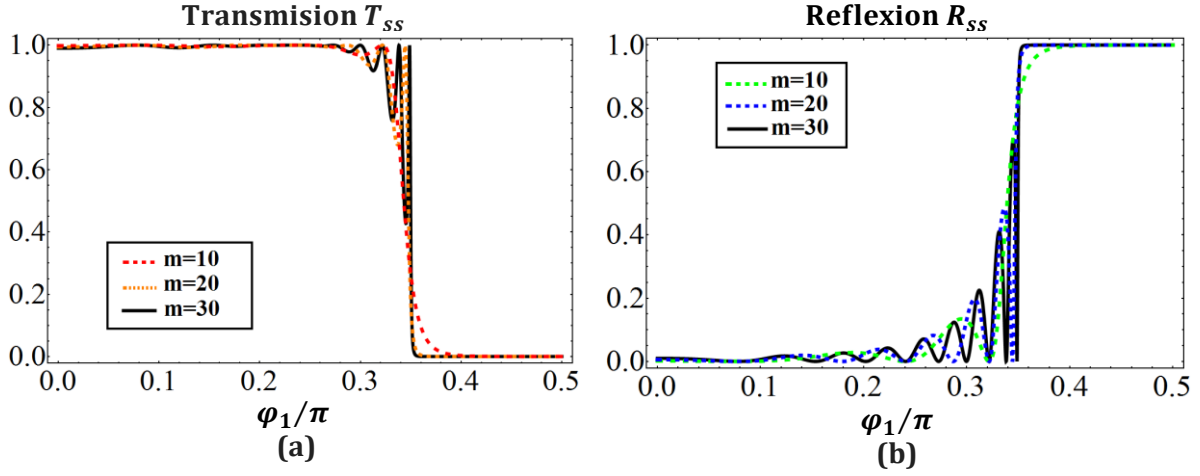


Figura 5. 4: Dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión con el ángulo de incidencia para **ondas ss**. Las permitividades en el sistema son tales que $\epsilon^{(2)}/\epsilon^{(1)} = 0.8$. En **(a)** se presentan los coeficientes de transmisión **ondas ss**. En **(b)** se muestran los coeficientes de reflexión para ondas ss. Las permeabilidades de la película y del medio que la rodea son $\mu_r^{(2)} = \mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. La frecuencia de la onda incidente se eligió como $m \times \omega_r$, donde $\omega_r \approx 1,095$ es la frecuencia de resonancia y m un número entero positivo.

Conforme se incrementa el ángulo de incidencia, el coeficiente T_{ss} , (en las figuras 5.4(a)) comienza a oscilar. A partir de $\sim 0,28\pi$, los mínimos comienzan a descender, mientras que los picos máximos permanecen casi constantes, este comportamiento se conserva hasta que el ángulo alcanza su valor crítico en $\sim 0,35\pi$, ($\sin\phi_{crit} = n^{(2)}/n^{(1)}$). A partir de este punto las oscilaciones desaparecen y los coeficientes de transmisión comienzan a descender, hasta alcanzar valores próximos a cero. Cuanto mayor es la frecuencia de la onda incidente (es decir, entre mayor es el valor de m), las oscilaciones de Fabry-Perót se hacen más evidentes. Además, el decaimiento del coeficiente de transmisión se hace más rápido y repentino cuanto mayor es la frecuencia. La cantidad de energía transmitida en forma de **ondas ss** (figura 5.4(a)), oscila para ángulos de incidencia menores que el ángulo crítico, $\phi_1 < \phi_{crit}$. Para ángulos por encima de ϕ_{crit} , la transmisión decae a valores cercanos a cero; sin embargo, para frecuencias no muy grandes (m no muy grande) respecto a la frecuencia de resonancia, el decrecimiento es más lento. Como veremos más adelante, esta reducción lenta del coeficiente de transmisión, se relaciona con el tunelamiento de la onda a través de la película cuando $\phi_1 > \phi_{crit}$. Por su parte, los coeficientes de reflexión R_{ss} en las figuras 5.4(b) tienen un comportamiento inverso al descrito por T_{ss} .

En la figura 5.5 se muestra la dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión mixtos *sp* con el ángulo de incidencia. En la figura 5.5(a), el coeficiente T_{sp} oscila con amplitudes cercanas a cero para ángulos menores a $\sim 0,16\pi$. Para ángulos mayores a $\sim 0,16\pi$,

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

las oscilaciones de Fabry-Perót se hacen más evidentes. Obsérvese que el coeficiente T_{sp} se acerca a su máximo en la figura 5.5(a) cuando el coeficiente de transmisión T_{ss} comienza a descender en la figura 5.4(a). Cuando el ángulo de incidencia supera el ángulo crítico, el coeficiente T_{sp} decae. Sin embargo, cuando la frecuencia disminuye, el decaimiento de la transmisión de *ondas sp* se hace más lento y menos repentino. Luego, se espera que el coeficiente T_{sp} también presente tunelamiento para ángulos de incidencia $\varphi_1 > \varphi_{crit}$. En la figura 5.5(b), el coeficiente R_{sp} presenta un comportamiento inverso al de T_{sp} , pero solo para ciertos valores entre cero y el ángulo crítico. Cuando T_{sp} entra en tunelamiento, R_{sp} comienza a crecer. El comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión para *ondas ps*, es exactamente igual al presentado por los coeficientes *ondas sp*.

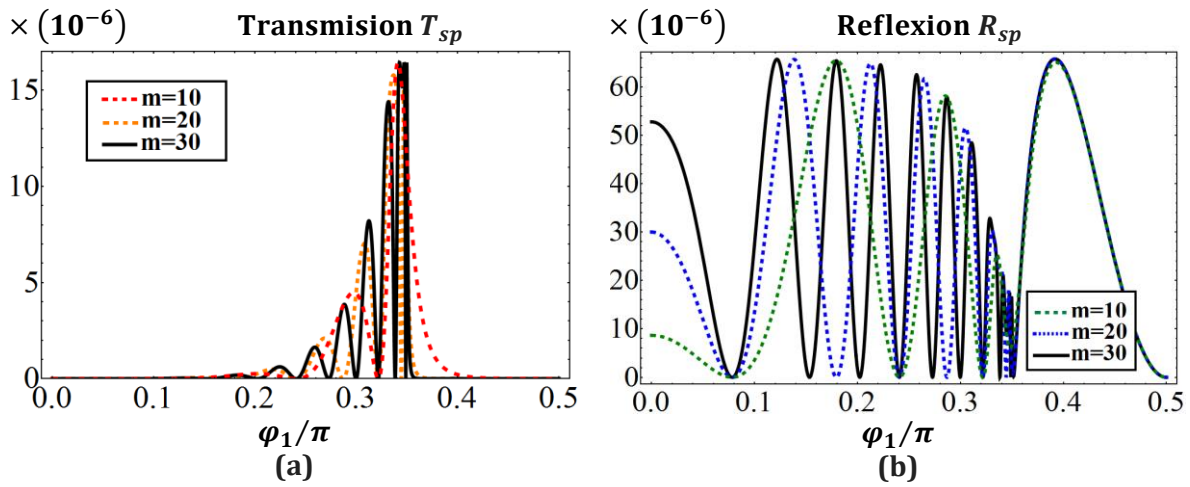


Figura 5. 5: Dependencia de los coeficientes de transmisión y reflexión con el ángulo de incidencia para *ondas sp*. Las permitividades en el sistema son tales que $\epsilon^{(2)}/\epsilon^{(1)} = 0.8$. En (a) se presentan los coeficientes de transmisión para *ondas sp*. En (b) se muestran los coeficientes de reflexión para ondas *sp*. Las permeabilidades de la película y del medio que la rodea son $\mu_r^{(2)} = \mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. La frecuencia de la onda incidente se eligió como $m \times \omega_r$, donde $\omega_r \approx 1,095$ es la frecuencia de resonancia y m un número entero positivo.

5.2 Tunelamiento a través de una película compuesta por un TI

En la sección 5.1 se demostró que para ángulos de incidencia por encima del ángulo crítico, la transmisión de ondas a través de una película, (cuyo índice de refracción es menor que el índice de refracción que el medio que la rodea) se reduce conforme se incrementa la frecuencia de la onda incidente (ver figura 5.4(a)). Este comportamiento se debe a que el vector de onda dentro de la película, en estos casos, es complejo.

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

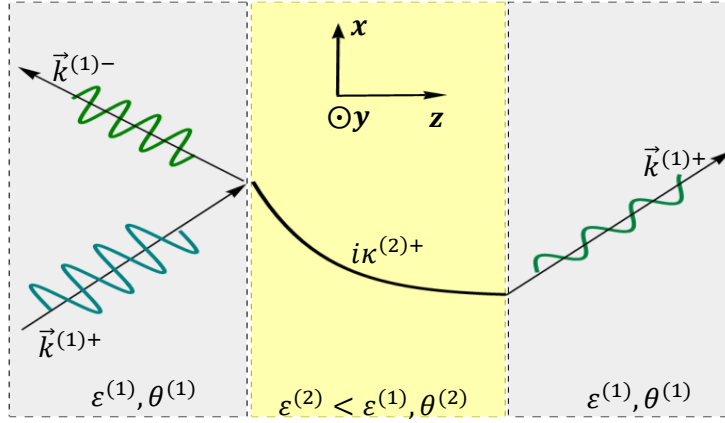


Figura 5.6: descripción esquemática del efecto de tunelamiento en el coeficiente de transmisión de una onda electromagnética a través de una película de espesor l .

Para demostrar que $k_z^{(2)}$ es complejo en este tipo de sistemas, debemos descomponer el vector de onda en sus componentes $k_z^{(2)}$ y k_x , tal y como se muestra a continuación:

$$k_2 = \sqrt{(k_x)^2 + \left(k_z^{(2)}\right)^2} \Rightarrow k_z^{(2)} = k_z^{(2)} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon^{(2)}}}{c} l \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^{(1)}}{\varepsilon^{(2)}} \sin^2 \varphi_1}, \quad (5.3)$$

donde $k_z^{(2)} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon^{(2)}}}{c}$ y $k_x = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon^{(1)}}}{c} \sin \varphi_1$ [78].

Recordemos que $\sin \varphi_{crit} = n^{(2)}/n^{(1)} = \sqrt{\varepsilon^{(2)}/\varepsilon^{(1)}}$ con $\mu^{(2)} = \mu^{(1)} = 1$. Luego, el vector de onda adopta la siguiente forma:

$$k_z^{(2)} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon^{(2)}}}{c} l \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_{crit}}\right)^2}, \quad (5.4)$$

Puesto que $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_{crit}} > 1$, entonces

$$k_z^{(2)} = i \frac{\omega\sqrt{\varepsilon^{(2)}}}{c} l \sqrt{\left(\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_{crit}}\right)^2 - 1} = i \kappa_z^{(2)}, \quad (5.5)$$

donde $\kappa_z^{(2)} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon^{(2)}}}{c} l \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi_{crit}} - 1}$ [78]. Esto implica, que para realizar una descripción cuantitativa del efecto de tunelamiento, el vector de onda en el medio 2 debe ser complejo ($k_z^{(2)} = i \kappa_z^{(2)}$) tal y como se describe en la figura 5.6.

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

Bajo estas consideraciones los elementos de la matriz de transferencia (4.25)-(4.36), adoptan la siguiente forma:

$$M_{11}^{(slab)} = \cosh(l\kappa_z^{(2)}) - \frac{i}{2} \left[\mathcal{Z}_{(s)}^{(12)} - \mathcal{Z}_{(s)}^{(21)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) \right] \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.6)$$

$$M_{12}^{(slab)} = \frac{i}{2} \left[\mathcal{Z}_{(s)}^{(21)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) + \mathcal{Z}_{(s)}^{(12)} \right] \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.7)$$

$$M_{21}^{(slab)} = \bar{M}_{12}^{(slab)}, \quad M_{22}^{(slab)} = \bar{M}_{11}^{(slab)}, \quad (5.8)$$

$$M_{13}^{(slab)} = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \delta^{(12)} \left(\mathcal{Z}_{(s)}^{(12)} + \mathcal{Z}_{(s)}^{(21)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \right) \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.9)$$

$$M_{14}^{(slab)} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \delta^{(12)} \left(\mathcal{Z}_{(s)}^{(12)} - \mathcal{Z}_{(s)}^{(21)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \right) \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.10)$$

$$M_{24}^{(slab)} = \bar{M}_{13}^{(slab)}, \quad M_{23}^{(slab)} = \bar{M}_{14}^{(slab)}, \quad (5.11)$$

$$M_{31}^{(slab)} = \frac{i}{2} \delta^{(12)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \left(\mathcal{Z}_{(p)}^{(21)} + \mathcal{Z}_{(s)}^{(12)} \right) \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.12)$$

$$M_{32}^{(slab)} = -\frac{i}{2} \delta^{(12)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \left(\mathcal{Z}_{(p)}^{(21)} - \mathcal{Z}_{(s)}^{(12)} \right) \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.13)$$

$$M_{41}^{(slab)} = \bar{M}_{32}^{(slab)}; \quad M_{42}^{(slab)} = \bar{M}_{31}^{(slab)}, \quad (5.14)$$

$$M_{33}^{(slab)} = \cosh(l\kappa_z^{(2)}) + \frac{i}{2} \left[\mathcal{Z}_{(p)}^{(21)} - \mathcal{Z}_{(p)}^{(12)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) \right] \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.15)$$

$$M_{34}^{(slab)} = \frac{i}{2} \left[\mathcal{Z}_{(p)}^{(21)} + \mathcal{Z}_{(p)}^{(12)} \left(1 + \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} (\delta^{(12)})^2 \right) \right] \sinh(l\kappa_z^{(2)}), \quad (5.16)$$

$$M_{43}^{(slab)} = \bar{M}_{34}^{(slab)}; \quad M_{44}^{(slab)} = \bar{M}_{33}^{(slab)}, \quad (5.17)$$

donde usamos las relaciones siguientes:

$$\begin{cases} \sin(k_z^{(2)}l) = \sin(i\kappa_z^{(2)}l) = \frac{e^{\kappa_z^{(2)}l} - e^{-\kappa_z^{(2)}l}}{2i} = \frac{1}{i} \sinh(\kappa_z^{(2)}l) \\ \cos(k_z^{(2)}l) = \cos(i\kappa_z^{(2)}l) = \frac{e^{\kappa_z^{(2)}l} + e^{-\kappa_z^{(2)}l}}{2} = \cosh(\kappa_z^{(2)}l) \end{cases}, \quad (5.18)$$

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

Además, las impedancias $z_{s,p}^{(ij)}$ (con $i = 1, 2$) están dadas de la siguiente forma:

$$\begin{cases} z_{(s)}^{(12)} = \frac{\mu^{(2)}k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}\kappa_z^{(2)}}; z_{(s)}^{(21)} = \frac{\mu^{(1)}k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}\kappa_z^{(1)}} \\ z_{(p)}^{(12)} = \frac{\varepsilon^{(2)}k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}\kappa_z^{(2)}}; z_{(p)}^{(21)} = \frac{\varepsilon^{(1)}k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}\kappa_z^{(1)}} \end{cases}, \quad (5.19)$$

A continuación, tomamos los elementos, (5.6)-(5.17), y los introducimos en las ecuaciones (4.45)-(4.48) para obtener los coeficientes de transmisión y reflexión, pp y ps (transmisión y reflexión de ondas con polarización p y s a partir de ondas incidentes con polarización p). De la misma forma, tomamos los elementos (5.6)-(5.17) y los reemplazamos en las ecuaciones (4.39)-(4.42) para obtener los coeficientes de transmisión y reflexión, ss y sp (transmisión y reflexión de ondas con polarización s y p a partir de ondas incidentes con polarización s). Con esto podemos estudiar el comportamiento que tienen los coeficientes de transmisión y reflexión al variar la frecuencia de la onda incidente.

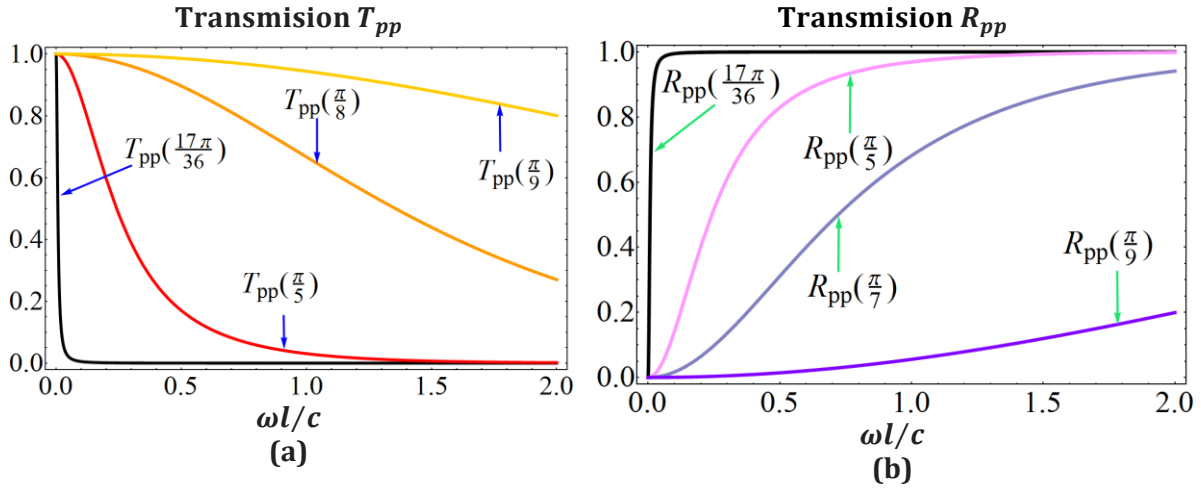


Figura 5. 7: Comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión para **ondas pp** con diferentes ángulos de incidencia. En **(a)** se muestran los coeficientes de transmisión para **ondas pp** . En **(b)** se presentan los coeficientes de reflexión para **ondas pp** . Los ángulos de incidencia están dados de forma que $\varphi_1 > \varphi_{crit}$. En el sistema se tiene: $\varepsilon_r^{(2)} = \mu_r^{(2)} = 1$, $\varepsilon_r^{(1)} = 9$ y $\mu_r^{(1)} = 1$. La diferencia de parámetros topológicos es tal que $\delta^{(12)} = \alpha$ y el vector de onda dentro de la película está dado por $k_z^{(2)} = i\kappa_z^{(2)}$.

La figura 5.7 muestra los coeficientes de transmisión y reflexión como una función de la frecuencia para **ondas pp** . En la figura 5.7(a) el coeficiente T_{pp} decrece rápidamente para ángulos de incidencia cercanos a $\pi/2$. Cuando el ángulo φ_1 se aleja del ángulo de incidencia rasante y se aproxima cada vez más al ángulo crítico, se observa que la curva decrece más lentamente. Es decir, para ángulos de incidencia cercanos a φ_{crit} , la cantidad de energía

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

transmitida en forma de *ondas pp* se hace mayor para cada valor de frecuencia de la onda incidente. El coeficiente R_{pp} en la figura 5.7(b), tiene un comportamiento inverso al mostrado por el coeficiente T_{pp} , cuanto mayor es el coeficiente de reflexión menor es el coeficiente de transmisión y viceversa.

En la figura 5.8 se muestran los coeficientes transmisión y reflexión como una función de la frecuencia para *ondas ss*. El comportamiento de los coeficientes en este caso es similar al de los coeficientes para *ondas pp*. Sin embargo, cuando φ_1 aumenta, el coeficiente T_{ss} decrece más rápidamente que el coeficiente T_{pp} . Por otro lado, conforme aumenta el ángulo de incidencia, R_{ss} crece más lentamente que R_{pp} .

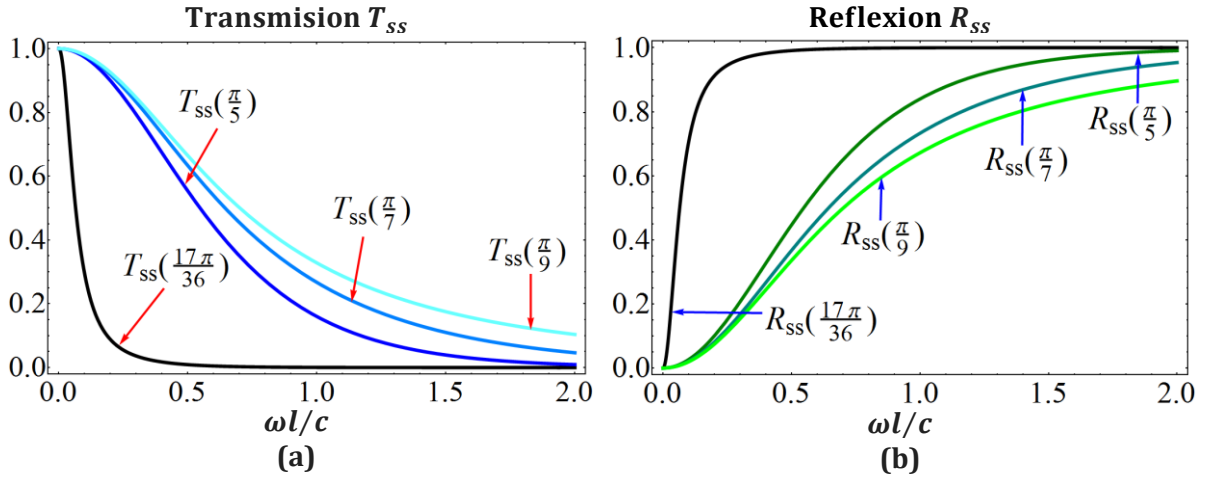


Figura 5. 8: Comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión para *ondas ss* con diferentes ángulos de incidencia. En **(a)** se muestran los coeficientes de transmisión para *ondas ss*. En **(b)** se presentan los coeficientes de reflexión para *ondas ss*. Los ángulos de incidencia están dados de forma que $\varphi_1 > \varphi_{crit}$. En el sistema se tiene: $\epsilon_r^{(2)} = \mu_r^{(2)} = 1$, $\epsilon_r^{(1)} = 9$ y $\mu_r^{(1)} = 1$. La diferencia de parámetros topológicos es tal que $\delta^{(12)} = \alpha$ y el vector de onda dentro de la película está dado por $k_z^{(2)} = i\kappa_z^{(2)}$.

En la figura 5.9(a), el coeficiente T_{ps} , tiene un comportamiento similar a T_{pp} . Sin embargo, conforme el ángulo de incidencia se aproxima a φ_{crit} , el coeficiente no solo decrece más lentamente sino que alcanza su valor máximo a frecuencias cada vez mayores. Dicho de otra forma, la transmisión máxima de *ondas ps* se alcanza en frecuencias cada vez mayores cuando el ángulo se aproxima a φ_{crit} . En la figura 5.9(b), el pico máximo del coeficiente R_{ps} desaparece a medida que el ángulo de incidencia se acerca al ángulo crítico. Además, la cantidad de energía reflejada en forma de *ondas ps* oscila conforme el ángulo de incidencia se aproxima a φ_{crit} .

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

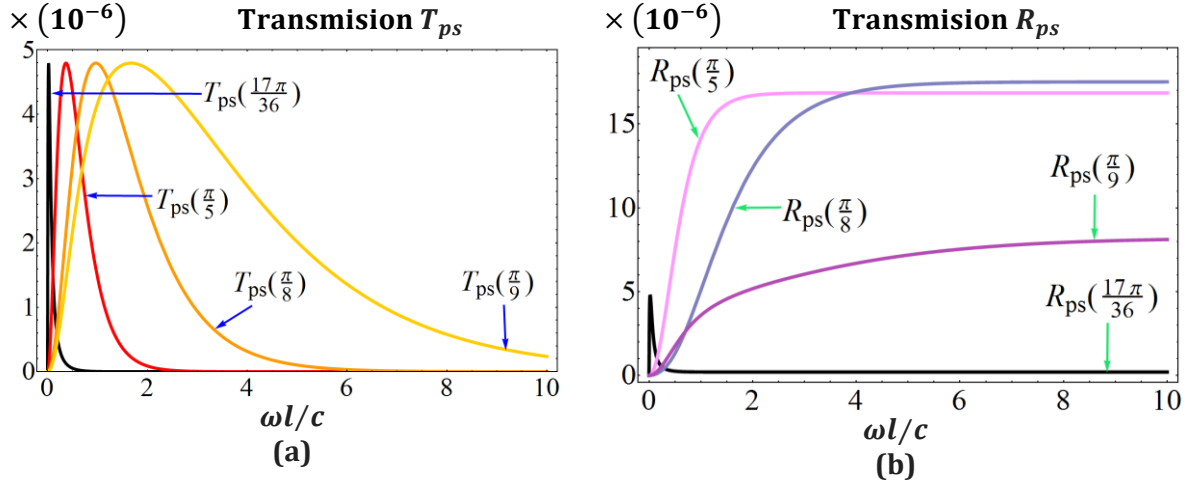


Figura 5. 9: Comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión para *ondas ps* con diferentes ángulos de incidencia. En (a) se muestran los coeficientes de transmisión para *ondas ps*. En (b) se presentan los coeficientes de reflexión para *ondas ps*. Los ángulos de incidencia están dados de forma que $\varphi_1 > \varphi_{crit}$. En el sistema se tiene: $\epsilon_r^{(2)} = \mu_r^{(2)} = 1$, $\epsilon_r^{(1)} = 9$ y $\mu_r^{(1)} = 1$. La diferencia de parámetros topológicos es tal que $\delta^{(12)} = \alpha$ y el vector de onda dentro de la película está dado por $k_z^{(2)} = i\kappa_z^{(2)}$.

5.3 Tunelamiento resonante a través de una estructura de doble capa con TI

Consideremos ahora un sistema compuesto por dos películas de espesor l_2 con índice de refracción $n^{(2)}$ y parámetro topológico $\theta^{(2)}$. Ambas películas están separadas una distancia l_1 y se encuentran rodeadas por un medio homogéneo con índice de refracción $n^{(1)}$ y parámetro topológico $\theta^{(1)}$ (ver figura 5.10). A continuación, supongamos que una onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}^{(1)+} = (k_x, k_z^{(1)+})$ se aproxima desde la izquierda de la película [1] e incide sobre la superficie de ésta en $z = 0$; parte de la onda es reflejada con un vector de onda $\vec{k}^{(1)-} = (k_x, k_z^{(1)-})$ y otra parte es transmitida al interior de la película con un vector de onda $\vec{k}^{(2)+} = (k_x, k_z^{(2)+})$. Luego, la onda se propaga dentro de la película hasta que incide sobre la siguiente interfaz en $z = l_2$. De nuevo, parte de la onda es reflejada al interior de la película y otra parte es transmitida fuera de ésta con un vector de onda $\vec{k}^{(1)+} = (k_x, k_z^{(1)+})$. La onda resultante, se propaga a través del siguiente medio con índice de refracción $n^{(1)}$ hasta que incide sobre la película [2] y el proceso se repite.

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

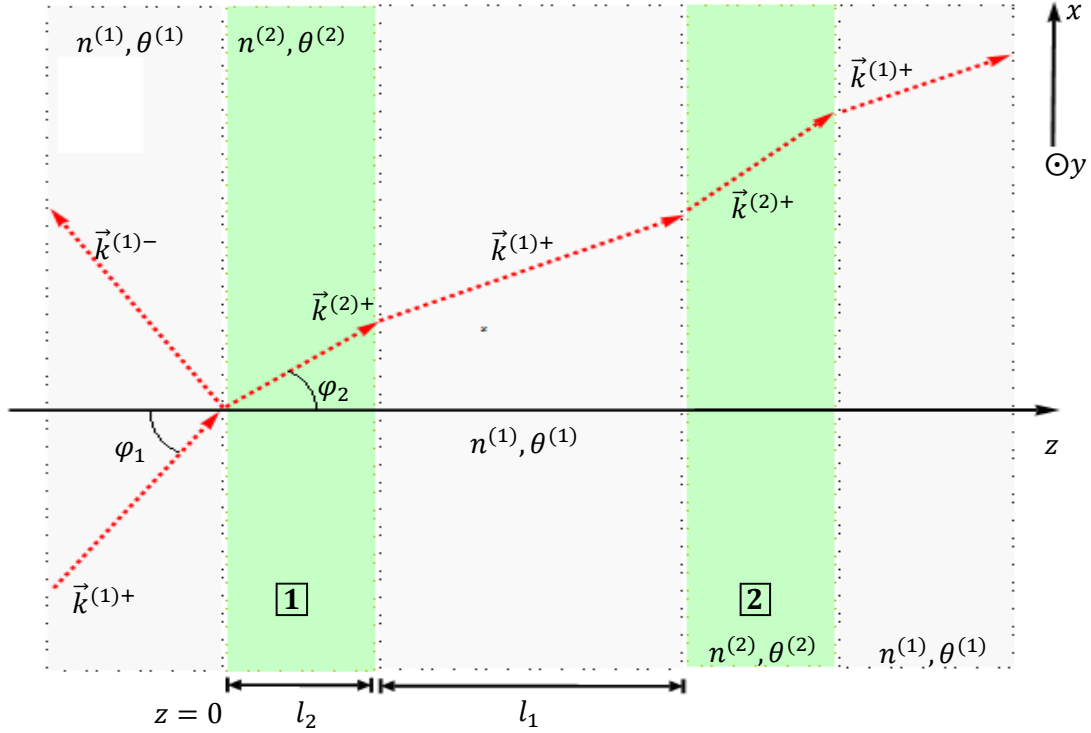


Figura 5. 10: descripción esquemática de un sistema de dos capas rodeado por un medio homogéneo.

Con el objetivo de estudiar el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión en el sistema de la figura 5.10, debemos encontrar la matriz de transferencia que describe la transición de la onda a través de las dos películas y la propagación de la onda en el medio que las rodea. Para esto, hacemos uso de los elementos de la matriz de transferencia obtenida en la sección 4.3, la cual está representada por $\mathbf{M}^{(slab)}$ y describe la propagación de la onda a través de una película rodeada por un medio homogéneo. Adicionalmente, debemos considerar la matriz homogénea, $\mathbf{M}^{(hom1)}$ que representa la propagación de la onda a través del medio 1. Como resultado tenemos el siguiente producto:

$$\mathbf{M}^{(Dslab)} = \mathbf{M}^{(slab)} \mathbf{M}^{(hom1)} \mathbf{M}^{(slab)}, \quad (5.20)$$

donde las matrices $\mathbf{M}^{(slab)}$ contienen los términos (4.25)-(4.36) y la matriz $\mathbf{M}^{(hom1)}$ está dada por la expresión (4.11) para una capa de espesor l_1 y vector de onda $k_z^{(1)}$. Para obtener el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión, de nuevo hacemos uso de las expresiones (4.39)-(4.42) y (4.45)-(4.48).

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

En la figura 5.11 se muestran los coeficientes de transmisión y reflexión para *ondas pp* en función de la frecuencia, para el sistema de la figura 5.10. En este caso, se han considerado cuatro espesores diferentes para las películas, los cuales están dados por: $l_2 = \{0.1 c/\omega, 0.3 c/\omega, 1 c/\omega, 3 c/\omega\}$. En la figura 5.11(a), el coeficiente T_{pp} demuestra un comportamiento oscilatorio entre ~ 0.76 y ~ 1 cuando los espesores de ambas películas son de $0.3 c/\omega$. Esto se debe a la interferencia constructiva que aparece cuando todas las ondas que se propagan entre las dos películas tienen la misma fase. Bajo estas condiciones aparece una transmisión resonante, para la cual el coeficiente de transmisión toma su valor máximo [78]. Este comportamiento se mantiene para todos los espesores de las películas. Conforme se incrementa el espesor de cada película, el porcentaje de energía transmitida en forma de *ondas pp* se restringe a intervalos de frecuencia más pequeños. En la figura 5.11(b), el coeficiente R_{pp} alcanza su valor máximo cuando T_{pp} alcanza su valor mínimo y viceversa.

Por otro lado, los coeficientes de transmisión y reflexión para *ondas ss* presentan un comportamiento similar al presentado para una onda electromagnética incidente con polarización *p*. En las figuras 5.11(a) y 5.11(b) vemos que el incremento del espesor de las películas, da lugar a que los coeficientes presenten intervalos de frecuencia en los que se hace más difícil transmitir y reflejar energía en forma de *ondas pp*.

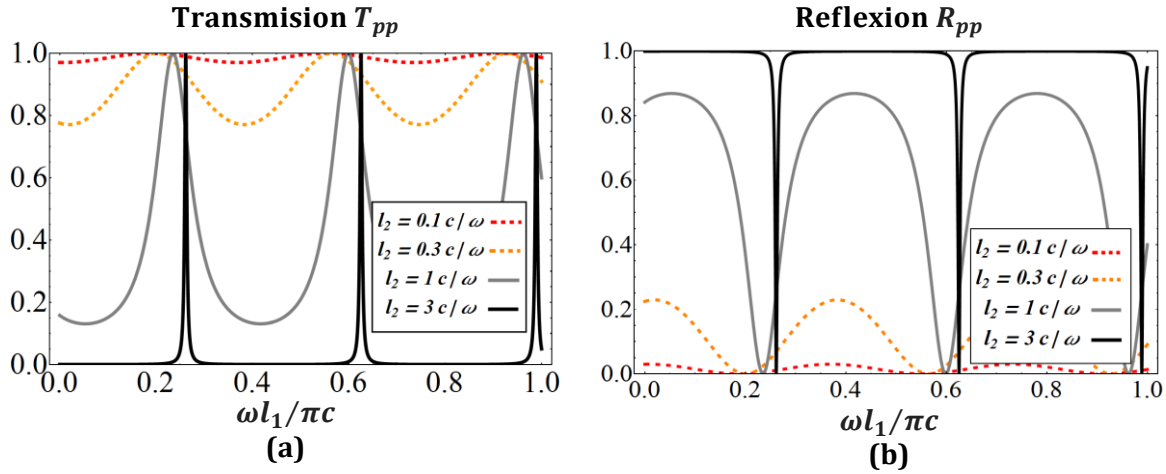


Figura 5. 11: En (a) se muestran los coeficientes de transmisión para *ondas pp* para el sistema mostrado en la figura 5.10. En (b) aparecen los coeficientes de reflexión para el mismo tipo de ondas. El ángulo de incidencia sobre la primera película está dado por $\varphi_2 = \text{sen}^{-1}0.4$ y se usaron cuatro espesores diferentes para las películas: $l_2 = \{0.1 c/\omega, 0.3 c/\omega, 1 c/\omega, 3 c/\omega\}$. Las permitividades eléctricas y permeabilidades magnéticas relativas están dadas respectivamente por: $\epsilon_r^{(2)} = 1$, $\epsilon_r^{(1)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ y $\mu_r^{(1)} = 1$. La diferencia de parámetros topológicos es tal que $\delta^{(12)} = \alpha$.

5. Tunelamiento en una película y en sistemas de doble capa con aislantes topológicos

En la figura 5.12(a) el coeficiente T_{ps} oscila alrededor de valores próximos a 1×10^{-6} cuando el espesor de las películas es $0.1 c/\omega$. Al incrementar el espesor de las películas, el porcentaje de energía transmitido en forma de *ondas ps* también aumenta y se hacen más evidentes los máximos de resonancia para el coeficiente. Sin embargo, cuando el espesor de las películas es $3 c/\omega$, podemos observar que la amplitud de nuevo disminuye. Esto se debe a que los elementos de la matriz de transferencia, (ecuaciones (4.25)-(4.26)) contienen funciones trigonométricas que dependen del espesor l_2 de la película. En la figura 5.12(b), los picos máximos del coeficiente R_{ps} también se incrementan conforme aumenta el espesor de las películas.

En las figuras 5.12(a) y 5.12(b) se puede observar hay transmisión y reflexión de *ondas ps* para intervalos de frecuencia en los cuales la transmisión y reflexión de *ondas pp* es casi nula. Con el aumento del espesor de las películas, el coeficiente T_{ps} comienza a mostrar intervalos de frecuencia en los que se hace más difícil transmitir energía en forma de *ondas ps*. En la figura 5.12(b) vemos que en estos intervalos, aparece reflexión de energía en forma de *ondas ps*.

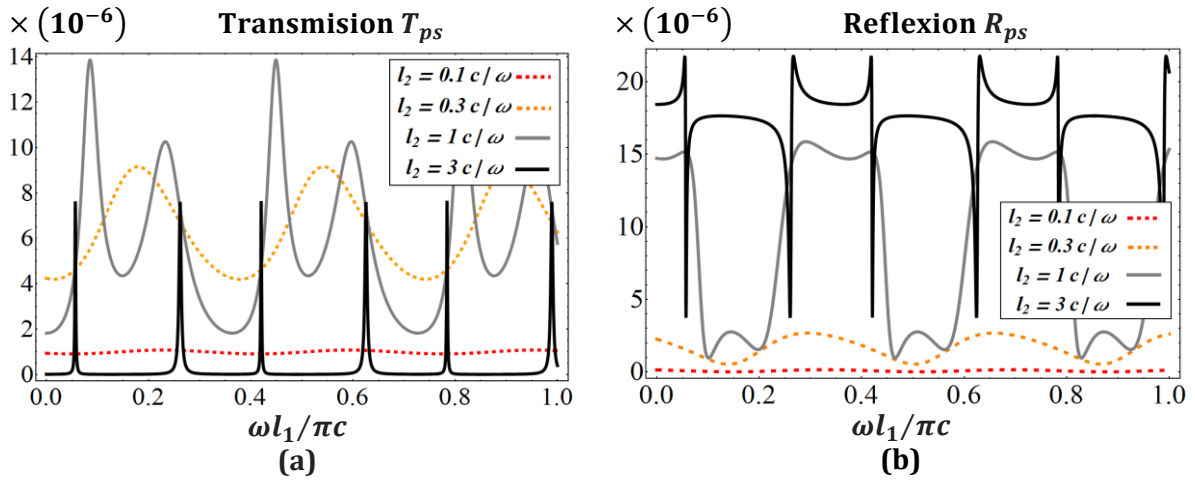


Figura 5. 12: En (a) se muestran los coeficientes de trasmisión para *ondas ps*. En (b) aparecen los coeficientes de reflexión para el mismo tipo de ondas. El ángulo de incidencia sobre la primera película está dado por $\varphi_2 = \text{sen}^{-1}0.4$ y se usaron cuatro espesores diferentes para las películas: $l_2 = \{0.1 c/\omega, 0.3 c/\omega, 1 c/\omega, 3 c/\omega\}$. Las permitividades eléctricas y permeabilidades magnéticas relativas están dadas respectivamente por: $\epsilon_r^{(2)} = 1$, $\epsilon_r^{(1)} = 9$, $\mu_r^{(2)} = 1$ y $\mu_r^{(1)} = 1$. La diferencia de parámetros topológicos es tal que $\delta^{(12)} = \alpha$.

5.4 Resumen

Se estudió el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión (de las ondas pp , ps , ss y sp) cuando una onda electromagnética se propaga a través de una película de TI (aislante topológico) con índice de refracción menor al índice de refracción del medio que la rodea. Se observó que por debajo de cierto ángulo crítico, aparecen las oscilaciones de Fabry-Perot con una corrección del orden de $\alpha^2 \sim 5,32 \times 10^{-5}$ en los máximos de los coeficientes de transmisión. Sin embargo, por encima del ángulo crítico, la componente z del vector de onda dentro de la película se vuelve complejo. Esto conlleva al tunelamiento de las ondas pp , ps , ss y sp dentro de la película, tal y como se observó en la figuras 5.7(a), 5.8(a) y 5.9(a).

Posteriormente, se consideró un sistema de doble capa rodeado por un medio homogéneo. Se mostró que los coeficientes de transmisión de las ondas pp , ps , ss y sp toman su valor máximo (con una corrección del orden de $\alpha^2 \sim 5,32 \times 10^{-5}$) cuando las ondas electromagnéticas dentro de las dos capas alcanzan la interferencia constructiva. Al incrementar el espesor de cada película, el porcentaje de energía transmitido en forma de ondas pp y ps se restringe a intervalos de frecuencia más pequeños.

6. EXTENSIÓN A SISTEMAS MULTICAPA CON AISLANTES TOPOLÓGICOS

En los capítulos 3 y 4, analizamos los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas electromagnéticas (TM y TE) en una interfaz y en una película delgada con aislantes topológicos. En ambas secciones se consideró que la onda viajaba desde un medio ópticamente menos denso a uno ópticamente más denso. En el capítulo 5 se mostró que las ondas podían transmitirse por tunelamiento a través de una película cuyo índice de refracción era menor al índice del medio que rodeaba la película. De la misma forma se mostró que la transmisión a través de dos placas del mismo material conduce a una transmisión resonante.. En este capítulo haremos uso del formalismo de matriz de transferencia y de algunos de los resultados obtenidos en las secciones anteriores para analizar un sistema más complejo, un sistema multicapa. El cual consiste en una repetición periódica de dos capas compuestas por un aislante topológico.

6.1 Matriz de transferencia en un sistema multicapa

El sistema en consideración está formado por un medio estratificado consistente por una disposición periódica finita de dos capas. La capa 1, tiene un espesor l_1 , una permitividad $\epsilon^{(1)}$, una permeabilidad $\mu^{(1)}$ y un parámetro topológico $\theta^{(1)}$; la capa 2 tiene un espesor l_2 , una permitividad $\epsilon^{(2)}$, una permeabilidad $\mu^{(2)}$ y un parámetro topológico $\theta^{(2)}$, tal como se presenta en la figura 6.1.

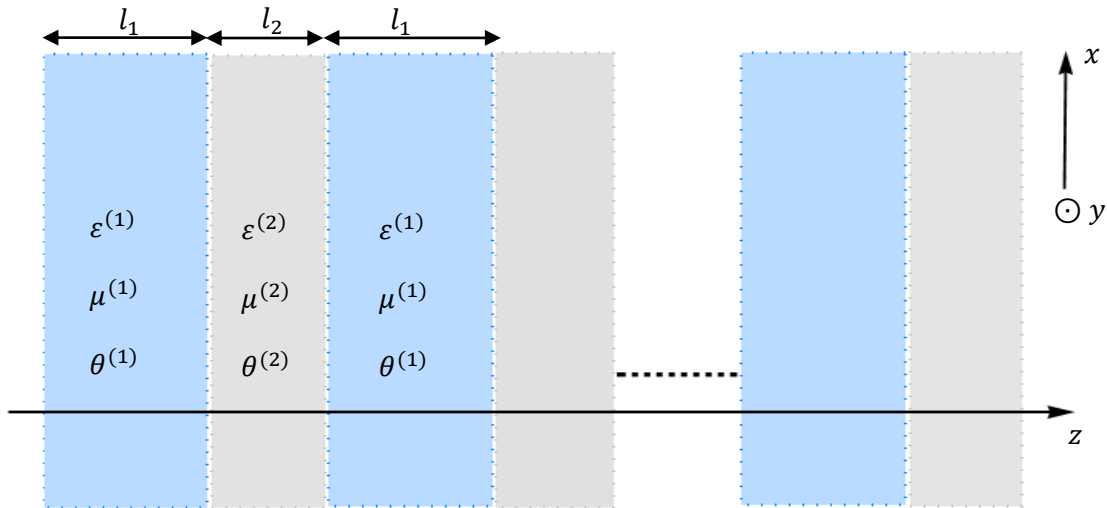


Figura 6. 1: Estructura periódica de un sistema de dos capas con aislantes topológicos.

6. Extensión sistemas multicapa con aislantes topológicos

A continuación consideremos una onda electromagnética con vector de onda $\vec{k}^{(1)+} = (k_x, k_z^{(1)+})$ que viaja en el medio 1 e incide con un ángulo φ_1 sobre la interfaz 1-2 (interfaz entre el medio 1 y el medio), parte de esta onda se refleja con un vector de onda $\vec{k}^{(1)-} = (k_x, k_z^{(1)-})$ y otra parte de esta onda es transmitida al medio 2 con un vector de onda $\vec{k}^{(2)+} = (k_x, k_z^{(2)+})$ y un ángulo φ_2 . Luego, la onda con $\vec{k}^{(2)+}$ viaja por el medio homogéneo 2 e incide sobre la interfaz 2-1 (interfaz entre el medio 2 y el medio 1), parte de esta onda es reflejada y otra parte es transmitida al medio 1 con un vector de onda $\vec{k}^{(1)+}$. Este proceso se repite en toda la estructura (ver figura 6.2).

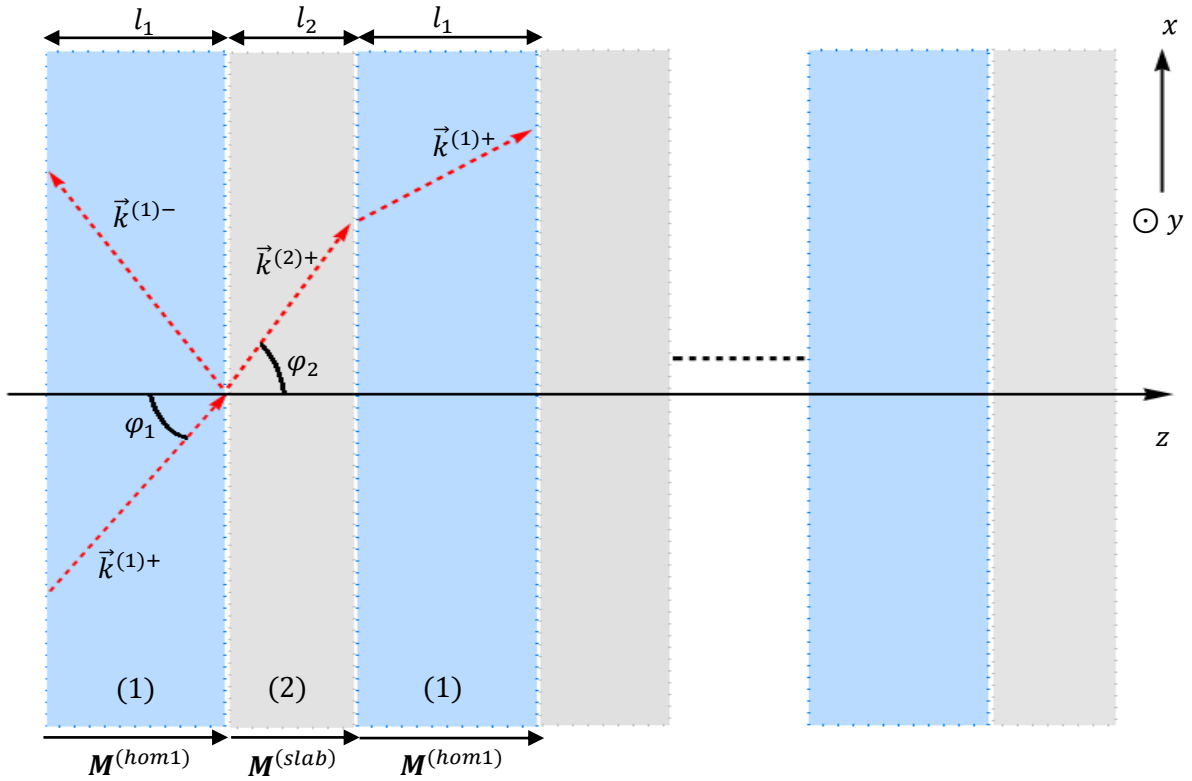


Figura 6. 2: Propagación de las ondas electromagnéticas en una estructura periódica de un sistema de dos capas con aislantes topológicos.

Al observar la figura 6.2, vemos que la capa 2 se encuentra rodeada por dos capas tipo 1, lo cual es equivalente a tener una película (o un medio 2 homogéneo) rodeada por un medio homogéneo (medio 1). Con lo anterior, podemos considerar el sistema como una estructura compuesta por un número finito de películas delgadas, las cuales están rodeadas por un medio homogéneo. La superficie de cada una de las películas yace en el plano xy y se encuentran dispuestas en forma consecutiva a lo largo del eje z . Luego, para obtener la matriz de transferencia del sistema completo es necesario analizar la transición de las ondas a través de cada una de las películas.

6. Extensión sistemas multicapa con aislantes topológicos

La matriz de transferencia que describe la propagación de las ondas a través de las interfaces 1-2 y 2-1 está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}^{(slab)} = \mathbf{M}^{(21)} \mathbf{M}^{(hom2)} \mathbf{M}^{(12)}, \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{M}^{(21)}$ es la matriz de transferencia del medio 2 al medio 1, $\mathbf{M}^{(12)}$ es la matriz de transferencia del medio 1 al medio 2 y $\mathbf{M}^{(hom2)}$ es la matriz que representa la propagación de la onda en el medio homogéneo 2 (ver figura 6.2). Los elementos de la matriz de transferencia $\mathbf{M}^{(slab)}$ están dados por las ecuaciones (4.25)-(4.36).

Por otro lado, debemos tener en cuenta que parte de la onda que incide en la interfaz 2-1, se transmite al medio 1 y luego se propaga en este, hasta llegar a la siguiente interfaz 1-2. La propagación de la onda a través del medio homogéneo 1 está representada por la siguiente matriz:

$$\mathbf{M}^{(hom1)} = \begin{pmatrix} e^{ik_z^{(1)}l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_z^{(1)}l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_z^{(1)}l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_z^{(1)}l_1} \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

donde $k_z^{(1)}$ es la componente z del vector de onda para la onda incidente en el medio 1.

Así, la matriz de transferencia desde la interfaz 1-2 hasta la siguiente interfaz 1-2 está representada por el producto $\mathbf{M}^{(hom1)} \mathbf{M}^{(slab)}$. Puesto que el proceso de propagación de la onda desde la interfaz 1-2 a la siguiente se repite en el espacio, podemos pensar que tenemos una celda unitaria con matriz de transferencia $\mathbf{M}^{(celda)}$, dada por (6.3), la cual se repite indefinidamente en el espacio.

$$\mathbf{M}^{(celda)} = \mathbf{M}^{(hom1)} \mathbf{M}^{(slab)}. \quad (6.3)$$

Luego, la matriz de transferencia total para una estructura periódica como la que se muestra en la figura 6.2 está dada por el producto de las N matrices de transferencia para las N celdas:

$$\mathbf{M}^{(N)} = [\mathbf{M}^{(celda)}]^N. \quad (6.4)$$

6.2 Coeficientes de transmisión y reflexión en sistemas multicapa con aislantes topológicos.

A continuación, analicemos el comportamiento que tienen los coeficientes de transmisión y reflexión de una onda electromagnética, la cual viaja a través de N celdas unitarias y cuya matriz de transferencia está dada por la expresión (6.4). Para esto, hacemos uso de las expresiones analíticas para las amplitudes de transmisión y reflexión que se obtuvieron para una película en la sección 4.4 (para ondas incidentes con polarización TE usamos las ecuaciones (4.39)-(4.42) y para ondas incidentes con polarización TM usamos las ecuaciones (4.45)-(4.48)). Los elementos de matriz utilizados en este caso están dados por los elementos de la matriz (6.4). Con el fin de ilustrar el comportamiento que tienen los coeficientes se ha definido una frecuencia de referencia ω_0 [78], la cual está dada por las siguientes expresiones,

$$k_0 n^{(1)} l_1 = \frac{\pi}{2}, \quad (6.5)$$

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c}, \quad (6.6)$$

donde k_0 es el vector de onda correspondiente a la frecuencia de referencia ω_0 , $n^{(1)}$ es el índice de refracción del medio 1 y l_1 el espesor de la capa 1. Además, consideramos el caso especial en el cual,

$$\frac{n^{(1)} l_1}{n^{(2)} l_2} = 1, \quad (6.7)$$

donde $n^{(2)}$ es el índice de refracción del medio 2 y l_2 el espesor de la capa 2. Luego, de las expresiones (6.5) y (6.6) encontramos que los espesores de las capas son,

$$l_1 = \lambda_1/4, \quad (6.8)$$

$$l_2 = \lambda_2/4, \quad (6.9)$$

donde λ_1 y λ_2 son las longitudes de onda para las ondas en los medios 1 y 2 respectivamente [78].

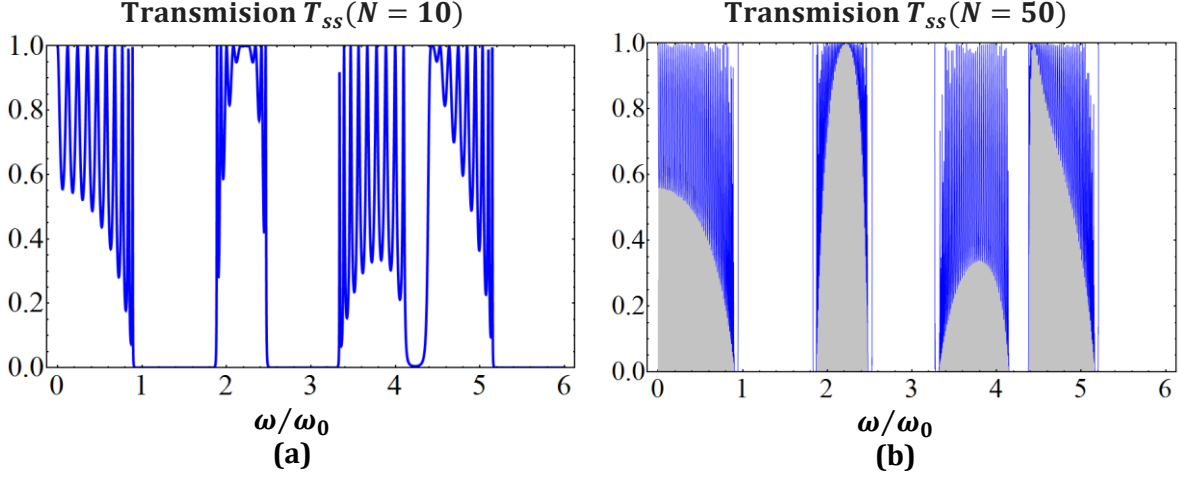


Figura 6. 3: Coeficientes de transmisión para una onda tipo TE a partir de onda TE incidente. El ángulo de incidencia $\varphi_1 = \pi/3$ a través de un sistema multicapa con $\epsilon_r^{(2)} = 4$, $\mu_r^{(2)} = 1$ sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. En (a) se muestra el coeficiente de transmisión para un sistema con $N = 10$ celdas y en (b) para un sistema con $N = 50$ celdas. Los espesores de las capas 1 y 2 son tales que $l_1 = \lambda_1/4$ y $l_2 = \lambda_2/4$ respectivamente (λ_1 y λ_2 son las longitudes de onda para las ondas en el medio 1 y el medio 2 respectivamente).

En la figura 6.3 se muestra el comportamiento del coeficiente de transmisión de una onda TE a partir de una onda TE incidente como una función de la frecuencia ω/ω_0 , para un sistema con $N = 10$ y $N = 50$ celdas. En la figura 6.3(a) se observa que la transmisión T_{ss} oscila dentro de intervalos de frecuencias determinados, fuera de dichos intervalos la transmisión se hace cero. Dicho de otra manera, hay transmisión de *ondas ss* dentro de ciertos intervalos de frecuencia permitidos. Los intervalos en los cuales la transmisión T_{ss} se aproxima a cero, corresponden a los gaps o zonas de frecuencia prohibidas. Conforme se incrementa el número de celdas en la estructura, se hacen más notorios los gaps de frecuencia para el coeficiente de transmisión (ver figura 6.3(b)).

En la figura 6.4 se muestra el comportamiento del coeficiente de transmisión de una onda TM a partir de una onda TM incidente respecto a la frecuencia. En la figura 6.4(a), la transmisión T_{pp} alcanza un mínimo para frecuencias que se localizan dentro de los gaps para el coeficiente de transmisión T_{ss} . La transmisión T_{pp} no se hace cero para dichos intervalos, sin embargo, si incrementamos el número de celdas, se hacen más evidentes los gaps para el coeficiente T_{pp} . Los intervalos de frecuencia prohibidos en T_{pp} son más estrechos que los gaps para la transmisión T_{ss} . Es decir, es posible transmitir energía en forma de *ondas pp* en ciertos valores de frecuencia para los cuales la transmisión de *ondas ss* es casi nula. Este comportamiento es similar al mostrado en la literatura [78] para sistemas con $\delta^{(12)} = 0$.

6. Extensión sistemas multicapa con aislantes topológicos

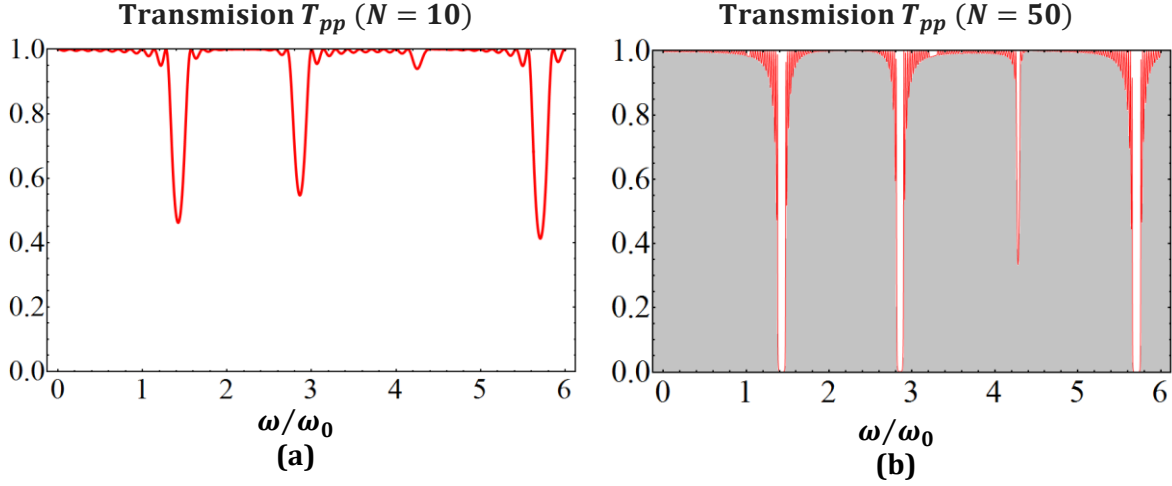


Figura 6.4: Coeficientes de transmisión para una onda tipo TM a partir de onda TM incidente. El ángulo de incidencia $\varphi_1 = \pi/3$ a través de un sistema multicapa con $\epsilon_r^{(2)} = 4$, $\mu_r^{(2)} = 1$ sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$ y $\delta^{(12)} = \alpha$. En (a) se muestra el coeficiente de transmisión para un sistema con $N = 10$ celdas y (b) para un sistema con $N = 50$ celdas. Los espesores de las capas 1 y 2 son tales que $l_1 = \lambda_1/4$ y $l_2 = \lambda_2/4$ respectivamente (λ_1 y λ_2 son las longitudes de onda para las ondas en el medio 1 y el medio 2 respectivamente).

En la figura 6.5 se muestran los coeficientes de reflexión para ondas *ss* y *pp*. Note que en la figura 6.5 (a) el coeficiente R_{ss} alcanza valores máximos para frecuencias en las cuales el coeficiente de transmisión T_{ss} se hace mínimo y viceversa. De igual forma, el coeficiente R_{pp} presenta máximos en valores de frecuencia para los cuales el coeficiente de transmisión T_{pp} se hace mínimo. Este comportamiento es similar al mostrado en la literatura [78] para sistemas con $\delta^{(12)} = 0$.

Por otro lado, en las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 los coeficientes de transmisión y reflexión presentan comportamientos similares a los presentados en sistemas multicapa con medios convencionales ($\delta^{(12)} = 0$). Sin embargo, la inclusión del término topológico induce correcciones del orden de α^2 tal como se presentó para el caso de la interfaz y la película.

Como se mencionó en capítulos anteriores, las correcciones introducidas por el término topológico, implican una redistribución de energía cuando las ondas inciden sobre las superficies del sistema. Luego, existe la posibilidad de transmitir y reflejar ondas con polarización *s* a partir de ondas incidentes con polarización *p* y viceversa. En la figura 6.6 se muestran los coeficientes de transmisión y reflexión para ondas *ps* y ondas *sp*, en función de la frecuencia.

6. Extensión sistemas multicapa con aislantes topológicos

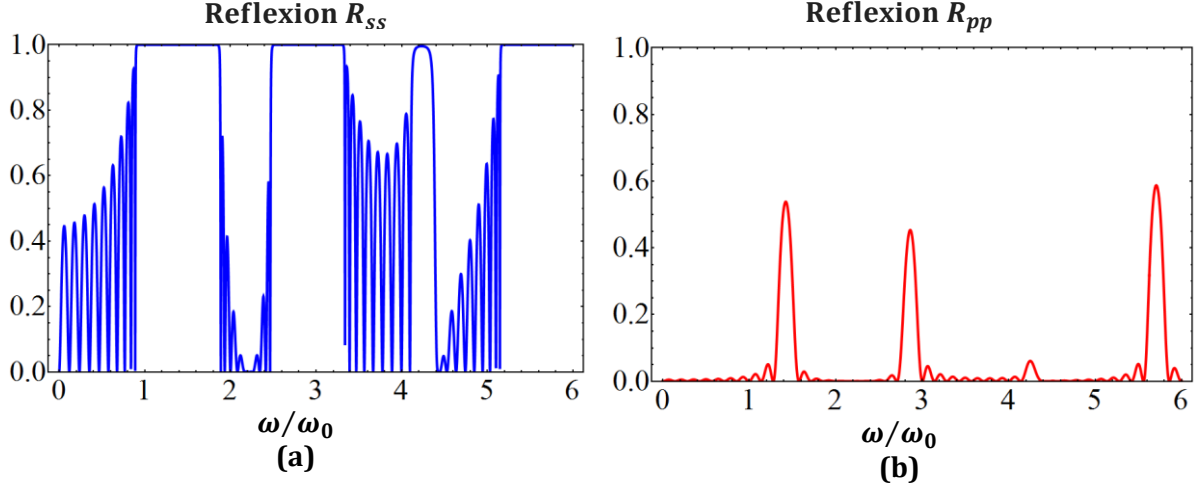


Figura 6. 5: Coeficientes de reflexión para una onda tipo TE y una onda tipo TM con ángulo de incidencia $\varphi_1 = \pi/3$ a través de un sistema multicapa con $\epsilon_r^{(2)} = 4$, $\mu_r^{(2)} = 1$ sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$, $\delta^{(12)} = \alpha$ y $N = 10$. **(a)** Coeficiente de reflexión de una onda TE para una onda TE incidente. **(b)** Coeficiente de reflexión de una onda TM para una onda TM incidente. Los espesores son tales $l_1 = \lambda_1/4$ y $l_2 = \lambda_2/4$.

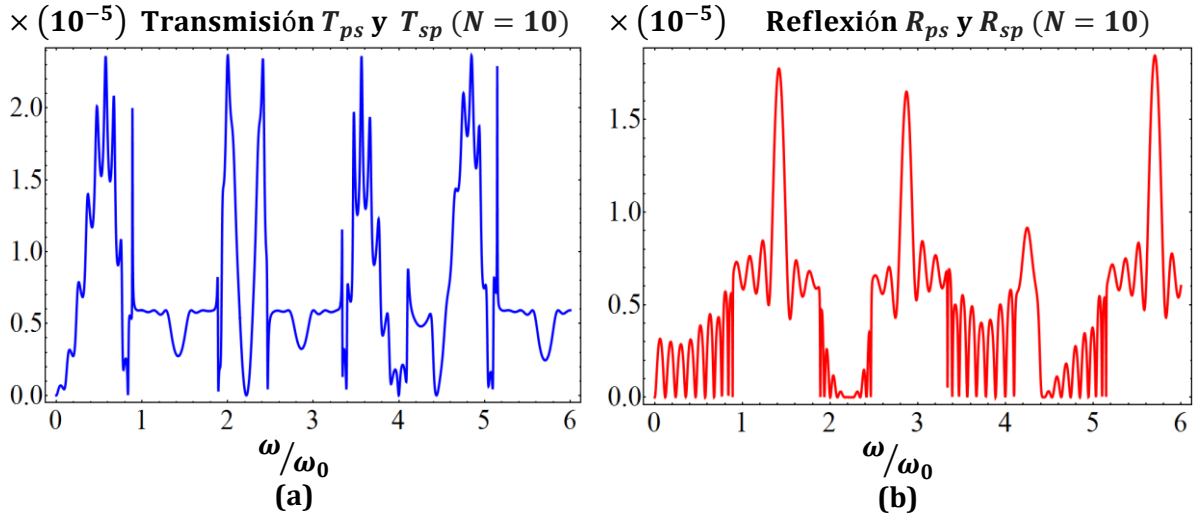


Figura 6.6: **(a)** Coeficiente de transmisión de una onda TE/TM para una onda TM/TE incidente. **(b)** Coeficiente de reflexión de una onda TE/TM para una onda TM/TE incidente. El ángulo de incidencia es $\varphi_1 = \pi/3$. La película con $\epsilon_r^{(2)} = 4$, $\mu_r^{(2)} = 1$ esta sumergida en un medio con $\epsilon_r^{(1)} = 1$, $\mu_r^{(1)} = 1$, $\delta^{(12)} = \alpha$, $N = 10$, $l_1 = \lambda_1/4$ y $l_2 = \lambda_2/4$.

Al comparar la figura 6.6(a) con la figura 6.3(a), vemos que hay transmisión de *ondas sp* en los intervalos de frecuencia prohibidos para las *ondas ss*. Lo mismo ocurre cuando comparamos los coeficientes T_{pp} y T_{ps} en las figuras 6.4(a) y 6.6(a) respectivamente. Además,

6. Extensión sistemas multicapa con aislantes topológicos

en la figura 6.6(b) los coeficientes de reflexión R_{ps} y R_{sp} alcanzan sus picos máximos cuando la frecuencia está en el centro del gap para T_{pp} y T_{ss} respectivamente. Esto implica, que en los intervalos de frecuencia prohibidos para las *ondas pp* y *ss*, es posible transmitir y reflejar pequeñas cantidades de energía en forma de *ondas ps* y *sp* a través de las celdas. Esta redistribución de energía se debe al acople inducido por el término del axion y está relacionada con la corrección que induce el termino topológico, la cual es del orden de $(\delta^{(12)})^2 = \alpha^2 \approx 5.32 \times 10^{-5}$ (donde α es el coeficiente de estructura fina). Naturalmente, cuando $\delta^{(12)} = 0$, estos efectos desaparecen y el sistema se transforma en un medio estratificado compuesto por medios convencionales.

6.3 Resumen

En este capítulo hicimos uso de la experiencia y formalismo obtenido en los capítulos anteriores para estudiar la transmisión y reflexión de las ondas electromagnéticas en multicapas compuestas de TI. La configuración de la estructura que se propuso, se compone de la repetición periódica de un sistema de dos capas compuestas de aislantes topológicos, cuyo espesor es igual a un cuarto de la longitud de onda dentro de cada capa. Se demuestra que los coeficientes de transmisión para *ondas pp* y *ondas ss* presentan intervalos de frecuencia prohibidos, sobre los cuales los coeficientes se hacen cero. Sin embargo, la introducción del término topológico permite la propagación y transmisión de pequeñas cantidades de energía a través de las celdas dentro de estos intervalos de frecuencia. Estas cantidades de energía se presentan en forma de ondas con polarización *p* (o con polarización *s*), las cuales se transmiten a partir de ondas con polarización *s* (o con polarización *p*) incidentes.

7. CONCLUSIONES

- En el marco de la electrodinámica del axión, se examinaron las propiedades electrodinámicas en sistemas estratificados que contienen aislantes topológicos a través del método de matriz de transferencia.
- Se estudió la propagación de una onda electromagnética a través de una interfaz que separa dos medios con una topológica no trivial. Se obtuvieron las expresiones analíticas de los elementos de la matriz de transferencia para este sistema y se encontró que la introducción del termino topológico, induce un acople de los modos de propagación TM y TE en la interfaz que dividen los medios. Este acople se ve reflejado en la presencia de nuevos términos en la matriz de transferencia, los cuales dependen linealmente del término, $\alpha\Delta\theta/\pi$, (donde α es el coeficiente de estructura fina y $\Delta\theta$ es la diferencia de los parámetros topológicos de los medios involucrados). Estos resultados fueron publicados en [70]
- Los nuevos términos en la matriz de transferencia, introducen correcciones del orden de α^2 en el coeficiente de transmisión/reflexión de *ondas pp* y *ondas ss*. De esta forma, se da lugar a una redistribución de la energía de la onda incidente cuando esta interactúa con la superficie del material. Esto permite transmitir y reflejar ondas con polarización *s* a partir de ondas incidentes con polarización *p* (*ondas ps*) y viceversa (*ondas sp*). (La redistribución de los porcentajes de energía transmitidos y reflejados se presenta en todos los sistemas estudiados en este trabajo).
- Se investigaron algunas de las propiedades electrodinámicas en una película compuesta por un aislante topológico. Se encontró una corrección del orden de α^2 en los términos convencionales para las matrices de transferencia de los modos TM y TE. Además, se mostró que estos términos se acoplan a través de nuevos términos que dependen linealmente de $\alpha\Delta\theta/\pi$. Con estas correcciones, encontramos la posibilidad de; (1) transmitir y reflejar *ondas ps* cuando la transmisión de *ondas pp* es cero; (2) transmitir y reflejar *ondas sp* cuando la transmisión de *ondas ss* es cero.
- Se demostró que si la película tiene un índice de refracción mayor al índice de refracción del medio que la rodea, aparecen las oscilaciones de Fabry-Perót. Sin embargo el termino del axion introduce una corrección del orden de $\alpha^2 \sim 5,32 \times 10^{-5}$, en los coeficientes de transmisión. Por otro lado, cuando el índice de refracción del medio circundante es mayor, entonces las ondas electromagnéticas atraviesan la película por tunelamiento.

7. Conclusiones

- Se examinó el comportamiento de los coeficientes de transmisión y reflexión en una estructura de doble capa con aislantes topológicos. Se mostró que los coeficientes de transmisión toman su valor máximo cuando las ondas electromagnéticas dentro de las dos capas alcanzan la interferencia constructiva. Se demostró que al incrementar el espesor de cada película, el porcentaje de energía transmitido en forma de ondas se restringe a intervalos de frecuencia más pequeños.
- Se encontró que la onda reflejada por la interfaz (que separa dos medios con una topológica no trivial) experimenta una rotación no trivial de Kerr. Adicionalmente, la onda transmitida a través de la interfaz experimenta una rotación no trivial de Faraday. Se mostró, que los ángulos de rotación de Kerr y de Faraday tienen una dependencia lineal con la diferencia de los parámetros topológicos que poseen los medios.
- En el caso de sistemas multicapa, se mostró que los coeficientes de transmisión para *ondas pp* y *ondas ss* presentan intervalos de frecuencia prohibidos, sobre los cuales los coeficientes se hacen cero. Sin embargo, la introducción del término topológico permite la propagación y transmisión de pequeñas cantidades de energía a través de las celdas dentro de estos intervalos de frecuencia. Estas cantidades de energía se presentan en forma de ondas con polarización *p* (o con polarización *s*), las cuales se transmiten a partir de ondas con polarización *s* (o con polarización *p*) incidentes.

Como perspectivas de este trabajo podemos mencionar:

- Analizar el comportamiento que presentan los coeficientes de transmisión y reflexión en películas metálicas rodeadas por medios que poseen diferentes parámetros topológicos.
- Observar la respuesta electromagnética y la estructura de bandas en cristales fotónicos compuestos por capas alternantes de aislantes topológicos y metales.
- Estudiar la propagación de ondas electromagnéticas en sistemas más complejos, tales como superficies esféricas y cilíndricas compuestas por aislantes topológicos.

APÉNDICE A

A.1 Modos de propagación transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM)

Consideremos el sistema de ecuaciones de Maxwell-Lorentz para medios polarizables y magnetizables [97-100],

$$\text{rot} \vec{E}^{(i)\pm} = -\mu^{(i)}(\omega, z) \frac{\partial \vec{H}^{(i)\pm}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\text{div}[\varepsilon^{(i)}(\omega, z) \vec{E}^{(i)\pm}] = 0, \quad (3.4)$$

$$\text{div}[\mu^{(i)}(\omega, z) \vec{H}^{(i)\pm}] = 0, \quad (3.5)$$

$$\text{rot} \vec{H}^{(i)\pm} = \varepsilon^{(i)}(\omega, z) \frac{\partial \vec{E}^{(i)\pm}}{\partial t}, \quad (3.61)$$

donde $i = 1, 2, \dots$, corresponde al i -ésimo medio. Por otro lado, la estructura de los campos es la siguiente

$$\vec{E}^{(i)\pm} = (E_x^{(i)\pm}, E_y^{(i)\pm}, E_z^{(i)\pm}) = (E_{0x}^{(i)\pm}, E_{0y}^{(i)\pm}, E_{0z}^{(i)\pm}) e^{\pm i k_z^{(i)} z} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (A-1)$$

$$\vec{H}^{(i)\pm} = (H_x^{(i)\pm}, H_y^{(i)\pm}, H_z^{(i)\pm}) = (H_{0x}^{(i)\pm}, H_{0y}^{(i)\pm}, H_{0z}^{(i)\pm}) e^{\pm i k_z^{(i)} z} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (A-2)$$

donde $(E_{0x}^{(i)\pm}, E_{0y}^{(i)\pm}, E_{0z}^{(i)\pm})$ y $(H_{0x}^{(i)\pm}, H_{0y}^{(i)\pm}, H_{0z}^{(i)\pm})$ son las amplitudes para cada componente de los campos. El índice $(i) = 1, 2, \dots$ corresponde al i -ésimo medio. Los signos (+) y (-) en los campos indican el sentido en que se propaga la onda, (+) hacia la derecha y (-) hacia a la izquierda. Luego, al reemplazar las ecuaciones (A-1) y (A-2) en ecuaciones (3.4) y (3.5) obtenemos,

$$\nabla \cdot \vec{E}^{(i)\pm} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{E}^{(i)\pm} = i k_x E_x^{(i)\pm} \pm i k_z^{(i)} E_z^{(i)\pm} = 0, \quad (A-3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}^{(i)\pm} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{H}^{(i)\pm} = i k_x H_x^{(i)\pm} \pm i k_z^{(i)} H_z^{(i)\pm} = 0, \quad (A-4)$$

Por otra parte, los rotacionales de los campos (A-1) y (A-2) son respectivamente,

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}^{(i)\pm} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ ik_x & 0 & \pm ik_z^{(i)} \\ E_x^{(i)\pm} & E_y^{(i)\pm} & E_z^{(i)\pm} \end{vmatrix} = \\ &= \mp \hat{e}_x \left(ik_z^{(i)} E_y^{(i)\pm} \right) + \hat{e}_y \left(\pm ik_z^{(i)} E_x^{(i)\pm} - ik_x E_z^{(i)\pm} \right) + \hat{e}_z \left(ik_x E_y^{(i)\pm} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}^{(i)\pm} &= \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ ik_x & 0 & \pm ik_z^{(i)} \\ H_x^{(i)\pm} & H_y^{(i)\pm} & H_z^{(i)\pm} \end{vmatrix} = \\ &= \mp \hat{e}_x \left(ik_z^{(i)} H_y^{(i)\pm} \right) + \hat{e}_y \left(\pm ik_z^{(i)} H_x^{(i)\pm} - ik_x H_z^{(i)\pm} \right) + \hat{e}_z \left(ik_x H_y^{(i)\pm} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

donde $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ son vectores unitarios en las direcciones x, y, z respectivamente. Por otra parte, las derivadas temporales de (A-1) y (A-2) están dadas de la siguiente forma,

$$-\mu^{(i)} \frac{\partial \vec{H}^{(i)\pm}}{\partial t} = -\mu^{(i)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(H_0^{(i)\pm} \right) e^{ik_z^{(i)\pm} z} e^{i(k_x x - \omega t)} \right] = i\omega \mu^{(i)} \vec{H}^{(i)\pm}, \quad (\text{A-7})$$

$$\varepsilon^{(i)} \frac{\partial \vec{E}^{(i)\pm}}{\partial t} = \varepsilon^{(i)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(E_0^{(i)\pm} \right) e^{ik_z^{(i)\pm} z} e^{i(k_x x - \omega t)} \right] = -i\omega \varepsilon^{(i)} \vec{E}^{(i)\pm}, \quad (\text{A-8})$$

Luego, reagrupando los resultados obtenidos en (A-3)-(A-8) dentro de las ecuaciones (3.3) y (3.6) obtenemos los sistemas correspondientes a los modos de propagación transversal magnético (TM) y transversal eléctrico (TE) [97-100].

Modos TE:

$$\text{rot} \vec{E}^{(i)\pm} = -\mu^{(i)}(\omega, z) \frac{\partial \vec{H}^{(i)\pm}}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} \mp k_z^{(i)} E_y^{(i)\pm} = \omega \mu^{(i)} H_x^{(i)\pm} \\ \left(\pm k_z^{(i)} E_x^{(i)\pm} - k_x E_z^{(i)\pm} \right) = \omega \mu^{(i)} H_y^{(i)\pm} \\ k_x E_y^{(i)\pm} = \omega \mu^{(i)} H_z^{(i)\pm} \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

Modos TM:

$$\text{rot} \vec{H}^{(i)\pm} = \varepsilon^{(i)}(\omega, z) \frac{\partial \vec{E}^{(i)\pm}}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} \mp k_z^{(i)} H_y^{(i)\pm} = -\omega \varepsilon^{(i)} E_x^{(i)\pm} \\ \left(\pm k_z^{(i)} H_x^{(i)\pm} - k_x H_z^{(i)\pm} \right) = -\omega \varepsilon^{(i)} E_y^{(i)\pm} \\ k_x H_y^{(i)\pm} = -\omega \varepsilon^{(i)} E_z^{(i)\pm} \end{cases} \quad (\text{A-10})$$

A.2 Continuidad de los campos en una interfaz entre dos medios polarizables y magnetizables con aislantes topológicos.

A continuación, vamos a obtener las expresiones que describen la transición de las ondas electromagnéticas cuando atraviesan una interfaz que separa dos medios polarizables, magnetizables y que poseen una topológica no trivial. Tenemos entonces las siguientes relaciones de continuidad para los campos [97-100],

$$\begin{cases} D_z^{(i)\pm} = D_z^{(j)\pm} \\ B_z^{(i)\pm} = B_z^{(j)\pm} \end{cases} \quad \begin{cases} E_x^{(i)\pm} = E_x^{(j)\pm} \\ E_y^{(i)\pm} = E_y^{(j)\pm} \end{cases} \quad \begin{cases} H_x^{(i)\pm} = H_x^{(j)\pm} \\ H_y^{(i)\pm} = H_y^{(j)\pm} \end{cases} \quad (3.11)$$

donde $(i) = 1, 2, \dots$, corresponde al i -ésimo medio. Luego, para una interfaz que separa dos medios tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} D_z^{(1)+} + D_z^{(1)-} = D_z^{(2)+} + D_z^{(2)-} \\ B_z^{(1)+} + B_z^{(1)-} = B_z^{(2)+} + B_z^{(2)-} \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} E_x^{(1)+} + E_x^{(1)-} = E_x^{(2)+} + E_x^{(2)-} \\ E_y^{(1)+} + E_y^{(1)-} = E_y^{(2)+} + E_y^{(2)-} \end{cases} , \quad (A-11)$$

$$\begin{cases} H_x^{(1)+} + H_x^{(1)-} = H_x^{(2)+} + H_x^{(2)-} \\ H_y^{(1)+} + H_y^{(1)-} = H_y^{(2)+} + H_y^{(2)-} \end{cases} ,$$

donde las componentes $D_z^{(i)\pm}$, $H_x^{(i)\pm}$ y $H_y^{(i)\pm}$ están definidas por las relaciones constitutivas para los aislantes topológicos, las cuales están dadas de la siguiente forma [42],

$$\vec{D}^{(i)\pm} = \varepsilon^{(i)} \vec{E}^{(i)\pm} - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} (c_0 \vec{B}^{(i)\pm}), \quad (3.9)$$

$$c_0 \vec{H}^{(i)\pm} = \frac{c_0 \vec{B}^{(i)\pm}}{\mu^{(i)}} + \alpha \frac{\theta^{(i)}}{\pi} \frac{\vec{E}^{(i)\pm}}{\mu_0}. \quad (3.10)$$

Entonces, las relaciones de continuidad para $D_z^{(i)\pm}$, $H_x^{(i)\pm}$ y $H_y^{(i)\pm}$ en el sistema (A-11) adoptan la siguiente forma,

- Para $(D_z^{(1)+} + D_z^{(1)-} = D_z^{(2)+} + D_z^{(2)-})$,
$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} E_z^{(1)+} - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} (c_0 B_z^{(1)+}) + \varepsilon^{(1)} E_z^{(1)-} - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} (c_0 B_z^{(1)-}) &= \varepsilon^{(2)} E_z^{(2)-} - \\ \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} (c_0 B_z^{(2)-}) + \varepsilon^{(2)} E_z^{(2)+} - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} (c_0 B_z^{(2)+}) & \end{aligned} \quad (A-12)$$

- Para $(H_x^{(1)+} + H_x^{(1)-} = H_x^{(2)+} + H_x^{(2)-})$,

$$\frac{B_x^{(1)+}}{\mu^{(1)}} + \alpha \frac{\theta^{(1)} E_x^{(1)+}}{\pi c_0 \mu_0} + \frac{B_x^{(1)-}}{\mu^{(1)}} + \alpha \frac{\theta^{(1)} E_x^{(1)-}}{\pi c_0 \mu_0} = \frac{B_x^{(2)+}}{\mu^{(2)}} + \alpha \frac{\theta^{(2)} E_x^{(2)+}}{\pi c_0 \mu_0} + \frac{B_x^{(2)-}}{\mu^{(2)}} + \alpha \frac{\theta^{(2)} E_x^{(2)-}}{\pi c_0 \mu_0}, \quad (\text{A-13})$$

- Para $(H_y^{(1)+} + H_y^{(1)-} = H_y^{(2)+} + H_y^{(2)-})$,

$$\frac{B_y^{(1)+}}{\mu^{(1)}} + \alpha \frac{\theta^{(1)} E_y^{(1)+}}{\pi c_0 \mu_0} + \frac{B_y^{(1)-}}{\mu^{(1)}} + \alpha \frac{\theta^{(1)} E_y^{(1)-}}{\pi c_0 \mu_0} = \frac{B_y^{(2)+}}{\mu^{(2)}} + \alpha \frac{\theta^{(2)} E_y^{(2)+}}{\pi c_0 \mu_0} + \frac{B_y^{(2)-}}{\mu^{(2)}} + \alpha \frac{\theta^{(2)} E_y^{(2)-}}{\pi c_0 \mu_0}, \quad (\text{A-14})$$

Luego, con ayuda de (A-9) y (A-10) podemos expresar las relaciones de continuidad (A-12)-(A-14) en términos de las componentes $E_y^{(1)+}$, $E_y^{(1)-}$, $H_y^{(1)+}$, $H_y^{(1)-}$, $E_y^{(2)+}$, $E_y^{(2)-}$, $H_y^{(2)+}$ y $H_y^{(2)-}$, tal y como se muestra a continuación,

- Para la continuidad de la componente z del desplazamiento eléctrico $(D_z^{(1)+} + D_z^{(1)-} = D_z^{(2)+} + D_z^{(2)-})$ encontramos,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} \left(-\frac{k_x H_y^{(1)+}}{\omega \varepsilon^{(1)}} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \left(c_0 \frac{k_x E_y^{(1)+}}{\omega} \right) + \varepsilon^{(1)} \left(-\frac{k_x H_y^{(1)-}}{\omega \varepsilon^{(1)}} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \left(c_0 \frac{k_x E_y^{(1)-}}{\omega} \right) = \\ \varepsilon^{(2)} \left(-\frac{k_x H_y^{(2)+}}{\omega \varepsilon^{(2)}} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \left(c_0 \frac{k_x E_y^{(2)+}}{\omega} \right) + \varepsilon^{(2)} \left(-\frac{k_x H_y^{(2)-}}{\omega \varepsilon^{(2)}} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \left(c_0 \frac{k_x E_y^{(2)-}}{\omega} \right), \\ \Rightarrow \left(-H_y^{(1)+} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \left(c_0 E_y^{(1)+} \right) + \left(-H_y^{(1)-} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \left(c_0 E_y^{(1)-} \right) = \\ \left(-H_y^{(2)+} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \left(c_0 E_y^{(2)+} \right) + \left(-H_y^{(2)-} \right) - \varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \left(c_0 E_y^{(2)-} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Multiplicando y dividiendo los término $H_y^{(i)\pm}$ (donde $(i) = 1, 2$) por $-c^{(i)} \mu^{(i)}$ en la ecuación (A-15) obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0 \right) E_y^{(1)+} + \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0 \right) E_y^{(1)-} + \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)+} + \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)-} = \\ \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0 \right) E_y^{(2)+} + \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0 \right) E_y^{(2)-} + \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(1)+} + \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)-}, \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

- Para la continuidad de la componente x de la intensidad magnética $(H_x^{(1)+} + H_x^{(1)-} = H_x^{(2)+} + H_x^{(2)-})$ obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^{(1)}} \left(-\frac{k_z^{(1)} E_y^{(1)+}}{\omega} \right) + \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{1}{c_0 \mu_0} \left(\frac{k_z^{(1)} H_y^{(1)+}}{\omega \varepsilon^{(1)}} \right) + \frac{1}{\mu^{(1)}} \left(\frac{k_z^{(1)} E_y^{(1)-}}{\omega \mu^{(1)}} \right) + \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{1}{c_0 \mu_0} \left(-\frac{k_z^{(1)} H_y^{(1)-}}{\omega \varepsilon^{(1)}} \right) = \\ \frac{1}{\mu^{(2)}} \left(-\frac{k_z^{(2)} E_y^{(2)+}}{\omega \mu^{(2)}} \right) + \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{1}{c_0 \mu_0} \left(\frac{k_z^{(2)} H_y^{(2)+}}{\omega \varepsilon^{(2)}} \right) + \frac{1}{\mu^{(2)}} \left(\frac{k_z^{(2)} E_y^{(2)-}}{\omega \mu^{(2)}} \right) + \alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{1}{c_0 \mu_0} \left(-\frac{k_z^{(2)} H_y^{(2)-}}{\omega \varepsilon^{(2)}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A-17})$$

- Para la continuidad de la componente y de la intensidad magnética $(H_y^{(1)+} + H_y^{(1)-} = H_y^{(2)+} + H_y^{(2)-})$ encontramos

$$\frac{B_y^{(1)+}}{\mu^{(1)}} + \alpha \frac{\theta^{(1)} E_y^{(1)+}}{\pi c_0 \mu_0} + \frac{B_y^{(1)-}}{\mu^{(1)}} + \alpha \frac{\theta^{(1)} E_y^{(1)-}}{\pi c_0 \mu_0} = \frac{B_y^{(2)+}}{\mu^{(2)}} + \alpha \frac{\theta^{(2)} E_y^{(2)+}}{\pi c_0 \mu_0} + \frac{B_y^{(2)-}}{\mu^{(2)}} + \alpha \frac{\theta^{(2)} E_y^{(2)-}}{\pi c_0 \mu_0}, \quad (\text{A-18})$$

Puesto que $\vec{B}^{(i)\pm} = \mu^{(i)}(\omega, z) \vec{H}^{(i)\pm}$, la ecuación (A-18) se transforma en,

$$\begin{aligned} H_y^{(1)+} + \left(\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(1)+} + H_y^{(1)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(1)-} &= \\ &= H_y^{(2)+} + \left(\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(2)+} + H_y^{(2)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(2)-}, \\ \Rightarrow \left(\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(1)+} + \left(\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(1)-} + H_y^{(1)+} + H_y^{(1)-} &= \\ &= \left(\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(2)+} + \left(\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi c_0 \mu_0} \right) E_y^{(2)-} + H_y^{(2)+} + H_y^{(2)-}, \end{aligned} \quad (\text{A-19})$$

Por otro lado, puesto que $\varepsilon_0 c_0 = 1/c_0 \mu_0$, entonces la condición (A-18) resulta ser equivalente a la condición (A-15). Ahora, veamos cual es la estructura de las relaciones de continuidad $E_x^{(i)\pm}$, $E_y^{(i)\pm}$ y $B_z^{(i)\pm}$. Con ayuda de las relaciones (A-9) y (A-10) podemos expresar el sistema de ecuaciones en términos de las componentes $E_y^{(1)+}$, $E_y^{(1)-}$, $H_y^{(1)+}$, $H_y^{(1)-}$, $E_y^{(2)+}$, $E_y^{(2)-}$, $H_y^{(2)+}$ y $H_y^{(2)-}$, tal y como se muestra a continuación,

- Para la continuidad de la componente x del campo eléctrico $(E_x^{1+} + E_x^{1-} = E_x^{2+} + E_x^{2-})$ obtenemos,

$$\frac{k_z^1 H_y^{1+}}{\omega \varepsilon^{(1)}} - \frac{k_z^1 H_y^{1-}}{\omega \varepsilon^{(1)}} = \frac{k_z^2 H_y^{2+}}{\omega \varepsilon^{(2)}} - \frac{k_z^2 H_y^{2-}}{\omega \varepsilon^{(2)}},$$

Multiplicando y dividiendo $H_y^{(i)\pm}$ (donde $(i) = 1, 2$) por $-c^{(i)} \mu^{(i)}$ en la ecuación (A-20) encontramos,

$$\begin{aligned} \Rightarrow (0)E_y^{(1)+} + (0)E_y^{(1)-} + \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)+} - \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}} \right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}} \right) H_y^{(1)-} &= \\ = (0)E_y^{(2)+} + (0)E_y^{(2)-} + \left(\frac{k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)+} - \left(\frac{k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}} \right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}} \right) H_y^{(2)-}, \end{aligned} \quad (\text{A-21})$$

- Para la continuidad de la componente y del campo eléctrico $(E_y^{(1)+} + E_y^{(1)-} = E_y^{(2)+} + E_y^{(2)-})$ tenemos,

$$E_y^{(1)+} + E_y^{(1)-} + (0)H_y^{(1)+} + (0)H_y^{(1)-} = E_y^{(2)+} + E_y^{(2)-} + (0)H_y^{(2)+} + (0)H_y^{(2)-}, \quad (\text{A-22})$$

- Para la continuidad de la componente z del campo magnético $(B_z^{(1)+} + B_z^{(1)-} = B_z^{(2)+} + B_z^{(2)-})$ encontramos lo siguiente,

$$\frac{k_x E_y^{(1)+}}{\omega} + \frac{k_x E_y^{(1)-}}{\omega} = \frac{k_x E_y^{(2)+}}{\omega} + \frac{k_x E_y^{(1)-}}{\omega},$$

$$\Rightarrow E_y^{(1)+} + E_y^{(1)-} + (0)H_y^{(1)+} + (0)H_y^{(1)-} = E_y^{(2)+} + E_y^{(2)-} + (0)H_y^{(2)+} + (0)H_y^{(2)-}, \quad (\text{A-23})$$

Como podemos observar la condición de frontera $(E_y^{(1)+} + E_y^{(1)-} = E_y^{(2)+} + E_y^{(2)-})$ es equivalente a la condición de frontera $(B_z^{(1)+} + B_z^{(1)-} = B_z^{(2)+} + B_z^{(2)-})$. Luego, al reagrupar las relaciones de continuidad obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

- Para la componente z del desplazamiento eléctrico, $D_z^{(i)\pm} = D_z^{(j)\pm}$:

$$\left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0\right) E_y^{(1)+} + \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0\right) E_y^{(1)-} + \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}}\right) H_y^{(1)+} + \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}}\right) H_y^{(1)-} =$$

$$\left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0\right) E_y^{(2)+} + \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} c_0\right) E_y^{(2)-} + \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}}\right) H_y^{(2)+} + \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}}\right) H_y^{(2)-}, \quad (\text{A-15})$$

- Para la componente x de la intensidad magnética, $H_x^{(i)\pm} = H_x^{(j)\pm}$:

$$\left(-\frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}}\right) E_y^{(1)+} + \left(\frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}}\right) E_y^{(1)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{k_z^{(1)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(1)}}\right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}}\right) H_y^{(1)+} +$$

$$\left(-\alpha \frac{\theta^{(1)}}{\pi} \frac{k_z^{(1)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(1)}}\right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}}\right) H_y^{(1)-} =$$

$$\left(-\frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right) E_y^{(2)+} + \left(\frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}}\right) E_y^{(2)-} + \left(\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{k_z^{(2)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(2)}}\right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}}\right) H_y^{(2)+} +$$

$$\left(-\alpha \frac{\theta^{(2)}}{\pi} \frac{k_z^{(2)}}{c_0 \mu_0 \varepsilon^{(2)}}\right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}}\right) H_y^{(2)-}, \quad (\text{A-17})$$

- Para la componente x del campo eléctrico, $E_x^{(i)\pm} = E_x^{(j)\pm}$:

$$(0)E_y^{(1)+} + (0)E_y^{(1)-} + \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}}\right) H_y^{(1)+} - \left(\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}}\right) \left(\frac{-c^{(1)} \mu^{(1)}}{-c^{(1)} \mu^{(1)}}\right) H_y^{(1)-} =$$

$$(0)E_y^{(2)+} + (0)E_y^{(2)-} + \left(\frac{k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}}\right) H_y^{(2)+} - \left(\frac{k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}}\right) \left(\frac{-c^{(2)} \mu^{(2)}}{-c^{(2)} \mu^{(2)}}\right) H_y^{(2)-}, \quad (\text{A-21})$$

- Para la componente y del campo eléctrico $E_y^{(i)\pm} = E_y^{(j)\pm}$:

$$E_y^{(1)+} + E_y^{(1)-} + (0)H_y^{(1)+} + (0)H_y^{(1)-} = E_y^{(2)+} + E_y^{(2)-} + (0)H_y^{(2)+} + (0)H_y^{(2)-}, \quad (\text{A-22})$$

APÉNDICE B

B.1 Sistema de ecuaciones para ondas TM incidentes.

Consideremos el sistema de la figura 3.1 del capítulo 3. Supongamos una onda electromagnética en modo TM con amplitud $H_y^{(1)+}$, la cual incide desde la región en $z < 0$ con ángulo de incidencia φ_1 ; en la región $z > 0$ solo consideramos campos que se alejan de la película. Luego, en forma matricial tenemos [70,78],

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ 0 \\ -\mu^{(2)}c^{(2)}H_y^{(2)+} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E_y^{(1)-} \\ -\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)+} \\ -\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-} \end{pmatrix}. \quad (\text{B- 1})$$

Del sistema (B-1) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$E_y^{(2)+} = M_{12}E_y^{(1)-} + M_{13}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)+}) + M_{14}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}), \quad (\text{B- 2})$$

$$0 = M_{22}E_y^{(1)-} + M_{23}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)+}) + M_{24}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}), \quad (\text{B- 3})$$

$$-\mu^{(2)}c^{(2)}H_y^{(2)+} = M_{32}E_y^{(1)-} + M_{33}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)+}) + M_{34}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}), \quad (\text{B- 4})$$

$$0 = M_{42}E_y^{(1)-} + M_{43}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)+}) + M_{44}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}), \quad (\text{B- 5})$$

Tomemos las ecuaciones (B-3) y (B-5). A continuación, consideremos $H_y^{(1)+}$ conocido. Obtenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Luego, resolviendo $E_y^{(1)-}$ en términos de $H_y^{(1)+}$:

$$E_y^{(1)-} = \mu^{(1)}c^{(1)} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} H_y^{(1)+}, \quad (\text{B- 6})$$

Ahora resolvemos las ecuaciones (B-3) y (B-5) para obtener $H_y^{(1)-}$ en términos de $H_y^{(1)+}$:

$$H_y^{(1)-} = \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} H_y^{(1)+}, \quad (\text{B- 7})$$

Reemplazando, las ecuaciones (B-6) y (B-7) en la ecuación (B-2) encontramos los siguiente,

$$E_y^{(2)+} = \mu^{(1)}c^{(1)} \left(M_{12} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{13} - M_{14} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right) H_y^{(1)+}, \quad (\text{B- 8})$$

Ahora, introducimos las ecuaciones (B-6) y (B-7) en la ecuación (B-4). Con esto, encontramos la siguiente expresión,

$$H_y^{(2)+} = -\frac{\mu^{(1)}c^{(1)}}{\mu^{(2)}c^{(2)}} \left(M_{32} \frac{M_{44}M_{23}-M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{33} - M_{34} \frac{M_{42}M_{23}-M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24}} \right) H_y^{(1)+}, \quad (B-9)$$

B.1.1 Vectores de Poynting para ondas TM incidentes

Con ayuda de las ecuaciones (A-9) y (A-10) obtenemos los campos incidentes,

$$\begin{cases} H_{inc, y}^p = H_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_{inc, x}^p = \frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}\omega} H_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-10)$$

donde $H_{inc, y}^p$ es la componente y de la intensidad magnética incidente con polarización p (o modo TM) y $E_{inc, x}^p$ es la componente x del campo eléctrico incidente con polarización p (o modo TM). El termino $H_{y0}^{(1)+}$ es la amplitud de $H_{inc, y}^p$. Luego, el vector de Poynting para una onda p -incidente está dada por la siguiente expresión,

$$S_{inc, z}^p = \frac{1}{2} (E_{inc, x}^p) (H_{inc, y}^p)^* = \frac{1}{2} \frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}\omega} |H_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (B-11)$$

De la misma forma podemos obtener los vectores de Poynting para las ondas reflejadas y transmitidas:

- Para una onda p reflejada:

$$\begin{cases} H_{refl, y}^p = \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} H_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_{refl, x}^p = -\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}\omega} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} H_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-12)$$

Luego,

$$S_{refl, z}^p = \frac{1}{2} (E_{refl, x}^p) (H_{refl, y}^p)^* = -\frac{1}{2} \frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}\omega} \frac{|M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}|^2}{|M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}|^2} |H_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (B-13)$$

donde $H_{refl, y}^p$ es la componente y de la intensidad magnética reflejada con polarización p (o modo TM) y $E_{refl, x}^p$ es la componente x del campo eléctrico reflejado con polarización p (o modo TM).

- Para onda s reflejada:

$$\begin{cases} E_{refl, y}^s = \mu^{(1)} c^{(1)} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} H_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ H_{refl, x}^s = \mu^{(1)} c^{(1)} \frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)} \omega} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} H_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-14)$$

donde $H_{refl, x}^s$ es la componente x de la intensidad magnética reflejada con polarización s (o modo TE) y $E_{refl, y}^s$ es la componente y del campo eléctrico reflejado con polarización s (o modo TE).

Luego,

$$S_{refl, z}^s = -\frac{1}{2} (E_{refl, y}^s) (H_{refl, x}^s)^* = -(\mu^{(1)} c^{(1)})^2 \frac{1}{2 \mu^{(1)} \omega} \left| \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} \right|^2 |H_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (B-15)$$

- Para una onda p transmitida:

$$\begin{cases} H_{tr, y}^p = -\frac{\mu^{(1)} c^{(1)}}{\mu^{(2)} c^{(2)}} \left(M_{32} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{33} - M_{34} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right) H_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_{tr, x}^p = -\frac{k_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)} \omega} \frac{\mu^{(1)} c^{(1)}}{\mu^{(2)} c^{(2)}} \left(M_{32} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{33} - M_{34} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right) H_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-16)$$

Luego,

$$S_{tr, z}^p = \frac{1}{2} (E_{tr, x}^p) (H_{tr, y}^p)^* = \left(\frac{\mu^{(1)} c^{(1)}}{\mu^{(2)} c^{(2)}} \right)^2 \frac{1}{2 \varepsilon^{(2)} \omega} \left| M_{32} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{33} - M_{34} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right|^2 |H_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (B-17)$$

donde $H_{tr, y}^p$ es la componente y de la intensidad magnética transmitida con polarización p (o modo TM) y $E_{tr, x}^p$ es la componente x del campo eléctrico transmitido con polarización p (o modo TM).

- Para una onda s transmitida:

$$\begin{cases} E_{tr, y}^s = \mu^{(1)} c^{(1)} \left(M_{12} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{13} - M_{14} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right) H_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ H_{tr, x}^s = -\frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)} \omega} \mu^{(1)} c^{(1)} \left(M_{12} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{13} - M_{14} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right) H_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-18)$$

donde $H_{tr, x}^s$ es la componente x de la intensidad magnética transmitida con polarización s (o modo TE) y $E_{tr, y}^s$ es la componente y del campo eléctrico transmitido con polarización s (o modo TE).

Luego,

$$S_{tr, z}^s = -\frac{1}{2}(E_{tr, y}^s)(H_{tr, x}^s)^*,$$

$$= (\mu^{(1)} c^{(1)})^2 \frac{1}{2} \frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)} \omega} \left| M_{12} \frac{M_{44}M_{23}-M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{13} - M_{14} \frac{M_{42}M_{23}-M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24}} \right|^2 \left| H_{y0}^{(1)+} \right|^2, \quad (B-19)$$

B.1.2 Coeficientes de reflexión y transmisión para ondas TM incidentes

Podemos obtener los coeficientes de transmisión y reflexión con a través de la razón de los vectores de Poynting [70,78].

Coeficiente de reflexión para la onda p reflejada:

$$R_{pp} = \frac{-S_{refl, z}^p}{S_{inc, z}^p} = |r_{pp}|^2 = \left| \frac{M_{42}M_{23}-M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24}} \right|^2, \quad (B-20)$$

donde r_{pp} es la amplitud de reflexión para ondas transmitidas con polarización p a partir de ondas p incidentes.

Coeficiente de reflexión para la onda s reflejada:

$$R_{ps} = \frac{-S_{refl, z}^s}{S_{inc, z}^p} = |r_{ps}|^2 = \left| \frac{M_{44}M_{23}-M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} \right|^2, \quad (B-21)$$

donde r_{ps} es la amplitud de reflexión para ondas transmitidas con polarización s a partir de ondas p incidentes.

Coeficiente de transmisión para la onda p transmitida:

$$T_{pp} = \frac{S_{tr, z}^p}{S_{inc, z}^p} = z_{(s)}^{(21)} \left| M_{32} \frac{M_{44}M_{23}-M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{33} - M_{34} \frac{M_{42}M_{23}-M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24}} \right|^2,$$

$$\Rightarrow T_{pp} = z_{(s)}^{(21)} \left| M_{32}r_{ps} - M_{33} - M_{34}r_{pp} \right|^2 = z_{(s)}^{(21)} \left| t_{pp}^{(21)} \right|^2 \quad (B-22)$$

donde t_{pp} es la amplitud de transmisión para ondas transmitidas con polarización p a partir de ondas p incidentes.

Coeficiente de transmisión para la onda s transmitida:

$$T_{ps} = \frac{S_{tr, z}^s}{S_{inc, z}^p} = z_{(s)}^{(21)} \left| M_{12} \frac{M_{44}M_{23} - M_{24}M_{43}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{13} - M_{14} \frac{M_{42}M_{23} - M_{22}M_{43}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right|^2,$$

$$\Rightarrow T_{ps} = z_{(s)}^{(21)} |M_{12}r_{ps} - M_{13} - M_{14}r_{pp}|^2 = z_{(s)}^{(21)} |t_{ps}^{(21)}|^2 \quad (\text{B- 23})$$

donde $z_{(s)}^{(21)} = \frac{\mu^{(1)}k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}k_z^{(1)}}$ y donde t_{pp} es la amplitud de transmisión para ondas transmitidas con polarización p a partir de ondas p incidentes.

B.2. Sistema de ecuaciones para ondas TE incidentes

Consideremos el sistema de la figura 3.1 del capítulo 3. Supongamos una onda electromagnética en modo TE con amplitud $E_y^{(1)+}$, la cual incide desde la región en $z < 0$ con ángulo de incidencia φ_1 ; en la región $z > 0$ solo consideramos campos que se alejan de la película. Luego, en forma matricial tenemos [70, 78],

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ 0 \\ -\mu^{(2)}c^{(2)}H_y^{(2)+} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^{(1)+} \\ E_y^{(1)-} \\ 0 \\ -\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-} \end{pmatrix}, \quad (\text{B- 24})$$

Luego, de la ecuación (B-25) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$E_y^{(2)+} = M_{11}E_y^{(1)+} + M_{12}E_y^{(1)-} + M_{14}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}), \quad (\text{B- 25})$$

$$0 = M_{21}E_y^{(1)+} + M_{22}E_y^{(1)-} + M_{24}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}), \quad (\text{B- 26})$$

$$-\mu^{(2)}c^{(2)}H_y^{(2)+} = M_{31}E_y^{(1)+} + M_{32}E_y^{(1)-} + M_{34}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}), \quad (\text{B- 27})$$

$$0 = M_{41}E_y^{(1)+} + M_{42}E_y^{(1)-} + M_{44}(-\mu^{(1)}c^{(1)}H_y^{(1)-}). \quad (\text{B- 28})$$

Consideremos las ecuaciones (B-27) y (B-29). Suponiendo conocido $E_y^{(1)+}$ tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo para $E_y^{(1)-}$ en términos de $E_y^{(1)+}$ tenemos:

$$\Rightarrow E_y^{(1)-} = \frac{M_{24}M_{41} - M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} E_y^{(1)+}, \quad (\text{B- 29})$$

Ahora resolvemos las ecuaciones (B-27) y (B-29) para obtener $H_y^{(1)-}$ en términos de $E_y^{(1)+}$:

$$\Rightarrow H_y^{(1)-} = \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{\mu^{(1)}c^{(1)}(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} E_y^{(1)+}, \quad (\text{B- 30})$$

A continuación, obtenemos los campos $E_y^{(2)+}$ y $H_y^{(2)+}$ en términos de la onda incidente $E_y^{(1)+}$. Para esto, reemplazamos (B-29) y (B-30) en (B-26) y (B-27). Con lo anterior, obtenemos las siguientes expresiones

$$E_y^{(2)+} = \left(M_{11} + M_{12} \frac{M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{14} \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} \right) E_y^{(1)+}, \quad (\text{B- 31})$$

$$H_y^{(2)+} = -\frac{1}{\mu^{(2)}c^{(2)}} \left(M_{31} + M_{32} \frac{M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{34} \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} \right) E_y^{(1)+}, \quad (\text{B- 32})$$

B.2.1 Vectores de Poynting para ondas TE incidentes

Con ayuda de las ecuaciones (A-9) y (A-10) obtenemos los campos incidentes,

$$\begin{cases} E_{inc, y}^s = E_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ H_{inc, x}^s = -\frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}\omega} E_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (\text{B- 33})$$

donde $E_{inc, y}^p$ es la componente y del campo eléctrico incidente con polarización s (o modo TE) y $H_{inc, x}^p$ es la componente x de la intensidad magnética incidente con polarización s (o modo TE). El termino $E_{y0}^{(1)+}$ es la amplitud de $E_{inc, y}^s$. Luego, el vector de Poynting para una onda s -incidente está dada por la siguiente expresión,

$$S_{inc, z}^s = -\frac{1}{2} (E_{inc, y}^s) (H_{inc, x}^s)^* = \frac{1}{2} \frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}\omega} |E_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (\text{B- 34})$$

De la misma forma podemos obtener los vectores de Poynting para las ondas reflejadas y transmitidas:

- Para una onda s reflejada:

$$\begin{cases} E_{refl, y}^s = \frac{M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} E_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ H_{refl, x}^s = \frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}\omega} \frac{M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} E_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (\text{B- 35})$$

donde $E_{refl, y}^s$ es la componente y del campo eléctrico reflejado con polarización s (o modo TE) y $H_{refl, x}^s$ es la componente x de la intensidad magnética reflejada con polarización s (o modo TE).

Luego,

$$S_{refl, z}^s = -\frac{1}{2}(E_{refl, x}^p)(H_{refl, y}^p)^* = -\frac{1}{2} \frac{k_z^{(1)}}{\mu^{(1)}\omega} \frac{|M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}|^2}{|M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}|^2} |E_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (B-36)$$

- Para una onda p reflejada:

$$\begin{cases} H_{refl, y}^p = \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{\mu^{(1)}c^{(1)}(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} E_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_{refl, x}^p = -\frac{k_z^{(1)}}{\varepsilon^{(1)}\omega} \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{\mu^{(1)}c^{(1)}(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} E_{y0}^{(1)+} e^{-ik_z^{(1)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-37)$$

donde $H_{refl, y}^p$ es la componente y de la intensidad magnética reflejada con polarización s (o modo TE) y $E_{refl, x}^p$ la componente x del campo eléctrico reflejada con polarización s (o modo TE).

Luego,

$$S_{refl, z}^p = \frac{1}{2}(E_{refl, x}^p)(H_{refl, y}^p)^* = -\frac{1}{2} \frac{k_z^{81})}{(\mu^{(1)}c^{(1)})^2 \varepsilon^{(1)}\omega} \left| \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} \right|^2 |E_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (B-38)$$

- Para una onda p transmitida:

$$\begin{cases} H_{tr, y}^p = -\frac{1}{\mu^{(2)}c^{(2)}} \left(M_{31} + M_{32} \frac{M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{34} \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} \right) E_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ E_{tr, x}^p = -\frac{1}{\mu^{(2)}c^{(2)}} \frac{ik_z^{(2)}}{\varepsilon^{(2)}\omega} \left(M_{31} + M_{32} \frac{M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{34} \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} \right) E_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)}} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-39)$$

donde $H_{tr, y}^p$ es la componente y de la intensidad magnética transmitida con polarización p (o modo TM) y $E_{tr, x}^p$ la componente x del campo eléctrico transmitida con polarización p (o modo TM).

Luego,

$$S_{tr, z}^p = \frac{1}{2}(E_{tr, x}^p)(H_{tr, y}^p)^* = \frac{1}{2} \frac{k_z^{(2)}}{(\mu^{(2)}c^{(2)})^2 \varepsilon^{(2)}\omega} \left| M_{31} + M_{32} \frac{M_{24}M_{41}-M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22}-M_{24}M_{42}} - M_{34} \frac{M_{22}M_{41}-M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44}-M_{42}M_{24})} \right|^2 |E_{y0}^{(1)+}|^2, \quad (B-40)$$

- Para una onda s transmitida:

$$\begin{cases} E_{tr, y}^s = \left(M_{11} + M_{12} \frac{M_{24}M_{41} - M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{14} \frac{M_{22}M_{41} - M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24})} \right) E_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)} z} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ H_{tr, x}^s = -\frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}\omega} \left(M_{11} + M_{12} \frac{M_{24}M_{41} - M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{14} \frac{M_{22}M_{41} - M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24})} \right) E_{y0}^{(1)+} e^{ik_z^{(2)} z} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{cases} \quad (B-41)$$

donde $E_{tr, y}^s$ es la componente y del campo eléctrico transmitido con polarización s (o modo TM) y $H_{tr, x}^s$ la componente x de la intensidad magnética transmitida con polarización s (o modo TM).

Luego,

$$S_{tr, z}^s = -\frac{1}{2} (E_{tr, y}^s) (H_{tr, x}^s)^* = \frac{1}{2} \frac{k_z^{(2)}}{\mu^{(2)}\omega} \left| M_{11} + M_{12} \frac{M_{24}M_{41} - M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{14} \frac{M_{22}M_{41} - M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24})} \right|^2 |E_y^{(1)+}|^2, \quad (B-42)$$

B.2.2. Coeficientes de reflexión y transmisión para ondas TM incidentes

Podemos obtener los coeficientes de transmisión y reflexión con a través de la razón de los vectores de Poynting [70,78]

Coeficiente de reflexión para la onda s reflejada:

$$R_{ss} = \frac{-S_{refl, z}^s}{S_{inc, z}^s} = |r_{ss}|^2 = \left| \frac{M_{24}M_{41} - M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} \right|^2, \quad (B-43)$$

donde r_{ss} es la amplitud de reflexión para ondas reflejadas con polarización s a partir de ondas s incidentes.

Coeficiente de reflexión para la onda p reflejada:

$$R_{sp} = \frac{-S_{refl, z}^p}{S_{inc, z}^p} = |r_{sp}|^2 = \left| \frac{M_{22}M_{41} - M_{42}M_{21}}{M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24}} \right|^2, \quad (B-44)$$

donde r_{ss} es la amplitud de reflexión para ondas reflejadas con polarización s a partir de ondas s incidentes.

Coeficiente de transmisión para la onda p transmitida:

$$T_{sp} = \frac{S_{tr, z}^p}{S_{inc, z}^s} = z_{(s)}^{(21)} \left| M_{31} + M_{32} \frac{M_{24}M_{41} - M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{34} \frac{M_{22}M_{41} - M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24})} \right|^2,$$

$$\Rightarrow T_{sp} = z_{(s)}^{(21)} |M_{31} + M_{32}r_{ss} - M_{34}r_{sp}|^2 = z_{(s)}^{(21)} |t_{sp}^{(21)}|^2 \quad (B-45)$$

donde $z_{(s)}^{(21)} = \frac{\mu^{(1)}k_z^2}{\mu^{(2)}k_z^1}$ y t_{sp} es la amplitud de transmisión para ondas transmitidas con polarización p a partir de ondas s incidentes.

Coeficiente de transmisión para la onda s transmitida:

$$T_{ss} = \frac{S_{tr, z}^s}{S_{inc, z}^s} = z_{(s)}^{(21)} \left| M_{11} + M_{12} \frac{M_{24}M_{41} - M_{44}M_{21}}{M_{44}M_{22} - M_{24}M_{42}} - M_{14} \frac{M_{22}M_{41} - M_{42}M_{21}}{(M_{22}M_{44} - M_{42}M_{24})} \right|^2, \quad (B-46)$$

donde $z_{(s)}^{(21)} = \frac{\mu^{(1)}k_z^2}{\mu^{(2)}k_z^1}$ y t_{ss} es la amplitud de transmisión para ondas transmitidas con polarización s a partir de ondas s incidentes.

APÉNDICE C

C.1 Matriz de propagación para una onda que viaja a través de un medio homogéneo e isotrópico

Con el objetivo de describir la propagación de la onda dentro de un medio homogéneo e isotrópico y que se encuentra delimitado por dos interfaces, (tal y como se muestra en la figura C.1) es preciso introducir una matriz adicional. Esta matriz nos permitirá mostrar la transición desde la matriz $\mathbf{M}^{(21)}$ a la matriz $\mathbf{M}^{(32)}$ que se mencionó en la sección 4.2.

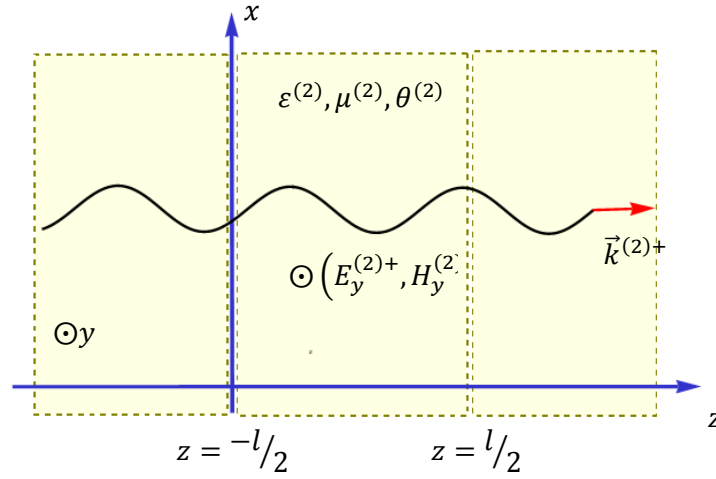


Figura C.1: descripción esquemática de la propagación de una onda en un medio homogéneo 2. El medio se encuentra atravesado por dos superficies en $z = \pm l/2$.

Para ello supongamos que los medios 3 y 1 en la figura 4.2 son exactamente iguales al medio 2. Es decir, tenemos un medio con permitividad eléctrica $\epsilon^{(2)}(\omega)$, permeabilidad magnética $\mu^{(2)}(\omega)$ y parámetro topológico $\theta^{(2)}(\omega)$ que se encuentra delimitado por dos superficies en $z = \pm l/2$, tal y como se muestra en la figura C.1. Bajo estas consideraciones, los campos (4.1) y (4.3) adoptan la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(2)}(z+l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)} + \begin{pmatrix} E_y^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(2)}(z+l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad z < -l/2 \quad (\text{C-1})$$

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(2)}(z-l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)} + \begin{pmatrix} E_y^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(2)}(z-l/2)} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad z > l/2 \quad (\text{C-2})$$

En las ecuaciones (C-1) y (C-2) se han hecho las siguientes consideraciones:

$$k_z^{(2)} = k_z^{(1)} = k_z^{(3)}, \quad \begin{pmatrix} E_y^{(1)+} \\ H_y^{(1)+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(3)+} \\ H_y^{(3)+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(2)+} \\ H_y^{(2)+} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_y^{(1)-} \\ H_y^{(1)-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(3)-} \\ H_y^{(3)-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^{(2)-} \\ H_y^{(2)-} \end{pmatrix}. \quad (C-3)$$

A continuación, calculemos los campos (C-1) y (C-2) cuando $z \rightarrow -l/2$. Luego,

Para los campos que inicialmente estaban en $z < -l/2$ obtenemos,

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z \rightarrow -l/2} = \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z+l/2 \rightarrow 0}^+ + \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z+l/2 \rightarrow 0}^-, \quad (C-4)$$

Para los campos que inicialmente estaban en $z > l/2$ obtenemos,

$$\begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z \rightarrow -l/2} = \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z-l/2 \rightarrow l}^+ + \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z-l/2 \rightarrow l}^-, \quad (C-5)$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z+l/2 \rightarrow 0}^+ = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} e^{i(k_x x - \omega t)}, & \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z+l/2 \rightarrow 0}^- = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} e^{i(k_x x - \omega t)} \\ \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z-l/2 \rightarrow l}^+ = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(1)} l} e^{i(k_x x - \omega t)}, & \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z-l/2 \rightarrow l}^- = \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(1)} l} e^{i(k_x x - \omega t)} \end{array} \right. \quad (C-6)$$

Con lo anterior podemos calcular una matriz A que describa la propagación de la onda a través del medio dos en una distancia l

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z-l/2 \rightarrow l}^+ \\ \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z-l/2 \rightarrow l}^- \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z+l/2 \rightarrow 0}^+ \\ \begin{pmatrix} E_y^{(2)} \\ H_y^{(2)} \end{pmatrix}_{z+l/2 \rightarrow 0}^- \end{pmatrix}, \quad (C-7)$$

Reemplazando las expresiones (C.6) en (C.7) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} e^{ik_z^{(1)} l} \\ \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} e^{-ik_z^{(1)} l} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{ik_z^{(2)} l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z^{(2)} l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)+} \\ H_{y0}^{(2)+} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E_{y0}^{(2)-} \\ H_{y0}^{(2)-} \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (C-8)$$

Luego,

$$A = \begin{pmatrix} e^{ik_z^{(2)}l} & 0 \\ 0 & e^{-ik_z^{(2)}l} \end{pmatrix}. \quad (C-9)$$

La matriz A en (C.9) se define como la matriz de propagación de la onda en el medio homogéneo 2 en una distancia l . Por comodidad, en el desarrollo hemos considerado los campos eléctrico y magnético por separado y por esto la matriz obtenida es 2x2. Sin embargo, se puede obtener una matriz 4x4 de forma análoga cuando se consideran las cuatro componentes $E_y^{(2)+}$, $H_y^{(2)+}$, $E_y^{(2)-}$ y $H_y^{(2)-}$. Luego, la matriz que describe la propagación en el medio 2 en nuestro caso está dada por [78]

$$M^{(hom2)} = \begin{pmatrix} e^{ik_z^{(2)}l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_z^{(2)}l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_z^{(2)}l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-ik_z^{(2)}l} \end{pmatrix}. \quad (C-10)$$

C.2 Matriz de transferencia para una onda que se propaga a través de un sistema de tres capas

Como se discutió en la sección 4.2, la matriz que describe la propagación de una onda en un sistema compuesto por tres capas está dada por [78]:

$$M^{(slab)} = M^{(32)} M^{(hom2)} M^{(21)}. \quad (4.21)$$

donde

$$M^{(32)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z_{(s)}^{(23)} & 1 - z_{(s)}^{(23)} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\epsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\epsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} \\ 1 - z_{(s)}^{(23)} & 1 + z_{(s)}^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\epsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\epsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & \sqrt{\frac{\epsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 + z_{(p)}^{(23)}) & \sqrt{\frac{\epsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 - z_{(p)}^{(23)}) \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & \sqrt{\frac{\epsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 - z_{(p)}^{(23)}) & \sqrt{\frac{\epsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\epsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 + z_{(p)}^{(23)}) \end{pmatrix}, \quad (C-11)$$

$$\mathbf{M}^{(21)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z_{(s)}^{(12)} & 1 - z_{(s)}^{(12)} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} \\ 1 - z_{(s)}^{(12)} & 1 + z_{(s)}^{(12)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 + z_{(p)}^{(12)}) & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 - z_{(p)}^{(12)}) \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 - z_{(p)}^{(12)}) & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 + z_{(p)}^{(12)}) \end{pmatrix}. \quad (\text{C-12})$$

La matriz $\mathbf{M}^{(hom2)}$ esta dada por la expresión (C-10). Luego, al realizar el producto $\mathbf{M}^{(hom2)} \mathbf{M}^{(21)}$ obtenemos,

$$\mathbf{M}^{(stab)} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + z_{(s)}^{(23)} & 1 - z_{(s)}^{(23)} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} \\ 1 - z_{(s)}^{(23)} & 1 + z_{(s)}^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 + z_{(p)}^{(23)}) & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 - z_{(p)}^{(23)}) \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 - z_{(p)}^{(23)}) & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} (1 + z_{(p)}^{(23)}) \end{pmatrix} \times \quad (\text{C-13})$$

$$\times \begin{pmatrix} (1 + z_{(s)}^{(12)}) e^{ik_z^{(2)} l} & (1 - z_{(s)}^{(12)}) e^{ik_z^{(2)} l} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} e^{ik_z^{(2)} l} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} e^{ik_z^{(2)} l} \\ (1 - z_{(s)}^{(12)}) e^{-ik_z^{(2)} l} & (1 + z_{(s)}^{(12)}) e^{-ik_z^{(2)} l} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} e^{-ik_z^{(2)} l} & \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} e^{-ik_z^{(2)} l} \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} e^{ik_z^{(2)} l} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} e^{ik_z^{(2)} l} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 + z_{(p)}^{(12)}) e^{ik_z^{(2)} l} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 - z_{(p)}^{(12)}) e^{ik_z^{(2)} l} \\ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} e^{-ik_z^{(2)} l} & -\sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \delta^{(12)} e^{-ik_z^{(2)} l} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 - z_{(p)}^{(12)}) e^{-ik_z^{(2)} l} & \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 + z_{(p)}^{(12)}) e^{-ik_z^{(2)} l} \end{pmatrix}.$$

Al realizar el producto de matrices en (C-13) obtenemos los elementos de la matriz de transferencia para el sistema de tres capas. Si multiplicamos la primera fila de la primera matriz en (C-13) con la primera columna de la segunda matriz, obtenemos el elemento $M_{11}^{(slab)}$ tal y como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{(slab)} &= \frac{1}{4} \left\{ \left[1 - z_{(s)}^{(12)} \right] \left[1 - z_{(s)}^{(23)} \right] e^{ik_z^{(2)}l} + \left[1 + z_{(s)}^{(12)} \right] \left[1 + z_{(s)}^{(23)} \right] e^{ik_z^{(2)}l} \right. \\
 &\quad \left. + z_{(s)}^{(23)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} e^{-ik_z^{(2)}l} - z_{(s)}^{(23)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} e^{ik_z^{(2)}l} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(e^{ik_z^{(2)}l} + e^{-ik_z^{(2)}l} \right) + \left(e^{ik_z^{(2)}l} - e^{-ik_z^{(2)}l} \right) z_{(s)}^{(12)} + \left(e^{ik_z^{(2)}l} - e^{-ik_z^{(2)}l} \right) z_{(s)}^{(23)} \right. \\
 &\quad \left. + \left(e^{ik_z^{(2)}l} + e^{-ik_z^{(2)}l} \right) z_{(s)}^{(12)} z_{(s)}^{(23)} - z_{(s)}^{(23)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \left(e^{ik_z^{(2)}l} - e^{-ik_z^{(2)}l} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + z_{(s)}^{(12)} z_{(s)}^{(23)} \right) \cos \left(lk_z^{(2)} \right) + i \left(z_{(s)}^{(12)} + z_{(s)}^{(23)} - z_{(s)}^{(23)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right) \sin \left(lk_z^{(2)} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Puesto que, $z_{(s)}^{(ij)} = \frac{\mu^{(j)} k_z^{(i)}}{\mu^{(i)} k_z^{(j)}}$ para $i, j = 1, 2, 3$

$$M_{11}^{(slab)} = \frac{1}{2} \left(1 + z_{(s)}^{(13)} \right) \cos \left(lk_z^{(2)} \right) + \frac{i}{2} \left[z_{(s)}^{(12)} + z_{(s)}^{(23)} \left(1 - \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right) \right] \sin \left(lk_z^{(2)} \right), \quad (C-14)$$

Si multiplicamos la tercera fila de la primera matriz en (C-13) con la primera columna de la segunda matriz, obtenemos el elemento $M_{31}^{(slab)}$:

$$\begin{aligned}
 M_{31}^{(slab)} &= \frac{1}{4} \left\{ - \left(1 + z_{(s)}^{(12)} \right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} e^{ik_z^{(2)}l} - \left(1 - z_{(s)}^{(12)} \right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} e^{-ik_z^{(2)}l} \right. \\
 &\quad - \left(1 + z_{(p)}^{(23)} \right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} \delta^{(12)} e^{ik_z^{(2)}l} \\
 &\quad \left. - \left(1 - z_{(p)}^{(23)} \right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} \delta^{(12)} e^{-ik_z^{(2)}l} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ - \left(e^{ik_z^{(2)}l} + e^{-ik_z^{(2)}l} \right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} - \left(e^{ik_z^{(2)}l} - e^{-ik_z^{(2)}l} \right) z_{(s)}^{(12)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(23)} \right. \\
 &\quad \left. - \left(e^{ik_z^{(2)}l} + e^{-ik_z^{(2)}l} \right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(12)} - \left(e^{ik_z^{(2)}l} - e^{-ik_z^{(2)}l} \right) z_{(p)}^{(23)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(12)} \right\}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$M_{31}^{(slab)} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} (\delta^{(23)} + \delta^{(12)}) \cos(lk_z^{(2)}) - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} (z_{(s)}^{(12)} \delta^{(23)} + z_{(p)}^{(23)} \delta^{(12)}) \sin(lk_z^{(2)}). \quad (C-15)$$

Al multiplicar la primera fila de la primera matriz en (C-13) con la tercera columna de la segunda matriz, obtenemos el elemento $M_{13}^{(slab)}$:

$$\begin{aligned} M_{13}^{(slab)} &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 + z_{(s)}^{(23)}\right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} e^{ik_z^2 l} - \left(1 - z_{(s)}^{(23)}\right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} e^{-ik_z^2 l} \right. \\ &\quad + \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \frac{\mu_r^{(2)}}{\mu_r^{(1)}} \left(1 + z_{(p)}^{(12)}\right) e^{ik_z^2 l} \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(23)} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(2)}}} \frac{\mu_r^{(2)}}{\mu_r^{(1)}} \left(1 - z_{(p)}^{(12)}\right) e^{-ik_z^2 l} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(e^{ik_z^{(2)} l} - e^{-ik_z^{(2)} l}\right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} + \left(e^{ik_z^{(2)} l} + e^{-ik_z^{(2)} l}\right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(12)} z_{(s)}^{(23)} \delta^{(12)} \right. \\ &\quad + \left(e^{ik_z^{(2)} l} - e^{-ik_z^{(2)} l}\right) \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(23)} z_{(p)}^{(12)} \delta^{(23)} \\ &\quad \left. + \left(e^{ik_z^{(2)} l} + e^{-ik_z^{(2)} l}\right) \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)}}} z_{(s)}^{(23)} z_{(p)}^{(12)} \delta^{(23)} \right\} \end{aligned}$$

como $z_{(s)}^{(ij)} = \frac{\mu^{(j)} k_z^{(i)}}{\mu^{(i)} k_z^{(j)}}$ para $(i), (j) = 1, 2, 3$ obtenemos,

$$M_{13}^{(slab)} = \frac{1}{2} \left\{ z_{(s)}^{(13)} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} (\delta^{(12)} + \delta^{(23)}) \cos(lk_z^{(2)}) + i \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \left(z_{(s)}^{(12)} \delta^{(12)} + z_{(s)}^{(23)} \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(23)} \right) \right\}. \quad (C-16)$$

Por otro lado si multiplicamos la tercera fila de la primera matriz en (C-13) con la tercera columna de la segunda matriz, obtenemos el elemento $M_{33}^{(slab)}$:

$$\begin{aligned}
 M_{33}^{(slab)} &= \frac{1}{4} \left\{ -\sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} z_{(s)}^{(12)} e^{ik_z^{(2)} l} + \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)}}} \sqrt{\frac{\mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(1)}}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} z_{(s)}^{(12)} e^{-ik_z^{(2)} l} \right. \\
 &\quad + \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 + z_{(p)}^{(23)}) (1 + z_{(p)}^{(12)}) e^{ik_z^{(2)} l} \\
 &\quad + \left. \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(2)}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)} \mu_r^{(1)}}} (1 - z_{(p)}^{(23)}) (1 - z_{(p)}^{(12)}) e^{-ik_z^{(2)} l} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ -\left(e^{ik_z^{(2)} l} - e^{-ik_z^{(2)} l} \right) \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \mu_r^{(1)}}{\varepsilon_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} z_{(s)}^{(12)} \right. \\
 &\quad + \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(3)}}} (1 + z_{(p)}^{(23)} + z_{(p)}^{(12)} + z_{(p)}^{(23)} z_{(p)}^{(12)}) e^{ik_z^{(2)} l} \\
 &\quad + \left. \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(3)}}} (1 - z_{(p)}^{(23)} - z_{(p)}^{(12)} + z_{(p)}^{(23)} z_{(p)}^{(12)}) e^{-ik_z^{(2)} l} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ -\left(e^{ik_z^{(2)} l} - e^{-ik_z^{(2)} l} \right) \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(3)}}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} z_{(p)}^{(12)} + \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(3)}}} (e^{ik_z^{(2)} l} + e^{-ik_z^{(2)} l}) \right. \\
 &\quad + \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(3)}}} z_{(p)}^{(23)} (e^{ik_z^{(2)} l} - e^{-ik_z^{(2)} l}) + \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(3)}}} z_{(p)}^{(12)} (e^{ik_z^{(2)} l} - e^{-ik_z^{(2)} l}) \\
 &\quad + \left. \sqrt{\frac{\mu_r^{(3)} \varepsilon_r^{(1)}}{\mu_r^{(1)} \varepsilon_r^{(3)}}} z_{(p)}^{(13)} (e^{ik_z^{(2)} l} + e^{-ik_z^{(2)} l}) \right\}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 M_{33}^{(slab)} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(1)}}} (1 + z_{(p)}^{(13)}) \cos(lk_z^{(2)}) \\
 &\quad + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r^{(1)} \mu_r^{(3)}}{\varepsilon_r^{(3)} \mu_r^{(1)}}} \left[z_{(p)}^{(23)} + z_{(p)}^{(12)} \left(1 - \frac{\mu_r^{(2)}}{\varepsilon_r^{(2)}} \delta^{(12)} \delta^{(23)} \right) \right] \sin(lk_z^{(2)}). \tag{C-17}
 \end{aligned}$$

De forma similar se obtienen los otros 12 elementos de la matriz de transferencia.

REFERENCIAS

- [1] **X. L. Qi and S. C. Zhang.** Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
- [2] **M. Z. Hasan and C. L. Kane.** Colloquium: Topological insulators. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).
- [3] **L. Fu and C. L. Kane.** Topological insulators with inversion symmetry. *Phys. Rev. B* **76**, 045302 (2007).
- [4] **M. Fruchart and D. Carpentier.** An introduction to topological insulators. *C. R. Physique* **14** 779–815 (2013).
- [5] **S. Q. Shen.** Topological Insulators: Dirac Equation in Condensed Matters . *Springer-Verlag Berlin Heidelberg.* (2012).
- [6] **B. A. Bernevig, T. L. Hughes and S. C. Zhang.** Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells. *Science*, **314**, 1757 (2006)
- [7] **M. Konig, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang.** Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells. *Science* **318**, 766 (2007).
- [8] **X. L. Qi and S. C. Zhang.** The quantum spin Hall effect and topological insulators. *Phys. Today* **63** (1) 33 (2010).
- [9] **J. Cayssol.** Introduction to Dirac materials and topological insulators. *C. R. Physique* **14** 760–778 (2013).
- [10] **L. Fu, C. L. Kane and E. J. Mele.** Topological Insulators in Three Dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 106803 (2007).
- [11] **D. Hsieh, D. Qian, L. Wray, Y. Xia, Y. S. Hor, R. J. Cava and M. Z. Hasan.** A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase (first experimental realization of a 3D Topological Insulator). *Nature* **452**, 970-974 (2008).
- [12] **A. P. Schnyder, S. Ryu, A. Furusaki, and A. W. W. Ludwig.** Classification of topological insulators and superconductors in three spatial dimensions. *Phys. Rev. B.* **78**. 195125 (2008).
- [13] **D. Hsieh, Y. Xia, D. Qian, L. Wray, F. Meier, J. H. Dil, J. Osterwalder, L. Patthey, A.V. Fedorov, H. Lin, A. Bansil, D. Grauer, Y. S. Hor, R. J. Cava, and M. Z. Hasan,** Observation of Time-Reversal-Protected Single-Dirac-Cone Topological-Insulator States in Bi₂Te₃ and Sb₂Te₃. *Phys. Rev. Lett.* **103**. 146401 (2009).
- [14] **H. Zhang, C. X. Liu, X. L. Qi, X. Dai, Z. Fang and S. C. Zhang.** Topological insulators in Bi₂Se₃, Bi₂Te₃ and Sb₂Te₃ with a single Dirac cone on the surface. *Nature Physics* volume **5**, pages 438–442 (2009).
- [15] **W. Frank.** Two Applications of Axion Electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1799 (1987).
- [16] **R. Li, J. Wang, X. Qi and S. C. Zhang.** Dynamical Axion Field in Topological Magnetic Insulators. *Nature Physics* volume **6**, pages 284–288 (2010).
- [17] **M. M. Vazifeh and M. Franz.** Quantization and 2π periodicity of the axion action in topological insulators. *Phys. Rev. B.* **82**. 233103 (2010).
- [18] **A. M. Essin, J. E. Moore and David Vanderbilt.** Magnetoelectric polarizability and axion electrodynamics in crystalline insulators. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 146805 (2009)
- [19] **T. Morimoto, A. Furusaki and N. Nagaosa.** Topological magneto-electric effects in thin films of topological insulators. *Phys. Rev. B* **92**, 085113 (2015)
- [20] **S. Ryu, J. E. Moore and A. W. W. Ludwig.** Electromagnetic and gravitational responses and anomalies in topological. *Phys. Rev. B.* **85**. 045104 (2012).

- [21] **X. L. Qi, T. Hughes and S. C Zhang.** Topological field theory of time-reversal invariant insulators. *Phys. Rev. B* **78**, 195424 (2008).
- [22] **G. Y. Cho and J. E. Moore.** Topological BF field theory description of topological Insulators. *Annals of Physics* **326** 1515–1535 (2011).
- [23] **J. Maciejko, X. L. Qi, H. D. Drew, and S. C. Zhang.** Topological quantization in units of the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.* **105** 166803 (2010).
- [24] **H. T. Ueda, A. Takeuchi, G. Tatara, and T. Yokoyama.** Topological charge pumping effect by the magnetization dynamics on the surface of three-dimensional topological insulators. *Phys. Rev. B.* **85**, 115110 (2012)
- [25] **X. L. Qi, R. Li, J. Zang and S. C. Zhang.** Seeing the magnetic monopole through the mirror of topological surface states. *Science* **323**, 1184 (2009).
- [26] **G. Rosenberg and M. Franz.** Witten effect in a crystalline topological insulator. *Phys. Rev. B.* **82**, 035105 (2010).
- [27] **W. K. Tse and A. H. MacDonald.** Magneto-optical and Magneto-electric Effects of Topological Insulators in Quantizing Magnetic Fields. *Phys. Rev. B* **82** 161104 (2010).
- [28] **W. K. Tse and A. H. MacDonald.** Magneto-Optical Faraday. *Phys. Rev. B* **84**, 205327 (2011).
- [29] **W. K. Tse and A. H. MacDonald.** Giant Magneto-Optical Kerr Effect and Universal Faraday Effect in Thin-Film Topological Insulators. *Phys. Rev. Lett.* **105** 057401 (2010).
- [30] **Y. Lan, S. Wan and S. C. Zhang.** Generalized quantization condition for topological insulators. *Phys. Rev. B* **83** 205109 (2011)
- [31] **T. Ochiai.** Theory of Light Scattering in Axion Electrodynamics. *Phys. Soc. Jpn.* **81** 094401 (2012).
- [32] **R. Valdes Aguilar, A.V. Stier, W. Liu, L.S. Bilbro, D.K. George, N. Bansal, L. Wu, J. Cerne, A.G. Markelz, S. Oh and N.P. Armitage.** THz response and colossal Kerr rotation from the surface states of the topological insulator Bi₂Se₃. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 087403 (2011).
- [33] **G. S. Jenkins, A. B. Sushkov, D. C. Schmadel, M. H. Kim, M. Brahlek, N. Bansal, S. Oh, and H. D. Drew.** Giant plateau in the terahertz Faraday angle in gated Bi₂Se₃. *Phys. Rev. B.* **86**, 235133 (2012).
- [34] **G. S. Jenkins, A. B. Sushkov, D. C. Schmadel, N. P. Butch, P. Syers, J. Paglione, and H. D. Drew.** Terahertz Kerr and reflectivity measurements on the topological insulator Bi₂Se₃. *Phys. Rev. B* **82**, 125120 (2010)
- [35] **W. K. Tse and A. H. MacDonald.** Magneto-optical Faraday and Kerr effects in topological insulator films and in other layered quantized Hall systems. *Phys. Rev. B* **84**, 205327 (2011).
- [36] **S. Raghu, S.B. Chung, X.L. Qi and S.C. Zhang,** *Phys Rev Lett.* **104** (2010) 116401.
- [37] **D. K. Efimkin, Y. E. Lozovik, and A. A. Sokolik, J. Magn. Magn. Mater.** **324** 3610 (2012).
- [38] **D. K. Efimkin, Y. E. Lozovik, and A. A. Sokolik.** *Nanoscale Res Lett.* **7** 163 (2012a).
- [39] **T. Stauber.** *J. Phys. Condens. Matter* **26**, 123201 (2014).
- [40] **R. Schütty, C. Ertler, A. Trügler, and U. Hohenester.** Surface plasmons in doped topological insulators. *Phys. Rev. B* **88**, 195311 (2013).
- [41] **M. M. Vazifeh and M. Franz.** Spin Response of Electrons on the Surface of a Topological Insulator. *Phys. Rev. B* **86**, 045451 (2012)
- [42] **A. Karch.** Surface plasmons and topological insulators. *Phys. Rev. B* **83**, 245432 (2011).
- [43] **T. Habe and Y. Asano.** Interface Metallic States between a Topological Insulator and a Ferromagnetic Insulator. *Phys. Rev. B* **85**, 195325 (2012)
- [44] **J. Wang, X. Chen, B. F. Zhu and S. C. Zhang.** Topological p-n Junction. *Phys. Rev. B* **85**, 235131 (2012).

- [45] **M. Lasia and L. Brey.** Optical properties of magnetically doped ultrathin topological insulator slabs. *Phys. Rev. B.* **90**, 075417 (2014).
- [46] **Z. W. Zuo, D. B. Ling, L. Sheng and D. Y. Xing.** Optical properties for topological insulators with metamaterials. *Phys. Lett. A* **377** 2909–2915 (2013)
- [47] **Solymar L. and E. Shamonina.** Waves in Metamaterials, Oxford University Press, Oxford (2009).
- [48] **R. Grimberg.** Materials Science and Engineering: *B* **178** 1285 (2013).
- [49] **J. C. Granada and D. F. Rojas.** *Physica B* **455** 82 (2014).
- [50] **O. Mayuko, Y. Takane, and K. I. Imura.** *Phys. Rev. B* **89**, 125425 (2014).
- [51] **Y. Tserkovnyak and D. Loss.** Thin-Film Magnetization Dynamics on the Surface of a Topological Insulator. *Phys Rev Lett.* **108**, 187201 (2012).
- [52] **C. J. Lin, X. Y. He, J. Liao, X. X. Wang, V. Sacksteder IV, W. M. Yang, T. Guan, Q. M. Zhang, L. Gu, G. Y. Zhang, C. G. Zeng, X. Dai, K. H. Wu and Y. Q. Li.** Parallel Field Magnetoresistance in Topological Insulator Thin Films. *Phys. Rev. B* **88**, 041307(R) (2013).
- [53] **G. Gupta, H. Lin, A. Bansil, M. B. A. Jalil and G. Liang.** Carrier transport in Bi₂Se₃ topological insulator slab. *Phys. E* **74** 10–19 (2015)
- [54] **S. Modak, K. Sengupta, and D. Sen.** Spin injection into a metal from a topological insulator. *Phys. Rev. B* **86**, 205114 (2012).
- [55] **R. Schütty, C. Ertler, A. Trügler, and U. Hohenester.** *Phys. Rev. B* **88**, 195311 (2013).
- [56] **O. Roslyak, G. Godfrey and D. Huan.** *Phys. Rev. B* **87**, 045121 (2013).
- [57] **J. Qi, H. Liu and X. C. Xie.** Surface plasmon polaritons in topological insulator. *Phys. Rev. B* **89**, 155420 (2014).
- [58] **S. Giraud, A. Kundu, and R. Egger.** Electron-phonon scattering in topological insulator thin films. *Phys. Rev. B.* **85**, 035441 (2012).
- [59] **V. Parente, A. Tagliacozzo, F. von Oppen and F. Guinea.** Electron-phonon interaction on the surface of a three-dimensional topological insulator. *Phys. Rev B* **88**, 075432 (2013).
- [60] **X. Zhu, L. Santos, C. Howard, R. Sankar, F. C. Chou, C. Chamon and M. El-Batanouny.** Electron-phonon Coupling on the Surface of the Topological Insulator Bi₂Se₃: Determined from Surface Phonon Dispersion Measurements. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 185501 (2012).
- [61] **Y. V. Kartashov and D. V. Skryabin.** Bistable topological insulator with exciton-polaritons. *Phys. Rev. Lett.* **119**, 253904 (2017).
- [62] **Y. Okada and V. Madhavan.** *Nature Nanotechnology* **8** 541 (2013).
- [63] **P. Di Pietro, M. Ortolani, O. Limaj, A. Di Gaspere, V. Giliberti, F. Giorgianni, M. Brahlek, N. Bansal, N. Koirala, S. Oh, P. Calvani and S. Lupi.** *Nature Nanotechnology* **8**, 556 (2013).
- [64] **Z. M. Liao, B. H. Han, H. C. Wu, L. V. Yashina, Y. Yan, Y. B. Zhou, Y. Q. Bie, S. I. Bozhko, K. Fleischer, I. V. Shvets, Q. Zhao, and D. P. Yu.** *AIP Advances* **2** 022105 (2012).
- [65] **A. V. Nalitov, D. D. Solnyshkov, and G. Malpuech.** *Phys. Rev. Lett.* **114**, 116401 (2015).
- [66] **O. G. Becerra, E. Moncada-Villa and J. C. Granada E.,** *J. Supercond. Nov. Magn.* **25**, 2163 (2012).
- [67] **J. R. Mejia Salazar, N. Porras Montenegro, E. Reyes Gómez, S. B. Cavalcanti, and E. Oliveira,** *Europhysics Letters* **95** 24004 (2011).
- [68] **Nechayev, Silkin and Chulkov,** *ZhETF*, **139**, 155 (2011).
- [69] **M. Saurabh, V. Zyuzin, and D. L. Maslov,** *Phys. Rev. B* **91**, 035106 (2015).
- [70] **J. C. Granada and D. F. Rojas.** Transfer matrix method in systems with topological insulators. *J. Phys.: Conf. Ser.* **850** 012024, (2017).

- [71] **W. Nie, R. Zeng, Y. Lan and S. Zhu.** Casimir force between topological insulator slabs. *Phys. Rev.* **88**, 085421 (2013).
- [72] **R. Zeng, L. Chen, W. Nie, M. Bi, Y. Yang and S. Zhu.** Enhancing Casimir repulsion via topological insulator multilayers. *Phys Lett. A* **380** 2861–2869 (2016).
- [73] **W. Nie, R. Zeng, Y. Lan and S. Zhu.** Casimir force between topological insulator slabs. *Phys. Rev. B.* **88**, 085421 (2013).
- [74] **A. G. Grushin and A. Cortijo.** Tunable Casimir Repulsion with Three-Dimensional Topological Insulators. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 020403 (2011).
- [75] **M. Born and E. Wolf.** Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. Seventh (expanded) ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2003).
- [76] **A. Lakhtakia, T. G. Mackay.** Classical electromagnetic model of surface states in topological insulators. *J. Nanophoton.* **10**(3), 033004 (2016)
- [77] **J. A. Crosse, S. Fuchs and S. Y. Buhmann.** The Electromagnetic Green's Function for Layered Topological Insulators. *Phys. Rev. A* **92**, 063831 (2015)
- [78] **P. Markoš and C. M. Soukoulis.** Wave Propagation. From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials, Princeton University Press, Princeton (2008).
- [79] **L. Chen and S. Wan.** Critical surface band gap of repulsive Casimir interaction between three dimensional topological insulators at finite temperature. *Phys. Rev. B* **85**, 115102 (2012)
- [80] **M. Bilal, F. Majeed, A. A. Syed, Q. A. Naqvi.** Scattering from a topological insulator sphere in chiral metamaterial under quasi-static perspective. *Optik* **134** 203–215 (2017).
- [81] **G. Abbas, S. Ahmed, A. A. Syed, Q. A. Naqvi.** Scattering from a topological insulator circular cylinder coated with DNG/MNG/ENG metamaterials. *Optik* **127** 2635–2641 (2016).
- [82] **A. M. Ruiz, M. Cambiaso, and L. F. Urrutia.** Green's function approach to Chern-Simons extended electrodynamics: An effective theory describing topological insulators. *Phys. Rev D* **92**, 125015 (2015)
- [83] **A. M. Ruiz, M. Cambiaso, and L. F. Urrutia.** Electro- and magnetostatics of topological insulators as modeled by planar, spherical, and cylindrical θ boundaries: Green's function approach. *Phys. Rev D* **93**, 045022 (2016)
- [84] **A. M. Ruiz and L. F. Urrutia.** Interaction of a hydrogenlike ion with a planar topological insulator. *Phys. Rev A* **97**, 022502 (2018)
- [85] **A. M. Ruiz, L. F. Urrutia and O. R. Tzompantzi.** Reversed electromagnetic Vavilov-Čerenkov radiation in naturally existing magnetoelectric media. *Phys. Rev D* **99**, 116020 (2019)
- [86] **K. Fukushima.** Anomalous Casimir effect in axion electrodynamics. *Phys. Rev D* **100**, 045013 (2019)
- [87] **Y. Y. Yang, M. X. Deng, W. Luo, R. Ma, S. H. Zheng, and R. Q. Wang.** Anomalous Nernst effect on a magnetically doped topological insulator surface: A Green's function approach. *Phys. Rev B* **98**, 235152 (2018)
- [88] **F.D. Haldane.** Model for a quantum Hall effect without Landau levels: condensed-matter realization of the "parity anomaly". *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 2015.
- [89] **E. Plum, J. Zhou, J. Dong, V.A. Fedotov, T. Koschny, C.M. Soukoulis, N.I. Zheludev.** Metamaterial with negative index due to chirality, *Phys. Rev. B* **79** (2009) 035407.
- [90] **R. Zeng, F. Chen, C. Wang, M. Zhang, H. Li, Q. Li, J. Ou, Y. Yang, S. Zhu.** Optical reflection properties for the interface associated with Chern insulator and chiral metamaterial. *Phys. Lett. A* **383** (2019) 125920.

- [91] **N. P. Armitage, E. J. Mele and A. Vishwanat.** Weyl and Dirac semimetals in three-dimensional solids. *Rev. Mod. Phys.* **90** 015001 (2018)
- [92] **Z. Faraei, T. Farajollahpour and S. A. Jafari.** Green's function of semi-infinite Weyl semimetals. *Phys. Rev B* **98**, 195402 (2018)
- [93] **A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso and L. F. Urrutia.** Electromagnetic fields induced by an electric charge near a Weyl semimetal. *Phys. Rev B* **99**, 155142 (2019)
- [94] **J. Hofmann and S. D. Sarma.** Surface plasmon polaritons in topological Weyl semimetals. *Phys. Rev B* **93**, 241402(R) (2016)
- [95] **J. H. Wilson, A. A. Allocca and V. Galitski.** Repulsive Casimir force between Weyl semimetals. *Phys. Rev B* **91**, 235115 (2015)
- [96] **M. Kargarian, M. Randeria, and N. Trivedi.** Theory of Kerr and Faraday rotations and linear dichroism in Topological Weyl Semimetals. *Sci. Rep.* **5**, 12683 (2015).
- [97] **L. D. Landau and E. M. Lifshitz.** The Classical Theory of Fields. Fourth Revised English Edition, *Institute for Physical Problems, Academy of Sciences of the U.S.S.R* (2003)
- [98] **J. D. Jackson.** Classical Electrodynamics. Third Edition, *University of California, Berkeley* (2003)
- [99] **H. Goldstein.** Classical Mechanics. Third Edition. *Columbia University* (2006)
- [100] **L. D. Landau and E. M. Lifshitz.** Electrodynamics of Continuous Media. Fourth Revised English Edition, *Institute for Physical Problems, Academy of Sciences of the U.S.S.R* (2003)
- [101] **X. Li, K. Yoshioka, M. Xie, G. T. Nae II, W. Lee, N. M. Peraca, W. Gao, T. Hagiwara, O. S. Handegård, L. W. Nien, T. Nagao, M. Kitajima, H. Nojiri, C. K. Shih, A. H. MacDonald, I. Katayama, J. Takeda, G. A. Fiete, and J. Kono.** Terahertz Faraday and Kerr rotation spectroscopy of Bi_{1-x}Sb_x films in high magnetic fields up to 30 tesla. *Phys. Rev B* **100**, 115145 (2019)
- [102] **M. C. Chang and M. F. Yang.** Optical signature of topological insulators. *Phys. Rev B* **80**, 113304 (2009)
- [103] **B. S. Lu.** Van der Waals torque and force between anisotropic topological insulator slabs. *Phys. Rev B* **97**, 045427 (2018).