



Conocimiento didáctico en la formación de docentes de primer ciclo de básica primaria para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del sistema de numeración decimal

Andrea Paola Banoy Rodríguez

201402413

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Maestría en Educación, Énfasis Educación Matemática, Modalidad Investigación

Santiago de Cali, Julio de 2020



Conocimiento didáctico en la formación de docentes de primer ciclo de básica primaria para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del sistema de numeración decimal

Andrea Paola Banoy Rodríguez

201402413

Informe final de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en Educación Énfasis Educación Matemática

Tutor de Trabajo de Grado:

Evelio Bedoya Moreno PhD.

Profesor del Instituto de Educación y Pedagogía

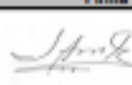
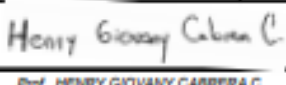
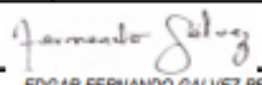
Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Maestría en Educación, Énfasis Educación Matemática, Modalidad Investigación

Santiago de Cali, Julio de 2020

	INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Subdirección de Investigaciones y Posgrados	ACTA DE SUSTENTACIÓN						
Programa Académico: Maestría en Educación - Énfasis Educación Matemática								
Código del programa: 7412	Resolución del programa: 017	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 33%;">Día</th> <th style="width: 33%;">Mes</th> <th style="width: 33%;">Año</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">22</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">2020</td> </tr> </table>	Día	Mes	Año	22	7	2020
Día	Mes	Año						
22	7	2020						
Título del Trabajo o Proyecto de Grado								
"CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE PRIMER CICLO DE BÁSICA PRIMARIA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SENTIDO NUMÉRICO EN LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL EN SITUACIONES RELACIONADAS CON LAS NOCIONES DE AGRUPAMIENTO Y VALOR DE POSICIÓN"								
Se trata de:								
Trabajo de grado de Maestría ☒								
Director								
EVELIO BEDOYA MORENO								
Evaluadores								
Nombres y Apellidos	Filiación Universitaria							
NORMA LORENA VÁSQUEZ LASPRILLA	UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA							
LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO	UNIVERSIDAD DEL VALLE							
Estudiantes								
Nombres y Apellidos	Código	E-mail						
ANDREA PAOLA BANOY RODRIGUEZ	1402413	andrapaolabano@gmail.com						
Teléfonos de contacto								
300-5180137								
Aprobado ☐ Meritorio ☐ Laureado ☐								
Aprobado con recomendaciones ☐ No Aprobado ☐ Incompleto ☐								
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:								
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☒ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐								
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: ____/____/____								
En el caso de ser Aprobado con distinción meritorio o laureado , diligenciar en la página siguiente los conceptos de evaluación.								
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).								
Firma								
								
Prof. EVELIO BEDOYA MORENO	Prof. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO	Prof. NORMA LORENA VÁSQUEZ LASPRILLA						
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Jurado Evaluador	Jurado Evaluador						
								
Prof. HENRY GIOVANY CABRERA C.		EDGAR FERNANDO GALVEZ PEÑA						
Subdirector de Investigaciones y Posgrados		(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones y Posgrados)						

Agradecimiento

Agradezco primeramente a Dios por haberme permitido culminar con satisfacción este trabajo de investigación que ha dejado un aporte invaluable para mi desarrollo personal y profesional.

Agradezco a mi esposo Jose Luis, por siempre apoyarme, motivarme y orientarme en la construcción de este trabajo a partir de las grandes reflexiones y conversaciones en torno al mismo. Gracias por ayudarme a hacer este sueño compartido una realidad.

Agradezco a mi hija Maria José, porque con tu llegada iluminaste nuestras vidas y le diste el impulso que necesitaba para motivarme a seguir adelante y poder concluir esta etapa de mi formación profesional para ser un ejemplo de mujer, estudiante y profesional para ti.

Agradezco a mi madre y mis hermanas quienes con su apoyo y su voz de aliento me impulsaron para hacer posible este gran logro. Por estar pendientes y ser mi apoyo cuando más lo necesité.

Mis agradecimientos al profesor Evelio Bedoya Moreno, por sus orientaciones y aportes tan valiosos para el desarrollo de este trabajo que permitieron enriquecerlo y aportaron a mi formación como docente.

De igual manera agradezco a la profesora Ligia Amparo Torres Rengifo, mi gran maestra, por sus aportes tan valiosos a mi formación, a mi vida profesional y personal. Mi gratitud y cariño siempre.

A mis profesores de la maestría, a mis compañeros y amigos del Área de Educación Matemática por tantas experiencias compartidas que permitieron fortalecer mi formación.

Mis más sinceros agradecimientos a los profesores Yamilé Gálvez, y Yimmi Salazar, por su tiempo y participación en esta investigación, sus aportes y reflexiones fueron muy importantes para el desarrollo de este trabajo.

A mis amigos y familiares que fueron conocedores de este proceso y que siempre me han rodeado con su cariño. ¡Gracias!

Tabla de contenido

ÍNDICE DE TABLAS	VII
LISTA DE FIGURAS	VIII
RESUMEN	IX
INTRODUCCIÓN	X
CAPÍTULO 1: PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	1
1.1. PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	1
1.2. OBJETIVOS.....	7
1.2.1. <i>Objetivo general</i>	7
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	7
1.3. JUSTIFICACIÓN	8
1.4. ANTECEDENTES	13
1.4.1. <i>Algunas investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas</i>	13
1.4.2. <i>Algunas investigaciones en relación con la enseñanza y aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal</i>	18
1.4.3. <i>Algunas investigaciones relacionadas con la construcción de sentido numérico</i>	21
CAPÍTULO 2: MARCO CONCEPTUAL.....	26
2.1. LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.....	26
2.1.1. <i>El Conocimiento Didáctico en la Formación de Profesores</i>	28
2.2. MODELO DIDÁCTICO - CURRICULAR EN LA FORMACIÓN DE LOS PROFESORES.....	31
2.2.1 <i>Perspectiva sociocultural en la Educación Matemática</i>	33
2.2.2. <i>Perspectiva desde la fenomenología didáctica</i>	35
2.2.3. <i>La Noción de currículo y currículo funcional en Educación Matemática</i>	37
2.3. MODELO LOCAL DE ANÁLISIS DIDÁCTICO Y LOS ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO	51
2.3.1. <i>Análisis de contenido sobre el sistema de numeración decimal (SND)</i>	54
2.3.2. <i>Análisis Cognitivo sobre el Sentido Numérico</i>	69
CAPÍTULO 3: MARCO Y DISEÑO METODOLÓGICO	82
3.1. MARCO METODOLÓGICO	82
3.1.1. <i>Investigación acción</i>	83
3.1.2. <i>Estudio de caso</i>	83
3.1.3. <i>Análisis Didáctico</i>	84
3.2. DISEÑO METODOLÓGICO	86
3.2.1. <i>Fases de la investigación</i>	86

3.2.2. Contextualización y participantes.....	89
3.2.3. Instrumentos para la recolección de los datos.....	91
CAPÍTULO 4: ANÁLISIS Y REFLEXIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SENTIDO NUMÉRICO EN LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL	101
4.1 CARACTERIZACIÓN DE LA FORMACIÓN DE LOS PROFESORES EN EL ESTUDIO DE CASO	102
4.2 CARACTERIZACIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO - CURRICULAR.....	103
4.3. MODELO LOCAL DE ANÁLISIS DIDÁCTICO	109
4.3.1 <i>Análisis didáctico de contenido en torno al Sistema de Numeración Decimal</i>	<i>109</i>
4.3.2. <i>Análisis didáctico cognitivo sobre sentido numérico en la comprensión del Sistema de Numeración Decimal.....</i>	<i>123</i>
4.3.3. <i>Consideraciones finales sobre los análisis</i>	<i>145</i>
CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES	149
5.1. CONCLUSIONES GENERALES	149
5.2. REFLEXIONES DIDÁCTICAS	161
5.3. PERSPECTIVAS PARA FUTUROS DESARROLLOS.....	162
BIBLIOGRAFÍA	165
APÉNDICES	174
APÉNDICE A: ENTREVISTA INICIAL DOCENTE.....	174
APÉNDICE B: SITUACIONES PARA INDAGAR POR EL CONOCIMIENTO SOBRE EL SENTIDO NUMÉRICO	177
Situación 1.	177
Situación 2.	178
Situación 3.	180
APÉNDICE C. UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA: COMPRENDIENDO NUESTRO SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL	181
Situación 1: <i>Contando y agrupando.</i>	<i>181</i>
Situación 2: <i>Comprendiendo el valor posicional.....</i>	<i>186</i>
Situación 3: <i>Otras formas de calcular.</i>	<i>189</i>
Situación 4: <i>La tabla numérica y el Sistema de Numeración Decimal.</i>	<i>191</i>
APÉNDICE D: PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN SOBRE LA UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA.	193
Preguntas de reflexión sobre la Unidad Didáctica.....	194
ANEXOS.....	197
ANEXO A: IMÁGENES DE LAS RESPUESTAS AL TALLER DE ANÁLISIS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA GUÍA.	197
ANEXO B: IMÁGENES DE LOS REGISTROS DE LOS ESTUDIANTES.	205

Índice de tablas

<i>Tabla 1. Cuestiones a las que atiende el currículo y dimensiones que se relacionan.</i> <i>Fuente: Rico (2016).</i>	40
<i>Tabla 2. Atributos que caracterizan algunos enfoques de las matemáticas escolares.</i> <i>Adaptado de Rico y Lupiáñez (2008, p. 180).</i>	42
<i>Tabla 3. MLAD para caracterizar los Conocimientos Didácticos del profesor para la construcción de Sentido Numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Natural.</i> <i>Adaptado de Rico (2016, p.96).</i>	53
<i>Tabla 4. Clasificación cognitiva del contenido del Sistema de los Números Naturales.</i> <i>Adaptado de Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008, p.11).</i>	66
<i>Tabla 5. Resumen de elementos de sentido y modos de uso del Sistema de Numeración Decimal.</i>	68
<i>Tabla 6. Expectativas generales sobre el Sistema de Numeración Decimal en el primer ciclo de básica primaria.</i>	71
<i>Tabla 7. Relación entre objetivos específicos y competencias, sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza y aprendizaje del SND.</i>	75
<i>Tabla 8. Errores y dificultades relacionados con la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal.</i>	77
<i>Tabla 9. Situaciones y tareas para la construcción de Sentido Numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal.</i>	79
<i>Tabla 10. Fases del diseño metodológico.</i>	89
<i>Tabla 11. Contextualización y participantes de la investigación.</i>	91
<i>Tabla 12. Relación entre los objetivos específicos de las expectativas de aprendizaje y las Situaciones de la Unidad Didáctica Guía</i>	99

Lista de figuras

<i>Figura 1. Relaciones de la enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva sociocultural.</i>	35
<i>Figura 2. Sistemas de representación de los números naturales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 16).</i>	60
<i>Figura 3. Regletas de Herbinère – Lebert o cajas de diez.</i>	63
<i>Figura 4. El panel numérico o las bandas numéricas.</i>	64
<i>Figura 5. Red conceptual del Sistema de Numeración Decimal (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p.14).</i>	67
<i>Figura 6. Categorías conceptuales en las que se basa esta investigación.</i>	80
<i>Figura 7. Elementos de la complementariedad metodológica</i>	86

Resumen

El presente trabajo describe algunos elementos básicos del conocimiento didáctico en la formación de profesores en ejercicio de primer ciclo de Educación Básica Primaria, para la construcción de sentido numérico en la comprensión del Sistema de Numeración Decimal (en adelante SND) mediante propuestas de enseñanza relacionadas con nociones de agrupamiento y valor de posición.

En este trabajo se propone un Modelo Local de Análisis Didáctico estructurado por organizadores del currículo que caracterizan los conocimientos didácticos asociados a la construcción de sentido numérico para la comprensión del contenido matemático escolar mencionado. La fundamentación teórica, suministrada por los organizadores del currículo, permite reconocer y caracterizar los conocimientos didácticos y curriculares que los docentes en ejercicio del primer ciclo de básica primaria, participantes en este trabajo, han consolidado a través de su formación y experiencia práctica sobre la enseñanza de las matemáticas, así como los conocimientos que estos reconocen cuando analizan y reflexionan sobre propuestas de enseñanza del SND para la construcción de sentido numérico.

Los resultados del presente trabajo de investigación proporcionan información sobre aspectos relevantes que requieren considerarse al indagar sobre el conocimiento didáctico asociado a los Análisis de Contenido y Cognitivo, para la formación matemática de profesores y para los interesados en la formación de profesores de matemáticas. Dicho conocimiento puede servir como soporte didáctico y curricular fundamental para la toma de decisiones relacionadas con la planeación, mediación y evaluación de propuestas educativas que permitan la comprensión del SND a partir de la construcción de sentido numérico.

Palabras clave: *formación de profesores de matemáticas, modelo didáctico - curricular, Conocimiento Didáctico, Modelo Local de Análisis Didáctico, Sistema de Numeración Decimal, sentido numérico.*

Introducción

El presente trabajo de investigación realiza un aporte a la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas, especialmente en el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas y centra su interés en la caracterización de algunos elementos fundamentales del conocimiento didáctico del profesor en ejercicio de primer ciclo de básica primaria, para la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND a través de situaciones de enseñanza relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición.

De acuerdo con lo anterior, se aborda en este trabajo un problema de investigación en el que interesa por una parte, comprender la práctica del profesor a través de un modelo didáctico-curricular fundamentado en principios teóricos desde una perspectiva sociocultural, fenomenológica y de un currículo funcional que promueva la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas favoreciendo la comprensión de significados y sentidos en los modos de uso del SND. De otra parte, el presente trabajo caracteriza el conocimiento didáctico del profesor del primer ciclo de básica primaria en torno a la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND mediante un Modelo Local de Análisis Didáctico. Dicho modelo proporcionó las categorías que permitieron caracterizar los conocimientos didácticos que requieren los docentes de básica primaria. Además, estas categorías fueron tenidas en cuenta para estructurar los instrumentos, entrevistas y una Unidad Didáctica Guía, presentadas a los docentes en ejercicio del primer ciclo de básica primaria que participan de la investigación, para su análisis y obtener la información sobre los conocimientos didácticos relacionados con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND desarrollados en sus prácticas profesionales, en sus procesos de formación (inicial y permanente) y en el uso de materiales educativos y cómo estos influyen en sus prácticas para enseñar este contenido matemático escolar.

A continuación, se describen los capítulos, que estructuran este trabajo de investigación:

En el **primer capítulo**, denominado Presentación del problema, se presenta la problemática de estudio relacionada con la *formación de profesores* de matemáticas y el *conocimiento didáctico* en profesores de primer ciclo de básica primaria, para la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición

para la construcción de sentido numérico. También se presenta la formulación del problema, los objetivos del trabajo, la justificación y los antecedentes sobre la formación de profesores de matemáticas, el conocimiento didáctico, el objeto matemático SND y sentido numérico.

En el **segundo capítulo**, titulado Marco Conceptual, se presentan los referentes conceptuales, curriculares y didácticos que estructuran el conocimiento didáctico que requiere el docente de primer ciclo de básica primaria en relación con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con nociones de agrupamiento y valor de posición. La identificación de dicho conocimiento se realiza a través de un Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD) que permite caracterizar los conocimientos que el profesor de matemáticas requiere desarrollar para sus propósitos en la enseñanza. Así mismo, en este capítulo, se propone el desarrollo de un modelo didáctico-curricular fundamentado desde la perspectiva sociocultural, fenomenológica y funcional del currículo, para comprender la práctica del profesor.

El **tercer capítulo**, Marco y Diseño Metodológico, presenta los aspectos metodológicos para el desarrollo del trabajo, fundamentados en el paradigma cualitativo y se propone un diseño metodológico basado en la complementariedad metodológica entre la Investigación Acción (IA), el Estudio de Caso (EC) y el Análisis Didáctico (AD), que proporciona los instrumentos que permiten analizar y, describir las ideas y *conocimientos didácticos* que han desarrollado los docentes participantes en la investigación en relación con la construcción del sentido numérico en las propuestas de enseñanza del SND. En este apartado también se presentan las fases que estructuran la investigación, los instrumentos definidos para la recolección y análisis de la información relativa al conocimiento didáctico para la enseñanza y se presenta una contextualización local de la institución educativa y de los participantes con quienes se desarrolla el trabajo de investigación.

En el **cuarto capítulo**, denominado Análisis y reflexiones sobre el conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, se presenta la descripción e interpretación de las reflexiones proporcionadas por los docentes participantes en el estudio al desarrollar con ellos una entrevista y un taller de análisis de una Unidad Didáctica Guía, que fueron estructurados teniendo en cuenta los organizadores del currículo que permiten fundamentar el Modelo Local de Análisis Didáctico propuesto en éste trabajo. La descripción

e interpretación de los conocimientos didácticos de los profesores se caracterizó teniendo en cuenta las categorías: formación de profesores y conocimiento didáctico, modelo didáctico-curricular y el Modelo Local de Análisis Didáctico que plantea algunos elementos fundamentales sobre el conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND.

Finalmente, en el **quinto capítulo**, se presentan los resultados y conclusiones generales que permiten dar respuesta a la pregunta de investigación de este estudio. En este apartado, se presentan reflexiones relacionadas con la caracterización del conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND determinado en el MLAD y se describen los conocimientos desarrollados y las oportunidades de estudio identificadas en la formación de los profesores y en el conocimiento didáctico caracterizado en los docentes de primer ciclo de educación básica primaria para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND.

Capítulo 1: Presentación del problema

En este capítulo se presenta la problemática de la investigación, la formulación del problema, los objetivos del trabajo, la justificación y los antecedentes sobre la formación de profesor que enseña matemáticas y el conocimiento didáctico relacionado con la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición para la construcción de sentido numérico en sus estudiantes. La identificación de estos aspectos de estudio en el contexto de la Educación Matemática, junto con la experiencia en prácticas de formación por parte de la autora de esta investigación, en la experiencia como docente tutora del Programa Todos a Aprender del Ministerio de Educación Nacional, permiten concretar el problema de investigación.

1.1. Planteamiento y formulación del problema

Entre los múltiples escenarios, sociales, culturales, políticos, etc., determinantes para el mejoramiento de la educación, la comunidad académica coincide en reconocer y plantear que la formación de profesores es fundamental en la calidad de la educación (Sosa, 2014). Es por ello, que se reconoce al profesor como un actor fundamental para el mejoramiento y la transformación de la enseñanza de las matemáticas a partir de sus prácticas basadas en los desarrollos de la Educación Matemática.

A nivel nacional, la formación de los profesores en ejercicio ha generado especial atención y preocupación debido a los resultados obtenidos en las evaluaciones externas e internas, sobre las capacidades matemáticas de los estudiantes, en las que se han identificado bajos niveles de desempeño. Ello ha conducido a desarrollar programas de formación a profesores y para ello se han referenciado experiencias en otros países que permitan comprender qué aspectos se necesitan mejorar en los sistemas educativos para garantizar los aprendizajes que actualmente requieren los ciudadanos.

Tal es el caso del Programa Todos a Aprender (PTA) del Ministerio de Educación Nacional Colombiano, cuyo objetivo es “Mejorar las condiciones de aprendizaje en los Establecimientos Educativos focalizados y, con ello, el nivel de las competencias básicas de los estudiantes matriculados en ellos entre transición y quinto grado” (MEN, 2013, p. 6). Para

el alcance de este objetivo central, el programa ha definido un componente transversal y cuatro centrales.

El componente transversal denominado prácticas de aula, está relacionado con los siguientes aspectos, mejoramiento de las prácticas de aula, el conocimiento disciplinar, didáctica y pedagogía de la disciplina, desarrollo profesional situado y materiales educativos y guías. Estos se verán reflejados en la mejora de los aprendizajes, propuestos en el modelo de visión sistémica del PTA. Los cuatro componentes centrales definidos por el programa son, el componente pedagógico relacionado con la apropiación de los referentes nacionales de calidad educativa, la evaluación de los aprendizajes y los materiales educativos; el componente de formación situada relacionado con la interacción en comunidades de aprendizaje y el desarrollo de capacidad de formación; el componente de gestión educativa relacionado con planeación, funcionamiento, evaluación y sostenimiento de la gestión directiva y el componente de condiciones básicas relacionado con condiciones físicas y tecnológicas (MEN, 2013).

Uno de los componentes del programa para mejorar las prácticas de aula que movilizan los aprendizajes de los estudiantes, es la estrategia de desarrollo profesional situado, que permite la reflexión sobre el sistema de creencias y concepciones del docente sobre el aprendizaje y la enseñanza. Este desarrollo profesional situado debe centrarse en la consolidación del Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), dicho conocimiento le permite al docente comprender dónde y porqué se presentan dificultades sobre contenidos específicos por parte de los estudiantes. Para el PTA, “el eje conductor del desarrollo profesional situado es la planeación, realización y evaluación de actividades de aula con acompañamiento cercano de formadores” (MEN, 2013, p. 9), es decir, el acompañamiento que reciben docentes por parte de tutores.

Por tanto, el PTA centra su formación a docentes en ejercicio a cargo de los grados de transición y básica primaria, en las áreas de Lenguaje y Matemáticas, en primer lugar, por los bajos resultados en pruebas externas nacionales e internacionales que evidencian que los desempeños de los estudiantes son más bajos en matemáticas y en segundo lugar, los grados de transición y educación básica primaria en las instituciones educativas oficiales por lo

general tienen un mismo docente a quien se le asigna un grupo de estudiantes en el que orientan todas las áreas de formación. (MEN, 2013).

De acuerdo a la normatividad colombiana, en cuanto a la vinculación de docentes al sector oficial para ejercer la docencia en el servicio educativo, se requiere título de normalista superior expedido por una de las normales superiores reestructuradas y expresamente autorizadas por el Ministerio de Educación Nacional, o título de licenciado en educación u otro título profesional expedido por una institución universitaria, nacional o extranjera, académicamente habilitada para ello (Artículo 1, Ley 2797 de abril 30 de 2009).

En cuanto al perfil del educador, en el artículo 2 de la resolución 5443 de junio 30 de 2010, se define como un profesional con formación pedagógica, lo cual puede ser interpretado como un profesional en cualquier disciplina (ingenieros, economistas, contadores, matemáticos) tal y como lo señalan Guacaneme, Obando, Garzón y Villa (2013). Este tipo de reglamentación deja abierto el perfil de los educadores en cualquier área, en particular quienes enseñan matemáticas en la básica primaria, presentándose como dificultad que quienes se encargan de desarrollar los procesos de enseñanza de las matemáticas por lo general son docentes que no tienen una formación en esta área y tampoco tienen una formación en Didáctica de las Matemáticas, considerándose así, uno de los factores que pueden influir en los aprendizajes de los estudiantes.

A lo largo de la experiencia de la autora, como docente tutora del Programa Todos a Aprender, se ha identificado en los acompañamientos de formación y de aula, que la planificación curricular sobre las matemáticas escolares que realizan los profesores de básica primaria está mediada por las concepciones, creencias y comprensiones que se tienen del concepto matemático a enseñar, así como también influyen las experiencias que han tenido como aprendices de las matemáticas durante sus procesos de formación y las experiencias en su práctica profesional sobre cómo han enseñado dichos contenidos. Esto se ha evidenciado en los discursos y acompañamientos a las prácticas que surgen en la formación que se realiza en el marco del PTA.

De igual manera, en la experiencia de acompañamiento al aula realizado por la tutora a los docentes, en diversas instituciones oficiales, en momentos de planeación, implementación, observación y retroalimentación de la clase, se identifica que los docentes

en la mayoría de sus prácticas consideran los libros de texto como su principal referente para la organización de los contenidos curriculares y para el tratamiento didáctico que hacen de los contenidos matemáticos a trabajar en el aula, sin tener en cuenta los referentes curriculares y didácticos existentes. Al respecto, Hurtado (2014) señala que por lo general el docente se apoya en los libros de texto como uno de los documentos disponibles en la escuela y en la experiencia adquirida en su quehacer profesional para direccionar su labor. Esto se ve reflejado en una concepción de la enseñanza y el aprendizaje por contenidos. Considerando lo anterior, es necesario reflexionar sobre la formación permanente y continuada de la cual el docente debe ser objeto durante todo su ejercicio profesional y de los conocimientos de tipo curricular, didácticos y matemáticos que requiere para el desarrollo de su labor.

Es así como, la reflexión en el campo de estudio sobre formación de profesores busca identificar qué componentes se deben considerar en los programas de formación de profesores de matemáticas para contribuir a la transformación del sistema educativo y para ello es importante caracterizar el conocimiento profesional de los docentes. Rico (1997) afirma que el educador matemático requiere para su buen desarrollo profesional herramientas conceptuales bien construidas, conocimientos sólidos sobre los fundamentos teóricos del currículo y sobre los principios que le permitan planificar y coordinar su trabajo. Estas herramientas y conocimientos permiten al docente tener a disposición un marco de referencia que proporcione una mayor autonomía intelectual y facilitar la gestión sobre la complejidad de los problemas que se derivan de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin estas bases en la formación, los profesores limitan sus funciones a la simple ejecución de un campo de decisiones cuya coherencia y lógica no está dentro de una enseñanza de las matemáticas con sentido.

Para el desarrollo de las funciones, el profesor requiere unas competencias profesionales que se encuentran relacionadas con el conjunto de desempeños que dan sentido a su quehacer profesional. Estos desempeños implican actuaciones por parte del docente para describir, analizar, organizar, planificar, evaluar y reflexionar sobre los contenidos matemáticos a enseñar (Flores y Moreno, 2014). Para el desarrollo de tales desempeños es necesario el dominio de unos conocimientos de los contenidos matemáticos, del conocimiento didáctico de las matemáticas y una fundamentación teórica del currículo, que le permita tomar

decisiones autónomas y críticas para realizar su práctica y desarrollar sus competencias profesionales. Es importante resaltar, que no solo el dominio de los contenidos técnicos de su materia es suficiente, para que el educador desarrolle su tarea necesita del conocimiento didáctico del contenido que tiene otras bases disciplinares (Rico, 1997). Se requiere entonces, en la formación inicial del profesor de matemáticas ampliar sus conocimientos sobre matemáticas, sobre la didáctica de las matemáticas como campo específico de la competencia profesional y como campo de investigación, y sobre algunos temas de las ciencias de la educación (Socas, 2011). Esta idea, también se extiende a la formación continuada de los docentes en ejercicio, que requiere del fortalecimiento de sus competencias profesionales y de su conocimiento didáctico para el ejercicio de su labor docente.

Al respecto, Llinares (2014) plantea la necesidad de identificar las ideas transversales que pueden articular la enseñanza de las matemáticas para definir la formación matemática del maestro, una de estas ideas importantes en la educación matemática es construcción de sentido numérico en los estudiantes. “El sentido numérico permite a los alumnos tomar decisiones relativas a las relaciones entre las cantidades y los números para proporcionar razones válidas para sus decisiones” (Llinares, 2014, p. 209).

Así mismo, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) consideran que algunos aspectos fundamentales para el desarrollo de pensamiento numérico están constituidos por el uso significativo de los números y el sentido numérico que requieren de una comprensión significativa del Sistema de Numeración Decimal, no solo para asumir una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino hacia el desarrollo de estrategias propias para la resolución de problemas. Asimismo, requiere de la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones aritméticas en múltiples sistemas numéricos que posibilitan comprender la modelación, las propiedades, el efecto y la relación entre distintas operaciones.

Sin embargo, en la experiencia de acompañamiento como tutora a docentes de primer ciclo de básica primaria en diversas instituciones educativas oficiales, se han observado prácticas de los docentes en las que la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal se enfoca en la lectura y escritura de los números –partiendo del conocimiento previo que traen los estudiantes sobre recitar de la serie numérica oral–, la enseñanza del número se hace uno

a uno –de manera que no se puede enseñar el veinte sin conocer el diecinueve y no se tiene en cuenta el conocimiento de los estudiantes sobre otros números mayores que son usados en su cotidianidad– , se determina un rango numérico de acuerdo al grado escolar, la numeración escrita de las cifras –identificando unidades, decenas y centenas, muchas veces recayendo en un trabajo limitado a actividades con el uso de la tabla de valor posicional– y la descomposición aditiva de los números en las diferentes unidades de orden. De esta manera, podemos ver que el tratamiento de la numeración desde esta perspectiva, simplemente evoca la representación convencional de los números sin estudiar más a fondo la organización, los principios y las regularidades del sistema de numeración escrito (Ressia, 2003).

Además, la enseñanza del valor de posición se realiza de manera desconectada a la idea de agrupamiento –se desconocen las acciones de reagrupación y desagrupación entre las unidades de orden– ello se puede observar en la realización de las operaciones cuando los docentes orientan erróneamente expresiones como “llevar o pedir prestado”, por tanto, se evidencia una dificultad en la comprensión sobre el funcionamiento del SND y genera errores al hacer uso de los algoritmos estándar (Castro y Molina, 2015). Al respecto, Llinares (2001) considera que las nociones de agrupamiento y valor de posición se desarrollan de manera simultánea con el cálculo y son fundamentales para la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND.

En este orden de ideas, la comprensión adecuada del sistema de numeración va más allá del conocimiento de la representación convencional de los números y sus reglas para la escritura, este requiere de procesos más amplios relacionados con la construcción del concepto del número natural, relaciones de orden, el principio base 10, el valor posicional, reconocer la existencia de múltiples descomposiciones posibles de un número para favorecer la construcción de sentido numérico en los estudiantes.

Considerando los diversos factores anteriormente enunciados, el docente de básica primaria requiere fortalecer unas herramientas teóricas que le permitan el desarrollo de su competencia de planificación, la cual implica tener capacidades para la identificación, organización, selección de los conceptos matemáticos a partir de un análisis detallado de su contenido, que permitan la identificación de las expectativas de aprendizaje como acción

previa al diseño de las tareas y selección de actividades (Rico, Marín, Gómez y Lupiáñez, 2008). Por lo tanto, las herramientas teóricas deben relacionarse con las nociones que permiten la comprensión de los conceptos básicos de la numeración como el conteo, el agrupamiento y el valor de posición. La comprensión de estos conceptos y el conocimiento curricular con relación a estos, deben ser criterios fundamentales para la planificación curricular, el diseño de actividades y la selección de recursos para la enseñanza.

En suma, la fundamentación de la problemática reconoce que la formación del profesor de matemáticas en ejercicio requiere desarrollar el conocimiento curricular y el conocimiento didáctico base para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en los estudiantes del primer ciclo de básica primaria.

Considerando lo anterior, es interés de este trabajo de investigación dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué elementos básicos del conocimiento didáctico se necesitan en la formación de docentes del primer ciclo de básica primaria, para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal mediante situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general.

Determinar algunos elementos básicos del conocimiento didáctico, en el marco de un modelo local de análisis didáctico, que los docentes del primer ciclo de educación básica primaria requieren para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición.

1.2.2. Objetivos específicos.

O1. Caracterizar el conocimiento didáctico relacionado con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal mediante situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición, a través de un modelo local de análisis didáctico y un modelo didáctico-curricular en la formación de profesores de educación básica primaria.

O2. Describir el conocimiento didáctico de los profesores del primer ciclo de básica primaria al analizar los elementos que estructuran el modelo didáctico-curricular y el modelo local de análisis didáctico mediante una entrevista y un taller para el análisis de una Unidad Didáctica Guía sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal mediante situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición.

1.3. Justificación

Este trabajo de investigación tiene su interés en la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica, especialmente en el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas para su desarrollo profesional situado en un contexto local. Además, realiza un aporte a la línea de investigación sobre la Formación de Profesores de Matemáticas, específicamente a la formación de docentes en ejercicio. La revisión documental para la realización de este trabajo ha permitido identificar que una mayor parte de los trabajos que se desarrollan centran su interés en la formación inicial de docentes (Bedoya, 2002; Gómez, 2007; Askew, 2008; Lupiáñez 2009; Llinares 2012; Castro, Castro y Torrealbo, 2013; Azcarate, 2014).

El presente estudio se considera pertinente en relación con la formación de profesores, en tanto su interés está centrado en los docentes de primer ciclo de básica primaria de escuelas oficiales colombianas, quienes han tenido una formación inicial en otras áreas del conocimiento, pero tienen a cargo la responsabilidad de la enseñanza de las matemáticas escolares en los primeros grados, la cual en muchas ocasiones se orienta a partir de las concepciones y creencias del docente, las experiencias propias de aprendizaje sobre las matemáticas y por ello el docente adopta como principal fuente documental los libros de texto para las actividades de planificación y de gestión propias de su quehacer (Hurtado, 2014).

Así mismo, en la experiencia de acompañamiento que realiza la autora de esta investigación en su rol de tutora del PTA, se ha identificado una falta de comprensión sobre las orientaciones que proporcionan los referentes curriculares nacionales, tales como, los Lineamientos Curriculares De Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006), ello se evidencia en las propuestas curriculares

de los planes de área y de aula que se analizan en conjunto con los docentes como una de las actividades propias del acompañamiento.

Por tanto, para su desempeño profesional se requiere proporcionar al docente de una formación cuyos fundamentos conceptuales aporten las herramientas necesarias para seleccionar o diseñar de manera crítica y reflexiva las actividades de planificación en la enseñanza de las matemáticas escolares. Por tanto, tener un conocimiento de la disciplina no es suficiente para asegurar la competencia profesional del docente, se requieren otros componentes del Conocimiento Didáctico tales como el conocimiento del currículo, el conocimiento del contenido matemático escolar, una aproximación cognitiva sobre los diversos contenidos, una fundamentación teórica en la Didáctica de las Matemáticas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, un análisis sobre los contenidos y su estructura conceptual, un análisis de las representaciones y modelizaciones, entre otras. Por consiguiente, en este trabajo se asume el Análisis Didáctico como una metodología de investigación, formación e innovación curricular (integración de la teoría y práctica) que permite fortalecer el conocimiento didáctico, que permitirá al docente contar con las bases teóricas necesarias y unos fundamentos conceptuales que le permitan planificar, coordinar su quehacer y adoptar decisiones acordes para el logro de los propósitos y expectativas en un plan de formación (Bedoya 2002; Gómez, 2007; Lupiáñez 2009; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

Es por ello que, que en este estudio se caracteriza el conocimiento didáctico que requiere el docente de educación básica primaria para favorecer su desempeño profesional en relación con las actividades propias de su labor como lo es la selección, diseño o rediseño de situaciones, la planificación de las actividades de aprendizaje, selección de materiales, la evaluación de los aprendizajes, que permitan la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND, como uno de los primeros conceptos numéricos escolares y un aprendizaje fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En esta propuesta de investigación se reconoce la complejidad del aprendizaje tanto de los docentes como de los estudiantes desde una perspectiva sociocultural. En esta perspectiva, la educación matemática considera el conocimiento matemático como una actividad social, que se produce y se legitima en la explicación de diversas prácticas sociales de los sujetos,

construyendo socialmente nuevos sentidos y significados compartidos, al interior de grupos socioculturales (Jaramillo, 2011). Así, la educación matemática considera la enseñanza y el aprendizaje como fenómenos socioculturales e históricos (Radford, 2014).

De acuerdo con lo anterior, la formación del profesor y su práctica profesional debe ser estudiada desde prácticas socioculturales en el cual el profesor hace parte de comunidades de práctica en las que cobra vital importancia el contexto en el que tienen lugar dichas prácticas y en el que los aprendizajes del profesor se consideran como un proceso que progresa en estas comunidades a través de actividades comunes (Gómez y Rico, 2011). Esta perspectiva sociocultural centra su atención en las interacciones colaborativas que se dan cuando los individuos buscan desarrollar y mejorar su práctica.

Este estudio centra su interés en la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND como conocimiento fundamental en los primeros grados escolares para el desarrollo de pensamiento numérico, como conocimiento base de otros conocimientos matemáticos y para el desarrollo de habilidades en, la comprensión de la numeración, el cálculo mental y la estimación, en la creación de estrategias flexibles que permitan la solución de problemas aritméticos (MEN, 1998; Sowder, 1992b; NTCM, 2000; Llinares, 2001).

Desde una perspectiva curricular nacional, este trabajo de investigación es pertinente en tanto se relaciona con el eje comprensión de los números y la numeración, que es fundamental en las bases del pensamiento matemático de los estudiantes, pues su propósito es desarrollar maneras flexibles para pensar con los números y usarlos en diferentes contextos, es decir construir sentido numérico. La construcción de los conceptos numéricos relacionados con este eje se enfocan en dos grandes aspectos, construcción de los significados de los números en diferentes contextos y la construcción del Sistema de Numeración Decimal (MEN, 1998). Desde estos referentes curriculares se propone desarrollar destrezas en actividades claves como contar, agrupar y el uso del valor posicional que ayudan a la comprensión del SND (MEN, 1998). Así entonces, una comprensión significativa del sistema de numeración requiere reconocer su estructura, los principios que lo organizan y sus regularidades (MEN, 1998), siendo así este conocimiento fundamental para la comprensión de los conceptos numéricos y el entendimiento de los algoritmos convencionales.

Así mismo, referentes curriculares internacionales como los Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática, propuestos por el Concejo Nacional de Maestros de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM¹) en 2000, se reconoce la comprensión del SND como un aspecto fundamental para la construcción de sentido numérico en los estudiantes. Estos estándares consideran la construcción de sentido numérico como un aspecto central en el estándar sobre los números y las operaciones, comprendiéndose como:

La habilidad para descomponer números naturalmente, usar números particulares como 100 o $\frac{1}{2}$ como referentes, usar las relaciones entre operaciones aritméticas para resolver problemas, comprender el sistema numérico de base diez, estimar, dar sentido a los números, y reconocer la magnitud relativa y absoluta de números (NTCM, 2000, p. 32).

Considerando algunas investigaciones sobre el SND, el estudio de este contenido matemático escolar es pertinente, al ser cercano para los niños antes de su ingreso a la escolaridad, por ser un producto cultural y objeto de uso social cotidiano presente en su entorno (Lerner y Sadovsky, 1994). A lo anterior, se suma que este contenido escolar es un aprendizaje fundamental para la comprensión de los primeros conceptos numéricos, por ser el primer sistema matemático convencional al que se enfrentan los niños al ingresar a la escuela y también extra escolar, es un conocimiento clave en las bases del desarrollo del pensamiento numérico y en otros aprendizajes matemáticos, por tanto se requiere un dominio de esta herramienta cultural para el desarrollo del pensamiento matemático (Terigi y Wolman, 2007). Es por ello, que la enseñanza del SND ocupa un espacio importante en el desarrollo curricular en los primeros grados escolares en tanto instrumento cultural y de uso social, cuyo sentido y funcionalidad debe tener en cuenta los contextos y significados del número (Terigi y Wolman, 2007; Bartolomé y Fregona, 2003).

Por otra parte, algunas investigaciones consideran la construcción sentido numérico como como un desarrollo fundamental para la comprensión del SND. Al respecto, Sowder (1992b) refiere que para la construcción de sentido numérico es fundamental la comprensión y uso de los números en situaciones cardinales, ordinales y de valor de posición. Con relación a este último, existen trabajos que relacionan estrechamente la noción de valor posicional con

¹ Por sus siglas en inglés National Council of Teachers of Mathematics.

la noción de agrupamiento. Al respecto Resnick (como se citó en Sowder, 1992b), refiere que el valor posicional permite pensar en los números como composiciones de otros números, como composición de unidades y decenas, como un caso particular de agrupación de números, y reagrupaciones de números para realizar operaciones numéricas. Así mismo, Bednarz y Janvier (como se citó en Sowder, 1992b), para evaluar la comprensión del valor posicional definieron las siguientes habilidades: articular y desarticular agrupaciones; hacer agrupamientos de agrupamientos; hacer intercambios de una agrupación por una unidad de orden superior y desagrupar en unidades de orden inferiores; realizar codificaciones, es decir, hacer representaciones de colecciones reorganizadas en agrupaciones, descodificar, descubrir reglas para codificar.

Igualmente, desde una perspectiva didáctica, Llinares (2001) refiere que el sentido numérico en los números naturales y la comprensión del SND están estrechamente relacionados, porque la idea de sentido numérico implica que los estudiantes posean una red conceptual que relacione las nociones de agrupamiento y valor de posición con la habilidad de usar magnitudes absolutas y relativas de los números que les permitan emitir juicios sobre lo razonable o no de los resultados obtenidos en problemas numéricos, generar algoritmos diferentes a los convencionales, relacionar los números con las propiedades de las operaciones, entre otros.

En suma, este trabajo reconoce que las nociones de agrupamiento y valor posicional son claves para la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND, tanto de profesores como de estudiantes. Por ello, este estudio considera pertinente caracterizar el conocimiento didáctico del profesor de primer ciclo de educación básica primaria, para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, a través de situaciones relacionadas con el agrupamiento y el valor posicional que favorezcan la comprensión de los principios que rigen el SND. Para dicha caracterización, este trabajo articula un modelo didáctico y curricular y un modelo local de Análisis Didáctico que permitan determinar los elementos básicos (curriculares, matemáticos y didácticos) del conocimiento didáctico que el docente en ejercicio considera en sus prácticas, para el desarrollo de habilidades que promuevan la construcción de sentido numérico en la enseñanza de este contenido escolar.

Del mismo modo, el desarrollo de esta investigación se considera importante debido a que la mayor parte de los trabajos consultados sobre el SND como objeto matemático centran su interés en el aprendizaje de los estudiantes (Lerner y Sadovsky, 1994; Poveda, 2006; Tergi y Wolman, 2007; Gutiérrez 2017) o en la formación inicial de profesores. Si bien este tipo de trabajos hacen aportes importantes en los programas de formación de las licenciaturas y para el desarrollo de las prácticas de aprendizaje del SND, el estudio sobre la formación de los profesores en ejercicio permite reflexionar sobre la práctica e identificar información valiosa para el desarrollo profesional situado que favorece la toma de decisiones fundamentadas para la enseñanza.

1.4. Antecedentes

En este apartado se presentan los antecedentes relacionados con la problemática de este estudio. Para ello relacionan algunas fuentes documentales de investigación en torno a tres cuestiones. El primero, se refiere el campo de la formación de profesores y el conocimiento didáctico; el segundo, referido a la enseñanza y aprendizaje del SND y la tercera cuestión, se relaciona con investigaciones sobre la construcción de sentido numérico.

1.4.1. Algunas investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas.

La evolución en la Educación Matemática ha permitido la consolidación de diversos campos de estudio dentro de ella, tal es el caso del campo de la formación de profesores, “cuyo centro de interés es el profesor de matemáticas y su evolución como profesional” (Cardeñoso, Flores, Azcarate, 2001, p 1). A continuación se presentan algunas investigaciones que se relacionan con este estudio.

1.4.1.1. Algunas investigaciones en torno al campo de la formación de profesores.

En el Handbook Of Research On The Psychology Of Mathematics Education: Past, Present And Future, Ponte y Chapman (2006) identifican y discuten documentos, estudios y propuestas reportadas por la comunidad del International Group For The Psychology Of Mathematics Education (PME) sobre el conocimiento del profesor y su práctica. Los autores delimitan el estudio en contextos como: el salón de clase, la escuela, los cursos de formación inicial y formación continua, y otros entornos profesionales; donde la actividad del profesor puede estar situada. Los documentos estudiados fueron clasificados de acuerdo a sus objetivos de estudio, identificando así cuatro grandes categorías: el conocimiento matemático

de los profesores, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, las creencias y concepciones de los profesores y la práctica de los profesores. Al respecto, los autores identifican la evolución de cada una de las anteriores categorías de acuerdo a lo que se referencia en los documentos y se identifican algunas subcategorías emergentes, tales como: actitudes de los profesores y aspectos afectivos, investigación de docentes, profesores en comunidad, profesores universitarios, pensamiento del profesor y metacognición, reflexión del profesor y practica reflexiva. Sin embargo, estas subcategorías no pudieron tratarse en el estudio de manera individual dado el poco desarrollo en la literatura existente, pero se consideran fundamentales para el estudio de las cuatro categorías principalmente identificadas.

Reconociendo que los profesores juegan un rol importante en los procesos de aprendizaje de las matemáticas y que su crecimiento profesional esta mediado por su formación, Llinares y Krainer (2006) identifican que la formación inicial del docente y la formación del docente en servicio son intervenciones importantes para apoyar el crecimiento de los profesores, debido a que se consideran como constructores activos de su conocimiento y por ello juega un papel importante la reflexión de su práctica. Estos autores reconocen el proceso complejo de los aprendizajes de los profesores que en gran medida está influenciado por factores: personales, sociales, culturales, organizacionales y políticos. Los autores en el desarrollo del trabajo, consideran tres tipos de profesores, de acuerdo a la revisión literaria de los documentos del PME: los estudiantes para profesores, los profesores en servicio y los formadores de profesores.

Reconociendo la complejidad de la enseñanza de las matemáticas, Jaworski (2008) menciona que los docentes necesitan conocer las matemáticas, la pedagogía concerniente a las matemáticas, la didáctica matemática para el diseño de las actividades para los alumnos, los elementos de los sistemas educativos en los que trabajan los docentes, además del currículo y la evaluación, y las configuraciones sociales y culturales donde se desarrollan las prácticas. Tanto los formadores de profesores como los profesores tienen un objetivo compartido que es proporcionar mejores oportunidades de aprendizaje de las matemáticas a los estudiantes. Es así, como los tipos de conocimientos que necesitan los maestros también son fundamentales para el trabajo de los formadores de docentes. Además, el formador

requiere un conocimiento amplio sobre la teoría del aprendizaje y la enseñanza, conocimiento en las metodologías en la investigación y conocimiento de los sistemas de educación.

Sánchez (2011) presenta en su artículo una revisión realizada a la literatura de las investigaciones en el campo de la formación de profesores de matemáticas. La revisión documental permitió identificar tres grandes categorías de investigación. La primera de ellas, lo concerniente a la investigación como centro de interés en la formación del profesor de matemáticas. La segunda categoría los conceptos teóricos más usados en este campo de investigación. La tercera categoría presenta la identificación de nuevas tendencias que están emergiendo y presentan pocos reportes en la literatura. En relación con la primera categoría, el autor establece que las discusiones se han centrado en torno a cinco aspectos: las creencias, puntos de vista y concepciones de los docentes; las prácticas de los profesores; el conocimiento de los profesores y las habilidades; las relaciones entre la teoría y la práctica; la reflexión de la práctica.

Por su parte Socas (2011) propone en su artículo la reflexión sobre ¿cómo mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas? realizando un especial énfasis en la educación primaria y en los profesores de esta etapa, como un elemento fundamental para el mejoramiento de los aprendizajes en matemáticas y que sean de calidad. En el artículo se referencian los aportes de la investigación que proporcionan información para caracterizar las carencias formativas del futuro docente. Una vez se determinan los aspectos significativos del conocimiento y de las competencias de los profesores se cuestiona como debería ser las tareas y actividades a proponer en un plan de formación inicial de profesores. Se presenta una propuesta de matemáticas para maestros en las que se estudie y se reflexione alrededor de tres sistemas de actividades que determinan los conocimientos y competencias del profesor, a saber: Organizar el contenido matemático para enseñarlo, analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos, saber gestionar el contenido matemático en el aula.

En el contexto colombiano autores como Guacaneme, Obando, Garzón y Villa (2013) presentan un informe en relación con la formación de futuros profesores y de profesores en ejercicio en Colombia. En este se presenta un panorama en el que se describe, el contexto histórico de la formación de profesores en nuestro país, la estructura de la formación de

profesores, la formación continua, el desarrollo y las limitaciones que se presentan en la formación de futuros profesores de matemáticas y de los profesores en ejercicio. Dicho informe menciona como la formación de profesores ha presentado transformaciones producto de las dinámicas políticas, sociales y académicas que van emergiendo. Así mismo, en este informe se reconoce la brecha existente entre las políticas sobre la educación en matemáticas determinadas por el Ministerio de Educación Nacional en el país y las prácticas de aula por parte de los profesores, debido a las actitudes de cambio que asumen estos y sus creencias sobre las prácticas y los conocimientos matemáticos. En el informe también se resalta la falta de una política clara frente a la formación de profesores y la necesidad de contar con sistema de formación continua que pueda articular los distintos niveles y perfiles de formación de tal manera que permita la circulación de las personas en formación dentro de dicho sistema.

Realizando un aporte al campo de la formación de profesores, el trabajo de Hurtado (2014) reconoce la necesidad formativa en los profesores de matemáticas para el desarrollo de las actividades propias de su labor pedagógica, como lo son sus labores de planeación, diseño, implementación y evaluación de las actividades que propone. Así entonces este trabajo identifica los conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos que un grupo de docentes exhiben cuando analizan una unidad didáctica, relacionada con las ecuaciones de primer grado con una incógnita real, diseñada para la educación básica secundaria específicamente en grado octavo. La unidad didáctica se concreta a partir de la caracterización de los conocimientos didácticos sobre el objeto matemático mediante una propuesta teórica y metodológica en los que se relacionan, los organizadores del currículo, el conocimiento didáctico y el Análisis Didáctico. El análisis de dicha unidad didáctica se realizó mediante el desarrollo de unos talleres cuyos resultados permitieron identificar las necesidades sobre la formación de profesores para el ejercicio de su quehacer profesional.

1.4.1.2. Algunas investigaciones sobre el conocimiento didáctico del profesor.

Gómez y Rico (2002) en su artículo establecen los fundamentos para la formación inicial de profesores de matemáticas, en la cual se asume una postura sobre las matemáticas escolares, el aprendizaje de las matemáticas y la manera como el profesor incide en los aprendizajes, además, el conocimiento que el profesor debe tener y como debe construirlo. En relación con el conocimiento del profesor, los autores proponen el análisis didáctico como un procedimiento para organizar la enseñanza. En la realización de este análisis, el profesor

pone en juego y desarrolla Conocimiento Didáctico, el cual es un constructo cognitivo de carácter integrado que considera unos conocimientos disciplinares de referencia (la noción de currículo, los fundamentos de las matemáticas escolares, y los organizadores de currículo), cuya utilidad práctica se evidencia en el proceso de planificación, ejecución y evaluación de actividades de aula.

Bedoya (2002) en su trabajo doctoral diseñó, planificó y evaluó un programa local de formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria con el propósito de observar, describir y caracterizar los conocimientos didácticos de los futuros profesores sobre las funciones cuadráticas, a partir de un modelo local de los organizadores del currículo. Este modelo local permite una selección adecuada de organizadores del currículo con los cuales se desarrolla el análisis didáctico para el diseño y la planificación de unidades didácticas. El conocimiento didáctico debe incluir distintos tipos de conocimientos fundamentales para realizar análisis didáctico: (i) noción y contenidos del currículo, (ii) nociones de la didáctica relevantes para el tópico, (iii) integración de (i) y (ii) en torno a la estructura matemática particular para efectos de realizar análisis didáctico.

De acuerdo con Ball, Hill & Bass (2005) la naturaleza real del conocimiento matemático para la enseñanza se relaciona con acciones como: planear las actividades de enseñanza y las tareas para apoyar el aprendizaje, evaluar el trabajo de los estudiantes, redactar y valorar evaluaciones, explicar las actividades de clase a los acudientes, entre otras actividades. Por lo tanto, el alcance del conocimiento matemático para la enseñanza está compuesto por dos naturalezas clave que denominan los autores como el “conocimiento común” y otro denominado el “conocimiento específico”. El primero hace referencia al conocimiento matemático que todo ciudadano debiera poseer y el segundo al conocimiento que todo profesor debe poseer para enseñar matemáticas escolares.

Askew (2008) explora en los resultados de su investigación, aquellos aportes sobre el tipo de conocimiento matemático que los profesores de primaria pueden necesitar para poder enseñar eficazmente y mejorar el aprendizaje de los estudiantes, conocer lo que los profesores con experiencia saben, ello permite conocer lo que sería necesario abordar con los futuros profesores. Además, de adquirir un cuerpo de conocimiento matemático, los profesores de

primaria necesitan de una sensibilidad matemática que les permita abordar los planes de estudio existentes y tener una apertura al cambio.

Por su parte, Vásquez (2020) realiza un estudio que aporta al campo de la formación de profesores centrando su interés en la caracterización de algunos elementos básicos del Conocimiento Didáctico sobre la construcción de sentido numérico del profesor en ejercicio de primer ciclo de básica primaria, para la enseñanza del Número Natural en situaciones de cardinalidad, ordinalidad y medida, mediante un Modelo Local de Análisis Didáctico. Los resultados de esta investigación permitieron reconocer los conocimientos didácticos desarrollados por los profesores a partir de su formación y experiencia, que son puestos en acto en sus prácticas de enseñanza para la planeación, orientación y evaluación de propuestas de enseñanza para la construcción sentido numérico en la enseñanza del concepto del Número Natural. Estos resultados, son un aporte importante para la toma de decisiones en relación al diseño curricular escolar en los primeros grados de escolaridad y en los programas de formación inicial y continua de profesores de matemáticas.

1.4.2. Algunas investigaciones en relación con la enseñanza y aprendizaje del Sistema de Numeración Decimal.

Baroody (1988) presenta un análisis de tareas de un estudio de caso, relacionadas con las dificultades y características que se presentan los niños en la lectura y escritura de los números. En este análisis, se consideran los números de varias cifras como una expresión numérica que codifica relaciones entre palabras, estas relaciones se codifican mediante su posición (orden y lugar). Por tanto para la lectura y escritura de números, los niños deben aprender a codificar y decodificar estas relaciones, comprender como se organiza nuestro sistema escrito, aprender procedimientos para traducir un sistema a otro atendiendo a las regularidades y las reglas para casos especiales. Las reglas requieren el conocimiento de las designaciones de los órdenes de unidades y la serie numérica. Muchas de las dificultades de los estudiantes con números de tres cifras se asocian con las técnicas básicas para la enumeración por la falta de comprensión de que la posición de la cifra define su valor en números de varias cifras. Por tanto, para lectura y escritura de números se requiere el dominio del concepto de los órdenes de las unidades, la comprensión del cero como cifra significativa y de la equivalencia de los órdenes en base 10, además, que los números de varias cifras se

pueden descomponer de múltiples formas. Todas estas habilidades, tienen en cuenta la actividad de contar como base y el conocimiento matemático informal.

Lerner y Sadovsky (1994) presentan los resultados de un estudio en el que se indaga sobre cómo se aproximan los niños al conocimiento del sistema de numeración y toman esta información como punto de partida en el diseño de situaciones didácticas. El trabajo se centró en las producciones sobre la numeración escrita realizadas por los estudiantes a partir de los criterios propios que construyen del sistema de numeración como producto cultural y objeto social usado cotidianamente. El trabajo didáctico con la numeración escrita es propuesto alrededor de cuatro ejes articulados como los son: operar, ordenar, producir, interpretar. Estos ejes, se organizan en dos grandes categorías para plantear las situaciones didácticas, la primera de las situaciones considera la relación de orden con actividades con consignas como comparar números, producir e interpretar escrituras numéricas, identificar regularidades tanto en las situaciones de comparación como en las de producción o interpretación de escrituras de números. La segunda de las situaciones está centrada en las operaciones aritméticas, para ello se proponen actividades en las que se resuelven problemas y confrontan procedimientos, reflexionan sobre las operaciones y descubren leyes del sistema de numeración.

Poveda (2006) presenta los resultados de una experiencia de investigación acción² en la que se estructuro, implemento y sistematizo una propuesta que considero el estudio de aspectos como: la lógica del SND y las demandas que su comprensión implica en los estudiantes, el proceso de su apropiación y el enfoque didáctico a partir del constructivismo. Los resultados del proyecto han identificado representaciones propias de los estudiantes en relación con los algoritmos y el manejo del SND, las cuales evidencian unas elaboraciones a la medida del pensamiento de los niños y diferente a la matemática formal. Las actividades desarrolladas en la investigación se organizan en torno a tres aspectos fundamentales: sistemas concretos de base decimal sobre los cuales operan los estudiantes, el uso de

² Realizada en 2001 en el Centro educativo distrital Villa Amalia con estudiantes de grado 1 a 3, financiada por el instituto para la investigación educativa y el desarrollo pedagógico. Alcaldía Mayor de Bogotá. La propuesta didáctica tiene como referente el trabajo de Jorge Castaño “Descubro la matemática”

representaciones y procedimientos propios para operar cantidades; y el uso de los signos convencionales (oral y escrito) del SND.

Orozco (2003) presenta la descripción de un programa de formación de maestros³ orientado a la comprensión por parte de estos sobre el sistema de notación base diez (SNBD) y a la transformación de las prácticas de aula para enseñar a escribir números naturales y realizar operaciones aritméticas. El programa tuvo como propósito trabajar con los docentes el cambio en sus concepciones sobre el SNBD, su enseñanza, las dificultades que implica su aprendizaje y una revisión crítica a las prácticas en la enseñanza habitual de la lógica del sistema. La reflexión crítica se realizó sobre las acciones de los maestros al trabajar con material concreto que ejemplifican la lógica del sistema, al implementar actividades realizadas y analizarlas en el aula, buscando establecer relaciones entre la teoría y la práctica. El programa de formación se estructuró en torno a tres ejes: (i) las posibilidades y límites del conocimiento de los alumnos con respecto al contenido matemático que han de aprender; (ii) las características de los contenidos a enseñar; y (iii) la manera como se puede enseñar para lograr que los alumnos construyan un conocimiento estable y significativo.

Salinas (2008) presenta un estudio empírico a futuros profesores sobre el conocimiento de la materia específica –de acuerdo con las componentes del conocimiento del profesor propuestas por (Llinares, 1991) – cuyo propósito es analizar las dificultades de los docentes en formación sobre la comprensión del valor de posición en nuestro SND. El autor documenta algunas de las dificultades en el aprendizaje del SND a partir de trabajos realizados por Kamii (1986), Baroody (1991), Ball (1991), Verschaffel y De Corte (1996). Luego, presenta el desarrollo de la investigación en la que se aplica una prueba a docentes en formación inicial, que retoma ítems que son establecidos para estudiantes de básica secundaria y final de la primaria basados en el trabajo de Flonory y otros (1963,1990, 1991) y de un test del Assessment Of Performance Unit (1980), de esta manera se busca poner de manifiesto los errores relacionados con el valor de posición en los estudiantes de magisterio y se intenta indagar si los errores detectados en los primeros grados escolares desaparecen al avanzar en la formación matemática. Algunas de las conclusiones propuestas por el autor en su trabajo

³ Docentes de 2º hasta 5º de primaria en escuelas públicas de Cali, Colombia

son: los errores detectados en el estudio pueden tener su origen en el momento de su aprendizaje, los contenidos referidos al SND no se tratan en los currículos de matemáticas a partir de grado quinto de primaria. Sin embargo, estos contenidos serán usados a lo largo de su vida escolar y cotidiana, y los profesores en formación que inician sus estudios de magisterio tienen poco dominio de los contenidos de las matemáticas escolares, específicamente en recordar los conocimientos adquiridos en las primeras etapas de la enseñanza.

Gutiérrez (2017) realiza un trabajo de investigación en el que se caracterizan algunos elementos conceptuales y procedimentales relacionados con el SND que se identifican en estudiantes de Transición, para ello la autora desarrolló un Modelo Teórico Local organizado en cuatro componentes articulados, a saber: cognitivo, comunicativo, enseñanza y formal relacionado con el Concepto de Numero Natural y el SND. Dicho modelo fundamentó el marco teórico y metodológico de la experimentación. En este estudio, los resultados permitieron evidenciar como desde grado Transición se puede avanzar hacia la comprensión del SND en nociones fundamentales tales como, la comprensión del numero como cardinal hasta 10, la descomposición y composición de cantidades, uso de cantidades superiores a la decena, el conteo, relacionados con los agrupamientos en base 10.

1.4.3. Algunas investigaciones relacionadas con la construcción de sentido numérico.

Sowder (1992a) realiza una revisión documental sobre las investigaciones en relación con la estimación y el sentido numérico. Respecto a la estimación presentan tres categorías – estimación con cálculo, estimación de medidas, estimación numérica– que requieren de la intuición cuantitativa para su desarrollo. En este capítulo, la autora apoya su argumento sobre sentido numérico en las ideas que Resnick, 1989 (como se citó en Sowder, 1992a) presentó sobre el pensamiento de orden superior, relacionando estos dos significados y presentando una aproximación a la definición de sentido numérico considerándolo como “una red conceptual bien organizada que habilita la relación de números y propiedades de las operaciones y resolver problemas numéricos a través de vías flexibles y creativas”. (Sowder, 1988). Sobre la estimación y el sentido numérico es de aclarar que no son contenidos del currículo escolar. Sin embargo, la instrucción que hace el docente de matemáticas debe desarrollar habilidades para construir sentido dentro de los números como una meta para la

enseñanza en la planeación matemática. La estimación y el cálculo mental se asocian a la comprensión del sistema numérico. La autora destaca que la estimación, el cálculo mental y el sentido numérico se encuentran estrechamente relacionados.

Sowder (1992b) describe las múltiples dimensiones del sentido numérico y las posibles vías para su desarrollo. En primer lugar la autora explora cuatro tópicos curriculares relacionados con el sentido numérico, a saber: numeración, magnitudes numéricas, cálculo mental y estimación. De igual manera, caracteriza unas habilidades o comportamientos que demuestran cierta presencia de sentido numérico, las cuales se organizan y articulan por grupos relacionándolas con uno de los tópicos mencionados. Sobre el tópico numeración se resalta la importancia de del conteo, el agrupamiento y el valor de posición en la comprensión del SND. En relación con las magnitudes numéricas comprender la magnitud de los números requiere de la habilidad de ordenar y comparar números. En cuanto al cálculo mental se encuentra relacionado con la comprensión y uso flexible de la estructura de los sistemas numéricos. En referencia a la estimación, esta requiere el desarrollo de habilidades y estrategias en las que se demuestra una comprensión profunda de los números y las operaciones.

Llinares (2001) presenta un capítulo centrado en el significado que se da para la expresión de sentido numérico y la manera de representar los números naturales en relación con el Sistema Decimal de Numeración. El autor presenta el conjunto de conceptos y relaciones que permiten construir la idea del sistema de numeración para la educación básica primaria, ampliando la caracterización de las tres fases propuestas por Resnick (1983), para el desarrollo de la comprensión del SND, con algunas reflexiones desde la perspectiva del sentido numérico de los números naturales. También se presentan las habilidades que manifiestan la construcción de sentido numérico propuestas por Sowder (1992) en torno a los cuatro dominios sobre sentido numérico: numeración, magnitud del número, cálculo mental, estimación en cálculo.

Castro y Segovia (2015) profundizan la idea de sentido numérico como aquel conjunto de capacidades numéricas con utilidad social que permite a las personas la comprensión de diversas situaciones y su actuación autónoma frente a estas. Dichas capacidades numéricas van más allá del trabajo algorítmico y rutinas aritméticas. Así entonces, los autores proponen

el trabajo escolar con sentido numérico de tal manera que los conceptos numéricos adquieran significado y se desarrollen capacidades numéricas que le permitan desenvolverse en situaciones significativas de la vida cotidiana dentro y fuera del aula.

Almeida y Bruno (2015) reflexionan sobre el significado de sentido numérico presentando una caracterización de sus componentes, proponiendo algunas actividades que se pueden concretar en el aula, dado que el sentido numérico no es un contenido que se enseñe. Además, estas autoras hacen referencia a la metodología de clase requerida al llevar a clase las tareas que permiten construir sentido numérico, puesto que no es suficiente seguir una aproximación única en la resolución de las tareas ya que no propicia el pensamiento flexible, por ello es fundamental la flexibilidad de estrategias. Por último, estas autoras destacan que la evaluación del sentido numérico corresponde a una evaluación de tipo cualitativo, en cuanto considera los razonamientos que hace el estudiante, debe realizarse de manera continua a lo largo del proceso de enseñanza. Las evidencias de la construcción de sentido numérico no se pueden identificar solo en pruebas escritas.

Hernández, López, Quintero y Velásquez (2015) presentan una reseña de sobre el concepto de sentido numérico desde su surgimiento en el campo de la Educación Matemática. En este documento no se provee una nueva definición, por el contrario se propone una taxonomía que clasifica los procesos matemáticos –cognitivos– que indican la construcción de sentido numérico. A partir de esta taxonomía se presentan trayectorias de aprendizaje y actividades didácticas que permitan la construcción de sentido numérico, teniendo en cuenta prácticas en el marco de la Educación Matemática Realista. El documento también presenta otras dimensiones del sentido numérico como la dimensión algebraica, la dimensión geométrica y variaciones del sentido numérico. Al final el libro presenta una compilación de actividades para desarrollar los diferentes modelos didácticos relacionados con el sentido numérico.

Teniendo en cuenta los antecedentes referenciados anteriormente, estos justifican la pertinencia del presente trabajo de investigación, la vigencia y actualidad del mismo. En el caso del campo de la Formación de Profesores, se reconocen variados trabajos en los que se destacan los aportes a este, en tanto se enmarca en las categorías de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, concepciones de los profesores y la práctica profesional. Así

mismo, algunos trabajos reconocen que el desarrollo profesional del docente está influenciado por su formación inicial y su formación como docentes en ejercicio. Igualmente, algunas investigaciones reconocen las necesidades de formación que requieren los profesores de matemáticas para que sus prácticas sean acordes a las demandas educativas actuales. Además, las investigaciones reseñadas sobre el conocimiento didáctico del profesor, destacan el papel importante de este para ampliar aspectos disciplinares de referencia en relación con la noción de currículo, los fundamentos de las matemáticas escolares y los organizadores del currículo como constructos que permiten mejoras e innovaciones en las prácticas del profesor y sus propuestas curriculares.

Así mismo, las investigaciones señaladas anteriormente en relación con el SND reconocen algunos aspectos fundamentales que se tendrán en cuenta para este estudio. En primer lugar, se identifican variados trabajos existentes en torno a la enseñanza y el aprendizaje del SND, reconociéndolo como una importante temática de estudio, en tanto producto cultural y objeto social de conocimiento, que inicia su desarrollo desde antes de la escolaridad y es de especial interés en los primeros grados, destacando su importancia como un conocimiento fundamental para el desarrollo de pensamiento matemático a lo largo de la formación su vida escolar y sus acciones cotidianas. En segundo lugar, los tópicos asociados a la enseñanza del SND que han sido estudiados se relacionan con habilidades en el conteo, el agrupamiento y el valor de posición como nociones fundamentales para la comprensión del SND, además, se identifican algunas representaciones y procedimientos que favorecen las operaciones entre cantidades.

Por su parte, los trabajos referenciados en torno al Sentido Numérico permiten reconocer que este es un campo de interés que se ha venido desarrollado en las últimas décadas, que se relaciona con las habilidades y capacidades para el uso flexible de los números y los procedimientos de cálculo. La construcción de sentido numérico es evidenciable en el desarrollo de habilidades que se ponen de manifiesto en distintas situaciones numéricas. Así entonces, los trabajos mencionados ofrecieron información fundamentada para la realización del Análisis Cognitivo propuesto en este trabajo, identificando las capacidades asociadas al cálculo mental y la estimación como dimensiones del Sentido Numérico.

De esta manera, los trabajos presentados en relación con el SND y el Sentido Numérico, realizan un aporte a la caracterización del CD del profesor en el MLAD propuesto en este trabajo, específicamente en el Análisis de Contenido y en el Análisis Cognitivo. La información que proporcionaron estos trabajos, fundamentaron los diseños de los instrumentos empleados en la investigación como lo es la entrevista y la unidad didáctica propuestos.

Capítulo 2: Marco conceptual

En este capítulo se presentan los referentes conceptuales considerados en este trabajo sobre la formación del docente del primer ciclo de educación básica primaria, en relación con el conocimiento didáctico en torno a la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición para las prácticas educativas de grado segundo de primaria.

En primer lugar, se presentan los referentes conceptuales que se articulan en el modelo didáctico - curricular del profesor de matemáticas propuesto en este trabajo, fundamentado en algunos constructos teóricos que se adoptan desde un enfoque sociocultural para la enseñanza de las matemáticas escolares (Radford, 2014), una perspectiva fenomenológica didáctica para la enseñanza de las matemáticas (Puig, 1997; Ruiz, 2016), una perspectiva del currículo desde un enfoque funcional de las matemáticas escolares que promueva la construcción de sentido en la enseñanza de las matemáticas escolares (Lupiáñez, 2009, Rico y Lupiáñez, 2008; Rico, 2016, Ruiz, 2016). En segundo lugar, se presenta una contextualización de tipo curricular a nivel internacional, nacional y de aula respecto al sentido numérico y el SND en el primer ciclo de educación básica primaria. Además de los referentes señalados, en este capítulo también se presenta un Modelo Local de Análisis Didáctico –MLAD– (Bedoya, 2002; 2019), que permite analizar el conocimiento didáctico que el profesor en ejercicio debe desarrollar, con el propósito de emplearlo al momento de planear, enseñar, evaluar y reflexionar de manera crítica, sobre la enseñanza del SND.

2.1. La Formación de Profesores en Didáctica de las Matemáticas

El presente trabajo de investigación se inscribe en el campo de la Formación de Profesores en la disciplina Didáctica de las Matemáticas. Este campo de investigación en las últimas décadas ha adquirido una gran atención por parte de la comunidad de investigadores en Educación Matemática consolidando diversas líneas de investigación, entre las que se considera el desarrollo profesional del profesor, la práctica docente y el conocimiento profesional de los docentes.

La Formación de Profesores ha llamado la atención de los investigadores, en tanto consideran al profesor y su formación como elementos claves en la formación matemática de

los ciudadanos y en la mejora de la enseñanza de las matemáticas acorde con las exigencias que demanda la sociedad actual (Azcarate, 2014; Llinares, 2014). Estas demandas están asociadas no solo a los resultados en las diferentes pruebas externas, sino al tipo de educación matemática que requieren los ciudadanos, que los incorpore socialmente y permita el impulso de su formación social y profesional. Al respecto, Ponte (2012) señala que “una enseñanza de las matemáticas de calidad, pasa por un profesorado con formación matemática apropiada, competencia reconocida en el campo didáctico, buena relación con el alumnado, actitud profesional ante los problemas que emerjan y capacidad de actuación a nivel profesional” (p. 83). Es por ello, que se han desarrollado trabajos que aportan información sobre el tipo de conocimiento necesario para que un profesor desarrolle competencias matemáticas en sus estudiantes e implemente nuevas formas en su práctica docente acordes al contexto y a las necesidades de dicha práctica.

Asimismo, este trabajo de investigación considera la Formación del Profesor como un proceso de transformación, en el que el profesor de matemáticas asuma un rol como profesional con conocimientos teóricos y prácticos que le permitan fundamentar su práctica a partir de las características socioculturales de sus estudiantes. Al respecto, Llinares (2012) señala que una aproximación al mejoramiento de las dificultades de formación de los futuros profesores y profesores en ejercicio, es desarrollar el conocimiento y las destrezas para analizar y reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas y “mirar con sentido” los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El proceso de formación de profesores se considera como un proceso de reflexión permanente sobre los saberes de referencia, en nuestro caso el conocimiento didáctico, los conocimientos sobre el currículo y las características de los contextos en los que se desarrolla una determinada práctica educativa.

Tal y como lo señala Ponte (2012), en los procesos de formación de los docentes sus aprendizajes se dan a partir de la actividad –o en términos de Radford (2014a) de labor conjunta– y las reflexiones que giran en torno a ella, participando en prácticas sociales en el marco de situaciones colaborativas en comunidades de investigación y formación de docentes que posibiliten el desarrollo de conocimientos de manera colectiva y personal. De acuerdo a lo anterior, desde una perspectiva sociocultural se concibe el aprendizaje y el

desarrollo profesional del profesor como cambios en las formas de participación en las prácticas matemáticas que se generan en el aula escolar y cómo se comprenden dichas prácticas por parte del profesor. (Llinares, 2012). De esta manera, el análisis del conocimiento profesional y de la práctica profesional permiten identificar cómo aprenden los profesores lo que necesitan saber, además de caracterizar su formación.

En esta investigación se asume la formación de profesores como un proceso que promueve el desarrollo profesional del profesorado desde sus conocimientos base (desarrollados en el campo disciplinar de la Didáctica de las Matemáticas). De acuerdo con Ponte (2012), en el desarrollo profesional del profesorado se valoran los conocimientos y procesos de aprendizaje a lo largo del ejercicio como profesor, además de las necesidades, las capacidades a descubrir, considerar y fomentar para su desarrollo. Según el autor, el desarrollo profesional se caracteriza como un proceso que se impulsa desde dentro hacia afuera, en el que el profesor considera las cuestiones y proyectos a emprender y las formas de realizarlos. Así, el desarrollo profesional va más allá de la apropiación de conocimientos e informaciones transmitidas desde afuera hacia adentro y de una formación segmentada en disciplinas. El desarrollo profesional comprende los aspectos cognitivos, afectivos y relacionales en un todo articulado en la concepción del profesor, además este considera la teoría y la práctica de manera integrada para el desarrollo profesional del profesor como sujeto de formación (Ponte, 2012).

De acuerdo a lo anterior, la formación de profesores en el marco del desarrollo profesional se reconoce como un proceso de transformación que considera los conocimientos de los profesores y las potencialidades de estos en la construcción de nuevos aprendizajes a partir de la actividad y la reflexión sobre ella en prácticas sociales, a partir de las relaciones que él establece con: las comunidades en las que participa, el conocimiento disciplinar y los estudiantes. Debido al carácter práctico de la profesión del profesor se requiere de una articulación entre la teoría y la práctica para su desarrollo profesional.

2.1.1. El Conocimiento Didáctico en la Formación de Profesores.

La enseñanza de las matemáticas escolares por parte de los profesores implica necesariamente que estos deban contar con unos conocimientos y capacidades profesionales en la práctica de su profesión, los cuales al desarrollarse permiten una evolución profesional

sobre las formas de concebir la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El desarrollo de estos conocimientos y capacidades estarán mediados por el contexto y las actividades que se realizan y el conjunto de interacciones que se dan en el marco de comunidades de práctica (Cardenoso, Flores y Azcarate, 2001; Bedoya, 2019). Asimismo, cada contexto particular donde se desarrolle la práctica de enseñanza de las matemáticas debiera ser conocido por el profesor con el fin de potenciar sus habilidades y competencias profesionales.

Teniendo en cuenta lo anterior, este trabajo centra su atención en el Conocimiento Didáctico (CD) como foco de interés para el desarrollo profesional en el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas (FPM) en cualquier nivel escolar. Este conocimiento es asumido en este estudio como un medio para la comprensión de las decisiones, planeaciones, actuaciones y reflexiones del profesor en relación con la matemática escolar con el objetivo de construir el sentido numérico. De acuerdo con Sánchez (2011), el conocimiento de los profesores debe estar determinado por el contexto local en el que el profesor desarrolla su práctica, así entonces, el profesor de matemáticas debería tener unos conocimientos y habilidades básicas que cualquier profesor en esta materia necesita para gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con las destrezas y habilidades matemáticas que poseen sus estudiantes.

Por lo tanto, en este trabajo se concibe el CD de acuerdo con Bedoya (2002), como una de las principales fuentes de información y formación didáctica profesional, además de considerarse como un instrumento que permite al profesor de matemáticas desarrollar las distintas actividades profesionales de análisis que le competen tales como: el diseño, desarrollo y valoración de las actividades de planificación curricular, en concreto el CD sobre el contenido matemático en cuestión, permite el análisis necesario para diseñar, poner en práctica y evaluar unidades didácticas. Este conocimiento por su carácter didáctico es producido en la Didáctica de la Matemática como disciplina, por tanto, nos interesa el conocimiento del profesor desde este campo disciplinar.

Rico (2015) considera que el conocimiento del profesor de matemáticas se organiza en dos campos: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Así entonces, el conocimiento didáctico sobre un contenido escolar está

constituido por: un conocimiento sobre el contenido, un conocimiento sobre el aprendizaje de este contenido, un conocimiento sobre su enseñanza y un conocimiento sobre la evaluación.

De acuerdo con lo anterior, Bedoya (2002) propone que el Conocimiento Didáctico está relacionado con los siguientes tipos de contenidos y actividades:

a) Una noción general, bien establecida, sobre el concepto de currículo, sobre sus dimensiones y niveles de reflexión; b) Una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que sostienen la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; igualmente sobre los principios y criterios que sostienen los procesos de evaluación; c) Una consideración particular sobre los contenidos del currículo y su estructura conceptual; d) Una aproximación cognitiva sobre estos contenidos (requeridos para realizar la componente cognitiva del análisis didáctico); e) El análisis didáctico de carácter semiótico de los contenidos y sus implicaciones para la enseñanza y el currículo; f) El análisis fenomenológico didáctico de los contenidos; g) Análisis epistemológico e histórico; h) Análisis y valoración de los contextos en los que se presentan cada concepto y de sus significados y usos; i) Revisión y reflexión sobre el papel mediacional de los materiales, recursos y tecnologías con las que se pueden representar, visualizar didácticamente y trabajar estos contenidos y objetos (p.41).

Asumimos en este estudio, el Análisis Didáctico (AD) como el método que permite al profesor utilizar y desarrollar el CD sobre las matemáticas escolares, además, este método permite caracterizar y conocer el CD que los profesores usan y los conocimientos que requieren desarrollar para la enseñanza de un contenido matemático escolar en particular. Así entonces, el CD y el AD se conciben de manera conjunta e inseparable, pues se requiere de CD para analizar las dimensiones (teórica y práctica) de los conocimientos que supone el AD y la realización del AD desarrolla CD en la medida en que se utilicen y analicen los conocimientos disciplinares, curriculares y didácticos sobre un contenido escolar. Es así como proponemos en este trabajo que la formación del profesor que enseña matemáticas se concreta mediante unos conocimientos (competencias) específicos para hacer AD.

Al igual que Bedoya (2002), consideramos que el conocimiento del profesor está comprendido por dos dimensiones: una dimensión teórica que se basa en el CD a partir de

los fundamentos teóricos que proporcionan los organizadores del currículo (OC) y una dimensión práctica que consiste en la realización de AD en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de propuestas y unidades didácticas sobre temas de las matemáticas escolares. Así entonces, en su desarrollo profesional, el profesor debe contar con capacidades para realizar AD como componente procedimental en la formación del profesor.

2.2 Modelo didáctico - curricular en la formación de los profesores

Relacionado con la formación de profesores, el desarrollo profesional y los conocimientos profesionales que se han descrito anteriormente en esta investigación, se consideran las concepciones y creencias que subyacen sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, por parte de los profesores en ejercicio que a través de sus decisiones y propuestas evidencian sus ideas sobre la enseñanza y el aprendizaje. De acuerdo con Ponte (2012), “Detrás de cualquier enseñanza de las matemáticas, hay una filosofía de las matemáticas” (p.84), así entonces, la práctica del profesor de matemáticas da cuenta de un modelo didáctico y curricular que se evidencia en las ideas sobre el diseño, implementación y evaluación de sus intervenciones en el aula, en las actuaciones y decisiones en su ejercicio profesional, en sus ideas y discursos sobre los contenidos matemáticos escolares y que han sido desarrollados en sus experiencias propias de aprendizaje y durante el ejercicio de su labor como docente (Vásquez, 2020).

Comprender la práctica del profesor y caracterizar su Conocimiento Didáctico, necesariamente implica conocer el modelo didáctico - curricular que define su práctica, es decir, los fundamentos teóricos en los que el profesor la sustenta. Así entonces, el carácter de Modelo Didáctico se define por estar basado y fundamentado conceptual y metodológicamente en teorías y metodología (organizadores) de la DM y el carácter curricular del modelo se refiere a que la concepción de currículo desde una perspectiva en la Didáctica de la Matemática (como campo) y para la didáctica y su concreción (del currículo) en la formación continuada del docente y en el aula.

Es por ello que en este trabajo de investigación se acoge la concepción de modelo didáctico - curricular descrito por Vásquez (2020):

...concebimos el modelo didáctico - curricular del profesor como una construcción teórico-formal basada en propuestas didácticas que interpretan los fenómenos socioculturales del aula en los que se incluyen un sistema social didáctico (contexto, profesor, estudiantes, conocimiento matemático escolar y medios) y las acciones del profesor en ejercicio para gestionar su práctica fundamentada a partir de los conceptos, procedimientos, relaciones y sentidos particulares de los conocimientos didácticos. El modelo didáctico - curricular –que el profesor en ejercicio utiliza en las prácticas de enseñanza de las matemáticas– está mediado por los conocimientos disciplinares, académicos y didácticos que él exhibe a través de acciones, discursos y medios que utiliza para: diseñar, implementar y evaluar las intervenciones en el aula; estos conocimientos han sido desarrollados por el profesor a lo largo de su formación profesional (inicial y permanente), su experiencia práctica y discursiva en relación con la matemática, como objeto de enseñanza y de aprendizaje (p.39).

De esta manera, el propósito de esta investigación es indagar por el paradigma en el que se ubica el profesor de matemáticas, las maneras en las que concibe la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento matemático, el sentido de la enseñanza de los contenidos matemáticos escolares, en especial la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, es decir, por su modelo didáctico - curricular; el cual ha sido construido de manera teórica y práctica a lo largo de su formación inicial y en su experiencia como docente. En toda propuesta de aprendizaje diseñada por el profesor subyace una concepción sobre la planificación de los contenidos matemáticos escolares, sobre los materiales, sobre la evaluación, el rol de los estudiantes, el rol como docente. Así entonces, el modelo curricular y el modelo didáctico se fundamenta en supuestos teóricos didácticos y curriculares que el profesor considera en su práctica profesional.

El modelo didáctico - curricular que se propone en este trabajo de investigación se fundamenta de acuerdo con algunos constructos teóricos tales como los siguientes: una perspectiva sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que considera algunos desarrollos conceptuales propuestos por Radford (2006, 2014a, 2014b), nociones de fenomenología didáctica como organizador del currículo (Puig, 1997), y la noción de

currículo desde un enfoque funcional (Rico y Lupiáñez, 2008), los cuales se describen a continuación.

2.2.1 Perspectiva sociocultural en la Educación Matemática

En este trabajo de investigación asumimos el conocimiento para la enseñanza, desde una perspectiva sociocultural, entendido como el resultado de las interacciones del sujeto con el mundo. Jaramillo (2011) afirma que desde una perspectiva sociocultural:

La educación matemática asume el conocimiento matemático como una actividad social, cuya producción y legitimación es el resultado de la explicación de diferentes prácticas sociales en las que están involucrados los sujetos, a partir de los sentidos y los significados compartidos, respetando así, los distintos saberes constituidos por los diversos grupos socioculturales al interior de los mismos (p. 20).

Dentro del modelo didáctico - curricular propuesto en este estudio, el conocimiento no es visto como un producto externo a los sujetos y que simplemente se apropia. Se asume aquí el conocimiento en el mismo sentido de la perspectiva sociocultural, como una práctica social concreta basada en la actividad o en el hacer del sujeto a partir dinámicas de participación en entornos sociales, culturales, históricos y políticos que le permiten al sujeto una interpretación del mundo.

A continuación se presentan algunos conceptos retomados de la perspectiva sociocultural propuestos por Radford (2006, 2014a, 2014b) para el modelo didáctico - curricular que se propone:

En términos del autor, la concepción de educación y sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que se dan en la escuela, no puede considerarse simplemente como la producción de saberes, sino también como la producción de seres, producciones de individuos en tanto que sujetos sociales, culturales e históricos que se forman y transforman continuamente. La enseñanza y el aprendizaje desde esta concepción no son consideradas como procesos distintos sino que se asumen como una labor conjunta en la que se producen saberes y subjetividades que promueven formas de acción significativas en su relación con el mundo. La labor conjunta entre la enseñanza y el aprendizaje permite que el saber, entendido como la constitución de sistemas de acción y reflexión existentes en la cultura, se ponga en marcha y creando conciencia en el sujeto, es decir, el saber se convierta en objeto de pensamiento.

El pensamiento es considerado por el autor, como una forma de reflexión activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos –el cuerpo, el lenguaje y los signos–, de acuerdo con la forma o modo de actividad de los individuos (Radford, 2006,). Por tanto, el pensamiento es considerado como una práctica social que se transforma mediante las interacciones y acciones que realizamos en el plano social, por tanto, el proceso de pensamiento no solo tiene lugar en un plano mental o cerebral como si fuera inobservable, también ocurre en el plano social. El pensamiento como forma de reflexión no se considera como una simple asimilación de realidades externas y tampoco como una construcción de la nada, el pensamiento como reflexión radica en que los sujetos den lugar al pensamiento y a los objetos que en él se crean de acuerdo con la forma de la actividad de los individuos. La base del pensamiento es el aprendizaje establecido entre las relaciones del ser y el mundo. Así entonces, el profesor en ejercicio evidencia el pensamiento, a través de las formas de interacción con sus estudiantes y las acciones desarrolladas en sus prácticas de enseñanza para comprender el mundo.

Se retoma el concepto de aprendizaje, que es considerado como la adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémicos, culturales e históricamente formados (Radford, 2006). Así entonces, el aprendizaje supone que la actividad de pensamiento no se basa en construir o reconstruir conocimientos. El aprendizaje se considera como actividad a través de la cual los sujetos se relacionan con el mundo de los objetos culturales y con otros sujetos en el alcance de un objetivo común mediante el uso social de artefactos y signos. En esa relación con los objetos culturales, el aprendizaje es dotado de sentido y concede a los conceptos significados personales que se trasforman en sentidos individuales (proceso de subjetivación).

El aprendizaje se considera por parte del autor como proceso social de objetivación, el cual es considerado como una toma de conciencia subjetiva del objeto cultural y una elaboración de significados de los objetos conceptuales. En este proceso, los alumnos se encuentran de manera progresiva y de manera crítica al saber –sistemas de ideas y de acción constituidos cultural e históricamente–. La objetivación como encuentro con el saber, tiene un carácter transformativo, es decir, en el que se produce conciencia –como se piensa un saber–. Este encuentro también tiene un carácter crítico, como reflexión y comprensión social

sobre el saber, generando posiciones críticas y proposiciones respecto al saber, una reflexión con toma de postura y de conciencia para que el aprendizaje sea significativo.

De acuerdo con los elementos presentados sobre la perspectiva sociocultural relacionada en el modelo didáctico - curricular, la autora propone la figura 1 que representa el sistema de relaciones de la enseñanza y el aprendizaje desde la perspectiva sociocultural. Es preciso aclarar que el sistema propuesto se relaciona con los procesos de aprendizaje tanto de estudiantes y como de los docentes en formación.

Dicho sistema propone un primer momento el *conocimiento actual*, que hace referencia a los saberes y experiencias socioculturales que el individuo ha desarrollado hasta un determinado momento y su participación en procesos de enseñanza y aprendizaje entendidos como labor conjunta, que posibilitan la comprensión de saberes convertidos en objeto de pensamiento a través de las prácticas sociales de los individuos y su toma de conciencia de manera que facilite su transformación hacia el segundo momento denominado el *conocimiento esperado* donde el individuo se posiciona críticamente sobre dichos saberes.

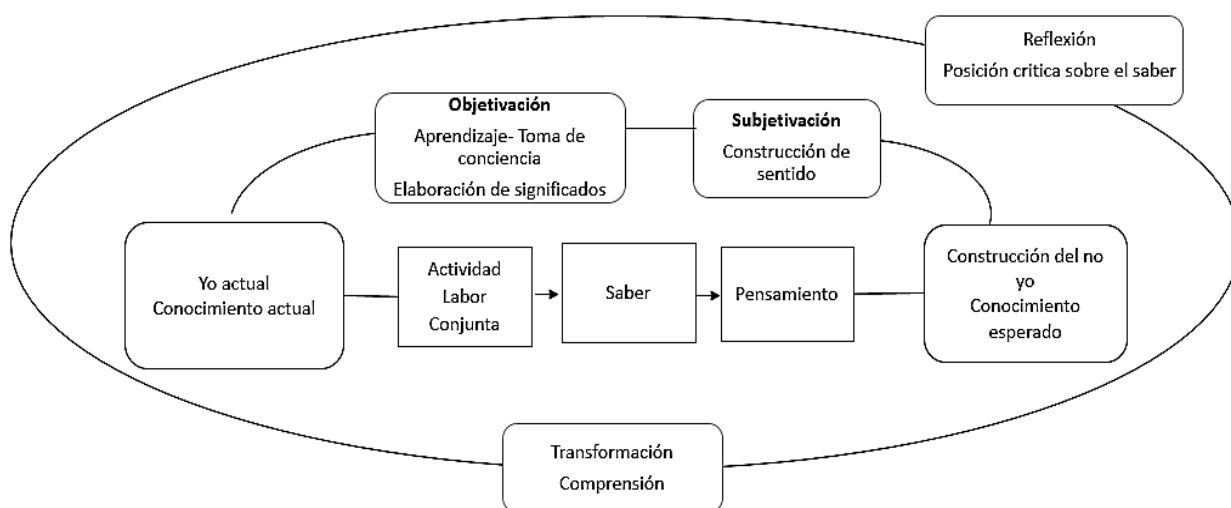


Figura 1. Relaciones de la enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva sociocultural.

2.2.2. Perspectiva desde la fenomenología didáctica

El modelo didáctico - curricular que se propone en este trabajo, de manera articulada con la perspectiva sociocultural, supone que el maestro en formación y en ejercicio considere una perspectiva desde la fenomenología didáctica para la enseñanza de las matemáticas escolares como uno de los organizadores del modelo local de organizadores del currículo (Puig, 1997,

citado por Bedoya, 2019). De acuerdo con este autor (Puig, 1997), la fenomenología como método de análisis de los contenidos matemáticos permite a los profesores, en formación y en ejercicio, tener una base para la organización de la enseñanza de las matemáticas. Desde la perspectiva fenomenológica, los conceptos matemáticos no están en un mundo ideal cuyo reflejo se estudia, como tampoco tienen una existencia anterior a la actividad matemática – esta idea coincide con lo expuesto anteriormente desde la perspectiva sociocultural–, “los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia, en el que entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que crean nuevos conceptos matemáticos, y este proceso se reitera una y otra vez” (Puig, 1997, p. 67). Es decir, se da un proceso de objetivación.

De esta manera, el análisis fenomenológico ofrece al profesor unos conocimientos, sobre los conceptos o estructuras matemáticas como productos cognitivos, sobre el desarrollo histórico, sobre cómo se produjeron las relaciones entre los fenómenos y los conceptos, sobre los fenómenos presentes en el mundo de los estudiantes y los propuestos en las secuencias de enseñanza haciendo referencia a los procesos cognitivos como objetos de enseñanza y aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los estudiantes sobre las relaciones entre los fenómenos y los conceptos (Puig, 1997).

Por ello, considerar una perspectiva desde una fenomenología didáctica en este sentido, que se propone para la formación inicial y en ejercicio de docentes, implica que los profesores de matemáticas identifiquen los fenómenos del mundo real que analizan y caracterizan la relación fenómeno - objeto matemático de estudio, dentro del proceso educativo. Freudenthal (1983) plantea que la fenomenología didáctica del objeto matemático logra fortalecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje a través de la perspectiva de la fenomenología histórica de la construcción de los objetos matemáticos que se desarrollan en el currículo escolar. Por lo tanto, conocer la estructura conceptual y los fenómenos en los que organiza un significado particular del objeto matemático, corresponde al análisis didáctico de tipo fenomenológico que hace parte de uno de los organizadores del Modelo Local de Análisis Didáctico que se propone en este trabajo más adelante para el análisis didáctico de contenido.

El análisis didáctico de tipo fenomenológico, que sugiere la obra *Revisiting Mathematics Education*, (Freudenthal, 1991), se tomará en este trabajo como organizador del

conocimiento didáctico del profesor para la enseñanza de objetos matemáticos dentro del currículo escolar. Por ello, el proceso de enseñanza se asume en esta investigación como un conocimiento de tipo didáctico que el docente debe desarrollar como un mediador y guía de los contextos, modelos y sentidos desarrollados por los estudiantes a lo largo de su experiencia escolar y social. El desarrollo de este conocimiento del profesor posibilitará que los escolares exploren, argumenten, validen o refuten distintas situaciones problema que permiten ampliar sus conocimientos matemáticos mediante el estudio y aplicación de relaciones con sentido matemático que les aproximen a los significados de un objeto matemático dentro de una estructura conceptual.

2.2.3. La Noción de currículo y currículo funcional en Educación Matemática

La noción de currículo se considera un organizador importante en este trabajo. Es por ello que en primer lugar, se presenta una contextualización del concepto de currículo desde la Ley General de Educación Colombiana, en segundo lugar, se describe la concepción de currículo adoptada para este trabajo de investigación y por último se presentarán ideas centrales sobre el enfoque funcional del currículo (Rico y Lupiáñez, 2008; Rico 2016; Ruiz, 2016), dicho enfoque se relaciona con la perspectiva sociocultural, la fenomenología didáctica y la enseñanza de unas matemáticas con sentido, que se articulan en el modelo didáctico - curricular propuesto en este estudio.

En relación con el marco legal colombiano, la Ley General de Educación, Ley 115 de 1994, presenta la siguiente definición de currículo, entendido como

...conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional (Art, 76).

Además de esta definición dada, en esta normatividad, el artículo 77 de la Ley 115 establece que las instituciones educativas gozan de autonomía para definir sus currículos, es decir, organizar las áreas fundamentales de conocimientos para cada nivel teniendo en cuenta lo definido por la ley general y pueden introducir las asignaturas que consideren esenciales de acuerdo a las necesidades y características locales de la Institución y establecerá su plan de estudios particular determinando los objetivos por niveles, grados y áreas; la metodología;

la distribución del tiempo y los criterios de evaluación. Sin embargo, el artículo 78 de la Ley 115 se menciona que esta autonomía es regulada por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), quien se encarga de diseñar y emitir Lineamientos Curriculares y Orientaciones Curriculares para las áreas. Actualmente se cuenta con un conjunto de referentes curriculares emitidos por el MEN, en particular para el área de matemáticas, se han generado: Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), Estándares Básicos de Competencia de Matemáticas (2006), Derechos Básicos de Aprendizaje para Matemáticas Versión 2 (2016) y Mallas de aprendizaje de matemáticas (2017). Estos documentos curriculares se han emitido por el MEN con la finalidad de ser un referente que oriente los currículos que se definen en cada Institución Educativa para la secuenciación de los aprendizajes, en la planeación de área, de aula y en los proyectos pedagógicos definidos por cada establecimiento de acuerdo con el Proyecto Educativo Institucional.

Durante los acompañamientos y programas de formación docente en los que la autora ha participado se reconoce que la organización de algunos currículos de matemáticas en los establecimientos educativos se realiza considerando los fines de la educación, los objetivos generales y específicos para la educación básica y media señalados en la Ley 115 de 1994, los Proyectos Educativos Institucionales y los Lineamientos Curriculares. Sin embargo, poco se evidencia en esta organización de una apropiación de los planteamientos expresados en los Lineamientos Curriculares (1998), los cuales proporcionan orientaciones sobre cómo se asumen la enseñanza de las matemáticas, la estructura curricular propuesta y cómo se asume la evaluación en el aula de acuerdo a esta disciplina. Además, en la actualidad algunos docentes se encuentran en el proceso de apropiación de las orientaciones propuestas por estos referentes y se han empezado a ajustar los currículos de matemáticas en las Instituciones educativas pasando de una organización basada en los contenidos y en el orden propuesto en los libros de texto, a aproximaciones curriculares centradas en el desarrollo de habilidades matemáticas para la resolución de problemas.

De igual manera, sucede con los demás referentes que han sido expresados por el MEN, tales como: Estándares Básicos de Competencia, Derechos Básicos de Aprendizaje y Mallas de Aprendizaje. Los dos últimos documentos son vistos por algunos docentes con ciertas

reservas y resistencia, sin hacer un ejercicio crítico de lectura sobre estos referentes como comunidades académicas al interior de las instituciones educativas.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, este trabajo de investigación retoma la noción de currículo propuesta por Rico y Lupiáñez (2008) y Rico (2016), que amplía y contiene la noción de currículo propuesta en la normatividad colombiana. Esta noción detalla varios componentes que resultan determinantes en la concreción de un currículo y propone varios aspectos conceptuales a tener en cuenta en la organización del currículo.

De acuerdo con Rico (2016), se asocia la noción de currículo al conjunto de actividades que permiten estructurar, planificar y ejecutar un plan de formación y define la noción de currículo como

...una propuesta de actuación educativa, junto con su realización. En un currículo se concretan una serie de principios ideológicos, pedagógicos y psicopedagógicos que en su conjunto canalizan una orientación para el sistema educativo o para la institución que lo plantea. El currículo se sitúa entre la declaración de principios generales y su traducción práctica, entre lo que se prescribe y lo que realmente sucede en el aula (p.35).

Rico (2016) considera cinco descriptores para un plan de formación en el sistema educativo: la población a la que se dirige el plan de formación, los rasgos que identifican el tipo de formación del plan, la institución para la que se define el plan de formación y los recursos con los que dispone, las finalidades que se pretenden alcanzar con el plan de formación, la evaluación y el seguimiento que se realizará al plan de formación.

Con relación al currículo de matemáticas, Rico (2016) lo comprende como el plan de formación en educación matemática para un sistema educativo. Dicho currículo debe responder a cuestiones clave sobre el currículo, que a continuación se presentan en la siguiente tabla:

<i>Cuestiones</i>	<i>Se concreta en</i>	<i>Dimensión del currículo</i>
¿Para qué sirve el aprendizaje de las matemáticas?	Objetivos	Cognitiva
¿Qué es y en qué consiste el conocimiento matemático?	Contenidos	Cultural/Conceptual

¿Cómo y cuándo se lleva a cabo su enseñanza?	Metodología	Ética o política
¿Qué resultados muestran el logro de los aprendizajes?	Evaluación	Social

Tabla 1. Cuestiones a las que atiende el currículo y dimensiones que se relacionan. Fuente: Rico (2016).

Como se puede observar en la tabla anterior, las cuatro cuestiones generales sobre el currículo: qué, para qué, cómo, y cuánto, establecen cuatro dimensiones que permiten la reflexión sobre el currículo.

Las respuestas a las preguntas formuladas en la tabla 1 resultan determinantes en la concreción de un plan de formación, en nuestro caso particular en un currículo de matemáticas, dado que el tipo de ideas que los docentes asuman en su respuesta influye en el diseño y las propuestas del currículo escolar de matemáticas. Esta postura considera aspectos de tipo curricular y didáctico, por tanto dan cuenta de un modelo didáctico - curricular que subyace en quienes proponen el currículo. Así, las concepciones que tengan los profesores para dar respuesta a las cuestiones que atiende el currículo, serán determinantes en el modelo curricular se asuma y se promueva. Al respecto, Rico y Lupiáñez (2008) consideran que en cada propuesta curricular se adopta una posición sobre ¿Qué es el conocimiento matemático? la respuesta a este interrogante incide profundamente en el diseño del currículo de matemáticas y en su desarrollo.

En relación con la pregunta ¿Qué es el conocimiento matemático? su respuesta está relacionada con la concepción sobre las matemáticas en la que se enmarca la práctica del profesor y se refleja en las propuestas de diseño del currículo. Es por ello, que en este trabajo de investigación el conocimiento matemático dentro del modelo didáctico - curricular propuesto considera la concepción de un enfoque funcional del currículo.

En el enfoque funcional del currículo, los conceptos y procedimientos tienen un para qué, una funcionalidad, sirven para algo, un cómo se utilizan, es decir, tienen un sentido. Así entonces, las nociones matemáticas que proporcionan los conocimientos conceptuales y procedimentales, ofrecen herramientas que permiten dar respuesta a diversas cuestiones y problemas en diversos contextos y situaciones reales. Este enfoque del currículo está centrado en el uso que le pueden dar los estudiantes a sus aprendizajes en situaciones de la vida

cotidiana. De esta manera, las tareas de aprendizaje son contextualizadas, proveen herramientas conceptuales y considera al estudiante como un sujeto cognitivo que actúa mediante el sentido asignado a su conocimiento matemático (Rico y Lupiáñez, 2008; 2010).

Este enfoque funcional de las matemáticas, permite promover una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con sentido, que va más allá de un conocimiento instrumental de las matemáticas, que si bien este conocimiento realiza un aporte al significado de los conocimientos matemáticos, este es un significado parcial. Por tanto, se requiere del enfoque funcional en el que se determinan los posibles usos, el para qué sirve y cómo se utilizan estos conocimientos matemáticos, su uso en contexto –saber hacer–, de tal manera que se constituya el sentido del concepto matemático para completar su significado. A continuación, en la tabla 2 se presenta la caracterización de dos de los enfoques del currículo que se han mencionado y que se han identificado en planes y propuestas curriculares internacionales caracterizados en los trabajos de Rico y Lupiáñez (2008).

<i>Tipos de conocimiento</i>	<i>Finalidades formativas individuales</i>	<i>Finalidades sociales y culturales</i>
<i>Instrumental</i>	Conocimiento dirigido al logro de aprendizaje de hechos concretos y destrezas en técnicas singulares.	Prioridad por el dominio de técnicas y algoritmos útiles.
	Conocimiento de las representaciones convencionales.	Interés por la seguridad, precisión y rapidez individuales.
	Formación dirigida al conocimiento de conceptos básicos y al dominio de reglas.	Desarrollo de conductas y logro de objetivos específicos.
		Dominio de los usos básicos y convencionales de los conceptos
<i>Funcional</i>	Conocimiento centrado en el desarrollo de estrategias cognitivas propias.	Técnicas de modelización para el planteamiento y resolución de problemas en contexto.
	Uso de distintas representaciones para dar respuesta a una cuestión.	Capacidad de hacerse entender; énfasis en la argumentación.
	Formación dirigida a mejorar el pensamiento del alumno y dotarle de cierta autonomía.	Desarrollo de competencias matemáticas y su aplicación en diversos contextos.

Tabla 2. Atributos que caracterizan algunos enfoques de las matemáticas escolares. Adaptado de Rico y Lupiáñez (2008, p. 180).

Sobre la construcción de un significado completo de los conocimientos matemáticos, Ruiz (2016) afirma que

Los conceptos matemáticos alcanzan su máxima expresión cuando se piensan con plenitud de sentido, la cual se logra cuando se entienden sus diferentes modos de uso, se aplican variedad de situaciones, se comprenden los tipos de problemas que se resuelven, se dominan los términos propios del concepto y se conocen los fenómenos que organiza (p.140).

En lo que respecta a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, autores como Gómez, Castro, Bulla, Mora y Pinzón (2016) afirman que desde la dimensión cognitiva del currículo estos referentes sugieren una perspectiva cercana al enfoque funcional, que se ha descrito en este apartado, realizan una propuesta conceptual sobre qué se aprende, para qué se aprende y que se evalúa de esos aprendizajes.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, consideramos coherente la articulación de algunos principios teóricos de la perspectiva sociocultural, la fenomenología didáctica, el enfoque funcional del currículo en la enseñanza y aprendizaje de unas matemáticas con sentido, que se han presentado hasta el momento para perfilar el modelo didáctico - curricular para el profesor propuesto en este trabajo de investigación. Los principios teóricos retomados para caracterizar el modelo didáctico-curricular del profesor permiten mirar su práctica, identificar necesidades de formación, caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y caracterizar su formación desde su práctica.

2.2.3.1. Contextualización curricular sobre el sentido numérico y el Sistema de Numeración Decimal.

Un componente importante del Conocimiento Didáctico en la formación de profesores, es el conocimiento del currículo, ya que este permite realizar una reflexión local de los referentes curriculares para la definición de las expectativas de aprendizaje del contenido matemático escolar a enseñar, los contenidos, la metodología y la evaluación de las

actividades de enseñanza y aprendizaje. Para llevar a cabo la contextualización curricular en la que se enmarca este trabajo de investigación, se considera una mirada a los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) como referente que ha realizado y ha retomado desarrollos sobre el sentido numérico a nivel internacional, los referentes curriculares para la educación matemática en Colombia y el currículo del aula.

2.2.3.1.1. Contextualización curricular internacional sobre sentido numérico.

En este trabajo de investigación se realiza una revisión contextual al documento Principios y estándares para la matemática escolar del NCTM (2000), dado que recoge parte de los desarrollos realizados por la comunidad académica en Educación Matemática sobre la categoría de sentido numérico.

De acuerdo con la categoría de sentido numérico, que es de interés en este trabajo de investigación, se identifica que está relacionada con el estándar de contenido sobre los números y las operaciones. Para la comprensión en profundidad de este estándar, es fundamental la construcción de sentido numérico –haciendo mención al trabajo de Sowder (1992b) – el cual describe habilidades como: la descomposición numérica, el uso de los números como referentes, el uso de las relaciones entre operaciones aritméticas para la resolución de problemas, la comprensión del sistema numérico de base diez, la estimación, dar sentido a los números y reconocer la magnitud relativa y absoluta de los números.

La construcción de sentido numérico, la comprensión del número y las operaciones, y tener fluidez en el cálculo aritmético son componentes claves en la educación matemática de la básica primaria. Los estudiantes a medida que avanzan en su escolaridad

...deben lograr una comprensión profunda de los números, lo que son; cómo se representan con objetos, números o en rectas numéricas; cómo se relacionan entre sí; cómo se integran los números en los sistemas que tienen estructuras y propiedades; y cómo usar números y operaciones para resolver problemas (NCTM, 2000, p. 32).

El estándar de números y operaciones contiene tres objetivos, para este trabajo de investigación se tendrá en cuenta el primer objetivo: comprender los números, formas de representar números, relaciones entre números y sistemas numéricos que se desarrolla desde el pre-jardín hasta grado segundo. Esta comprensión se evidencia en habilidades como: el conteo para reconocer cuántos hay en una colección; en descomponer y componer un número

de múltiples maneras, por ejemplo, 24 es 2 decenas y 4 unidades y también 2 docenas, el agrupamiento en dieces es un primer paso importante en la comprensión de la estructura del sistema de numeración base diez; hacer uso de múltiples modelos para la comprensión inicial del valor posicional; desarrollar una comprensión sobre la posición relativa, la magnitud de los números en contextos cardinales y ordinales, la construcción de sentido sobre los números, representándolos y usándolos de manera flexible; relacionar palabras números y numerales a las cantidades que representan; entender y representar fracciones de uso común. En este estándar, también se resalta el uso de diversos materiales físicos para la representación de los números como parte importante en la práctica para la enseñanza de las matemáticas en educación primaria y se espera que los estudiantes puedan comprender las múltiples representaciones de un mismo número (NCTM, 2000).

Así entonces, la construcción de sentido numérico requiere movilizarse en niveles cada vez más complejos en la construcción de ideas y habilidades, en el reconocimiento y uso de las relaciones en la resolución de problemas, además permite ofrecer la conexión entre los nuevos aprendizajes y los antiguos. El desarrollo de las habilidades es más efectiva cuando se considera la comprensión como base para el aprendizaje, es decir un aprendizaje que tenga sentido.

2.2.3.1.2. Contextualización curricular nacional sobre el sentido numérico y el Sistema de Numeración Decimal.

El Ministerio de Educación Nacional en cumplimiento de la normatividad de la Ley 115 de Febrero 8 de 1994, es el responsable de diseñar los lineamientos generales de los procesos curriculares para la definición de los planes de estudio en los establecimientos educativos. Es por ello que se publican los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) que proporcionan orientaciones epistemológicas y pedagógicas nacionales para la fundamentación y planeación de los currículos. Posteriormente, emiten los Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas (MEN, 2006), teniendo como punto de partida los Lineamientos, propuestos como referentes comunes que precisan los niveles de calidad sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer en su paso por el sistema educativo. De esta manera, estos dos referentes señalados anteriormente, proporcionan las orientaciones en torno a una propuesta curricular para la enseñanza y el

aprendizaje de las matemáticas en el país y serán los documentos tenidos en cuenta en la contextualización curricular que se presenta en este trabajo de investigación.

Los referentes curriculares proponen una perspectiva amplia e integral del que hacer matemático en la escuela, así los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) consideran que:

...el principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan. Mediante el aprendizaje de las matemáticas los alumnos no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella (p. 35).

En esta premisa se puede observar implícitamente un enfoque funcional del currículo. Así, un aprendizaje por competencias involucra un aprendizaje significativo y comprensivo, además un aprendizaje de las matemáticas con sentido. El aprendizaje significativo no solo implica un sentido personal de lo aprendido, sino también el uso de este aprendizaje en la realización de prácticas sociales con sentido, útiles y eficaces. Asimismo, el aprendizaje comprensivo está relacionado con las prácticas fundamentadas, las cuales se reflejan a través de actuaciones, actividades, tareas y proyectos basadas en el conocimiento matemático escolar y su aplicación. Así, las dimensiones de la comprensión están relacionadas con: los contenidos y redes conceptuales, métodos y técnicas, formas de comunicación y expresión de lo comprendido (MEN, 2006).

Estas dimensiones se articulan con una noción amplia de competencia, que va más allá de una concepción limitada de saber hacer en contexto, comprendida como “conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio-afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (MEN, 2006, p. 49). Esta noción ampliada de competencia, relaciona dos tipos de conocimiento matemático: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental asociados al saber qué, al saber qué hacer, al saber cómo, al saber por qué. Lo anterior implica

una idea de competencia que involucra tanto el saber hacer como el comprender qué se hace y para qué se hace.

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencia (2006) ser matemáticamente competente se encuentra estrechamente relacionado con tres aspectos que organizan el currículo, a saber: procesos generales, pensamiento lógico y matemático, y el contexto. En primer lugar, ser matemáticamente competente se relaciona con el desarrollo de procesos generales presentes en toda actividad matemática, tales como: formulación y resolución de problemas; modelación de procesos y fenómenos de la realidad; comunicación; razonamiento y formulación, comparación y ejercitación de procedimientos y algoritmos. Ser diestros, eficientes y eficaces en el desarrollo de dichos procesos y otros más que se articulan a estos, implican ser matemáticamente competente. Estos procesos se consideran en un referente para establecer niveles de competencia en los desempeños de los estudiantes (MEN, 1998, 2006). En segundo lugar, ser matemáticamente competente comprende unos procesos específicos que dan cuenta de unos conocimientos básicos en el desarrollo de pensamiento lógico y matemático de los sistemas propios de las matemáticas. Así, los procesos específicos se relacionan con el pensamiento numérico, espacial, aleatorio, métrico y variacional, con los sistemas numéricos, geométricos, de medida, de datos, algebraicos y analíticos (MEN, 1998, 2006). En tercer lugar, el contexto del aprendizaje de las matemáticas está relacionado con ambientes socioculturales desde donde se “construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos” (MEN, 2006, p. 70). Los estándares básicos de competencia (MEN, 2006) hacen referencia a tres niveles de contexto: el contexto inmediato o de aula, el contexto escolar o institucional y el contexto extraescolar o contexto sociocultural que se relacionan entre sí en situaciones de aprendizaje, situaciones problema, proyectos de aula, unidades, actividades, entre otros dispositivos para la planeación de la práctica. El contexto se considera como un recurso en la enseñanza y aprendizaje que enriquece la planeación de las situaciones de aprendizaje, dotando de sentido las matemáticas que se aprenden a partir de ambientes socioculturales, de las matemáticas y de otras ciencias.

Este trabajo de investigación centra su interés en la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal, como objeto de estudio del pensamiento

numérico. Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) proponen el estudio de los números a partir del desarrollo del Pensamiento Numérico el cual incluye la construcción de sentido numérico y de sentido operacional. Desde los lineamientos curriculares, el desarrollo de pensamiento numérico considera los siguientes aspectos fundamentales:

...el uso significativo de los números y el sentido numérico que suponen una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación, de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. Otro aspecto fundamental sería la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos, por la comprensión de su modelación, sus propiedades, sus relaciones, su efecto y la relación entre las diferentes operaciones” (MEN, 1998, p. 17).

En consideración a lo anterior, el desarrollo de estrategias propias en la resolución de problemas que involucren una comprensión del SND, requiere conocer la estructura, la regularidad y los principios que organizan el sistema, además de desarrollar destrezas y habilidades en torno al conteo, el agrupamiento y el valor posicional.

La *destreza en el conteo* –proceso que involucra habilidades en el conteo hacia adelante, hacia atrás y a saltos– se considera un indicador de la comprensión de conceptos numéricos por parte de los estudiantes, esta destreza es fundamental para la comparación y la ordenación de números. La *destreza en el agrupamiento* es esencial en el sistema de numeración base diez, nuestro sistema se basa en el principio de agrupación sucesiva, cada diez unidades se agrupan en decenas, cada diez decenas se agrupan en centenas y así sucesivamente. El agrupamiento se puede explicitar mediante el uso de materiales concretos o identificarse de manera implícita en las palabras que nombran los números. *Comprender el valor posicional* es un aspecto fundamental en el desarrollo de los conceptos numéricos de los niños (MEN, 1998). El sentido del valor posicional surge a partir de la experiencia de agrupamiento, la adquisición de la destreza de contar debe ser integrada en significados que se basen en el agrupamiento. Los niños serán entonces capaces de usar y comprender procedimientos de comparación, ordenación, redondeo y manejo de números mayores (como se citó MEN, 1998, p. 47).

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, se requiere que las destrezas se articulen entre sí y además se relacionen con otros elementos como: la necesidad de uso en situaciones numéricas, el tipo de prácticas matemáticas empleadas y el tipo de instrumentos que median la comprensión del SND. No obstante, un sujeto puede tener un dominio de cada destreza descrita y ello no garantiza que este haya construido sentido numérico.

Por ello, el desarrollo de competencias en matemáticas requiere de “ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas” (MEN, 2006, p. 49). Dichas situaciones favorecen el desarrollo de niveles de desempeño progresivos que consideren los procesos generales de la actividad matemática articulados con los conocimientos básicos relacionados en cada pensamiento matemático. Se puede inferir en la organización establecida en los referentes curriculares un enfoque de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que considera prácticas socioculturales compartidas para que a través de ellas el sujeto construya significados, usos y comprensiones sobre los aprendizajes.

2.2.3.1.3. Contextualización curricular sobre el Sistema de Numeración Decimal en el aula.

En este apartado se presenta una breve revisión a la organización curricular al plan de área matemáticas de primer ciclo de básica primaria de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón, donde se realizó la experimentación. Esta institución educativa ha realizado una re-significación de su modelo pedagógico, cognitivo social, el cual se enmarca en un enfoque constructivista y retoma principios de las siguientes teorías: constructivismo cognitivo, constructivismo social, enseñanza por proyectos, escuela activa.

La organización de los contenidos matemáticos escolares por grado y periodo se realiza a través del documento institucional, denominado plan de aula. El plan de aula presenta en su organización una meta de aprendizaje por periodo, estándares seleccionados para desarrollar en el periodo, contenidos relacionados con dichos estándares, DBA asociados e indicadores de desempeño. Así mismo, presenta una descripción general sobre las actividades a desarrollar en el periodo y una breve metodología, instrumentos de evaluación, recursos a utilizar, y acciones de mejoramiento.

En la revisión de los componentes anteriormente mencionados en relación al SND como contenido matemático escolar del primer ciclo de básica primaria, se identifican los siguientes hallazgos:

En relación con las metas de aprendizaje, para grado primero, se espera que los estudiantes reconozcan números en determinados rangos, del 0 al 9 como base del SND, del 0 al 999 usando material concreto, representaciones gráficas y destrezas en las operaciones con números en dichos rangos numéricos. En grado segundo, se espera que los estudiantes empleen situaciones cotidianas para conceptualizar y realizar operaciones de adición y sustracción, comprensión de las operaciones de la multiplicación y división en situaciones del contexto que relacionen los procesos de pensamiento. En grado tercero se espera que los estudiantes manipulen materiales concretos como ábacos entre otros para activar sus capacidades mentales y adquirir capacidades en la resolución de problemas, resolver problemas que impliquen usar, leer, escribir y comparar números sin límite, incluyendo variadas formas de representación, resolver problemas que exijan componer y descomponer aditiva y multiplicativamente los números, analizar el valor posicional y tener en cuenta la información contenida en la escritura decimal.

En la columna del plan de aula que señala los estándares seleccionados para cada periodo, se identifica que los docentes realizan una relación de estándares con los contenidos que han definido para el periodo. Sin embargo, se observa que en los grados de primero y segundo, los estándares relacionados con el SND no son registrados en dicho formato, se hace alusión a los siguientes estándares: Describo, comparo y cuantifico situaciones con números en diferentes contextos y con diversas representaciones; Reconozco significados del número en diferentes contextos; Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación; Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas; Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables; Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.). Solo en grado tercero en el primer periodo se hace mención del estándar: Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el SND.

Al revisar los contenidos se identifica la siguiente selección para el primer grado: valor posicional, la decena, conteo y lectura de números hasta 20, comparación y orden de los números hasta 20, composición de números hasta el 20 para el primer periodo; Conteo y lectura de números hasta el 100, comparación y orden de números hasta el 100, significado de la adición, símbolos de las operaciones, adición y sustracción de decenas completas, adición sin y con reagrupación de números hasta el 100, sustracción sin y con desagrupación de números hasta el 100, cálculo mental de sumas y diferencias con números hasta el 100, para el segundo periodo. La centena, números hasta 999, comparación de números hasta 999, adición y sustracción de centenas completas y números de tres cifras, reagrupación de unidades en decenas y de decenas en centenas, adición con reagrupación con números de tres cifras, sustracción con desagrupación con números de tres cifras. Para el caso del grado segundo se identifica que: la centena, centenas completas, descomposición aditiva de números hasta el 1000, lectura y escritura de números hasta el 1000, orden de números hasta 1000, para el primer periodo. Para el caso del grado tercero se identifican los siguientes contenidos asociados: SND Posicional, conteo y lectura de números hasta 1.000.000, comparación y orden de los números hasta 1.000.000.

De acuerdo a lo anterior, se observa que las metas de aprendizaje no se encuentran del todo relacionadas con los estándares asociados al SND, en tanto, se quedan en el reconocimiento de los números y no se mencionan otras acciones de pensamiento que este referente propone como el uso de representaciones concretas y pictóricas para explicar el valor posicional en el SND y para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal. Así como tampoco dichas metas, se corresponden con los DBA y sus evidencias de aprendizaje relacionados con el SND, en los que se propone el uso de las características del SND para crear estrategias de cálculo, para establecer relaciones entre cantidades y comparar números, descomposición de números, completar hasta la decena más cercana, duplicar, cambiar la posición, multiplicar abreviadamente por múltiplos de 10, entre otros. Por tanto, las metas de aprendizaje como parte de las expectativas de aprendizaje para un periodo casi trimestral, son muy específicas y dejan por fuera varios aspectos que se deben considerar en la enseñanza y aprendizaje del SND.

Además, la selección de los contenidos sobre el SND, no guardan una estrecha relación con los estándares que ya se encuentran definidos para este concepto matemático. Se describen a manera de listado de temas que si bien apuntan a la comprensión del SND, dejan muchos elementos por fuera. Los contenidos seleccionados si tratan de articularse con las metas de aprendizaje propuestas, sin embargo, se pueden reconocer claramente la falta de relación entre aspectos curriculares que aborda el plan de aula –metas de aprendizaje, los estándares, los DBA y los contenidos seleccionados– deberían presentarse de manera articulada. Esto evidencia dificultades en relación con el conocimiento curricular de los docentes para el diseño de los currículos institucionales.

2.3. Modelo local de análisis didáctico y los organizadores del currículo

Para la caracterización del Conocimiento Didáctico (CD) del docente en ejercicio sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en el primer ciclo de la básica primaria, este trabajo de investigación asume el Análisis Didáctico (AD) como procedimiento y metodología que permite caracterizar el CD en la formación de profesores. De acuerdo con Bedoya (2002) los profesores de matemáticas

construyen su conocimiento didáctico (CD) sobre la base de un análisis didáctico (AD) adecuado, esto contribuirá a modificar y mejorar su prácticas profesionales sobre las matemáticas escolares, y que esto se reflejará, de alguna manera concreta, en sus propuestas y producciones curriculares y didácticas (p. 56).

De esta manera, el AD es considerado como un procedimiento de análisis que permite profundizar sobre un contenido matemático escolar concreto de tal manera que la información que surge de este, permite identificar los conocimientos y capacidades relacionadas con sus competencias para la planificación de la enseñanza de las matemáticas, en el marco de un enfoque funcional del currículo (Gómez y González, 2013; Flores y Moreno, 2014).

Para llevar a cabo el AD sobre los contenidos didácticos se definen unas categorías llamadas Organizadores de Currículo (OC). Flores (2016) los define como “aquellos conocimientos que adoptamos como categorías para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p.73). Cada organizador se apoya de un referente teórico que aporta información objetiva sobre cada contenido didáctico en relación con las

dimensiones del currículo y permiten identificar el Conocimiento Didáctico que es relevante para que el docente ejerza sus competencias profesionales (Flores, 2016; Rico, 2016).

Reconociendo lo complejo de realizar un Análisis Didáctico en toda su generalidad y dada la variedad de organizadores del currículo (OC) para fundamentar el análisis didáctico de un contenido matemático escolar determinada, este trabajo de investigación retoma la propuesta de Bedoya (2002) sobre el Modelo Local de los Organizadores del Currículo y por tanto propone un Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD) para caracterizar el conocimiento didáctico del contenido (CDC), sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, teniendo en cuenta los desarrollos de la Didáctica de las Matemáticas, con propósitos y aportes en ella.

De acuerdo con Bedoya (2002), un MLAD es considerado un procedimiento de análisis en el que el investigador selecciona los organizadores del currículo de manera adecuada, de acuerdo al CDC que se pretende caracterizar. Esta selección responde a unas características que le dotan de carácter local en tanto se delimita por las necesidades de un contexto sociocultural específico, de un contenido matemático escolar en un currículo específico, de una institución educativa y de unos docentes de un grado en particular. De acuerdo con Bedoya (2002) un modelo local considera las siguientes componentes:

- *Un diseño curricular local.* Esta componente aborda dos aspectos: en primer lugar, el plan de formación en matemáticas en el primer ciclo de la básica primaria; en segundo lugar, el plan de formación a docentes sobre el CD que requieren los docentes en ejercicio sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND del primer ciclo de básica primaria en el marco de una perspectiva sociocultural y con un enfoque funcional del currículo.
- *Una estructura conceptual* relacionada con un contenido matemático escolar particular, en este caso la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND del primer ciclo de básica primaria.
- Los *Conocimientos Didácticos* conceptuales y procedimentales necesarios sobre el conocimiento matemático escolar en cuestión, para la selección, planeación, implementación y evaluación de las actividades de aula y las propuestas curriculares.

Es de resaltar que el MLAD propuesto conserva las funciones propias del AD, como estrategia de formación tanto para el investigador como para los docentes objeto de estudio la cual se concreta en unos conocimientos para hacer AD; como metodología de investigación en tanto retoma el proceso metodológico del AD llevado un nivel local y particular, y conserva el carácter de innovación curricular producto de la reflexión sobre el currículo de matemáticas. Es por ello, que para el desarrollo de un MLAD se requiere de unos Conocimientos Didácticos que le permitan realizar dicho análisis y a su vez se requiere del Análisis Didáctico para generar una variedad de CD.

Considerando lo anterior, la tabla 3, presenta los organizadores del currículo seleccionados para estructurar el MLAD que articula el Análisis de Contenido y el Análisis Cognitivo para la caracterización del CD sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND. Respecto al Análisis Didáctico de Contenido, se consideran cuatro categorías, a saber: análisis histórico, análisis de la estructura conceptual, análisis de los sistemas de representación y el análisis de los sentidos y modos de uso. Dicho análisis permite establecer los significados y usos prioritarios para la enseñanza y el aprendizaje del SND. Por su parte, Análisis Cognitivo, cuya finalidad es definir los elementos que estructuran cada tarea matemática, se organiza mediante tres categorías, las expectativas de aprendizaje, limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje, oportunidades de aprendizaje.

MODELO LOCAL DE ANÁLISIS DIDÁCTICO - MLAD		
<i>Análisis</i>	<i>Síntesis del análisis</i>	<i>Organizadores del currículo</i>
Análisis Didáctico del Contenido – ADC	Significados prioritarios para su enseñanza y aprendizaje	Análisis Histórico
		Análisis de la Estructura Conceptual - ADEC
		Análisis de los Sistemas de Representación - ADSR
		Análisis de los Sentidos y modo de uso - ADSU
Análisis Didáctico Cognitivo - ADCg	Estructura de cada tarea matemática relativa al aprendizaje esperado	Expectativas de aprendizaje
		Limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje
		Oportunidades de aprendizaje

Tabla 3. MLAD para caracterizar los Conocimientos Didácticos del profesor para la construcción de Sentido Numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Natural. Adaptado de Rico (2016, p.96).

2.3.1. Análisis de contenido sobre el sistema de numeración decimal (SND)

El Análisis de Contenido (AC) se sitúa en la dimensión conceptual y cultural del currículo. Este análisis permite desarrollar en los profesores de matemáticas capacidades para establecer diversos significados de los contenidos matemáticos, los cuales son fundamentales para identificar las expectativas de aprendizaje sobre los estudiantes, delimitar y diseñar tareas que respondan a unas demandas cognitivas, todas estas actividades propias al momento de planificar su práctica, por lo tanto el AC contribuye con unas capacidades profesionales del profesor relacionadas con la competencia de planificación (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Lupiáñez 2013).

De acuerdo con Rico et al., (2008) el AC es considerado un

...proceso que consiste en la descripción y organización de los conceptos y procedimientos que conforman un tema de matemáticas, el análisis de las diferentes formas de representar esos conocimientos, y un análisis de los campos de fenómenos y de los contextos vinculados a tales conocimientos y mediante los que se generan problemas en diferentes situaciones, que ponen en juego estos conceptos y procedimientos y todas sus propiedades y relaciones (p. 290).

Teniendo en cuenta lo anterior, se presentan los organizadores del currículo que estructuran el MLAD propuesto en este trabajo.

2.3.1.1. Análisis Histórico.

El Análisis Histórico se considera un organizador del currículo importante en ese trabajo de investigación, especialmente por el objeto matemático de estudio, el SND, como construcción histórica y sociocultural de la humanidad. De acuerdo con Hurtado (2014) tener en cuenta la historia de los conceptos matemáticos permite al profesor considerar los elementos lógicos y epistemológicos en su construcción teórica, de esta manera tendrá una mejor comprensión del concepto y le permite contar con un abanico de ideas para planificación de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Además puede prever posibles dificultades, errores y obstáculos en la enseñanza del contenido matemático.

La invención de los números emergió de una necesidad práctica y utilitaria de tener un inventario sobre los objetos, dando origen al primer procedimiento aritmético, la correspondencia unidad por unidad que permite la comparación de dos colecciones así sean

de diferente naturaleza, mediante un cálculo concreto. De esta manera se procede a realizar acciones de emparejamiento determinando cuál de las colecciones tiene mayor cantidad de elementos, es una apreciación del número sin necesidad de contar. Ifrah (1987) resume esta acción de emparejamiento como una correspondencia biunívoca o una biyección en términos matemáticos modernos, que proporciona no solo un medio de comparación de dos agrupaciones, sino que también “permite también englobar varios números, sin tener que contar, incluso sin tener que nombrar o conocer las cantidades implicadas” (Ifrah, 1987, p.29).

En la acción de emparejamiento se logra una noción abstracta sobre las características de las cantidades, no se tiene en cuenta la naturaleza de los conjuntos. Dicha noción abstracta permite a la correspondencia unidad por unidad desempeñar un papel importante en la habilidad del recuento. En la aplicación del principio de correspondencia se ha hecho uso de la muesca, el uso de intermediarios materiales (conchas, perlas, huesos, bolas de arcilla, trazos en arena, nudos en cuerdas, conchas ensartadas, etc.) y técnicas corporales. Estos recursos proporcionan una percepción global de la cantidad, dado que el emparejamiento por sí solo no es capaz de crear un cálculo. Es el recuento como noción abstracta que permite conocer el número exacto de elementos de una colección, independientemente del orden en el que estos sean numerados (Ifrah, 1987).

Ifrah (1997) considera la acción de contar como un fenómeno mental complejo que está íntimamente relacionado con el desarrollo de la inteligencia. Al respecto, Ifrah (1997) define que

Contar los objetos de una colección, es atribuir a cada uno de ellos un símbolo (una palabra, gesto o signo gráfico por ejemplo) que corresponde a número sacado de la serie de números naturales empezando por la unidad y procediendo por orden hasta el cumplimiento de los elementos de dicha colección. En la colección, así transformada en procesión, cada símbolo será el número del orden del elemento al que se haya atribuido. Y el número de los que forman el conjunto será precisamente el número de orden de su último elemento... (p. 45).

Asociado a esta definición de conteo, Ifrah (1987) considera que la comprensión de los números requiere de su “clasificación en un sistema de unidades numéricas jerarquizadas que

encajan entre sí de manera consecutiva” (p. 47). Esto es denominado el principio de recurrencia o noción de sucesor, en el que los números naturales, distintos a uno, como colección abstracta se obtienen al añadir una unidad al número antecesor, a partir de uno. Así entonces, el principio de sucesor permite que el hombre pueda construir la serie numérica al agregar cada vez un elemento al conjunto, teniendo en cuenta el orden de la sucesión se generan los números naturales (Gutiérrez, 2017). Así, nuestro sistema de los números naturales esta permeado por los dos principios, el de la correspondencia y la sucesión.

En la definición que se presentó de Ifrah (1987) sobre contar, se evidencian dos aspectos del número natural: el aspecto cardinal y el aspecto ordinal. El aspecto cardinal hace referencia a la adopción de un símbolo patrón que representa la unidad y se repite tantas veces como unidades tenga el número, por ejemplo, la reiteración del número 1 tantas unidades como se deseen representar o la alineación de guijarros o muescas que simbolizan la unidad.

Sobre la noción de cardinal, Gutiérrez (2017) refiere que al realizar la correspondencia biunívoca entre objetos de una colección con otra colección, se desliga la noción abstracta del cardinal, que se relaciona con lo que es común a las dos colecciones independientes de su naturaleza. Así mismo el principio de correspondencia, permite “reconocer diferencias cuantitativas entre conjuntos y establecer relaciones de orden y de equivalencia entre cantidades” (Gutiérrez, 2017, p. 54).

Sobre el aspecto ordinal, el cual es indispensable en la destreza de contar (Gutiérrez, 2017), se refiere a la asignación un símbolo único a cada número de tal manera que se tienen una sucesión de símbolos sin relación alguna entre ellos, por ejemplo, palabras, gestos o signos cada uno diferente a los demás (Ifrah, 1997). Algunos de los casos referenciados por Ifrah (1997) es el uso de técnicas de conteo corporales, en las que se tocaban partes del cuerpo en un orden determinado hasta obtener una relación biunívoca entre la cantidad de objetos y partes del cuerpo o el uso de técnicas de recitado como las letanías, así el uso de canciones, listado de nombres entre otros, permiten seguir un orden establecido para determinar la cantidad de una colección al retener la última palabra que simboliza el último objeto contado (Ifrah, 1997).

Al respecto, Anacona, Arbeláez y Recalde (como se citó en Gutiérrez, 2017) aluden que el número ordinal de una colección es el número asignado al último elemento de la colección y que un sistema ordinal requiere el cumplimiento de dos características, a saber: los términos deben encontrar en secuencia y deben ser inagotables.

Gutiérrez (2017) destaca que las nociones de cardinal y ordinal se encuentran estrechamente relacionadas con el conteo y la construcción del concepto del número natural, dado que la comprensión del número del natural se da mediante la comprensión del número como cardinal y ordinal. “En el conteo el número cardinal determina la pluralidad de una colección, mientras el número ordinal es el elemento de un conjunto modelo que se hace corresponder al último componente de la colección, es decir al último elemento en el proceso de contar” (Gutiérrez, 2017, p. 56)

Estos aspectos cardinal y ordinal del número junto a la abstracción numérica, a la que se accede gracias al principio de correspondencia, le permitió al hombre revisar sus concepciones sobre los intermediarios materiales (conchas, perlas, palos con muescas, cuerdas con nudos y demás). Fueron dichos intermediarios los que después se convirtieron en símbolos numéricos que permitían diferenciar, asimilar, recordar o combinar números naturales (Ifrah, 1987).

Las simbolizaciones del número fueron evolucionando de simbolizaciones figuradas a partir de los intermediarios materiales, pasando por simbolizaciones orales creando un sistema de nombres de número (que eran descritos por medio de términos intuitivos relacionados con la naturaleza o el cuerpo humano) que permitió designar de manera oral y más precisa las cantidades, hasta llegar a simbolizaciones escritas en la que se acude a las cifras como signos gráficos de todo tipo (letras, trazados grabados, dibujos pintados, signos figurativos) (Ifrah, 1997).

El hombre pudo generar conjuntos de números cada vez más amplios, sin embargo se encontró con la necesidad de representar números más elevados con la menor cantidad de símbolos o nombres de números posible. Para ello se obtuvo como solución una simbolización estructurada que facilitó la memorización y representación de los números, que denominamos el *principio de la base*. Este principio, permitió que emergieran los sistemas de numeración, en estos sistemas la base es considerada por “el número de unidades

que se necesita agrupar dentro de un orden dado para formar una unidad de orden inmediatamente superior” (Ifrah, 1997).

Sobre el principio de la base decimal, Ifrah (1997) destaca que este da teniendo como fundamento la idea del agrupamiento por decenas (paquetes de 10 unidades), centenas (paquetes de 10 decenas), millares (paquetes de 10 centenas), etc. Un ejemplo al respecto basado en un fenómeno histórico es el siguiente: cada vez que pasaba una oveja del rebaño, se insertaba una concha en una correa blanca, al completar 10, se desbarataba el collar y se colocaba una concha en una correa azul. Cuando la correa azul completaba 10 conchas, que representa 100 ovejas, deshacían la correa de color azul y se insertaba una concha en la correa roja. Se hacía el mismo procedimiento hasta terminar el conteo de las ovejas. Esa técnica concreta de enumeración decimal involucra agrupamientos mediante unas relaciones de equivalencia, así una concha de la correa blanca equivale a una unidad, una concha de la correa azul equivale a una decena y una concha de la correa roja equivale a una centena. Lo anterior, presenta un claro ejemplo del principio de base 10. Este principio se aplica tanto a estrategias concretas de enumeración como al uso de palabras, signos gráficos, tal como es el caso de nuestra numeración actual que emplea cifras arábigas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

De acuerdo con Ifrah (1997) el principio de la posición ha sido una de las reglas más elaboradas en la historia, así como la idea del cero el cual ha sido uno de los conceptos más abstractos para el hombre. En el principio de la posición, los primeros símbolos representan las unidades simples (unidades de primer orden decimal). El valor de cada símbolo depende de la posición ocupe en la cifra representada, así el símbolo 3 en la primera unidad de orden decimal representa 3 unidades simples, en la segunda unidad de orden representa 3 decenas y así sucesivamente. El décimo símbolo incluido, llamado cero, indica ausencia de la cifra en una unidad de orden o posición. La base 10 es representada por medio de dos cifras y se escribe usando los símbolos 1 y 0 como forma abreviada para expresar 1 decena, 0 unidades. Los números del 11 a 99 se representan teniendo en cuenta el principio de posición y combinando dos cifras de las diez cifras o símbolos fundamentales, y así sucesivamente para las demás unidades de orden superior.

De acuerdo con la descripción que se ha presentado anteriormente, en el organizador del currículo de análisis histórico se determinan unos conocimientos fundamentales para el

docente sobre el SND, como objeto cultural producto de una elaboración histórica que ha producido un sistema de convenciones para representar la numeración usando la menor cantidad de símbolos. Además, el docente requiere conocer los fenómenos que dieron origen a este sistema de representación de base decimal, tales como, el desarrollo del conteo en la historia, el desarrollo sobre los principios de agrupamiento, base 10 y de posición que deben ser tenidos en cuenta para la planificación y evaluación de las situaciones de enseñanza.

2.3.1.2. Análisis Didáctico de los Sistemas de Representación.

El conocimiento de un contenido implica el dominio de los diversos sistemas de representación y las formas en las que a través de diversos sistemas se puede expresar un mismo concepto, explorando diferentes conexiones sobre este, destacar particularidades del concepto que se expresa y permite entender y abordar algunas propiedades del concepto que dicho sistema expresa. (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Lupiáñez, 2013). Así entonces, los sistemas de notaciones, símbolos y gráficos que se usan en un concepto matemático; los procesamientos y conversiones de un sistema de representación hacen parte de lo que se estudia en el Análisis de los Sistemas de Representación y es clave para dotar de significado de los conceptos matemáticos.

Retomando lo mencionado en el apartado del Análisis Histórico, en el surgimiento histórico de los sistemas de numeración se fueron desarrollando diversas simbolizaciones del número (Ifrah, 1997): simbolizaciones figuradas o concretas, simbolizaciones escritas y simbolizaciones orales. Estas simbolizaciones son tenidas en cuenta por Rico et al., (2008) en la definición de las modalidades de representación de los números naturales.

A continuación se presenta la figura 2, en la que Rico et al., (2008) presentan cuatro sistemas de representación para los números naturales: sistema simbólico, sistema verbal, sistema gráfico y el ofrecido por los materiales manipulables (originado de los intermediarios materiales).

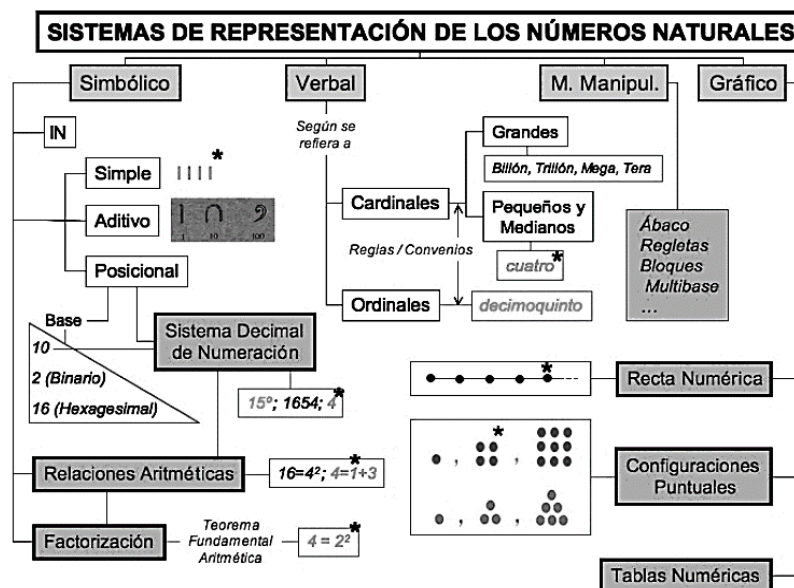


Figura 2. Sistemas de representación de los números naturales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 16).

El sistema de *representación simbólico*, hace referencia a los sistemas que se usan para expresar los números teniendo en cuenta sus reglas, principios y sus símbolos. El SND está constituido por un conjunto de símbolos o signos básicos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) que permiten representar números en el conjunto de los números naturales. Para representar un número en el SND se deben seguir unas reglas y unos principios que organizan el sistema, que se presentan a continuación:

- *Principio de base decimal:* Cada diez unidades de orden conforman una unidad de orden superior y la base concuerda con la cantidad de unidades simples (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
- *El cero,* indica ausencia de unidades en una determinada unidad de orden.
- *Principio aditivo:* el valor representado por un número es obtenido al sumar las cifras de acuerdo al valor de posición. Un número se puede escribir como la suma de sus unidades de diferente orden.
- *Principio multiplicativo:* cada cifra del número es a su vez un factor que multiplica a una potencia de 10, la potencia se corresponde con la unidad de orden o valor de la posición que este ocupando. Así, la potencia que se multiplica para las unidades es 10^0 , para las decenas 10^1 , para las centenas 10^2 y así sucesivamente.

- *Principio posicional*: el valor de cada cifra depende del lugar de posición que ocupe en el numeral.
- *Orden de la posición*: las cifras en el número se escriben una seguida de otra, de izquierda a derecha y teniendo en cuenta las unidades de orden (Castro y Molina, 2011).

En relación con el *sistema de representación simbólico*, en la figura 2 se puede observar tres estructuras a tener en cuenta para representar naturales: estructura simple, aditiva o posicional (Rico et al., 2008) las cuales están estrechamente relacionadas con los principios anteriormente mencionados. La estructura simple, hace alusión al empleo de los números naturales para contar cantidades pequeñas con el uso de muescas, símbolos y demás, tal como se explicitó en el organizador de Análisis Histórico. La estructura aditiva, hace alusión a los sistemas de numeración que emplean reglas aditivas para su representación, se destaca los sistemas de numeración egipcio, romano y chino. La estructura mixta, combina la estructura aditiva y la estructura multiplicativa (Lupiáñez, 2016), dentro de esta estructura mixta se tienen sistemas de numeración como el romano que emplea reglas aditivas y multiplicativas para su representación. Los sistemas posicionales, como el SND consideran el principio de agrupamiento, para este caso en base 10.

El sistema de *representación verbal* se relaciona con el sistema de representación simbólico. En este sistema verbal se explicitan las reglas, los términos, la sintaxis con la que se expresan verbalmente los números. Cada lenguaje emplea unas normas y reglas para representar los números de acuerdo al uso de su significado en contexto cardinal u ordinal de los números naturales (Lupiáñez, 2016). Al respecto, Terigi y Wolman (2007) destacan la importancia de reconocer el contexto de uso que dota de sentido a los numerales, dado que el sistema de los números naturales como instrumento social, no cumple las mismas funciones de representación de acuerdo a las situaciones cotidianas en las que se usan los numerales: precios, números de teléfonos, el número de la ruta del bus, etc.

Sobre uso de los números en el contexto cardinal, es importante mencionar que los estudiantes ingresan a la escolaridad con un conocimiento verbal del SND tal como es el manejo de la secuencia numérica, que es previo al conocimiento simbólico (Terigi y Wolman, 2007) y que el docente debe tener en cuenta en la planeación de la actividad matemática escolar. Es por ello que el docente debe considerar las conceptualizaciones que los

estudiantes elaboran sobre la escritura de los números, pues los principios que rigen la numeración escrita no son trasladables a los principios de la numeración hablada, sin embargo, los estudiantes tienden a producir sus notaciones escritas uniendo símbolos de tal manera que correspondan con el orden de los términos de la numeración hablada. Al respecto, Lerner y Sadovsky (1994) resaltan que en la numeración hablada la yuxtaposición de palabras implica una operación matemática implícita en algunos casos de tipo aditivo o aditivo multiplicativo. En la numeración escrita al ser posicional, no hay rastro de las operaciones que están implícitas en su escritura, las potencias de la base solo pueden inferirse teniendo en cuenta la posición que ocupa cada cifra.

El sistema de *representación gráfico* hace referencia a la representación de los números usando la recta numérica, las configuraciones puntuales, la tabla del 100, tal como se presentó en la figura 2. La recta numérica presenta una representación del número en el contexto de medida, mediante su construcción con regla y compas partiendo de una unidad n y reiterando la unidad n veces. Las configuraciones puntuales permiten en su estructura reconocer propiedades aritméticas que no son evidentes en la representación decimal y desarrollar patrones. La tabla del 100 permite explorar relaciones aritméticas, algebraicas y geométricas entre números (Rico et al., 2008). La tabla del 100, también conocido como el panel numérico, permite identificar principios, regularidades y la organización del sistema de numeración al trabajar con números de igual y diferente cantidad de cifras en diversos intervalos de la serie numérica (Lerner y Sadovsky, 1994). Las reglas de nuestro SND no están explícitas en la escritura de los números, por tanto, la banda numérica es un recurso que permite reflexionar sobre las particularidades de la escritura de nuestro SND, establecer relaciones de orden, construir series progresivas y regresivas, apreciar distancias entre los números, contrastar regularidades y alternancias.

Los *materiales manipulativos* hacen referencia a aquellos materiales que permiten representar, expresar relaciones estructurales y reconocer propiedades de los números naturales y operar con ellos. Para el caso de la enseñanza del SND se cuenta con los siguientes materiales manipulativos:

- *Bloques multibase*: Es un material que permite modelar el significado de agrupamiento múltiple en un sistema de numeración y representar números en diferentes bases. Cada

pieza representa un valor de acuerdo a la base de agrupamiento. Para el caso de la representación del SND, este material permite reconocer el principio de agrupamiento, el principio aditivo y multiplicativo del sistema, sin embargo, cuenta con una limitación en cuanto no permite reconocer la característica posicional del SND.

- *El ábaco*: Es un material que permite la representación y lectura de números. El ábaco vertical permite la comprensión de los principios del SND (aditivo, multiplicativo y posicional).
- *Las cuadrículas de 10 a manera de regletas de Herbinère – Lebert o cajas de 10* (ver figura 3) permite establecer una conexión entre el conteo (a manera de correspondencia una a uno) y los agrupamientos de diez en diez. Este tipo de material permite apreciar la utilidad del agrupamiento de diez en diez al contar grandes cantidades de elementos.

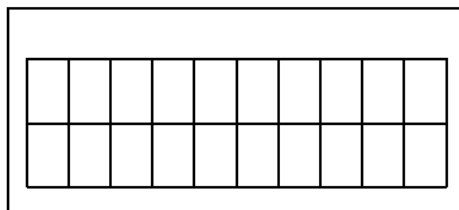


Figura 3. Regletas de Herbinère – Lebert o cajas de diez.

- *El panel numérico o las bandas numéricas*. (ver la figura 4) es un recurso que permite reflexionar sobre las particularidades de la escritura de nuestro SND, establecer relaciones de orden, construir series progresivas y regresivas, apreciar distancias entre los números, contrastar regularidades y alternancias. Permite identificar principios, regularidades y la organización del sistema de numeración al trabajar con números de igual y diferente cantidad de cifras en diversos intervalos de la serie numérica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 4. El panel numérico o las bandas numéricas.

El organizador del currículo sistemas de representación, es uno de los más importantes para el desarrollo de este trabajo, dado el objeto matemático de este estudio, el SND en tanto es un sistema de representación de cantidades. Por tanto, es importante en el conocimiento didáctico del profesor la comprensión sobre los principios que organizan el SND, las notaciones y símbolos que se usan en la numeración escrita, las diferentes representaciones existentes para el contenido matemático.

2.3.1.3. Análisis Didáctico de la estructura conceptual.

El Análisis Didáctico de la Estructura Conceptual (EC) es uno de los organizadores del currículo que aporta al significado de los contenidos de las matemáticas escolares⁴, en este se identifican los conceptos y procedimientos que caracterizan el contenido matemático para efectos de la planificación de la actividad matemática. La información que emerge de este análisis “muestra la riqueza de significados y relaciones entre los diferentes contenidos, el modo en el que se representan y su funcionalidad y campos de aplicación” (Lupiáñez, 2013, p. 88). Así entonces, la información obtenida del Análisis se puede sintetizar en un mapa

⁴ “Por contenido matemático escolar se entiende un conjunto de conceptos, procedimientos, estructuras y actitudes, procedentes de la tradición académica, que los responsables del currículo seleccionan y organizan y los profesores comunican y enseñan, para que los escolares las aprendan y las utilicen con un tópico matemático escolar determinado” (Fernández, 2016, p. 104).

conceptual que muestra las nociones y prioridades básicas del contenido matemático (Lupiáñez, 2013).

De acuerdo con Rico et al., (2008) la organización del contenido matemático escolar se realiza considerando criterios cognitivos y se organiza en dos grandes bloques: conceptual y procedimental. En el campo conceptual se determinan tres tipos de conocimientos que se articulan en dicho campo a manera de complejidad creciente: hechos, conceptos, y estructuras. En el campo procedimental se consideran las destrezas, los razonamientos, y las estrategias como los tres niveles de complejidad creciente en el campo.

A continuación, en la tabla 4 se presenta la clasificación de contenidos conceptuales y procedimentales del Sistema de los Números Naturales relacionados con el Sistema de Numeración Decimal organización del contenido matemático SND.

Clasificación de contenidos del Sistema de los Números Naturales relacionados con el Sistema de Numeración Decimal	
Conceptuales	Procedimentales
Hechos • <i>Términos</i>: cero, uno, dos, tres,...; igual, mayor/menor que; suma y resta; sucesor, antecesor; unidad, decena, centena,... • <i>Notaciones</i>: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...(símbolos simples); 10, 100, 1000,...; 10^0, 10^1, 10^2, 10^3...; $8.563 = 8 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$,...; $8.563 = 8.0000 + 500 + 60 + 3$,... • <i>Convenios</i>: En el SND se representan cantidades a partir de la combinación los símbolos simples; Periodicidad de los órdenes del sistema (u, d, c, um, dm, cm, uM,...); Cada cifra tiene la función de indicar la potencia de la base que representa; Valor posicional; La lectura de las cantidades numéricas se realiza por la cifra de mayor orden, con indicación de dicho orden, continúa por...; La notación del SND en potencias de base diez se escribe de manera decreciente; El cero se utiliza para indicar la ausencia de cantidad en una unidad de orden. • <i>Resultados</i>: Cada diez unidades de orden conforman una unidad de orden superior; La comparación de cantidades en el SND se realiza a partir de la identificación de la cantidad de cifras que conforman el número,	Destrezas • Escritura y lectura de números • Descomposición polinómica de un número • Algoritmos de la suma y de la resta, el producto y la división. • Expresiones de un mismo número como resultado de distintas operaciones. • Diversidad de representaciones de un mismo número (Basadas en el SND). • Usos básicos de la calculadora con naturales. Razonamientos • Deductivo: propiedades de las operaciones. • Inductivo: regularidades numéricas. • Recta numérica. Propiedades y operaciones en la recta. Estrategias • Cálculo mental • Estimación de los resultados de una operación usando puntos de referencia. • Reconocimiento de patrones numéricos

dado el caso que tengan igual cantidad de cifras se comparan las cifras iniciando por las cifras de mayor unidad de orden es decir que representen la mayor potencia de 10, en el caso de que las unidades superiores sean equivalentes se continua comparando las unidades anteriores a la de orden superior; Todo número n tiene un sucesor $n+1$ y, excepto 0, un antecesor $n-1$. Conceptos • Sistema decimal de numeración. • Orden entre los números naturales. • Algoritmos de suma, resta, multiplicación y división. Estructuras conceptuales • $(N, +)$ y $(N, \times)$ Semigrupos conmutativos. • $(N, \leq)$ Orden total y arquimediano. • $(N, +, \times, \leq)$ Semianillo arquimediano.	• Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números. • Construcción de un conjunto de números con ajuste a una regla • Resolución de problemas aritméticos y numéricos • Capacidad para razonar y hacer juicios a partir del tamaño de los números.
--	--

Tabla 4. Clasificación cognitiva del contenido del Sistema de los Números Naturales. Adaptado de Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008, p.11).

Los focos conceptuales de un tópico matemático escolar, presentan las ideas prioritarias de los componentes conceptuales y procedimentales, resumen y organizan agrupamientos coherentes de los contenidos y además permiten establecer prioridades sobre las expectativas de aprendizaje del tema para una selección y secuenciación adecuada de las tareas para la planeación de la actividad matemática (Rico et al., 2008). A continuación se presentan los focos conceptuales para el contenido matemático escolar SND:

- Principios que organizan el SND: Principio de agrupamiento (Base), Uso del cero, principio aditivo, principio multiplicativo, principio posicional, orden en la posición.
- Estructura polinomial de los números: Composición aditiva y composición aditiva-multiplicativa de los números, numeración oral y numeración escrita.
- Operaciones entre números.

Teniendo en cuenta, la organización del contenido matemático escolar SND, en sus ámbitos conceptual y procedimental y los focos conceptuales definidos, en la figura 5 se presenta el mapa conceptual que representa los conocimientos y relaciones del tópico de estudio de este trabajo. Esta representación recoge elementos presentados en los análisis: histórico como lo es el principio de agrupamiento y el principio de la base; sobre los sistemas

de representación, la notación científica, lectura y escritura de números como parte de los sistemas de representación verbal y simbólica.

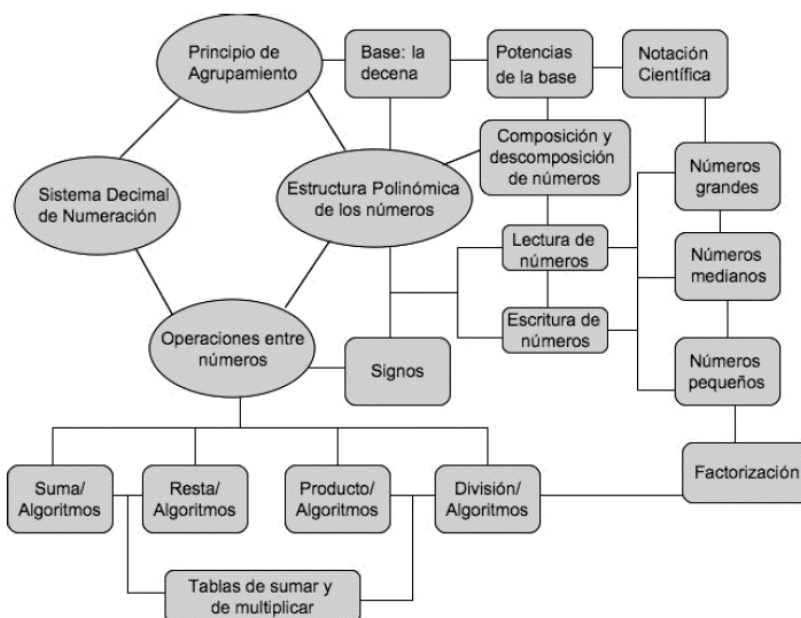


Figura 5. Red conceptual del Sistema de Numeración Decimal (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p.14).

2.3.1.4. Análisis Didáctico del Sentido y los modos de uso del Sistema de Numeración Decimal.

El Análisis de sentido y los modos de uso es complementario al análisis de los sistemas de representación y la estructura conceptual, ya que estos proporcionan un significado instrumental del contenido matemático. Por tanto, conocer e identificar el sentido sobre los conceptos y procedimientos (sus usos posibles, las funciones que tiene) completa su significado (Ruiz, 2016). El Análisis de sentido y los modos de uso, se encuentra estrechamente relacionado con un enfoque funcional del currículo.

Ruiz (2016) considera que los conceptos matemáticos, al pensarse con relación al sentido, tienen en cuenta el entendimiento de los diferentes modos de uso. De esta manera el estudio del sentido de los conceptos matemáticos se realiza mediante: el dominio de los términos propios del concepto, los contextos en los que se emplean y las cuestiones a la queda respuesta dicho concepto, el conocimiento de los fenómenos que organiza y que le dieron origen a dicho concepto y las situaciones en las que este se aplica.

A continuación en la tabla 5 se presentan términos, contextos, fenómenos y situaciones relacionados con los sentidos y modos de uso del SND, propuestos por la autora, a partir de la caracterización de los sentidos y modos de uso, propuestos por Ruiz (2016) sobre los términos, los contextos y los fenómenos para el sentido de los números naturales; Terigi y Wolman (2007) en relación con las situaciones que destacan el uso significativo y comprensivo del SND.

Términos relacionados con el SND	Contextos ¿Para qué se usa el SND?	Fenómenos Problemas a los que dio respuesta el SND	Situaciones⁵ Aplicación en diversas situaciones y diferentes usos
Conjunto finito de signos y reglas para expresar un número.	Representación oral y escrita del número en diferentes contextos:	Representar números más elevados con la menor cantidad de símbolos o nombres de números posible.	Producir e interpretar escrituras numéricas.
Términos de la numeración escrita: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	Cardinal		Comparar, ordenar y operar con las escrituras numéricas.
	Medida		
	Etiqueta		Buscar regularidades en la organización de los números.
Términos de la numeración oral: del cero al quince, veinte, treinta... Normas de combinación: dieciocho.	Contar	Codificar y decodificar.	
	Agrupar		Identificación de las operaciones que subyacen en el SND
	Comparar		
	Ordenar		
Cifras	Operar		Relación entre la numeración escrita y las operaciones.
Base decimal.			
Valor de posición.			
Unidades de orden: Unidad, Decena, Centena.			Composiciones y descomposiciones aditivas y aditivas-multiplicativas de manera canónica y de manera flexible.

Tabla 5. Resumen de elementos de sentido y modos de uso del Sistema de Numeración Decimal.

⁵ En esta columna se retoman las situaciones propuestas por Terigi y Wolman (2007).

2.3.2. Análisis Cognitivo sobre el Sentido Numérico.

El Análisis Didáctico Cognitivo centra su atención en el aprendizaje de los estudiantes, sobre un determinado contenido matemático mediante una detallada descripción de la problemática del aprendizaje desde una perspectiva curricular y funcional del currículo (Lupiáñez, 2013). Este análisis se enmarca en la dimensión cognitiva del currículo dando respuesta al para qué de un plan de formación, las capacidades que deben tenerse en cuenta y los propósitos que pretende atender (Flores y Lupiáñez, 2016). Teniendo en cuenta lo anterior, el Análisis Didáctico Cognitivo da cuenta de lo que el profesor espera sea aprendido por los estudiantes, qué interferencias se pueden presentar en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y qué situaciones permiten el aprendizaje de los contenidos matemáticos escolares en el marco de un enfoque funcional, es decir, con sentido. Por tanto, para el Modelo Local de Análisis Didáctico que se propone en este trabajo de investigación se tendrán en cuenta los siguientes tres organizadores del currículo que se presentan a continuación.

2.3.2.1. Expectativas de aprendizaje.

Este organizador curricular del Análisis Didáctico Cognitivo permite definir lo que se espera que los estudiantes aprendan en diferentes niveles, identificando los requerimientos que sobre la enseñanza y el aprendizaje que se plantean en los documentos normativos (Flores y Lupiáñez, 2016). En nuestro caso, los referentes curriculares nacionales: Lineamientos Curriculares (1998), Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) determinan las expectativas a largo plazo para un ciclo en la educación básica primaria y los Derechos Básicos de aprendizaje en matemáticas (2016) definen los aprendizajes estructurantes para un grado particular. Teniendo en cuenta estas expectativas generales por ciclo y grado, se concretan unos *objetivos específicos* sobre los aprendizajes esperados en los estudiantes y las *competencias* sobre un contenido matemático escolar determinado, en este caso, la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND.

La tabla 6 presenta las expectativas generales para la enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de básica primaria, que se han determinado en los documentos curriculares en relación con el SND. Cabe resaltar que otras expectativas relacionadas con el pensamiento numérico también permiten la construcción de sentido numérico. Sin embargo, en la

siguiente tabla se relacionan las expectativas de aprendizaje asociadas a la comprensión del SND para el primer ciclo de educación básica primaria.

Estándares del Pensamiento numérico asociados al SND	Derechos Básicos de Aprendizaje asociados al SND por Grados del primer ciclo	Evidencias de aprendizaje en los DBA asociados al SND
Ciclo 1 a 3		
Uso representaciones – principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal. Uso representaciones – principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal.	Grado 1 DBA 2. Utiliza diferentes estrategias para contar, realizar operaciones (suma y resta) y resolver problemas aditivos.	• Realiza conteos (de uno en uno, de dos en dos, etc.) iniciando en cualquier número. • Determina la cantidad de elementos de una colección agrupándolos de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5.
	Grado 1 DBA 3. Utiliza las características posicionales del Sistema de Numeración Decimal (SND) para establecer relaciones entre cantidades y comparar números.	• Establece y argumenta conjeturas de los posibles resultados en una secuencia numérica. • Utiliza las características del sistema decimal de numeración para crear estrategias de cálculo y estimación de sumas y restas.
	Grado 2 DBA 2. Utiliza diferentes estrategias para calcular (agrupar, representar elementos en colecciones, etc.) o estimar el resultado de una suma y resta, multiplicación o reparto equitativo.	• Realiza composiciones y descomposiciones de números de dos dígitos en términos de la cantidad de “dieces” y de “unos” que los conforman. • Encuentra parejas de números que al adicionarse dan como resultado otro número dado. • Halla los números correspondientes a tener “diez más” o “diez menos” que una cantidad determinada. • Emplea estrategias de cálculo como “el paso por el diez” para realizar adiciones o sustracciones

Estándares del Pensamiento numérico asociados al SND	Derechos Básicos de Aprendizaje asociados al SND por Grados del primer ciclo	Evidencias de aprendizaje en los DBA asociados al SND
Ciclo 1 a 3	Grado 2	• Compara y ordena números de menor a mayor y viceversa a través de recursos como la calculadora, aplicación, material gráfico que represente billetes, diagramas de colecciones, etc. • Propone ejemplos y comunica de forma oral y escrita las condiciones que puede establecer para conservar una relación (mayor que, menor que) cuando se aplican algunas operaciones a ellos. • Reconoce y establece relaciones entre expresiones numéricas (hay más, hay menos, hay la misma cantidad) y describe el tipo de operaciones que debe realizarse para que a pesar de cambiar los valores numéricos, la relación se conserve.
	Grado 3	• Utiliza las propiedades de las operaciones y del Sistema de Numeración Decimal para justificar acciones como: descomposición de números, completar hasta la decena más cercana, duplicar, cambiar la posición, multiplicar abreviadamente por múltiplos de 10, entre otros.
	DBA 2.Propone, desarrolla y justifica estrategias para hacer estimaciones y cálculos con operaciones básicas en la solución de problemas.	

Tabla 6. Expectativas generales sobre el Sistema de Numeración Decimal en el primer ciclo de básica primaria.

De acuerdo con la propuesta curricular para la enseñanza de las matemáticas en Colombia, Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006), las expectativas de aprendizaje presentadas en la tabla 6, atienden a la estructura curricular propuesta en los referentes de calidad, procesos generales, conceptos y procedimientos matemáticos, y contextos. Respecto a los procesos generales que se proponen para toda actividad matemática (formulación, tratamiento y resolución de problemas (RP); modelación (M); comunicación (C); razonamiento (R) y formulación, comparación y ejercitación de procedimientos (EP), “constituyen las actividades intelectuales que van a permitir a los estudiantes alcanzar y superar un nivel suficiente en las competencias” (MEN, 2006, p. 77), así mismo, para el desarrollo de las competencias se requiere de la mediación

de “diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas en donde procesos generales... son esenciales para todo ello” (MEN, 2006, p. 77).

Los procesos generales mencionados anteriormente, se retomaran en la tabla 7 a manera de competencias. En dicha tabla se presenta la relación entre objetivos específicos y competencias sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza y aprendizaje del SND considerados para este trabajo de investigación.

Por otra parte, el presente trabajo de investigación resalta la importancia la construcción de sentido numérico en los estudiantes, particularmente en la comprensión del SND. Por tanto, para determinar los objetivos específicos es necesario precisar conceptualización que se adopta sobre la categoría sentido numérico en este trabajo.

De acuerdo con Castro y Segovia (2015), el sentido numérico es “una competencia cognitiva que se adquiere y desarrolla gradualmente mediante actividad en el campo numérico, como resultado de explorar los números y relacionarlos con procedimientos que no se limiten solo a los algoritmos tradicionales” (p.111). Además, el sentido numérico es caracterizado por un conjunto de capacidades que permite a una persona utilizar los números de una manera flexible y desenvuelta. Ese uso flexible se encuentra asociado los diferentes usos de los números, una buena intuición sobre las relaciones entre los números y el dominio de la aritmética mental (Castro y Segovia, 2015).

Es importante precisar que el sentido numérico no se considera como algo estático o algo que las personas pueden o no tener (Castro y Segovia, 2015). Son muchas las dimensiones que el sentido numérico se interrelaciona, por tanto, no se enseña como componentes fragmentados, que sea enseñable como si fuera un tema y que sea medible fácilmente, así como tampoco es algo que se encuentre en los libros de texto (Sowder, 1992b). Así entonces, el sentido numérico se considera como una forma de pensar sobre los números y que abarca todo el aprendizaje numérico (Sowder, 1992b).

Referentes curriculares internacionales como los NCTM, han asociado el sentido numérico como un área de desarrollo cognitivo, importante al discutirse sobre el currículo y la definición de metas para la Educación Matemática. Por tanto, son tenidos en cuenta para

la definición de las expectativas de aprendizaje, incluso, como referente para determinar el desarrollo de altos niveles de pensamiento (Hernández, López, Quintero y Velásquez, 2015).

De acuerdo con lo anterior, se presentan las capacidades propuestas por Sowder (1992b), retomadas por Llinares (2008) y Castro y Segovia (2015), para caracterizar el sentido numérico y se relacionan con el tema objeto de estudio de esta investigación, el SND:

- *Capacidad para componer y descomponer números.* La capacidad de descomponer y componer números se encuentra relacionada con la comprensión de los conceptos de valor posicional y agrupamiento del SND, en tanto que la mayoría de las composiciones y descomposiciones están relacionadas con el valor relativo. Por ejemplo, en la descomposición convencional del 53 como cuatro decenas y trece unidades.
- *Reconocer cuando una representación simbólica es más útil que otra, moverse de manera flexible entre diferentes representaciones simbólicas.* Tal es el caso de representar los números naturales de diferentes formas, es decir, de manera flexible. Por ejemplo el número 21 puede representarse: de forma polinómica $2 \times 10 + 1$; como la suma de dos números consecutivos $10 + 11$; como la combinación de un producto y una suma $2 \times 5 + 11$; como la suma de los primeros números primos $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.
- *Capacidad de reconocer la magnitud relativa de los números.* Involucra habilidades para comparar y ordenar números, reconocer cual es mayor o menor y comparar las diferencias de manera relativa. Por ejemplo, que la diferencia entre 3 y 5, y la diferencia entre 123 y 125 de manera absoluta son las mismas, pero de manera relativa son muy diferentes.
- *Capacidad para tratar la magnitud absoluta de los números.* Esta habilidad implica reconocer lo grande que es un número.
- *Capacidad de usar puntos de referencia.* Se relaciona con el redondeo de cantidades, por ejemplo, 1999 se redondea a 2000 para hacer cálculos mentales más rápidos. También se relaciona con el uso de hechos numéricos como los dobles, o resolver $21 + 21 = 42$ porque recuerda que $20 + 20 = 40$
- *Capacidad para relacionar la numeración, las operaciones y símbolos de relación de manera significativa.* Esta capacidad implica establecer relaciones entre acciones sobre

cantidades y las operaciones con los números. Una relación entre un modo concreto y el uso de símbolos es un ejemplo de esta capacidad. Al tener una representación de un número en bloques base diez por ejemplo el 624 y dividirlo en 4.

- *Comprender los efectos de las operaciones en los números. Hacer uso de algoritmos diferentes al estándar.* Esta capacidad implica dos aspectos. El primero, es reconocer cuando se puede aplicar la estrategia de compensar en las cantidades de una operación cuando estas son cambiadas en la operación, por ejemplo, si $348 - 289$ es igual a 59 entonces $358 - 289$ es igual a? El segundo aspecto, es reconocer que el resultado de un cálculo no cambia si se cambian los números originales siempre y cuando se conserve la igualdad, por ejemplo, si $350 - 291 = 59$ para encontrar $348 - 289 = ?$, se conserva la igualdad porque se restó dos en los dos cantidades de la operación. Otro ejemplo en restas con una cifra menor en el minuendo que en el sustraendo:

$$\begin{array}{r}
 357 \quad +20 \quad 377 \\
 \underline{-183} \quad +20 \quad \underline{-203} \\
 174 \qquad \qquad 174
 \end{array}$$

- *La capacidad de realizar cálculos mentales a través de estrategias "inventadas" o procedimientos diferentes, que aprovechan las propiedades numéricas y operativas.* Esta capacidad está relacionada con la capacidad de componer y descomponer números. Tal es el caso de la solución de restas aplicando la estrategia sustractiva de completación. Por, ejemplo, al calcular $1.000 - 784$ se contaría 16 desde 784 para completar 800, 200 más para completar 1.000. Esta estrategia permite al estudiante resolver más fácil el problema que si aplica el algoritmo estándar de manera mental.
- *Ser capaz de usar números de manera flexible para estimar las respuestas numéricas a los cálculos, y para reconocer cuándo es apropiado un cálculo.* En estudiantes de primer ciclo, por ejemplo, podrán decir si la suma de dos números es mayor o menor que 100.
- *Una disposición para dar sentido a los números.* Esta capacidad implica que los estudiantes encuentren sentido a la actividad numérica que realizan. De esta manera le permitirá reconocer lo razonable o no de sus respuestas.

Teniendo en cuenta las habilidades descritas que favorecen la construcción de sentido numérico y las expectativas de aprendizaje definidos en los referentes curriculares nacionales para primer ciclo presentadas en la tabla 6, se presenta en la tabla 7 los objetivos específicos sobre el SND que se tuvieron en cuenta para el diseño de la Unidad Didáctica Guía propuesta en este trabajo de investigación. La tabla presenta cada objetivo específico con los procesos generales de la actividad matemática con los que se relaciona.

Objetivos específicos sobre el Sistema de Numeración Decimal	Competencias (Procesos generales de la actividad matemática)				
	RP	M	C	R	EP
OE1. Componer y descomponer números de manera flexible a partir de la comprensión de la noción de agrupamiento.	X			X	X
OE2. Utilizar y reconocer equivalencias entre diferentes representaciones, manipulativas, pictóricas y simbólicas que favorezcan conexiones entre los modos de representación de un número.	X	X	X	X	X
OE3. Comparar y ordenar números atendiendo al reconocimiento de la magnitud relativa de los números.	X		X	X	X
OE4. Razonar y estimar la magnitud absoluta del número.	X			X	X
OE5. Usar puntos de referencia como estrategia de pensamiento, para estimar una respuesta numérica.	X		X	X	X
OE6. Relacionar la numeración, las operaciones y los símbolos a través de diferentes representaciones numéricas.	X	X		X	
OE7. Reconocer los efectos de modificar las cantidades numéricas al realizar operaciones aritméticas sobre estas.	X			X	X
OE8. Utilizar estrategias de cálculo mental a partir de procedimientos inventados en los que se relacionen las propiedades de los números y las operaciones.	X			X	X

Tabla 7. Relación entre objetivos específicos y competencias, sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza y aprendizaje del SND.

2.3.2.2. Limitaciones en la enseñanza y el aprendizaje.

Este organizador está constituido por el análisis sobre los errores y dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Su análisis previo por parte de los docentes es clave en el desarrollo de su Conocimiento Didáctico y en sus competencias de planificación para la enseñanza de un contenido matemático escolar en particular, en tanto

permite prever los errores y dificultades sobre un tópico de enseñanza y por tanto intervenir teniendo en cuenta un diagnóstico sobre los conocimientos y determinando las medidas que se pueden tomar para superar deficiencias en el aprendizaje sobre un tópico de las matemáticas escolares (Fernández, 2016).

A continuación, la tabla 8 presenta una caracterización de las limitaciones en la enseñanza y aprendizaje del SND y en la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de básica primaria. Esta caracterización es un aporte de la autora, en la que se retoman las dificultades y errores descritos en diversos trabajos como los de Lerner y Sadovsky (1994), Terigi y Wolman (2007), Castro y Molina (2005) y la experiencia propia de la autora en procesos de cualificación a docentes.

Dificultades	Errores	Relación de los objetivos específicos
Desconocimiento de destrezas asociadas a la comprensión del Sistema de Numeración Decimal y la construcción de sentido numérico: conteo, agrupamiento y valor de posición.	E1. Considerar que el dominio de la secuencia numérica verbal implica la comprensión de las características del SND.	OE1, OE2, OE3, OE4
	E2. Desconocer las estrategias del conteo (Conteos a saltos, de 10 en 10, de 100 en 100) como destrezas fundamentales para comprender los principios de agrupamiento y base.	OE1, OE2, OE3, OE4
	E3. Desarrollar actividades sobre la composición y descomposición de números usando únicamente representaciones simbólicas de las siglas C, D, U (centenas, decenas y unidades).	OE3, OE4, OE6, OE7, OE8
	E4. Limitar la enseñanza del valor de posición al uso de tabla convencional en unidades de orden.	OE3, OE4, OE5
	E5. Realizar afirmaciones erróneas sobre el uso del cero indicando, por ejemplo, que “el cero no vale nada” afectando la comprensión del cero en la notación escrita del SND.	OE3, OE4, OE5
Privilegiar el uso de representaciones simbólicas y verbales.	E6. Realizar la comparación de números a partir de un procedimiento algorítmico usando exclusivamente la representación simbólica de los números, desconociendo la comparación con materiales manipulativos y gráficos.	OE2, OE3, OE4

	E7. Reforzar la serie numérica mediante planas de números, dictados o listas de números, enfatizando en la representación simbólica y el sucesor de cada número.	OE2, OE2, OE3, OE4
	E8. Considerar que la enseñanza del SND se reduce al desarrollo de capacidades para leer y escribir números.	OE1, OE2,
	E9. Usar algunos materiales manipulativos para representar el SND sin tener en cuenta la secuencialidad de su incorporación y sin reconocer sus limitaciones y potencialidades de estos. Por ejemplo: algunos recursos tienen como limitación el principio de posicionalidad.	OE2, OE2, OE3, OE4
	E10. Desconocer las características del SND que se representan en los materiales manipulativos.	OE2, OE2, OE3, OE4
Desconocimiento de los principios que organizan el Sistema de Numeración Decimal para el desarrollo de las operaciones aritméticas.	E11. Explicar los procedimientos para desarrollar los algoritmos de suma y resta basados en la idea de las “llevadas” y “pedir prestado”, sin tener en cuenta el principio de agrupamiento sucesivo entre las unidades de orden.	OE6, OE7, OE8
	E12. Introducir de manera prematura al inicio de la escolaridad el uso de los algoritmos formales.	OE6, OE7, OE8
	E13. Proponer tareas que enfatizan en cálculos precisos, en los que se usen algoritmos formales, sin promover la estimación, el cálculo mental y el uso de estrategias informales.	OE6, OE7, OE8
	E14. Desconocer que las características de la numeración oral que es de tipo aditiva y la numeración escrita que es posicional.	OE6, OE7, OE8

Tabla 8. Errores y dificultades relacionados con la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal.

2.3.2.3. Oportunidades de enseñanza y aprendizaje.

Este organizador hace referencia “al conjunto de circunstancias y experiencias, orientaciones, demandas y retos que acompañan y estimulan los aprendizajes escolares, bien porque los regulan, los condicionan, los incentivan o los promueven” (Ruiz y Rico, 2016, p. 210). Generalmente las oportunidades de aprendizaje se plantean como retos y tareas que promueven el aprendizaje sobre un contenido matemático escolar concreto por parte de los estudiantes.

En este último organizador del análisis cognitivo se proponen algunas tareas que permitan el alcance de las expectativas de aprendizaje y la superación de las dificultades de aprendizaje que se han enunciado anteriormente. A continuación, se presentan algunas tareas planteadas por Sowder (1992b), Llinares (2001), Castro y Segovia (2015) relacionadas con las habilidades para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND sobre las nociones de agrupamiento y valor de posición para el primer ciclo de básica primaria propuestas:

Situaciones:	Tareas:
Promover situaciones de conteo de uno en uno, de 10 en 10, de 100 en 100 (hacia adelante, hacia atrás) con diferentes puntos de inicio para explorar la transición entre decenas, centenas).	- Contar de uno en uno desde 87, contra hacia atrás desde 64, contar de 10 en 10 desde cualquier número. - Usar el panel numérico e identificar regularidades entre los números, comparar números de diferente cantidad de cifras ira construyendo ideas acerca de los “diecís”, “los venitis”, “treintís”, etc. van con dos cifras, los números con cientos van con tres los miles van con cuatro. Esta tarea promueve destrezas en el conteo, la comparación y el orden.
Explorar variadas formas para pensar y escribir los números como composición de otros, mediante representaciones simbólicas o representaciones concretas o representaciones que permitan la conexión entre lo simbólico y lo concreto.	- Una primera fase en la comprensión del SND es la descomposición canónica en: unidades, decenas y centenas; 72 es visto como $70 + 2$, 7 decenas y 2 unidades, se puede apoyar usando bloques base diez o dinero. Presentar la tarea de sumar $58+37$, se presenta el 58 representado en bloques base diez y el 37 se menciona de manera verbal oral. - El uso materiales concretos con equivalencias en base 10, permite que estudiante haga descomposiciones aditivas-multiplicativas (7 de 10 son setenta y 2 de 1 son 2), estas descomposiciones tienen estrecha relación con la numeración hablada por ello es importante articular el uso de materiales como tarjetas de colores con equivalencias base diez, ábacos, bloques base 10, billetes con denominaciones de potencias de 10. - Una segunda fase en la comprensión del SND es el reconocimiento de múltiples descomposiciones de una cantidad. Por ejemplo: $72 = 40+32$; como 3 decenas y 42 unidades, como la suma de los primeros números pares $2+4+6+8+10+12+14+16 = 72$; usando configuraciones puntuales como las cajas de 10 o las regletas de Herbinère – Lebert, composición a partir de números rectangulares, componer usando billetes y monedas, usando tarjetas de colores con equivalencias base diez, usando regletas.
Promover situaciones variadas sobre el valor de posición.	Proponer situaciones en las que se deba componer números usando diversas composiciones con el valor posicional, diferentes al trabajo convencional en unidades, decenas y centenas. Por ejemplo: Usar tarjetas y que cada una tengo un dígito del 0 al 5 y con ellas conformar el número mayor que sea posible.

	Usar tarjetas 20 tarjetas con las siguientes etiquetas: 0 unidades, 1 unidades, 2 unidades, 3 unidades, 4 unidades, 5 unidades, 10 unidades, 11 unidades, 12 unidades, 3 decenas, 4 decenas, 5 decenas, 40 decenas, 41 decenas, 42 decenas, 43 decenas, 45 decenas, 51 decenas, 3 centenares y 5 centenas. Con ellas los estudiantes adivinen un número que el docente se está pensando por ejemplo entre 402 y 513. Esta tarea busca identificar el significado que le atribuyen los estudiantes a las unidades de orden. • Proponer situaciones como: un reportero presenta que ingresaron 6,399 personas a un campo de futbol, se pregunta a los estudiantes: ✓ Si entra una persona más ¿cuál será el número que deberá presentar? ✓ Si entran diez personas más... ✓ Si entran cien personas...
• Usar estrategias de cálculo informales.	Se trata de proponer tareas en las que los estudiantes hagan uso de estrategias informales o “inventadas” Por ejemplo: • Sumar y restando números de dos dígitos mentalmente contando por decenas y luego por unidades (p. ej., $24 + 33$ es 34, 44, 54; 55, 56, 57). • Sumar o restar rápidamente diez cantidades. • Realizar sumas a partir de la completación. Por ejemplo: Sumar $354 + 476$, “3 de 100 y 4 de 100 son 7 de 100” (700), “5 de 10 y 7 de 10 son 12 de 10 que puede ser entendido, como 1 de 100 y 2 de 10 o como 120” “4 y 6 son 10” (1 de 10). • Suma de los de 100: 7 y 1 son 8, 8 de 100 son 800. • Suma de los de 10: 2 y 1 son 3, 3 de 10 son 30. • Resultado: 830

Tabla 9. Situaciones y tareas para la construcción de Sentido Numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal.

Las categorías conceptuales descritas en este capítulo, se relacionan en la estructura que se propone en la figura 6. Estas categorías, articulan los referentes conceptuales definidos para el modelo didáctico-curricular y el MLAD que posibilitan la caracterización del conocimiento didáctico sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND.

La primera categoría que se presenta en la figura 6, alude a la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas propuesta en este trabajo, en la perspectiva del desarrollo profesional situado. Sobre la formación de profesores, el interés de este estudio es la caracterización del conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, este conocimiento permite el desarrollo de capacidades profesionales para el ejercicio de su labor pedagógica.

La segunda categoría propuesta, refiere a la caracterización del conocimiento didáctico, este trabajo propone un MLAD en el que se articula el análisis de contenido y el análisis cognitivo, proporcionando unos organizadores que permiten fundamentar los conocimientos de los profesores entorno a la construcción de sentido numérico y la comprensión del SND. La información que proporciona el MLAD fundamentan los elementos de análisis empleados para esta investigación, así entonces, las categorías del MLAD fueron tenidas en cuenta para el diseño de las situaciones propuestas en la Unidad Didáctica Guía (UGD), la organización de las preguntas propuestas en la entrevista y el taller de análisis de la UDG.

Finalmente, la tercera categoría, está relacionada con el modelo didáctico-curricular que subyace en la práctica del profesor relacionado con las concepciones y conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que ha desarrollado a lo largo de su experiencia formativa. En este estudio se propone un modelo didáctico-curricular, en el que se articula la perspectiva sociocultural, fenomenológica y un enfoque funcional del currículo, que proporciona un marco para analizar y reflexionar sobre la práctica del profesor.

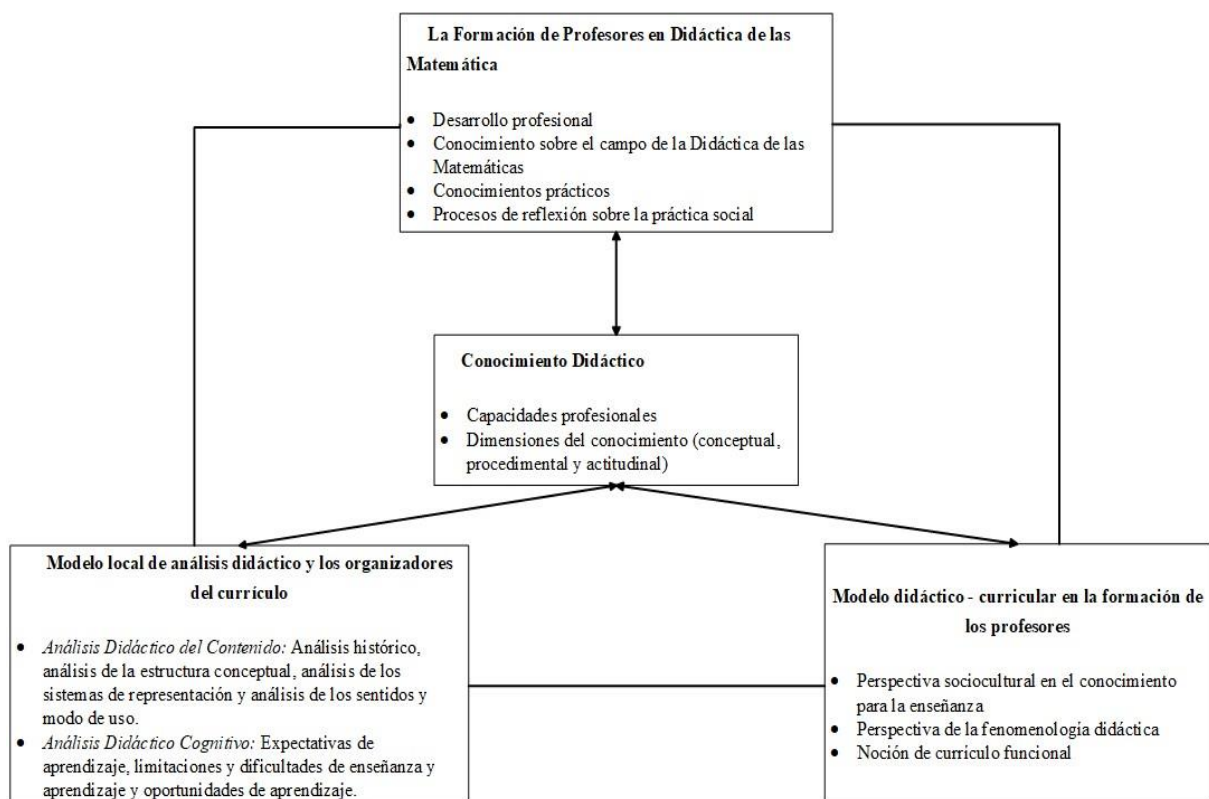


Figura 6. Categorías conceptuales en las que se basa esta investigación.

Se espera que el Conocimiento Didáctico que se ha caracterizado en este capítulo mediante el Análisis Didáctico Conceptual y el Análisis Didáctico Cognitivo, permita al docente dotarle de las herramientas necesarias para la planeación, selección, diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje que permitan el desarrollo de las capacidades de sentido numérico para la comprensión del SND en el primer ciclo de básica primaria.

Capítulo 3: Marco y diseño metodológico

En esta sección se detallan algunos elementos del marco y diseño metodológico del presente trabajo de investigación, que se enmarca en el paradigma metodológico de la investigación cualitativa, de acuerdo a la naturaleza del conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza de SND en el primer ciclo de la educación básica primaria a partir de las prácticas socioculturales que los profesores promueven en sus experiencias de enseñanza sobre dicho contenido escolar.

El paradigma metodológico que se asume en esta investigación, articula diferentes métodos y estrategias que configuran el diseño metodológico para la descripción del Conocimiento Didáctico de referencia que los profesores del primer ciclo de básica primaria emplean para desarrollar sus propuestas de enseñanza sobre el SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición. Es por ello, que en esta investigación se propone una complementariedad metodológica entre la Investigación Acción (IA), Estudio de Caso (EC) y Análisis Didáctico (AD) que permita analizar, y describir las ideas y conocimientos didácticos relacionados con la construcción del sentido numérico en las propuestas de enseñanza del SND.

3.1. Marco metodológico

Las características de la problemática de estudio y el propósito de este trabajo, centran su interés en la determinación y caracterización del conocimiento didáctico del docente en ejercicio en el primer ciclo de básica primaria para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición. Por consiguiente, se puede afirmar que este estudio se enmarca en un enfoque de investigación de tipo cualitativo. Dicho enfoque estudia la realidad de un contexto dado y para ello se apoya en el uso de métodos de análisis de tipo descriptivo e interpretativo, en tanto se interesa en la comprensión, descripción y explicación de fenómenos (Filstead, 1986). En este caso en particular, el estudio de fenómenos en la Didáctica de la Matemática, en el campo de la Formación de Profesores. Dicho estudio proporciona información, conocimientos teóricos que emergen de la reflexión sobre la práctica y desde la práctica.

A continuación se describen los aportes de cada una de las metodologías de investigación que intervienen en la propuesta de articulación metodológica.

3.1.1. Investigación acción.

La investigación acción (IA) es considerada por McAteer (como se citó Cohen, Manion & Morrison, 2018) como una metodología que permite entender y proporcionar conocimientos sobre las prácticas educativas y la complejidad de las mismas. Así entonces, la IA se concibe como una herramienta útil en el cambio y el mejoramiento a nivel local con propósito de reflexión y mejoramiento sobre la práctica, sobre qué y cómo mejorarla. Además, la IA permite la articulación entre la teoría y la práctica (Cohen et al., 2018).

La estrategia metodológica de IA propuesta en este trabajo permite el desarrollo profesional de la autora, por su potencial para la indagación auto-reflexiva, de comprensión y conocimiento sobre la complejidad de las prácticas de enseñanza y las bases teóricas requeridas en la formación de profesores que enseñan matemáticas.

En este trabajo de investigación se consideran cuatro momentos para el desarrollo metodológico desde la IA: planificación, actuación, observación y reflexión, que se explicitarán más adelante en la presentación del diseño metodológico. El desarrollo de cada uno de los momentos referenciados anteriormente, favorece reflexiones y conocimientos para el mejoramiento profesional de la autora en relación con las prácticas formativas realizadas sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND.

3.1.2. Estudio de caso.

El estudio de caso (EC) se considera en una investigación como una fuente de información relevante de datos. De acuerdo con Stake (1999) “el estudio de casos es el estudio de la particularidad y complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p.11). El propósito del EC es la descripción de la situación o fenómeno en un contexto particular, obteniendo un conocimiento de un proceso de análisis detallado que no pretende ser generalizable.

El caso que se estudia en este trabajo se relaciona con la caracterización del conocimiento didáctico sobre la construcción del sentido numérico en la enseñanza del SND en dos profesores en ejercicio del primer ciclo de educación básica primaria en la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón de la ciudad de Cali. De esta manera,

el EC proporciona información sobre el conocimiento didáctico que los profesores han desarrollado en su proceso de formación inicial y en el ejercicio de la docencia, en contraste con los conocimientos caracterizados a través del Modelo Didáctico – Curricular y el Modelo Local de Análisis Didáctico sobre la construcción de sentido numérico para la enseñanza del SND.

Para el desarrollo metodológico de este estudio, el EC considerará los siguientes momentos propuestos por Stake (como se mencionó en Cohen, et al., 2018) Definir los límites del caso y conceptualizar el objeto de estudio; seleccionar los fenómenos que estudiará el caso, los cuales podrían enmarcarse en las preguntas de investigación; recolección de la información e identificación de patrones en los datos obtenidos; triangulación de observaciones clave para apoyar interpretaciones; e identificar en las interpretaciones del caso posibles líneas de estudio posteriores, desarrollar generalizaciones o afirmaciones del caso que presenten descripciones y conclusiones sobre el estudio.

3.1.3. Análisis Didáctico.

El Análisis Didáctico (AD) es considerado un marco conceptual y metodológico el cual se apoya en un sistema de categorías y un conjunto de métodos para su uso. Dicho sistema de categorías se fundamentan a partir de los Organizadores del Currículo y los componentes del Sistema Curricular (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). De esta manera, en el AD se reconocen tres tipos de funcionalidades. La primera es una función curricular, en la que se proporciona un conjunto de criterios sobre la estructuración de los contenidos, los desarrollos cognitivos, la instrucción y evaluación para la planificación e implementación de Unidades Didácticas de un determinado tema de las matemáticas escolares y para el diseño de propuestas curriculares. Una segunda es la función profesional, como estrategia de formación de profesores, en la que el sistema de categorías proporciona referentes para las propuestas de formación a profesores y abordar las competencias profesionales del profesor para el diseño, planificación e implementación de Unidades Didácticas. Por último, una función como metodología de investigación, en el que el sistema de categorías, los Organizadores del Currículo, que permiten caracterizar el Conocimiento Didáctico del profesor mediante un Modelo Local de Análisis Didáctico, a partir del Análisis de Contenido y el Análisis Cognitivo.

Considerando los aspectos presentados anteriormente, la metodología de AD que emplearemos en esta investigación estructura su modelo metodológico a partir de un Modelo Local de Análisis Didáctico en el que se integran las siguientes categorías de análisis:

- La contextualización curricular sobre el Sentido Numérico y el SND,
- El Análisis Didáctico de Contenido sobre el SND,
- El Análisis Didáctico Cognitivo sobre Sentido Numérico y el SND.

Las estrategias metodológicas descritas en este trabajo, permiten articularse bajo un modelo de complementariedad metodológica, basada en la auto-reflexión y conocimientos generados por la autora sobre la práctica de formación a profesores (IA), los conocimientos didácticos que los profesores participantes han desarrollado sobre la construcción de sentido numérico para la enseñanza del SND a lo largo de la experiencia formativa y práctica (EC), y proponer un sistema de categorías que permita analizar el conocimiento base para la enseñanza de contenidos matemáticos a partir de referentes curriculares y didácticos (AD). En síntesis, el diseño metodológico de este trabajo a partir de la complementariedad metodológica propuesta permite la sistematización de la información surgida en cada uno de los momentos presentados en las fases de la investigación.

A continuación, se presenta la figura en la que se exponen los elementos considerados en la complementariedad metodológica, que articula las estrategias metodológicas investigación acción, estudio de caso y análisis didáctico, propuesta en este estudio.

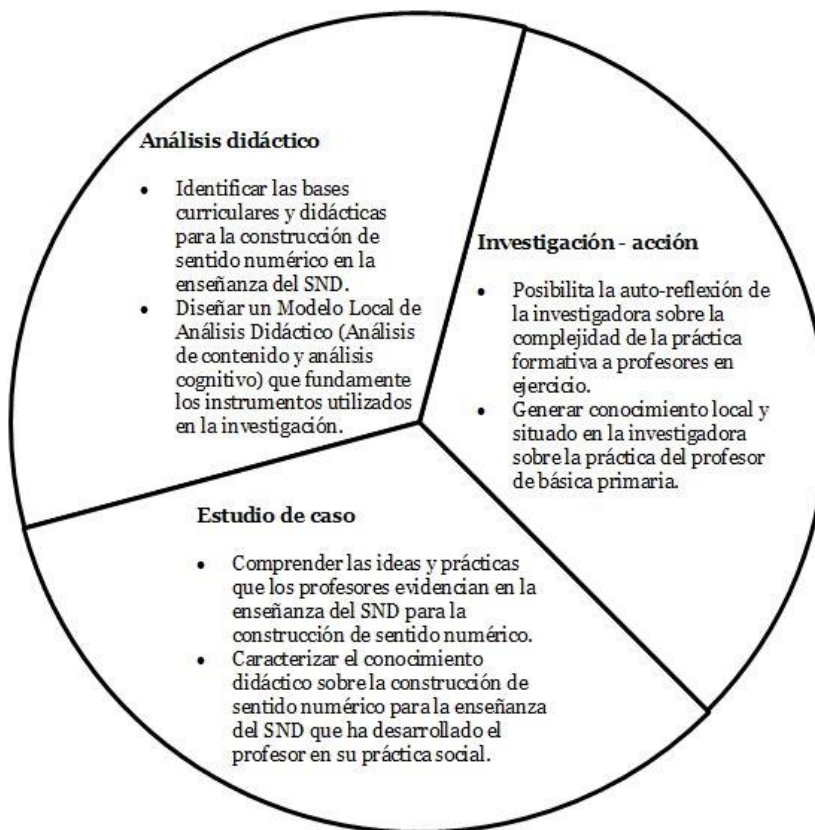


Figura 7. Elementos de la complementariedad metodológica

3.2. Diseño metodológico

Teniendo en cuenta la propuesta de complementariedad metodológica descrita anteriormente, se describe el desarrollo metodológico para el presente trabajo de investigación cuyo propósito es caracterizar los conocimientos didácticos requeridos por los docentes en ejercicio del primer ciclo de básica primaria, para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND.

A continuación se presentan aspectos que desarrollan el diseño metodológico del presente trabajo de investigación.

3.2.1. Fases de la investigación.

El desarrollo metodológico de esta investigación considera los elementos referenciados en el modelo de complementariedad metodológica que se ha propuesto anteriormente, con el propósito de realizar la caracterización del Conocimiento Didáctico que un docente en ejercicio del primer ciclo de básica primaria pone de manifiesto cuando analiza una propuesta de Unidad Didáctica a partir de talleres de formación relacionados con la construcción de

sentido numérico en la enseñanza del SND. Esta estrategia metodológica permite obtener información sobre la formación del docente que participa del estudio, sus conocimientos didácticos y sus necesidades de formación y desarrollo profesional.

Es por ello, que en el presente trabajo de investigación se han definido los siguientes objetivos específicos:

O1. Determinar y caracterizar el conocimiento didáctico relacionado con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición, a través de un modelo local de análisis didáctico para la formación de profesores de educación básica primaria.

O2. Describir el conocimiento didáctico que se reconoce en profesores del primer ciclo de básica primaria al analizar una Unidad Didáctica Guía relacionada con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición.

De acuerdo a los objetivos propuestos, a continuación se describen las fases y acciones de la investigación.

En la *primera fase de la investigación*, se caracteriza el Conocimiento Didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, mediante un Modelo Local de Análisis Didáctico desarrollado en el segundo capítulo, que articulando el Análisis Didáctico de Contenido y el Análisis Didáctico Cognitivo se apoya en los siguientes organizadores curriculares: Una contextualización curricular, la describen los fenómenos que dotan de sentido dicho contenido matemático escolar, sus significados mediante una estructura conceptual, su desarrollo histórico y un análisis de los sistemas de representación. Así mismo, se caracterizan las expectativas de aprendizaje considerando los referentes curriculares, nacionales, las limitaciones y dificultades, y las oportunidades de enseñanza y aprendizaje para la enseñanza y aprendizaje del SND. Esta caracterización del conocimiento didáctico proporciona los criterios para el diseño de una Unidad Didáctica Guía que favorece la construcción de sentido numérico en la enseñanza y aprendizaje del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor posicional.

Durante la *segunda fase de la investigación*, inicialmente, se realiza una entrevista sobre la formación inicial y permanente de los docentes participantes en el estudio de caso y se presentan algunas situaciones relacionadas con habilidades para la construcción de sentido numérico en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor posicional en la enseñanza del SND. La entrevista y el análisis de las situaciones permiten reconocer los conocimientos didácticos de los profesores en ejercicio del primer ciclo de básica primaria sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND. Posteriormente, se desarrolla un taller con los docentes, que participan del estudio, para reflexionar y analizar sobre algunas situaciones y tareas propuestas en una Unidad Didáctica Guía, fundamentadas en el Modelo Local de Análisis Didáctico desarrollado en el capítulo dos.

En la *tercera fase de la investigación*, se realiza una triangulación de la información obtenida en la entrevista y los talleres de análisis de la Unidad Didáctica Guía, permitiendo describir los conocimientos didácticos que se evidencian en los encuentros con los docentes que participan del estudio. De esta manera, es posible establecer un contraste entre el conocimiento didáctico que se ha documentado en el Modelo Local de Análisis Didáctico, el cual es el requerido para el diseño y planificación de Unidades Didácticas y el conocimiento didáctico que el docente manifiesta de acuerdo a su formación y experiencia profesional al analizar la Unidad Didáctica.

La *cuarta fase de la investigación*, presenta la interpretación de la información y se describen los conocimientos didácticos evidenciados en los docentes participantes, al analizar las situaciones propuestas y realizar el taller de reflexión sobre la UDG que relaciona los conocimientos didácticos que requieren en la formación de los docentes de primer ciclo de acuerdo al Modelo Local de Análisis Didáctico en torno al desarrollo de sentido numérico en la enseñanza del SND. Esa fase también presenta futuras líneas de trabajo para desarrollos posteriores y conclusiones finales.

A continuación se presentan las fases de la investigación en la tabla 10, teniendo en cuenta la propuesta de articulación metodológica que se ha descrito en este capítulo.

Investigación acción	Estudio Caso	de	Análisis Didáctico	Objetivos Relacionados
Fase 1 Planificación	Determinar fenómeno de estudio. Definir pregunta de investigación	de	Estructuración del Modelo Local de Análisis Didáctico. Organizadores del Currículo: Análisis de la Estructura conceptual, Análisis de Sistema de representaciones, Análisis histórico, Análisis sobre los sentido y modos de uso, expectativas, limitaciones y dificultades, oportunidades de enseñanza y aprendizaje. Revisión documental.	O1.
Fase 2 Acción	Recolección de la información		Diseño e implementación de entrevista. Diseño de la Unidad Didáctica Desarrollo de talleres para análisis y reflexión sobre la UD	O1
Fase 3 Observación	Triangulación de la información		Análisis de la información obtenida en entrevista y en los talleres desarrollados.	O2
Fase 4 Reflexión	Interpretación de la información y proyecciones		Caracterización del conocimiento didáctico del profesor. Análisis, conclusiones y posibles proyecciones.	O2

Tabla 10. Fases del diseño metodológico.

3.2.2. Contextualización y participantes.

Considerando que un objetivo específico (O2) de este trabajo es la descripción del conocimiento didáctico que se reconoce en profesores del primer ciclo de básica primaria en relación con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición, el estudio de caso del presente trabajo se aborda con dos docentes en ejercicio del primer ciclo de educación básica

primaria, en la sede Fray José Ignacio Ortiz de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón ubicado en la ciudad de Cali.

Los docentes que participaron en la experimentación, fueron seleccionados por la autora teniendo en cuenta los siguientes criterios: ser docentes del primer ciclo de básica primaria (grados de primero a tercero), tener a cargo la enseñanza del área de matemáticas y ser acompañados por el Programa Todos a Aprender. El docente de grado segundo de básica primaria orienta todas las áreas y la docente de grado tercero orienta el área de matemáticas. La IE ha definido que los docentes a cargo de los grados de tercero a quinto de básica primaria realicen rotación orientando una o dos áreas, de acuerdo a su perfil de formación o afinidad con el área. En los grados de primero y segundo, no se da la rotación, por tanto cada docente es responsable de orientar todas las áreas. Los docentes que trabajan con grado primero al año siguiente deben continuar con el grupo en grado segundo. La docente que orienta el área de matemáticas en grado tercero lo realiza por gusto a las matemáticas. De acuerdo a lo descrito, se ha considerado la participación de estos dos docentes para el Estudio de Caso de esta investigación, dado que es nuestro interés caracterizar el conocimiento didáctico que tiene el docente en ejercicio del primer ciclo de básica primaria, los docentes seleccionados han participado activamente en los procesos formativos del PTA y han demostrado agrado e interés en los acompañamientos realizados por la tutora sobre el área de matemáticas.

La Tabla 11 presenta la información relacionada con el contexto institucional de la sede escolar.

Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón	
Carácter	Pública
Zona	Urbana
Municipio	Cali
Modelo pedagógico propuesto en el PEI	Social Cognitivo
Modalidad	Técnico Comercial.
Cantidad de Sedes escolares	1 sede de Transición y educación básica primaria
	1 de educación básica secundaria y media técnica.
Sede escolar	Fray José Ignacio Ortiz

Docentes de la sede escolar	24 docentes de los grados de transición a quinto de educación básica primaria.
Participantes	Dos docentes, del grado segundo y tercero, que han sido acompañados por el Programa Todos A Aprender desde el 2013.

Tabla 11. Contextualización y participantes de la investigación.

La institución educativa se encuentra focalizada por el Programa Todos a Aprender (PTA) del Ministerio de Educación Nacional desde el año 2013, bajo el acompañamiento de la autora del presente trabajo, quien ejerce la función de docente tutora. Dentro de las estrategias desarrolladas en el marco del PTA se encuentra el fortalecimiento del Conocimiento Didáctico de los docentes mediante la participación de los docentes en Comunidades de Aprendizaje en las que se desarrollan Laboratorios Pedagógicos y acompañamientos en el aula, como apoyo a los procesos de planeación, desarrollo y reflexión sobre la práctica de aula, conocimiento y apropiación sobre referentes de calidad educativa y materiales con los que el programa dota a la IE. Dichas estrategias están encaminadas al fortalecimiento de las buenas prácticas lo cual se verá reflejado en el mejoramiento de los aprendizajes de los estudiantes.

3.2.3. Instrumentos para la recolección de los datos.

En este apartado se describe el proceso de selección e implementación de los instrumentos utilizados para la recogida de la información. Los criterios de selección y elaboración de los mismos consideraron la estructura conceptual del Conocimiento Didáctico relacionado con la construcción de sentido numérico en situaciones de enseñanza y aprendizaje del SND en el primer ciclo de educación básica primaria, y considerados, de acuerdo con los objetivos del estudio, de tal forma que permitieran caracterizar el conocimiento didáctico (del contenido) base de la formación profesional de los docentes participantes en el proyecto.

Procedimentalmente, inicialmente se tiene un primer encuentro con los docentes participantes, en una sesión de tres horas, en la que se propone una entrevista semiestructurada (ver Apéndice A), que es registrada en audio para su transcripción. El guion de la entrevista se realizó considerando los organizadores definidos en el Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD) el cual permite establecer categorías para formular las preguntas que posibilitan la caracterización de la formación profesional del docente en relación con sus

estudios de pregrado, posgrado, formación continua y sus conocimientos para la organización de la planeación y las actividades que propone para la enseñanza del SND. Las preguntas centrales y auxiliares que estructuran la entrevista consideran las siguientes categorías de estudio: (a) formación de profesores, (b) modelo didáctico-curricular, (c) conocimiento didáctico – análisis de contenido y análisis cognitivo –.

La categoría formación de profesores indaga sobre la formación inicial de cada uno de los docentes participantes en la experimentación, su cualificación en programas o talleres en matemáticas o enseñanza de las matemáticas y la forma como han desarrollado su conocimiento para la enseñanza de las matemáticas en su ejercicio docente.

La categoría modelo didáctico-curricular indaga sobre algunas concepciones de los profesores sobre el desarrollo del pensamiento numérico y sobre la importancia de la enseñanza del SND en básica primaria; sobre los conocimientos referidos al SND que desarrollan en sus estudiantes, el tipo de tareas y actividades que propone para su enseñanza y sobre los documentos en los que se apoya el docente para planear las actividades de enseñanza del SND.

La categoría conocimiento didáctico – análisis de contenido y análisis cognitivo –, indaga sobre los conocimientos que han desarrollado los docentes en su formación y experiencia docente sobre el SND y el sentido numérico, para ello se tuvo en cuenta preguntas referidas a los organizadores del currículo que se han adoptado para el MLAD.

En esta misma entrevista, se propone una segunda parte en la que se presenta a los docentes tres situaciones de aula, que presentan casos de interacciones de un docente con estudiantes en los que se han propuesto actividades relacionadas con el sentido numérico, estas situaciones son usadas como elemento de análisis por parte de los docentes participantes en la experimentación para indagar por el conocimiento sobre el sentido numérico que ellos como profesores poseen sobre la enseñanza del SND (Ver apéndice B). Las situaciones vienen acompañadas de preguntas que se han definido a partir de los organizadores propuestos en el MLAD. Así entonces, las preguntas indagan sobre el uso de materiales, los tipos de representaciones, los conceptos y las nociones que se relacionan en la estructura conceptual, las expectativas de aprendizaje, objetivos de enseñanza, las dificultades y errores

que se pueden presentar en la enseñanza y aprendizaje del SND para construcción de sentido numérico en las situaciones didácticas propuestas.

En un segundo encuentro con los docentes participantes, se les solicitó algunos cuadernos de matemáticas de los estudiantes. Se estableció un dialogo con los docentes que permitió analizar las actividades que ellos proponen para la enseñanza del SND y tomar registro fotográfico de dichas actividades. Esta revisión documental a las propuestas de enseñanza sobre el SND se contrastó con las respuestas dadas en la primera entrevista y el conocimiento didáctico caracterizado en el MLAD.

En un tercer y cuarto encuentro con los docentes, se desarrolló un taller (Ver apéndice D) que les permitió analizar y reflexionar sobre las situaciones y tareas propuestas en una Unidad Didáctica Guía (UDG), dichas situaciones son situaciones propuestas para el aprendizaje que buscan favorecer la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición, denominada “Comprendiendo nuestro Sistema de Numeración Decimal” (ver apéndice C).

El taller compuesto por dos partes, fue desarrollado de manera escrita e individual por los docentes en dos sesiones de cuatro horas. La parte A del taller se encuentra estructurada con preguntas que permiten una reflexión de tipo conceptual, es decir, hace referencia al Análisis Didáctico de Contenido del MLAD que se describió en el capítulo dos del presente trabajo, indagando por aspectos del SND en relación con su desarrollo histórico, los sistemas de representación, la estructura conceptual y los sentidos y modos de uso, propuestas en las situaciones y tareas de la Unidad Didáctica Guía. La parte B se encuentra configurada con preguntas que permiten una reflexión de tipo cognitivo sobre el SND, es decir, indaga por las expectativas y limitaciones de aprendizaje y las oportunidades de enseñanza, descritas en el Análisis Didáctico Cognitivo del MLAD.

La UDG que se diseñó y elaboró en este trabajo de investigación, es el resultado del análisis y síntesis obtenida a partir del diseño e implementación del MLAD, descrito previamente en el marco conceptual. Concebimos una UDG como una propuesta de diseño para el trabajo en el aula que se le propone al maestro bien sea para implementarla en su aula de clases con propósitos de enseñanza y aprendizaje de un contenido u objeto matemático

escolar determinado o para el caso de este trabajo es un instrumento que permite obtener información relevante para el proyecto.

La UDG que se propone en este trabajo está conformada por un conjunto de situaciones y tareas para la consecución de unos objetivos específicos definidos en la tabla 7 del capítulo dos y que se encuentran estrechamente relacionados con las habilidades para la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND y se organiza considerando los conceptos y procedimientos definidos en la estructura conceptual, los sistemas de representación, el desarrollo histórico del contenido matemático escolar y los fenómenos descritos en el Análisis Didáctico de Contenido; al igual que se relaciona con las expectativas de aprendizaje y las oportunidades de enseñanza definidas en el Análisis Didáctico Cognitivo propuestos en el MLAD. La UDG propuesta es coherente con el enfoque funcional del currículo que se ha propuesto en el modelo didáctico - curricular, en el que los conceptos y procedimientos se convierten en herramientas para resolver problemas del entorno, es decir, son aprendizajes con un sentido, para responder a tareas contextualizadas en las que se hace uso de estrategias cognitivas propias, se hace uso de diversas representaciones, se desarrollan capacidades de argumentación y se promueva el trabajo en equipo.

A continuación se describen cada una de las situaciones y tareas propuestas en la UDG (ver apéndice C) que se propone para la reflexión y análisis en el desarrollo del taller. Es preciso aclarar que la UDG no se implementa con estudiantes, esta es considerada un instrumento para la caracterización del CD sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor posicional.

Unidad Didáctica Guía: Comprendiendo nuestro Sistema de Numeración Decimal

Situación 1: Contando y agrupando

Propósito: Desarrollar destrezas en el conteo (de uno en uno, de dos en dos, etc.), en el agrupamiento de cantidades y en la composición y descomposición de un número.

La situación uno está compuesta de tres tareas, que se describen a continuación.

Tarea 1: Contando galletas

Esta tarea se enmarca en un contexto de producción de galletas, presentando al estudiante el caso de un pedido de galletas. La tarea se propone con el fin de identificar el uso de

estrategias para contar una colección de galletas dada. Esta actividad permite al docente identificar en los estudiantes habilidades sobre el emparejamiento para realizar la correspondencia uno a uno, la realización de conteos de 1 en 1, de 2 en 2 y a saltos, el uso de agrupamientos sucesivos de igual base que faciliten el conteo de colecciones, realizar estimación de cantidades previo al conteo y realizar agrupamientos sucesivos en base 12.

Tarea 2: Empacando galletas

Esta tarea se compone de dos partes. La parte A requiere el uso de material concreto para realizar agrupamientos sucesivos en base 10 (usando una caja de diez adaptada de un panal de huevos). A partir de los agrupamientos sucesivos identificar cantidad de grupos y elementos sueltos que conforman la cantidad, simulando la actividad de contar y agrupar en unidades de orden superior, tal como se dio el desarrollo histórico del SND. La actividad propone preguntas orientadoras para estimar cantidades, identificar estrategias de conteo para contar grupos numerosos de elementos, realizar agrupamientos y organizarlos de manera posicional de acuerdo al valor de los grupos. La parte B, propone partir de una representación simbólica del numeral para realizar su representación concreta usando material manipulable. Se proponen preguntas que permitan identificar si el estudiante reconoce del valor que representa cada una de las cifras y su lectura.

Tarea 3: Componiendo con tarjetas de galletas

Esta tarea propone el trabajo con tarjetas de representación gráfica mediante configuraciones puntuales, que permita realizar diversas composiciones de un número. El propósito de esta tarea es promover la composición de números de manera flexible, que va más allá de la composición tradicional en unidades, decenas y centenas. De esta manera se promueve el cálculo numérico flexible construyendo Sentido Numérico.

Situación 2: Comprendiendo el valor posicional

Propósito: Favorecer la comprensión del valor posicional al desarrollar habilidades en el conteo, el agrupamiento en unidades de orden superior y el desagrupamiento en unidades de orden inferior.

Tarea 1: Represento usando material base 10

El desarrollo de esta tarea involucra el uso de material manipulativo, al proponer la representación de un número con material base 10. Al gestionar la actividad el maestro puede simular una cadena de agrupamientos en unidades de orden superior, para ello propone, entregar diez unidades que se intercambien por una decena y cuando se tengan diez decenas se agrupan y se intercambian por una centena. En la tarea se presentan algunas afirmaciones para completar que están orientadas a reconocer el valor de posición en una cantidad dada y la variación del valor de posición al añadir más unidades o decenas según sea el caso, es decir, la magnitud relativa del número. En la tarea también se propone el uso de otros materiales para trabajar el SND como es el uso de billetes didácticos para representar cantidades.

Tarea 2: Explorando composiciones

Esta tarea tiene como propósito trabajar composiciones numéricas no canónicas y trabajar múltiples composiciones de una misma cantidad en representaciones gráficas y simbólicas. Esta tarea se compone de dos partes. El desarrollo de la parte A de esta tarea involucra el uso de tarjetas con representaciones gráficas de bloques base 10. Estas representaciones presentan cantidades como: 12 unidades, 10 decenas, 11 unidades, 15 decenas, etc., con ellas los estudiantes determinan el valor de cada tarjeta y con tres de ellas compongan un número entre 120 y 150. Como se puede observar en las imágenes de las tarjetas (Ver Apéndice C) se proponen otras cantidades diferentes a las que por lo general los libros de texto o los docentes proponen de manera convencional como lo es el trabajo con cantidades de 1 a 9 unidades o de 1 a 9 decenas. La parte B de la tarea propone un juego en el que se ha dispuesto cantidades en decenas, centenas y unidades (13 decenas, 12 unidades, 14 decenas), y a partir de 5 lanzamientos como el juego del sapo, conformar cantidades con los puntajes obtenidos y determinar la equivalencia del valor en el que cae la tapa en cada lanzamiento, por último totalizar para identificar el número compuesto. Este tipo de tareas busca fortalecer las composiciones y descomposiciones no canónicas, ya que los estudiantes atribuyen el significado a las unidades, decenas y centenas en términos de orden, es decir, del lugar que ocupan las cifras de izquierda a derecha y no por el significado de sus agrupamientos, ya que por lo general las actividades propuestas resultan siendo un ejercicio mecánico en los que se ubican dígitos en lugares de acuerdo a las centenas, decenas y unidades.

Situación 3: Otras formas de calcular

Propósito: Comprender el desarrollo estrategias o procedimientos diferentes a los algoritmos convencionales para resolver cálculos numéricos aprovechando las propiedades de los números y las operaciones.

Tarea 1: Usando estrategias diferentes

La tarea propuesta, presenta una situación para ser analizada por los estudiantes para que estos describan en qué consisten las estrategias desarrolladas para resolver los cálculos en cada caso dado. El primer caso presenta dos estrategias para resolver una situación aditiva de suma, para ello se recomponen las cantidades de los sumandos, trasformando uno de los sumandos redondeando a la decena más cercana y se añade el excedente en el otro sumando y luego se realiza el cálculo. El segundo caso presenta dos estrategias para resolver una resta. En la primera estrategia se resta la misma cantidad tanto al minuendo y al sustraendo buscando convertir el sustraendo a una decena más cercana y luego desarrollar la resta fácilmente. En la segunda estrategia se adiciona la misma cantidad tanto al minuendo y al sustraendo buscando convertir el sustraendo a una decena más cercana y luego se efectúa la resta. Seguidamente se propone al estudiante que usando el modelo de las estrategias dadas en el caso resuelvan algunos cálculos.

Esta tarea promueve el uso de estrategias informales e inventadas que permitan la realización de cálculos flexibles haciendo uso de hechos numéricos⁶, reconozcan propiedades de los números y las operaciones.

Tarea 2: Resolviendo problemas usando otras estrategias

La tarea presenta la solución de un problema aditivo de transformación. En la estrategia de solución se usó una recta numérica en la que se representa la cantidad empacada y la cantidad que se requiere empacar y dos cantidades de apoyo dando saltos a la centena y decena más cercana. Se pide a los estudiantes identificar y explicar cuál fue el paso a paso seguido para resolver el problema. Seguidamente se propone al estudiante que usando el modelo de la recta numérica resuelvan dos situaciones aditivas propuestas.

⁶ Los hechos numéricos hace referencia a procesos de memorización de relaciones entre los números y las operaciones, a los que el estudiante puede recurrir cuando quiera. Por ejemplo: memorizar que $5+2=7$, memorizar los dobles de un número, descomposiciones aditivas de 10 y de 5, complementos con decenas y centenas u otras unidades de orden.

Esta tarea promueve el uso de estrategias informales e inventadas que permitan la realización de cálculos más flexibles haciendo uso de hechos numéricos, reconozcan propiedades de los números y las operaciones. Este tipo de estrategias para el desarrollo de algoritmos de cálculo están basados en las características del SND.

Situación 4: La tabla numérica y el Sistema de Numeración Decimal

Propósito: Identificar principios, regularidades y la organización del sistema de numeración reconociendo la estructura de la serie numérica escrita.

La tarea propone un juego para resolver los retos registrados en unas tarjetas, teniendo como apoyo la tabla numérica o panel numérico. El estudiante que resuelva más retos será el ganador. El uso de la tabla numérica permite que los estudiantes puedan identificar, visualizar y memorizar varias propiedades del SND, reconocer las particularidades sobre la escritura de nuestro SND y comprender las convenciones de la numeración escrita, para codificar y decodificar la escritura numérica. Por ejemplo: en la numeración escrita pueden identificar regularidades como que el primer número corresponde a los “venti” “trenti” “seetenti” y por eso son mayores de 2, 3 y 7. Al comparar números de diferente cantidad de cifras pueden construir ideas acerca de su escritura como que los “diecis”, “los venitis”, “treintis”, etc. van con dos cifras, los números con cientos van con tres, los miles van con cuatro, así realizan intentos de modificación en la escritura hasta lograr reducir la cantidad de cifras. El panel numérico permite identificar regularidades al hacer la lectura de columnas de manera vertical y de manera horizontal, identificando familias numéricas de colecciones de diez, establecer relaciones de orden entre números, construir series progresivas y regresivas, apreciar distancias entre los números. Por ejemplo: los estudiantes conocen los números “nudo” 20, 30, 100, 200 y a partir de ellos acceden a la escritura convencional de los números que están en los intervalos de los nudos.

A continuación se presenta la relación de los objetivos específicos propuestos en el Análisis Cognitivo en el organizador del currículo expectativas de aprendizaje.

Objetivos específicos sobre el Sistema de Numeración Decimal	Situaciones y tareas relacionadas con los OE							
	Situación 1			Situación 2		Situación 3		Situación 4
	T1	T2	T3	T1	T2	T1	T2	T1
OE1. Componer y descomponer números	X	X	X	X	X	X	X	

de manera flexible a partir de la comprensión de agrupamiento.								
OE2. Utilizar y reconocer equivalencias entre diferentes representaciones, manipulativas, pictóricas y simbólicas que favorezcan conexiones entre los modos de representación de un número.	X	X	X	X	X	X	X	X
OE3. Comparar y ordenar números atendiendo al reconocimiento de la magnitud relativa de los números.				X	X			X
OE4. Razonar y estimar la magnitud absoluta del número.	X	X	X	X		X		X
OE5. Usar puntos de referencia como estrategia de pensamiento, para estimar una respuesta numérica.	X	X	X	X	X	X	X	X
OE6. Relacionar la numeración, las operaciones y los símbolos a través de diferentes representaciones numéricas.	X	X	X	X	X		X	X
OE7. Reconocer los efectos de modificar las cantidades numéricas al realizar operaciones aritméticas sobre estas.				X	X	X	X	X
OE8. Utilizar estrategias de cálculo mental a partir de procedimientos inventados en los que se relacionen las propiedades de los números y las operaciones.			X	X	X	X	X	X

Tabla 12. Relación entre los objetivos específicos de las expectativas de aprendizaje y las Situaciones de la Unidad Didáctica Guía

El procesamiento de la información recogida en este trabajo, emplea la triangulación de métodos, para ello se coteja la información obtenida a través de técnicas como, la observación, la entrevista, la revisión documental; que al combinarlas logra complementar información sobre los desarrollos en torno al conocimiento didáctico del profesor para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND. El cotejo de la información se realiza desde los distintos tipos de instrumentos usados en la experimentación, tales como, la entrevista con grabación de audio, las observaciones a los registros de los estudiantes en sus cuadernos y las respuestas del taller que permitió el análisis de la UDG por parte de los docentes. Los datos que se triangulan son los proporcionados en los instrumentos aplicados, dichos instrumentos se estructuraron teniendo en cuenta las categorías del MLAD propuesto en este trabajo. A continuación, se presenta la figura en la que se representa la idea de triangulación de la información, a manera de ejemplo entre una de las categorías que estructuran el estudio y los instrumentos usados en la experimentación

De esta manera, se podrá caracterizar el conocimiento didáctico que poseen los docentes sobre cada organizador del MLAD sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor posicional.

Capítulo 4: Análisis y reflexiones sobre el conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del sistema de numeración decimal

En este capítulo se presentan los resultados del análisis de la información seleccionada en relación con la observación y entrevista en el estudio de caso, cuyo objetivo central (referido a los dos objetivos específicos de la investigación) consistió en caracterizar el Conocimiento Didáctico (CD) que los docentes, del primer ciclo de Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Técnico Comercial Hernando Navia Varón, ponen de manifiesto al analizar las propuestas educativas relacionadas con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor posicional.

Las reflexiones generadas por los docentes en los encuentros de análisis de las situaciones propuestas y el taller de análisis de la Unidad Didáctica Guía (UDG), permiten identificar y caracterizar algunos elementos básicos o fundamentales del conocimiento didáctico que consideramos se deben tener en cuenta en la formación de los profesores de básica primaria, en relación con los procesos de enseñanza para la construcción de sentido numérico sobre el SND. Esta caracterización se ha realizado tomando como referencia el conocimiento didáctico considerado en el Modelo Local (teórico) de Análisis Didáctico (MLAD) desarrollado en el segundo capítulo (lo cual corresponde con el objetivo específico (O.1) de este trabajo.

El análisis de la información se realizó a partir de las respuestas dadas a las preguntas formuladas en cada uno de los instrumentos utilizados y presentados en el capítulo anterior. Estas preguntas fueron estructuradas de acuerdo con las categorías planteadas en el marco conceptual de esta investigación (formación de profesores, modelo didáctico - curricular, y modelo local de análisis didáctico). Teniendo en cuenta esto, los resultados ocasionados en las categorías de análisis que se presentan a continuación dan cuenta del alcance del segundo objetivo específico de este trabajo (O.2) de este trabajo y describen en los siguientes apartados.

4.1 Caracterización de la formación de los profesores en el estudio de caso

En la entrevista inicial (ver apéndice A) realizada a los docentes participantes, en relación con la categoría formación de profesores, se indaga por su formación en pregrado y posgrado, sobre los cursos recibidos que tengan relación con las matemáticas o la enseñanza de las matemáticas, el tipo de materiales como textos o guías usadas en los cursos de formación y la participación en programas de cualificación de docentes, se identifica como un rasgo común que ambos docentes cuentan con licenciatura en otras áreas de formación diferentes a la educación matemática. Uno de los docentes cuenta con formación en pregrado como Psicólogo y Licenciado en Literatura, ambos pregrados realizados en la Universidad del Valle y Maestría en Informática Educativa en la Universidad Libre, se encuentra nombrado hace 12 años en el sector oficial como docente de básica primaria. La otra docente participante en el estudio, es Normalista Bachiller y es Licenciada en Educación Básica Primaria de la Universidad del Quindío con Especialización en Lúdica y Recreación de la Universidad Los Libertadores, se encuentra nombrada hace 26 años en el sector oficial como docente de básica primaria.

Al indagar si en su formación de pregrado participaron de cursos o talleres sobre la enseñanza de las matemáticas, el docente con formación en psicología y literatura mencionó que en la licenciatura de literatura no tuvo cursos al respecto por su enfoque en lenguaje, pero que en sus estudios de psicología sí tuvo cursos de matemáticas, uno centrado en análisis estadístico y el otro en habilidades básicas en matemáticas, pero no propiamente en la enseñanza de las matemáticas. El docente describe que los cursos vistos relacionados con matemáticas, se orientaban de manera magistral, centrados en contenidos y no se contaba con un texto específico de matemáticas para el curso, les hacían entrega de fotocopias de material elaborado por el docente que dirigía el curso con la información propia de la clase. La docente normalista con licenciatura en educación básica primaria tuvo formación general en todas las áreas de enseñanza, contó con un curso muy general en pregrado sobre didáctica de las matemáticas que abordó aspectos muy generales y con un enfoque muy tradicional que no tenía nada que ver sobre la manera como se enseñan las matemáticas hoy en día, por ello, considera muy desactualizado lo que se trabajó allí. Con relación a sus estudios de posgrado, refieren que en los cursos recibidos no se contó con formación sobre la enseñanza de las

matemáticas. La docente considera que su formación para la enseñanza de las matemáticas se ha fortalecido desde la formación recibida por parte del programa PTA.

Los docentes hacen referencia que sus conocimientos (didácticos) para la enseñanza de las matemáticas, los han obtenido a través de su experiencia laboral y se ha considerado para ello su propia experiencia de aprendizaje de las matemáticas y el uso de los materiales educativos con los que han podido contar como los libros de texto.

Teniendo en cuenta lo referido por los docentes en sus respuestas, se evidencia la necesidad de fortalecer la formación de los docentes en ejercicio que son formados en otras áreas del conocimiento, de tal manera que se desarrollen conocimientos didácticos que son necesarios para su competencia profesional en la enseñanza de las matemáticas, contando con unas herramientas conceptuales y procedimentales que en su conjunto permitan fortalecer sus capacidades para la planificación de los contenidos matemáticos escolares y su evaluación, la selección de tareas, materiales y recursos educativos, el diseño de propuestas curriculares y el desarrollo metodológico de la práctica para que la formación escolar promueva la comprensión y construcción de sentido de las matemáticas.

4.2 Caracterización del modelo didáctico - curricular

La práctica y el conocimiento del profesor dan cuenta de un modelo didáctico-curricular que emplea para enseñar los contenidos escolares de las matemáticas, es decir, las maneras como el profesor concibe la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como el tipo de conocimiento matemático que valora en sus estudiantes. Estas concepciones se ven reflejadas en sus actuaciones y decisiones para la planificación de los contenidos matemáticos escolares, la selección de los materiales, la concepción sobre la evaluación, algunas ideas de cómo se aprende y se enseñan las matemáticas escolares. Es pues un “modelo” construido y basado en las propias prácticas docentes y curriculares, y sin una fundamentación teórica más allá de los referentes curriculares normativos.

En contraste, en este trabajo el modelo didáctico-curricular de referencia, es construido y fundamentado de acuerdo con principios teóricos de la Didáctica de las Matemáticas, desde las perspectivas sociocultural, de la fenomenología didáctica y el componente funcional del currículo que promueva una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con sentido.

Teniendo en cuenta la descripción del modelo didáctico-curricular que se ha propuesto en este trabajo como referente teórico, se identifican las siguientes características de los docentes participantes (se denominará docente A al profesor de grado segundo y docente B a la profesora de grado tercero) en la investigación:

El conocimiento matemático escolar es entendido por los docentes participantes desde un enfoque instrumental que se centra en dominar y usar destrezas y conceptos básicos a manera de herramientas, es decir, el aprendizaje de definiciones, conceptos de memoria y rutinas operatorias de manera mecánica, y las expectativas de aprendizaje se relacionan con contenidos matemáticos específicos. Muestra de esta concepción se identifica en respuestas a interrogantes (ver apéndice A) como los siguientes:

Investigadora – *¿Qué es lo más importante que un estudiante debe desarrollar sobre el pensamiento numérico en el primer ciclo de Básica Primaria?*

Docente A – *Lo que yo he podido ver con los libros que trabajamos, están muy centrados en las operaciones básicas, primero diferenciar mucho lo que es la clasificación de unidades, decenas y centenas, y también cuando hay que agrupar o desagrupar. Trabajar con las operaciones básicas enfocado en la resolución de problemas.* La docente B – *...lo más importante que un estudiante debe aprender es el Sistema de Numeración Decimal, que este sistema es de base diez, como usar los números, ver el valor posicional, porque de allí parten los otros temas... además de que es muy importante en la comprensión lectora, el análisis y solución de problemas.*

Investigadora – *¿Qué conocimientos del SND identifica usted han desarrollado sus estudiantes hasta el momento?*

Docente A – *Mis estudiantes a nivel de escritura, están bien. Reconocen los números, por lo menos los números hasta el mil. Saben diferenciar muy bien las unidades, decenas y centenas, y estamos iniciando con las operaciones básicas.* La docente B – *este año los estudiantes que llegaron a tercero conocen hasta las decenas de mil y estoy haciendo refuerzo sobre ese tema porque aún hay muchos estudiantes a los que se les dificulta escribir cantidades de cinco cifras, para los estudiantes es más difícil la escritura que la lectura de números.*

Las anteriores respuestas suponen un enfoque del currículo a partir de finalidades formativas de carácter instrumental sobre los conocimientos previos que los estudiantes han desarrollado sobre el SND. Para los docentes, un criterio de avance sobre el dominio del sistema de numeración se ve reflejado en el desarrollo de destrezas sobre la lectura y escritura de números, y el conocimiento de números hasta determinadas unidades de orden o cantidad de cifras como ellos lo reconocen.

Así mismo, durante la entrevista el docente A menciona: *... se quiere que un estudiante pase rápidamente de un tema a otro y además uno ve niños que llegan desde la casa, los papás y las mamás como saben que se ve en tal grado entonces se encargan de prepararlos, entonces hay padres que me dicen profe lleguemos rapidito que mi niño ya se sabe las tablas y nosotros apenas vamos por sustracción, ... hay una exigencia de la misma comunidad. Hay una presión exterior que hace que uno avance más rápido y es solo en el área de matemáticas, en ninguna otra área se exige ese tipo de cosas y qué curioso, con otras áreas los papás no están tan pendientes de esos avances. Y uno lo ve hasta en las reuniones sociales, mi hijo ya sabe sumar, ya resta y es un motivo de orgullo.*

La anterior afirmación permite reconocer una posible tendencia de tradición cultural sobre la forma como aprendieron los padres de familia y cuidadores y sobre los contenidos y la secuencialidad de estos, como se hacía en épocas anteriores y de alguna manera se le solicita al docente seguir esa misma tendencia curricular que aún permanece en el tiempo.

Así entonces, se cuenta con la herencia de un currículo centrado en el desarrollo de contenidos específicos, en el que el dominio de procedimientos y algoritmos útiles para resolver algunas situaciones propuestas para la enseñanza. Además, el profesor siente que los padres de familia ejercen una presión para el avance del aprendizaje de las matemáticas dando prioridad al desarrollo de objetivos específicos que los estudiantes deben mecanizar para avanzar con rapidez en los contenidos curriculares de cada grado escolar. De esta manera, existen algunas creencias y concepciones sobre los contenidos y las formas de aprender por parte de los padres de familia que influyen en los aprendizajes de los estudiantes y en las demandas de la enseñanza por parte de los profesores.

De igual manera, durante la entrevista se reflexiona sobre el modelo didáctico - curricular con cuestiones como:

Investigadora – *¿En qué documentos se apoya para planear las actividades de enseñanza sobre el Sistema de Numeración Decimal?*

Docente A – *La planeación la hicimos a partir del material propuesto por el Ministerio, los referentes de calidad educativa, los estándares, los lineamientos, los DBA, estamos trabajando mucho los DBA y luego pasamos a buscar libros que nos permitan trabajar esas propuestas desde el Ministerio, además del material que propone el PTA (Programa Todos a Aprender) encontramos apoyo en otros tipos de texto.* La docente B – *Me apoyo en las actividades que hemos trabajado con PTA, del material que nos han traído que tiene las fichas de base diez, las fichas de números.*

Los docentes en sus respuestas reconocen la importancia de tener en cuenta los referentes curriculares para la planeación de sus actividades de enseñanza, los materiales manipulables y libros de texto entregados en el marco del PTA. En la experiencia de acompañamiento que realiza la tutora, se reconoce como estos elementos se han ido apropiando por parte de los profesores de tal manera que se han empezado a realizar ajustes a los planes de aula, se ha avanzado en la comprensión sobre el uso de algunos materiales, como el material base diez, de tal manera que se han ido incorporando en las propuestas de enseñanza de los docentes acompañados.

Al indagar por el tipo de ejercicios sobre el SND que traen los textos en los que se apoya

Docente A – *los libros traen muchos ejercicios de conteo, prácticamente todo se va mezclando y confluye en la resolución de problemas. Primero se trabaja con las operaciones matemáticas, entonces se llega a situaciones muy prácticas y allí me gusta el libro de Santillana, porque trae muchas situaciones del contexto de los niños, entonces plantea muchos problemas dentro del aula, de agrupación de estudiantes, competencias deportivas, entonces aparecen allí hacen un análisis de los datos que hay de puntaje y todo eso. Entonces eso sirve como excusa para que el niño se vaya metiendo en el cuento y entonces de sumar o restar y así sucesivamente.* La docente B – *Yo uso con ellos ejemplos de la vida cotidiana como lo que ellos traen para la lonchera, el dinero que traen para comprar en la tienda, si por ejemplo van a comprar un juguete de determinado valor cuántas monedas o billetes necesitan.*

Las anteriores respuestas permiten reconocer que para los docentes es importante proponer a los estudiantes situaciones contextualizadas sobre la cotidianidad para proponer las actividades de aula. Sin embargo, es necesaria la reflexión de los docentes sobre el tipo de situaciones que se proponen en las que se retomen los saberes que desde edades tempranas los estudiantes han construido sobre el SND como objeto matemático construido social y culturalmente, de tal manera que promueva el desarrollo de estrategias, habilidades que les permitan acceder a los conocimientos conceptuales y procedimentales en relación con la comprensión del SND como lo es el desarrollo de habilidades en el conteo, el agrupamiento sucesivo y el valor de posición que permitan la construcción de sentido numérico (MEN,1998; Sowder, 1992b) y la comprensión del SND como un sistema de representación con unos principios que lo organizan, unas propiedades y regularidades tanto en la numeración hablada y escrita y unas reglas para la producción de e interpretación de las escrituras numéricas (Lerner y Sadowsky, 1994). También, es importante destacar que el libro de texto es uno de los principales referentes para los docentes definir el tipo de contextos y situaciones que se proponen en las actividades de enseñanza y aprendizaje, así entonces, muchas de las situaciones que estos textos proponen carecen de una contextualización sociocultural que considere aspectos del contexto local, del desarrollo histórico y cultural del mismo del objeto matemático.

Al reflexionar con los docentes sobre el tipo de actividades o tareas que estos proponen para enseñar el SND en el primer ciclo de educación básica primaria, se encontraron las siguientes afirmaciones.

Docente A *—...el reconocimiento de los números, de la estructura de los números y reforzando las operaciones básicas. Lectura y escritura de números y de allí arrancamos con la adición. Me gusta la metodología de ahora que los van llevando a un paso a paso, primero se agrupan las unidades, agrupando decenas, cosa que antes no se veía se hacía directamente la suma.* La docente B *– les entrego fichas de números (haciendo referencia a los discos de números), las barritas base diez para que trabajen en grupos y escriban los números que forman, les doy un numero para que lo descompongan de acuerdo a la posición y al valor posicional, ellos dicen por ejemplo cuantas unidades hay, la posición que tiene el número en las unidades, decenas, centenas y el valor que tiene de acuerdo a la posición que*

ocupa, les trabajo mucho el ábaco ellos cuentan las pepitas y escriben a partir del ábaco el número que se forma, hacen una representación gráfica del ábaco.

En la primera respuesta se identifica la lectura y la escritura de números como una de las habilidades más importantes en la enseñanza y aprendizaje del SND y se resalta de nuevo la importancia de aprender el sistema para el desarrollo de operaciones. El docente considera como novedoso en las propuestas de los libros de textos aprender el agrupamiento sucesivo para poder realizar el algoritmo vertical de la suma y la resta, reconociendo que esto antes no se realizaba de esta manera. Por su parte, la respuesta de la docente B resalta la importancia del uso de material manipulable que permita la representación concreta y pictórica de cantidades numéricas, presentar descomposiciones canónicas en unidades, decenas y centenas de un número y se enfatiza en el valor posicional de las cifras de cada número. También identifica una concepción del aprendizaje como una actividad de labor conjunta (Radford, 2014) al realizar el trabajo con el material manipulable en grupos de estudiantes, permitiendo así a partir de las interacciones y las discusiones entre pares el desarrollo de comprensiones y estrategias matemáticas.

Las ideas brindadas, por los docentes participantes de este estudio de caso, permiten identificar la necesidad de generar programas de formación para la enseñanza de las matemáticas con un enfoque sociocultural que les permita una toma de conciencia sobre los contenidos matemáticos escolares como conocimientos culturales, sociales e históricos, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como una actividad de labor conjunta que a partir de las interacciones sociales produzca subjetividades que permita la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos escolares que puedan ser tenidos en cuenta en la propuestas escolares. La formación también debe permitir el desarrollo de unos conocimientos del docente sobre los fenómenos que dotan de sentido y significado la comprensión del SND como lo es el conteo, el agrupamiento sucesivo y el valor posicional, de tal manera que las situaciones que se proponen tengan en cuenta su desarrollo histórico, su construcción como objeto matemático, social y cultural, generando un sentido funcional de los conocimientos matemáticos relacionados con el SND.

4.3. Modelo Local de Análisis Didáctico

A continuación se describen las reflexiones de los docentes participantes en la investigación, que permiten el análisis y caracterización del conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND, a partir de los organizadores del currículo propuestos en los análisis didácticos de contenido y cognitivo en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición.

4.3.1 Análisis didáctico de contenido en torno al Sistema de Numeración Decimal

Para el desarrollo del análisis didáctico de contenido, se ha configurado el siguiente sistema (modelo local) de organizadores del currículo: análisis histórico, análisis de los sentidos y modos de uso, análisis de los sistemas de representación y análisis de la estructura conceptual, que han permitido la caracterización de los conocimientos didácticos para el docente en relación con el SND, sus sentidos y significados como contenido matemático escolar. Dicha caracterización permite describir los conocimientos de los docentes participantes en la investigación a partir del análisis de las afirmaciones proporcionadas en la recolección de la información.

4.3.1.1 Análisis didáctico histórico.

Al preguntar a los docentes si tienen algún conocimiento sobre la historia del SND (ver apéndice A), El docente A responde – *que no conoce sobre la historia del SND*. Mientras que la docente B responde – *no tengo conocimiento sobre la historia del SND en mi formación no he recibido información al respecto*.

A través de estas respuestas se identifica una posible falta de conciencia de los profesores en relación con los fenómenos y situaciones propuestas desde los diversos materiales y programas de formación en los que participan sobre la enseñanza de las matemáticas. Así entonces, las actividades de enseñanza que proponen sobre el conteo, los agrupamientos sucesivos, la noción de sucesor, el principio de la posición, entre otros, se plantean de manera intuitiva, sin reconocer que están asociados a algunos desarrollos históricos y culturales del SND. A continuación, se presentan las ilustraciones 1 y 2 de actividades relacionadas con la noción de sucesor, antecesor y el principio de agrupamiento, observadas en los registros de los estudiantes.

4. Escribe números mayores que 815 y menores que 826.
816 817 818 819 820 821 822 823 824 825

5. Escribe números menores que 679 y mayores que 668.
678 677 676 675 674 673 672 671 670 669

6. • Ordena de menor a mayor. • Ordena de mayor a menor.

736 958 649 146 359 257

649 < 736 < 958 359 > 257 > 146

7. Escribe los números que faltan.

Número anterior	Número	Número siguiente
328	329	330
855	856	857
246	247	248
763	764	765

Número anterior	Número	Número siguiente
899	900	901
137	138	139
479	415	416
582	583	584

8. Completa las series.

Suma 3 746 → 749 → 752 → 755 → 759

Resta 5 340 → 335 → 330 → 325 → 320

Ilustración 1. Algunas actividades relacionadas con el orden de los números y la idea de sucesor y antecesor

Sumas reagrupando con bloques

C d u
1 1 7

+ 124
241

C d u
2 3 5

+ 148
385

Ilustración 2. Actividad relacionada con el principio de agrupamiento

Al preguntar en la entrevista (ver apéndice A) ¿Qué situaciones relacionadas con el valor posicional propone para la enseñanza del SND? El docente A – *primero el trabajo con el ábaco y como vi que ellos lo manejaban muy bien, entonces decidí pasar a que ellos mismos lo representaran de manera pictórica, los ponía a dibujar o les daba la figura que representaba el valor de posición y ellos con color representaban los números, coloreaban según la cantidad que yo les daba, tienen tantas fichas distribúyanlas en esas varitas cuantas se ubican en las unidades, las decenas y las centenas con distintos colores y vi que lo aprendieron fácilmente, eso me permitió pasar al tema siguiente que entonces comenzamos la lectura y escritura de números.* La docente B – *Para trabajar el agrupamiento con material concreto con semillas palitos, fichas.*

Estas repuestas permiten reconocer en los docentes que de manera inconsciente proponen actividades tratando de modelar algunas situaciones del desarrollo histórico del SND, tales como, el uso de materiales manipulativos como bloques de Dienes, ábacos, dinero, simulando el uso de los primeros intermediarios materiales en la historia, para dar paso a la necesidad de uso de simbolizaciones orales y escritas. El uso de los materiales también tiene como

finalidad reconocer algunas características como el agrupamiento, el valor de posición, el principio de base y el principio aditivo.

Al preguntar a los docentes por las características del SND que tiene en cuenta para la enseñanza de este contenido escolar y qué características reconocen en las situaciones propuestas en la UDG (Ver apéndice D), se identificaron las siguientes respuestas:

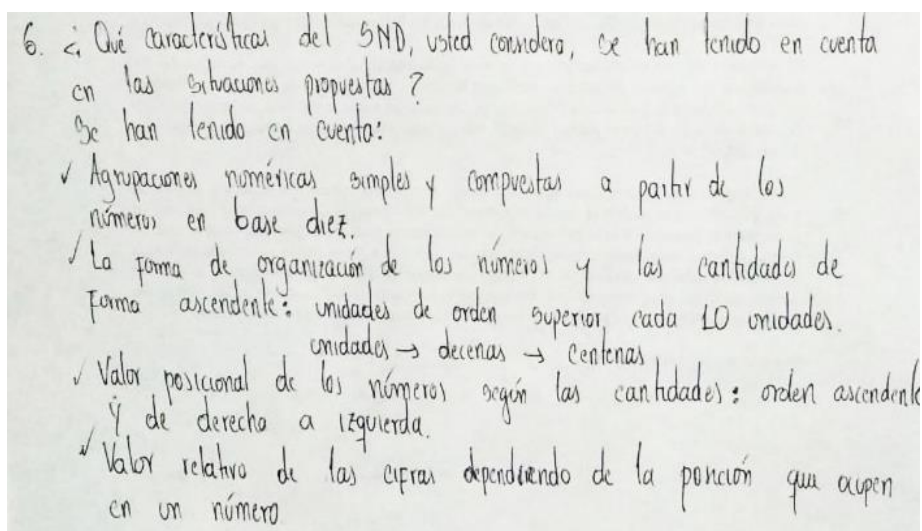


Ilustración 3. Respuesta del docente A sobre las características del SND

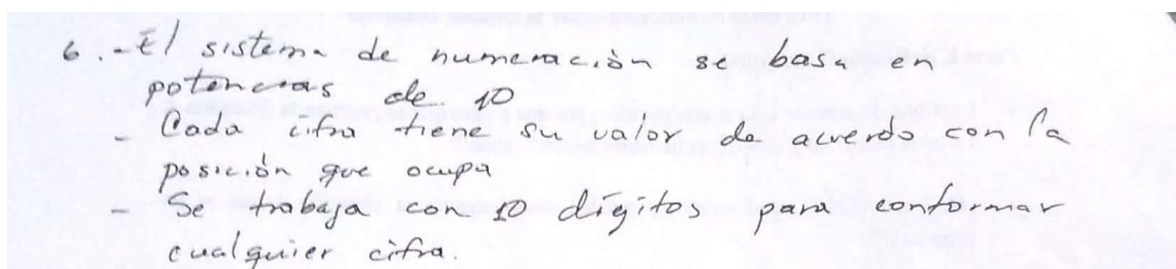


Ilustración 4. Respuesta del docente B sobre las características del SND

Las anteriores respuestas evidencian que los docentes consideran fundamentales para los grados en los que orientan, actividades de enseñanza y aprendizaje centradas en el principio de base diez del SND, el principio de la posición, el principio de agrupamiento. Sin embargo, algunas actividades propuestas para la enseñanza y el aprendizaje no se mencionan o reconocen en los registros observados, posiblemente por estar asociadas a actividades que se desarrollan en grados anteriores como transición y primero, algunas de ellas se relacionan con: la acción de emparejamiento para determinar la colección puede tener más elementos; el conteo uno a uno, de dos en dos, de diez en diez, a saltos hacia adelante y hacia atrás,

claves para la destreza de agrupamiento; la asignación del cardinal para dar cuenta de la pluralidad en una colección, es decir, cuántos hay; reconociendo del número como ordinal para atribuir a cada número un símbolo o palabra al último elemento contado;

De acuerdo con los análisis de esta categoría, es preciso reconocer, que comprender la historia del SND le permite al docente entender los fenómenos que hicieron parte en su desarrollo para considerarlos en la planificación de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Así entonces, el maestro requiere comprender, conocer y ser más consiente de los fenómenos que dieron origen al SND, tales como, el *conteo* para proponer situaciones que tengan en cuenta destrezas para contar como la correspondencia biunívoca o el emparejamiento, el *recuento* como destreza para contar una colección de elementos sin importar el orden para enumerarlos, el *principio de recurrencia* que da origen a la noción de sucesor, identificar el aspecto cardinal y ordinal del número, la historia de la *simbolización* de los números que dio origen a los principios de la base, agrupamiento y valor de posición del SND como sistema de representación de los números. Tener en cuenta los fenómenos anteriormente descritos, permite que la planeación de las actividades de enseñanza y aprendizaje del SND posibilita aproximar a los estudiante a la construcción de sentido y significado para su comprensión a través de las prácticas sociales sobre las que se hace una toma de conciencia sobre sus modos de uso.

4.3.1.2 Análisis didáctico de los sistemas de representación.

Al reflexionar con los docentes sobre el tipo de representaciones en las que apoya sus propuestas de enseñanza sobre el SND se encontraron las siguientes afirmaciones.

Docente A – *Me he enfatizado en representaciones gráficas, lo he hecho con el interés de poder avanzar que se vayan cumpliendo los objetivos que uno tiene planeado.* La docente B – *La representación gráfica del ábaco, la tabla de valor posicional para que representen las cantidades, descomponer los números entonces es una representación simbólica de los números.* Estas respuestas evidencian que los docentes reconocen como una de las principales representaciones para la enseñanza la representación gráfica de los materiales que permiten comprender algunas características del SND, por tanto, hacen uso de gráficas de ábacos y de materiales base diez como se presenta en las ilustraciones 5, 6 y 7 de los registros de los estudiantes.

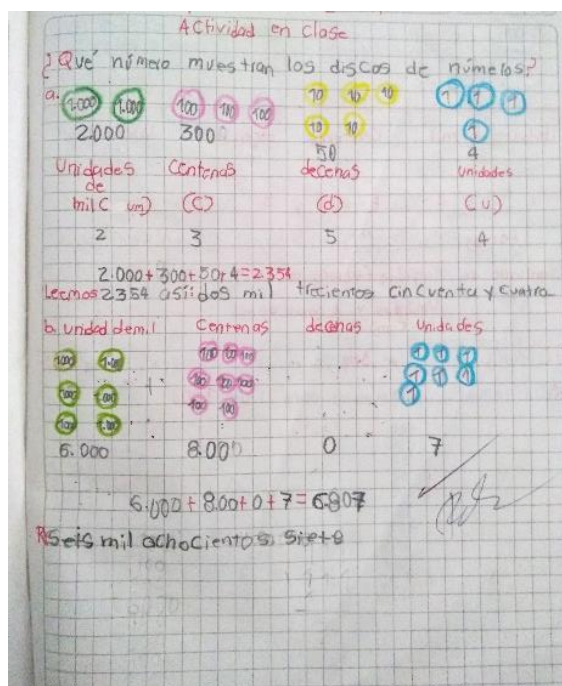


Ilustración 5. Representación gráfica de los discos de números.

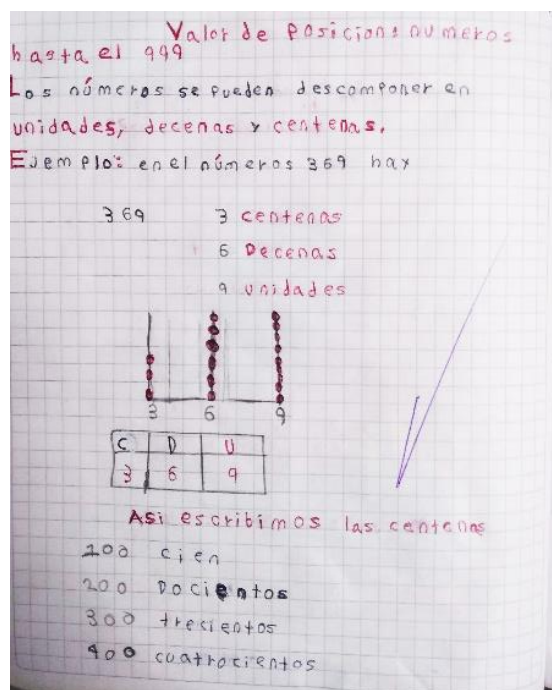


Ilustración 6. Representación gráfica del ábaco.

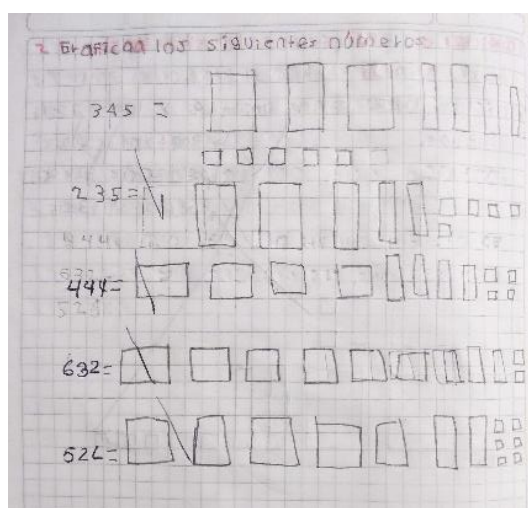


Ilustración 7. Representación gráfica de material base 10.

Cuando se indagó en el taller (ver apéndice D) de análisis de la Unidad Didáctica Guía por los tipos de representaciones que reconocen en la tarea 1 de la situación 1 y cómo se articulan los tipos de representación entre sí, se identifican respuestas como las que se presentan en las ilustraciones 8 y 9.

3. - Manipulación de material concreto
- Algoritmo
4. La representación ^{gráfica} sirve para que el niño vaya haciendo la respectiva correspondencia con la representación ^{simbólica}

Ilustración 8. Respuesta del docente B a la pregunta sobre las representaciones.

b. En la tarea 1 de la situación 1, se proponen dos tipos de representación: simbólico y gráfico (apoyado en imágenes y configuraciones de tablas con puntos)
¿Qué otros tipos de representaciones pueden complementar esta tarea?

R// Se podría complementar, tal vez, utilizando algún tipo de representación concreta; de tal manera que se pueda manipular cada objeto (galleta) y agruparlas como si fuera una actividad vivencial. Por ejemplo: Entregar una hoja con las imágenes de las galletas para recortar; o también usar fichas, granos o botones que simulen galletas y algunos recipientes pequeños para agruparlas según la cantidad que se requiera.

A. ¿Cómo se relacionan las representaciones gráficas con la representación simbólica que se ha propuesto en la tarea 1 de la situación 1?

R// Me parece interesante lo que se plantea en la tarea para desarrollar el proceso de construcción del aprendizaje en matemáticas, partiendo desde formas de representación pictórica hacia formas de representación gráfica hasta llegar a formas de representación simbólicas. Me gusta la idea de contar cantidades de objetos a partir de la agrupación en cantidades menores y representadas de forma más organizada para identificar grupos de 12 (docenas) y algunas unidades sueltas.

Esta forma práctica de aprendizaje me parece válida, aunque sigo prefiriendo maneras de representación más vivenciales y con material concreto, por lo menos mientras se consolidan ciertos procesos en los grados escolares iniciales.

Ilustración 9. Respuestas del docente A a la pregunta sobre las representaciones.

En las respuestas a las preguntas tres y cuatro del taller de análisis de la Unidad Didáctica Guía se observa que los docentes identifican en la tarea propuesta representaciones de tipo gráfico y simbólico. También reconocen la importancia de las transiciones entre

representaciones, como lo es partir de la representación gráfica o pictórica y realizar la conexión con representaciones de tipo simbólico. Esto se puede ratificar en los registros de los estudiantes presentados en las ilustraciones 5, 6 y 7. El docente A resalta la importancia de usar representaciones de tipo concreto (manipulativo), en tanto la manipulación de material permite recrear experiencias prácticas de la cotidianidad y facilita los aprendizajes en los primeros grados escolares.

De acuerdo con lo descrito en el análisis de los sistemas de representación, la representación de tipo *simbólica* se relaciona con “los sistemas estructurados de grafismos que se usan para expresar números y sus reglas internas” (Lupiáñez, 2016, p. 127). Para el caso del SND, la representación simbólica se relaciona con las propiedades, reglas y operaciones internas sobre el SND como sistema de estructura posicional (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Sin embargo, en las respuestas dadas por los docentes, la representación simbólica está asociada a las relaciones aritméticas, es decir, los algoritmos y reconocen dos principios del SND como lo es el principio de agrupamiento en base diez y el valor posicional, no hay un reconocimiento explícito en sus discursos de identificar el principio aditivo y multiplicativo del sistema.

De igual manera, se evidencia que no se reconoce de manera explícita en las respuestas de los docentes el sistema de representación *verbal* como parte de los sistemas de representación, aunque de manera implícita hacen uso de este tipo de representación al reconocer la importancia de la numeración hablada y la numeración escrita. El sistema de representación verbal explicita las reglas, los términos, la sintaxis con la que se expresan verbalmente los números (Rico, et al., 2008)

En relación con el sistema de representación de los *materiales manipulativos*, se identifica que los docentes hacen uso de materiales que les son más familiares como los discos de números y el material base diez porque han tenido la oportunidad de conocer su uso e implementarlos gracias a los acompañamientos realizados desde el PTA y a la dotación que hizo el programa de estos materiales a la Institución Educativa. Los docentes involucran el uso del ábaco por considerarse un recurso de representación de las cantidades que históricamente se ha usado en la escuela. No obstante, para la enseñanza del SND se cuenta con múltiples materiales para su representación manipulativa, por ejemplo, regletas de

Herbinère – Lebert o cajas de diez, los billetes didácticos, materiales que permitan trabajar equivalencias numéricas basadas en códigos de color, entre otros, y el uso de dispositivos como la calculadora, que permiten reconocer las propiedades y características del SND.

Respecto a la representación *gráfica*, se evidencia que los docentes se apoyan en las ilustraciones de los materiales manipulativos que usan en clase y destacan la importancia del uso de estas representaciones en los grados iniciales para una mejor comprensión de los aprendizajes, pues consideran que se comprenden con más facilidad las situaciones que se proponen a los estudiantes. Sin embargo, existen otro tipo de representaciones gráficas que apoyan el aprendizaje del SND y el reconocimiento de propiedades numéricas como las propuestas por Rico, et al. (2008) como lo son la recta numérica, las configuraciones puntuales y las tablas numéricas.

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente, se plantea la necesidad de fortalecer la formación docentes que orientan las matemáticas escolares en relación con el uso de diferentes sistemas de representación, para favorecer en sus prácticas el desarrollo de actividades que propicien el significado un contenido matemático escolar destacando las propiedades de los conceptos y los procedimientos. Cada sistema de representación aporta en la caracterización del significado del contenido matemático escolar, por tanto, se requiere establecer conexiones entre los diferentes sistemas de representación para contribuir a la comprensión de los conceptos y sus relaciones (Rico, Et al., 2008).

4.3.1.3. Análisis didáctico de la estructura conceptual.

En la entrevista realizada a los docentes al indagar por ¿Qué conceptos y procedimientos considera en sus clases para que los estudiantes comprendan el SND? La docente B menciona – *que ellos conozcan bien los números, el valor posicional... por ejemplo para las unidades saber que cuentan de uno en uno y se puede hacer con material concreto piedritas, con semillas y luego cuando tienen diez unidades van a formar la decena y así sucesivamente hasta llegar a las de mayor valor posicional.*

En el taller de análisis de la Unidad Didáctica Guía se formuló la pregunta ¿Qué conceptos y procedimientos se movilizan en las situaciones 2 y 3? A continuación en las ilustraciones 10 y 11 se presentan las repuestas dadas por los docentes.

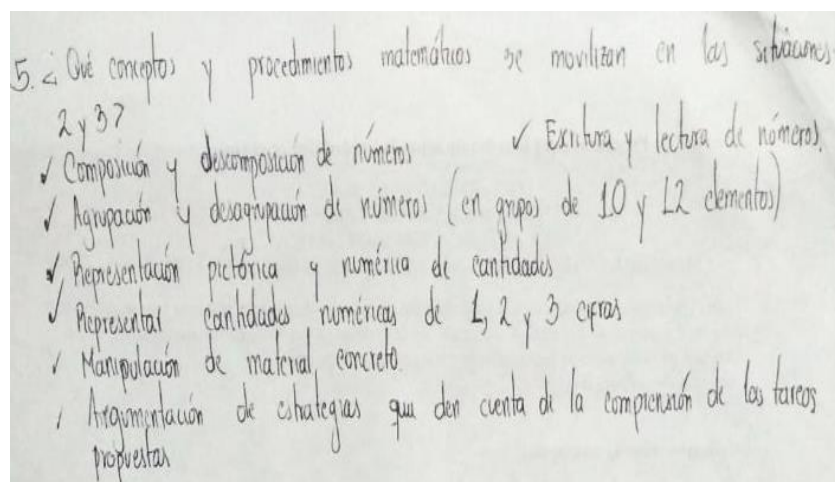


Ilustración 10. Respuesta a pregunta 5 del docente A.

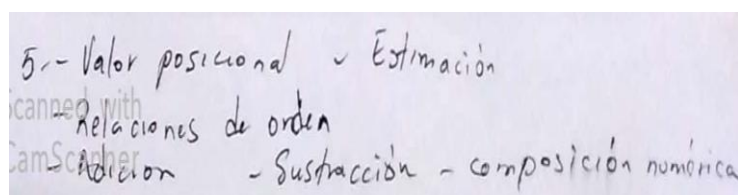


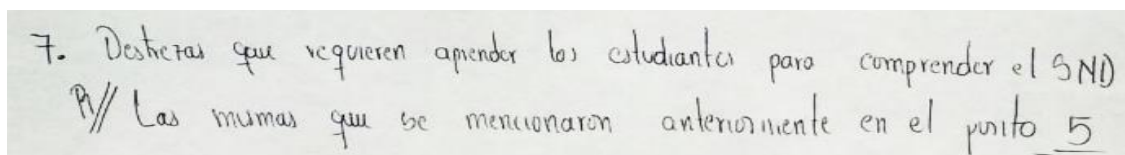
Ilustración 11. Respuesta a pregunta 5 del docente B.

Teniendo en cuenta la clasificación presentada en la tabla 4 sobre la clasificación de los conceptos y procedimientos de los números naturales (Rico et al., 2008), en el análisis de la estructura conceptual, se identifica que en las respuestas ofrecidas por los docentes se presenta un listado de conceptos y procedimientos sin distinguir cuales eran considerados por ellos conceptos y cuales procedimientos. Así entonces, de acuerdo a las respuestas ofrecidas, en relación con la clasificación conceptual se logra identificar: sobre los *convenios* se mencionó el valor de posición; sobre los *resultados* cada diez unidades de orden se conforma una unidad de orden superior; comparación de naturales por tamaño y en caso de igualdad, por su cifra de mayor orden; sobre los *conceptos numéricos* el orden entre naturales, suma y resta. En relación con los procedimientos los docentes mencionaron los siguientes: *destrezas* en la diversidad de representaciones de un mismo número, *razonamientos* argumentos para justificar propiedades numéricas, *estrategias* estimación de los resultados de una operación y resolución de problemas aritméticos y numéricos. Durante la entrevista se identificó dificultad por parte de los docentes en diferenciar un concepto de un procedimiento y se presentaron algunas ideas prioritarias sobre la clasificación de los conceptos y procedimientos en relación con el SND, esto evidencia un desconocimiento por parte de los

docentes sobre la estructura conceptual del contenido matemático escolar que se ha descrito en este trabajo y que es importante para las competencias de planificación de unidades de enseñanza, en tanto este conocimiento ofrece información para una adecuada secuenciación de las tareas para la enseñanza, la definición de recursos y expectativas de aprendizaje.

A partir de las respuestas ofrecidas a la pregunta 6 del taller (ver apéndice D) se identifica que los docentes reconocen los siguientes principios del SND: *Principio de base decimal* cada diez unidades de orden conforman una unidad de orden superior, *Principio posicional* el valor de cada cifra depende del lugar de posición que ocupe en el numeral, *Orden de la posición* las cifras en el número se escriben una seguida de otra, de izquierda a derecha y teniendo en cuenta las unidades de orden. (Castro y Molina, 2011). Sin embargo, las repuestas no dan cuenta de manera explícita sobre los siguientes principios del SND: el principio aditivo –un número se puede escribir como la suma de sus unidades de diferente orden – y multiplicativo – cada cifra del número es a su vez un factor que multiplica a una potencia de 10, la potencia se corresponde con la unidad de orden o valor de la posición que este ocupando. Reconocer estos dos principios ayuda al docente en la comprensión de algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en relación con la numeración hablada y la numeración escrita, a respecto Lerner y Sadovsky (1994) refieren que la numeración hablada es aditiva y la numeración escrita es posicional. De igual manera el reconocimiento de los principios en mención, permiten comprender las reglas de escritura del SND.

En relación con los conocimientos procedimentales, en cuanto a las destrezas que se deben desarrollar al aprender el SND, se obtuvieron las siguientes respuestas:



7. Destrezas que requieren aprender los estudiantes para comprender el SND
 R// Las mismas que se mencionaron anteriormente en el punto 5

Ilustración 12. Respuesta del docente A sobre las destrezas que se requieren desarrollar en el aprendizaje del SND.

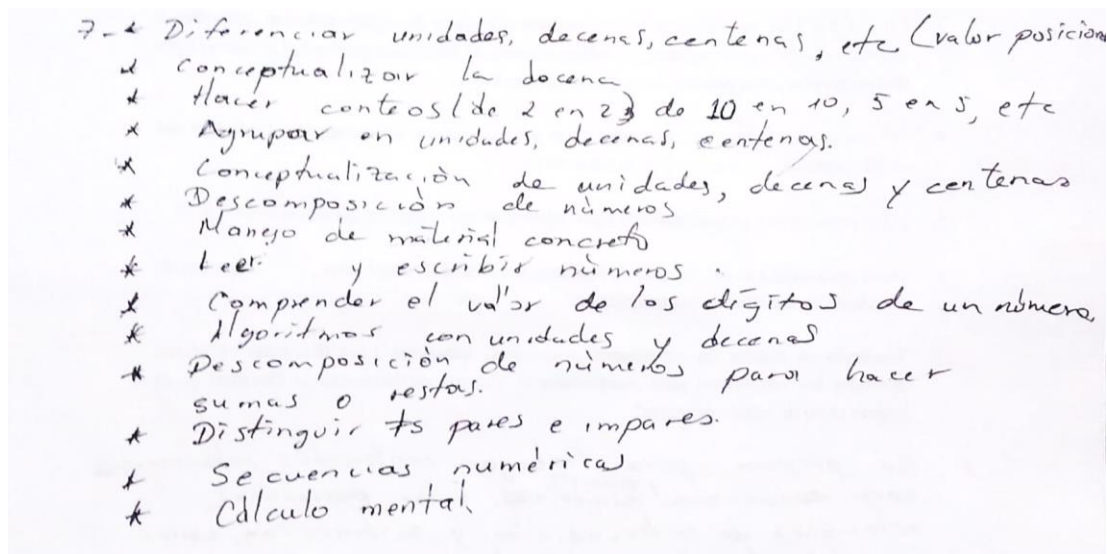


Ilustración 13. Respuesta del docente B sobre las destrezas que se requieren desarrollar en el aprendizaje del SND.

En la clasificación cognitiva de los conocimientos matemáticos, los procedimientos presentan tres grados de complejidad: destrezas, razonamientos y estrategias siendo las destrezas el nivel más básico de los procedimientos (Rico et al., 2008). En las respuestas ofrecidas por los docentes se observa que proporcionan una lista de lo que ellos consideran destrezas, sin embargo, se puede evidenciar confusiones conceptuales entre lo que es concepto y procedimiento, destreza y estrategias. Teniendo en cuenta la clasificación de los procedimientos definidos por Rico et al. (2008) se observa que presentan como destrezas algunos *conceptos* como: convenios (valor posicional de las cifras, periodicidad de los órdenes del sistema, lectura de números), resultados (cada 10 unidades de un orden forman una unidad de orden superior), conceptos numéricos (suma y resta). Sobre los procedimientos, se ha identificado en las respuestas dadas por los docentes, las siguientes *destrezas*: la escritura y lectura de números; la descomposición polinómica de un número; los algoritmos de la suma y de la resta, el producto y la división; expresiones de un mismo número como resultado de distintas operaciones; diversidad de representaciones de un mismo número (Basadas en el SND). También se hizo referencia a algunas de las estrategias como el cálculo mental.

Las repuestas ofrecidas para este organizador de estructura conceptual, sugieren una formación, al docente de básica primaria, que le permita identificar y relacionar los principales significados de un contenido matemático escolar, es decir, conocer su definición,

sus representaciones, sus operaciones, relaciones y propiedades, los modos de uso y su aplicación en la resolución de problemas (Fernández, 2016). Así entonces, el docente necesita concientizarse de la clasificación del conocimiento relacionado con el SND de manera que logre reconocer los conceptos y procedimientos asociados a este contenido, la tipología de los contenidos y el nivel de complejidad que requiere el aprendizaje y comprensión de los mismos al planificar, desarrollar o evaluar el aprendizaje de este contenido matemático escolar.

4.3.1.4. Análisis didáctico de los sentidos y modos de uso.

Para el análisis de los sentidos de los conceptos matemáticos se tienen en consideración los siguientes aspectos: el dominio de los términos propios del concepto, los contextos en los que se emplean los conceptos y las cuestiones a las que da respuesta dicho concepto, los fenómenos que organiza el concepto y que le dieron su origen, y las situaciones en las que este se aplica desde una perspectiva de enfoque funcional del currículo. Teniendo en cuenta los elementos definidos en la tabla 5 Resumen de elementos de sentido del SND, se realiza el análisis a las respuestas dadas por los docentes.

En relación con el dominio de términos propios sobre el SND, se reconoce en las respuestas brindadas por parte de los docentes, que para ellos es muy importante el reconocimiento del valor de posición, el reconocimiento de la idea de base decimal para los agrupamientos en las unidades de orden, por ello proponen ejercicios de los libros de texto en los que de manera pictórica se represente las unidades de orden, unidades, decenas, centenas..., se usan códigos de color, billetes didácticos, entre otros materiales, para explicar el valor de posición; se representan las operaciones de adición y sustracción mediante materiales que permitan ver las unidades de orden. Sin embargo, se identifica que se requiere fortalecer la formación de los docentes frente a los términos formales para hacer referencia a algunos conceptos del SND, por ejemplo, el docente A mencionó en parte de la entrevista – *se necesita conceptualizar bien cuando estamos hablando de unidades y cuando estamos hablando de decenas y que no puede ir mas de determinado número de cuadros en una de esas categorías*, el docente hace referencia a categoría para hablar de las unidades de orden.

En las respuestas dadas por los docentes se evidencia que las actividades de enseñanza y aprendizaje consideran los contextos: contar, agrupar de manera sucesiva en base diez,

comparar y operar con números para el uso del SND. Ello se evidencia en respuestas como la del docente A – *los libros traen muchos ejercicios de conteo,...se trabaja con las operaciones matemáticas, entonces se llega a situaciones muy prácticas y allí me gusta el libro de Santillana, porque trae muchas situaciones del contexto de los niños, entonces plantea muchos problemas dentro del aula, de agrupación de estudiantes, competencias deportivas, entonces aparecen allí hacen un análisis de los datos que hay de puntaje y todo eso*. También se identifica como aspecto común en las respuestas dadas en los instrumentos aplicados, que se proponen actividades de aula enfocadas en la representación oral y escrita del número, especialmente en contextos cardinales y de etiqueta.

La representación de números usando la menor cantidad de símbolos o nombres de números posible, codificar y decodificar numerales, es decir, producción e interpretación de las escrituras numéricas siguiendo las reglas para expresar los números de manera simbólica, son los fenómenos a los que dio respuesta el SND. Se observa en las respuestas dadas por los docentes que se privilegia un enfoque del aprendizaje del SND basado en: la lectura y escritura de números, la representación de las unidades de orden y el conocimiento del valor posicional partiendo de representaciones pictóricas hacia representaciones simbólicas, tal como se aprecia en las siguientes respuestas dadas por los docentes, docente A – *primero se retoma la lectura y escritura de números,... pasando por números de dos y tres cifras. Entonces ya el paso seguido es trabajar con las operaciones básicas*. Docente B – *partimos de las decenas de mil reforzando lo aprendido en segundo, se ve las centenas de mil, operaciones matemáticas y resolución de problemas de adición y sustracción*. Así entonces, se requiere fortalecer en los docentes la concepción del SND como un sistema de representación simbólico con un conjunto de signos y de reglas para expresar los números, por tanto, cuando los docentes hacen referencia a las actividades relacionadas con la lectura y escritura de números, se requiere promover actividades en las que los estudiantes realicen actividades de producción e interpretación de las notaciones numéricas y se expliciten las reglas para expresar un número, se comprendan los términos de la numeración oral: del cero al quince, veinte, treinta, y se conozcan las normas de combinación: dieciocho. De acuerdo con Lerner y Sadovsky (1994) el trabajo con la numeración escrita precisa entender que el SND es un sistema de representación y por tanto se requiere proponer situaciones de

aprendizaje que permitan comprender la organización propia del sistema, sus reglas y propiedades.

Al preguntar a los docentes sobre las situaciones que propone para la enseñanza y aprendizaje en las que se usa el SND, para el caso del agrupamiento el docente A – *Además del trabajo realizado con las fichas (material manipulativo),... hay un material (fotocopias del libro o fichas de trabajo) que es muy gráfico, allí les muestran la operación y esta se acompaña de una gráfica donde se identifican las barras, vienen las diez barras para representar una centena, las barras de las decena o separaditas para representar las unidades, allí el estudiante puede ver fácilmente cuando se reagrupa y más adelante con el tema de la sustracción cuando hay que desagrupar una decena o una centena.* La docente B – *Representaciones de las cantidades con el valor de lo que compran en la tienda, el uso de material concreto, billetes didácticos*

Las respuestas anteriores y las ilustraciones 14 y 15 posibilitan evidenciar que se proponen situaciones en las que: se producen e interpretan escrituras numéricas, comparan, ordenan y operan a través de estas, realizan composiciones y descomposiciones aditivas y aditivas-multiplicativas de manera canónica. Se requiere fortalecer el tipo de situaciones que permitan la comprensión del SND con sentido numérico, tales como, buscar regularidades en la organización de los números para ello se pueden apoyar en el panel numérico o las bandas numéricas, identificar de las operaciones que subyacen en el SND usando material concreto base diez, relación entre la numeración escrita y las operaciones, composiciones y descomposiciones aditivas y aditivas-multiplicativas de manera flexible.

Actividades de aprendizaje

1. Observa el ejemplo. Luego, completa las demás igualdades.

a. $213\,196 = 2\text{ cm} + 1\text{ dm} + 3\text{ um} + 1\text{ c} + 9\text{ d} + 6\text{ u}$
 $= 200\,000 + 10\,000 + 3\,000 + 100 + 90 + 6$
 Se lee: doscientos trece mil ciento noventa y seis

b. $162\,478 = 1\text{ cm} + 6\text{ dm} + 2\text{ um} + 4\text{ c} + 7\text{ d} + 8\text{ u}$
 $= 100\,000 + 60\,000 + 2\,000 + 400 + 70 + 8$
 Se lee: Ciento Seenta y dos mil Cuatrocientas Setenta y ocho

c. $491\,035 = 4\text{ cm} + 9\text{ dm} + 1\text{ um} + 0\text{ c} + 3\text{ d} + 5\text{ u}$
 $= 400\,000 + 90\,000 + 1\,000 + 0 + 30 + 5$
 Se lee: Cuatro Cientos Noventa y un mil

Resolución de problemas

2. En la ciudad donde vive Lucas hay 245 780 habitantes y en la de su prima Alejandra, 245 870. ¿En cuál ciudad hay menos habitantes? Explica tu respuesta.

245 780 R La Ciudad de Lucas tiene Menos habitantes.
 245 870

Evaluación del aprendizaje

★ Analiza la situación y responde.
 ¿Quién tiene razón? Compara tu respuesta con la de un compañero.

El número 120 345 tiene 3 unidades de mil.
 El número 120 345 tiene 3 unidades de mil.

R La Primera niña tiene la razón Por que 120 345 tiene dos decenas de mil

Ilustración 14. Ejemplo de actividades retomadas del texto Vamos a Aprender Grado 3

Valor de Posición: números hasta el 999

Los números se pueden descomponer en unidades, decenas y centenas.

Ejemplo: en el número 369 hay

369 3 centenas
 6 decenas
 9 unidades

C	D	U
3	6	9

Así escribimos las centenas

100 cien
 200 D o c i e n t o s
 300 t r e c i e n t o s
 400 c u a t r o c i e n t o s

Ilustración 15. Ejemplo de actividades de propuestas por docente de Grado 2

De igual manera, la planificación de las propuestas de enseñanza deben tener en cuenta situaciones de tipo socio cultural que permitan comprender el SND (Lerner y Sadovsky, 1994), dado el uso social de este contenido matemático. Así entonces, los docentes pueden proponer para la comprensión del SND algunas las situaciones en las que se usen los números en listados de precios en ejercicios de compra y venta, el trabajo con medidas usando nuestro sistema métrico decimal, identificar precios en revistas de supermercado, interpretar cifras que aparecen en recipientes y empaques de productos, interpretar cifras en facturas. Proponer situaciones usando diversos materiales manipulativos en las que se expliciten las características del SND, pues como ya se ha podido observar en las repuestas se resalta el agrupamiento y el valor de posición como las características del SND más reconocidas por los docentes.

4.3.2. Análisis didáctico cognitivo sobre sentido numérico en la comprensión del Sistema de Numeración Decimal.

El análisis didáctico cognitivo permite identificar qué se espera que los estudiantes aprendan, para qué se aprende un determinado concepto matemático, qué limitaciones pueden interferir en el proceso de aprendizaje, qué tareas y experiencias estimulan los aprendizajes (Lupiáñez, 2013). Por tanto, se ha configurado el siguiente sistema de

organizadores del currículo: expectativas de aprendizaje, limitaciones en la enseñanza y aprendizaje y oportunidades de aprendizaje, para realizar el análisis cognitivo sobre sentido numérico para la comprensión del SND.

4.3.2.1. Expectativas de aprendizaje.

Para el análisis de este organizador, se han definido los siguientes objetivos específicos para la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND, que permiten analizar las repuestas de los docentes en torno a este organizador.

- OE1. Componer y descomponer números de manera flexible a partir de la comprensión de la noción de agrupamiento. (Competencias: resolución de problemas, razonamiento, ejercitación de procedimientos)
- OE2. Utilizar y reconocer equivalencias entre diferentes representaciones, manipulativas, pictóricas y simbólicas que favorezcan conexiones entre los modos de representación de un número. (Competencias: Resolución de Problemas, Razonamiento, Modelación Comunicación y Ejercitación de Procedimientos)
- OE3. Comparar y ordenar números atendiendo al reconocimiento de la magnitud relativa de los números. (Competencias: Resolución de Problemas, Razonamiento, Comunicación y Ejercitación de Procedimientos)
- OE4. Razonar y estimar la magnitud absoluta del número. (Competencias: Resolución de Problemas, Razonamiento y Ejercitación de Procedimientos)
- OE5. Usar puntos de referencia como estrategia de pensamiento, para estimar una respuesta numérica. (Competencias: Resolución de Problemas, Razonamiento, Comunicación y Ejercitación de Procedimientos)
- OE6. Relacionar la numeración, las operaciones y los símbolos a través de diferentes representaciones numéricas. (Competencias: Resolución de Problemas, Razonamiento, Modelación)
- OE7. Reconocer los efectos de modificar las cantidades numéricas al realizar operaciones aritméticas sobre estas. (Competencias: Resolución de Problemas, Razonamiento y Ejercitación de Procedimientos)

- OE8. Utilizar estrategias de cálculo mental a partir de procedimientos inventados en los que se relacionen las propiedades de los números y las operaciones. (Competencias: Resolución de Problemas, Razonamiento y Ejercitación de Procedimientos)

Al preguntar a los docentes sobre ¿Cómo se organiza la planeación institucional, el plan de área o de aula, en relación con la enseñanza del SND? El docente A –*primero se retoma la lectura y escritura de números,... pasando por números de dos y tres cifras. Entonces ya el paso seguido es trabajar con las operaciones básicas. Me ha parecido interesante del material (hace referencia a los textos)... ahora a los chicos los van llevando, primero en el caso de las adiciones, primero se trabajan agrupando unidades y luego agrupando decenas. Entonces, van paso a paso y eso le ayuda al estudiante, para ir sabiendo que es lo que pasa con esas situaciones aditivas.* Docente B – *En el primer periodo de grado tercero partimos de las decenas de mil reforzando lo que ya aprendieron en segundo, luego se pasa a ver las centenas de mil, se pasa a ver las operaciones básicas, solución de situaciones de adición y sustracción.*

La respuesta sobre la organización curricular evidencia que las expectativas de aprendizaje de los profesores que participan del estudio están centradas en el dominio de las operaciones básicas y en el manejo de algunas características del SND en referencia al conocimiento de las unidades de orden y a la destreza en la lectura y la escritura de los números en un rango numérico preestablecido (OE1, OE2, OE3, OE4). En esta concepción se identifica que las expectativas de aprendizaje y las progresiones de los aprendizajes para cada grado se han definido sobre el dominio de un determinado rango numérico para cada grado. Las actividades que se proponen sobre la composición y descomposición de números relacionadas con el OE1 se hacen enfocándose solamente de manera convencional, en unidades, decenas y centenas, se requiere promover actividades que permita realizar composiciones y descomposiciones flexibles no convencionales.

Investigadora – ¿A la organización del plan de aula le han hecho algún aporte a la propuesta de planeación o han variado la organización propuesta?

Docente A – *No hemos propuesto, la verdad pienso que nosotros seguimos el derrotero que viene en los libros de texto que nos apoyamos.* Docente B – *Cada año le hacemos como ajustes al iniciar el año vimos que lo del primer periodo estaba como extenso, el primer*

periodo es de mucha adaptación para ellos porque no están acostumbrados a la rotación, entonces se le hizo la adaptación porque en el primer periodo estaban casi todas las operaciones. Análisis y solución de situaciones con multiplicación y división

Las anteriores respuestas admiten una fuerte influencia de los libros de texto para determinar la selección y progresión de los contenidos matemáticos escolares que se proponen en la planeación curricular, a pesar de que en los acompañamientos del Programa Todos a Aprender (PTA) se ha hecho un énfasis en el conocimiento curricular de los referentes calidad como lo son los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias y los Derechos Básicos de Aprendizaje, como un conocimiento fundamental para el docente en su competencia de planificación. Así entonces, el libro de texto es considerado por los docentes como la principal fuente de información para la definición del currículo, determina el tipo de actividades que se proponen en el aula y la metodología que adopta el docente para la enseñanza de las matemáticas.

Al realizar la revisión de los registros de los estudiantes se evidencia como la mayoría de las actividades que se proponen para los estudiantes se basan en los libros de texto. Un hallazgo importante en este aspecto, es que la mayoría de las actividades registradas por los estudiantes de grado segundo son de otros textos diferentes a los que el PTA ha proporcionado a la Institución, como se puede apreciar en las ilustraciones 3 y 4. La docente de grado tercero evidencia un mayor uso de los textos proporcionados por el programa, ver ilustraciones 5 y 6. También en las respuestas ofrecidas se identifica que uno de los docentes evoca aspectos sobre la forma como se realizaban los aprendizajes en su educación primaria realizando comparaciones sobre cómo se aprendieron las matemáticas en su momento. Existe una fuerte tendencia a que el docente base su conocimiento para la enseñanza de las matemáticas en sus concepciones y creencias forjadas en la manera como les enseñaron o como aprendieron. Asimismo, en las expresiones de los docentes se puede considerar que el libro de texto es asumido como uno de los principales referentes del conocimiento didáctico del docente en ejercicio, para definir la organización curricular y las expectativas de aprendizaje.

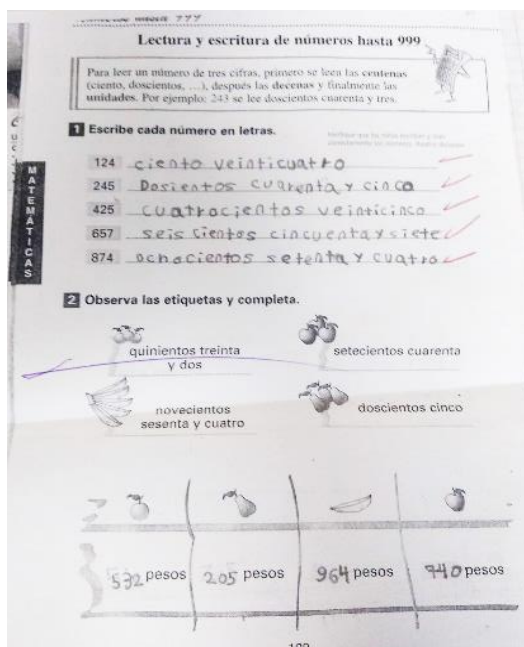


Ilustración 16. Imagen de actividades de libro texto de grado segundo sobre el SND

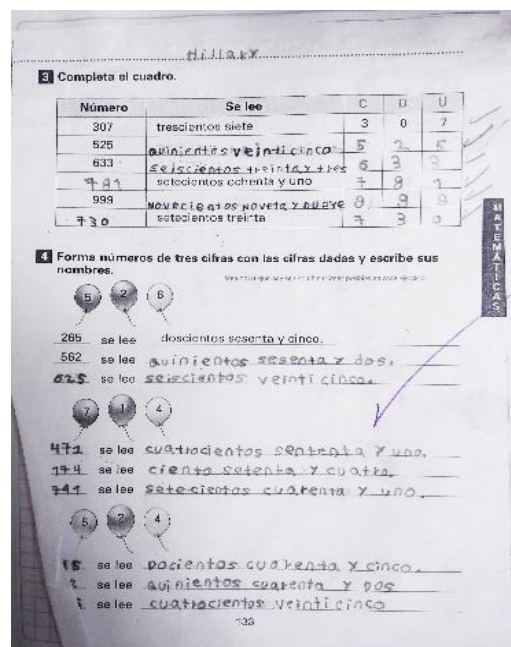


Ilustración 17. Imagen de actividad libro de texto de grado segundo sobre el SND

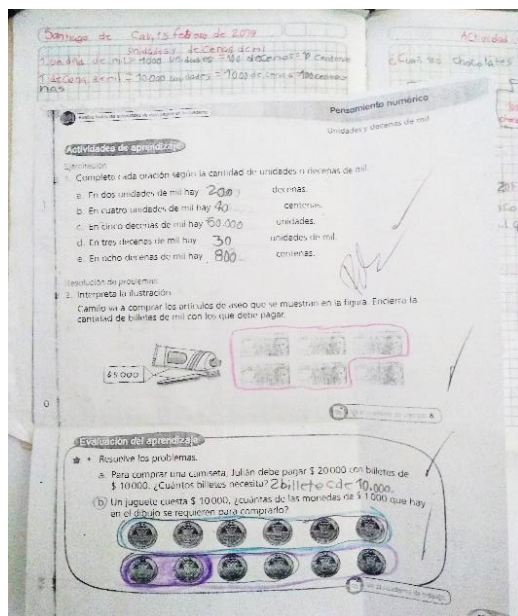


Ilustración 18. Imagen de actividades de libro texto de grado tercero sobre el SND

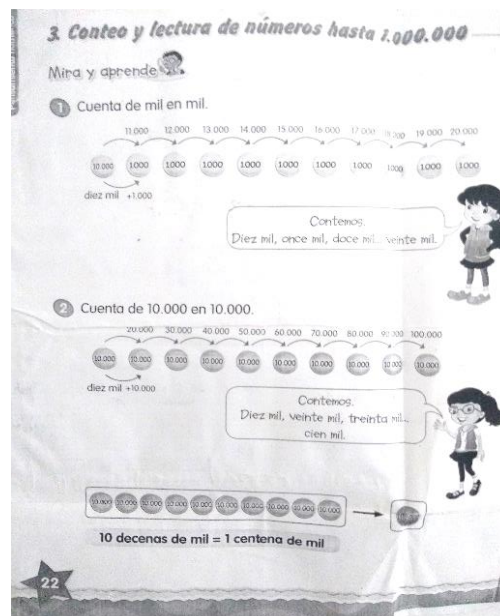


Ilustración 19. Imagen de actividades de libro texto de grado tercero sobre el SND

Los estándares básicos de competencia en matemáticas MEN (2006) proponen dos estándares relacionados con la enseñanza del SND para el primer ciclo de educación básica primaria: “Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal”; “Uso representaciones –

principalmente concretas y pictóricas— para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal” se preguntó a los docentes ¿Qué destrezas o capacidades deben demostrar los estudiantes de acuerdo a estos estándares básicos de competencia?

Docente A – que los estudiantes sean capaces de representar de una manera pictórica el posicionamiento de los números, entonces bien se puede hacer por medio del ábaco. Plantee algunas actividades donde ellos tenían que dibujar el ábaco, entonces se les daban unas figuritas del posicionamiento numérico, entonces el estudiante debía con los colores identificar cuántas fichas se colocaban en la barrita de las unidades, cuántas en las decenas, centenas, que pasaba cuando agregábamos una, que cuando ya se agregaba más de nueve se debía borrar entonces ya necesitaban pasar a la siguiente... era muy fácil a partir del dibujo construir el número. Primero trabajaban con material concreto y luego me apoyaba en lo pictórico. Entonces cuando los niños veían tres figuritas de una barra, nada en la otra y cinco figuritas en la última barra identificaban fácil el trescientos cinco y vi que pasaban muy fácilmente de la parte pictórica al concepto como tal.

Docente B – Que ellos hagan representaciones, que lo puedan hacer tanto con el material concreto como pictórico, con representaciones gráficas. En las equivalencias, que al descomponer un número, sepan que la descomposición es equivalente con el número, con lo que les va a dar por ejemplo: 15298, sino escriben diez mil, más cinco mil, más 200, más 90, más 8, no les va a dar si escriben diez mil, más ocho mil, ya no les va a dar

En las respuestas ofrecidas por los docentes se destaca la importancia de las representaciones concretas y pictóricas para abordar la enseñanza del valor de posición, enfocadas a la representación de la cantidad y la idea de agrupamiento en base diez, sin embargo, solo la docente B trata de dar una idea al aproximar su respuesta sobre las destrezas o habilidades que deben desarrollar los estudiantes en relación con las equivalencias. Se puede inferir que la redacción del estándar condiciona las respuestas presentadas por los docentes al mencionar ideas solo sobre representaciones concretas y pictóricas para dos nociones relacionadas con el SND como lo es el valor de posición y las equivalencias. Por tanto, no se identifican en sus respuestas que se hiciera alusión a otras habilidades que son importantes para el alcance de estos estándares. Los DBA V2 (2017) amplían un poco más

en sus evidencias de aprendizaje qué se espera que el estudiante del primer ciclo de básica primaria sea capaz de realizar cuando pone en uso sus conocimientos sobre el SND, por ejemplo, las evidencias de aprendizaje propuestas consideran destrezas en el conteo a saltos, agrupamientos de colecciones en diferentes bases, uso de las características del SND para crear estrategias de cálculo y estimación de sumas y restas, realizar composiciones convencionales, proponer diferentes disposiciones en las sumas o restas para tener como resultado un determinado número, elaborar estrategias de cálculo como el paso por el diez para resolver las operaciones, uso de algoritmos no convencionales en el cálculo y estimación de resultados de las operaciones y justificar sus procedimientos y resultados, comparar y ordenar números usando recursos como la calculadora, aplicación, material gráfico que represente billetes, diagramas de colecciones, etc., proponer ejemplos de expresiones que al aplicar algunas operaciones se conserve una relación; usar propiedades de las operaciones y del SND para la descomposición de números, completar hasta la decena más cercana, duplicar, cambiar la posición, multiplicar abreviadamente por múltiplos de diez, entre otros.

Al revisar en los registros de los estudiantes en las actividades propuestas por los docentes se identifica que la enseñanza de las operaciones básicas se realiza privilegiando el uso de algoritmos estándar (ver ilustraciones 20 y 21). No se identificaron algoritmos diferentes al estándar, ni el uso de procedimientos o estrategias inventadas que permita operar números de manera flexible y que permitan aprovechar las propiedades de los números y las operaciones, es decir, actividades que se encuentren relacionados con los OE5, OE6, OE7 de las expectativas de aprendizaje propuestas en este trabajo.

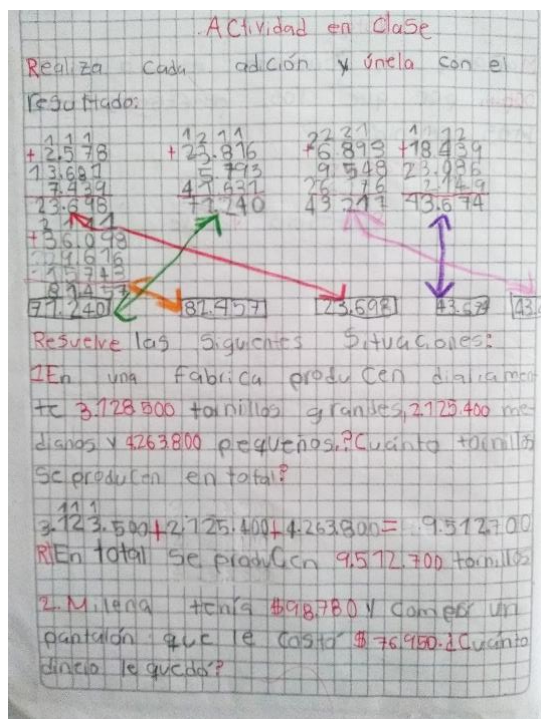


Ilustración 20. Actividades de enseñanza de la adición grado 3

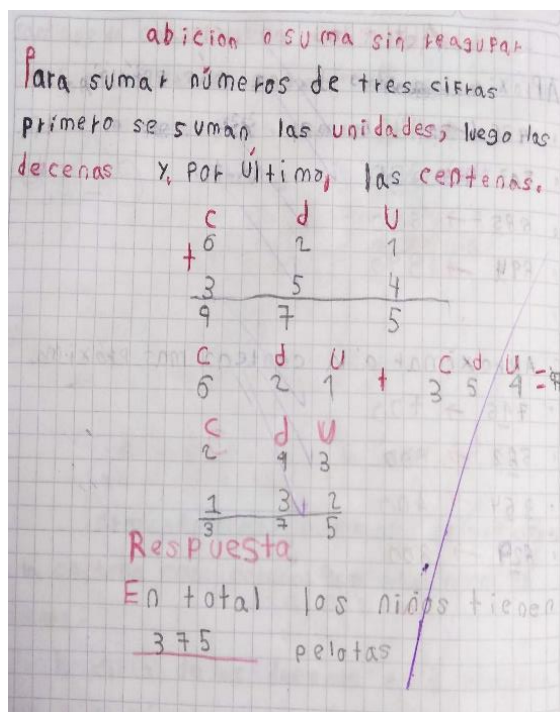


Ilustración 21. Actividades de enseñanza de la adición grado 2

Otro aspecto relacionado con las expectativas de aprendizaje es el establecimiento de los objetivos de aprendizaje que los docentes evalúan en sus estudiantes y los objetivos de aprendizaje que reconocen en las propuestas de enseñanza. Al preguntar a los docentes ¿Qué aprendizajes sobre el SND evalúa en sus estudiantes? Docente A – *Evaluó que principalmente reconozcan el valor de posición de un número que eso me parece importantísimo, que el niño sepa cuando se le está hablando de un número de una cifra, dos cifras, tres cifras, como se lee y muy importante diferenciar entre mayor y menor, ... también la lectura y escritura de números y luego pasar a ver las operaciones básicas con ellos.* Docente B – *Sobre el valor posicional, saber ubicar en la tabla de valor posicional, que sepan representar el número en material concreto.* Investigadora – Se pregunta a la docente que objetivos de aprendizaje evalúa sobre el agrupamiento, la docente pregunta que si el agrupamiento hace referencia a las adiciones, investigadora aclara retomando un ejemplo de agrupamiento sucesivo que había dado la docente durante la entrevista y se obtiene como respuesta –*que ellos identifiquen cuando se hace un agrupamiento de 10 unidades se forma una decena, 10 decenas se forma una centena.*

Las anteriores respuestas confirman, por una parte que los docentes reconocen de manera intuitiva algunos conceptos formales en relación con el SND como lo es la noción de agrupamiento. Por otra parte, las expectativas de aprendizaje sobre los aprendizajes que los docentes evalúan se enfocan sobre aspectos relacionados el valor de posición, su representación en tablas y material manipulable; lectura y escritura de números; comparar y ordenar números, uso de algoritmos de cálculo convencionales. Estas expectativas de aprendizaje se enfocan en algunos aspectos sobre el aprendizaje del SND y tienen relación con algunos aspectos propuestos en los objetivos (OE1, OE2, OE3, OE4), por tanto, se requiere fortalecer en los docentes el conocimiento curricular y didáctico para que los docentes reconozcan expectativas de aprendizaje que tengan en cuenta otros aspectos relacionados con la comprensión del SND y el construcción de sentido numérico, tal es el caso de las capacidades para la construcción de sentido numérico definidas por Sowder (1992b) y retomadas por Llinares (2008) y Castro y Segovia (2015), las cuales han sido el fundamento para los objetivos específicos que se han planteado en las expectativas de aprendizaje de este trabajo de investigación.

4.3.2.2. Limitaciones en la enseñanza y el aprendizaje.

Este organizador le proporciona al docente información que le permita prever los posibles errores y las posibles dificultades que se puedan presentar sobre un contenido matemático escolar en su ejercicio de planificación y diseño de las actividades de aprendizaje (Fernández, 2016).

Teniendo en cuenta las dificultades y errores determinados en la tabla 8 del marco conceptual, descritos en el análisis didáctico cognitivo sobre la enseñanza y aprendizaje del SND desde una perspectiva de sentido numérico en el primer ciclo de la Educación Básica Primaria, se caracteriza el conocimiento de los profesores a partir de las siguientes preguntas: Al indagar sobre ¿Qué dificultades de aprendizaje en la comprensión sobre el SND son comunes en los estudiantes del primer ciclo de básica primaria? Docente A – *Básicamente es la cuestión de la escritura, porque he encontrado que tienen mucha facilidad para leer el número, pero a la hora de escribirlo he visto algunas dificultades, sobre todo desde el área de lenguaje uno se vuelve muy estricto con eso, entonces a la hora de hablar del número doscientos entonces allí se complica un poco por la cuestión de la “sc” o a la hora de decir*

veinticinco, pero uno se encuentra con niños que escriben veinte y cinco, si correcto veinte y cinco que es lo más lógico, pero es complicado que los niños apropiaran esa idea de veinticinco. Diferencian la decena cuarenta pero a la hora de escribir el número cuarenta y cinco, trescientos, doscientos, seiscientos, es mayor la dificultad. Porque si lo pronuncian bien casi nunca hay errores, pero a la hora de escribirlo, la separación de la palabra se presenta un problema. Creo que es una cuestión de la práctica, porque, privilegiamos mucho la oralidad pero no evaluamos mucho la escritura. Docente B – En tercero no manejan muy bien lo de las decenas, por ejemplo, si se les pregunta cuánto son dos decenas, no saben responder que son veinte unidades, entonces hay que trabajar de nuevo cuántas unidades hay aquí (haciendo referencia a una decena) hay diez, ¿diez qué forman?, debe devolverse uno a lo que ellos deberían saber. También hay dificultad en la lectura y la escritura de números, sobre todo cuando los números llevan ceros en el medio, por ejemplo mil quince, escriben 100015, el mil completo y el quince, entonces hay que devolverse al valor posicional.

Las anteriores respuestas ofrecen ideas sobre las dificultades relacionadas a la comprensión del SND que los docentes identifican en los estudiantes de los grados escolares a cargo. Las dos respuestas permiten identificar la lectura y escritura de números como una de las principales dificultades que los docentes reconocen en los estudiantes sobre la comprensión del SND, es decir, que la enseñanza del SND se reduzca al desarrollo de capacidades para leer y escribir números (E8). Se puede observar que para el docente con formación en el área de lenguaje, son importantes aspectos de pronunciación en la lectura de números, por tanto, la formación de los docentes en las diversas áreas de conocimiento influyen en la definición de las expectativas de aprendizaje y en el reconocimiento de los errores y dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

En las respuestas dadas por los docentes también se reconoce que una de las principales dificultades que presentan los estudiantes está relacionada con la escritura de números (E14), docente A – *Encontré dificultades como al escribir trescientos cinco ellos escribían 35 o 3005*, es decir, se presenta una yuxtaposición de símbolos. De acuerdo con lo anterior, se requiere por parte del docente un conocimiento sobre las dificultades y errores sobre la enseñanza y aprendizaje del SND, al respecto trabajos como los de Lerner y Sadovsky (1994)

han documentado parte de estas problemáticas, tal es el caso de la diferencia entre la numeración hablada que es considerada de tipo aditiva y la numeración escrita que es de tipo posicional, hay unas operaciones implícitas en la lectura y escritura de los números, en este sentido, nuestro SND no es muy transparente. Teniendo en cuenta lo anterior, al revisar los registros de los estudiantes no se identificaron actividades que permitan abordar este tipo de aspectos. De acuerdo con Lerner y Sadovsky (1994), se requiere trabajar con los estudiantes la producción e interpretación de sus escrituras, abordando las convenciones que implican la escritura de la numeración, explicar el sentido que tiene la escritura de los números con la menor cantidad de símbolos posibles, las operaciones implícitas en el sistema de numeración. Lo anterior, implica por parte del docente un conocimiento sobre aspectos históricos que permitieron la construcción del SND como objeto sociocultural.

Al preguntar a los docentes sobre las potencialidades y limitaciones que ellos reconocen en el uso materiales concretos, el docente A responde – *Trabajar con material concreto ayuda mucho, porque el niño se da una idea de las situaciones que se le están planteando, ... en matemáticas la dificultad que se ha identificado es que son muy abstractas y a la hora de hacer cálculo mental es mucho más fácil apoyarse en material concreto. Dentro de las limitantes está el tiempo, ... que uno siempre trata como de ceñirse a la planeación e ir cumpliendo con los contenidos programados, entonces en una mañana que se tienen que dar tres clases, a veces, a la hora de trabajar con ese material concreto las clases tienden a alargarse un poquitico más, ese sería el único limitante, por lo demás creo que son potencialidades.* Docente B responde – *Yo limitaciones la verdad no le veo, para mí es muy práctico, porque van a manipular, se familiarizan con el material y ellos lo van a entender más fácil. Le veo más ventajas.* La investigadora pregunta los docentes si reconocen alguna limitación del material en relación con el contenido matemático escolar SND, Docente A – *No hay ninguna limitación de los materiales usados en clase para enseñar el SND.*

Se evidencia que los docentes reconocen la importancia del uso de material manipulable para la enseñanza del SND tales como: ábacos, materiales base 10, discos de números, semillas para hacer las agrupaciones y los conteos. Los docentes destacan las potencialidades de estos materiales en las transiciones entre los niveles de pensamiento concreto, pictórico y abstracto que se han trabajado desde el PTA. Sobre las limitaciones, las respuestas hacen

referencia a aspectos relacionados con la implementación de los materiales y no a las limitaciones propias del material en relación con el contenido matemático escolar SND (E2, E9, E10). Por ejemplo, los recursos usados para representar unidades sueltas y decenas, los agrupamientos, como es el caso de los atados de decenas, las barras base 10, tarjetas con códigos de color, discos de números, permiten abordar algunas de las características del SND, las equivalencias de las unidades de orden, el principio aditivo y multiplicativo.

Sin embargo, estos materiales presentan la dificultad de no reconocer el principio de la posicionalidad del SND, “Sea cual fuera el orden en que estén colocados... el total de elementos será siempre en mismo” (Lerner y Sadovsky, 1994, p. 139). Así mismo, sobre el uso de los materiales Maza (1991) señala que es conveniente que el docente desarrolle primeras actividades usando materiales proporcionales o discretos como palos, semillas que permiten cuantificar y percibir los agrupamientos e identificar cantidad de elementos en un grupo, para luego dar paso a materiales no proporcionales como los ábacos y el dinero en los que el agrupamiento se basa en equivalencias para hacer canjes o cambios (10 unidades se cambian por una decena). De acuerdo con Maza (1991) no todos los materiales son iguales, algunos son más transparentes para ver de manera más concreta acciones como el agrupamiento (p. 111).

Por tanto, estos profesores de primer ciclo de básica primaria necesitan el reflexionar sobre los materiales y recursos que favorecen la enseñanza y comprensión del SND, de tal manera que reconozcan potencialidades y limitaciones de estos, en relación con el contenido matemático escolar. Además, deben comprender la forma de uso para incorporarlos en las actividades de enseñanza de acuerdo a las características que estos poseen, así como realizar las transiciones entre los materiales para propiciar el aprendizaje de conceptos y procedimientos asociados a este contenido escolar. Así entonces, el uso de un material en una única sesión no es suficiente para asegurar una comprensión del contenido matemático escolar, por tanto es necesario proporcionar variadas situaciones mediadas por el uso de materiales que permitan explorar los diversos características del SND.

Al revisar los registros de los estudiantes se pueden identificar algunas actividades que trabajan de manera parcial el desarrollo de habilidades que permitan la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND. En la ilustración 22, se puede observar una

actividad clásica en la que los estudiantes deben realizar un listado de números dada la consigna de escribir los números de 2 en 2, de 100 en 100, de 5 en 5 hasta determinado rango numérico. Sin embargo, esta actividad por sí misma no desarrolla estrategias que permitan adquirir habilidades para contar y agrupar (E2) que son base para la comprensión de algunos principios que organizan el SND en tanto se vuelve un ejercicio mecánico de escritura, no permite identificar algunas dificultades que presentan los estudiantes sobre el conteo, por ejemplo, es recurrente que al contar una colección inicien en conteo desde 1, por lo general cuentan de 1 en 1 y no a saltos. En la ilustración 23 y 24, se puede observar que la enseñanza del valor de posición se realiza apoyándose en representaciones pictóricas y simbólicas para identificar cantidades que deben ser ubicadas en tablas de valor posicional (E4). La ilustración 25 permite observar un ejercicio convencional de descomposición de números en centenas, decenas y unidades (E3). De acuerdo con Llinares (2001), este tipo de ejercicios hacen parte de los ejercicios de la primera fase en la comprensión del SND es la descomposición canónica en: unidades, decenas y centenas. Se requiere proponer situaciones de aprendizaje que les permitan avanzar a otras fases de comprensión del SND en las que se reconozcan múltiples descomposiciones de una cantidad.

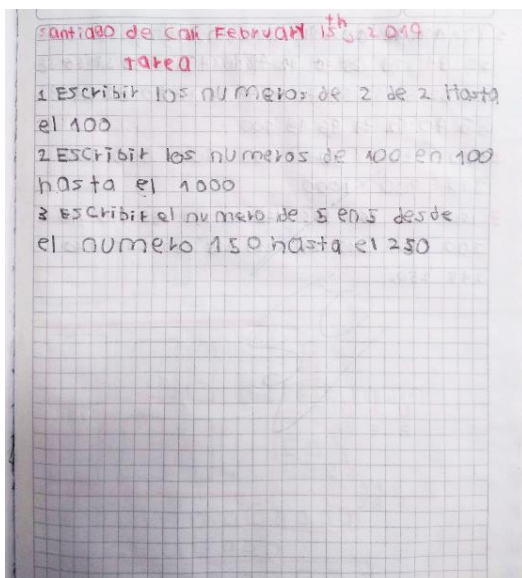


Ilustración 22. Actividad de enseñanza sobre secuencias numéricas Grado Segundo

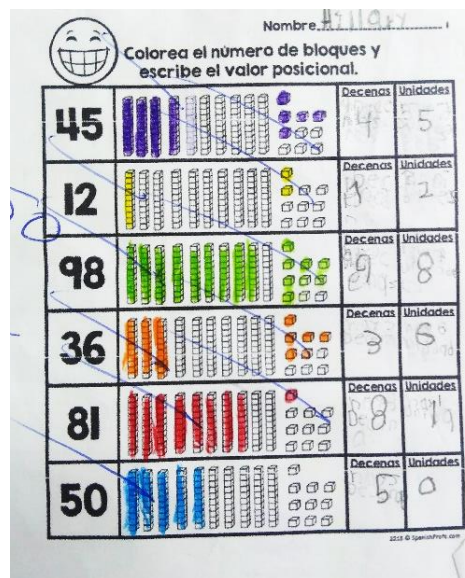


Ilustración 23. Actividad de enseñanza sobre el valor posicional. Grado segundo

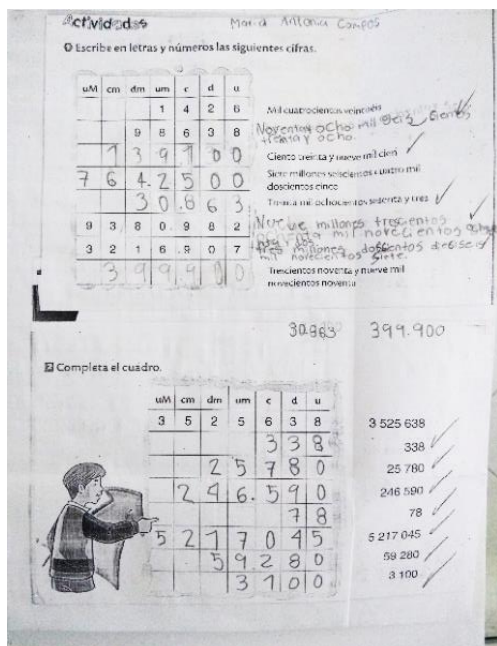


Ilustración 24. Actividad de enseñanza sobre el valor posicional. Grado tercero.

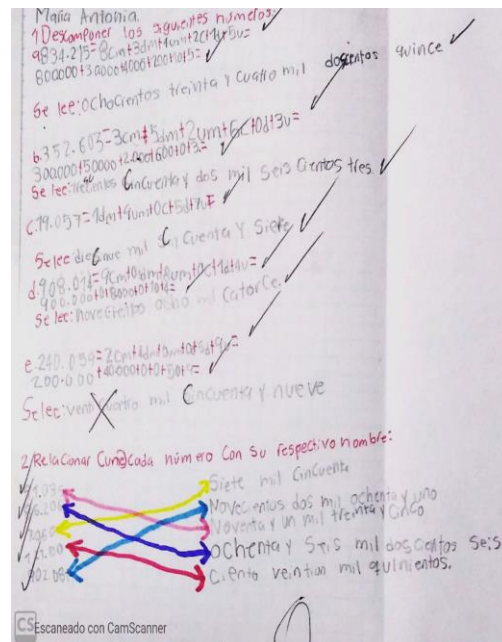


Ilustración 25. Actividad de enseñanza sobre composición y descomposición numérica.

Las ilustraciones 26 y 27, permiten identificar actividades que los docentes proponen sobre el desarrollo de las operaciones aritméticas y el uso de los principios del SND en el uso de los algoritmos. Los registros muestran como los estudiantes se apoyan en la idea de las “llevadas” y “pedir prestado” para desarrollar el algoritmo convencional de la suma y de la resta, el docente de grado segundo se apoya de manera gráfica para explicar la idea de reagrupamiento en las adiciones (E11). Los docentes desarrollan actividades en las que se usan únicamente algoritmos formales y cálculos precisos (E12, E13), la construcción de sentido numérico implica el uso de algoritmos inventados, promover la estimación, el cálculo mental y el uso de estrategias informales que permitan el uso de las características del SND para un uso flexible de los números y las operaciones.

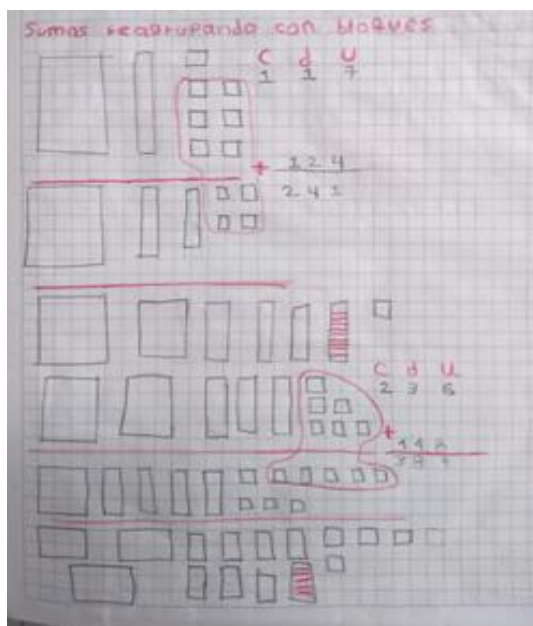


Ilustración 26. Actividad de enseñanza de la adición en grado segunda

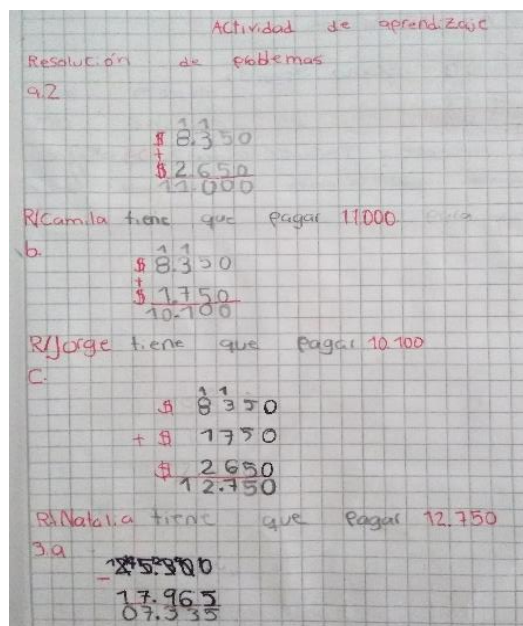


Ilustración 27. Actividad de enseñanza de la adición y la sustracción en grado tercero.

Al indagar en los docentes ¿qué fortalezas y limitaciones reconoce en su experiencia y formación para enseñar el SND? Docente A – *En el caso mío que no soy formado en el área de matemáticas yo nunca me acostumbre a trabajar con el material concreto, yo recuerdo de niño y posteriormente en el colegio que la matemática siempre fue muy abstracta, entonces ahora encuentro hasta para mí la dificultad de trabajar con el material concreto. En su momento yo lo aprendí más rápido y más fácil de esta manera, entonces tomarme el tiempo de llevar la ficha formemos esta cantidad, pasemos estas fichas acá sumamos esto con esto y ya, ese ha sido un gran problema para mí ahora que estoy trabajando matemáticas, ahora los libros trabajan eso, antes no... Por ejemplo los conceptos de agrupar y desagrupar los vine a escuchar en tus acompañamientos de PTA, pero uno no escuchaba hablar de eso y como mi área de formación no es esa, cómo así que para sumar se agrupa y para restar se desagrupa antes uno decía llevar... ahora al trabajar con estos chicos y veo que los libros de texto proponen unas actividades diferentes a veces siento como el bloqueo, cuesta trabajo, fijémonos en la representación pictórica que aparece allí cuantos cuadritos hay en esa columna, pero si en mi momento fue más fácil llegar al algoritmo y se pasaba al tema siguiente. Docente B – en este momento considero como fortaleza las capacitaciones que he recibido en PTA. Como limitación considero que mi formación no fue en matemáticas, a veces uno recurre al método tradicional de como uno aprendió en la escuela, lo que le*

enseñaron a uno, entonces uno olvida un poco aplicar lo que le han enseñado en las capacitaciones y vuelve un poco a lo tradicional.

En las dos respuestas ofrecidas por los docentes se identifica como una fortaleza su participación en los acompañamientos de formación que ofrece el Programa Todos a Aprender (PTA) para ampliar su conocimiento disciplinar sobre la enseñanza de las matemáticas escolares. También las respuestas evidencian como limitación no tener una formación en matemáticas teniendo que recurrir a la enseñanza de las matemáticas escolares a partir de sus concepciones y creencias, las cuales se han consolidado teniendo en cuenta lo que se propone en los libros de texto o de la forma como ellos mismos aprendieron las matemáticas durante su escolaridad. Se evidencia una fuerte intención de los docentes por implementar nuevas estrategias teniendo en cuenta la actualización que se proporciona desde los acompañamientos realizados por PTA, pero también se reconoce que se requiere fortalecer el Conocimiento Didáctico de los profesores para no recurrir en algunas prácticas tradicionales de enseñanza de las matemáticas.

4.3.2.3. Oportunidades de enseñanza y el aprendizaje.

A continuación se analizan las respuestas dadas por los docentes sobre las oportunidades de aprendizaje para el desarrollo de Sentido Numérico en la comprensión del SND.

Se plantea a los docentes la situación 2 (ver apéndice B), para identificar cual era la dificultad que estaba presentando la estudiante, cuando se le propuso demostrar de varias maneras el resultado de $39 + 52$. La estudiante optó por realizar el algoritmo convencional y usar los bloques de Dienes para corroborar el resultado, como se muestra en la ilustración 28.

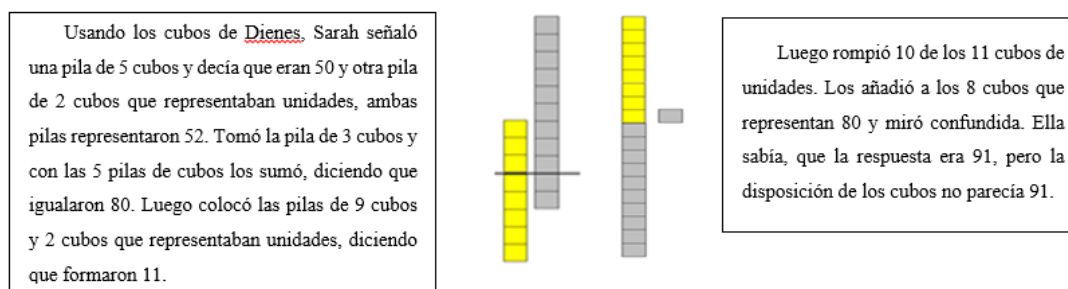


Ilustración 28. Situación 2 Apéndice B. Situaciones para reconocer el sentido numérico.

Durante la entrevista no era muy clara la dificultad que estaba presentando la estudiante en la situación propuesta para la reflexión. Después de la mediación de la investigadora al explicar la representación gráfica de lo sucedido en la situación, el docente logra responder: *Le está añadiendo más a la escala de las decenas no puede pasarse de nueve, ella llegaría hasta los nueve y lo demás debe pasarse a las decenas... debe tener en cuenta que en la fila de las decenas no puede ir más de 9 por que ya se pasaría al siguiente.* Investigadora: ¿Qué le falta a Sarah en el paso de la unidad a la decena? Docente: *tener claro lo que inicialmente si tuvo en las unidades, supo que no debía pasarse de nueve, necesita conceptualizar bien cuando estamos hablando de unidades y cuando estamos hablando de decenas y que no puede ir mas de determinado número de cuadros en una de esas categorías.* La respuesta evidencia la necesidad de fortalecer el conocimiento didáctico del docente en relación con los términos de la estructura conceptual, el docente habla de escala de las decenas haciendo referencia a la unidad de orden de las decenas. De acuerdo con Llinares (2001) las nociones de agrupamiento y valor de posición permiten la construcción de sentido numérico en la comprensión del SND. Así entonces, el reconocimiento del principio de agrupamiento sucesivo es fundamental para el diseño de tareas que se proponen para la enseñanza del SND (ver tarea 2 de la situación 1 de la Unidad Didáctica Guía, Apéndice C). Este tipo de situaciones permiten comprender las acciones de reagrupar y desagrupar, que no son tan transparentes al efectuar el algoritmo convencional de la suma y la resta de manera vertical y por tanto, se incluyen algunas concepciones equivocadas como las “llevadas” y el “pedir prestado”, tal y como se observó en la ilustración 25 del apartado anterior. De igual manera, el uso de material manipulable, puede emplearse en variadas situaciones que van más allá de lo que proponen convencionalmente los libros de texto, de representar un número en unidades, decenas y centenas.

Algunos ejemplos de situaciones que pretenden promover la construcción de sentido numérico al comprender el SND son: la tarea 3 de la situación 1 y la tarea 2 de la situación 2 propuestas en la Unidad Didáctica Guía (ver apéndice C), su propósito es explorar varias formas para pensar y escribir los números como composición de otros, usando representaciones concretas, pictóricas o simbólicas y las conexiones entre estos tipos de representación o representaciones concretas o representaciones que permitan la conexión entre lo simbólico y lo concreto.

Así mismo, se reflexionó con los docentes sobre el tipo de situaciones que proponen para la comprensión del valor posicional, el docente A – *primero trabajo con el ábaco... ellos mismos lo representan de manera pictórica, los ponía a dibujar o les daba la figura que representaba el valor de posición y ellos con color representaban los números, coloreaban según la cantidad que yo les daba, tienen tantas fichas distribúyanlas en esas varitas cuantas se ubican en las unidades, las decenas y las centenas con distintos colores*. La docente B – *saber ubicar en la tabla de valor posicional, que sepan el valor de cada cifra de acuerdo a la posición que tienen... los ejercicios de valor posicional los saco de los libros*. Estas respuestas evidencian la fuerte influencia de los libros de textos en las situaciones que se proponen para comprender el valor de posición. De acuerdo con Llinares (2001), la comprensión del valor de posición es fundamental en la construcción de sentido numérico para la comprensión del SND, por tanto, se requiere proponer situaciones en las que se deba componer números usando diversas composiciones con el valor posicional, diferentes al trabajo convencional en unidades, decenas y centenas, que usualmente se observan en los libros de texto y son planteadas por los docentes. La segunda tarea de la situación 2 propuesta en la Unidad Didáctica Guía, y la situación 3 propuesta en la entrevista, que se presenta en las ilustraciones 29 y 30, retoman una de las tareas para evaluar la comprensión del valor de posición planteadas en los trabajos de Bednarz y Janvier en 1982 (como se citó en Sowder, 1992) de tal manera que se promueva la construcción de sentido numérico, mediante diversas composiciones del valor posicional.

Situación 3.

El propósito de la actividad consiste en que los estudiantes compongan un número dado en la consigna, usando la cantidad de tarjetas que sean necesarias. Las tarjetas se muestran a continuación.

0 unidades	1 unidades	2 unidades	3 unidades
4 unidades	5 unidades	10 unidades	11 unidades
12 unidades	3 decenas	4 decenas	5 decenas
40 decenas	41 decenas	42 decenas	43 decenas
45 decenas	51 decenas	3 centenas	5 centenas

El docente indica la siguiente consigna:

El número que se va adivinar se encuentra entre 402 y 513. Deben adivinar el número y representarlo con las tarjetas.

Ilustración 29. Situación 3 propuesta en la entrevista

Al reflexionar con los docentes las anteriores situaciones, el docente A – *Por lo general este tipo de actividad no se propone, lo que uno hace es que siempre se le da el número, es lo que uno ve en los libros de texto y lo que hace el estudiante es como desagrupar ese número, identificar los distintos valor de posición que tiene cada número, por ejemplo 420, 4 centenas, 2 decenas, 0 unidades, eso si se hace. Se hace una deconstrucción, una descomposición tradicional en decenas y unidades que es lo convencional o por ejemplo que numero forman 4 centenas, 2 decenas, 5 unidades, muchas veces se le da el orden. Es la primera vez que veo un ejercicio como este, es que en los libros de texto no viene.*

Incluso para los docentes las situaciones propuestas son novedosas, manifiestan no haber conocido una actividad como esta. Al proponerle al Docente A realizar una composición con las tarjetas con un criterio restrictivo, evidencia la dificultad que supone realizar este ejercicio, ello se pudo apreciar en el siguiente fragmento de entrevista.

Investigadora: ¿si tuvieran que componer el 53 que tarjetas usaría?

Docente: 5 decenas 3 unidades.

Investigadora: si uno les diera el criterio restrictivo de no usar 5 decenas y 3 unidades se complejiza el ejercicio.

Docente: Si claro, ya debería usar tres tarjetas, que es algo que el estudiante no está acostumbrado a hacer, por ejemplo 45 decenas más 5 unidades y 3 unidades, el estudiante no está acostumbrado a sumar más unidades.

Investigador: ¿Y cuánto son 45 decenas?

Parte B: Se entrega a cada pareja de estudiantes una caja con la siguiente disposición:

10 decenas	10 unidades	12 unidades	4 unidades
6 unidades	15 decenas	3 decenas	4 decenas
13 decenas	1 unidades	2 unidades	2 centenas
1 centena	14 decenas	5 decenas	3 unidades
11 unidades	5 unidades	12 decenas	0 unidades

Materiales por equipo: 5 tapas de gaseosa (reellenas de plastilina para que sean más pesadas), tabla de registro, lápices, una canasta pintada de 4 colores diferentes.

Cada estudiante lanza las 5 tapas hacia la canasta, de acuerdo al lugar donde caen las tapas hace el registro y determina que numero se conforma.

	Valor de la celda	Equivalencia numérica en unidades
Tapa 1	Ej. 10 decenas	100 unidades
Tapa 2		
Tapa 3		
Tapa 4		
Tapa 5		
Número conformado		

Activa

Ilustración 30. Tarea 2 Situación 2 UDG

Docente: ¿Dije 45 decenas? Son 450, estaba pensando en algo diferente. El restrictivo 5 decenas no. No se podría.

Investigadora: Por ejemplo 10 unidades más 12 unidades tendríamos 22.

Docente: ¿Podemos usar más tarjetas? Pensé que solamente se podían usar tres.

Investigadora: siempre tenemos ese concepto de descomponer en unidades, decenas y centenas es lo convencional y lo más conocido.

De acuerdo con Llinares (2001), el tipo de actividad que refiere el docente en sus respuestas se clasifica en la fase uno del desarrollo del conocimiento decimal, en la que los estudiantes reconocen únicamente una descomposición del número en unidades, decenas y centenas. La descomposición en unidades estándar no es suficiente para el desarrollo de sentido numérico en los estudiantes y no garantiza que realmente el estudiante comprenda el valor de posición de cada una de las cifras en tanto se convierte en un ejercicio mecánico de ubicar los dígitos en un orden convencional, centenas, decenas y unidades. Si se intercambia el orden o se propone por ejemplo 22 decenas y no 2 centenas y 2 decenas, se presentan dificultades por la falta de comprensión del valor de posición y del verdadero significado de cada una de las unidades de orden (Llinares 2001). Pensar sobre los números y usarlos de una manera flexible requiere de situaciones y tareas que les permita a los estudiantes ver los números en diferentes composiciones y descomposiciones. Así entonces se origina la fase 2, en la que los estudiantes reconozcan descomposiciones y recomposiciones flexibles, una característica propia del sentido numérico (Llinares, 2001).

Llinares (2001) propone una fase 3 en la comprensión del SND para la construcción de sentido numérico. En esta fase se requieren desarrollar habilidades que permitan usar la comprensión de la numeración para dotar de sentido la aritmética formal, es decir, relacionadas con el uso de la numeración y las propiedades de los números para explicar el funcionamiento de algoritmos informales y formales de las operaciones. Teniendo en cuenta lo anterior, se proponen situaciones y tareas de aprendizaje en las que los estudiantes hagan uso de estrategias de cálculo informales o “inventadas”.

Para generar la reflexión de los docentes entorno a esta tercera fase, se les propuso la situación 1 de la entrevista (ver apéndice B, ilustración 31) y la situación 3 de la Unidad Didáctica Guía (ve apéndice C, ilustración 32).

Las dos formas de pensar de Jorge: $\begin{array}{l} 29 + 10 = 39 \\ 39 + 1 = 40 \\ 40 + 1 = 41 \\ 12 + 20 = 32 \\ 32 + 8 = 40 \\ 40 + 1 = 41 \end{array}$	Las dos formas de pensar de David: $\begin{array}{l} 29 + 12 = \\ 20 + 12 = 32 \\ 9 + 32 = 41 \end{array}$ because I know that 9 + 2 = 11 $\begin{array}{l} 11 + 30 = 41 \\ 10 + 30 = 40 \\ 40 + 1 = 41 \end{array}$ Se pidió a David que explicara por qué tenía que llevar 1, pero no pudo explicarlo claramente. El conoce los pasos del algoritmo tradicional, pero no parece relacionar este procedimiento con lo que entiende sobre cómo los números se componen de decenas y unidades.
Razonamiento de Ángela: $29 + 12 = 41$	Razonamiento de Danny: I counted by 1s. $10 + 1 = 41$ There are 11 students and adults going to the

Ilustración 31. Formas de razonamiento.
Situación 1 Entrevista

Respecto a las situaciones propuestas en la fase 3 se identifican las siguientes reflexiones por parte de los docentes. Docente A – *Hay estrategias muy ingeniosas que a mí no se me hubiera ocurrido. La de Jorge me parece una estrategia muy interesante de ir buscando completar decenas y descomponer algunos números. Poder descomponer los números, identificar que es mucho más fácil de la adición sumar para encontrar decenas es mucho más fácil, por ejemplo, $20 + 10$, $30 + 10$ y así no tiene que complicarse con las unidades que pueden demorarse más.*

Docente B – *La forma como lo resolvió Jorge es más adelantada, en la primera forma descompuso el 12 en 10 y 2 unidades y en la segunda forma descompuso el 29. La forma como lo resolvió Jorge tiene relación con el SND por que se apoyó en descomposiciones. Investigadora: Por lo general cuando trabajamos la adición se enseña el algoritmo vertical. ¿En el aula haz trabajado algo similar a lo que hizo Jorge?*

Docente B: *si yo les trabajo en el aula la forma horizontal porque a ellos se les dificulta mucho, siempre se trabaja el método convencional de manera vertical, cuando se les pone una adición horizontal ellos se equivocan, yo les digo a ellos que deben tener muy claro la posición de cada cifra, entonces al hacer el cálculo, las unidades van con las unidades y si le da más de diez se lleva una decena.*

Investigadora: *Por ejemplo Jorge no sumo $29 + 12$ horizontalmente, sino que uso descomposiciones ¿Haz involucrado en el aula este tipo de razonamientos como el de Jorge?*

Docente B: *No, en tercero no trabajo este tipo de descomposiciones porque me parece que ellos se confunden más. Pero si me parece interesante con cantidades pequeñas, que ellos lo*

Tarea 1: Usando estrategias diferentes.

Se presenta a los estudiantes la siguiente situación para que sea analizada y describan con sus propios argumentos matemáticos en qué consisten las estrategias utilizadas por los personajes para resolver ejercicios de suma y resta.

Maria José está pensando cómo resolver sumas. Observa:



Estrategia 1: Para resolver esta suma pienso que $22 + 16$ es lo mismo que $28 + 10 = 38$
Estrategia 2: Para resolver esta suma pienso que $12 + 28$ es lo mismo que $10 + 30 = 40$

Joaquín también tiene sus propias estrategias para resolver restas. Observa:

Estrategia 1: Para resolver esta resta pienso que $23 - 12$ es lo mismo que $21 - 10 = 11$
Estrategia 2: Para resolver esta resta pienso que $34 - 15$ es lo mismo que $39 - 20 = 19$



Ilustración 32. Estrategias inventadas. Tarea 1, Situación 3 UDG

puedan hacer para que se familiaricen con ello, porque es muy importante, los lleva a ellos a desarrollar cálculo mental.

Las respuestas proporcionadas por los docentes permiten identificar que el trabajo sobre los números y las operaciones se realiza desde los grados iniciales privilegiando el uso del algoritmo convencional de la suma y de la resta, porque es lo que comúnmente se presenta en los libros de texto. Para los docentes las situaciones presentadas en las que se promueve el cálculo mediante el uso de estrategias informales o inventadas resulta ser algo novedoso, a tal punto de considerarlo como una expectativa de aprendizaje para los grados superiores de la básica primaria. Desde los primeros grados escolares es necesario promover situaciones de aprendizaje en las que los estudiantes hagan uso de estrategias informales o inventados antes de iniciar el trabajo con algoritmos formales, en las que se desarrollen habilidades tales como el uso del 10 como unidad iterativa en el conteo, en la descomposición, en el redondeo de cantidades, la habilidad de multiplicar y dividir mentalmente por potencias de 10, que permiten generar estrategias no estándares en la resolución de operaciones evidenciando una comprensión del número y las operaciones (Llinares 2001).

Por tanto, se requiere favorecer oportunidades de aprendizaje en las que los estudiantes al resolver las situaciones de aprendizaje, generen procedimientos diferentes, en los que se evidencie flexibilidad al operar con los números demostrando así una buena comprensión del valor posicional, lo cual es fundamental cuando se intenta aplicar algoritmos inventados para desarrollar los cálculos (Llinares 2001). La flexibilidad en el trabajo con los números, la comprensión del valor posicional y la estimación son características de la construcción de sentido numérico y la comprensión del SND. Ejemplos de posibles situaciones de aprendizaje que promueven el uso de estrategias diferentes a la aplicación del algoritmo convencional se pueden observar en las tareas propuestas en la situación 3 de la UDG.

Las reflexiones anteriores nos permiten identificar las necesidades de formación de los docentes sobre aspectos tanto conceptuales como cognitivos de la enseñanza y aprendizaje del SND, por tanto, se requiere fortalecer el conocimiento didáctico de los docentes de tal manera que en su competencia de planificación consideren diversas oportunidades de aprendizaje para la construcción de Sentido Numérico.

4.3.3. Consideraciones finales sobre los análisis

De acuerdo con los análisis presentados en este apartado sobre la información de las categorías de estudio que estructuran este trabajo, se presentan algunas consideraciones generales que han sido caracterizadas y descritas sobre la formación de profesores, el modelo didáctico-curricular y el MLAD. Por tanto, se reconoce que las respuestas expresadas por los profesores son diversas y corresponden a sus experiencias propias, por ello a continuación, se presentan algunos elementos básicos necesarios en la formación del profesor de matemáticas del primer ciclo de educación básica primaria.

Respecto a la formación de profesores, se esperaba reconocer en estos una formación matemática fundamentada en los desarrollos de la Didáctica de las Matemáticas, que les permita desarrollar competencias y actitudes relacionadas con su desempeño profesional, es decir, fundamentar sus prácticas a partir de conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sobre el currículo, sobre el contenido matemático escolar y un conocimiento sobre los contextos socioculturales de sus estudiantes, de manera que les permita transformar su práctica a partir de reflexiones integrales que articulen los elementos anteriormente expuestos.

En lo que respecta al modelo didáctico-curricular, se esperaba identificar una concepción epistemológica sobre la enseñanza de las matemáticas acorde a los referentes planteados en el modelo propuesto, tales como, una perspectiva sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje que considere las prácticas de los individuos para la construcción de sentido y significado sobre los conocimientos matemáticos; una perspectiva fenomenológica que permita reconocer los fenómenos que organiza un objeto matemático de tal manera que el docente desarrolle una comprensión más amplia que le permita propiciar ambientes para la construcción de sentido por parte del individuo. Además, se esperaba reconocer que las propuestas de los profesores se situaran en el marco de un enfoque funcional del currículo en el que los conocimientos matemáticos permiten el desarrollo de estrategias cognitivas particulares del sujeto, que articule el uso de diferentes representaciones para dar solución a una situación y permitan desarrollar el pensamiento del estudiante a partir del ejercicio de su autonomía.

En relación con el MLAD propuesto en este trabajo que articula los análisis didácticos de contenido y cognitivo, se espera que los profesores en su formación profesional desarrollen conocimientos sobre referentes históricos, fenomenológicos, de la estructura conceptual y de los sistemas de representación que posibiliten establecer diferentes significados de los contenidos matemáticos que favorecen el reconocimiento de expectativas de aprendizaje, limitaciones y oportunidades de enseñanza y aprendizaje que se consideren en las propuestas curriculares que estos diseñan a partir de este conocimiento didáctico.

Así entonces, el análisis histórico provee al docente de información que le permite comprender las etapas de desarrollo histórico del SND, así como las nociones y principios, como el conteo, la correspondencia uno a uno, el principio de recurrencia, la noción de sucesor, el número como cardinal y ordinal, el principio de base y principio de posicionalidad, que dieron origen a este. Si bien estos se identificaron de manera implícita en las prácticas y propuestas de enseñanza de los docentes, se requiere de un conocimiento consciente de este que les permita ampliar su comprensión sobre el objeto matemático de estudio y se comprenda la intencionalidad de algunas de las propuestas de enseñanza del SND encontradas en los materiales que usan para apoyar su práctica.

Por su parte, el análisis de los sistemas de representación, le permite reconocer al docente las diversas formas en las que se puede expresar un mismo concepto a través de varios sistemas, lo cual es clave para dotar de significado un concepto matemático. Por tanto se requiere un conocimiento del docente sobre otros sistemas de representación como el sistema gráfico el cual le permite emplear otras representaciones para el SND como la recta numérica, las configuraciones puntuales, la banda numérica, entre otras. Se requiere del uso articulado entre sí de los diferentes sistemas de representación – verbal, simbólico, manipulativo y gráfico – para la adquisición de significado del objeto matemático.

Sobre el análisis de la estructura conceptual, se esperaba que los docentes identificaran los conceptos y procedimientos que caracterizan el SND para el desarrollo de sus propuestas de enseñanza. Así entonces, es clave para el docente el reconocimiento de conceptos como sucesor, antecesor, mayor que, menor que, los convenios para la representación en el SND, la periodicidad de las unidades de orden, la función de cada cifra de acuerdo a la potencia que representa, el orden de los términos; y procedimientos como las destrezas asociadas a las

expresiones de un mismo número como resultado de las diferentes operaciones, diferentes representaciones del mismo número y el uso de la calculadora, reconocimiento de las regularidades numéricas, uso de estrategias de cálculo mental, estimación, reconocimientos de patrones numéricos. Esta información le permite al docente identificar los focos conceptuales del tópico matemático escolar para su organización coherente para la estructuración de los contenidos y la secuenciación de las tareas de aprendizaje a proponer.

Por su parte, el análisis de los modos de uso, proporciona información sobre el sentido de los conceptos y de los procedimientos, sus usos posibles y su funcionalidad. Así entonces, se necesita que el docente amplíe su conocimiento sobre los contextos en los que se usa en SND, como representación oral y escrita del número en contextos como cardinal, ordinal, medida, contar, agrupar, comparar, ordenar; los fenómenos que organiza como es la representación de números elevados con la menos cantidad de símbolos posibles; la aplicación del SND en diversas situaciones para la producción e interpretación de escrituras numéricas, comparar ordenar y operar con las escrituras numéricas.

Las expectativas de aprendizaje como unidad de análisis, permite reconocer los alcances que se espera que los estudiantes aprendan en durante un ciclo específico de la escolaridad. Por ello, se hace necesario que los docentes reconozcan los objetivos específicos y las competencias asociadas al SND que posibilitan la construcción de sentido numérico como el razonamiento y uso reflexivo de diferentes procedimientos, operaciones y relaciones numéricas. Además de los conocimientos mencionados, se espera que los profesores reconozcan capacidades que privilegian la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, para ello, requieren destacar objetivos específicos que se integren con las competencias y procesos definidos en el currículo de matemáticas.

Sobre el organizador referido a las limitaciones en la enseñanza y el aprendizaje cuya información aporta información sobre los errores y dificultades que pueden presentarse en las prácticas de enseñanza y aprendizaje del SND. Se espera entonces que en la formación del profesor del primer ciclo de básica primaria, se definan posibles dificultades y errores que estén relacionadas con los objetivos específicos seleccionados en el currículo escolar para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND.

La categoría de oportunidades de enseñanza y aprendizaje suministra información relativa a circunstancias y experiencias que plantean retos y tareas para promover la comprensión del SND desde la perspectiva de la construcción de sentido numérico. A partir de la información relacionada en esta categoría se plantea la necesidad de considerar algunas situaciones y tareas que el profesor en formación puede considerar para promover la integración de expectativas de aprendizaje, conceptos, procedimientos y materiales que favorezcan la construcción de sentido numérico en las propuestas de enseñanza del SND.

En el siguiente capítulo, se describen algunas reflexiones y recomendaciones finales del presente trabajo de investigación relacionadas con el conocimiento didáctico de los profesores en ejercicio, del primer ciclo de educación básica primaria, para la enseñanza y aprendizaje del SND en la perspectiva de la construcción de sentido numérico, y sobre el modelo didáctico - curricular que fundamenta las decisiones, actuaciones y propuestas del profesor en ejercicio.

Capítulo 5: Conclusiones

En este capítulo se presentan algunas conclusiones y reflexiones didácticas relacionadas con la información suministrada por los profesores del estudio de caso y descrita en el capítulo anterior, en relación con la pregunta y los objetivos que orientan este trabajo de investigación. Dichas conclusiones y reflexiones se generan al contrastar la aproximación teórica que proporciona el marco conceptual, desde una dimensión objetiva, en relación con la caracterización del conocimiento didáctico que los profesores evidencian en los encuentros de formación y en sus propuestas de enseñanza del SND, para la construcción de sentido numérico, desde una perspectiva subjetiva.

5.1. Conclusiones generales

En relación con el *objetivo específico (O1)*, el cual pretendía caracterizar el conocimiento didáctico relacionado con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND mediante situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición, a través de un modelo local de análisis didáctico y un modelo didáctico-curricular en la formación de profesores de educación básica primaria, se puede concluir que:

- La caracterización del conocimiento didáctico relacionado con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND en situaciones relacionadas con las nociones y situaciones fenoménicas de agrupamiento y valor de posición, solicita configurar en este trabajo un Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD), que permita caracterizar y reconocer las relaciones históricas, epistemológicas, fenomenológicas, disciplinares, didácticas y curriculares que el profesor en ejercicio evidencia o requiere en su conocimiento didáctico y expresa estas ideas a través de discursos y propuestas educativas que consideran la construcción de sentido numérico a través de la enseñanza del SND.
- El desarrollo de conocimiento didáctico en los profesores que enseñan matemáticas a partir del estudio de un modelo de análisis didáctico de carácter local les ayuda a transformar y reformar sus prácticas profesionales sobre las matemáticas escolares en contextos (socioculturales, curriculares y didácticos), así como a fortalecer sus propuestas didácticas y curriculares.

- Desde la perspectiva histórica, se reconoce el SND como un desarrollo histórico y sociocultural que responde a diferentes fenómenos que permiten dotarlo de significado y sentido a través de prácticas socialmente compartidas. Por tanto, es necesario comprender y conocer los fenómenos que dieron origen al SND para la enseñanza de este contenido matemático escolar. Dichos fenómenos como, el *conteo* para proponer situaciones que tengan en cuenta destrezas para contar como la correspondencia biunívoca o el emparejamiento, el *recuento* como destreza para contar una colección de elementos sin importar el orden para enumerarlos, el *principio de recurrencia* que da origen a la noción de sucesor, identificar el aspecto cardinal y ordinal del número, la historia de la *simbolización* de los números que dio origen a los principios de la base, agrupamiento y valor de posición del SND como sistema de representación de los números.

- El conocimiento de un contenido matemático escolar requiere del dominio de sus sistemas de representación y de las formas de representar una misma propiedad a través de diferentes representaciones que permiten identificar propiedades de los conceptos y procedimientos. Además, el uso articulado de los diversos sistemas de representación como el *simbólico*, *gráfico*, *verbal*, y *manipulativo* permite ampliar los significados, relaciones y propiedades de un contenido matemático escolar. Dicho uso articulado requiere reconocer la complejidad del paso de una representación a otra, pues el uso de algunas representaciones de manera aislada dificultan la adquisición de significado del contenido matemático escolar. Por ejemplo, se requiere hacer conscientes a los docentes sobre el uso de los manipulativos que usan para representar el SND, para que en ellos reconozcan las características del SND en dichos materiales, como es el caso de materiales con características posicionales y no posicionales.

- El reconocimiento de la estructura conceptual permite identificar relaciones y conexiones entre conceptos y procedimientos inscritos en la estructura del SND. Estos conceptos y procedimientos se consideran focos de interés para la enseñanza y el aprendizaje de este contenido escolar, posibilitando la clasificación de hechos, conceptos, estructuras, destrezas, razonamientos y estrategias que se consideran en las rutas de enseñanza de este contenido en cada ciclo escolar. Reconocer los elementos que conforman la estructura conceptual requiere de una formación matemática que les permita a los docentes comprender las relaciones de las redes complejas que articulan los conceptos y procedimientos en torno

al SND, para establecer las posibles formas de organizar las propuestas educativas y diseñar actividades que atiendan a dicha organización. Dada la densidad y complejidad del estudio del SND, este trabajo considera las nociones de agrupamiento y valor de posición, como una de las posibles rutas para la enseñanza y aprendizaje de este contenido matemático escolar, al considerarse como dos características que aportan a la comprensión del sistema y a la construcción de sentido numérico por parte de los estudiantes.

- La información suministrada por el análisis de los sentidos y modos de uso permite organizar las situaciones de enseñanza mediante el reconocimiento de la pluralidad de sentidos y significados según la función de uso que el SND adopta al retomarse en situaciones para representar, codificar y decodificar números en escenarios referidos a la necesidad de comunicar, operar, estimar y calcular cantidades numéricas en diferentes fenómenos. El conocimiento sobre los sentidos y modos de uso de un contenido en referencia a los conceptos y procedimientos, posibilita completar los significados desarrollados en los sistemas de representación y la estructura conceptual del contenido matemático escolar.

- Para la definición de las expectativas de aprendizaje se requiere que el profesor tenga un conocimiento curricular de lo que se espera que los estudiantes aprendan en un nivel o ciclo escolar. Este conocimiento le permite al docente por una parte, identificar la progresión de los aprendizajes a lo largo de un grado y ciclo escolar; por otra parte, le permite establecer objetivos específicos para el diseño de actividades que favorezcan el desarrollo de competencias sobre el SND y la construcción de sentido numérico. El MLAD propuesto en este trabajo ha definido unos objetivos específicos sobre el aprendizaje del SND para la construcción de sentido numérico, los cuales surgen de la articulación de las expectativas de aprendizaje que se presentan en los referentes curriculares nacionales y la caracterización de las capacidades para la construcción de sentido numérico.

- Comprender las limitaciones en la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático escolar le permite al profesor prever los errores y dificultades que los estudiantes pueden evidenciar durante las actividades de aprendizaje. Por ello, es necesario que el docente reconozca los errores que son recurrentes en los aprendizajes de los estudiantes bien sea a partir de su identificación en la práctica o el estudio de estos errores a través de la consulta de trabajos producidos al interior de la Didáctica de las Matemáticas. Así mismo, es necesario que el docente reconozca sus propias errores, limitaciones y dificultades de

enseñanza generados en su propia experiencia formativa y laboral, que se presentan en su práctica al enseñar el SND para la construcción de sentido numérico.

- El conocimiento sobre las oportunidades de enseñanza y aprendizaje le permite al profesor identificar experiencias que relacionan tareas para la superación de las limitaciones de aprendizaje que ha reconocido y para el alcance de las expectativas de aprendizaje propuestas. Así entonces, las oportunidades de aprendizaje para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del SND, requiere que el docente reconozca para la definición de las situaciones de aprendizaje las experiencias socioculturales de los estudiantes y al uso intencionado de diferentes materiales que permitan acceder a los conocimientos y usos flexibles del SND que benefician la construcción de sentido numérico mediante el desarrollo de destrezas innovadoras que se fundamenten en los principios, reglas, propiedades, relaciones y operaciones con el sistema de numeración.

- En la construcción del MLAD se identifica el sentido numérico como competencia cognitiva que se desarrolla de manera gradual y se caracteriza por la construcción de capacidades que permitan el uso de manera flexible de los números y las operaciones sin limitarlo a la destreza de los estudiantes en los algoritmos tradicionales. Así entonces, se destaca la importancia cognitiva y estructural del SND y las situaciones fenoménicas de agrupamiento y de valor de posición que permiten la comprensión significativa (esto es con sentido y funcional) de los sistemas numéricos correspondientes. Por tanto, el SND como contenido matemático y sociocultural, permite acceder a otros conocimientos matemáticos, considerándose por tanto en un conocimiento base para el desarrollo de pensamiento numérico y relacionado con desarrollo de otros pensamientos matemáticos.

- Es preciso reconocer, por parte del docente, la importancia de la construcción de sentido numérico no solo en los primeros grados, también es necesario que esta construcción se promueva en todos los grados escolares, dado el carácter multidimensional del sentido numérico y la importancia de la formación matemática que todo ciudadano requiere para la comprensión de las matemáticas de manera significativa (con sentido) para el desarrollo de las actividades matemáticas de su cotidianidad y para la toma de decisiones financieras y entre otras en el ejercicio de su ciudadanía.

- El desarrollo de este trabajo de investigación requirió concretar y desarrollar un plan de formación por parte de la autora del trabajo que permitió obtener la información necesaria

para delimitar tanto el estado del arte como el marco conceptual del mismo. Con base en esto, se configuró el Modelo Local de Análisis Didáctico propuesto en este primer objetivo específico.

- Este trabajo también ha puesto de manifiesto y permitido concluir que las personas interesadas en realizar procesos de investigación en el campo de la educación matemática, como los formadores de profesores, deben contar con conocimientos necesarios para hacer Análisis Didáctico. Así entonces, dadas las características y los conocimientos que se han identificado en los docentes en ejercicio que han participado en este estudio con formación en diversas áreas de conocimiento pero distinta a la un profesor (Licenciado) en Matemáticas, estos conocimientos les resultan limitados para la realización de Análisis Didáctico, entendido este en un sentido amplio como la práctica (competencia) profesional docente de planificación, ejecución y evaluación de propuestas de enseñanza, comprensión (con sentido) y aprendizaje de las matemáticas. Así entonces, el desarrollo de un MLAD es una construcción que puede ser realizada por investigadores y formadores de profesores para que sea presentado a los docentes y la información proporcionada por dicho modelo sea tenido en cuenta en el diseño de propuestas de aprendizaje.

- El proceso para determinar y reflexionar sobre los conocimientos didácticos de un contenido matemático de enseñanza requiere de formadores de profesores o tutores que reconozcan la información suministrada en componentes didácticos, curriculares, epistemológicos, fenomenológicos y disciplinares que permitan comprender las decisiones educativas de los profesores en ejercicio. En este trabajo estos componentes se presentan mediante un Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD) que sustenta las situaciones y tareas de la Unidad Didáctica Guía (UDG) propuesta, que posibilita a los profesores aproximarse a conocimientos didácticos a partir de la integración de aportes teóricos y prácticos apoyados en experiencias y situaciones socioculturales que caractericen las prácticas educativas.

- Un resultado de este trabajo es la propuesta de un modelo didáctico-curricular, entendido como un marco fundamentado en principios teóricos que integran la perspectiva sociocultural, una perspectiva desde la fenomenología didáctica y un enfoque funcional del currículo, que permite comprender la práctica de los docentes y caracterizar su conocimiento

didáctico. Este modelo permite contrastar las concepciones y la práctica del profesor a partir de sus ideas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

- La integración del modelo didáctico- curricular y el MLAD propuesto en este estudio como estrategia de intervención, puede redimensionar el diseño, planificación y evaluación de programas de formación inicial de profesores de matemáticas basados en elementos teóricos que permiten generar conocimientos didácticos fundamentados en principios históricos, fenomenológicos, estructurales, representativos y curriculares que posibilitan la reflexión sobre los obstáculos y limitaciones presentes en el sistema didáctico de estos planes de formación.

En relación con el *objetivo específico (O2)*, describir el conocimiento didáctico de los profesores del primer ciclo de básica primaria al analizar los elementos que estructuran el modelo didáctico-curricular y el modelo local de análisis didáctico mediante una entrevista y un taller para el análisis de una Unidad Didáctica Guía sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal mediante situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y valor de posición, se concluye lo siguiente:

- Se reconoce en los profesores, poca información sobre el SND como objeto matemático y objeto desarrollado a partir de aspectos históricos, sociales y culturales, es decir, los profesores participantes de este trabajo proponen situaciones y tareas a partir de los desarrollos de los libros escolares, pero estas prácticas no se complementan con la información relacionada con las situaciones y necesidades que han permitido la ampliación del objeto de conocimiento, para considerarlos en la planeación y evaluación de sus actividades de enseñanza y aprendizaje.

- Las estrategias y formas de abordar la enseñanza de las matemáticas escolares se relacionan con la comprensión que el profesor ha desarrollado sobre el sentido de enseñarlas y cómo se desarrolla la comprensión de los contenidos matemáticos del currículo escolar. Por tanto, el diseño de propuestas de enseñanza como las intervenciones durante las clases de matemáticas dependen de la comprensión que el profesor haya desarrollado para la enseñanza del objeto de conocimiento y sobre los procesos de aprendizaje que siguen los estudiantes en relación con dicho objeto.

- Caracterizar los conocimientos didácticos que los profesores en ejercicio de básica primaria, ponen de manifiesto en su práctica, permite comprender las ideas, propuestas y discursos que estos promueven en sus prácticas de enseñanza, sobre la construcción de sentido numérico para la comprensión del SND. Por tanto, para el desarrollo de este trabajo se ha propuesto una Unidad Didáctica Guía (UDG), que se considera como un dispositivo que permite acceder y utilizar conocimientos didácticos y curriculares en relación con la información relacionada en el Modelo Local de Análisis Didáctico, tales como las componentes de la estructura conceptual, algunos sentidos y modos de uso, múltiples representaciones, aspectos epistemológicos y fenomenológicos relacionados con el SND como objeto de conocimiento matemático y sociocultural. Igualmente, la UDG considera las expectativas de aprendizaje, las limitaciones y las oportunidades de enseñanza y aprendizaje, para la construcción de sentido numérico en las propuestas para la comprensión del SND.

- El desarrollo del conocimiento didáctico permite a los profesores reflexionar sobre los objetos matemáticos de enseñanza y sobre los fenómenos que estos organizan como ideas centrales para diseñar y mediar la enseñanza y comprensión de los contenidos matemáticos a través de un enfoque funcional del currículo escolar. Debido a la complejidad y especificidad de tal conocimiento, se requiere necesariamente una formación sobre estos conocimientos, dado que algunos de los maestros que enseñan matemáticas se les dificulta ampliar su conocimiento didáctico debido a su nivel de formación profesional, la terminología empleada en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, la complejidad y especificidad conceptual de los contenidos matemáticos escolares, la reflexión crítica sobre los objetos matemáticos de enseñanza y las estrategias propias para realizar Análisis Didáctico.

- El análisis de las situaciones propuestas en la entrevista y las tareas que estructuraron la UDG, permite evidenciar en los docentes participantes, el reconocimiento de algunos aspectos que requieren fortalecer sobre su conocimiento didáctico, tales como: el desarrollo histórico del SND, el agrupamiento sucesivo como principio del SND, las descomposiciones aditivas y aditivas multiplicativas, el uso de estrategias informales o inventadas en la solución de problemas, una amplia comprensión del valor de posición, el uso de variados sistemas de representación y las conexiones entre estos, entre otros aspectos. Es decir, la reflexión propiciada en los encuentros de formación les permitió a los docentes generar una toma

conciencia sobre aquellos aspectos que desconocen y que requieren conocer para transformar sus prácticas para la enseñanza del SND en la perspectiva de construcción de sentido numérico.

- En el desarrollo de este trabajo, en referencia a los sistemas de representación, se pudo identificar que los profesores utilizan la representación gráfica de los materiales en sus propuestas para que los estudiantes comprendan algunas características (agrupación para hacer cambios de una unidad a otra y reconocer las unidades de valor de posición) del SND; hacen uso de la manipulación de materiales para recrear los usos sociales de este contenido matemático escolar y facilitar la comprensión del mismo; usan la representación simbólica para describir relaciones aritméticas, centrando su desarrollo de manera intuitiva en los principios de agrupamiento en base diez y de valor posicional. Sin embargo, no se explicita a través de sus discursos la necesidad de tomar conciencia sobre la falta de tareas para favorecer los principios aditivo y multiplicativo como parte de la base conceptual del SND, además, emplean de manera inconsciente el sistema de representación verbal cuando explicitan algunas reglas del sistema, los términos relacionados en este contenido escolar, la sintaxis para expresar y designar verbalmente las cantidades numéricas. Por tanto, se plantea la necesidad de complementar los conocimientos que los profesores han desarrollado sobre los sistemas de representación a partir del uso de distintos registros que funcionen como modelos del SND para desarrollar significados amplios, capturar, comprender y desarrollar la comprensión de los conceptos y sus relaciones, así como el uso de estrategias flexibles para estimar y calcular basadas en el dominio del SND.

- En los encuentros formativos y el taller realizado con los profesores participantes, se reconoce que estos describen una diversidad de términos asociados a la enseñanza del SND sin diferenciar cuales son conceptos y procedimientos, también, en las entrevistas se evidencia que ellos consideran en sus prácticas los principios de base decimal, posicional y de orden de posición. Además, se reconocen algunas ideas descritas por estos que requieren organizarse a partir de la identificación de focos prioritarios, hechos, conceptos, relaciones, destrezas, razonamientos y estrategias que les permitan diseñar rutas de aprendizaje asociadas al SND.

- Las situaciones y procesos fenomenológicos que se consideran por parte de los docentes participantes al diseñar propuestas de enseñanza sobre el SND, se apoyan en tareas

de agrupamiento con actividades intuitivas relacionadas con cambios en unidades de orden superior desconociendo otras situaciones en las que se realicen múltiples agrupaciones que permiten componer un número de manera flexibles o en situaciones fenomenológicas relacionadas con el valor de posición limitadas al reconocimiento y descomposición convencional de la tabla de unidades de posición, tal como estas se presentan en los textos escolares. A partir de la información obtenida en este trabajo, se plantea la necesidad que el profesor de matemáticas del primer ciclo de Educación Básica Primaria, avance hacia un nivel de dominio donde reconozca términos, contextos, fenómenos y situaciones donde estas nociones tengan sentido de uso.

- En la práctica del profesor se reconoce que la definición de las algunas expectativas de aprendizaje propuestas para la enseñanza del SND, se encuentran influenciadas principalmente por algunos aspectos abordados en los libros de texto y además tienen en consideración algunas ideas básicas presentadas en los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016). Lo anterior evidencia la necesidad de fortalecer el conocimiento curricular por parte del profesor para la determinación de las expectativas de aprendizaje que favorezcan la construcción de sentido numérico, permitan seleccionar las propuestas y materiales que posibiliten el desarrollo de competencias asociadas a la comprensión del SND.

- El reconocimiento de limitaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje por parte de los profesores se favorece a través de la reflexión sobre algunas situaciones de enseñanza en las que los docentes y los estudiantes utilizan diferentes sistemas de representación para comunicar un procedimiento del SND. Esta estrategia de reflexión permite identificar que las dificultades de enseñanza y aprendizaje van más allá del tiempo requerido para representar situaciones y tareas en clase mediante el uso de materiales para la enseñanza. Así entonces, la información derivada del organizador sobre las limitaciones en la enseñanza y el aprendizaje, permite concluir posibles limitaciones en la comprensión del SND, lo cual requiere de un conocimiento que articule el conocimiento de expectativas de aprendizaje, competencias escolares y situaciones de enseñanza, para identificar algunas dificultades recurrentes en el aula o documentadas en el campo de conocimiento denominado Didáctica de las Matemáticas.

- Reflexionar sobre propuestas basadas en la enseñanza del SND, desde la construcción de sentido numérico, ha permitido a los docentes participantes reconocer los conocimientos profesionales y la complejidad que requiere enseñar contenidos matemáticos desde un enfoque funcional. Por ello, este estudio plantea la necesidad de fortalecer la formación de los profesores en ejercicio a partir de situaciones de enseñanza y tareas de aprendizaje fundamentadas en un MLAD que describa los elementos base para la construcción de sentido de uso sociocultural a partir de perspectivas fenomenológicas desarrolladas al interior de la Didáctica de las Matemáticas.

- En el transcurso de los encuentros con los profesores, participantes del estudio de caso, se logra reconocer a través de los registros de los estudiantes que sus prácticas sobre la enseñanza del SND centra sus esfuerzos en conocimiento de términos, uso de unidades de valor de posición, la lectura y escritura de números, y el desarrollo de operaciones escritas basadas en las relaciones del contenido matemático escolar de referencia, posiblemente porque las propuestas de los textos escolares influyen en el diseño y desarrollo de actividades de enseñanza. Sin embargo, para la construcción de sentido numérico se requiere de estas y otras capacidades como las expuestas en las expectativas de aprendizaje presentadas en el MLAD.

- El fortalecimiento del conocimiento didáctico del profesor le permite consolidar unos criterios para reflexionar críticamente sobre las propuestas escolares, seleccionar unas actividades para la enseñanza, identificar los materiales educativos que posibilitan la comprensión, el reconocimiento de estrategias metodológicas asociadas a la construcción de sentido numérico, reconocer desempeños que caracterizan la construcción de sentido numérico y prever las dificultades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con el SND. Además, este trabajo considera que el estudio del sentido numérico debe ser un foco de interés para quienes desarrollan los currículos escolares y los docentes que diseñan propuestas y se apoyan en materiales que permitan el uso de los números de manera flexible y con sentido.

- La información recolectada en este trabajo, permite comprender que los docentes para el ejercicio de su práctica se apoyan en los libros de texto, como su la principal fuente de información para el diseño de propuestas de enseñanza y por tanto para diseñar actividades y usar materiales que apoyan la comprensión del SND. Pero para complementar estas

decisiones requieren tener un conocimiento que les permita reflexionar críticamente sobre las potencialidades y limitaciones que conlleva el diseño propuestas y el uso de materiales que posibiliten las representaciones para modelar características aditivas, multiplicativas, de agrupamiento y de valor de posición como características que necesitan comprender los estudiantes para acceder al aprendizaje del SND.

- La práctica docente que el profesor de matemáticas desarrolla, refleja un modelo didáctico y curricular espontáneo (en el sentido que no es elaborado y fundamentado teóricamente) caracterizado por la concepción que él tiene sobre las matemáticas (concretamente sobre los objetos matemáticos que enseña), y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Es claro que el enfoque de la formación inicial que han recibido los docentes influye significativamente en su formación actual (permanente), y, por otra parte, que la formación inicial como continuada resulta determinante para el desarrollo de su práctica.

- El proceso de reflexión y formación propuesto en este trabajo, les ha proporcionado a los profesores participantes algunos elementos conceptuales que les permite reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas escolares y les motive a implementar estrategias alternativas que favorezcan la comprensión de las matemáticas con sentido. Es importante continuar desarrollando los conocimientos didácticos de los profesores para que no se retorne a algunas prácticas instrumentales carentes de sentido en el aprendizaje de las matemáticas.

- El desarrollo de este trabajo posibilitó ampliar el conocimiento didáctico de la autora, en relación con el papel y la importancia **cognitiva** del sentido numérico para interpretar y comprender el objeto matemático escolar en cuestión (el SND), así como la relevancia de proponer algunas situaciones didácticas y procesos fenoménicos (asociados al agrupamiento y valor de posición). Es decir, que el conocimiento del formador de profesores de matemáticas se transforma a partir de sus prácticas fundamentadas en un contexto particular, cuando participa y explora en procesos de formación de profesores, quienes desarrollan este conocimiento.

- La autora de este trabajo, en el rol de tutora del Programa Todos A Aprender en la Institución Educativa donde se contextualizó este estudio, ha promovido algunos conocimientos sobre el desarrollo histórico y cultural del SND y los fenómenos asociados a la comprensión de este contenido matemático escolar construido socialmente por los

estudiantes. Sin embargo, durante los encuentros con los docentes participantes se evidencia que sus prácticas de enseñanza, su formación profesional (inicial y/o permanente) y los materiales que emplean para la enseñanza de los contenidos matemáticos, especialmente el SND, necesitan ampliarse a partir de la información suministrada desde un enfoque fenomenológico para dotar de sentido el contenido matemático escolar.

- El proceso de caracterizar el modelo de la práctica del profesor y el MLAD fundamentado en la Didáctica de las Matemáticas, ha posibilitado ampliar el modelo didáctico y curricular de la autora, así como re-significar la práctica formativa, porque se ha considerado la información que suministran las componentes históricas, fenomenológicas, conceptuales y del sistema de representaciones que apoyan la comprensión de situaciones, usos y relaciones que generan sentido funcional del aprendizaje matemático, para fortalecer los talleres desarrollados en el rol de tutora del PTA.

- Ahora bien, esta misma experiencia investigativa desarrollada y concretada a través de los dos objetivos específicos, así como en la formación, desarrollo profesional e intervención en el PTA como tutora y formadora de docentes en ejercicio, sin duda permitió recuperar, socializar⁷, sistematizar y potencializar⁸ la práctica tutorial y formativa de la autora, de tal manera que el ejercicio de reflexionar sistemática y permanentemente sobre la práctica, desde propuestas alternativas de enseñanza, ha permitido entender que en todo plan de formación de profesores de matemáticas, existen concepciones de los docentes sobre los estudiantes, los materiales y la evaluación, que se explicitan en las propias prácticas de enseñanza y obedecen a ideas o experiencias desarrolladas a partir de sus contextos socioculturales, todo lo cual facilitan comprender las matemáticas de modo significativo, esto es con sentido.

⁷ Se denomina socialización al proceso a través del cual los seres humanos aprenden e interiorizan normas y valores de una determinada sociedad y cultura. Es el proceso social por el cual aprendemos a ser miembros de una comunidad, y mediante el cual el ser humano aprende e interioriza, en el transcurso de su vida, los elementos socioculturales de su medio ambiente, los integra a la estructura de su personalidad, bajo la influencia de experiencias significativas.

⁸ Acción de potenciar: potenciación es un término relacionado con el verbo potenciar. Esta acción, por su parte, consiste en aportar potencia (fuerza, capacidad) a alguna cosa. Los dos términos, socializar y potenciar, son principios del método de investigación sociocultural conocido como Sistematización de Experiencias Educativas, que Bedoya (2019), basado en otros autores como Fals-Borda, Jara, entre otros, propone como estrategia de formación y desarrollo profesional docente.

5.2. Reflexiones didácticas

- Uno de los factores asociados al éxito de los procesos de enseñanza y aprendizaje, especialmente de las matemáticas, se ha vinculado socialmente con la formación apropiada del profesorado, de manera que posibilite el desarrollo de competencias didácticas y de capacidades para su desempeño profesional, tal como se ha mencionado en distintas investigaciones. Por tanto, el fortalecimiento de la formación de los profesores, requiere del desarrollo de conocimientos didácticos y curriculares que les permitan definir unas herramientas conceptuales y prácticas necesarias en la toma de decisiones para la planeación de las propuestas educativas, la mediación de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de los contenidos matemáticos escolares. El conocimiento didáctico es la principal fuente de información y formación didáctica, que promueve la reflexión y transformación de las prácticas de los profesores que enseñan matemáticas.

- Los resultados y conclusiones de este trabajo posibilitan la toma de decisiones para la planificación curricular, la mediación en el aula y la evaluación de propuestas de enseñanza centradas en la construcción de sentido numérico a través de la comprensión del SND en programas de formación continuada de profesores de matemáticas que orientan cursos de los primeros grados de escolaridad. Para ello, el modelo didáctico-curricular y el MLAD propuestos en este trabajo pueden ser tenidos en cuenta como referente conceptual para dichos programas de formación dado que este se ha fundamentado por una selección apropiada de organizadores del currículo que suministran información sobre y para el Análisis Didáctico de Contenido (ADC) y el Análisis Didáctico Cognitivo (ADCg).

- Se requiere proporcionar, vivenciar y reflexionar con los docentes sobre variadas situaciones que permitan explorar fenómenos, representaciones, usos y sentidos asignados al SND en diferentes propuestas académicas que vinculan el uso específico de algunos materiales, de tal manera que le permita proponer oportunidades de enseñanza que enriquezcan la comprensión del SND en la perspectiva de construcción de sentido numérico. Sumado a esto, en los talleres, cursos o programas de formación a profesores que enseñan matemáticas se requiere reflexionar, aproximar y acceder a la información suministrada por comunidades académicas organizadas en torno al desarrollo de conocimientos propios del campo de la Didáctica de las Matemáticas, concebida como una disciplina que apoya las prácticas profesionales del docente que orienta estos contenidos matemáticos escolares.

- Se propone ampliar el conocimiento curricular, de los profesores en ejercicio, en relación con las expectativas de aprendizaje (expectativas, objetivos específicos y competencias) desde el reconocimiento de referentes evaluativos de la actividad matemática en la enseñanza del SND para la construcción de sentido numérico, es decir, generar propuestas curriculares y de aula que propendan por el desarrollo de las capacidades que permiten la construcción de sentido numérico (Sowder, 1994a, 1994b), tales como, el reconocimiento de representaciones y algoritmos diferentes al estándar, el uso de estrategias o procedimientos propios que posibiliten operar cantidades de manera flexible, a partir del dominio conceptual y procedimental de las propiedades y relaciones de los números y las operaciones. Es decir, que el desarrollo del sentido numérico en los estudiantes, depende de la conciencia y reflexión que realiza el propio profesor sobre las situaciones de enseñanza que favorecen la construcción de sentido numérico.

- La participación de la autora de este trabajo en procesos de formación en la Maestría en Educación con Énfasis Educación Matemática y el desarrollo del presente trabajo de investigación, han permitido ampliar los conocimientos didácticos relacionados con la comprensión del SND y la construcción de sentido numérico, favoreciendo el desarrollo de capacidades para la toma de decisiones en relación con el diseño de currículos enfocados a la construcción de sentido numérico, para la planificación, selección de materiales educativos y evaluación de propuestas de enseñanza, así como, incorporar estrategias fundamentadas en el análisis didáctico para el desarrollo de los acompañamientos en el aula y en el desarrollo de las sesiones de formación propias en el desempeño como docente tutora del Programa Todos a Aprender.

5.3. Perspectivas para futuros desarrollos

El desarrollo de este trabajo de investigación considera que la formación del profesor de matemáticas es un campo que permite ampliar las capacidades profesionales de los docentes a partir del fortalecimiento de su conocimiento didáctico basado en el estudio de elementos básicos como las categorías didácticas y curriculares presentadas en las unidades de estudio que se han tenido en cuenta para consolidar el conocimiento didáctico teórico y su concreción en el diseño de un MLAD y en la UDG correspondiente. A partir de ello, a continuación se

presentan algunas perspectivas de desarrollo para posibles estudios sobre el conocimiento didáctico y sus implicaciones conceptuales, procedimentales y actitudinales en la práctica sociocultural sobre la enseñanza de las matemáticas.

Una primera perspectiva es la modelación de propuestas de Unidades Didácticas Guía y materiales de enseñanza con profesores en ejercicio o en formación inicial, por parte de los formadores de profesores en encuentros de formación en los que se analicen y discutan dichos recursos, para reconocer los conocimientos, ideas y propuestas alternativas que consideren la información de conocimientos didácticos en torno a un contenido matemático determinado, estructurado en un MLAD.

Conformar o consolidar comunidades de aprendizaje de profesores en ejercicio en las que se pueda aproximar a los docentes con formaciones en diversas áreas del conocimiento a los desarrollos producidos en la comunidad académica en el campo de la Educación Matemática (DM&FPM), para analizar, reflexionar, documentar y ampliar sus conocimientos didácticos, de tal manera que les permita la producción propia de propuestas alternativas e innovadoras para la enseñanza de la numeración y las operaciones.

El MLAD propuesto en este trabajo proporciona un sistema de categorías que permite realizar análisis crítico de los libros de texto en los que se apoya el docente para el desarrollo de su práctica. Estas categorías permiten una reflexión de dicho recurso que considere un enfoque funcional del currículo y se reflexione sobre los contenidos matemáticos escolares en torno a sus significados y sentidos, desde una perspectiva cognitiva que tenga en cuenta el desarrollo de habilidades en torno a la construcción de sentido numérico.

El MLAD propuesto sirve como referencia para diseñar programas de formación inicial o permanente basados y fundamentados en la Didáctica de las Matemáticas y la Formación Profesional de los Profesores de Matemáticas (concebidos como campos disciplinares) para favorecer los conocimientos didácticos de los profesores en torno a un tópico matemático de enseñanza.

Considerar la información suministrada en este estudio sobre el sentido numérico, para desarrollar propuestas de investigación relacionadas con otros contenidos matemáticos escolares situados desde el pensamiento numérico. Teniendo en cuenta el carácter multidimensional del sentido numérico y el desarrollo de amplias capacidades para un

pensamiento flexible sobre los números y las operaciones, la comprensión de los números y sus aplicaciones, es importante el desarrollo de trabajos que relacionen la construcción de sentido numérico con otros contenidos matemáticos escolares como por ejemplo, la construcción de sentido numérico en la comprensión de las fracciones en sus diversos contextos, entre otros.

Bibliografía

- Almeida, R., y Bruno, A. (2015). Mirar los números con sentido. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (70), 9-15.
- Askew, M. (2008). Mathematical discipline knowledge requirements for prospective primary teachers, and the structure and teaching approaches of programs designed to develop that knowledge. En P. Sullivan & T. Wood (Eds.) *The International Handbook of Mathematics Teacher Education VOLUME 1: Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 13-35). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Azcarate, P. (2014). Formar educadores matemáticos: un gran reto. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (66), 9-18.
- Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (29), 14-22.
- Baroody, A. J., & Barberán, S. (1988). *El pensamiento matemático de los niños: Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid, España: Visor Distribuciones.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras*. (Tesis doctoral) no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.
- Bedoya, E. (2019). Didáctica de las Matemáticas: conocimiento y análisis didáctico, formación de profesores, innovación curricular e investigación en educación matemática. (Documento de Trabajo, no publicado). Área de Educación Matemática, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Bressan, A. M., Gallego, M. F., Pérez, S., y Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista Bases teóricas. *Educación*, 63.
- Bartolomé, O., y Fregona, D. (2003). El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales. En M, Panizza. (Comp). *Enseñar*

matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB. Análisis y propuestas. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

- Cardenoso, J. M., Flores, P., y Azcarate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro, 233-244.
- Castro, E., Castro, E., y Torrealbo, M. (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En L. Rico., J. L. Lupiáñez., y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 141-160). Granada, España: Comares.
- Castro, E., y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En P, Flores y L, Rico. (Coords) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria.* (109-128). Madrid, España: Pirámide.
- Castro, E., y Molina, M. (2013). Números naturales y sistemas de numeración. En I, Segovia y L, Rico. (Coords) *Matemáticas para maestros de educación primaria.* (47-74). Madrid, España: Pirámide.
- Castro, E., y Molina, M. (2015). Enseñanza y aprendizaje del número natural y del número entero. En P, Flores y L, Rico. (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria.* (187-203). Madrid, España: Pirámide.
- Fernández, J. (2016a). Errores y dificultades. En L, Rico y A. Moreno. (Coords) *Elementos de didáctica matemática para el profesor de Secundaria.* (pp. 195- 207). Madrid, España: Pirámide.
- Fernández, J. (2016b). Análisis de contenido. En L, Rico y A. Moreno. (Coords) *Elementos de didáctica matemática para el profesor de Secundaria.* (pp. 103- 118). Madrid, España: Pirámide.
- Filstead, W. J. (1986). Métodos cualitativos. Una experiencia necesaria en la investigación evaluativa. En T. D. Cook & CH. S. Reichardt, *Métodos cualitativos y cuantitativos de investigación evaluativa.* (pp. 59-79). Madrid, España: Ediciones Morata.

- Flores, P. (2016). Textos para el currículo de matemáticas. En L. Rico y A. Moreno. (Coords) *Elementos de didáctica matemática para el profesor de Secundaria*. (pp. 69- 84). Madrid, España: Pirámide.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. New York, Estados Unidos: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. (1991). Didactical Principles. En H. Freudenthal (Ed.), *Revisiting Mathematics Education: China Lectures* (pp. 45 – 124). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Flores, P., y Moreno, A. (2014). Formar profesores de matemáticas de primaria para las nuevas competencias. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, (66), 19-27.
- Flores, P., y Lupiáñez, J. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno. (Coords) *Elementos de didáctica matemática para el profesor de Secundaria*. (pp.177-207). Madrid, España: Pirámide.
- Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. *Granada: Gami*, 91-95.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.
- Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F., y Pinzón, A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste. *Educación y Educadores*, 19 (3), 315-338. Obtenido de <http://www.scielo.org.co/pdf/eded/v19n3/0123-1294-eded-19-03-00315.pdf>
- Gómez, P., y Rico, L. (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Documento no publicado. Granada, España: Universidad de Granada.
- Gómez, P., y González, M. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico., J. L. Lupiáñez., y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación*,

- formación de profesores e innovación curricular* (pp. 121-140).). Granada, España: Comares.
- Guacaneme, E. A., Obando, G., Garzón, D., y Villa-Ochoa, J. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(Especial), 11-49.
- Gutiérrez, A., (2012). *Conocimiento didáctico sobre números y operaciones de los estudiantes españoles de magisterio en TEDS-M*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.
- Hernández, O., López, J., Quintero, A., y Velásquez, A. (2015). *El sentido numérico: más allá de los números*. San Juan, Puerto Rico: Createspace.
- Hurtado, C. A. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la educación básica*. (Tesis de maestría). Instituto de educación y pedagogía. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Ifrah, G., (1987). *Las cifras historia de una gran invención*. Madrid, España: Alianza editorial S.A.
- Ifrah, G., (1997). *Historia universal de las cifras*. Madrid, España: Espasa-Calpe.
- Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 13-36.
- Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski and T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, (4) (pp. 1-13). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- MEN (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas*. Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia. Obtenido de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

- MEN (2013). Guía uno: Sustentos del Programa para la transformación de localidad educativa. Programa todos a aprender. Obtenido de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-10659_archivo_pdf_sustentos_junio27_2013.pdf
- MEN (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Panamericana formas e impresos S.A.
- Lerner, D., y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En C, Parra., e I, Sainz. (Comps). *Didáctica de las matemáticas* (pp. 95 – 184). Buenos Aires, Argentina: Paidós Educador.
- Ley N° 115. Congreso de la República de Colombia, Santa Fe de Bogotá, Colombia. 8 de Febrero de 1994. Recuperado de http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.
- Lupiáñez, J. (2013). Análisis didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, M. Molina. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-101) Granada, España: Comares.
- Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L, Rico y A. Moreno. (Coords) *Elementos de didáctica matemática para el profesor de Secundaria*. (pp.119- 138). Madrid, España: Pirámide.
- Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E, Castro. (Ed) *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. (pp. 151- 175) Madrid, España: Síntesis.
- Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teachers educator as learners. En A. Gutiérrez & P. Boero. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. (pp. 429-459). Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática*. 7 (10), 53-62. Costa Rica
- Llinares, S. (2014). Conocimiento de matemáticas y tareas en la formación de maestros. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 9(12), 205-220. Costa Rica. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/18921/19035>
- Maza, C. (1991). El sistema de numeración decimal. En C, Maza. (Ed.), Enseñanza de la suma y de la resta. (pp. 105 – 111). Madrid, España: Síntesis.
- NCTM (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Edición en castellano. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES".
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Estados Unidos: National Council of Teachers of Mathematics.
- Orozco, M. (2003). Formación de docentes de primaria en la comprensión del sistema de notación en base diez. *Revista EMA*, 8 (1), 3-29.
- Poveda, M. A. (2006). *Matemática a la medida de los niños el sistema decimal de numeración*. Instituto para la investigación y el desarrollo pedagógico, IDEP de Bogotá.
- Ponte, J., & Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and practices. En A. Gutiérrez & P. Boero. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. (pp. 461-494). Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.
- Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas. *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. (pp.83-97) Barcelona España: Graó
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. (coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la*

- enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación-Horsori.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 9(Extraordinario 1), 103-129.
- Radford, L. (2014a). De la teoría de la objetivación. *Revista latinoamericana de Etnomatemática*. 7(2), 132 – 150
- Radford, L., Moura, M. O., & Moretti, V. (2014b). Entrevista con Luis Radford sobre la teoría de la objetivación. *Revista Ruta Maestra*. 9. 33-37.
- Ressia, B. (2003). La enseñanza del número y el sistema de numeración en el nivel inicial y el primer año de la EGB. En M. Panizza. *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós,
- Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España: ICE- Horsori.
- Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y su conocimiento didáctico. En P, Flores y L, Rico. (Coords) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. (pp. 21-40). Madrid, España: Pirámide.
- Rico, L. (2016). Matemáticas escolares: fines educativos y estructura curricular. En L, Rico y A. Moreno. (Coords) *Elementos de didáctica matemática para el profesor de Secundaria*. (pp.31- 44). Madrid, España: Pirámide.
- Rico, L., y Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista Suma*, (58), 7-23.
- Lupiáñez, J., y Rico, L. (2010). Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, 54, 14-30.

- Ruiz, J. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno. (Coords) *Elementos de didáctica matemática para el profesor de Secundaria*. (pp.139- 151). Madrid, España: Pirámide.
- Rojas, N., Flores, P., y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, M. Molina. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 191-208) Granada, España: Comares.
- Salinas, M. (2008). Errores sobre el sistema de numeración decimal de estudiantes de magisterio. *En Investigación en educación matemática: comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM*, celebrado en La Laguna del 4 al 7 de septiembre de 2007 (pp. 381-392). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA* 5(4), 129-145.
- Schifter, D., Bastable, V., & Russell, S. J. (2016). Number and Operations, Part 1: Building a System of Tens. Casebook. National Council of Teachers of Mathematics.
- Socas, M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria. Buenas prácticas. *Educatio siglo XXI*, 29(2), 199-224.
- Sowder, J. (1992a). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 371-389). New York. United States of America: Macmillan Publishing Company
- Sowder, J. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. (pp.557-51). New Jersey. United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. Lester. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.157-223). Charlotte, United States of America: Information Age Publishing.

- Sosa, L. (2014). Introducción a la sesión I. Formación del profesor de matemáticas: Dos acercamientos al estado del arte en México. En Flores, García, Hernández & Sosa (Eds.), *Matemática educativa: La formación de profesores*. (pp. 31-32). México DF. México: Ediciones Díaz de Santos, S.A.
- Terigi, F., y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de educación*. (pp. 59-83).
- Vásquez, J. (2020). *Conocimiento didáctico para la enseñanza del número natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida a través de la construcción de sentido numérico en la formación del docente de primer ciclo de educación básica primaria*. (Trabajo de Maestría). Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Apéndices

Apéndice A: Entrevista inicial docente.

Categoría de análisis	Pregunta central	Preguntas auxiliares
Formación de profesores	¿Ha participado en cursos o talleres sobre la enseñanza de las matemáticas en su formación de licenciatura, postgrado o a través de programas de cualificación?	¿En qué Universidad realizaron estos estudios? ¿Cómo ha desarrollado el conocimiento que tiene para enseñar matemáticas? ¿Qué materiales (libros o guías) utilizaban en los cursos o talleres de enseñanza de las matemáticas? ¿Durante estos cursos o talleres recibieron alguna formación relacionada con la enseñanza del SND?
Modelo didáctico - curricular	¿Qué es lo más importante que un estudiante debe aprender sobre el pensamiento numérico en el primer ciclo de Básica Primaria?	¿Por qué es importante la enseñanza del SND en el primer ciclo de básica primaria? ¿Qué conocimientos sobre el SND identifica usted han desarrollado los estudiantes hasta el momento? ¿En qué documentos se apoya para planear las actividades de enseñanza sobre el Sistema de Numeración Decimal? ¿Qué tipo de actividades o tareas propone para la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal?
Análisis de contenido	¿Qué situación o situaciones cercanas a los estudiantes utiliza para enseñar el SND? ¿Por qué?	¿Qué características del SND tiene en cuenta para la enseñanza de este contenido escolar? ¿Tiene algún conocimiento sobre la historia del SND?, si es así ¿Qué aspectos sobre la historia del SND tiene en cuenta en sus propuestas de enseñanza?

	• ¿Qué conceptos y procedimientos considera en sus clases para que los estudiantes comprendan el SND?	• ¿Qué situaciones relacionadas con el agrupamiento o el valor de posición propone para la enseñanza del SND? • ¿En qué representaciones apoya sus propuestas de enseñanza sobre el SND? ¿Por qué las considera importantes?
Análisis de cognitivo	• ¿Cómo se organiza la enseñanza del SND en el currículo institucional? • ¿Cuáles capacidades o competencias requieren desarrollar los estudiantes en relación al SND?	• De acuerdo a la organización propuesta en el plan institucional para la enseñanza del SND ¿Qué variaciones o aportes considera se deben tener en cuenta? • ¿Propone actividades en las que se usen las características del SND para desarrollar estrategias de cálculo y estimación? Describa alguna de ellas. • ¿Qué objetivos de aprendizaje pueden relacionarse con la comprensión del agrupamiento y del valor de posición? • ¿Qué recursos o materiales utiliza en la enseñanza del SND para que los estudiantes comprendan el agrupamiento y el valor de posición? ¿Qué potencialidades y limitaciones reconoce en estos materiales y su uso? • ¿Qué fortalezas y limitaciones reconoce en su experiencia y formación para enseñar este contenido escolar? • Además de los textos del PTA usan otros para la enseñanza del SND, ¿cuáles y por qué? ¿Qué actividades de agrupamiento y valor de posición se proponen en ellos? • Hay dos estándares a alcanzar en el primer ciclo de EBP: “Uso representaciones –

		principalmente concretas y pictóricas– para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal”; “Uso representaciones –principalmente concretas y pictóricas– para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal” ¿Qué destrezas o capacidades deben demostrar los estudiantes de acuerdo a estos estándares básicos de competencia? • ¿Qué dificultades de comprensión sobre el SND son comunes en los estudiantes del primer ciclo de EBP?
--	--	---

Apéndice B: Situaciones para indagar por el conocimiento sobre el sentido numérico⁹

Situación 1.

Se presentó la siguiente situación a un grupo de estudiantes de grado segundo para realizarse en 10 minutos:

Una clase de 29 estudiantes se va de viaje al museo de ciencias. Hay 12 adultos que van con ellos. ¿Cuántas personas van en el viaje?

Al realizar una ronda y preguntar sobre sus estrategias empleadas para resolver la situación, se identificó que muchos estudiantes podrían explicar claramente su razonamiento para resolver, entonces, el docente les invito a resolver el problema de una manera diferente.

A continuación se presentan las vías de solución que propusieron algunos estudiantes cuando se les invito a realizarlo de manera diferente:

Las dos formas de pensar de Jorge:

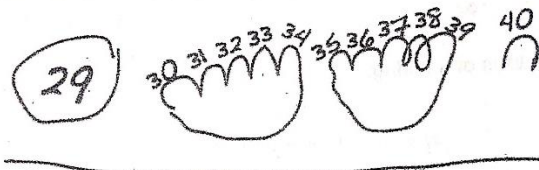
$$\begin{array}{l} 29 + 10 = 39 \\ 39 + 1 = 40 \\ 40 + 1 = 41 \\ 12 + 20 = 32 \\ 32 + 8 = 40 \\ 40 + 1 = 41 \end{array}$$

Las dos formas de pensar de David:

$$\begin{array}{r} 29 \\ 12 + \\ \hline 41 \end{array} \quad \begin{array}{l} 29 + 12 = \\ 20 + 12 = 32 \\ 9 + 32 = 41 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{because I know} \\ \text{that } 9 + 2 = 11 \\ 11 + 30 = 41 \\ 10 + 30 = 40 \\ 40 + 1 = 41 \end{array}$$

Se pidió a David que explicara por qué tenía que llevar 1, pero no pudo explicarlo claramente. El conoce los pasos del algoritmo tradicional, pero no parece relacionar este procedimiento con lo que entiende sobre cómo los números se componen de decenas y unidades.

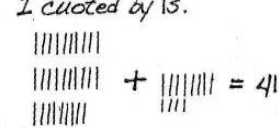
Razonamiento de Ángela:



$$29 + 12 = 41$$

Razonamiento de Danny:

I counted by 1s.



$$15 + 26 = 41$$

There are 41 students and adults going to the

⁹ Las situaciones 1 y 2 de este apéndice fueron retomadas de los casos propuestos en el Capítulo 1 Students' addition and subtraction strategies de Number and Operations, Part 1: Building a System of Tens. Casebook. National Council of Teachers of Mathematics. La situación tres fue retomada de los trabajos de Bednarz y Janvier (1982) sobre la comprensión del valor posicional, citados en Sowder(1992).

Preguntas para analizar la situación dada:

1. ¿Qué sentido tienen las estrategias empleadas por los estudiantes?
2. ¿Qué habilidades requiere el estudiante para poder desarrollar la actividad?
3. ¿Considera usted que las habilidades para desarrollar la actividad propuesta están relacionadas con el Sistema de Numeración Decimal y por qué?
4. ¿Qué otros materiales pueden usarse para complementar esta tarea?
5. ¿Qué se tareas se pueden proponer para ayudar a David, Ángela y Danny a comprender las reglas del sistema de numeración decimal?

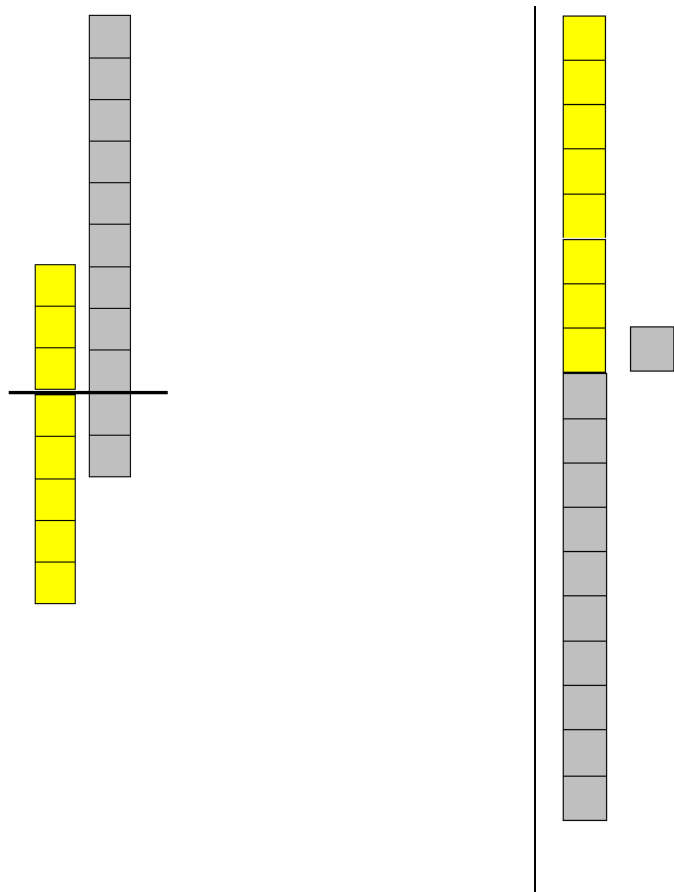
Situación 2.

Trabajando con estudiantes de grado 3 adiciones de dos dígitos, se busca entender qué piensan los estudiantes sobre lo que está pasando con los números. Trabajan en parejas y luego comparten las soluciones. **Debían demostrar varias maneras de resolver $39 + 52$: 91**

Sarah y su compañera probaron con dos métodos, con un método habían llegado a la respuesta 91. Pero decidieron probar otro método usando los cubos.

Usando los cubos de Dienes, Sarah señaló una pila de 5 cubos y decía que eran 50 y otra pila de 2 cubos que representaban unidades, ambas pilas representaron 52. Tomó la pila de 3 cubos y con las 5 pilas de cubos los sumó, diciendo que igualaron 80. Luego colocó las pilas de 9 cubos y 2 cubos que representaban unidades, diciendo que formaron 11.

Luego rompió 10 de los 11 cubos de unidades. Los añadió a los 8 cubos que representan 80 y miró confundida. Ella sabía, que la respuesta era 91, pero la disposición de los cubos no parecía 91.



Sarah había demostrado en lecciones anteriores que ya podía usar el algoritmo convencional para resolver este tipo de problema.

Preguntas para analizar la situación dada:

1. ¿Qué propósitos de aprendizaje se relacionan con la situación propuesta?
2. ¿Qué dificultades está presentando Sarah al desarrollar la actividad?
3. ¿Qué actividades se pueden proponer para ayudar a Sarah a realizar la articulación entre la representación y el algoritmo vertical?
4. ¿Qué relación tienen los dos procedimientos con la comprensión del sistema de numeración decimal?
5. ¿Qué otro tipo de materiales o representaciones complementan esta tarea de enseñanza?

Situación 3.

El propósito de la actividad consiste en que los estudiantes compongan un número dado en la consigna, usando la cantidad de tarjetas que sean necesarias. Las tarjetas se muestran a continuación.

0 unidades	1 unidades	2 unidades	3 unidades
4 unidades	5 unidades	10 unidades	11 unidades
12 unidades	3 decenas	4 decenas	5 decenas
40 decenas	41 decenas	42 decenas	43 decenas
45 decenas	51 decenas	3 centenas	5 centenas

El docente indica la siguiente consigna:

El número que se va adivinar se encuentra entre 402 y 513. Deben adivinar el número y representarlo con las tarjetas.

El docente pasa por las mesas de trabajo y orienta si el número secreto es mayor o menor que el número que estén representando y continúa la actividad.

Preguntas para analizar la situación dada:

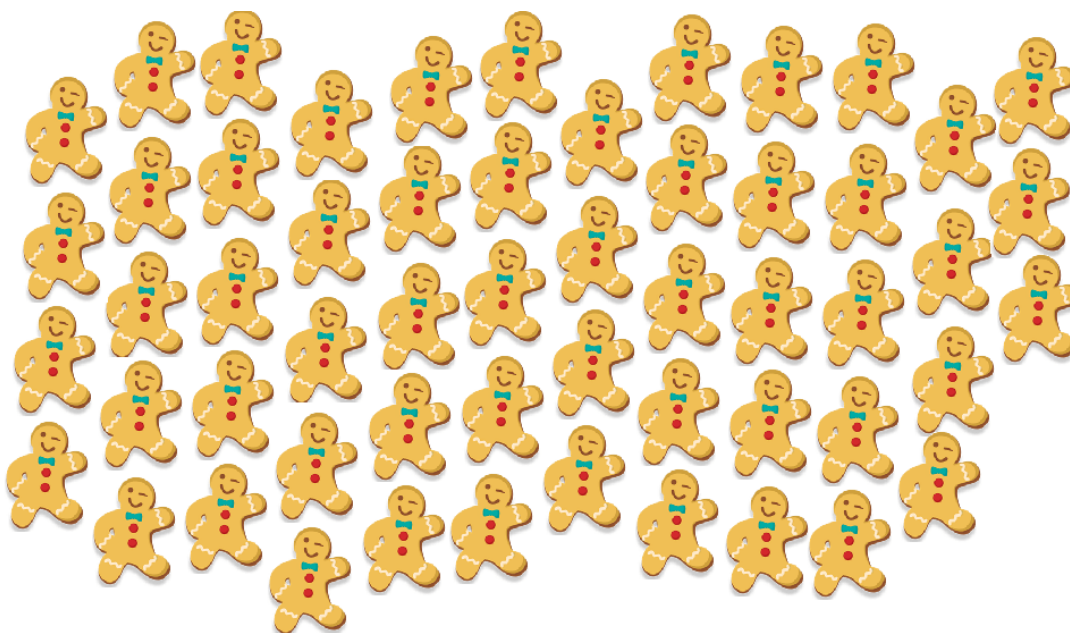
1. ¿Cómo crees que se relaciona esta situación con la enseñanza del sistema de numeración decimal?
2. ¿Qué habilidades consideras se requieren por parte del estudiante para el desarrollo de la situación?
3. ¿Qué dificultades pueden presentar los estudiantes al desarrollar la situación?
4. ¿Qué tipo de representaciones se pueden proponer para apoyar la comprensión sobre el valor posicional?
5. ¿Cómo se relacionan las habilidades que los estudiantes desarrollan en esta actividad con la resolución de problemas?

Apéndice C. Unidad Didáctica Guía: Comprendiendo nuestro Sistema de Numeración Decimal

Situación 1: Contando y agrupando.

Tarea 1: Contando galletas

1. En una fábrica de alimentos se ha hecho un pedido de galletas como se puede ver en la siguiente imagen.



- Para comenzar, sin contar las galletas estima ¿Cuántas galletas crees que hay en la imagen? Escribe la cantidad de galletas en la línea _____
- Para saber cuántas las galletas hay de manera más rápida ¿Qué estrategia podemos usar?
- Se deben empacar las galletas que muestra la imagen en cajas de 12. Representa usando las cajas de 12 que aparecen a continuación completando con puntos simbolizando las galletas.

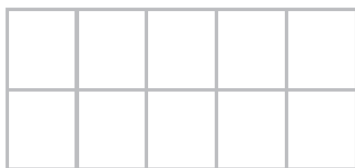
- ¿Cuántos grupos de 12 se pudieron formar y cuántas galletas quedaron sueltas?

Tarea 2: Empacando galletas

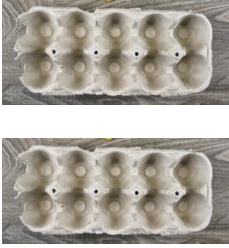
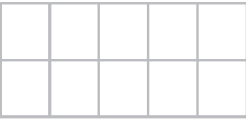
Parte A: Organizados en parejas, se entrega una bolsa con fichas que representan unidades de galletas (127 galletas), se entrega una caja de 10 en cartulina y un panel de huevos adaptado como se muestra en la imagen y un tapete de valor posicional.



Panal de huevos para agrupar decenas



Caja de 10 en cartulina para las unidades

Centenas	Decenas	Unidades
		

Tapete de valor posicional

Se pide a los estudiantes que observen la cantidad de fichas entregadas y respondan las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas galletas creen que hay en la bolsa entregada?
- ¿Hay más o menos de 100?
- ¿Cómo lo saben?

Se propone a los estudiantes que piensen y mencionen estrategias para contar más rápido las galletas dadas en la bolsa.

Para empacar las galletas nos apoyaremos en el siguiente procedimiento: Usa la caja de 10 de cartulina para ir contando las galletas por unidad, una vez se complete la caja de 10, estas se deben agrupar y se ubican en un espacio del panal de huevos, una vez completado todo el panal de huevos esta pasa al tapete de valor posicional en el orden de las centenas.

Al finalizar los agrupamientos de las galletas los estudiantes contestan:

- ¿Con cuántas galletas se llena un espacio del panal de huevos?
- ¿Cuántos paquetes de 10 galletas se organizaron?
- ¿Cuántas unidades de galletas quedaron sueltas?

- ¿Cuántas galletas contenía la bolsa recibida?
- ¿Cuántas galletas hacen falta para completar el total de espacios del panal de huevos?
- Si empacáramos 54 galletas, ¿Cuántos paquetes de 10 se pueden formar? ¿Qué representan los paquetes de 10 en el número 54? Si se empacan las galletas en grupos de 10 ¿Cuántas galletas quedaron sueltas?

Variaciones de la tarea.

1. Se pueden entregar 127 unidades de material base 10, y se van agrupando en barras de decenas y placas de centenas.

Parte B: Ahora se usarán tarjetas numéricas del 11 al 99. A cada estudiante se le entregará una de las tarjetas y deberá decir:

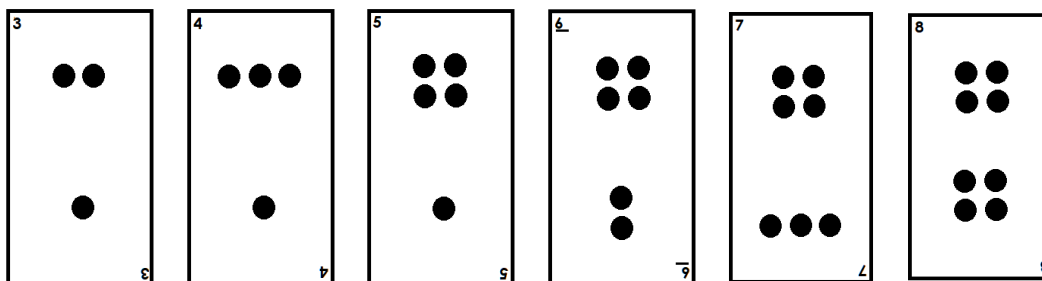
- ¿Cómo se lee ese número?
- ¿Qué representa cada uno de los dígitos del número?

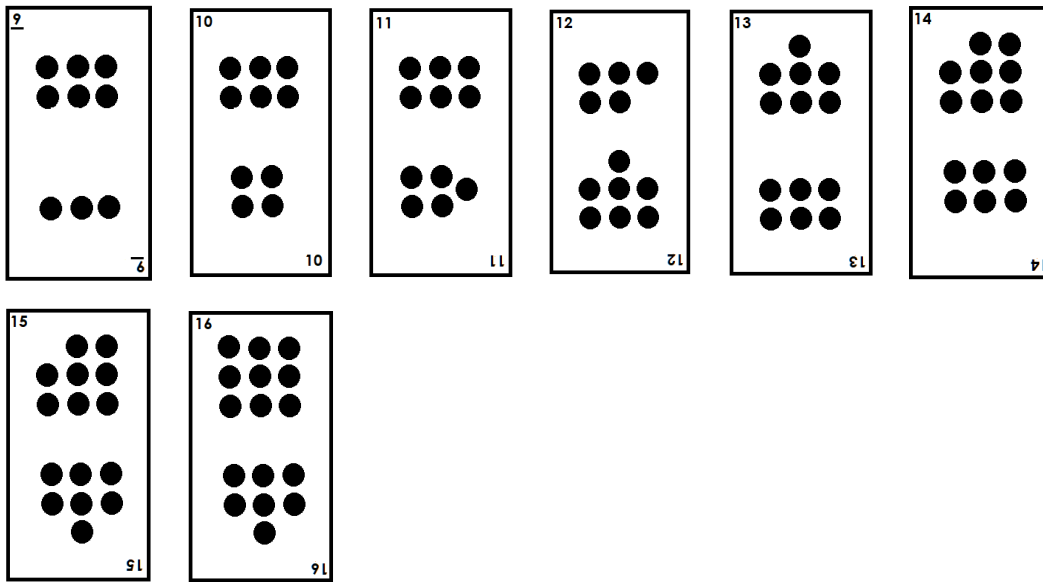
Luego, representarán el número de la tarjeta con las fichas de galletas usando el panal de huevos y la caja de 10 de cartulina.

- ¿Cuántos paquetes de 10 se pueden formar con la cantidad dada?
- ¿Qué representan los paquetes de 10 en el número dado?

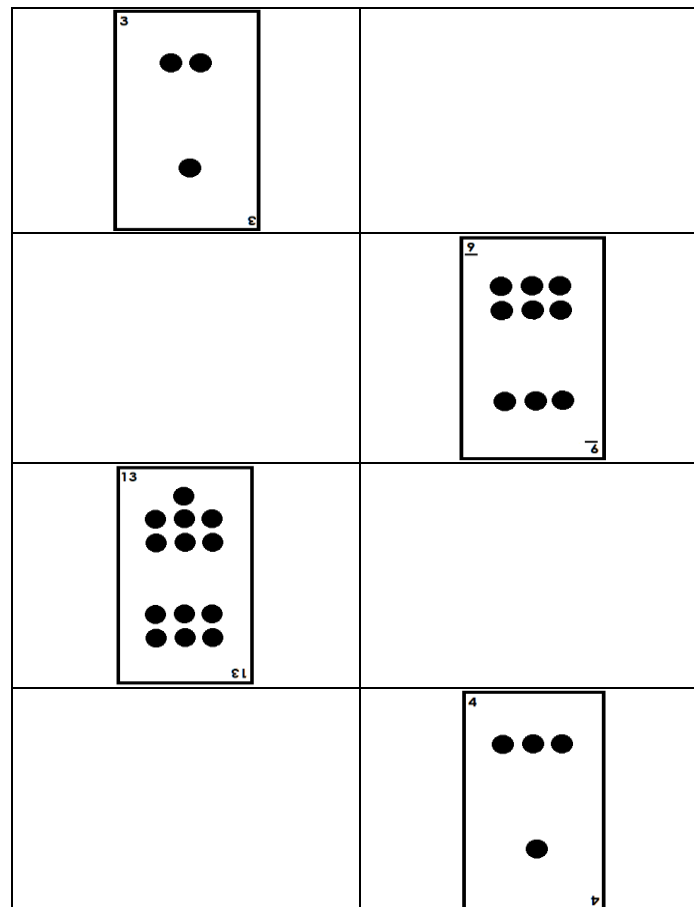
Tarea 3: Componiendo con tarjetas de galletas

1. **Actividad de exploración:** Organizados en parejas, el docente entrega un mazo de tarjetas con puntos que representan galletas de chocolate, jugaremos a componer números usando dos tarjetas. Ganará aquel estudiante que componga de manera rápida el número de galletas de chocolate que indique el profesor (18 galletas, 15 galletas, 20 galletas). No se pueden repetir tarjetas en la representación de un mismo número.





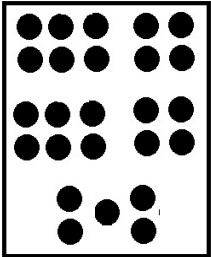
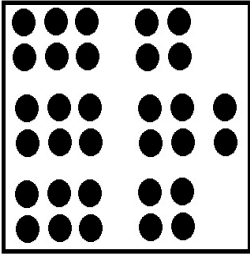
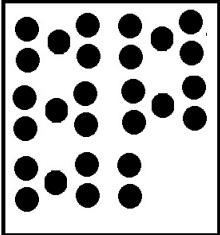
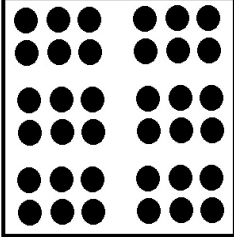
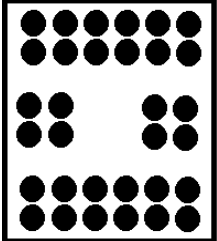
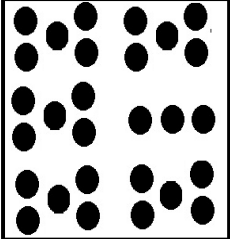
2. Observa las siguientes tarjetas, en frente de cada una debes dibujar otra carta con la que se pueda componer un puntaje igual a 19:

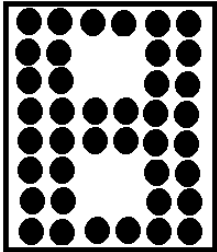
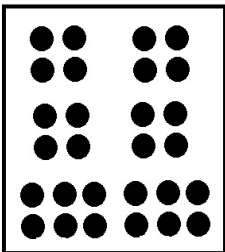
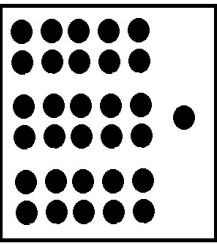
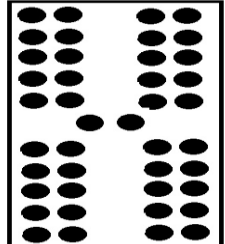


3. Piensa en dos combinaciones posibles de cartas que permitan componer el número dado en la columna final.

Tarjeta 1	Tarjeta 2	Tarjeta 3	Número compuesto
			24
			24

4. Resuelve la siguiente situación:
Durante cinco días de la semana, la fábrica de alimentos debió preparar cierta cantidad de galletas para completar un total de trescientas quince galletas para un cliente. Para ello, la fábrica debió preparar galletas en la mañana y en la tarde de la siguiente manera.

Día	Mañana	Tarde	Escribe la cantidad de galletas preparadas en el día
Lunes			
Martes			
Miércoles			

Jueves			
Viernes			

Situación 2: Comprendiendo el valor posicional.

Tarea 1: Represento usando material base 10

1. Representa con el material base 10 el número 128 y dibuja tu representación realizada con el material en la siguiente tabla:

Centenas	Decenas	Unidades

Completa las oraciones:

- a) El número siguiente al 128 es _____
- b) El número que resulta al añadirle 10 unidades más a 128 es _____
- c) El número anterior a 128 es _____
- d) El número que resulta al restarle 10 unidades a 128 es _____

2. Representa con los billetes didácticos el número 329 y dibuja tu representación realizada con el material en la siguiente tabla:

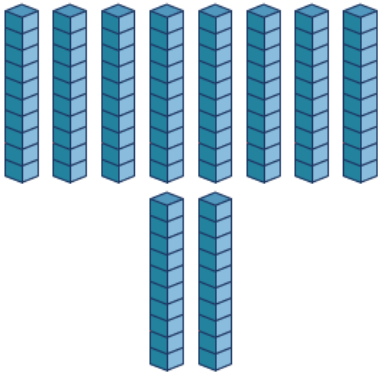
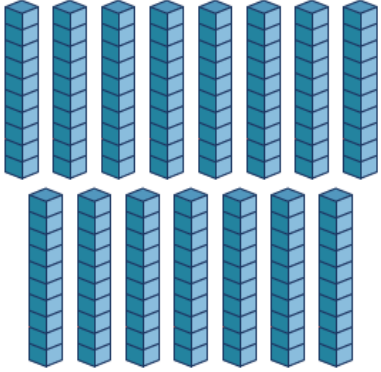
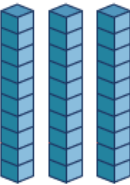
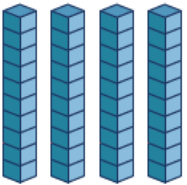
--	--	--

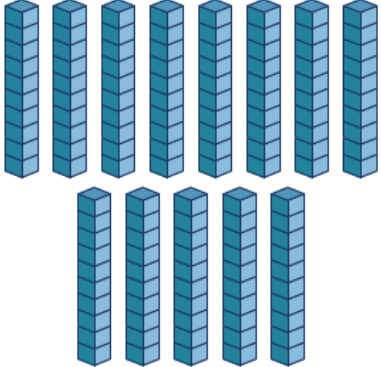
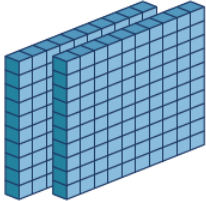
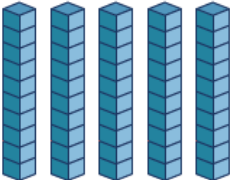
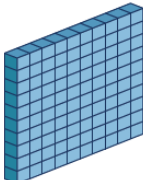
Completa las oraciones:

- El número anterior a 324 es _____
- El número siguiente a 324 es _____
- El número que resulta al añadirle 10 unidades más a 324 _____
- El número que resulta al restarle 10 unidades a 324 es _____

Tarea 2: Explorando composiciones

Parte A: Se entrega a cada pareja de estudiantes 20 tarjetas con la siguiente representación.

 Tarjeta 1	 Tarjeta 2	 Tarjeta 3	 Tarjeta 4
 Tarjeta 5	 Tarjeta 6	 Tarjeta 7	 Tarjeta 8

 Tarjeta 9	 Tarjeta 10	 Tarjeta 11	 Tarjeta 12
 Tarjeta 13	 Tarjeta 14	 Tarjeta 15	 Tarjeta 16

El docente solicita que en parejas los estudiantes determinen qué unidad de valor se presenta en cada tarjeta. Por ejemplo: la tarjeta 1 representa 10 decenas. Una vez identificados los valores de cada tarjeta se indica a los estudiantes que usando 3 tarjetas deben componer un número entre 120 y 150, dibuja las tarjetas usadas.

Tarjeta 1	Tarjeta 2	Tarjeta 3	Número compuesto

Parte B: Se entrega a cada pareja de estudiantes una caja con la siguiente disposición:

10 decenas	10 unidades	12 unidades	4 unidades
6 unidades	15 decenas	3 decenas	4 decenas
13 decenas	1 unidades	2 unidades	2 centenas
1 centena	14 decenas	5 decenas	3 unidades
11 unidades	5 unidades	12 decenas	0 unidades

Materiales por equipo: 5 tapas de gaseosa (rellenas de plastilina para que sean más pesadas), tabla de registro, lápices, una canasta pintada de 4 colores diferentes.

Cada estudiante lanza las 5 tapas hacia la canasta, de acuerdo al lugar donde caen las tapas hace el registro y determina que numero se conforma.

	Valor de la celda	Equivalencia numérica en unidades
Tapa 1	Ej. 10 decenas	100 unidades
Tapa 2		
Tapa 3		
Tapa 4		
Tapa 5		
Número conformado		

Situación 3: Otras formas de calcular.

Tarea 1: Usando estrategias diferentes.

Se presenta a los estudiantes la siguiente situación para que sea analizada y describan con sus propios argumentos matemáticos en qué consisten las estrategias utilizadas por los personajes para resolver ejercicios de suma y resta.

María José está pensando cómo resolver sumas. Observa:



Estrategia 1: Para resolver esta suma pienso que

$$22+16 \text{ es lo mismo que } 28 + 10 = 38$$

Estrategia 2: Para resolver esta suma pienso que

1. Explica con tus palabras las estrategias que ha empleado María José para sumar.

Estrategia 1	Estrategia 2

2. Resuelve los ejercicios usando las estrategias usadas por María José.

Estrategia 1	Estrategia 2
33+27=	35+23=
38+42=	56+21=
25+35=	31+25=

Joaquín también tiene sus propias estrategias para resolver restas. Observa:

Estrategia 1: Para resolver esta resta pienso
que $23-12$ es lo mismo que $21 - 10 = 11$

Estrategia 2: Para resolver esta resta pienso



1. Explica con tus palabras las estrategias que ha empleado Joaquín para restar.

Estrategia 1	Estrategia 2

2. Resuelve los ejercicios usando las estrategias usadas por Joaquín.

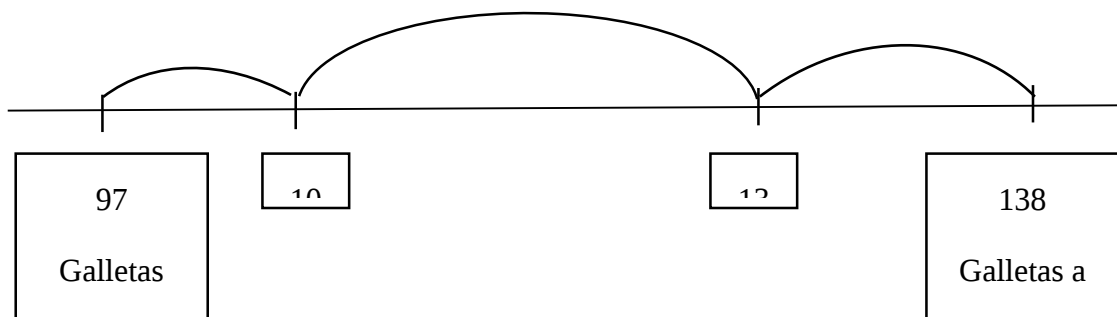
Estrategia 1	Estrategia 2
35-11=	42-28=
37-24=	42-27=
58-18=	35+17=

Tarea 2: Resolviendo problemas usando otras estrategias

A continuación se presenta una situación problema ya resuelta para que los estudiantes identifiquen la estrategia usada con la recta numérica y el paso a paso a seguir para resolver el problema propuesto.

Camilo es empacador de galletas en la fábrica. Debe empacar 138 galletas del primer pedido del día, pero ya tiene empacadas 97 ¿Cuántas galletas le faltan por empacar?

Usaremos la recta numérica para apoyarnos en la resolución de problemas, es importante que sepas que en la recta puedes dar saltos largos de centenas, medianos de decenas y cortos de unidades. Observa la representación en la recta:



Explica en que consiste la estrategia de representar la recta numérica para resolver el problema:

Resuelve los siguientes problemas apoyándote en la recta.

- a. Si en el segundo pedido Camilo debe empacar 100 galletas y ya tiene empacados 24. ¿Cuántas galletas le faltan por empacar? Representa en la recta.

- b. En el tercer pedido Camilo empacó 26 galletas y necesita empacar 123. ¿Cuántas galletas faltan por empacar? Representa en la recta.

Situación 4: La tabla numérica y el Sistema de Numeración Decimal.

Jugaremos con la tabla numérica que se presenta en la imagen. Para ello se conforman equipos de tres estudiantes y se entrega los siguientes materiales: tabla numérica, fichas o tapas, un mazo de tarjetas con retos por grupo que contienen preguntas que se deben resolver observando la tabla.

El estudiante que conteste acertadamente recibirá un sticker de estrellas, ganará el estudiante que tenga más stickers en su colección.

Tabla de números del 1 al 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tarjetas con retos:

Tapa en la tabla números que tengan exactamente 6 decenas	¿Qué número es menor dos decenas que 47?	Adivina el número que estoy pensando: es tres decenas y dos unidades mayor que 23
¿Cuántos números hay entre el 19 y el 29?	Ubica en la tabla números que tengan exactamente 7 decenas	Tapa en la tabla números que tengan exactamente 8 unidades
Adivina el número que estoy pensando: es de la familia de los venti y es mayor que 25 y menor que 28 y es par.	Tapa la familia de los cuarenti y explica ¿Qué valor tiene el cuatro en esta familia de números?	Tapa con las fichas el sucesor del número que tiene 2 unidades y 7 decenas
Tapa el antecesor del número que tiene 12 unidades y 3 decenas	Si tapo el número 26, ¿Cuál es el número que se resulta al sumarle 5 decenas? Tápallo con una ficha.	Si tapo el número 85, ¿Cuál es el número que resulta de restarle 4 decenas y 3 unidades?

Apéndice D: Preguntas para la reflexión sobre la Unidad Didáctica Guía.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Tesis: Conocimiento didáctico en la formación del docente de primer ciclo de básica primaria para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y uso del valor de posición.

Autor: Andrea Paola Banoy

Reflexión sobre la unidad didáctica:

El presente documento ha sido diseñado como parte del trabajo desarrollado en la tesis que se ha referenciado, en el marco de la Maestría en Educación énfasis Educación Matemática de la Universidad del Valle, por tanto el uso de dicha información es para fines académicos.

El propósito de este instrumento es promover mediante algunas preguntas, la reflexión y el análisis de una Unidad Didáctica que busca favorecer la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal en situaciones relacionadas con las nociones de agrupamiento y uso del valor de posición en el primer ciclo de básica primaria, que se ha entregado anexa a este documento.

Las respuestas a las preguntas aquí propuestas permitirán obtener información específica para describir y analizar el conocimiento didáctico sobre la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal y la construcción de sentido numérico. Es importante aclarar que las respuestas que usted proporcione serán tenidas en cuenta como información que permitirá analizar de manera cualitativa la unidad didáctica propuesta en relación al contenido matemático escolar, teniendo en cuenta su experiencia como docente y su formación profesional, por tanto las respuestas dadas no se consideran correctas o incorrectas.

Agradezco su colaboración.

Preguntas de reflexión sobre la Unidad Didáctica

Parte I. Reflexión Conceptual

1. Explique de acuerdo a su conocimiento, ¿por qué y para qué se propone la Situación 4: La tabla numérica y el Sistema de Numeración decimal?
2. ¿Qué actividades usted considera pueden complementar la situación 4 que se ha propuesto?
3. En la tarea 1 de la situación 1, se proponen dos tipos de representación: simbólico y gráfico (apoyado en imágenes y configuraciones de tablas con puntos) ¿Qué otros tipos de representaciones pueden complementar esta tarea?
4. ¿Cómo se relacionan las representaciones gráficas con la representación simbólica que se ha propuesto en la tarea 1 de la situación 1?
5. ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se movilizan en las situaciones 2 y 3?
6. ¿Qué características del Sistema de Numeración Decimal, usted considera, se han tenido en cuenta en las situaciones propuestas?
7. Teniendo en cuenta las situaciones propuestas, mencione ¿qué destrezas requieren aprender los estudiantes para comprender el Sistema de Numeración Decimal en el primer ciclo de básica primaria?

Preguntas de reflexión sobre la Unidad Didáctica

Parte II. Reflexión Cognitiva

1. Describa cuáles considera son los desempeños esperados en cada una de las situaciones propuestas.
2. ¿Qué sentido tienen las estrategias propuestas en la situación 3 con relación al uso del Sistema de Numeración Decimal?
3. En la tarea 3 de la Situación 1 ¿por qué se propone a los estudiantes, tareas que impliquen otras composiciones numéricas, para la comprensión del Sistema de Numeración Decimal?

4. Señale con una X las habilidades que están relacionadas con las tareas propuestas.

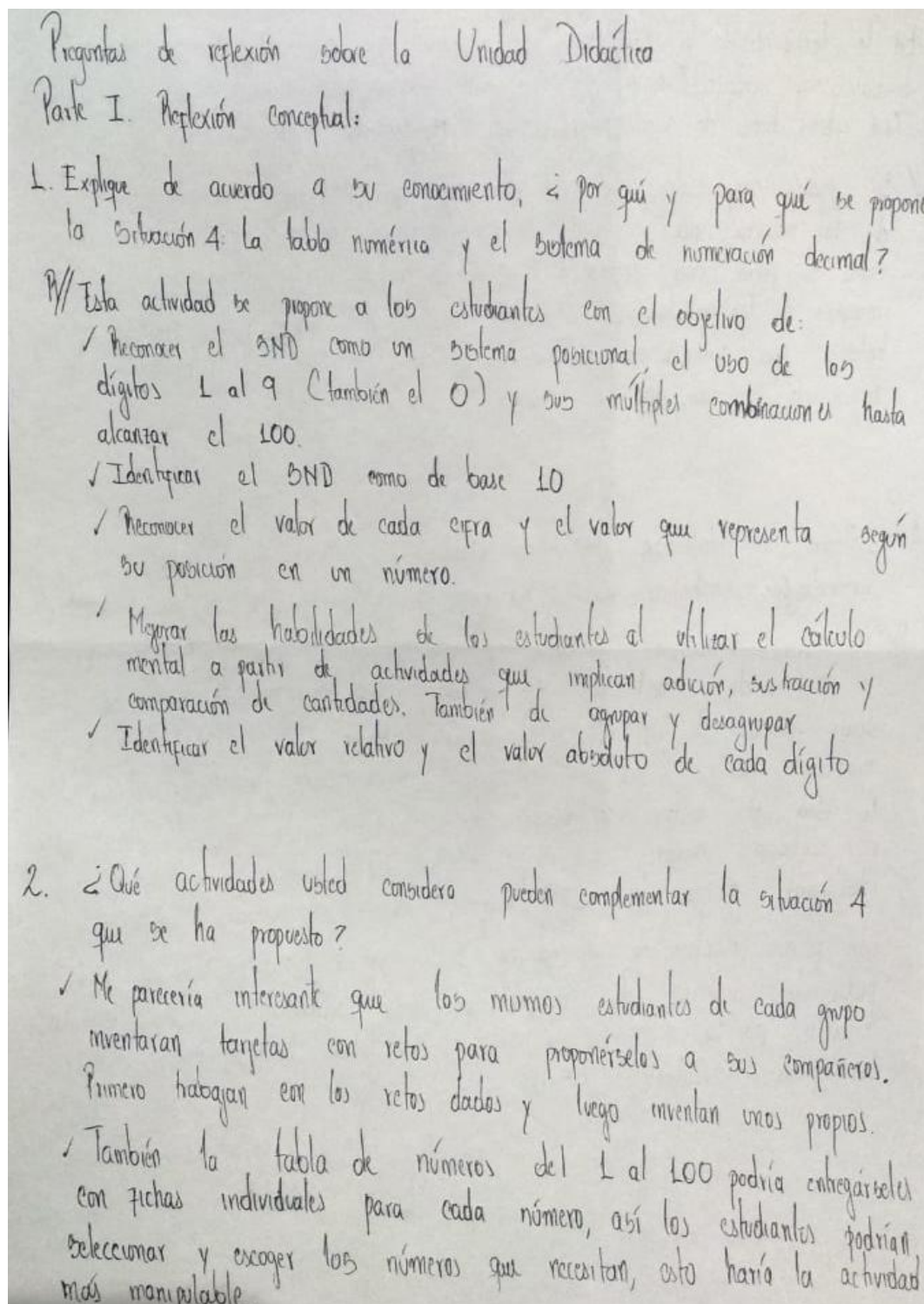
Habilidades para la construcción de sentido numérico.	Situación 1			Situación 2		Situación 3		Situación 4
	T 1	T 2	T3	T 1	T 2	T 1	T 2	
1. Capacidad para componer y descomponer números en formas convencionales y no convencionales.								
2. Reconocer cuando una representación simbólica es más útil que otra, moverse de manera flexible entre diferentes representaciones simbólicas.								
3. Comparar y ordenar números, reconocer cual es mayor o menor.								
4. Reconocer lo grande que es un número.								
5. Comprender los efectos de las operaciones en los números. Hacer uso de algoritmos diferentes al estándar								
6. Capacidad de realizar cálculos mentales a través de estrategias "inventadas" o procedimientos diferentes, que aprovechan las propiedades numéricas y operativas.								
7. Ser capaz de usar números de manera flexible para estimar las respuestas numéricas a los cálculos, y para reconocer cuándo es apropiado un cálculo.								

8. Disposición para dar sentido a la actividad numérica que realizan, reconociendo lo razonable o no de sus respuestas								
--	--	--	--	--	--	--	--	--

5. ¿Qué dificultades se pueden presentar en sus estudiantes al desarrollar cada una de las tareas en el aula?
6. ¿Qué limitaciones reconoce en los materiales propuestos en la Situación 2 Tarea 2 Parte A?
7. Describa, qué similitudes y diferencias identifica entre las propuestas que usted realiza para enseñar el SND y la propuesta didáctica que se ha presentado.
8. De acuerdo al análisis realizado a las situaciones propuestas, indique qué conocimientos debería dominar el profesor de primer ciclo de educación básica primaria para la enseñanza y aprendizaje del SND.

Anexos

Anexo A: Imágenes de las respuestas al taller de análisis de la Unidad Didáctica Guía.



3. En la tarea 1 de la situación 1, se proponen dos tipos de representación: simbólico y gráfico (apoyado en imágenes y configuraciones de tablas con puntos).
¿Qué otros tipos de representaciones pueden complementar esta tarea?

R// Se podría complementar, tal vez, utilizando algún tipo de representación concreta; de tal manera que se pueda manipular cada objeto (galleta) y agruparlas como si fuera una actividad vivencial. Por ejemplo: Entregar una hoja con las imágenes de las galletas para recortar; o también usar fichas, granos o botones que simulen galletas y algunos recipientes pequeños para agruparlas según la cantidad que se requiera.

4. ¿Cómo se relacionan las representaciones gráficas con la representación simbólica que se ha propuesto en la tarea 1 de la situación 1?

R// Me parece interesante lo que se plantea en la tarea para desarrollar el proceso de construcción del aprendizaje en matemáticas, partiendo desde formas de representación pictórica hacia formas de representación gráfica hasta llegar a formas de representación simbólicas. Me gusta la idea de contar cantidades de objetos a partir de la agrupación en cantidades menores y representadas de forma más organizada para identificar grupos de 12 (docenas) y algunas unidades sueltas.

Esta forma práctica de aprendizaje me parece válida, aunque sigo prefiriendo maneras de representación más vivenciales y con material concreto, por lo menos mientras se consolidan ciertos procesos en los grados escolares iniciales.

5. ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se movilizan en las situaciones 2 y 3?

- ✓ Composición y descomposición de números
- ✓ Agrupación y desagrupación de números (en grupos de 10 y 12 elementos)
- ✓ Representación pictórica y numérica de cantidades
- ✓ Representar cantidades numéricas de 1, 2 y 3 cifras
- ✓ Manipulación de material concreto
- ✓ Argumentación de estrategias que den cuenta de la comprensión de los tareas propuestas
- ✓ Escritura y lectura de números.

6. ¿Qué características del SND, usted considera, se han tenido en cuenta en las situaciones propuestas?

Se han tenido en cuenta:

- ✓ Agrupaciones numéricas simples y compuestas a partir de los números en base diez.
- ✓ La forma de organización de los números y las cantidades de forma ascendente: unidades de orden superior, cada 10 unidades.
unidades → decenas → centenas
- ✓ Valor posicional de los números según las cantidades: orden ascendente y de derecha a izquierda.
- ✓ Valor relativo de las cifras dependiendo de la posición que ocupen en un número.

7. Destrezas que requieren aprender los estudiantes para comprender el SND

R// Las mismas que se mencionaron anteriormente en el punto 5

Preguntas de reflexión sobre la Unidad Didáctica

Parte I. Reflexión Conceptual:

1. Explique de acuerdo a su conocimiento, ¿por qué y para qué se propone la Situación 4: La tabla numérica y el Sistema de Numeración decimal?
 2. ¿Qué actividades usted considera pueden complementar la situación 4 que se ha propuesto?
 3. En la tarea 1 de la situación 1, se proponen dos tipos de representación: simbólico y gráfico (apoyado en imágenes y configuraciones de tablas con puntos) ¿Qué otros tipos de representaciones pueden complementar esta tarea?
 4. ¿Cómo se relacionan las representaciones gráficas con la representación simbólica que se ha propuesto en la tarea 1 de la situación 1?
 5. ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos se movilizan en las situaciones 2 y 3?
 6. ¿Qué características del Sistema de Numeración Decimal, usted considera, se han tenido en cuenta en las situaciones propuestas?
 7. Teniendo en cuenta las situaciones propuestas, mencione ¿qué destrezas requieren aprender los estudiantes para comprender el Sistema de Numeración Decimal en el primer ciclo de básica primaria?
1. Se propone para trabajar contenidos relacionados con secuencias ^{patrones} numéricas, valor posicional, relaciones de orden, adición y sustracción, comparación de números, conteos
 2. Secuencias, pares e impares, situaciones multiplicativas, sucesor y antecesor de un número.
 3. - Manipulación de material concreto
- Algoritmo
 4. La representación ^{gráfica} sirve para que el niño vaya haciendo la respectiva correspondencia con la representación simbólica
 5. - Valor posicional - Estimación
- Relaciones de orden
- Adición - Sustracción - composición numérica



Scanned with
CamScanner

- Adición y sustracción en la recta

6. - El sistema de numeración se basa en potencias de 10

- Cada cifra tiene su valor de acuerdo con la posición que ocupa
- Se trabaja con 10 dígitos para conformar cualquier cifra.

7. - Diferenciar unidades, decenas, centenas, etc (valor posición)

- * conceptualizar la docena
- * hacer conteos (de 2 en 2) de 10 en 10, 5 en 5, etc
- * Agrupar en unidades, decenas, centenas.
- * Conceptualización de unidades, decenas y centenas
- * Descomposición de números
- * Manejo de material concreto
- * Leer y escribir números.
- * Comprender el valor de los dígitos de un número.
- * Algoritmos con unidades y decenas
- * Descomposición de números para hacer sumas o restas.
- * Distinguir los pares e impares.
- * Secuencias numéricas
- * Cálculo mental.



Preguntas de reflexión sobre la Unidad Didáctica

Parte II. Reflexión Cognitiva:

1. Describa cuáles considera son los desempeños esperados en cada una de las situaciones propuestas.
2. ¿Qué sentido tienen las estrategias propuestas en la situación 3 con relación al uso del Sistema de Numeración Decimal?
3. En la tarea 3 de la Situación 1 ¿por qué se propone a los estudiantes, tareas que impliquen otras composiciones numéricas, para la comprensión del Sistema de Numeración Decimal?
4. Señale con una X las habilidades que están relacionadas con las tareas propuestas.

Habilidades para la construcción de sentido numérico.	Situación 1			Situación 2		Situación 3		Situación 4
	T 1	T 2	T 3	T 1	T 2	T 1	T 2	
1. Capacidad para componer y descomponer números en formas convencionales y no convencionales.	X	X	X	X	X	X	X	X
2. Reconocer cuando una representación simbólica es más útil que otra, moverse de manera flexible entre diferentes representaciones simbólicas.	X		X	X	X	X	X	X
3. Comparar y ordenar números, reconocer cual es mayor o menor.				X	X	X	X	X
4. Reconocer lo grande que es un número.	X	X	X	X	X	X	X	X
5. Comprender los efectos de las operaciones en los números. Hacer uso de algoritmos diferentes al estándar	X		X	X	X	X	X	X
6. Capacidad de realizar cálculos mentales a través de estrategias "inventadas" o procedimientos diferentes, que aprovechan las propiedades numéricas y operativas.	X	X	X	X	X	X	X	X
7. Ser capaz de usar números de manera flexible para estimar las respuestas numéricas a los	X	X						



cálculos, y para reconocer cuándo es apropiado un cálculo.								
8. Disposición para dar sentido a la actividad numérica que realizan, reconociendo lo razonable o no de sus respuestas	X	X	X	X	X	X	X	X

5. ¿Qué dificultades se pueden presentar en sus estudiantes al desarrollar cada una de las tareas en el aula?
6. ¿Qué limitaciones reconoce en los materiales propuestos en la Situación 2 Tarea 2 Parte A?
7. Describa, qué similitudes y diferencias identifica entre las propuestas que usted realiza para enseñar el SND y la propuesta didáctica que se ha presentado.
8. De acuerdo al análisis realizado a las situaciones propuestas, indique qué conocimientos debería dominar el profesor de primer ciclo de educación básica primaria para la enseñanza y aprendizaje del SND.

5. En la Situación 1, T1, la representación gráfica se dificulta para el conteo ya que no está organizada en forma ordenada, lo cual da pie para que los estudiantes cuenten de 1 en 1. La T2 no está clara lo cual va a dificultar para que el estudiante la desarrolle. El punto 3, T3, es confuso debido a que se habla de 2 combinaciones y hay espacio para hacer 3 (en la tabla). En el punto 4, T3, pueden presentar dificultad al ubicar las cantidades para luego sumar. En la T2, parte B, si el estudiante no tiene claridad en los conceptos de decenas y centenas, la actividad se dificulta. En la S3, T1, la dificultad es aproximar a la decena más cercana. En la S4, se puede dificultar en la comprensión lectora.

II parte

1. - Reconocer el significado del número a través del conteo y estimación
 - Describir, comparar y cuantificar situaciones con números en diferentes contextos y representaciones
 - Usar diferentes representaciones para explicar el valor posicional de un número
 - Reconocer propiedades de los números: par, impar, mayor que, menor que, etc.
 - Resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y transformación
 - Usar diferentes estrategias de cálculo
 - Identificar regularidades y propiedades de los números
2. Que el niño aprenda diferentes estrategias de cálculo para aplicarlas en situaciones aditivas.
3. El niño debe descomponer los números para adquirir destrezas al sumar y que lo haga de forma rápida



Anexo B: Imágenes de los registros de los estudiantes.

Millones

Los números de siete cifras tienen unidades de millón: 7.123.456

cm, dm, cm, u

$$7.123.456 = 7uM + 1cm + 2dm + 3uM + 4cm + 5dm + 6u =$$

$$7.000.000 + 100.000 + 20.000 + 30.000 + 400 + 500 + 6 =$$

Este número se lee: Siete millones ciento veintatres mil Cuatrocientos cincuenta y nueve.

Vamos a descomponer números de siete cifras:

$$8.342.132 = 8uM + 3cm + 4dm + 2uM + 1cm + 3dm + 2u =$$

$$8.000.000 + 300.000 + 40.000 + 200.000 + 100 + 300 + 2 =$$

Se lee: Ocho millones trescientos cuarenta y dos mil Ciento cincuenta y dos.

$$3.525.638 = 3uM + 5cm + 2dm + 5uM + 6cm + 3dm + 8u =$$

$$3.000.000 + 500.000 + 20.000 + 5.000 + 600 + 300 + 8 =$$

Se lee: tres millones quinientos veintaseis mil Cientos treinta y ocho.

Descomposición aditiva de números y lectura y escritura de números.

Pensamiento numérico

Adición y sustracción de números naturales

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Realiza las siguientes operaciones.

a.
$$\begin{array}{r} 1\ 6\ 0\ 3\ 2 \\ +\ 4\ 3\ 0\ 2\ 1 \\ \hline 5\ 9\ 0\ 5\ 3 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 1\ 8\ 5\ 6\ 4 \\ +\ 2\ 5\ 2\ 9\ 8 \\ \hline 4\ 3\ 8\ 6\ 2 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 12\ 4\ 5\ 8 \\ -\ 1\ 8\ 1\ 6\ 4 \\ \hline 0\ 6\ 7\ 9\ 4 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{r} 7\ 8\ 5\ 1\ 3 \\ -\ 3\ 6\ 7\ 2\ 1 \\ \hline 4\ 1\ 9\ 4\ 2 \end{array}$$

Resolución de problemas

2. Observa la lista de precios. Determina cuánto debe pagar cada niño.

Lista de precios

\$ 8350

\$ 2650

\$ 1750

Evaluación del aprendizaje

• Resuelve las siguientes situaciones.

a. Los organizadores de un bazar compraron 25300 vasos. Si durante el bazar utilizaron 17965, ¿cuántos vasos sobraron?

b. En la báscula se observa la cantidad de papel reciclado por los estudiantes de segundo grado. Si los estudiantes de grado tercero reciclaron 999 kilos más que los de segundo, ¿cuántos kilos recolectaron?

Actividades de suma vertical y solución de problemas aditivos

Actividad en Clase

¿Cuántos chocolates hay?

1000 Chocolate

1000 Chocolates

1000 chocolates

1000 Chocolate

100 Chocolate

100 Chocolate

100 Chocolate

100 Chocolate

100 Chocolate

10

10

4.000 + 500 + 206 = 4.526

R/ Hay 4.526 Chocolates.

Se lee: Cuatro mil quinientos veintiseis.

Representación pictórica de descomposición aditivo multiplicativa de números y descomposición aditiva de manera simbólica.

Resuelve

$$\begin{array}{r} 2759 \\ + 236 \\ \hline 2995 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2350 \\ + 1806 \\ \hline 4156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 1003 \\ + 2299 \\ \hline 3302 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 3235 \\ + 2237 \\ \hline 5472 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 358 \\ - 123 \\ \hline 235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 967 \\ - 320 \\ \hline 647 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3578 \\ - 1254 \\ \hline 2324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 630936 \\ - 12123 \\ \hline 622813 \end{array}$$

Fecha: _____

Evaluación de matemáticas. 3º

Nombre: Maria Antonia Comas

- Escribe en letras los siguientes números:
 - 8.624.096: ocho millones seiscientos veinticuatro mil noventa y seis
 - 5.305.900: cinco millones trescientos cinco mil novecientos
- Lee y escribe las cantidades:
 - a. Un televisor cuesta un millón trescientos cinco mil novecientos pesos 1.305.900
 - b. José diligenció un cheque por valor de seis millones cuatrocientos seis mil setecientos noventa pesos 6.406.790
- Ordena de mayor a menor los números ocultos en cada grupo:

9cm	14dm	2cm	11cm	8dm	9u	3cm
3dm	6u	16dm	1u	4u	2dm	6dm

 934006, 362409, 286101
- Organiza los números en orden descendente:

174.026	176.024	170.642
176.024	174.026	170.642

3. Escribe los números

a)

Centenas	Decenas	Unidades
4	6	2

 462

b)

Centenas	Decenas	Unidades
6	2	9

 629

c)

Centenas	Decenas	Unidades
5	0	8

 508

d)

Centenas	Decenas	Unidades
8	5	7

 857

e)

Centenas	Decenas	Unidades
6	0	0

 600

f)

Centenas	Decenas	Unidades
9	5	0

 950

4. Completa la tabla

691	692	693	694	695	696	697	698	699	700
701	702	703	704	705	706	707	708	709	710
811	812	813	814	815	816	817	818	819	820
821	822	823	824	825	826	827	828	829	830

Representación pictórica de números usando bloques base 10 y ubicación en tabla de valor posicional.

Evaluación de los aprendizajes, algoritmo convencional de la suma, lectura y escritura de números, orden de números.

Valor de Posición de números hasta el 999

Los números se pueden descomponer en unidades, decenas y centenas.

Ejemplo: en el número 369 hay

369 3 centenas
 6 decenas
 9 unidades

C	D	U
3	6	9

Así escribimos las centenas

100 cien
200 doscientos
300 trescientos
400 cuatrocientos

El valor posicional en representación pictórica usando el ábaco.

Extensión: Pensamiento numérico

Debes aprender...

Descomposición de un número de tres cifras

Un número de tres cifras se puede escribir de las siguientes maneras:

$576 = 5C + 7D + 6U$
 $576 = 500 + 70 + 6$

Estas maneras de escribir un número se llaman descomposiciones del número.

¿Cuánto has aprendido?

1. EJERCITACIÓN. Colorea, en cada caso, los círculos que corresponden a las descomposiciones del número.

534 ☐ 5C + 8D + 3U ☒ 5C + 3D + 8U ☐ 500 + 30 + 8
807 ☐ 8C + 0D + 7U ☐ 8C + 7D + 0U ☐ 800 + 0 + 7
721 ☐ 1C + 2D + 7U ☐ 7C + 2D + 1U ☐ 700 + 20 + 1

2. EJERCITACIÓN. Observa y completa.

$3C + 5D + 1U$
 $300 + 50 + 1 = 351$

$6C + 3D + 4U$
 $600 + 30 + 4 = 634$

$9C + 0D + 6U$
 $900 + 0 + 6 = 906$

Actividad de descomposición aditiva de números del libro de texto

Números hasta 999

Orden de los números hasta 999

Para comparar dos números de tres cifras, se comparan las cifras que tienen la misma posición hasta encontrar cifras diferentes. Es mayor el que tenga la cifra mayor.

3 2 2 > 3 2 1

1. Escribe los números y compara con >, < o =.

342 > 132 536 = 536 416 < 425

2. Compara los números y escribe >, < o =.

368 < 469 525 > 255 832 > 823
872 < 878 749 = 749 149 > 138
994 > 499 856 < 955 365 < 439
286 = 286 701 > 107 999 > 998

3. Coloca el signo >, < o =, según corresponda.

600 unidades > 4 centenas
9 centenas > 8 centenas
5 centenas = 500 unidades
735 unidades > 7 centenas

7 centenas = 700 unidades
850 unidades > 9 centenas
6 centenas = 600 unidades
623 unidades < 7 centenas

Actividad del libro de texto Orden de los números.

Valor de posición

Los números se pueden descomponer en centenas, decenas y unidades.

En el número 236 hay:

Centena	Decenas	Unidades
2	3	6

2 centenas
3 decenas
6 unidades

1. Observa y completa.

3 centenas + 1 decena + 1 unidad = 321
 $300 + 20 + 1 = 321$

2. Escribe el número.

$200 + 30 + 6 = 236$ $100 + 10 + 0 = 110$ $200 + 5 = 205$
 $700 + 60 + 4 = 764$ $400 + 30 + 1 = 431$ $300 + 1 = 301$
 $100 + 20 + 5 = 125$ $600 + 60 + 5 = 665$ $900 + 7 = 907$

3. Escribe cómo se descompone cada número.

9 centenas, 3 decenas y 1 unidad = $900 + 30 + 1 = 931$
5 centenas, 1 decena y 3 unidades = $500 + 10 + 3 = 513$
1 centena, 2 decenas y 2 unidades = $100 + 20 + 2 = 122$
1 centena, 9 decenas y 0 unidades = $100 + 90 + 0 = 190$

Actividad del libro de texto sobre el valor de posición.