



# Sobre la existencia, unicidad y aproximación numérica de un sistema de tipo Burgers con viscosidad en 2D

**John Ericson Castaño Aristizábal**

Universidad del Valle  
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas  
Departamento de Matemáticas  
Santiago de Cali, Colombia  
Marzo 2025



# Sobre la existencia, unicidad y aproximación numérica de un sistema de tipo Burgers con viscosidad en 2D

**John Ericson Castaño Aristizábal**

Trabajo de investigación presentado como requisito  
parcial para optar al título de:  
**Magíster en Ciencias Matemáticas**

Director:  
Juan Carlos Muñoz, PhD.

Universidad del Valle  
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas  
Departamento de Matemáticas  
Santiago de Cali, Colombia  
Marzo 2025



# Dedicado a

A mi esposa, Maira Alejandra Trochez, compañera incondicional de vida, quien con su amor, paciencia y constante apoyo iluminó cada paso de este extenso camino. A ti, gracias infinitas por compartir mis sueños y acompañarme en cada desafío. Gracias también por tu espera y comprensión durante las largas horas dedicadas a este proyecto.

A mi hijo Samuel, pequeño gran maestro que con tan solo tres años me ha enseñado la alegría, la curiosidad y el valor de la perseverancia. Tú has sido mi inspiración constante para dar siempre lo mejor. Gracias por tu paciencia y por los momentos que no pudimos compartir durante este tiempo.

A Tobías, nuestro amado hijo que está por llegar, a quien espero con profundo amor y alegría. Has sido, desde ya, motor de ilusiones y fuerza renovada para culminar este proyecto con entusiasmo y esperanza.

A mi hermana Jessica, pilar indispensable en momentos difíciles, cuyo soporte y comprensión han sido incommensurables. Tu cariño y generosidad son un tesoro invaluable en mi vida.

Finalmente, a mi madre Carmen Yolanda, cuya fuerza, sabiduría y amor incansable han guiado siempre mis pasos. Eres ejemplo vivo de dedicación y sacrificio; a ti debo gran parte de lo que soy y he logrado alcanzar.

A todos ustedes, mi familia amada, dedico este trabajo con inmenso cariño y eterna gratitud.



# Agradecimientos

Primero y sobre todas las cosas, doy gracias infinitas a Dios por su amor, misericordia y protección. Gracias por permitirme culminar esta tesis, por sostener mi vida en todo momento y brindarme la fortaleza para recuperarme tras mi accidente.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a Aaron Llanos, un verdadero amigo que extendió su mano cuando más lo necesitaba tras mi accidente hace dos años; tu apoyo y solidaridad fueron invaluableles en ese momento crítico.

A todos mis compañeros del posgrado, cuya amistad y colaboración aportaron significativamente en este camino académico. Cada uno de ustedes dejó una valiosa huella en mi experiencia y crecimiento profesional.

A los profesores del Departamento de Matemáticas, quienes con su exigencia, dedicación y sabiduría formaron mi mente y permitieron que todo mi potencial se desarrollara plenamente.

De manera especial, deseo expresar mi inmensa gratitud al Profesor Juan Carlos Muñoz, director de este trabajo de investigación, por su increíble paciencia, las largas jornadas de trabajo y su incansable compromiso con mi avance académico. Su orientación y dedicación han sido fundamentales para la culminación exitosa de esta maestría.

Santiago de Cali, Colombia  
Marzo, 2025

John Ericson Castaño



# Resumen

En este trabajo se realiza en primer lugar un estudio acerca de la existencia y unicidad de la solución de un problema de valor inicial-frontera asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales de tipo Burgers con término difusivo en un dominio acotado con frontera suave en 2D. Se utilizan dos enfoques teóricos: el de la teoría de semigrupos y el método de Faedo-Galerkin, y se explican las diferencias técnicas de los resultados obtenidos. En segundo lugar, se presenta la implementación de un esquema numérico implícito de primer orden en el tiempo y elementos finitos de primer orden en el espacio, basado en la librería FEniCS sobre Python, para aproximar las soluciones del sistema considerado. Se presentan simulaciones numéricas que ilustran el comportamiento cualitativo de la solución y la correcta implementación de las condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas prescritas.

**Palabras clave:** Ecuaciones de Burgers, método de Faedo-Galerkin, teoría de semigrupos, método de elementos finitos, FEniCS, análisis funcional, EDP no lineales.



# Contenido

|          |                                                                      |          |
|----------|----------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción y motivación</b>                                     | <b>1</b> |
| 1.1      | Relevancia del problema de buena colocación . . . . .                | 3        |
| 1.2      | Enfoques para la buena colocación . . . . .                          | 3        |
| 1.3      | Estructura del documento . . . . .                                   | 4        |
| 1.4      | Estado del Arte . . . . .                                            | 4        |
| 1.4.1    | ¿Qué se ha hecho? . . . . .                                          | 4        |
| 1.4.2    | ¿Hasta dónde se ha llegado? . . . . .                                | 5        |
| 1.4.3    | ¿Qué falta por explorar? . . . . .                                   | 6        |
| 1.4.4    | Tendencias y enfoques actuales . . . . .                             | 6        |
| <b>2</b> | <b>Preliminares, formulación del problema y espacios funcionales</b> | <b>9</b> |
| 2.1      | Espacios de funciones: Un repaso fundamental . . . . .               | 9        |
| 2.1.1    | Conceptos fundamentales de análisis funcional . . . . .              | 9        |
| 2.1.2    | Espacios $L^p(\Omega)$ . . . . .                                     | 10       |
| 2.1.3    | Desigualdades fundamentales . . . . .                                | 11       |
| 2.2      | Espacios de Sobolev . . . . .                                        | 12       |
| 2.2.1    | Definiciones y propiedades fundamentales . . . . .                   | 12       |
| 2.2.2    | Espacios de Sobolev con condiciones de frontera . . . . .            | 13       |
| 2.2.3    | Teoremas de inmersión . . . . .                                      | 15       |
| 2.2.4    | Desigualdad de Poincaré y aplicaciones . . . . .                     | 16       |
| 2.2.5    | Espacios funcionales para el problema de Burgers . . . . .           | 16       |
| 2.3      | Operadores lineales y sus propiedades espectrales . . . . .          | 19       |
| 2.3.1    | Conceptos Fundamentales de la Teoría de Operadores . . . . .         | 19       |
| 2.3.2    | Adjunto de un operador . . . . .                                     | 19       |
| 2.3.3    | Conjunto resolvente y espectro de un Operador . . . . .              | 21       |
| 2.3.4    | El Operador Laplaciano $A = -\nu\Delta$ . . . . .                    | 23       |
| 2.4      | Semigrupos de operadores lineales . . . . .                          | 25       |
| 2.4.1    | $C_0$ -Semigrupos (fuertemente continuos) . . . . .                  | 26       |
| 2.4.2    | Generador infinitesimal . . . . .                                    | 27       |
| 2.4.3    | Teoremas de Generación de Semigrupos . . . . .                       | 28       |
| 2.4.4    | Operadores sectoriales y semigrupos analíticos . . . . .             | 30       |

|          |                                                                              |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.4.5    | Espacios de potencias fraccionarias . . . . .                                | 33        |
| 2.5      | Resultados auxiliares . . . . .                                              | 35        |
| 2.5.1    | Lemas de Gronwall . . . . .                                                  | 35        |
| 2.5.2    | Principio del máximo para ecuaciones parabólicas . . . . .                   | 36        |
| 2.5.3    | Teoremas de compacidad y continuidad . . . . .                               | 37        |
| 2.6      | Resultados en EDPs de evolución . . . . .                                    | 38        |
| 2.6.1    | Deducción de la fórmula de Duhamel . . . . .                                 | 38        |
| 2.6.2    | Motivación para la solución clásica y recuperación de la EDP . . . . .       | 39        |
| 2.6.3    | Solución Clásica, fuerte e integral . . . . .                                | 40        |
| 2.7      | Formulación débil de la ecuación de Burgers 2D . . . . .                     | 40        |
| 2.7.1    | Derivación de la formulación débil . . . . .                                 | 41        |
| 2.7.2    | Propiedades de la forma trilineal $b(u, w, v)$ . . . . .                     | 42        |
| <b>3</b> | <b>Existencia, unicidad y regularidad: Enfoque de semigrupos</b>             | <b>45</b> |
| 3.1      | Formulación del problema como Ecuación de Evolución Abstracta . . . . .      | 45        |
| 3.2      | Existencia y unicidad local de soluciones integrales . . . . .               | 46        |
| 3.2.1    | Propiedades del operador no lineal $F(u) = -(u \cdot \nabla)u$ . . . . .     | 46        |
| 3.2.2    | Existencia y unicidad local . . . . .                                        | 49        |
| 3.3      | Regularidad adicional de la solución Integral . . . . .                      | 52        |
| 3.4      | Conclusiones del enfoque de semigrupos . . . . .                             | 54        |
| <b>4</b> | <b>Existencia y unicidad: Método de Faedo-Galerkin</b>                       | <b>57</b> |
| 4.1      | Revisión del Problema y Formulación Débil . . . . .                          | 57        |
| 4.2      | Introducción al método de Faedo-Galerkin . . . . .                           | 58        |
| 4.3      | Construcción de las aproximaciones de Galerkin . . . . .                     | 59        |
| 4.3.1    | Base de $V$ y subespacios de dimensión finita . . . . .                      | 59        |
| 4.3.2    | Soluciones aproximadas . . . . .                                             | 60        |
| 4.3.3    | El sistema de EDOs de Galerkin . . . . .                                     | 60        |
| 4.3.4    | Existencia de las soluciones aproximadas . . . . .                           | 61        |
| 4.4      | Estimaciones a priori . . . . .                                              | 62        |
| 4.4.1    | Estimaciones de energía fundamentales (datos en $L^2$ ) . . . . .            | 62        |
| 4.4.2    | Estimación de la derivada temporal en $L^{4/3}(0, T; V')$ . . . . .          | 63        |
| 4.4.3    | Estimaciones de regularidad superior (Datos en $V \cap L^\infty$ ) . . . . . | 65        |
| 4.4.4    | Proposición resumen de estimaciones . . . . .                                | 66        |
| 4.5      | Paso al límite (convergencia débil) . . . . .                                | 67        |
| 4.6      | Teorema de Existencia para datos pequeños . . . . .                          | 69        |
| 4.7      | Unicidad de la solución débil . . . . .                                      | 70        |
| 4.8      | Regularidad de la solución débil . . . . .                                   | 72        |
| 4.9      | Conexión entre soluciones débiles, integrales y clásicas . . . . .           | 73        |
| 4.9.1    | Soluciones Débiles vs. Soluciones Integrales . . . . .                       | 73        |
| 4.9.2    | Soluciones integrales vs. soluciones clásicas . . . . .                      | 73        |
| 4.9.3    | Comparación de los enfoques: semigrupos vs. Faedo-Galerkin . . . . .         | 74        |

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Experimentación numérica</b>                               | <b>77</b> |
| 5.1      | Introducción a FEniCS . . . . .                               | 77        |
| 5.1.1    | ¿Qué es FEniCS? . . . . .                                     | 77        |
| 5.1.2    | Recursos para Aprender FEniCS . . . . .                       | 78        |
| 5.2      | Implementación del Esquema Numérico . . . . .                 | 79        |
| 5.2.1    | Discretización de la Formulación Variacional . . . . .        | 79        |
| 5.2.2    | Resolución del sistema no lineal (Método de Newton) . . . . . | 79        |
| 5.2.3    | Implementación en FEniCS . . . . .                            | 80        |
| 5.3      | Resultados de la simulación numérica . . . . .                | 83        |
|          | <b>Bibliografía</b>                                           | <b>86</b> |



# Capítulo 1

## Introducción y motivación

En la modelación de fenómenos de difusión y convección, la ecuación de Burgers con efecto difusivo ha surgido como un modelo fundamental que, pese a su simplicidad, captura aspectos relevantes de la dinámica no lineal y la disipación viscosa. La versión unidimensional

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

fue introducida por Bateman [36] y posteriormente estudiada en detalle por Burgers [37] como un modelo simplificado para la turbulencia y la formación de ondas de choque. Posteriormente fue transformada mediante la técnica de Cole-Hopf [41, 44], lo que permitió obtener soluciones explícitas y estudiar la formación de choques disipativos.

La extensión a dos dimensiones, que constituye el objeto de estudio en este trabajo, se formula en un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y se expresa mediante el sistema:

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u = -u \cdot \nabla u, & t \in [0, T), \ x \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

junto con la condición de frontera de tipo Dirichlet homogénea

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para } t \in (0, T), \ x \in \partial\Omega,$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio abierto y acotado con frontera  $\partial\Omega$  suficientemente regular (ver Definición 2.6 del Capítulo 2 para una definición precisa),  $(x, t) \rightarrow u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ , es un campo vectorial que se asocia a la velocidad de un fluido viscoso confinado en el dominio  $\Omega$ ,  $x \rightarrow u_0(x) \in \mathbb{R}^2$  es el campo de velocidad inicial,  $\nu > 0$  es un parámetro que representa la viscosidad (o difusión) en el fluido, y  $T > 0$  es un tiempo fijo. Esta ecuación se estudiará como una ecuación de evolución no lineal *per se*, sin referencia a su posible origen como simplificación de las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes, que son un modelo general que ha sido considerado en la literatura para describir el movimiento del

fluido viscoso. El término

$$(u \cdot \nabla)u = \sum_{i=1}^2 u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left( u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)$$

representa una no linealidad convectiva, mientras que

$$\nu \Delta u = \nu \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)$$

representa un término difusivo. Es importante destacar que con respecto al modelo de Navier-Stokes, el sistema de tipo Burgers con viscosidad (1.1) no supone que el campo de velocidad satisface  $\nabla \cdot u = 0$ , ni incluye términos debidos a la presión en el fluido. La ecuación (1.1) se considerará en su forma general, sin restricciones adicionales sobre la divergencia de  $u$ . En el contexto de las ecuaciones de Navier-Stokes, la condición  $\nabla \cdot u = 0$  es esencial.

El interés en el estudio del sistema (1.1) radica en su capacidad para representar, de forma simplificada, fenómenos de convección y difusión en fluidos. Además, este modelo sirve de banco de pruebas para diversas técnicas analíticas y numéricas en EDPs, especialmente en el contexto de problemas inversos y de asimilación de datos.

Aunque la ecuación de Burgers en dimensiones superiores a uno no captura completamente la complejidad de la turbulencia tridimensional (que es gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes), sigue siendo un modelo relevante para el estudio de fenómenos no lineales en EDPs, como la interacción entre convección y difusión, y la posible formación de singularidades. Además de su interés teórico, la ecuación de Burgers (en sus diversas variantes) ha encontrado aplicaciones en áreas como la dinámica de gases, el tráfico vehicular, la acústica no lineal y el crecimiento de interfaces [31, 9].

El primer objetivo del presente trabajo es desarrollar un estudio de la existencia y unicidad para el problema de valor inicial-frontera dado en (1.1) utilizando dos métodos: el de semigrupos y el de Faedo-Galerkin, apoyándose en diversas fuentes bibliográficas. Se destaca que las demostraciones de los resultados principales presentados en los Capítulos 3 y 4 son contribuciones del autor, realizando adaptaciones de resultados encontrados en la bibliografía disponible para modelos con una estructura semejante a la del sistema (1.1).

El segundo objetivo es presentar un esquema numérico implícito, de segundo orden en el tiempo, y elementos finitos Lagrange de primer orden en el espacio, basado en la librería FEniCS sobre Python, para aproximar las soluciones del sistema (1.1) en un dominio acotado en 2D. Esta es una segunda contribución del autor, pues no se encontró una implementación de un esquema numérico del tipo indicado en la literatura disponible, y que puede ser adaptado a dominios con geometrías diversas en 2D.

## 1.1 Relevancia del problema de buena colocación

La buena colocación (existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones con respecto a los datos iniciales) es una propiedad fundamental, tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista de las aplicaciones. Si un problema no está bien planteado, pequeñas perturbaciones pueden conducir a grandes cambios en la solución, lo que hace que el modelo sea poco fiable. Formalmente, la buena colocación (en el sentido de Hadamard) se refiere a los siguientes aspectos:

- **Existencia:** ¿Existe al menos una solución  $u(x, t)$  que satisfaga la ecuación (1.1) y las condiciones?
- **Unicidad:** ¿Es la solución única?
- **Dependencia continua:** ¿Pequeños cambios en el dato inicial  $u_0$  conducen a pequeños cambios en la solución  $u$ ?

Para la ecuación de Burgers, la buena colocación no es trivial, debido al término no lineal  $(u \cdot \nabla u)$ , que puede llevar a la formación de singularidades en tiempo finito (blow-up), incluso si el dato inicial  $u_0$  es suave.

## 1.2 Enfoques para la buena colocación

Se emplean dos metodologías independientes para estudiar la buena colocación del problema (1.1):

**Teoría de Semigrupos:** La ecuación de Burgers (1.1), escrita como  $u_t - \nu \Delta u = -(u \cdot \nabla u)$ , se puede reformular en un marco abstracto. Definiendo el operador elíptico (no acotado)  $A = -\nu \Delta$  (cuyo dominio  $D(A)$  se especificará en el Capítulo 2 e incorpora las condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas) y el término no lineal  $F(u) = -(u \cdot \nabla u)$ , la ecuación toma la forma de una ecuación de evolución abstracta no lineal:

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = F(u(t)), & t \in [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Equivalentemente, se puede escribir como  $u'(t) = -Au(t) + F(u(t))$ . Como se detallará en el Capítulo 2, el operador  $A$  es autoadjunto y positivo definido. Esto implica que el operador  $-A = \nu \Delta$  es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico  $\{S(t) = e^{-tA}\}_{t \geq 0}$  (o  $S(t) = e^{-tA}$ ). La solución de (1.2) se busca entonces en su forma integral (mild solution) a través de la fórmula de Duhamel

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s)) ds.$$

La existencia y unicidad local de soluciones se demuestra mediante argumentos de punto fijo en espacios funcionales adecuados (ver Capítulo 3). Este enfoque se inspira en los métodos desarrollados para ecuaciones de evolución semilineales por autores como Fujita, Kato, Weissler y otros. Las referencias clave para las técnicas de semigrupos aplicadas a EDPs incluyen [22], [21], [6], [28], y los trabajos influyentes de [43], [46], [50, 51].

**Método de Faedo-Galerkin:** Este enfoque constructivo se utiliza para demostrar la existencia de soluciones débiles. Se construyen soluciones aproximadas  $u_m(t)$  en subespacios de dimensión finita  $V_m \subset V = (H_0^1(\Omega))^2$ , donde la base de  $V_m$  a menudo se elige a partir de las autofunciones del operador  $A = -\nu\Delta$ . Estas aproximaciones satisfacen un sistema proyectado de ecuaciones diferenciales ordinarias. Mediante la obtención de estimaciones a priori uniformes en  $m$  para las normas de  $u_m$  y utilizando teoremas de compacidad, se extrae una subsucesión que converge a una función límite  $u$ , la cual se demuestra que es una solución débil del problema original (ver Capítulo 4). Este método sigue la metodología presentada en textos de referencia como los de Temam [29], Evans [11] y Boyer-Fabrie [4], adaptándola al sistema de Burgers. Se establece la existencia de soluciones débiles para datos iniciales  $u_0 \in (L^2(\Omega))^2$ , y se prueba la unicidad si  $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^2$ .

## 1.3 Estructura del documento

El documento se organiza de la siguiente manera:

El **Capítulo 2** presenta los preliminares matemáticos, incluyendo espacios de Sobolev, operadores lineales, semigrupos, la formulación débil y los espacios funcionales. Se proporcionan referencias detalladas.

El **Capítulo 3** demuestra la existencia de soluciones utilizando el enfoque de semigrupos.

El **Capítulo 4** demuestra la existencia utilizando el método de Faedo-Galerkin y compara los resultados de ambos métodos.

El **Capítulo 5** presenta un esquema numérico de tipo elementos finitos en el espacio para aproximar las soluciones del problema de valor inicial-frontera asociado al sistema (1.1), junto con algunos experimentos numéricos.

## 1.4 Estado del Arte

La ecuación de Burgers, a pesar de su aparente simplicidad, ha sido (y sigue siendo) objeto de un intenso estudio debido a su capacidad para modelar fenómenos no lineales complejos y a su conexión con otras ecuaciones fundamentales de la física matemática, como las ecuaciones de Navier-Stokes. A continuación, se aborda el estado actual de la investigación en torno a la ecuación de Burgers, con un enfoque en la versión 2D sin suponer incompresibilidad.

### 1.4.1 ¿Qué se ha hecho?

La investigación sobre la ecuación de Burgers abarca una amplia gama de aspectos, desde la teoría matemática hasta las aplicaciones numéricas y computacionales.

**Trabajos fundacionales** Los primeros trabajos de Bateman [36] y Burgers [37] introdujeron la ecuación como un modelo simplificado para la turbulencia. Hopf [44] y Cole [41] descubrieron independientemente la transformación de Hopf-Cole (o Cole-Hopf), que linealiza la ecuación de Burgers 1D viscosa, permitiendo obtener soluciones explícitas.

### **Existencia, unicidad y regularidad (Contexto de Navier-Stokes Incompresible)**

Para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes (que son incompresibles y más complejas, pero a menudo se mencionan en contexto), la teoría de existencia, unicidad y regularidad de soluciones está bien establecida en 2D, y es un área de investigación activa en 3D (uno de los problemas del milenio). Resultados clásicos, basados en métodos de análisis funcional y EDPs, se encuentran en los libros de Ladyzhenskaya [16], Temam [29], Constantin y Foias [7], y Lions [18].

### **Existencia, unicidad y regularidad (Sistema de Burgers general)**

Para el sistema de tipo Burgers (1.1) (sin suponer incompresibilidad), la teoría es más desafiante que su análogo 1D. Los trabajos de Fujita y Kato [43] y Kato [46] sobre Navier-Stokes desarrollaron un enfoque basado en la teoría de semigrupos que ha sido adaptado para demostrar la existencia y unicidad local de soluciones fuertes para sistemas parabólicos semilineales. Weissler [50, 51] extendió estos resultados a espacios de Lebesgue para ecuaciones semilineales, incluyendo aplicaciones a Navier-Stokes. Las técnicas son aplicables, con las adaptaciones necesarias, al sistema de Burgers.

**Método de Faedo-Galerkin (Caso general)** Autores como Temam [29], Lions [18], Evans [11] y Boyer-Fabrie [4] en sus libros abordan la construcción de soluciones débiles para ecuaciones de evolución no lineales (como Navier-Stokes) usando este método, cuya estructura es adaptable al sistema de Burgers.

**Libros de referencia** Además de los libros ya mencionados, existen numerosos textos que abordan la ecuación de Burgers desde diferentes perspectivas o que tratan herramientas fundamentales para su análisis. Entre ellos, destacan los libros de Evans [11] sobre EDPs en general, los de Pazy [22] y Lunardi [21] sobre semigrupos, y los de Zeidler [33] sobre análisis funcional no lineal.

## **1.4.2 ¿Hasta dónde se ha llegado?**

El nivel de conocimiento actual sobre el sistema de tipo Burgers (1.1) en 2D (sin incompresibilidad) se apoya en gran medida en las técnicas desarrolladas para sistemas parabólicos semilineales más generales o para las ecuaciones de Navier-Stokes, aunque presenta sus propias particularidades.

- La existencia y unicidad local de soluciones (clásicas o integrales/mild) para datos iniciales suficientemente regulares (e.g.,  $u_0 \in H_0^1(\Omega)^2$  o espacios de mayor regularidad) está bien establecida, principalmente gracias a la teoría de semigrupos y argumentos de punto fijo, como se explora en el Capítulo 3.

- La existencia global de soluciones débiles para datos iniciales en  $L^2(\Omega)^2$  se puede obtener mediante el método de Faedo-Galerkin, como se muestra en el Capítulo 4. Sin embargo, la unicidad de estas soluciones débiles para datos  $u_0 \in L^2(\Omega)^2$  es, en general, un problema abierto o requiere técnicas más avanzadas no cubiertas en detalle aquí (se prueba unicidad si  $u_0 \in H_0^1(\Omega)^2$ ).
- No se espera, en general, una cota global en el tiempo para la norma  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$  que sea independiente de  $T$  para cualquier dato inicial en  $L^2(\Omega)^2$  sin condiciones adicionales o para viscosidades muy pequeñas, debido a la naturaleza no lineal del término convectivo.
- La conexión entre soluciones débiles y soluciones más regulares (integrales/clásicas) se establece si el dato inicial es más regular (e.g.,  $u_0 \in H_0^1(\Omega)^2$ ), como se discute al final del Capítulo 4.

### 1.4.3 ¿Qué falta por explorar?

A pesar de los avances, existen varias áreas donde se necesita más investigación para el sistema de Burgers 2D sin la condición de incompresibilidad:

- **Existencia Global y Unicidad para Datos  $L^2$ :** Demostrar la existencia global de soluciones débiles *únicas* para la ecuación de Burgers 2D (1.1) con datos iniciales en  $L^2(\Omega)^2$  sin restricciones adicionales sobre el tamaño del dato o la viscosidad sigue siendo un área de interés.
- **Regularidad óptima:** Determinar la regularidad óptima de las soluciones débiles y fuertes, y cómo esta depende de la regularidad del dato inicial y del dominio  $\Omega$ .
- **Comportamiento Asintótico:** Estudiar el comportamiento de las soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$ , incluyendo la convergencia a estados estacionarios o la tasa de decaimiento, especialmente en ausencia de fuerzas externas.
- **Caso de Viscosidad Nula ( $\nu \rightarrow 0$ ):** El estudio del límite de viscosidad nula, y la conexión con el sistema de Euler correspondiente (que sería  $u_t + (u \cdot \nabla)u = 0$ ), es un problema clásico y complejo en la teoría de fluidos.

### 1.4.4 Tendencias y enfoques actuales

Las tendencias actuales en la investigación sobre EDPs no lineales de tipo fluido, que pueden inspirar o ser relevantes para el sistema de Burgers, incluyen:

- **Métodos Numéricos Avanzados:** Desarrollo y análisis de esquemas numéricos eficientes, precisos y que preserven propiedades físicas, incluyendo métodos adaptativos, de alto orden, y aquellos basados en inteligencia artificial.
- **Análisis Estocástico:** Estudio de EDPs con forzamiento aleatorio (ruido) para modelar incertidumbres o fluctuaciones, dando lugar a las EDPs estocásticas.

- **Problemas de Control y Optimización:** Diseño de controles óptimos para sistemas gobernados por EDPs, y problemas inversos para la identificación de parámetros o datos iniciales.
- **Soluciones Débiles y Conceptos Generalizados de Solución:** Investigación de conceptos de solución aún más débiles (e.g., soluciones de medida, soluciones disipativas) para problemas donde las soluciones clásicas o débiles estándar pueden no existir globalmente o no ser únicas.
- **Métodos de Viscosidad Desvaneciente:** Estudio riguroso de la convergencia de soluciones de ecuaciones viscosas (como Burgers o Navier-Stokes) a soluciones de sus contrapartes inviscosas (Euler) cuando la viscosidad tiende a cero.

### Relación con el presente documento

En este documento se ha abordado la buena colocación de la ecuación de Burgers 2D (1.1) sin suponer incompresibilidad, utilizando dos de los enfoques fundamentales y clásicos en la teoría de EDPs:

1. **Teoría de Semigrupos (Capítulo 3):** Se sigue la línea de la teoría de ecuaciones de evolución abstractas para sistemas parabólicos semilineales (inspirada en trabajos como los de Fujita-Kato para Navier-Stokes y desarrollos posteriores para semigrupos analíticos) para demostrar la existencia y unicidad local de soluciones, adaptando y extendiendo los resultados conocidos al caso específico del sistema (1.1). Las referencias clave para las técnicas de semigrupos aplicadas a EDPs incluyen [22], [21], [6], [28], y los trabajos seminales de [43], [46], [50, 51] que establecieron muchos de estos métodos.
2. **Método de Faedo-Galerkin (Capítulo 4):** Se construyen soluciones débiles mediante el método de Faedo-Galerkin, siguiendo la metodología presentada en los libros de Temam [29] (especialmente para Navier-Stokes, adaptable aquí), Evans [11], Boyer-Fabrie [4] y Lions [18]. Se establece la existencia de soluciones débiles con datos iniciales en  $L^2(\Omega)^2$ , y se prueba la unicidad si el dato inicial es más regular ( $u_0 \in H_0^1(\Omega)^2$ ).

De esta forma, el documento contribuye al estudio del sistema de tipo Burgers (1.1), consolidando y presentando de manera unificada dos enfoques fundamentales para su análisis de buena colocación, y abordando el caso sin la simplificación de la incompresibilidad. En capítulos posteriores se explorarán aspectos numéricos relacionados con esta ecuación.



## Capítulo 2

# Preliminares, formulación del problema y espacios funcionales

En este capítulo repasaremos algunos conceptos y resultados fundamentales del análisis funcional y la teoría de espacios de Sobolev que serán esenciales para el análisis riguroso de la ecuación de Burgers con viscosidad (1.1). También presentaremos la formulación débil del problema y definiremos los espacios funcionales en los que buscaremos las soluciones.

## 2.1 Espacios de funciones: Un repaso fundamental

Para estudiar ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) como la ecuación de Burgers con viscosidad, necesitamos trabajar con *espacios de funciones* que tengan propiedades adecuadas. No basta con considerar funciones continuas o derivables en el sentido clásico; se requiere una noción más general de “función” y de “derivada”. Aquí introduciremos los conceptos fundamentales, comenzando con ideas intuitivas y ejemplos, antes de pasar a las definiciones formales. Para mayor información sobre los temas de esta sección, consultar [5], [11], [1] o [17].

### 2.1.1 Conceptos fundamentales de análisis funcional

En esta sección, se asume la familiaridad del lector con los conceptos básicos del análisis funcional. Esto incluye las definiciones y propiedades de **espacios normados**, **espacios de Banach** como espacios normados completos, y **espacios de Hilbert** como espacios de Banach cuya norma es inducida por un producto interno.

Asimismo, se utilizará el concepto de **espacio dual topológico**  $X'$ , que es el espacio de todas las funcionales lineales y continuas sobre un espacio normado  $X$ . Un resultado clave en este contexto es el **Teorema de Representación de Riesz**, el cual establece que para un espacio de Hilbert  $H$ , su dual  $H'$  es isométricamente isomorfo a  $H$ . Esta identificación,

que denotamos  $H \cong H'$ , es fundamental para la construcción de ternas de Gelfand. Para una revisión exhaustiva de estos temas, se remite al lector a textos de referencia como [5] o [25].

### 2.1.2 Espacios $L^p(\Omega)$

Los espacios  $L^p$  son espacios de funciones medibles (en el sentido de Lebesgue) cuyo valor absoluto elevado a la  $p$ -ésima potencia es integrable.

**Definición 2.1. (Espacios  $L^p(\Omega)$ )** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $1 \leq p < \infty$ . El espacio  $L^p(\Omega)$  se define como el conjunto de todas las funciones medibles (clases de equivalencia de funciones que coinciden casi en todas partes)  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  tales que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Para  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  se define como el conjunto de funciones medibles  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  que son esencialmente acotadas, y su norma es el supremo esencial:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty.$$

**Observación 2.1.** (a) En la definición de  $L^p(\Omega)$ , se identifican las funciones que son iguales casi en todas partes (c.t.p.) en  $\Omega$  (es decir, difieren solo en un conjunto de medida de Lebesgue nula).

(b) Para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  es efectivamente una norma, y el espacio  $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$  es un espacio normado.

(c) Para  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad (\text{o } \int_{\Omega} u(x)v(x) dx \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}).$$

La norma inducida  $\sqrt{\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}}$  coincide con  $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ .

(d) Si  $\Omega$  es un dominio acotado, entonces  $C(\overline{\Omega}; \mathbb{K})$  (funciones continuas en la clausura de  $\Omega$ ) es un subespacio de  $L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Teorema 2.1. (Teorema de Riesz-Fischer (Compleitud de  $L^p$ ))** *Los espacios  $L^p(\Omega)$  son espacios de Banach para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Es decir, son completos con respecto a la norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ .*

*Demostración.* La demostración de este teorema es un resultado fundamental en la teoría de la medida y la integración de Lebesgue. Se puede encontrar, por ejemplo, en [5, Capítulo 4, Teorema 4.9] o en la mayoría de los textos avanzados sobre análisis real o funcional (e.g., [26, Teorema 3.11]).  $\square$

**Ejemplo 2.1. (Ejemplos en  $L^p$ )** (a) Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio acotado, entonces toda función continua  $u \in C(\overline{\Omega})$  pertenece a  $L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

(b) Consideremos  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ . La función  $u(x) = x^{-\alpha}$  (para  $\alpha > 0$ ):

- (i)  $u \in L^p(0, 1)$  si y solo si  $\alpha p < 1$ . Por ejemplo,  $x^{-1/3} \in L^2(0, 1)$  pero  $x^{-1/2} \notin L^2(0, 1)$ .
- (i)  $u \in L^\infty(0, 1)$  si y solo si  $\alpha \leq 0$  (para evitar la singularidad en  $x = 0$ ). En este caso, si  $\alpha > 0$ ,  $u \notin L^\infty(0, 1)$ .

### 2.1.3 Desigualdades fundamentales

En esta subsección, presentamos algunas desigualdades que son herramientas esenciales en el análisis funcional y en el estudio de EDPs, particularmente en los espacios  $L^p$ .

**Proposición 2.2. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** *En cualquier espacio prehilbertiano  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , para todo  $x, y \in X$ :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

*En particular, en  $L^2(\Omega)$ :*

$$\left| \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \right| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

*(Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la conjugación sobre  $v(x)$  se omite).*

*Demostración.* Si  $y = 0$ , es trivial. Si  $y \neq 0$ , considerar  $\left\| x - \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} y \right\|^2 \geq 0$ . Ver también Capítulo 5, Proposición 5.2 de [5].  $\square$

**Teorema 2.3. (Desigualdad de Hölder)** *Sean  $1 \leq p, q \leq \infty$  exponentes conjugados ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ). Si  $u \in L^p(\Omega)$  y  $v \in L^q(\Omega)$ , entonces  $uv \in L^1(\Omega)$ , y*

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Demostración.* Ver Teorema 4.6 de [5].  $\square$

**Teorema 2.4. (Desigualdad de Minkowski)** *Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Si  $u, v \in L^p(\Omega)$ , entonces  $u + v \in L^p(\Omega)$  y*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

*Demostración.* Ver Teorema 4.7 de [5].  $\square$

**Teorema 2.5. (Desigualdad de Young para productos)** *Sean  $a, b \geq 0$  y sean  $p, q \in (1, \infty)$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*La igualdad se cumple si y solo si  $a^p = b^q$ .*

*Demostración.* Ver Capítulo 4 de [5] o Apéndice B.2, Lema 1 de [11].  $\square$

**Teorema 2.6. (Desigualdad de Young para productos con  $\epsilon$ )** Sean  $a, b \geq 0$ .

(a) Para  $p, q \in (1, \infty)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , y para cualquier  $\epsilon > 0$ :

$$ab \leq \epsilon \frac{a^p}{p} + \frac{1}{\epsilon^{q/p}} \frac{b^q}{q}.$$

(b) En el caso particular  $p = 2$  (y por tanto  $q = 2$ ), para cualquier  $\epsilon > 0$ :

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2.$$

*Demostración.* Para (a), aplicar la desigualdad de Young estándar (2.5) a  $(p\epsilon)^{1/p}a$  y  $(p\epsilon)^{-1/p}b$ . Para (b), esta forma se obtiene de (a) tomando  $p = q = 2$ ,  $\frac{1}{\epsilon^{2/2}} \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2\epsilon}$ , y luego redefiniendo  $\epsilon \rightarrow 2\epsilon$  en el primer término si se quiere  $\epsilon a^2$ , es un caso particular o se puede probar directamente. Ver también Apéndice B.2 de [11].  $\square$

## 2.2 Espacios de Sobolev

Para estudiar EDPs como la ecuación de Burgers, se requieren *espacios de funciones* adecuados. No basta con funciones continuas o derivables en el sentido clásico; se necesita una noción más general de función y de derivada. Para más detalles revisar las referencias [5], [11], [1], [27] y [17].

### 2.2.1 Definiciones y propiedades fundamentales

**Definición 2.2. (Funciones Localmente Integrables,  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ )** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto. Una función  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es *localmente integrable* en  $\Omega$ , y escribimos  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ , si  $u$  es integrable (en el sentido de Lebesgue) sobre todo subconjunto compacto  $K \subset \Omega$ , es decir,

$$\int_K |u(x)| dx < \infty, \quad \text{para todo compacto } K \subset \Omega.$$

**Observación 2.2.** Intuitivamente, una función localmente integrable puede “explotar” cerca de la frontera de  $\Omega$ , pero es integrable en cualquier región que esté “alejada” de la frontera. Toda función integrable en  $\Omega$  es localmente integrable, pero el recíproco no es cierto.

**Ejemplo 2.2.** La función  $u(x) = 1/x$  pertenece a  $L^1_{\text{loc}}(0, 1)$ , pero no a  $L^1(0, 1)$ .

**Definición 2.3. (Derivada débil)** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  (funciones localmente integrables en  $\Omega$ ), y  $\alpha$  un multi-índice. Se dice que  $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  es la derivada débil de  $u$  de orden  $\alpha$ , y se escribe

$$v = D^\alpha u,$$

si

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_c^{\infty}(\Omega),$$

donde  $C_c^{\infty}(\Omega)$  es el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en  $\Omega$ .

**Observación 2.3.** La definición se basa en la integración por partes. Si  $u$  es suficientemente suave, su derivada débil coincide con su derivada clásica. Esto permite definir derivadas para funciones que no son diferenciables en el sentido clásico.

**Definición 2.4. (Espacio de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$ )** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $m \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq p \leq \infty$ . El espacio de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  se define como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es un multi-índice,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , y  $D^{\alpha}u$  denota la derivada débil de orden  $\alpha$  de  $u$ . La norma en  $W^{m,p}(\Omega)$  se define como

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty,$$

y

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \quad \text{si } p = \infty.$$

**Observación 2.4.** Cuando  $p = 2$ , es común usar la notación  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ . Los espacios  $H^m(\Omega)$  son espacios de Hilbert.

**Definición 2.5. (Espacio  $H_0^m(\Omega)$ )**  $H_0^m(\Omega)$  es la clausura de  $C_c^{\infty}(\Omega)$  en la norma de  $H^m(\Omega)$  (equivalente a la norma de  $W^{m,2}(\Omega)$ ).

**Observación 2.5.** Los espacios  $H^m(\Omega)$  y  $H_0^m(\Omega)$  son espacios de Hilbert, completos y separables. En forma intuitiva,  $H_0^m(\Omega)$  se interpreta como el conjunto de funciones en  $H^m(\Omega)$  que se anulan en la frontera  $\partial\Omega$  (junto con sus derivadas hasta orden  $m-1$ ).

**Ejemplo 2.3.** Considere  $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ .

- (a)  $u(x) = x^{\alpha}$  pertenece a  $H^1(\Omega)$  si  $\alpha > 1/2$ .
- (b)  $u(x) = |x|$  pertenece a  $H^1(\Omega)$ , pero no a  $H^2(\Omega)$ .
- (c)  $u(x) = x(1-x)$  pertenece a  $H_0^1(0, 1)$  y a  $H^2(0, 1)$ .

## 2.2.2 Espacios de Sobolev con condiciones de frontera

La condición de frontera  $u = 0$  en  $\partial\Omega$  se impone considerando el espacio  $H_0^1(\Omega)$ .

**Definición 2.6. (Frontera de clase  $C^k$ )** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto. Decimos que la frontera  $\partial\Omega$  es de clase  $C^k$ , donde  $k$  es un entero no negativo, si para cada punto  $x_0 \in \partial\Omega$  existe una vecindad abierta  $U$  de  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$  y una función  $\gamma : V \rightarrow W$  biyectiva y de clase  $C^k$  (es decir, con derivadas parciales continuas hasta el orden  $k$ ) tal que

- (i)  $U = W$ .
- (ii)  $\gamma(V \cap \Omega) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n > 0\} \cap U$ .
- (iii)  $\gamma(V \cap \partial\Omega) = \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\} \cap U$ .
- (iv)  $\gamma^{-1} : U \rightarrow V$  es también de clase  $C^k$ .

Si la frontera es de clase  $C^1$ , se dice que  $\Omega$  es un *dominio Lipschitz*. Si  $\gamma$  y  $\gamma^{-1}$  son solo continuas (es decir,  $k = 0$ ), se dice que la frontera es *topológicamente regular*.

**Observación 2.6.** Intuitivamente la frontera es “suave”. En cada punto de la frontera existe un plano tangente bien definido. No hay “picos”, pero puede haber “curvas”.

**Observación 2.7.** La regularidad de la frontera de  $\Omega$  tiene las siguientes implicaciones importantes:

- (a) La existencia del operador traza requiere que la frontera sea al menos  $C^1$ .
- (b) La definición de  $H_0^1(\Omega)$  depende del operador traza.
- (c) Los resultados de existencia, unicidad y regularidad de soluciones de EDPs suelen requerir una frontera suficientemente regular.
- (d)  $C_c^\infty(\Omega)$  es denso en  $H_0^1(\Omega)$ ; si  $\Omega$  tiene frontera Lipschitz, entonces  $C^\infty(\overline{\Omega})$  es denso en  $W^{1,p}(\Omega)$  para  $1 \leq p < \infty$ .

**Teorema 2.7. (Teorema de la traza)** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$ . Entonces, existe un operador lineal y continuo (llamado operador traza)  $\gamma_{tr} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  tal que

- (a)  $\gamma_{tr}(u) = u|_{\partial\Omega}$  si  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ .
- (b)  $\|\gamma_{tr}(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$  para alguna constante  $C$ .
- (c)  $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_{tr}(u) = 0\}$ .

*Demostración.* Ver [5, Capítulo 9]. □

**Observación 2.8.** Las funciones en  $H_0^1(\Omega)$  se anulan en la frontera en el sentido de trazas.

### 2.2.3 Teoremas de inmersión

Los teoremas de inmersión de Sobolev establecen relaciones entre los espacios de Sobolev y otros espacios de funciones.

**Definición 2.7. (Inmersión continua)** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios normados. Se dice que  $X$  está inmerso continuamente en  $Y$ , y se escribe  $X \hookrightarrow Y$ , si

- (i)  $X$  es un subespacio de  $Y$ .
- (ii) La aplicación identidad  $I : X \rightarrow Y$ , definida por  $I(u) = u$ , es continua, es decir, existe  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

**Observación 2.9.** (a) A menudo en lugar de decir,  $X$  está inmerso continuamente en  $Y$ , se dice que  $X$  está incluido continuamente en  $Y$ .

(b)  $X \hookrightarrow Y$  significa que si  $\{u_n\}$  converge a  $u$  en  $X$ , entonces también converge a  $u$  en  $Y$ .

**Definición 2.8. (Inmersión compacta)** Sean  $X$  e  $Y$  espacios normados. Se dice que la inmersión  $X \hookrightarrow Y$  es *compacta* si la bola unitaria cerrada de  $X$  es relativamente compacta en  $Y$ . Es decir, toda sucesión acotada en  $X$  tiene una subsucesión que converge fuertemente en  $Y$ .

**Teorema 2.8. (Inmersiones de Sobolev)** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado con frontera suficientemente regular (e.g., Lipschitz o  $C^1$ ). Entonces:

- (a) **Caso**  $1 \leq p < n$ : Si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $u \in L^{p^*}(\Omega)$ , donde  $p^* = \frac{np}{n-p}$ . Además,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

lo que se denota como  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ .

- (b) **Caso**  $p = n$ : Si  $u \in W^{1,n}(\Omega)$ , entonces  $u \in L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [n, \infty)$ . (Si  $n = 1$  y  $p = 1$ ,  $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ ).

- (c) **(Teorema de Morrey) Caso**  $p > n$ : Si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , entonces  $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , donde  $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ , y

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

- (d) **(Teorema de Rellich-Kondrachov):**

- (i) Si  $1 \leq p < n$ , la inmersión  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  es compacta para todo  $q \in [1, p^*)$ .
- (ii) Si  $p = n$ , la inmersión  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  es compacta para todo  $q \in [1, \infty)$ .
- (iii) Si  $p > n$ , la inmersión  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$  es compacta.

Para demostraciones detalladas de las Inmersiones de Sobolev y el Teorema de Rellich-Kondrachov, se remite al lector a textos clásicos como:

- Brezis [5, Teorema 8.8, Corolario 9.4, Teorema 9.16] para las inmersiones continuas y el teorema de Rellich-Kondrachov.
- Evans [11, Sección 5.6, Teorema 1 y 3; Sección 5.7, Teorema 1] para las inmersiones continuas y el teorema de Rellich-Kondrachov.
- Adams y Fournier [1, Capítulo 4, Teorema 4.12; Capítulo 6, Teorema 6.3] para las inmersiones continuas y el teorema de Rellich-Kondrachov.
- Leoni [17, Capítulos 10 y 11].

**Observación 2.10.** (a) En nuestro caso,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ . Así,  $p = 2, n = 2$ , por lo que estamos en el caso  $p = n$ . Entonces  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [2, \infty)$ . Además, por Rellich-Kondrachov (caso (d-ii)), la inmersión  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  es compacta para todo  $q \in [1, \infty)$ .

(b) La compacidad implica que toda sucesión acotada en  $H_0^1(\Omega)$  tiene una subsucesión convergente en  $L^q(\Omega)$  para  $q < \infty$ .

## 2.2.4 Desigualdad de Poincaré y aplicaciones

La desigualdad de Poincaré establece que, para funciones que se anulan en la frontera, se puede controlar la magnitud de la función a partir de la magnitud de su gradiente.

**Teorema 2.9. (Desigualdad de Poincaré)** *Si  $\Omega$  es un abierto acotado de  $\mathbb{R}^n$ , existe una constante  $C_P > 0$  (que depende de  $\Omega$  y  $n$ ) tal que para toda  $u \in H_0^1(\Omega)$ , se tiene*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Demostración.* Ver Teorema 8.12 de [5] o Sección 5.8.1 de [11]. □

**Corolario 2.10.** *En  $H_0^1(\Omega)$ , la norma  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$  y la seminorma  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  son equivalentes.*

**Ejemplo 2.4.** Consideremos  $\Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}$  (un intervalo de longitud  $L$ ) y  $u \in H_0^1(0, L)$ . Entonces, la desigualdad de Poincaré nos dice que existe una constante  $C_P$  tal que

$$\int_0^L |u(x)|^2 dx \leq C_P \int_0^L |u'(x)|^2 dx.$$

La mejor constante posible en este caso es  $C_P = L^2/\pi^2$ . Esto se puede demostrar considerando el problema de autovalores propios  $-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u$  con condiciones de Dirichlet  $u(0) = u(L) = 0$ .

## 2.2.5 Espacios funcionales para el problema de Burgers

Para el análisis de la ecuación de Burgers con viscosidad, utilizaremos los siguientes espacios de Hilbert, que son casos particulares de los espacios de Sobolev ya definidos.

**Definición 2.9. (El Espacio  $X$ )** Definimos el espacio  $X$  como el espacio de funciones de cuadrado integrable con valores vectoriales,

$$X = L^2(\Omega)^2 = \{u = (u_1, u_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid u_1, u_2 \in L^2(\Omega)\}.$$

$X$  es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx = \int_{\Omega} (u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x)) \, dx,$$

y la norma inducida

$$\|u\|_X = \sqrt{\langle u, u \rangle_X} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2) \, dx \right)^{1/2}.$$

**Observación 2.11.**  $X$  es el espacio natural para el dato inicial  $u_0$  de la ecuación de Burgers (1.1), y buscaremos soluciones  $u(t)$  que, para cada tiempo  $t$ , también pertenezcan a  $X$ . La norma  $\|u\|_X$  mide la “energía” total de la solución.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  (el cuadrado unitario). La función  $u(x_1, x_2) = (x_1^2, \sin(\pi x_2))$  pertenece a  $X$ , ya que tanto  $x_1^2$  como  $\sin(\pi x_2)$  son funciones cuadrado integrables en  $\Omega$ .

**Definición 2.10. (El Espacio  $V$ )** Definimos el espacio  $V$  como el espacio de Sobolev  $H_0^1(\Omega)^2$ , es decir,

$$V = H_0^1(\Omega)^2 = \{u = (u_1, u_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Dotamos a  $V$  del producto interno

$$\langle u, v \rangle_V = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx,$$

y la norma inducida (debido a la desigualdad de Poincaré, equivalente a la norma  $H^1(\Omega)^2$  completa en  $H_0^1(\Omega)^2$ ):

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}} = \left( \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 \, dx \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) \, dx \right)^{1/2}.$$

Por la desigualdad de Poincaré, esta norma es equivalente a la norma usual de  $H^1(\Omega)^2$  en el subespacio  $H_0^1(\Omega)^2$ . Es decir, existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  tales que

$$c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)^2} \leq \|u\|_V \leq c_2 \|u\|_{H^1(\Omega)^2}$$

para todo  $u \in V$ . (A menudo, por simplicidad, se toma  $\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}}$  directamente como la norma en  $V$ ).

**Observación 2.12.**  $V$  es el espacio natural para buscar soluciones débiles (en el contexto de la teoría de semigrupos y método Faedo-Galerkin) de la ecuación de Burgers (1.1) con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas ( $u = 0$  en  $\partial\Omega$ ). La norma  $\|u\|_V$  mide la “energía” asociada a las derivadas de la solución. El hecho de que  $V$  esté definido en términos de  $H_0^1(\Omega)$  incorpora la condición de frontera  $u = 0$  en  $\partial\Omega$  en un sentido débil. Recordemos que no estamos imponiendo la condición de incompresibilidad  $\nabla \cdot u = 0$  en la definición de estos espacios.

**Ejemplo 2.6.** Sea  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ . La función  $u(x_1, x_2) = (x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2), 0)$  pertenece a  $V$ , ya que se anula en la frontera de  $\Omega$  y tanto  $u_1$  como  $u_2$  pertenecen a  $H_0^1(\Omega)$ . Sin embargo, la función  $u(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$  no pertenece a  $V$  porque no se anula en la frontera (aunque sus componentes pertenezcan a  $H^1(\Omega)$ ).

**Proposición 2.11. (Propiedades e inclusiones de  $X$  y  $V$ )** *Los espacios  $X = L^2(\Omega)^2$  y  $V = H_0^1(\Omega)^2$  cumplen las siguientes propiedades:*

- (a)  $X$  y  $V$  son espacios de Hilbert (completos y con producto interno).
- (b)  $V$  es separable (existe un subconjunto numerable y denso).
- (c)  $V$  es reflexivo (el dual del dual es isomorfo a  $V$ ).

*Demostración.* Estas son propiedades estándar de los espacios  $L^2$  y de Sobolev  $H_0^1$ . La completitud de  $L^2$  (y por tanto de  $X = L^2(\Omega)^2$ ) es el Teorema de Riesz-Fischer (Teorema 2.1). La completitud de  $H_0^1(\Omega)$  (y por tanto de  $V = H_0^1(\Omega)^2$ ) se sigue de su definición como clausura o se prueba directamente. La separabilidad y reflexividad de  $H_0^1(\Omega)$  (y por tanto de  $V$ ) para dominios  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  son resultados clásicos. Se pueden encontrar demostraciones detalladas y discusiones en textos como Capítulos 5 y 8 de [5] o [1].  $\square$

**Proposición 2.12. (Inclusiones de Gelfand)** *Tenemos las siguientes inclusiones continuas y densas, que forman una terna de Gelfand (o espacio equipado de Hilbert):*

$$V \hookrightarrow X \cong X' \hookrightarrow V'.$$

*Lo anterior significa lo siguiente:*

- (i)  $V$  es un subespacio vectorial de  $X$ .
- (ii) La inyección canónica  $i : V \rightarrow X$ ,  $i(u) = u$ , es continua (existe  $C > 0$  tal que  $\|u\|_X \leq C \|u\|_V$  para todo  $u \in V$ ).
- (iii)  $V$  es denso en  $X$  (la clausura de  $V$  en la norma de  $X$  es  $X$ ).
- (iv)  $X$  se identifica con su propio espacio dual  $X'$  a través del producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  (Teorema de Riesz).
- (v)  $V'$  es el espacio dual de  $V$ , es decir, el espacio de todas las funcionales lineales continuas sobre  $V$ .

- (vi) La inclusión  $X \hookrightarrow V'$  (o más precisamente, la inyección  $j : X \rightarrow V'$  donde  $(j(x))(v) = \langle x, v \rangle_X$  para  $x \in X, v \in V$ ) es continua y densa si  $V$  es reflexivo.

*Demostración.* Ver Capítulos 5 y 8 de [5] para una demostración detallada de estas propiedades en el contexto general de espacios de Sobolev. La desigualdad de Poincaré juega un papel fundamental en la equivalencia de normas en  $V$  y la inclusión  $V \hookrightarrow X$ .  $\square$

**Observación 2.13.** La cadena de inclusiones  $V \hookrightarrow X \cong X' \hookrightarrow V'$  se conoce como una *terna de Gelfand* o *espacio equipado de Hilbert* (rigged Hilbert space). Esta estructura es fundamental en el estudio de ecuaciones de evolución mediante métodos variacionales y en la teoría de distribuciones.

## 2.3 Operadores lineales y sus propiedades espectrales

Esta sección introduce conceptos fundamentales sobre operadores lineales, tanto acotados como no acotados, en espacios de Hilbert. En el estudio de EDPs, los *operadores lineales* juegan un papel central, especialmente al usar enfoques como la teoría de semigrupos. Comprender sus propiedades es crucial para analizar la existencia, unicidad y comportamiento de las soluciones. Para mayor información sobre los temas de esta sección consultar [5], [22] o [15].

### 2.3.1 Conceptos Fundamentales de la Teoría de Operadores

El análisis posterior se apoya en conceptos esenciales de la teoría de operadores en espacios de Hilbert. Se asume que el lector está familiarizado con la distinción entre *operadores lineales acotados* (que son continuos) y *no acotados*, categoría a la que pertenecen típicamente los operadores diferenciales como el Laplaciano.

Para el estudio de operadores no acotados, dos propiedades son de vital importancia: ser un *operador cerrado* y estar *densamente definido*. La propiedad de ser cerrado es una condición de buen comportamiento, más débil que la continuidad, que asegura que el operador tenga un espectro bien definido. Por otro lado, que el dominio del operador sea denso en el espacio de Hilbert es un requisito indispensable para poder definir de manera única su *operador adjunto*, concepto que será fundamental en la siguiente sección.

### 2.3.2 Adjunto de un operador

El concepto de operador adjunto es una generalización de la transpuesta conjugada de una matriz a operadores (posiblemente no acotados) en espacios de Hilbert. Es fundamental para definir operadores autoadjuntos, que poseen propiedades espectrales importantes y aparecen naturalmente en la formulación de muchas EDPs.

**Definición 2.11. (Operador adjunto)** Sea  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  un operador lineal densamente definido entre espacios de Hilbert  $X$  e  $Y$ . El *adjunto* de  $T$ , denotado por  $T^*$ , es un

operador lineal  $T^* : D(T^*) \subset Y \rightarrow X$ . El dominio  $D(T^*)$  consiste en todos los  $y \in Y$  para los cuales la funcional lineal  $x \mapsto \langle Tx, y \rangle_Y$  (definida en  $D(T)$ ) es continua con respecto a la topología de  $X$ . Por el Teorema de Representación de Riesz (ya que  $D(T)$  es denso en  $X$ ), para cada tal  $y$ , existe un único  $z \in X$  tal que:

$$\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, z \rangle_X, \quad \text{para todo } x \in D(T).$$

Se define entonces  $T^*y = z$ .

**Observación 2.14.** (a) El operador  $T^*$  está bien definido (es decir, el elemento  $z = T^*y$  es único si existe) porque  $D(T)$  es denso en  $X$ .

(b) El adjunto  $T^*$  es siempre un operador cerrado.

(c) Si  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  (acotado y  $D(T) = X$ ), entonces  $T^* \in \mathcal{L}(Y, X)$  ( $D(T^*) = Y$ ), y  $\|T^*\| = \|T\|$ .

(d) Si  $T$  es densamente definido y cerrable (i.e., su clausura  $\bar{T}$  es un operador), entonces  $(\bar{T})^* = T^*$ . Si  $T$  es cerrado y densamente definido, entonces  $T^*$  es densamente definido y  $T^{**} = (T^*)^* = T$ .

**Proposición 2.13. (Propiedades del adjunto)** Sean  $S, T$  operadores lineales densamente definidos en un espacio de Hilbert  $H$ . (Algunas propiedades se extienden a operadores entre diferentes espacios de Hilbert  $X, Y, Z$ ).

(a) Si  $S, T \in \mathcal{L}(H)$  (operadores acotados definidos en todo  $H$ ), entonces  $(S+T)^* = S^* + T^*$  y  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$  para todo escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

(b) Si  $S, T \in \mathcal{L}(H)$ , entonces  $(ST)^* = T^* S^*$ .

(c) Si  $D(S)$  y  $D(T)$  son densos y  $D(S+T)$  es denso, entonces  $S^* + T^* \subseteq (S+T)^*$ . La igualdad se da si, por ejemplo, uno de los operadores (digamos  $S$ ) es acotado y  $D(S) = H$ .

(d) Si  $D(T)$ ,  $D(S)$  y  $D(ST)$  son densos, y  $S \in \mathcal{L}(H)$  (i.e.,  $S$  es acotado y definido en todo  $H$ ), entonces  $(ST)^* = T^* S^*$ . (Si  $S$  no es acotado, se tiene  $T^* S^* \subseteq (ST)^*$ , suponiendo que los dominios son apropiados para que las composiciones tengan sentido).

(e) Si  $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$  es densamente definido y tiene una inversa  $T^{-1} : Y \rightarrow D(T)$  que es acotada (i.e.,  $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ), entonces  $T^*$  es también inyectivo, su rango es  $X$ , su inversa  $(T^*)^{-1}$  es acotada (i.e.,  $(T^*)^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$ ), y  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

*Demostración.* Estas propiedades son estándar en la teoría de operadores. Para demostraciones detalladas, ver, por ejemplo, Capítulo III, Sección 5 de [15] o Capítulo VIII, Teoremas VIII.1 y VIII.2 de [23].  $\square$

**Ejemplo 2.7. (Adjuntos de Operadores Diferenciales y de Multiplicación)** A continuación, se presentan los adjuntos para algunos operadores diferenciales y de multiplicación representativos.

- (a) **Operador Laplaciano:** El operador  $T_1 u = -\Delta u$  con  $D(T_1) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$  (considerando el caso escalar por simplicidad aquí, o  $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$  para el vectorial) en  $L^2(\Omega)$  (o  $(L^2(\Omega))^2$ ) es autoadjunto, i.e.,  $T_1^* = T_1$ . Esto se probará en detalle para el operador  $A = -\nu \Delta$  en la Proposición 2.15.
- (b) **Operador Derivada en  $H^1(0, 1)$ :** El operador  $T_2 u = u'$  con  $D(T_2) = H^1(0, 1)$  en  $L^2(0, 1)$  tiene como adjunto  $T_2^* v = -v'$  con dominio  $D(T_2^*) = H_0^1(0, 1) = \{v \in H^1(0, 1) \mid v(0) = v(1) = 0\}$ . Este operador no es autoadjunto.
- (c) **Operador Derivada en  $C_c^\infty(0, 1)$ :** El operador  $T_3 u = u'$  con  $D(T_3) = C_c^\infty(0, 1)$  en  $L^2(0, 1)$  tiene como adjunto  $T_3^* v = -v'$  con dominio  $D(T_3^*) = H^1(0, 1)$ .
- (d) **Operador de Multiplicación por  $x$  en  $L^2(\mathbb{R})$ :** El operador  $(T_4 u)(x) = xu(x)$  con  $D(T_4) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \mid xu(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$  es autoadjunto. Su adjunto es  $(T_4)^* v(x) = xv(x)$  con  $D((T_4)^*) = D(T_4)$ .
- (e) **Operador de Multiplicación General:** Sea  $X = L^2(\Omega; \mathbb{K})$  y sea  $m : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible. El operador  $T_m$  dado por  $(T_m u)(x) = m(x)u(x)$ , con  $D(T_m) = \{u \in L^2(\Omega) \mid mu \in L^2(\Omega)\}$ . Si  $D(T_m)$  es denso, entonces  $(T_m)^* v(x) = \overline{m(x)}v(x)$  con  $D((T_m)^*) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \overline{m}v \in L^2(\Omega)\}$ .  $T_m$  es autoadjunto si y solo si  $m(x)$  es real c.t.p. (y  $D(T_m) = D((T_m)^*)$ ).

Estos ejemplos ilustran cómo el dominio y las condiciones de frontera son cruciales para determinar el adjunto y, por ende, la autoadjunción.

### 2.3.3 Conjunto resolvente y espectro de un Operador

El análisis espectral de operadores lineales, especialmente los no acotados, es fundamental para entender su comportamiento y para aplicar herramientas como el cálculo funcional o la teoría de semigrupos.

**Definición 2.12. (Conjunto Resolvente y Espectro)** Sea  $T : D(T) \subset X \rightarrow X$  un operador lineal cerrado en un espacio de Banach  $X$ .

- (a) El *conjunto resolvente* de  $T$ , denotado por  $\rho(T)$ , es el conjunto de todos los  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que el operador  $(\lambda I - T) : D(T) \rightarrow X$  es biyectivo (i.e., inyectivo y sobreyectivo) y su inversa  $(\lambda I - T)^{-1}$  es un operador acotado de  $X$  en  $X$ , es decir,  $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ . El operador  $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$  se llama el *resolvente* de  $T$  en  $\lambda$ .
- (b) El *espectro* de  $T$ , denotado por  $\sigma(T)$ , es el complemento del conjunto resolvente en el plano complejo:  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ .

**Observación 2.15.** (a) La condición de que  $T$  sea cerrado es crucial. Si  $T$  es cerrado,  $(\lambda I - T)$  también lo es. Si  $(\lambda I - T)$  es biyectivo, su inversa  $R(\lambda, T)$  es un operador cerrado definido en todo  $X$ . Por el Teorema del Grafo Cerrado,  $R(\lambda, T)$  es entonces automáticamente acotado. Así, para un operador cerrado  $T$ ,  $\lambda \in \rho(T)$  si y solo si  $(\lambda I - T)$  es biyectivo.

- (b) El conjunto resolvente  $\rho(T)$  es siempre un conjunto abierto en  $\mathbb{C}$ .
- (c) Consecuentemente, el espectro  $\sigma(T)$  es siempre un conjunto cerrado en  $\mathbb{C}$ .
- (d) Si  $T \in \mathcal{L}(X)$  (i.e.,  $T$  es acotado y  $D(T) = X$ ), entonces su espectro  $\sigma(T)$  es un conjunto compacto y no vacío contenido en el disco cerrado  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ .

**Proposición 2.14. (Propiedades del Resolvente)** Sea  $T$  un operador lineal cerrado en un espacio de Banach  $X$ .

- (a) **(Primera Identidad del Resolvente)** Para  $\lambda, \mu \in \rho(T)$ , se tiene:

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T).$$

Como consecuencia,  $R(\lambda, T)$  y  $R(\mu, T)$  conmutan.

- (b) **(Serie de Neumann para el Resolvente)** Si  $\lambda_0 \in \rho(T)$ , entonces para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $|\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0, T)\|_{\mathcal{L}(X)}^{-1}$  (si  $R(\lambda_0, T) \neq 0$ ), se tiene que  $\lambda \in \rho(T)$  y el resolvente  $R(\lambda, T)$  viene dado por la serie de Neumann (convergente en norma de operadores):

$$R(\lambda, T) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0, T)^{k+1}.$$

Esto implica que  $\rho(T)$  es un conjunto abierto.

*Demostración.* Estas son propiedades estándar de la teoría del resolvente. Para la primera identidad, se manipula algebraicamente la definición. Para la serie de Neumann, se utiliza la expansión en serie geométrica para operadores. Ver, e.g., Capítulo III, Sección 6 de [15], Capítulo VI, Sección 5 de [32], o Capítulo VII, Teorema VII.3.2 y Proposición VII.3.3 de [8].  $\square$

**Ejemplo 2.8. (Espectro en Dimensión Finita)** Si  $X$  es un espacio de Banach de dimensión finita (e.g.,  $\mathbb{C}^n$ ) y  $T : X \rightarrow X$  es un operador lineal (automáticamente acotado), entonces  $\lambda I - T$  es biyectivo si y solo si  $\lambda$  no es un autovalor de  $T$ . Por lo tanto, el espectro  $\sigma(T)$  consiste precisamente en el conjunto de todos los autovalores de  $T$ .

**Observación 2.16. (Tipos de Espectro para Operadores No Acotados)** Para operadores no acotados en espacios de Hilbert, el espectro  $\sigma(T)$  puede ser más complejo que solo autovalores. Generalmente se descompone en:

- **Espectro Puntual**  $\sigma_p(T)$ : El conjunto de autovalores de  $T$ , i.e.,  $\lambda \in \mathbb{C}$  para los cuales  $\lambda I - T$  no es injectivo.
- **Espectro Continuo**  $\sigma_c(T)$ :  $\lambda \in \mathbb{C}$  para los cuales  $\lambda I - T$  es injectivo, tiene rango denso en  $X$ , pero no es sobreyectivo (y su inversa  $(\lambda I - T)^{-1}$ , definida en el rango, es no acotada).
- **Espectro Residual**  $\sigma_r(T)$ :  $\lambda \in \mathbb{C}$  para los cuales  $\lambda I - T$  es injectivo, pero su rango no es denso en  $X$ . (Para operadores autoadjuntos,  $\sigma_r(T) = \emptyset$ ).

El espectro es la unión de estos tres conjuntos disjuntos:  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ .

### 2.3.4 El Operador Laplaciano $A = -\nu\Delta$

Definimos ahora el operador lineal principal asociado con la parte de difusión de la ecuación de Burgers (1.1). Este operador, y sus propiedades espectrales, son fundamentales tanto para la teoría de semigrupos (donde su negativo,  $-A = \nu\Delta$ , actuará como generador) como para el método de Faedo-Galerkin (donde sus autofunciones formarán una base).

**Definición 2.13. (Operador  $A = -\nu\Delta$ )** Sea  $X = (L^2(\Omega))^2$  y  $V = (H_0^1(\Omega))^2$ . El operador  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  se define como

$$Au = -\nu\Delta u := -\nu(\Delta u_1, \Delta u_2),$$

con dominio

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 = \{u = (u_1, u_2) \in X : u_1, u_2 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\}.$$

Este dominio  $D(A)$  es un subespacio denso de  $V$  y también de  $X$ .

**Observación 2.17.** El operador  $A$  definido anteriormente incorpora el término de viscosidad  $\nu > 0$  y el signo negativo usualmente asociado con operadores elípticos para garantizar su positividad (o coercitividad). Las condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas ( $u = 0$  en  $\partial\Omega$ ) están incluidas en la definición del dominio  $D(A)$  a través de la pertenencia a  $(H_0^1(\Omega))^2$ .

Las siguientes propiedades son cruciales para el análisis subsiguiente.

**Proposición 2.15. (Propiedades Fundamentales de  $A = -\nu\Delta$ )** El operador  $A = -\nu\Delta$  con dominio  $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$  en  $X = (L^2(\Omega))^2$  (con  $\nu > 0$ ) satisface:

- (a)  $A$  es un operador lineal no acotado.
- (b)  $D(A)$  es densamente definido en  $X$ .
- (c)  $A$  es un operador cerrado.
- (d)  $A$  es autoadjunto.
- (e)  $A$  es positivo definido: existe una constante  $c_A > 0$  tal que  $\langle Au, u \rangle_X \geq c_A \|u\|_X^2$  para todo  $u \in D(A)$ .

*Demostración.* (a) **No acotado:** Tomando la sucesión  $u_n(x_1, x_2) = (\sin(n\pi x_1) \sin(n\pi x_2), 0)$  en  $\Omega = (0, 1)^2$ , se tiene  $\|u_n\|_X = 1/2$ . Entonces  $Au_n = -\nu(-(n\pi)^2 - (n\pi)^2)u_n = 2\nu(n\pi)^2 u_n$ . Así,  $\|Au_n\|_X / \|u_n\|_X = 2\nu(n\pi)^2 \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

- (b) **Densamente definido:** El espacio  $(C_c^\infty(\Omega))^2$  es un subespacio de  $D(A)$  y es denso en  $X = (L^2(\Omega))^2$ . Por lo tanto,  $D(A)$  es denso en  $X$ .
- (c) **Cerrado:** Sea  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  tal que  $u_m \rightarrow u$  en  $X$  y  $Au_m \rightarrow g$  en  $X$ . Esto significa  $-\nu\Delta u_m \rightarrow g$ , o  $\Delta u_m \rightarrow -g/\nu$  en  $X$ . En el sentido de las distribuciones,  $\Delta u = -g/\nu$ . Como  $-g/\nu \in (L^2(\Omega))^2$ , el Teorema de Regularidad Elíptica (Teorema

2.16 más abajo) implica que  $u \in (H^2(\Omega))^2$ . Además, como cada  $u_m \in (H_0^1(\Omega))^2$  y la convergencia  $u_m \rightarrow u$  en  $X$  junto con  $\Delta u_m \rightarrow \Delta u$  en  $X$  implica  $u_m \rightarrow u$  en  $(H^2(\Omega))^2$  (por la estimación de regularidad), y  $(H_0^1(\Omega))^2$  es un subespacio cerrado de  $(H^1(\Omega))^2$  (y por tanto de  $(H^2(\Omega))^2$ ), se sigue que  $u \in (H_0^1(\Omega))^2$ . Así,  $u \in D(A)$  y  $Au = -\nu\Delta u = -\nu(-g/\nu) = g$ . Con lo cual,  $A$  es cerrado.

(d) **Autoadjunto:** Para  $u, v \in D(A)$ :  $\langle Au, v \rangle_X = \langle -\nu\Delta u, v \rangle_X = -\nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} (\Delta u_k) v_k dx$ . Usando la primera identidad de Green y que  $u_k, v_k \in H_0^1(\Omega)$  (lo que anula los términos de frontera), esto es  $\nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_k \cdot \nabla v_k dx$ . Por la simetría del producto punto y de la integral, esto es igual a  $\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} u_k (-\nu\Delta v_k) dx = \langle u, -\nu\Delta v \rangle_X = \langle u, Av \rangle_X$ . Esto muestra que  $A$  es simétrico. La igualdad de dominios  $D(A^*) = D(A)$  (que es necesaria para la autoadjunción de un operador no acotado) se sigue de la teoría estándar para el operador Laplaciano con condiciones de Dirichlet (que establece que  $-\Delta$  con  $D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  es autoadjunto en  $L^2(\Omega)$ ). Multiplicar por la constante  $\nu > 0$  no altera esta propiedad.

(e) **Positivo definido:** Para  $u \in D(A)$ , de la prueba de autoadjunción vimos que  $\langle Au, u \rangle_X = \nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx$ . Recordando la definición de la norma en  $V = (H_0^1(\Omega))^2$ ,  $\|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 dx$ . Así,  $\langle Au, u \rangle_X = \nu \|u\|_V^2$ . Por la desigualdad de Poincaré (Corolario después del Teorema 2.9), existe una constante  $C_P > 0$  tal que  $\|u\|_X \leq C_P \|\nabla u\|_{(L^2)^{2 \times 2}} = C_P \|u\|_V$ . Por lo tanto,  $\|u\|_V^2 \geq (1/C_P^2) \|u\|_X^2$ . Entonces,  $\langle Au, u \rangle_X \geq \frac{\nu}{C_P^2} \|u\|_X^2$ . Tomando  $c_A = \nu/C_P^2 > 0$ ,  $A$  es positivo definido.  $\square$

**Teorema 2.16. (Regularidad Elíptica para el Laplaciano)** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  o  $n = 3$ ) un abierto acotado con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^2$ . Sea  $g \in L^2(\Omega)$ . El problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta w = g & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución débil  $w \in H_0^1(\Omega)$ . Además, esta solución pertenece a  $H^2(\Omega)$  y existe una constante  $C_e > 0$ , dependiente solo de  $\Omega$ , tal que

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C_e \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

(Notar que  $\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} = \|-g\|_{L^2(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)}$ ).

*Demostración.* Este es un resultado clásico de la teoría de regularidad para ecuaciones elípticas. Ver, por ejemplo, Teorema 4, Sección 6.3.2 de [11] o Teorema 9.25 de [5].  $\square$

### Teorema Espectral y sus Consecuencias para $A = -\nu\Delta$

Dado que el operador  $A = -\nu\Delta$  (Definición 2.13) es autoadjunto, positivo definido, y tiene resolvente compacto (esto se deduce de la regularidad elíptica y la compacidad de la inmersión  $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ), el Teorema Espectral es aplicable.

**Teorema 2.17. (Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos con Resolvente Compacto)** Sea  $T : D(T) \subset H \rightarrow H$  un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert separable  $H$ . Si  $T$  tiene resolvente compacto (i.e.,  $R(\lambda, T)$  es compacto para algún, y por tanto para todo,  $\lambda \in \rho(T)$ ), entonces:

- (i) El espectro  $\sigma(T)$  consiste enteramente en autovalores reales  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  que tienen multiplicidad finita y no tienen punto de acumulación finito.
- (ii) Si  $T$  es además positivo definido y no acotado (como nuestro operador  $A$ ), entonces  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$  y  $\alpha_k \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .
- (iii) Existe una base ortonormal  $\{w_k\}_{k=1}^\infty$  de  $H$  tal que cada  $w_k \in D(T)$  y  $Tw_k = \alpha_k w_k$ .
- (iv) Para cualquier  $u \in D(T)$ ,  $u = \sum_{k=1}^\infty \langle u, w_k \rangle_H w_k$  y  $Tu = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \langle u, w_k \rangle_H w_k$ .

*Demostración.* Ver, e.g., Capítulo 8, Teoremas 8.18 y 8.20 de [5] o Teorema VIII.22 y Corolarios de [23].  $\square$

**Corolario 2.18. (Espectro y Base de Autofunciones para  $A = -\nu\Delta$ )** El operador  $A = -\nu\Delta$  definido en la Definición 2.13 satisface las hipótesis del Teorema 2.17. Por lo tanto:

- (a) Su espectro  $\sigma(A)$  consiste enteramente en autovalores reales y positivos  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ , con multiplicidad finita, tales que  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$  y  $\alpha_k \rightarrow \infty$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Específicamente,  $\alpha_k = \nu\mu'_k$ , donde  $\mu'_k$  son los autovalores del operador vectorial  $-\Delta$  (con  $\nu = 1$ ) con las condiciones de Dirichlet.
- (b) Existe una base ortonormal  $\{w_k\}_{k=1}^\infty$  de  $X = (L^2(\Omega))^2$  tal que cada  $w_k \in D(A)$  y  $Aw_k = \alpha_k w_k$ .

**Observación 2.18.** La base de autofunciones  $\{w_k\}$  del operador  $A = -\nu\Delta$  (con autovalores  $\alpha_k > 0$ ) será fundamental para construir las aproximaciones de Galerkin en el Capítulo 4. El generador del semigrupo para la ecuación de Burgers, que será  $\mathcal{B} = -A = \nu\Delta$  (como se discutirá en la Sección 2.4), tendrá entonces autovalores  $\{-\alpha_k\}$ , todos estrictamente negativos y tendiendo a  $-\infty$ . Esta propiedad del espectro de  $\mathcal{B}$  es clave para que genere un semigrupo analítico y para la estabilidad de la parte lineal de la EDP.

## 2.4 Semigrupos de operadores lineales

La teoría de semigrupos de operadores lineales proporciona un marco poderoso y elegante para estudiar ecuaciones de evolución abstractas de la forma  $u'(t) = \mathcal{A}u(t)$  (problema homogéneo) o  $u'(t) = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{G}(t, u(t))$  (problema no homogéneo o semilineal), donde  $\mathcal{A}$  es un operador lineal (en general, no acotado) en un espacio de Banach  $X$ . La idea central es asociar al operador  $\mathcal{A}$  una familia de operadores acotados  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , llamada semigrupo, que describe la evolución del sistema a lo largo del tiempo, tal que la solución del problema homogéneo con dato inicial  $u_0$  es  $u(t) = T(t)u_0$ .

En el contexto de la ecuación de Burgers  $u_t - \nu \Delta u = -(u \cdot \nabla u)$ , que se puede escribir como  $u_t + Au = -(u \cdot \nabla u)$  donde  $A = -\nu \Delta$  (ver Definición 2.13), la parte lineal  $u_t + Au = 0$  (o  $u_t = -Au$ ) es gobernada por el operador generador que denotaremos como  $\mathcal{A} = -A = \nu \Delta$ . El operador  $A = -\nu \Delta$  fue definido y analizado en la Subsección 2.3.4, donde se estableció en la Proposición 2.15 que es autoadjunto y positivo definido. Las propiedades de  $\mathcal{A}$  se derivan directamente de las de  $A$ :

**Proposición 2.19. (Propiedades del Generador  $\mathcal{A} = \nu \Delta$ )** Sea  $A = -\nu \Delta$  como en la Proposición 2.15, y sea  $\mathcal{A} = -A = \nu \Delta$  con  $D(\mathcal{A}) = D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ . Entonces:

- (a)  $\mathcal{A}$  es no acotado, cerrado y densamente definido en  $X = (L^2(\Omega))^2$ .
- (b)  $\mathcal{A}$  es autoadjunto.
- (c)  $\mathcal{A}$  es negativo definido: existe una constante  $c_A > 0$  (específicamente  $c_A = \nu \mu'_1$ , donde  $\mu'_1$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  actuando en  $(H_0^1)^2$ ) tal que  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle_X \leq -c_A \|u\|_X^2$  para todo  $u \in D(\mathcal{A})$ .
- (d) El espectro de  $\mathcal{A}$  consiste en autovalores  $\{-\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ , donde  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$  son los autovalores de  $A$ . Así,  $\sigma(\mathcal{A}) \subset (-\infty, -c_A] \subset (-\infty, 0)$ .

*Demostración.* (a) Las propiedades de ser no acotado, cerrado y densamente definido se heredan de  $A$  (Proposición 2.15(a-c)), ya que la multiplicación por  $-1$  no las altera. (b) Si  $A$  es autoadjunto,  $\mathcal{A} = -A$  también lo es (Proposición 2.15(d)). (c) Como  $A$  es positivo definido (Proposición 2.15(e)),  $\langle Au, u \rangle_X \geq c_A \|u\|_X^2$ . Entonces  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle_X = \langle -Au, u \rangle_X = -\langle Au, u \rangle_X \leq -c_A \|u\|_X^2$ . (d) Si  $Aw_k = \alpha_k w_k$  con  $\alpha_k > 0$  (Corolario 2.18), entonces  $\mathcal{A}w_k = -Aw_k = -\alpha_k w_k$ .  $\square$

Estas propiedades de  $\mathcal{A}$  (especialmente ser autoadjunto y negativo definido/acotado superiormente) son fundamentales para que genere un semigrupo con buenas propiedades (analítico y de contracción), como se detallará en las siguientes subsecciones. Para mayor información general sobre la teoría de semigrupos, se remite al lector a textos clásicos como [22], [12], [10], [15], o secciones relevantes en [5] y [21].

### 2.4.1 $C_0$ -Semigrupos (fuertemente continuos)

**Definición 2.14. ( $C_0$ -Semigrupo)** Una familia  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores lineales acotados en un espacio de Banach  $X$  (i.e.,  $T(t) \in \mathcal{L}(X)$  para cada  $t \geq 0$ ) es un  $C_0$ -semigrupo (o semigrupo fuertemente continuo) si satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $T(0) = I$  (donde  $I$  es el operador identidad en  $X$ ).
- (ii)  $T(t+s) = T(t)T(s)$  para todo  $t, s \geq 0$  (Propiedad de semigrupo).
- (iii)  $\lim_{s \rightarrow t^+} \|T(s)u - T(t)u\|_X = 0$  para todo  $u \in X$  y todo  $t \geq 0$ . Es decir, la aplicación  $t \mapsto T(t)u$  es continua de  $[0, \infty)$  en  $X$  para cada  $u \in X$  (Continuidad fuerte). (A menudo, solo se exige continuidad en  $t = 0^+$ , ya que la propiedad de semigrupo extiende la continuidad a  $t > 0$ ).

**Observación 2.19.** La propiedad (ii)  $T(t+s) = T(t)T(s)$  refleja la naturaleza autónoma del sistema  $u' = \mathcal{A}u$ . La continuidad fuerte (iii) es crucial; si la convergencia fuera en la norma de operadores  $\mathcal{L}(X)$  (i.e.,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ ), el semigrupo se llamaría uniformemente continuo, y su generador sería un operador acotado  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X)$  (en cuyo caso  $T(t) = e^{t\mathcal{A}}$  en el sentido de la serie exponencial).

**Proposición 2.20. (Acotación Exponencial)** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo en un espacio de Banach  $X$ . Entonces existen constantes  $M \geq 1$  y  $\omega \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

La constante  $\omega$  se llama la cota de crecimiento (o tipo) del semigrupo. Si  $\omega < 0$ , el semigrupo es uniformemente exponencialmente estable. Si  $\omega = 0$  y  $M = 1$ , es un semigrupo de contracciones.

*Demostración.* Ver [22, Capítulo 1, Teorema 2.2]. □

**Ejemplo 2.9. (Ejemplos de  $C_0$ -Semigrupos)** (a) **Semigrupo escalar fundamental:**

Sea  $X = \mathbb{K}$  (i.e.,  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) y  $a \in \mathbb{K}$ . La familia  $T(t)x = e^{at}x$  para  $x \in \mathbb{K}$  es un  $C_0$ -semigrupo. Aquí  $M = 1$  y  $\omega = \operatorname{Re}(a)$ .

(b) **Semigrupo generado por un operador acotado:** Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X)$  un operador lineal acotado. La familia de operadores  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  definida por la serie exponencial (convergente en  $\mathcal{L}(X)$ ):

$$T(t) = e^{t\mathcal{B}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathcal{B})^k}{k!} = I + t\mathcal{B} + \frac{t^2\mathcal{B}^2}{2!} + \dots$$

es un  $C_0$ -semigrupo en  $X$ . De hecho, es un semigrupo uniformemente continuo, y  $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{|t|\|\mathcal{B}\|}$ . Un caso particular es cuando  $X = \mathbb{K}^n$  y  $\mathcal{B}$  es una matriz  $n \times n$ ; entonces  $T(t) = e^{t\mathcal{B}}$  es la exponencial de una matriz.

(c) **Semigrupo de Traslación (a la izquierda):** En  $X = L^p(\mathbb{R})$  para  $1 \leq p < \infty$ , o en  $X = C_0(\mathbb{R})$  (funciones continuas que tienden a cero en el infinito), el operador de traslación  $(T(t)f)(x) = f(x+t)$  para  $t \geq 0$  define un  $C_0$ -semigrupo de isometrías (i.e.,  $\|T(t)f\|_X = \|f\|_X$ , por lo que  $M = 1, \omega = 0$ ).

(d) **Semigrupo del Calor (o de difusión):** Como se verá más adelante, el operador  $\mathcal{A} = \nu\Delta$  con dominio  $D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$  en  $X = (L^2(\Omega))^2$  (con  $\nu > 0$  y condiciones de frontera de Dirichlet) genera un  $C_0$ -semigrupo analítico  $T(t) = e^{t\mathcal{A}}$ . Este semigrupo es también de contracciones y exponencialmente estable.

## 2.4.2 Generador infinitesimal

A cada  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  se le asocia un único operador lineal (generalmente no acotado) llamado su generador infinitesimal, el cual determina completamente el semigrupo.

**Definición 2.15. (Generador Infinitesimal)** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo en un espacio de Banach  $X$ . El *generador infinitesimal*  $\mathcal{A}$  del semigrupo  $T(t)$  es el operador lineal definido por:

$$\mathcal{A}u = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)u - u}{h},$$

cuyo dominio  $D(\mathcal{A})$  es el conjunto de todos los  $u \in X$  para los cuales este límite existe en  $X$ :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)u - u}{h} \text{ existe en } X \right\}.$$

**Observación 2.20.** (a) El generador infinitesimal  $\mathcal{A}$  es siempre un operador lineal cerrado y su dominio  $D(\mathcal{A})$  es denso en  $X$  (si  $X$  es reflexivo, la densidad se da; en general,  $\overline{D(\mathcal{A})}$  es donde el semigrupo restringido sigue siendo fuertemente continuo). Para los semigrupos que nos interesan (generados por operadores como  $\nu\Delta$ ),  $D(\mathcal{A})$  es denso.

- (b) El generador  $\mathcal{A}$  caracteriza unívocamente al  $C_0$ -semigrupo  $T(t)$ . A menudo se utiliza la notación formal  $T(t) = e^{t\mathcal{A}}$  para indicar que  $T(t)$  es el semigrupo generado por  $\mathcal{A}$ , incluso cuando  $\mathcal{A}$  es no acotado y la serie exponencial no converge en  $\mathcal{L}(X)$ .
- (c) Si  $u \in D(\mathcal{A})$ , entonces la función  $t \mapsto T(t)u$  es continuamente diferenciable en  $[0, \infty)$  y  $u'(t) = \mathcal{A}T(t)u = T(t)\mathcal{A}u$ . Es decir,  $u(t) = T(t)u_0$  es la solución clásica del problema de Cauchy  $u' = \mathcal{A}u$ ,  $u(0) = u_0$ , si  $u_0 \in D(\mathcal{A})$ .

**Ejemplo 2.10. (Generadores de los Semigrupos del Ejemplo 2.9)** (a) Para el semigrupo  $T(t)x = e^{at}x$  en  $X = \mathbb{K}$ , el generador infinitesimal es  $\mathcal{A}x = ax$  con  $D(\mathcal{A}) = \mathbb{K}$ .

- (b) Si  $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X)$ , el generador infinitesimal del semigrupo  $T(t) = e^{t\mathcal{B}}$  es precisamente el operador  $\mathcal{B}$ , con  $D(\mathcal{B}) = X$ .
- (c) Para el semigrupo de traslación  $(T(t)f)(x) = f(x+t)$  en  $X = L^p(\mathbb{R})$  ( $1 \leq p < \infty$ ), el generador infinitesimal es  $\mathcal{A}f = f'$  (la derivada en el sentido de las distribuciones), con dominio  $D(\mathcal{A}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$  (el espacio de Sobolev de funciones en  $L^p$  cuya primera derivada débil también está en  $L^p$ ). Para  $p = 2$ ,  $D(\mathcal{A}) = H^1(\mathbb{R})$ .
- (d) El generador del semigrupo del calor (Ejemplo 2.9(d)) es  $\mathcal{A} = \nu\Delta$  con  $D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ .

### 2.4.3 Teoremas de Generación de Semigrupos

Una vez definido el generador infinitesimal a partir de un semigrupo, la pregunta inversa es fundamental: ¿qué propiedades debe tener un operador  $\mathcal{A}$  para ser el generador de un  $C_0$ -semigrupo? Los siguientes resultados responden a esta pregunta.

**Lema 2.21. (Propiedades Adicionales del Semigrupo y su Generador)** Sea  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo con generador infinitesimal  $\mathcal{A}$ .

- (a) Para todo  $u \in X$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u \, ds = T(t)u$  para cada  $t \geq 0$ .

(b) Para todo  $u \in X$  y  $t \geq 0$ ,  $\int_0^t T(s)u \, ds \in D(\mathcal{A})$  y

$$\mathcal{A} \left( \int_0^t T(s)u \, ds \right) = T(t)u - u.$$

(c) Si  $u_0 \in D(\mathcal{A})$ , entonces  $u(t) = T(t)u_0$  es la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'(s) = \mathcal{A}u(s), & s > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

en el sentido de que  $u \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); D(\mathcal{A}))$  (donde  $D(\mathcal{A})$  se equipa con la norma del grafo  $\|x\|_{D(\mathcal{A})} = \|x\|_X + \|\mathcal{A}x\|_X$ ). Además,  $u'(t) = \mathcal{A}T(t)u_0 = T(t)\mathcal{A}u_0$ .

(d) Para  $u_0 \in D(\mathcal{A})$  y  $t \geq s \geq 0$ ,

$$T(t)u_0 - T(s)u_0 = \int_s^t T(\tau)\mathcal{A}u_0 \, d\tau = \int_s^t \mathcal{A}T(\tau)u_0 \, d\tau.$$

*Demostración.* Estas son propiedades estándar. Para (a), (b), ver Capítulo 1, Lema 2.3 y Teorema 2.4 de [22]. Para (c) y (d), ver Capítulo 1, Teorema 2.10 y Lema 2.11 de [22] (o equivalentes).  $\square$

**Observación 2.21.** La propiedad (c) del Lema 2.21 es fundamental, pues establece que si el dato inicial  $u_0$  está en el dominio del generador  $D(\mathcal{A})$ , entonces  $u(t) = T(t)u_0$  es una solución clásica del problema homogéneo  $u' = \mathcal{A}u$ . La propiedad (b) es esencial para definir la solución mild de problemas no homogéneos mediante la fórmula de Duhamel, ya que muestra cómo “invertir”  $\mathcal{A}$  usando la integral del semigrupo. La propiedad (d) es simplemente la forma integral de la ecuación diferencial satisfecha por  $T(t)u_0$ .

**Teorema 2.22. (Hille-Yosida)** *Un operador lineal  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  (en un espacio de Banach  $X$ ) es el generador de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  que satisface  $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}$  para algunas constantes  $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ , si y solo si:*

- (i)  $\mathcal{A}$  es cerrado y  $D(\mathcal{A})$  es denso en  $X$ .
- (ii) Existe  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  (que puede tomarse igual a  $\omega$ ) tal que para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0$ ,  $\lambda$  pertenece al conjunto resolvente  $\rho(\mathcal{A})$ , y para tales  $\lambda$ , el resolvente  $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$  satisface la estimación:

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}(\lambda) - \omega_0)^n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.* Ver Capítulo 1, Teorema 3.1 de [22].  $\square$

**Observación 2.22.** La condición (ii) del Teorema de Hille-Yosida, sobre las potencias del resolvente, a menudo es difícil de verificar directamente. Sin embargo, es de gran importancia teórica. Para el caso de semigrupos de contracciones ( $M = 1, \omega = 0$ ), la condición se simplifica notablemente, lo que lleva al Teorema de Lumer-Phillips en espacios de Hilbert.

Un caso particularmente importante es el de los semigrupos de contracciones, donde el Teorema de Lumer-Phillips proporciona una caracterización más manejable en espacios de Hilbert.

**Definición 2.16. (Operador Disipativo y m-Disipativo)** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  un operador lineal densamente definido.

- (i)  $\mathcal{A}$  se dice *disipativo* si  $\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_X \leq 0$  para todo  $u \in D(\mathcal{A})$ .
- (ii)  $\mathcal{A}$  se dice *m-disipativo* si es disipativo y, además, el rango de  $(\lambda_0 I - \mathcal{A})$  es todo  $X$  para algún (y por tanto para todo)  $\lambda_0 > 0$ .

**Observación 2.23.** Si  $\mathcal{A}$  es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert, entonces es disipativo si y solo si  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle_X \leq 0$  (ya que  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle_X$  es real). En tal caso, si  $\mathcal{A}$  es disipativo (i.e., sus autovalores son  $\leq 0$ ), su espectro  $\sigma(\mathcal{A})$  está contenido en  $(-\infty, 0]$ . Para cualquier  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$ , por lo que  $\lambda_0 I - \mathcal{A}$  es biyectivo (y por tanto sobreyectivo). Así, para un operador autoadjunto, ser disipativo implica ser m-disipativo.

**Teorema 2.23. (Lumer-Phillips)** *Un operador lineal  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  densamente definido en un espacio de Hilbert  $X$  genera un  $C_0$ -semigrupo de contracciones  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  (i.e.,  $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$  para todo  $t \geq 0$ ) si y solo si  $\mathcal{A}$  es m-disipativo.*

*Demostración.* Ver, por ejemplo, [22, Capítulo 1, Teorema 4.3 y Corolario 4.4]. □

**Proposición 2.24. ( $\mathcal{A} = \nu \Delta$  genera un semigrupo de contracciones)** *El operador  $\mathcal{A} = \nu \Delta$  con  $D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$  genera un  $C_0$ -semigrupo de contracciones  $\{T(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$  en  $X = L^2(\Omega)^2$ .*

*Demostración.* De la Proposición 2.19, sabemos que  $\mathcal{A}$  es autoadjunto y negativo definido:  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle_X \leq -c_A \|u\|_X^2 \leq 0$  para  $c_A > 0$ . Esto implica que  $\mathcal{A}$  es disipativo. Dado que  $\mathcal{A}$  es autoadjunto y disipativo, es m-disipativo (como se señaló en la observación posterior a la Definición 2.16). Por lo tanto, según el Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.23),  $\mathcal{A} = \nu \Delta$  genera un  $C_0$ -semigrupo de contracciones. De hecho, la estimación  $\langle \mathcal{A}u, u \rangle_X \leq -c_A \|u\|_X^2$  con  $c_A > 0$  implica que  $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-c_A t}$  para  $t \geq 0$ . Como  $c_A > 0$ ,  $e^{-c_A t} \leq 1$ , lo que confirma que es un semigrupo de contracciones (y exponencialmente estable). □

## 2.4.4 Operadores sectoriales y semigrupos analíticos

Para EDPs de tipo parabólico, como la ecuación del calor  $u_t = \nu \Delta u$  (que es la parte lineal de la ecuación de Burgers), el semigrupo asociado posee propiedades de regularización más fuertes que un  $C_0$ -semigrupo general: es un *semigrupo analítico*. Esto implica que la solución  $u(t) = T(t)u_0$  se vuelve muy regular (e.g.,  $C^\infty$  en las variables espaciales y analítica en  $t$ ) para  $t > 0$ , incluso si el dato inicial  $u_0$  es poco regular (e.g.,  $u_0 \in X$ ).

**Definición 2.17. (Semigrupo Analítico)** Un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en un espacio de Banach  $X$  se dice *analítico* si para todo  $u_0 \in X$ , la función  $t \mapsto T(t)u_0$  es analítica en el intervalo  $(0, \infty)$  (considerada como función con valores en  $X$ ). Equivalentemente,  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$

es analítico si existe una extensión  $z \mapsto T(z)$  de  $T(t)$  a un sector del plano complejo  $\Sigma_\delta = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg z| < \delta\}$  para algún  $\delta \in (0, \pi/2]$ , tal que  $T(z)$  es una función analítica de  $\Sigma_\delta$  a  $\mathcal{L}(X)$ ,  $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$  en  $\Sigma_\delta$ , y para cada  $u_0 \in X$ ,  $T(z)u_0 \rightarrow u_0$  cuando  $z \rightarrow 0$  dentro de cualquier subsector  $\Sigma_{\delta'}$  con  $0 < \delta' < \delta$ .

Una clase importante de generadores de semigrupos analíticos son los operadores sectoriales.

**Definición 2.18. (Operador Sectorial)** Un operador lineal cerrado y densamente definido  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  en un espacio de Banach  $X$  se dice *sectorial* (o de tipo  $(\phi, a)$ ) si existen constantes  $\phi \in [0, \pi/2)$  y  $a \in \mathbb{R}$  (el vértice del sector espectral) tales que el sector abierto

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \neq a, |\arg(\lambda - a)| < \pi - \phi\}$$

está contenido en el conjunto resolvente  $\rho(\mathcal{A})$ , y para alguna constante  $M \geq 1$ , la estimación del resolvente

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} = \|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$$

se cumple para todo  $\lambda \in S_{a,\phi}$ . El valor  $\phi_0 = \inf\{\phi\}$  para el cual esto es cierto se llama el semi-ángulo del sector espectral de  $\mathcal{A}$  (que está contenido en  $\mathbb{C} \setminus S_{a,\phi_0}$ ).

**Observación 2.24.** El espectro  $\sigma(\mathcal{A})$  de un operador sectorial de tipo  $(\phi, a)$  está contenido en el sector cerrado  $\overline{\Sigma}_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - a)| \leq \phi\} \cup \{a\}$  (si  $\phi < \pi/2$ ) o en un sector más general si el vértice  $a$  no es real o el sector no es simétrico. Para el operador  $\mathcal{A} = \nu\Delta$  con  $D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ , sabemos por la Proposición 2.19 que es autoadjunto y su espectro  $\sigma(\mathcal{A}) \subset (-\infty, -\nu\mu_1]$  donde  $\mu_1 > 0$  es el primer autovalor de  $-\Delta$  (escalar). Este es un caso particular de operador sectorial: el espectro está contenido en el semieje real negativo. Podemos tomar  $a = 0$  (o cualquier  $a \geq 0$ ) y  $\phi = 0$  (lo que significa que el sector espectral es  $(-\infty, 0]$  y  $S_{a,\phi}$  es  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a]$ ). La estimación del resolvente se satisface para operadores autoadjuntos con espectro en un semieje.

**Proposición 2.25.** *El operador  $\mathcal{A} = \nu\Delta$  con  $D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$  (donde  $\nu > 0$ ) es sectorial en  $X = L^2(\Omega)^2$ .*

*Demostración.* Como se estableció en la Proposición 2.19,  $\mathcal{A}$  es autoadjunto y su espectro  $\sigma(\mathcal{A})$  está contenido en  $(-\infty, -\nu\mu_1]$ , donde  $\mu_1 > 0$ . Esto implica que  $\mathcal{A}$  es acotado superiormente por  $-\nu\mu_1 < 0$ . Un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert que es acotado superiormente (digamos por  $\omega_0 \leq 0$ ) es sectorial. Específicamente, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re}(\lambda) > \omega_0$ ,  $\lambda$  pertenece al conjunto resolvente  $\rho(\mathcal{A})$ . Para tales  $\lambda$ , la norma del resolvente satisface  $\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{A}))}$ . Si  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$  (entonces  $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$ ), se tiene  $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{A})) \geq |\operatorname{Re}(\lambda) - \sup_{s \in \sigma(\mathcal{A})} s| \geq |\operatorname{Re}(\lambda)|$ . Si consideramos el sector  $S_{0,\psi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg \lambda| < \pi - \psi\}$  para un  $\psi \in (0, \pi/2)$  pequeño (de modo que  $S_{0,\psi}$  cubra casi todo el plano excepto un cono estrecho alrededor del semieje real negativo), entonces para  $\lambda \in S_{0,\psi}$ , se tiene  $|\lambda| \leq C \cdot \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{A}))$ . Por lo tanto,  $\|R(\lambda, \mathcal{A})\| \leq \frac{C'}{|\lambda|}$  para  $\lambda \in S_{0,\psi}$  (con  $a = 0$  en la definición de sectorial). Esto cumple la Definición 2.18. Una referencia detallada para operadores autoadjuntos acotados superiormente siendo sectoriales es Capítulo 2, Teorema 4.6 y Ejemplo 4.7 de [22].  $\square$

El siguiente teorema establece la conexión fundamental entre operadores sectoriales y semigrupos analíticos.

**Teorema 2.26.** *Un operador lineal cerrado y densamente definido  $\mathcal{A}$  en un espacio de Banach  $X$  genera un semigrupo analítico  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  si y solo si  $\mathcal{A}$  es sectorial.*

*Demostración.* Ver Capítulo 2, Teorema 5.2 de [22].  $\square$

**Corolario 2.27.** *El operador  $\mathcal{A} = \nu \Delta$  con  $D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$  genera un semigrupo analítico  $\{T(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$  en  $X = L^2(\Omega)^2$ .*

*Demostración.* Esto se sigue directamente de la Proposición 2.25 (que establece que  $\mathcal{A}$  es sectorial) y el Teorema 2.26.  $\square$

**Teorema 2.28. (Propiedades de Regularización de Semigrupos Analíticos)** *Sea  $\{T(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$  un semigrupo analítico en un espacio de Banach  $X$  con generador  $\mathcal{A}$ .*

- (a) **Suavizado Espacial:** *Para todo  $u_0 \in X$ ,  $t > 0$  y  $k \in \mathbb{N}_0$  (entero no negativo), se tiene  $T(t)u_0 \in D(\mathcal{A}^k)$  y existen constantes  $M_k > 0$  (que pueden depender de  $k$  y de las propiedades del sector de analiticidad del semigrupo) tales que*

$$\|\mathcal{A}^k T(t)u_0\|_X \leq \frac{M_k}{t^k} \|u_0\|_X, \quad \text{para todo } t > 0.$$

*Equivalentemente,  $\|\mathcal{A}^k T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M_k}{t^k}$  para  $t > 0$ .*

- (b) **Suavizado Temporal:** *Para todo  $u_0 \in X$ , la función  $t \mapsto T(t)u_0$  es infinitamente diferenciable en  $(0, \infty)$  (i.e.,  $T(\cdot)u_0 \in C^\infty((0, \infty); X)$ ), y para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,*

$$\frac{d^n}{dt^n} T(t)u_0 = \mathcal{A}^n T(t)u_0.$$

*Además, existen constantes  $M'_n > 0$  tales que*

$$\left\| \frac{d^n}{dt^n} T(t)u_0 \right\|_X = \|\mathcal{A}^n T(t)u_0\|_X \leq \frac{M'_n}{t^n} \|u_0\|_X, \quad \text{para todo } t > 0.$$

*Demostración.* Ver [22, Capítulo 2, Teorema 6.13] o [21, Capítulo 2, Proposición 2.2.2 y Teorema 2.5.2].  $\square$

**Observación 2.25.** Estos resultados muestran que la solución  $u(t) = T(t)u_0$  del problema homogéneo  $u' = \mathcal{A}u$  se vuelve instantáneamente muy regular para  $t > 0$ :  $u(t)$  pertenece a todos los dominios  $D(\mathcal{A}^k)$  de las potencias del generador y es  $C^\infty((0, \infty); X)$  con respecto a  $t$ . Esto es una manifestación del carácter parabólico de la ecuación  $u_t = \nu \Delta u$ .

### 2.4.5 Espacios de potencias fraccionarias

Para un operador como  $A = -\nu\Delta$  (Definición 2.13), que es autoadjunto y positivo definido en  $X = (L^2(\Omega))^2$ , se pueden definir sus potencias fraccionarias  $A^\alpha$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Los dominios de estas potencias,  $D(A^\alpha)$ , forman una escala de espacios de Hilbert que interpolan entre  $X$  y  $D(A)$  (o incluso espacios más grandes si  $\alpha < 0$ , o más pequeños si  $\alpha > 1$ ). Estos espacios son fundamentales para analizar la regularidad de las soluciones de ecuaciones de evolución y para caracterizar los dominios de los operadores y las propiedades de los semigrupos. Para mayor información sobre esta subsección consultar [22], [21], [12].

Sea  $A = -\nu\Delta$  el operador autoadjunto y positivo definido con dominio  $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ , como se estudió en la Subsección 2.3.4. Sea  $\{w_k\}_{k=1}^\infty$  la base ortonormal de  $X$  formada por autofunciones de  $A$ , y  $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$  los correspondientes autovalores positivos ( $Aw_k = \alpha_k w_k$ , con  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ , según el Corolario 2.18).

**Definición 2.19. (Espacios de Potencias Fraccionarias  $X_\alpha = D(A^\alpha)$ )** Para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se define el operador  $A^\alpha$  mediante el cálculo funcional basado en el Teorema Espectral (Corolario 2.18). Si  $u = \sum_{k=1}^\infty \langle u, w_k \rangle_X w_k \in X$ , entonces

$$A^\alpha u = \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k)^\alpha \langle u, w_k \rangle_X w_k.$$

El dominio  $D(A^\alpha)$  del operador  $A^\alpha$  es el espacio de Hilbert:

$$X_\alpha := D(A^\alpha) = \left\{ u \in X \mid \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k^\alpha |\langle u, w_k \rangle_X|)^2 < \infty \right\},$$

equipado con la norma del grafo, que es equivalente a (dado que  $A$  es positivo definido y por tanto  $A^\alpha$  es inyectivo para  $\alpha \geq 0$  si se define apropiadamente):

$$\|u\|_{X_\alpha} = \|A^\alpha u\|_X = \left( \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^{2\alpha} |\langle u, w_k \rangle_X|^2 \right)^{1/2}.$$

Para  $\alpha = 0$ ,  $X_0 = D(A^0) = X = (L^2(\Omega))^2$  (ya que  $A^0 = I$  en  $(\ker A)^\perp$ , y  $A$  es inyectivo).

**Notación** (Notación de Equivalencia de Espacios). En la siguiente proposición y en el resto del documento, utilizaremos el símbolo  $Y \approx Z$  para indicar que dos espacios de Banach (o normados)  $Y$  y  $Z$  son *equivalentes* en el siguiente sentido:

- (i) Son iguales como conjuntos de funciones (o existe un isomorfismo algebraico y topológico entre ellos).
- (ii) Sus normas,  $\|\cdot\|_Y$  y  $\|\cdot\|_Z$ , son equivalentes. Es decir, existen constantes positivas  $c_1, c_2 > 0$  tales que:

$$c_1 \|u\|_Z \leq \|u\|_Y \leq c_2 \|u\|_Z, \quad \text{para todo } u \in Y(\text{identificado con } Z).$$

La equivalencia de normas implica que ambos espacios tienen las mismas propiedades topológicas.

**Observación 2.26. (Relación entre  $\|\cdot\|_V$  y  $X_{1/2}$ )** Recordemos que  $V = (H_0^1(\Omega))^2$  está dotado de la norma  $\|u\|_V^2 = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} |\nabla u_j|^2 dx$ . Como se mostró en la prueba de la Proposición 2.15(e),  $\langle Au, u \rangle_X = \nu \|u\|_V^2$  for  $u \in D(A)$ . Dado que  $\langle Au, u \rangle_X = \|A^{1/2}u\|_X^2$  (por cálculo funcional para el operador autoadjunto positivo  $A$ ), tenemos  $\|A^{1/2}u\|_X^2 = \nu \|u\|_V^2$ . Esta relación, probada para  $u \in D(A)$  (que es denso en  $V = X_{1/2}$  en la norma de  $V$ ), se extiende por densidad a todo  $u \in V = D(A^{1/2})$ . Por lo tanto, se tiene la importante equivalencia de normas (de hecho, una igualdad escalada):

$$\|u\|_V = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|A^{1/2}u\|_X \quad \text{para todo } u \in V. \quad (2.1)$$

Esto justifica la identificación  $V \approx X_{1/2}$  no solo como igualdad de conjuntos (con  $D(A^{1/2})$  siendo precisamente  $(H_0^1(\Omega))^2$  para  $A = -\nu\Delta$ ) sino también en términos de equivalencia de sus normas usuales.

**Proposición 2.29. (Propiedades de  $X_\alpha$  y del Semigrupo  $T(t) = e^{tA} = e^{-tA}$ )** Sea  $A = -\nu\Delta$  el operador de la Definición 2.13, y sea  $X_\alpha = D(A^\alpha)$ . Sea  $T(t) = e^{tA} = e^{-tA}$  el semigrupo analítico generado por  $A = \nu\Delta$ .

- (a) Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $X_\alpha$  es un espacio de Hilbert con el producto interno  $\langle u, v \rangle_{X_\alpha} = \langle A^\alpha u, A^\alpha v \rangle_X$ .
- (b) Si  $\alpha > \beta$ , entonces  $X_\alpha \subset X_\beta$  y la inmersión  $X_\alpha \hookrightarrow X_\beta$  es continua y compacta.
- (c) **(Desigualdad de Interpolación/Momentos)** Para  $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha$  y  $u \in X_\alpha$ :

$$\|u\|_{X_\beta} \leq \|u\|_{X_\gamma}^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}} \|u\|_{X_\alpha}^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}.$$

En particular, para  $\gamma = 0$ :  $\|u\|_{X_\beta} \leq \|u\|_X^{1-\beta/\alpha} \|A^\alpha u\|_X^{\beta/\alpha}$  para  $u \in X_\alpha$ ,  $0 \leq \beta \leq \alpha$ .

- (d) **(Caracterización con Espacios de Sobolev)** Para  $A = -\nu\Delta$  con  $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ :
  - $X_0 = (L^2(\Omega))^2$ .
  - $X_{1/2} \approx (H_0^1(\Omega))^2 = V$ . (Normas equivalentes)
  - $X_1 = D(A) \approx (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ . (Normas equivalentes)
  - Para  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $X_\alpha = D(A^\alpha)$  es un subespacio de  $(H^{2\alpha}(\Omega))^2$ . Más precisamente:
    - Si  $0 \leq 2\alpha < 1/2$ ,  $X_\alpha \approx (H^{2\alpha}(\Omega))^2$ .
    - Si  $1/2 \leq 2\alpha \leq 2$  (i.e.,  $1/4 \leq \alpha \leq 1$ ),  $X_\alpha$  consiste en funciones  $u \in (H^{2\alpha}(\Omega))^2$  que también satisfacen  $u|_{\partial\Omega} = 0$  (y, si  $2\alpha > 3/2$ , también  $(\Delta u)|_{\partial\Omega} = 0$  si  $A$  fuera  $\Delta^2$ , pero para  $A = -\nu\Delta$  solo  $u|_{\partial\Omega} = 0$  es la condición de  $H_0^1$  que se interpola"). Una caracterización precisa se da por interpolación:  $X_\alpha = [X, D(A)]_\alpha$ .

- (e) **(Regularización por el Semigrupo)** Sea  $\alpha_1 > 0$  el primer autovalor de  $A$ . Para  $u_0 \in X_\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ),  $t > 0$ , y  $\beta \geq \gamma$ :

$$\|A^\beta T(t)u_0\|_X = \|A^\beta e^{-tA}u_0\|_X \leq \frac{M_{\beta-\gamma}}{t^{\beta-\gamma}} e^{-\alpha_1 t} \|A^\gamma u_0\|_X,$$

donde  $M_{\beta-\gamma}$  es una constante. En particular, si  $u_0 \in X$  (i.e.,  $\gamma = 0$ ):

$$\|A^\beta T(t)u_0\|_X \leq \frac{M_\beta}{t^\beta} e^{-\alpha_1 t} \|u_0\|_X.$$

Esto muestra que  $T(t) : X_\gamma \rightarrow X_\beta$ . Por ejemplo,  $T(t) : X \rightarrow X_{1/2} = V$  con una singularidad  $t^{-1/2}$  para la norma  $\|A^{1/2}T(t)u_0\|_X$ .

*Demostración.* Estas propiedades son estándar en la teoría de operadores autoadjuntos positivos y semigrupos analíticos. Ver, por ejemplo, Capítulo 2, Sección 6 de [22], Capítulo 2 de [21], o [12]. La caracterización de  $D(A^\alpha)$  en términos de espacios de Sobolev para el Laplaciano se puede encontrar en tratados sobre operadores elípticos como [13] o [19]. La propiedad de inmersión compacta en (b) se sigue de la compacidad del resolvente de  $A$  y la naturaleza discreta de su espectro.  $\square$

**Ejemplo 2.11.** Para el operador  $A = -\nu\Delta$  en  $X = (L^2(\Omega))^2$ :

- (a)  $X_0 = D(A^0) = X = (L^2(\Omega))^2$ .
- (b)  $X_{1/2} = D(A^{1/2}) \approx (H_0^1(\Omega))^2 = V$ .
- (c)  $X_1 = D(A^1) = D(A) \approx (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ .

## 2.5 Resultados auxiliares

En esta sección, presentamos las herramientas matemáticas que se utilizarán repetidamente en las demostraciones de existencia, unicidad y regularidad. Para mayor información sobre estos resultados, se puede consultar [11], [5], [29], o [4].

### 2.5.1 Lemas de Gronwall

**Lema 2.30. (Lema de Gronwall (Forma Diferencial))** Sean  $y(t)$  y  $g(t)$  funciones no negativas definidas en un intervalo  $[0, T]$ , con  $g(t)$  integrable en  $[0, T]$ . Supongamos que  $y(t)$  es absolutamente continua y satisface la desigualdad diferencial:

$$\frac{dy}{dt}(t) \leq g(t)y(t), \quad \text{para casi todo } t \in (0, T),$$

y la condición inicial  $y(0) = y_0 \geq 0$ . Entonces:

$$y(t) \leq y_0 \exp \left( \int_0^t g(s) ds \right), \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

En particular, si  $y_0 = 0$ , entonces  $y(t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .

*Demostración.* Ver, por ejemplo, Apéndice B.2 en [11] o Apéndice A.4 en [5].  $\square$

**Lema 2.31. (Lema de Gronwall (Forma Integral))** Sean  $y(t)$  y  $g(t)$  funciones no negativas e integrables en  $[0, T]$ , y  $C \geq 0$  una constante. Si

$$y(t) \leq C + \int_0^t g(s)y(s) ds, \text{ para todo } t \in [0, T],$$

entonces

$$y(t) \leq C \exp \left( \int_0^t g(s) ds \right), \text{ para todo } t \in [0, T].$$

En particular, si  $C = 0$ , entonces  $y(t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ .

*Demostración.* Ver, por ejemplo, Apéndice A.4 en [5] o Apéndice B.2 en [11].  $\square$

**Observación 2.27.** El lema de Gronwall es una herramienta fundamental para obtener estimaciones a priori y probar unicidad en EDPs. La forma integral requiere menos regularidad sobre la función  $y(t)$  que la forma diferencial.

### Lema de Gronwall Generalizado

Para ciertas estimaciones, especialmente aquellas que surgen de la regularización por semigrupos analíticos, se encuentran desigualdades integrales con núcleos que son singulares en el origen. El siguiente lema es una versión adaptada para tales casos.

**Lema 2.32. (Lema de Gronwall Generalizado para Integrales Singulares)** Supongamos que  $z(t)$  es una función no negativa y localmente integrable en  $[0, T_0)$ , y que existen una función no negativa y no decreciente  $a(t)$  en  $[0, T_0)$ , y constantes  $K \geq 0$  y  $\beta \in (0, 1)$  tales que

$$z(t) \leq a(t) + K \int_0^t (t-s)^{\beta-1} z(s) ds$$

para  $0 \leq t < T_0$ . Entonces,  $z(t)$  satisface una estimación que involucra la función de Mittag-Leffler. En particular, si  $a(t) \equiv 0$  y  $z(0) = 0$ , entonces se puede concluir que  $z(t) \equiv 0$  para  $0 \leq t < T_0$ .

*Demostración.* Para una demostración de este tipo de lema, ver Lemma 7.1.1 en [14].  $\square$

## 2.5.2 Principio del máximo para ecuaciones parabólicas

El principio del máximo es una propiedad fundamental de ciertas ecuaciones parabólicas.

- **Caso Escalar:** Para una ecuación parabólica lineal  $Lw \leq 0$  (con un coeficiente de orden cero no negativo), el máximo de  $w$  se alcanza en la frontera parabólica del dominio espacio-temporal Capítulo 7 en [11].
- **Extensión a Sistemas:** Una estrategia efectiva para sistemas es analizar una cantidad escalar no negativa como  $\phi(x, t) = |u(x, t)|^2$ . Si la EDP resultante para  $\phi$  satisface las hipótesis del principio del máximo, se pueden obtener cotas para  $|u|$ . Esta técnica es estándar en el análisis de ecuaciones de la mecánica de fluidos [29].

### 2.5.3 Teoremas de compacidad y continuidad

Los siguientes tres teoremas son los pilares del método de Faedo-Galerkin para pasar de soluciones aproximadas a una solución débil.

**Lema 2.33. (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg en 2D)** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado y con frontera suficientemente regular. Para funciones  $w \in H^1(\Omega)$ , se cumple la siguiente desigualdad de interpolación:*

$$\|w\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|w\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|w\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}.$$

Usando la notación de los espacios  $X$  y  $V$ , y la equivalencia de normas, esto implica que para  $w \in V$ :

$$\|w\|_{L^4(\Omega)} \leq C' \|w\|_X^{1/2} \|w\|_V^{1/2}.$$

La constante  $C'$  depende del dominio  $\Omega$ .

*Demostración.* Esta es una de las desigualdades de interpolación clásicas para espacios de Sobolev. Para su demostración, se remite al lector a tratados sobre el tema como [5] o [17].  $\square$

**Teorema 2.34. (Teorema de Banach-Alaoglu)** *Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo. Entonces, toda sucesión acotada en  $X$  tiene una subsucesión que converge débilmente en  $X$ .*

*Demostración.* La demostración es un resultado clásico del análisis funcional. Ver, por ejemplo, [5, Teorema 3.15 y Corolario 3.21].  $\square$

**Teorema 2.35. (Teorema de Aubin-Lions-Simon)** *Sean  $X_0$ ,  $X$  y  $X_1$  tres espacios de Banach tales que  $X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$ , donde la inmersión  $X_0 \hookrightarrow X$  es compacta. Si una sucesión  $\{u_n\}$  está acotada en  $L^p(0, T; X_0)$  y su derivada temporal  $\{(u_n)_t\}$  está acotada en  $L^q(0, T; X_1)$  (con  $p, q > 1$ ), entonces existe una subsucesión que converge fuertemente en  $L^p(0, T; X)$ .*

*Demostración.* Para una versión general de este lema, ver [49]. Versiones clásicas adaptadas a ecuaciones de fluidos se encuentran en Capítulo III, Lema 1.4 de [29] y [4]. Las referencias originales son [35] y [18].  $\square$

**Lema 2.36. (Interpolación para continuidad temporal)** *Sean  $V_0$ ,  $H$  y  $V_1$  tres espacios de Hilbert tales que  $V_0 \hookrightarrow H \hookrightarrow V_1$  con inmersiones continuas. Si una función  $u$  satisface  $u \in L^2(0, T; V_0)$  y  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V_1)$ , entonces  $u$  es continua en el tiempo con valores en  $H$ , es decir,  $u \in C([0, T]; H)$ .*

*Prueba del Lema 2.36.* Este es un resultado clásico. Para una demostración, ver Capítulo III, Lema 1.2 de [29] o Sección 5.9.2, Teorema 3 de [11].  $\square$

## 2.6 Resultados en EDPs de evolución

En esta sección, presentamos algunos resultados generales sobre ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) de evolución que serán útiles para el análisis de la ecuación de Burgers. Sea  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  el generador infinitesimal de un  $C_0$ -semigrupo  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en un espacio de Banach  $X$ . Consideramos el problema de Cauchy abstracto general:

$$\begin{cases} u'(t) = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{G}(t, u(t)), & t \in (0, T], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde  $u_0 \in X$  es el dato inicial, y  $\mathcal{G} : [0, T] \times X_D \rightarrow X$  es un término no homogéneo que puede depender del tiempo  $t$  y de la solución  $u(t)$  (con  $X_D \subset X$  el dominio de definición de  $\mathcal{G}$  respecto a  $u$ ). Esta formulación general abarca varios casos importantes:

- **Problema lineal homogéneo:**  $\mathcal{G}(t, u(t)) \equiv 0$ .
- **Problema lineal no homogéneo:**  $\mathcal{G}(t, u(t)) = g(t)$ , donde  $g : [0, T] \rightarrow X$  es una función dada.
- **Problema semilineal:**  $\mathcal{G}(t, u(t)) = F(t, u(t))$  (o  $F(u(t))$ ) si  $F$  no depende explícitamente de  $t$ ), donde  $F$  es un operador no lineal.

Para mayor información sobre los resultados de esta sección ver [22], [5] o [21].

### 2.6.1 Deducción de la fórmula de Duhamel

Comenzamos derivando formalmente la *fórmula de Duhamel* (o *fórmula de variación de parámetros*), que proporciona una representación integral de la solución del problema general (2.2).

**Ecuación homogénea ( $\mathcal{G} \equiv 0$ )** Si  $\mathcal{G}(t, u(t)) \equiv 0$ , y  $u_0 \in D(\mathcal{A})$ , la solución (clásica) de  $u' = \mathcal{A}u$ ,  $u(0) = u_0$  es  $u(t) = T(t)u_0$ . Si  $u_0 \in X$ ,  $u(t) = T(t)u_0$  es la solución mild.

**Ecuación no homogénea general** Consideremos el caso general  $u'(t) = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{G}(t, u(t))$  (de la forma (2.2)). Sea  $u(t)$  una solución (suficientemente regular). Definamos  $w(s) = T(t-s)u(s)$  para  $s \in [0, t]$ . Su derivada con respecto a  $s$  es:

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)u(s)) = T(t-s)u'(s) - \mathcal{A}T(t-s)u(s).$$

Sustituyendo  $u'(s) = \mathcal{A}u(s) + \mathcal{G}(s, u(s))$ , y suponiendo que  $T(t-s)$  y  $\mathcal{A}$  conmutan en  $D(\mathcal{A})$  (si  $u(s) \in D(\mathcal{A})$ ),

$$\frac{d}{ds}(T(t-s)u(s)) = T(t-s)(\mathcal{A}u(s) + \mathcal{G}(s, u(s))) - \mathcal{A}T(t-s)u(s) = T(t-s)\mathcal{G}(s, u(s)).$$

Integrando esta expresión con respecto a  $s$  desde 0 hasta  $t$ :

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(T(t-s)u(s)) ds = \int_0^t T(t-s)\mathcal{G}(s, u(s)) ds.$$

Esto nos da  $T(t-t)u(t) - T(t-0)u(0) = \int_0^t T(t-s)\mathcal{G}(s, u(s)) ds$ . Como  $T(0) = I$ , obtenemos  $u(t) - T(t)u_0 = \int_0^t T(t-s)\mathcal{G}(s, u(s)) ds$ , lo que lleva a la fórmula de Duhamel:

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{G}(s, u(s)) ds. \quad (2.3)$$

**Observación 2.28.** La derivación anterior es formal. La justificación rigurosa requiere la teoría de la integral de Bochner. La fórmula (2.3) es válida bajo ciertas condiciones sobre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{G}$ , y define la *solución integral* (o *mild solution*).

- Si  $\mathcal{G}(s, u(s)) = g(s)$  (caso lineal no homogéneo) y  $g \in L^1(0, T; X)$ , la fórmula da una representación explícita de la solución  $u \in C([0, T]; X)$ .
- Si  $\mathcal{G}(s, u(s)) = F(s, u(s))$  (caso semilineal), la fórmula se convierte en una ecuación integral implícita para  $u(t)$ , usualmente resuelta por punto fijo.

## 2.6.2 Motivación para la solución clásica y recuperación de la EDP

La fórmula de Duhamel (2.3) proporciona una representación para la solución integral (mild solution). Sin embargo, a menudo es deseable saber si esta solución satisface la ecuación diferencial original (2.2) en un sentido más fuerte.

### Recuperación de la EDP (suponiendo regularidad de solución)

Supongamos que  $u(t)$  está dada por la fórmula de Duhamel (2.3) y que posee suficiente regularidad. Para que  $u(t)$  sea una solución clásica de  $u' = \mathcal{A}u + \mathcal{G}(t, u)$  (la forma puntual de (2.2)), necesitamos que  $u \in C^1((0, T); X)$ ,  $u(t) \in D(\mathcal{A})$  para  $t \in (0, T)$ , y que  $\mathcal{A}u(t)$  y  $\mathcal{G}(t, u(t))$  sean suficientemente regulares. Si estas condiciones se cumplen, podemos diferenciar la fórmula de Duhamel.

Asumamos  $u_0 \in D(\mathcal{A})$  y que  $\mathcal{G}(s, u(s))$  (que denotaremos  $\mathcal{G}(s)$  por brevedad aquí) es  $C([0, T]; X)$  (o  $C((0, T]; X)$  si el semigrupo es analítico y  $u_0 \in X$ ). La derivada de  $T(t)u_0$  es  $\mathcal{A}T(t)u_0 = T(t)\mathcal{A}u_0$ . Para el término integral  $I(t) = \int_0^t T(t-s)\mathcal{G}(s) ds$ : Bajo condiciones adecuadas (e.g.,  $\mathcal{A}$  genera un semigrupo analítico o  $\mathcal{G}$  es  $C^1$ ),  $I(t) \in D(\mathcal{A})$  para  $t > 0$ ,  $I(t)$  es diferenciable, y

$$\frac{d}{dt}I(t) = \mathcal{A}I(t) + \mathcal{G}(t).$$

Sumando las derivadas:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathcal{A}T(t)u_0 + \mathcal{A}I(t) + \mathcal{G}(t) \\ &= \mathcal{A}(T(t)u_0 + I(t)) + \mathcal{G}(t) = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{G}(t). \end{aligned}$$

Esto muestra que una solución integral suficientemente regular satisface la EDP original (2.2).

### 2.6.3 Solución Clásica, fuerte e integral

**Definición 2.20.** (Tipos de Soluciones para (2.2)) Sea  $\mathcal{A}$  el generador de un  $C_0$ -semigrupo  $T(t)$  en  $X$ .

- (a) Una función  $u \in C([0, T]; X)$  se llama *solución integral* (o *mild*) de (2.2) en  $[0, T]$  si satisface la fórmula de Duhamel (2.3) para todo  $t \in [0, T]$ .
- (b) Una función  $u$  se llama *solución clásica* de (2.2) en  $[0, T]$  si  $u \in C([0, T]; X) \cap C^1((0, T); X)$ ,  $u(t) \in D(\mathcal{A})$  para  $t \in (0, T)$ , satisface  $u'(t) = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{G}(t, u(t))$  para  $t \in (0, T)$ , y  $u(0) = u_0$ .
- (c) Una función  $u \in W^{1,1}(0, T; X)$  con  $u(t) \in D(\mathcal{A})$  para c.t.p.  $t \in (0, T)$  se llama *solución fuerte* de (2.2) si satisface  $u'(t) = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{G}(t, u(t))$  para c.t.p.  $t \in (0, T)$  y  $u(0) = u_0$ .

**Observación 2.29.** Toda solución clásica es fuerte. Bajo condiciones de continuidad en  $\mathcal{G}$ , toda solución fuerte es integral. El recíproco no siempre es cierto sin mayor regularidad.

**Teorema 2.37.** (Existencia y Unicidad para Problemas de Evolución) Sea  $X$  un espacio de Banach, y sea  $\mathcal{A}$  el generador de un  $C_0$ -semigrupo analítico  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en  $X$ .

- (a) **Problema Lineal Homogéneo** ( $\mathcal{G} \equiv 0$ ): Para  $u_0 \in X$ ,  $u(t) = T(t)u_0$  es la única solución integral de  $u' = \mathcal{A}u$ ,  $u(0) = u_0$ . Si  $u_0 \in D(\mathcal{A})$ ,  $u(t)$  es clásica.
- (b) **Problema Lineal No Homogéneo** ( $\mathcal{G}(t, u) = g(t)$ ): Si  $u_0 \in X$  y  $g$  es suficientemente regular (e.g.,  $g \in L^1(0, T; X)$  o  $g$  Hölder continua), existe una única solución integral  $u \in C([0, T]; X)$  de  $u' = \mathcal{A}u + g(t)$ ,  $u(0) = u_0$ , dada por (2.3) con  $\mathcal{G}(s, u(s)) = g(s)$ .
- (c) **Problema Semilineal** ( $\mathcal{G}(t, u) = F(u)$  con  $F$  localmente Lipschitz): Sea  $F : U \subset X \rightarrow X$  localmente Lipschitz continua en un abierto  $U \subset X$  que contiene  $u_0$ . Existe  $T^* > 0$  y una única solución integral  $u \in C([0, T^*]; U)$  de  $u' = \mathcal{A}u + F(u)$ ,  $u(0) = u_0$ .

*Demostración.* Ver Capítulos 4 y 6 de [22] o Capítulos 4, 5 y 7 de [21]. □

**Observación 2.30.** La fórmula de Duhamel es central. Para el caso semilineal, se convierte en una ecuación integral que se resuelve típicamente por el Teorema del Punto Fijo de Banach en un espacio adecuado de funciones continuas, como se verá en el Capítulo 3 para la ecuación de Burgers. La propiedad de semigrupo analítico para  $\mathcal{A}$  proporciona mayor regularidad a las soluciones.

## 2.7 Formulación débil de la ecuación de Burgers 2D

Hemos visto que, para obtener soluciones clásicas de una EDP, necesitamos que el dato inicial y el término de forzamiento tengan cierta regularidad. Sin embargo, en muchas situaciones, nos interesa estudiar soluciones que no son necesariamente diferenciables en el sentido clásico, o que tienen datos iniciales poco regulares. Además, incluso cuando existen soluciones clásicas,

puede ser ventajoso trabajar con una formulación más débil de la ecuación por razones teóricas o numéricas.

La *formulación débil* de una EDP se obtiene multiplicando la ecuación por una función “test” (suficientemente regular) e integrando por partes. Esto permite “transferir” derivadas de la solución a la función test, obteniendo una ecuación integral que tiene sentido incluso si la solución no es diferenciable en el sentido clásico. Para mayor información sobre esta sección, ver [29], [11].

### 2.7.1 Derivación de la formulación débil

Comenzamos con la ecuación de Burgers 2D, escrita como en (1.1):

$$u_t - \nu \Delta u = -(u \cdot \nabla u), \quad \text{en } \Omega \times (0, T).$$

Multiplicamos la ecuación por una función de prueba (o test)  $v \in V = (H_0^1(\Omega))^2$ . La elección de  $V$  como espacio de funciones de prueba es natural porque buscamos soluciones  $u(x, t)$  tales que  $u(\cdot, t) \in V$  para cada  $t$ , lo que implica que  $u(x, t) = 0$  para  $x \in \partial\Omega$ . Además, esto nos permite integrar por partes el término del Laplaciano. Integrando sobre  $\Omega$  para un tiempo  $t$  fijo (denotando  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ ):

$$\int_{\Omega} (u_t(\cdot, t) \cdot v(x)) dx - \nu \int_{\Omega} ((\Delta u)(\cdot, t) \cdot v(x)) dx = - \int_{\Omega} (((u \cdot \nabla u)(t, x)) \cdot v(x)) dx.$$

Usando la notación de producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  en  $X = (L^2(\Omega))^2$ , donde  $u(t)$  denota la función  $x \mapsto u(x, t)$ : El primer término es  $\langle u_t(t), v \rangle_X$ . Para el término de difusión,  $-\nu \int_{\Omega} (\Delta u)(t) \cdot v dx$ : usando la primera identidad de Green y que  $v = 0$  en  $\partial\Omega$  (ya que  $v \in V$ ):

$$-\nu \int_{\Omega} (\Delta u)(t) \cdot v dx = -\nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} (\Delta u_k)(t) v_k dx = \nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \cdot \nabla v_k dx.$$

Recordemos que el operador elíptico  $A = -\nu \Delta$  (Definición 2.13) tiene asociada la forma bilineal  $a(w, z) = \langle Aw, z \rangle_X = \nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla w_k \cdot \nabla z_k dx$ . Así, el término de difusión  $\nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \cdot \nabla v_k dx$  es igual a  $a(u(t), v)$ .

Para el término no lineal, definimos la forma trilineal  $b(w_1, w_2, w_3)$  mediante la siguiente expresión:

$$b(w_1, w_2, w_3) = \int_{\Omega} (w_1 \cdot \nabla w_2) \cdot w_3 dx. \quad (2.4)$$

Entonces, el término no lineal de la EDP,  $-(u \cdot \nabla u)$ , al ser multiplicado por la función test  $v$  e integrado sobre  $\Omega$ , se escribe como  $-b(u(t), u(t), v)$  usando la forma definida en (2.4).

Juntando todos los términos, la ecuación  $u_t - \nu \Delta u = -(u \cdot \nabla u)$  se convierte en:

$$\langle u_t(t), v \rangle_X + a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = 0, \quad \text{para todo } v \in V,$$

lo cual debe satisfacerse para casi todo  $t \in (0, T)$ , con la condición inicial  $u(0) = u_0$ .

**Definición 2.21. (Solución Débil de Burgers)** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto acotado con frontera suave,  $T > 0$ , y sea  $u_0 \in X = (L^2(\Omega))^2$ . Una *solución débil* de la ecuación de Burgers 2D (1.1) en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  es una función  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; X)$  tal que su derivada distribucional en tiempo  $u_t = \frac{du}{dt}$  pertenece a  $L^q(0, T; V')$  para algún  $q \geq 1$  (típicamente  $q = 4/3$  o  $q = 2$ ), y que satisface:

(i) La ecuación variacional: Para casi todo  $t \in (0, T)$ ,

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_X + \nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \cdot \nabla v_k dx + b(u(t), u(t), v) = 0, \quad (2.5)$$

para todo  $v = (v_1, v_2) \in V$ . El término  $\frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_X$  se entiende como la derivada de la función  $t \mapsto \langle u(t), v \rangle_X$  en el sentido de las distribuciones escalares  $\mathcal{D}'(0, T)$ . Dada la regularidad de  $u$  y  $u_t$ , esta derivada coincide con el par de dualidad  $\langle u_t(t), v \rangle_{V', V}$ .

(ii) La condición inicial:  $u(0) = u_0$ . Esta condición tiene sentido porque  $u \in L^2(0, T; V)$  y  $u_t \in L^q(0, T; V')$  ( $q \geq 1$ ) implican que  $u \in C([0, T]; X)$  por un lema de interpolación.

**Observación 2.31.** La formulación (2.5) es equivalente a pedir que  $u_t + Au(t) + (u \cdot \nabla)u = 0$  en  $V'$  para c.t.p.  $t \in (0, T)$ , donde  $A = -\nu \Delta$ .

### Justificación de la integración por partes

La identidad de Green,  $\int_{\Omega} (\Delta w) \phi dx = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \phi dx$  para  $w \in H^2(\Omega)$  y  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ , se justifica usando la definición de derivada débil y la densidad de funciones suaves.

### 2.7.2 Propiedades de la forma trilineal $b(u, w, v)$

Recordemos la forma trilineal definida en (2.4):

$$b(w_1, w_2, w_3) = \int_{\Omega} (w_1 \cdot \nabla w_2) \cdot w_3 dx.$$

Esta forma tiene las siguientes propiedades importantes en  $X = (L^2(\Omega))^2$  y  $V = (H_0^1(\Omega))^2$ .

**Proposición 2.38. (Propiedades de  $b$ )** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado con frontera suficientemente regular. La forma trilineal  $b(w_1, w_2, w_3) = \int_{\Omega} (w_1 \cdot \nabla w_2) \cdot w_3 dx$  satisface:

(a) **Continuidad:** Para  $w_1, w_2, w_3 \in V$ :

$$|b(w_1, w_2, w_3)| \leq C \|w_1\|_{(L^4(\Omega))^2} \|\nabla w_2\|_{(L^2(\Omega))^{2 \times 2}} \|w_3\|_{(L^4(\Omega))^2}.$$

Usando la inmersión  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  (que es continua en 2D, por lo que  $V \hookrightarrow (L^4(\Omega))^2$ ), se obtiene:

$$|b(w_1, w_2, w_3)| \leq C' \|w_1\|_V \|w_2\|_V \|w_3\|_V.$$

Otras cotas útiles en 2D para  $w_1, w_2, w_3 \in V$  incluyen (ver, e.g., [29]):

$$\begin{aligned} |b(w_1, w_2, w_3)| &\leq C \|w_1\|_X^{1/2} \|w_1\|_V^{1/2} \|w_2\|_V \|w_3\|_X^{1/2} \|w_3\|_V^{1/2}, \\ |b(w_1, w_2, w_3)| &\leq C \|w_1\|_V \|w_2\|_V \|w_3\|_X. \end{aligned}$$

(b) **Antisimetría (parcial) si  $\nabla \cdot w_1 = 0$ :** Si  $w_1 \in V$  y además  $\nabla \cdot w_1 = 0$  en  $\Omega$ , entonces

$$b(w_1, w_2, w_3) = -b(w_1, w_3, w_2) \quad \text{para } w_2, w_3 \in V.$$

Como consecuencia, si  $\nabla \cdot w_1 = 0$ , entonces  $b(w_1, w_2, w_2) = 0$  para  $w_2 \in V$ .

(c) **Propiedad para  $b(u, v, v)$  en  $V$ :** Si  $u, v \in V = (H_0^1(\Omega))^2$ , entonces integrando por partes se obtiene:

$$b(u, v, v) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla v) \cdot v \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u \cdot \nabla (|v|^2) \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) |v|^2 \, dx.$$

Este término no es cero en general si no se asume  $\nabla \cdot u = 0$ .

*Demostración.* Las demostraciones de las estimaciones de continuidad se basan en la desigualdad de Hölder, las inmersiones de Sobolev (e.g.,  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  en 2D) y, a veces, desigualdades de interpolación (como Ladyzhenskaya o Agmon). La propiedad de antisimetría (b) y la propiedad (c) se deducen de la integración por partes, usando que las funciones en  $V$  se anulan en la frontera (en el sentido de trazas). Para los detalles de las cotas, ver, por ejemplo, Capítulo III, Lema 1.1 y Lema 1.2 de [29] o Capítulos 2 y 3 de [4].  $\square$



## Capítulo 3

# Existencia, unicidad y regularidad: Enfoque de semigrupos

En este capítulo, demostraremos la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación de Burgers 2D (1.1), utilizando la teoría de semigrupos para ecuaciones de evolución semilineales. Además, analizaremos la regularidad de las soluciones obtenidas mediante este enfoque. Recordemos que estamos considerando la ecuación de Burgers sin la condición de incompresibilidad. Los resultados principales se basan en aplicar el teorema de punto fijo a la formulación integral de la ecuación, aprovechando las propiedades del semigrupo analítico generado por la parte lineal del problema y las propiedades de continuidad del término no lineal.

### 3.1 Formulación del problema como Ecuación de Evolución Abstracta

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto acotado, con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^2$ . Consideramos nuevamente el sistema de Burgers con viscosidad  $\nu > 0$  (originalmente Ecuación (1.1)):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = -(u \cdot \nabla)u, & x \in \Omega, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

junto con la condición de frontera de tipo Dirichlet homogénea:

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para } t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.2)$$

donde  $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t)) \in \mathbb{R}^2$  representa el campo de velocidades, y  $u_0(x)$  es el dato inicial.

Para aplicar la teoría de semigrupos, reformulamos este problema como una ecuación de evolución abstracta en el espacio de Hilbert  $X = (L^2(\Omega))^2$ . Definimos el operador lineal

$\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  como el generador de la parte lineal de la difusión:

$$\mathcal{A}u = \nu \Delta u.$$

Su dominio es  $D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ . Como se estableció en la Proposición 2.19 del Capítulo 2, este operador  $\mathcal{A}$  es autoadjunto, negativo definido, y (Corolario 2.27) genera un  $C_0$ -semigrupo analítico  $\{T(t) = e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$  en  $X$ . El término no lineal  $F : V \rightarrow X$  (donde  $V = (H_0^1(\Omega))^2$ ) se define como:

$$F(u) = -(u \cdot \nabla)u.$$

Con estas definiciones, el sistema de Burgers (3.1) se puede escribir en la forma abstracta (ver también Ecuación (1.2)):

$$\begin{cases} u'(t) = \mathcal{A}u(t) + F(u(t)), & t \in (0, T), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

La solución integral (o mild solution) de (3.3) viene dada por la fórmula de Duhamel (ver Ecuación (2.3) del Capítulo 2):

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s)) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

Nuestro objetivo es demostrar la existencia y unicidad de una solución  $u$  para esta ecuación integral en un espacio funcional apropiado.

## 3.2 Existencia y unicidad local de soluciones integrales

En esta sección, estableceremos la existencia y unicidad local de soluciones para la ecuación integral (3.4), lo que corresponde a soluciones mild del problema de Burgers (3.3). El método principal será el teorema del punto fijo de Banach en un espacio de funciones adecuado.

### 3.2.1 Propiedades del operador no lineal $F(u) = -(u \cdot \nabla)u$

Comenzamos analizando las propiedades del término no lineal  $F(u)$ , que es crucial para aplicar el teorema de punto fijo a la ecuación integral (3.4).

**Proposición 3.1.** *El operador  $F : V \rightarrow X$  definido por  $F(u) = -(u \cdot \nabla)u$  es continuo. Además, es localmente Lipschitz continuo en  $V$  con valores en  $X$ . Es decir, para cualquier  $R > 0$ , existe una constante  $L_R > 0$  (que puede depender de  $R$ ,  $\Omega$  y  $\nu$ ) tal que para todo  $u, v \in V$  con  $\|u\|_V \leq R$  y  $\|v\|_V \leq R$ , se tiene:*

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq L_R \|u - v\|_V.$$

*También, existe una constante  $C_F > 0$  tal que para  $u \in V$ :*

$$\|F(u)\|_X \leq C_F \|u\|_V^2.$$

*Demostración.* Primero, mostremos la cota cuadrática, que implica la continuidad. Sea  $u \in V$ . Para estimar  $\|F(u)\|_X = \|u \cdot \nabla u\|_X$ , utilizamos la caracterización dual de la norma en el espacio de Hilbert  $X$  y la forma trilineal  $b(w_1, w_2, w_3) = \int_{\Omega} (w_1 \cdot \nabla w_2) \cdot w_3 \, dx$  (definida en la Ecuación (2.4) del Capítulo 2):

$$\|F(u)\|_X = \sup_{\substack{\phi \in X \\ \|\phi\|_X=1}} |\langle F(u), \phi \rangle_X| = \sup_{\substack{\phi \in X \\ \|\phi\|_X=1}} |-\langle (u \cdot \nabla u), \phi \rangle_X| = \sup_{\substack{\phi \in X \\ \|\phi\|_X=1}} |b(u, u, \phi)|.$$

De la Proposición 2.38 (Propiedades de  $b$  del Capítulo 2), una de las estimaciones de continuidad para  $n = 2$  establece que para  $w_1, w_2 \in V$  y  $w_3 \in X$ :

$$|b(w_1, w_2, w_3)| \leq C \|w_1\|_V \|w_2\|_V \|w_3\|_X.$$

Aplicando esta cota con  $w_1 = u$ ,  $w_2 = u$  y  $w_3 = \phi$ :

$$|b(u, u, \phi)| \leq C \|u\|_V \|u\|_V \|\phi\|_X = C \|u\|_V^2 \|\phi\|_X.$$

Por lo tanto,

$$\|F(u)\|_X = \sup_{\substack{\phi \in X \\ \|\phi\|_X=1}} |b(u, u, \phi)| \leq C \|u\|_V^2.$$

Tomando  $C_F = C$ , tenemos  $\|F(u)\|_X \leq C_F \|u\|_V^2$ .

Ahora para la condición de Lipschitz local. Sean  $u, v \in V$  tales que  $\|u\|_V \leq R$  y  $\|v\|_V \leq R$  para algún  $R > 0$ . Consideramos la diferencia  $F(u) - F(v)$ :

$$\begin{aligned} F(u) - F(v) &= -(u \cdot \nabla u) + (v \cdot \nabla v) \\ &= -(u \cdot \nabla u - v \cdot \nabla u + v \cdot \nabla u - v \cdot \nabla v) \\ &= -((u - v) \cdot \nabla u) - (v \cdot \nabla(u - v)). \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular para la norma  $\|\cdot\|_X$ :

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq \|(u - v) \cdot \nabla u\|_X + \|v \cdot \nabla(u - v)\|_X.$$

Estimamos cada término usando la caracterización dual de la norma y las propiedades de  $b$  (de la Proposición 2.38):

- Para el primer término:  $\|(u - v) \cdot \nabla u\|_X = \sup_{\|\phi\|_X=1} |b(u - v, u, \phi)|$ . Usando la cota  $|b(w_1, w_2, \phi)| \leq C \|w_1\|_V \|w_2\|_V \|\phi\|_X$ :

$$|b(u - v, u, \phi)| \leq C \|u - v\|_V \|u\|_V \|\phi\|_X.$$

Dado que  $\|u\|_V \leq R$  y tomando el supremo sobre  $\|\phi\|_X = 1$ , obtenemos

$$\|(u - v) \cdot \nabla u\|_X \leq CR \|u - v\|_V.$$

- Para el segundo término:  $\|v \cdot \nabla(u - v)\|_X = \sup_{\|\phi\|_X=1} |b(v, u - v, \phi)|$ . Similarmente, usando la cota de la Proposición 2.38:

$$|b(v, u - v, \phi)| \leq C \|v\|_V \|u - v\|_V \|\phi\|_X.$$

Dado que  $\|v\|_V \leq R$  y tomando el supremo sobre  $\|\phi\|_X = 1$ , obtenemos

$$\|v \cdot \nabla(u - v)\|_X \leq CR \|u - v\|_V.$$

Combinando ambas estimaciones:

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq CR \|u - v\|_V + CR \|u - v\|_V = 2CR \|u - v\|_V.$$

Tomando  $L_R = 2CR$  (donde  $C$  es la constante de la estimación de  $b$  de la Proposición 2.38), se concluye que  $F$  es localmente Lipschitz continuo de  $V$  a  $X$ . La continuidad de  $F$  se sigue de esta propiedad Lipschitz local (si  $u_n \rightarrow u$  en  $V$ , entonces para  $n$  grande,  $u_n$  y  $u$  están en alguna bola  $B_V(0, R')$ , y  $\|F(u_n) - F(u)\|_X \leq L_{R'} \|u_n - u\|_V \rightarrow 0$ ).  $\square$

**Regularidad de la integral de Duhamel.** Para justificar la regularidad de la solución integral y su conexión con la solución clásica, necesitamos el siguiente resultado sobre la integral de Duhamel cuando el semigrupo es analítico (propiedades que posee  $T(t) = e^{tA}$  con  $A = \nu\Delta$ , como se discutió en la Sección 2.4 del Capítulo 2, específicamente Corolario 2.27).

**Proposición 3.2. (Regularidad de la integral de Duhamel con semigrupos analíticos)** *Sea  $\mathcal{A}$  el generador infinitesimal de un semigrupo analítico  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  en un espacio de Banach  $X$ . Sea  $G \in C([0, T]; X)$  (funciones continuas de  $[0, T]$  en  $X$ ). Definimos la función  $I(t)$  (la parte no homogénea de la solución mild) como:*

$$I(t) = \int_0^t T(t-s)G(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Entonces,  $I(t)$  tiene las siguientes propiedades de regularidad:

- (a)  $I \in C([0, T]; X)$ .
- (b) Para todo  $t \in (0, T]$ ,  $I(t) \in D(\mathcal{A})$ .
- (c) La función  $t \mapsto \mathcal{A}I(t)$  es continua de  $(0, T]$  en  $X$ .
- (d)  $I \in C^1((0, T]; X)$  y satisface la ecuación diferencial:

$$I'(t) = \mathcal{A}I(t) + G(t), \quad \forall t \in (0, T].$$

- (e) Si adicionalmente  $G \in C^\gamma([0, T]; X)$  para algún  $\gamma \in (0, 1)$  (es decir,  $G$  es Hölder continua en tiempo), entonces  $I \in C^{1,\gamma}((0, T]; X)$  y  $\mathcal{A}I \in C^\gamma((0, T]; X)$  (con posible pérdida de regularidad Hölder cerca de  $t = 0$  si  $u_0 \notin D(\mathcal{A})$  o si no hay compatibilidad).

*Demostración.* Estas son propiedades estándar de las soluciones integrales para ecuaciones de evolución generadas por operadores sectoriales (que generan semigrupos analíticos). La continuidad en  $X$  (ítem a) se cumple para  $C_0$ -semigrupos si  $G$  es, por ejemplo,  $L^1(0, T; X)$ . Las propiedades de regularización (ítems b, c, d, e) son específicas de los semigrupos analíticos. Ver, por ejemplo, Capítulo 4, Teorema 2.4 y Proposición 3.1 de [22] o Capítulo 5, Teorema 2.1.3 y Proposición 3.1.1 de [21] para pruebas detalladas y condiciones más generales (e.g.,  $G \in L^p(0, T; X)$  o  $G$  Hölder continua).  $\square$

### 3.2.2 Existencia y unicidad local

Ahora presentamos el teorema principal de esta sección sobre existencia y unicidad local de soluciones integrales para el problema de Burgers, cuando el dato inicial  $u_0$  pertenece al espacio  $V = (H_0^1(\Omega))^2$ . La prueba se basará en el Teorema del Punto Fijo de Banach aplicado a la ecuación integral (3.4).

**Teorema 3.3. (Existencia y unicidad local en  $V$ )** Sea  $u_0 \in V = (H_0^1(\Omega))^2$  y sea  $\mathcal{A} = \nu\Delta$  el generador definido en la Sección 3.1. Entonces, existe un tiempo  $T^* > 0$  (que depende de  $\|u_0\|_V$ ,  $\nu$  y  $\Omega$ ) y una única solución  $u$  de la ecuación integral de Burgers (3.4) tal que

$$u \in C([0, T^*]; V).$$

Además, esta solución  $u$  satisface:

- (i)  $u \in C^1((0, T^*]; X)$ .
- (ii)  $u(t) \in D(\mathcal{A})$  para todo  $t \in (0, T^*]$ .
- (iii)  $u$  es una solución clásica de la ecuación de Burgers (3.3) en el intervalo  $(0, T^*]$ .
- (iv) La solución  $u \in C([0, T^*]; V)$  es única en este espacio.

*Demostración.* La demostración se divide en tres partes principales: existencia local de una solución en  $C([0, T^*]; V)$  mediante el teorema de punto fijo, unicidad de dicha solución, y finalmente la regularidad adicional.

**Existencia local en  $C([0, T^*]; V)$ .** Sea  $R > 0$  un radio. Si  $u_0 = 0$ , elegimos  $R = 1$  (o cualquier  $R > 0$  arbitrario). Si  $u_0 \neq 0$ , elegiremos  $R = 2\|u_0\|_V$  (esto asegura  $R \geq \|u_0\|_V$  si  $\|u_0\|_V > 0$ ). Definimos el espacio métrico completo (subconjunto cerrado de  $C([0, T^*]; V)$ ):

$$Y_{T^*, R} = \{w \in C([0, T^*]; V) : \|w\|_{C([0, T^*]; V)} \equiv \sup_{t \in [0, T^*]} \|w(t)\|_V \leq R\}.$$

Definimos el operador  $\Phi : Y_{T^*, R} \rightarrow C([0, T^*]; V)$  por la fórmula de Duhamel:

$$(\Phi w)(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(w(s))ds =: \Phi_0(t) + \Phi_1(w)(t).$$

Aquí  $T(t) = e^{t\mathcal{A}}$  es el semigrupo analítico generado por  $\mathcal{A} = \nu\Delta$ . Sea  $A = -\mathcal{A} = -\nu\Delta$  el operador positivo definido de la Subsección 2.3.4. La relación entre la norma de  $V$  y la norma del grafo de  $A^{1/2}$  está dada por la ecuación (2.1) del Capítulo 2, es decir,

$$\|u\|_V = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|A^{1/2}u\|_X \quad \text{para } u \in V.$$

Para el término  $\Phi_0(t) = T(t)u_0$ : La afirmación de que  $T(t)$  es una contracción en  $V$  se justifica rigurosamente. Usando la relación de normas (2.1), la conmutatividad de  $A^{1/2}$  con

el semigrupo  $T(t) = e^{-tA}$ , y el hecho de que  $T(t)$  es una contracción en  $X$ , tenemos que para  $u_0 \in V = D(A^{1/2})$ ,

$$\|T(t)u_0\|_V = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|A^{1/2}e^{-tA}u_0\|_X = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|e^{-tA}A^{1/2}u_0\|_X \leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|A^{1/2}u_0\|_X = \|u_0\|_V.$$

Por lo tanto, para la parte homogénea de la solución

$$\|\Phi_0(t)\|_V = \|T(t)u_0\|_V \leq \|u_0\|_V.$$

Para el término integral  $\Phi_1(w)(t) = \int_0^t T(t-s)F(w(s))ds$ : Como  $w \in Y_{T^*,R}$ ,  $\|w(s)\|_V \leq R$ . Por la Proposición 3.1,  $F(w(s)) \in X$  y  $\|F(w(s))\|_X \leq C_F \|w(s)\|_V^2 \leq C_F R^2$ . Usando la relación de norma (2.1) y la Proposición 2.29(e) (estimación de regularización  $X \rightarrow V = X_{1/2}$  para  $T(\tau) = e^{-\tau A}$ ), con  $\beta = 1/2, \gamma = 0$  se sigue que

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(w)(t)\|_V &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left\| A^{1/2} \int_0^t e^{-(t-s)A} F(w(s)) ds \right\|_X \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_0^t \|A^{1/2} e^{-(t-s)A} F(w(s))\|_X ds \end{aligned}$$

usando la estimación de regularización del semigrupo analítico (Proposición 2.29), donde  $M_{1/2} > 0$  y  $\alpha_1 > 0$  es el primer autovalor de  $A$ , esto es

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_0^t \frac{M_{1/2}}{(t-s)^{1/2}} e^{-\alpha_1(t-s)} \|F(w(s))\|_X ds,$$

y como  $e^{-\alpha_1(t-s)} \leq 1$  para  $t \geq s$ , tenemos que

$$\leq \frac{M_{1/2}}{\sqrt{\nu}} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \|F(w(s))\|_X ds,$$

finalmente, usando la cota  $\|F(w(s))\|_X \leq C_F R^2$ , se tiene que

$$\leq \frac{M_{1/2} C_F R^2}{\sqrt{\nu}} \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds = \frac{2M_{1/2} C_F R^2}{\sqrt{\nu}} \sqrt{t}.$$

Así,  $\|\Phi_1(w)(t)\|_V \leq C_1 R^2 \sqrt{t}$ , donde  $C_1 = \frac{2M_{1/2} C_F}{\sqrt{\nu}}$ . Entonces,  $\|(\Phi w)(t)\|_V \leq \|u_0\|_V + C_1 R^2 \sqrt{t}$ .

Para que  $\Phi(Y_{T^*,R}) \subseteq Y_{T^*,R}$ , necesitamos  $\|u_0\|_V + C_1 R^2 \sqrt{T^*} \leq R$ . Si  $u_0 = 0$  y  $R = 1$ , se necesita  $C_1 \sqrt{T^*} \leq 1$ . Si  $u_0 \neq 0$  y  $R = 2\|u_0\|_V$ , la condición se vuelve  $\|u_0\|_V + C_1 (4\|u_0\|_V^2) \sqrt{T^*} \leq 2\|u_0\|_V$ , que es  $4C_1 \|u_0\|_V \sqrt{T^*} \leq 1$ . En ambos casos, podemos elegir  $T_1^* > 0$  suficientemente pequeño para que esta condición se cumpla.

Para la contracción, sean  $w_1, w_2 \in Y_{T^*,R}$ . Usando la Lipschitzianidad local de  $F$  (Proposición 3.1) con constante  $L_R$ , se sigue que

$$\begin{aligned} \|(\Phi w_1)(t) - (\Phi w_2)(t)\|_V &\leq \frac{M_{1/2}}{\sqrt{\nu}} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \|F(w_1(s)) - F(w_2(s))\|_X ds \\ &\leq \frac{M_{1/2} L_R}{\sqrt{\nu}} \|w_1 - w_2\|_{C([0,T^*];V)} \int_0^t (t-s)^{-1/2} ds \\ &= \frac{2M_{1/2} L_R}{\sqrt{\nu}} \sqrt{t} \|w_1 - w_2\|_{C([0,T^*];V)}. \end{aligned}$$

Tomando el supremo en  $t \in [0, T^*]$ , se obtiene

$$\|\Phi w_1 - \Phi w_2\|_{C([0,T^*];V)} \leq \left( \frac{2M_{1/2} L_R}{\sqrt{\nu}} \sqrt{T^*} \right) \|w_1 - w_2\|_{C([0,T^*];V)}.$$

Sea  $\kappa_0 = \frac{2M_{1/2} L_R}{\sqrt{\nu}}$ . Podemos elegir  $T_2^* > 0$  tal que  $\kappa_0 \sqrt{T_2^*} < 1$ . Tomando  $T^* = \min(T_1^*, T_2^*)$ ,  $\Phi$  es una contracción en  $Y_{T^*,R}$ . Por el Teorema del Punto Fijo de Banach, existe una única solución  $u \in Y_{T^*,R}$  tal que  $\Phi u = u$ . Esta  $u$  pertenece a  $C([0, T^*]; V)$ .

**Unicidad de la solución en  $C([0, T_0]; V)$ .** Supongamos que  $u_1, u_2 \in C([0, T_0]; V)$  son dos soluciones de (3.4) con  $u_1(0) = u_2(0) = u_0$  para algún  $T_0 \in (0, T^*]$  (o cualquier  $T_0$  donde ambas existan). Sea  $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$ . Entonces  $w(0) = 0$ . Como  $u_1, u_2$  son continuas en  $V$  sobre el intervalo compacto  $[0, T_0]$ , son acotadas en norma  $V$ . Sea  $R_{max} = \max_{s \in [0, T_0]} (\|u_1(s)\|_V, \|u_2(s)\|_V)$ . Por la Proposición 3.1,  $F$  es Lipschitz en la bola  $B_V(0, R_{max})$  con una constante  $L_{R_{max}}$ . Tenemos  $w(t) = \int_0^t T(t-s)[F(u_1(s)) - F(u_2(s))] ds$ . Tomando la norma en  $V$ , y procediendo como en la estimación para la contracción:

$$\|w(t)\|_V \leq \frac{M_{1/2} L_{R_{max}}}{\sqrt{\nu}} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \|w(s)\|_V ds.$$

Sea  $z(t) = \|w(t)\|_V$ . Entonces  $z(t) \geq 0$  es continua en  $[0, T_0]$ ,  $z(0) = 0$ , y satisface

$$z(t) \leq K \int_0^t (t-s)^{-1/2} z(s) ds, \quad \text{para } t \in [0, T_0],$$

donde  $K = \frac{M_{1/2} L_{R_{max}}}{\sqrt{\nu}} \geq 0$ . Por el Lema de Gronwall Generalizado (Lema 2.32 del Capítulo 2), con  $a(t) \equiv 0$  y  $\beta = 1/2 \in (0, 1]$ , se concluye que  $z(t) \equiv 0$  para todo  $t \in [0, T_0]$ . Así,  $\|w(t)\|_V = 0$  para todo  $t \in [0, T_0]$ , lo que significa  $u_1(t) \equiv u_2(t)$  en  $C([0, T_0]; V)$ . La unicidad se mantiene en todo el intervalo común de existencia  $[0, T^*]$ .

**Regularidad adicional (Solución clásica para  $t > 0$ ).** La solución integral  $u(t)$  satisface la fórmula de Duhamel (3.4). Como  $\mathcal{A} = \nu \Delta$  genera un semigrupo analítico y  $u_0 \in V = D(A^{1/2})$  (donde  $A = -\mathcal{A}$ ), sabemos por las propiedades de los semigrupos analíticos (Teorema 2.28 y Proposición 2.29) que  $T(t)u_0 = e^{t\mathcal{A}}u_0 \in D(\mathcal{A})$  para todo  $t > 0$ . La función  $s \mapsto F(u(s))$  es continua de  $[0, T^*]$  a  $X$ . Por la Proposición 3.2, el término integral  $I(t) = \int_0^t T(t-s)$

$s)F(u(s)) ds$  satisfice:  $I(t) \in D(\mathcal{A})$  para  $t \in (0, T^*]$ ,  $t \mapsto \mathcal{A}I(t)$  es continua de  $(0, T^*]$  a  $X$ ,  $I \in C^1((0, T^*]; X)$  y  $I'(t) = \mathcal{A}I(t) + F(u(t))$  para  $t \in (0, T^*]$ . Como  $u(t) = T(t)u_0 + I(t)$ , se deduce que  $u(t) \in D(\mathcal{A})$  para  $t \in (0, T^*]$ . Diferenciando  $u(t)$  para  $t \in (0, T^*]$ :

$$u'(t) = \mathcal{A}T(t)u_0 + \mathcal{A}I(t) + F(u(t)) = \mathcal{A}(T(t)u_0 + I(t)) + F(u(t)) = \mathcal{A}u(t) + F(u(t)).$$

La continuidad de los términos implica  $u \in C^1((0, T^*]; X)$ . Por lo tanto,  $u$  es una solución clásica de (3.3) en  $(0, T^*]$ .  $\square$

**Observación 3.1.** En resumen, el Teorema 3.3 establece un resultado fundamental: si partimos de un dato inicial con energía de gradiente finita (i.e.,  $u_0 \in V$ ), la teoría de semigrupos nos garantiza no solo que existe una única solución por un corto tiempo  $T^*$ , sino que además esta solución mantiene la misma regularidad espacial, permaneciendo en  $V$ . Más aún, la solución se vuelve instantáneamente  $C^\infty$  para  $t > 0$ , una manifestación del carácter parabólico y regularizante de la ecuación.

### 3.3 Regularidad adicional de la solución Integral

Habiendo establecido la existencia para datos en  $V \approx X_{1/2}$ , ahora investigamos qué regularidad adicional se obtiene si el dato inicial  $u_0$  es aún más regular.

**Teorema 3.4. (Existencia y regularidad en  $X_s$ )** Sea  $\mathcal{A} = \nu\Delta$  el generador del semigrupo analítico  $T(t)$ .

- (a) Si  $u_0 \in X_s$  para algún  $s \in (1/2, 1)$ , entonces existe un tiempo  $T^{**} > 0$  y una única solución  $u$  de la ecuación integral de Burgers (3.4) tal que

$$u \in C([0, T^{**}]; X_s).$$

- (b) Si  $u_0 \in D(\mathcal{A})$  (que corresponde a  $X_1$ ), la misma conclusión se mantiene: existe una única solución  $u \in C([0, T^{**}]; D(\mathcal{A}))$ .

Además, en ambos casos, la solución es una solución clásica para  $t > 0$ .

*Demostración.* La demostración para ambos casos se basa en el Teorema del Punto Fijo de Banach en el espacio apropiado.

(a). Si  $s \in (1/2, 1)$ , se define el espacio métrico completo  $Z_{T^{**}, R_s} = \{w \in C([0, T^{**}]; X_s) : \|w\|_{C([0, T^{**}]; X_s)} \leq R_s\}$  y el operador integral  $\Phi$  de la fórmula de Duhamel. La prueba sigue la del Teorema 3.3, pero trabajando con la norma de  $X_s$ . La estimación clave para el término integral de  $\Phi$  es:

$$\left\| \int_0^t T(t-\tau)F(w(\tau))d\tau \right\|_{X_s} \leq C_s \int_0^t (t-\tau)^{-s} \|F(w(\tau))\|_X d\tau.$$

Como  $s < 1$ , la integral  $\int_0^t (t-\tau)^{-s} d\tau = \frac{t^{1-s}}{1-s}$  es finita. Esto permite demostrar que  $\Phi$  es una contracción en  $Z_{T^{**}, R_s}$  para un  $T^{**} > 0$  suficientemente pequeño, garantizando la existencia y unicidad de una solución en  $C([0, T^{**}]; X_s)$ .

(b). Si  $u_0 \in D(A)$ , cuando el dato inicial  $u_0$  pertenece al dominio del operador  $A$ , que es el espacio  $D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ , podemos demostrar la existencia de la solución en  $C([0, T^{**}]; D(A))$  directamente. La clave es demostrar que el operador no lineal  $F(u) = -(u \cdot \nabla u)$  es localmente Lipschitz continuo como una aplicación de  $D(A)$  en  $X$ .

Consideramos el espacio  $D(A)$  dotado de la norma del grafo:

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_X + \|Au\|_X.$$

Con esta norma,  $D(A)$  es un espacio de Banach. Nuestro objetivo es aplicar el Teorema del Punto Fijo en una bola cerrada de  $C([0, T^{**}]; D(A))$ .

Vamos a demostrar que para cualquier  $R > 0$ , existe una constante  $L_R > 0$  tal que si  $u, v \in D(A)$  con  $\|u\|_{D(A)} \leq R$  y  $\|v\|_{D(A)} \leq R$ , entonces

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq L_R \|u - v\|_{D(A)}.$$

Como antes, descomponemos la diferencia

$$\|F(u) - F(v)\|_X \leq \|(u - v) \cdot \nabla u\|_X + \|v \cdot \nabla(u - v)\|_X.$$

Ahora acotamos cada término usando las propiedades de  $D(A)$  en 2D. En particular, la inmersión de Sobolev  $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$  es continua, lo que implica  $\|w\|_{L^\infty} \leq C \|w\|_{H^2}$ . Además, la norma  $H^2$  es controlada por la norma del grafo,  $\|w\|_{H^2} \leq C' \|w\|_{D(A)}$ .

Para el primer término

$$\begin{aligned} \|(u - v) \cdot \nabla u\|_X &\leq \|u - v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} && \text{(Hölder)} \\ &\leq (C \|u - v\|_{H^2}) \cdot \|u\|_V && \text{(Sobolev y def. de V)} \\ &\leq (C' \|u - v\|_{D(A)}) \cdot (\|u\|_{D(A)}) && \text{(Normas equiv.)} \\ &\leq C' R \|u - v\|_{D(A)}. && \text{(ya que } \|u\|_{D(A)} \leq R) \end{aligned}$$

Para el segundo término

$$\begin{aligned} \|v \cdot \nabla(u - v)\|_X &\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} && \text{(Hölder)} \\ &\leq (C \|v\|_{H^2}) \cdot \|u - v\|_V && \text{(Sobolev y def. de V)} \\ &\leq (C' \|v\|_{D(A)}) \cdot (\|u - v\|_{D(A)}) && \text{(Normas equiv.)} \\ &\leq C' R \|u - v\|_{D(A)}. && \text{(ya que } \|v\|_{D(A)} \leq R) \end{aligned}$$

Sumando ambas cotas, se demuestra la propiedad de Lipschitz local de  $F : D(A) \rightarrow X$ .

Una vez que se establece que  $F$  es localmente Lipschitz de  $D(A)$  a  $X$ , la teoría estándar de ecuaciones de evolución semilineales (ver, e.g., Capítulo 6, Teorema 1.5 de [22]) garantiza que para cualquier dato inicial  $u_0 \in D(A)$ , existe un tiempo  $T^{**} > 0$  y una única solución  $u$  que satisface

$$u \in C([0, T^{**}]; D(A)) \cap C^1([0, T^{**}]; X).$$

Esta es, por definición, una solución clásica del problema.

Finalmente mostremos la regularidad adicional de la solución para  $t > 0$ . Para cualquier caso con  $s \in (1/2, 1]$ , la solución integral  $u \in C([0, T^{**}]; X_s)$  obtenida es, de hecho, una solución clásica para  $t \in (0, T^{**}]$ . Esto se deduce de la siguiente cadena de argumentos.

- (i) **Regularidad de  $u$  en  $V$ :** Como  $s > 1/2$ , la inmersión  $X_s \hookrightarrow V \approx X_{1/2}$  es continua. Por lo tanto,  $u \in C([0, T^{**}]; V)$ .
- (ii) **Continuidad del término no lineal:** Dado que  $u$  es continua en  $V$  y el operador  $F : V \rightarrow X$  es continuo, la composición  $t \mapsto F(u(t))$  es una función continua de  $[0, T^{**}]$  a  $X$ .
- (iii) **Regularización por el semigrupo:** La solución es  $u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds$ .
  - El término homogéneo  $T(t)u_0$  pertenece a  $D(A)$  para todo  $t > 0$ , ya que el semigrupo analítico regulariza instantáneamente cualquier dato en  $X$  (y  $u_0 \in X_s \subset X$ ).
  - El término integral, por ser una convolución de  $T(t)$  con una función continua  $F(u(t))$ , también es regularizado. La Proposición 3.2 nos dice que la integral pertenece a  $D(A)$  para  $t > 0$ .
- (iv) **Conclusión:** Como  $u(t)$  es la suma de dos términos que pertenecen a  $D(A)$  para  $t > 0$ , concluimos que  $u(t) \in D(A)$  para  $t \in (0, T^{**}]$ . Además, se puede demostrar que  $u \in C^1((0, T^{**}]; X)$  y que satisface la EDP  $u'(t) = \mathcal{A}u(t) + F(u(t))$  puntualmente. Por lo tanto, es una solución clásica.

□

**Observación 3.2.** (a) El Teorema 3.4 indica que una mayor regularidad del dato inicial  $u_0 \in X_s = D(A^s)$  (con  $s > 1/2$ ) se traduce en una solución  $u(t)$  que permanece en ese mismo espacio de regularidad  $X_s$  por un corto tiempo.

- (b) El caso  $s = 1/2$  corresponde al Teorema 3.3, ya que hemos establecido que el espacio  $V$  es equivalente al espacio de potencias fraccionarias  $X_{1/2}$  (ver Ecuación (2.1)).
- (c) La regularidad en los espacios  $X_s$  tiene consecuencias directas sobre la suavidad clásica de la solución. Si  $s > 1$ , el Teorema de Morrey implica que la inmersión  $H^{2s}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$  es continua. Esto significa que si partimos de un dato inicial en  $X_s$  con  $s > 1$ , la solución  $u(x, t)$  no solo existe, sino que es continua en las variables espaciales  $x \in \overline{\Omega}$  para cada  $t$  en su intervalo de existencia.

### 3.4 Conclusiones del enfoque de semigrupos

En este capítulo, hemos aplicado con éxito la teoría de semigrupos analíticos para establecer la buena colocación local del sistema de Burgers 2D sin incompresibilidad. El enfoque, basado en reformular el problema como una ecuación integral en un espacio de Banach y aplicar el teorema de punto fijo, ha demostrado ser una herramienta poderosa y elegante.

Los resultados clave son la existencia de soluciones únicas en  $C([0, T^*]; V)$  para datos iniciales en  $V$ , y en  $C([0, T^{**}]; X_s)$  para datos iniciales más regulares en  $X_s$ . Una de las principales ventajas de este método es que la regularidad de la solución para tiempos positivos se obtiene de forma casi directa de las propiedades del semigrupo analítico. La principal desventaja, como se explorará en el siguiente capítulo, es que requiere una regularidad mínima ( $H^1$ ) del dato inicial para iniciar el argumento.



## Capítulo 4

# Existencia y unicidad: Método de Faedo-Galerkin

En este capítulo, continuamos el estudio del problema de valor inicial y de frontera para la ecuación de Burgers 2D. En el Capítulo 3, utilizamos la teoría de semigrupos para establecer la existencia y unicidad local de soluciones mild (o integrales) y clásicas, lo cual generalmente requiere que el dato inicial  $u_0$  pertenezca a  $V = (H_0^1(\Omega))^2$  o a espacios de mayor regularidad. Ahora, abordaremos el problema desde una perspectiva diferente, utilizando el *método de Faedo-Galerkin*. Este método es de naturaleza constructiva y nos permitirá demostrar la existencia de *soluciones débiles* (en el sentido de la Definición 2.21 del Capítulo 2) bajo la hipótesis más general de que el dato inicial  $u_0$  pertenezca simplemente a  $X = (L^2(\Omega))^2$ . Además, probaremos la unicidad de esta solución débil bajo ciertas condiciones de regularidad. Finalmente, en la Sección 4.9, compararemos los resultados obtenidos por ambos enfoques.

### 4.1 Revisión del Problema y Formulación Débil

Recordemos el sistema de Burgers con viscosidad  $\nu > 0$  que estamos estudiando (originalmente Ecuación (1.1)):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u = -(u \cdot \nabla u), & x \in \Omega, \quad t \in [0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

junto con la condición de frontera de tipo Dirichlet homogénea:

$$u(x, t) = 0, \quad \text{para } t \in (0, T), \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.2)$$

Reenunciamos la definición de solución débil para conveniencia del lector (originalmente Definición 2.21).

**Definición 4.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto acotado con frontera suave,  $T > 0$ , y sea  $u_0 \in X = (L^2(\Omega))^2$ . Una *solución débil* de la ecuación de Burgers 2D (4.1) en  $[0, T]$  es una función  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; X)$  tal que  $u_t \in L^q(0, T; V')$  para algún  $q \geq 1$ , y que satisface la ecuación variacional (4.3) para todo  $v \in V$  y c.t.p.  $t \in (0, T)$ , junto con la condición inicial  $u(0) = u_0$ .

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle_X + \nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \cdot \nabla v_k \, dx + b(u(t), u(t), v) = 0, \text{ para todo } v \in V. \quad (4.3)$$

Aquí,  $b(u, w, z) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla w) \cdot z \, dx$  es la forma trilineal definida en (2.4), y sus propiedades se detallan en la Proposición 2.38. El término  $\nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla u_k(t) \cdot \nabla v_k \, dx$  corresponde a  $a(u(t), v) = \langle Au(t), v \rangle_X$ , donde  $A = -\nu \Delta$  es el operador elíptico positivo definido en la Definición 2.13.

## 4.2 Introducción al método de Faedo-Galerkin

Para mayor información sobre el método de Faedo-Galerkin, ver Temam [29], Evans [11], o Boyer y Fabrie [4]. El método de Faedo-Galerkin, también conocido simplemente como método de Galerkin para ecuaciones de evolución, es una técnica poderosa y ampliamente utilizada para demostrar la existencia de soluciones débiles para EDPs no lineales, especialmente las de tipo parabólico o hiperbólico. La idea fundamental es aproximar el problema original (definido en un espacio de funciones de dimensión infinita, como  $V = (H_0^1(\Omega))^2$ ) por una secuencia de problemas definidos en subespacios de dimensión finita. Los pasos generales del método son los siguientes:

- (1) **Construcción de Aproximaciones:** Se elige una base  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$  del espacio de Hilbert  $V$  (usualmente autofunciones del operador elíptico  $A = -\nu \Delta$ , como se establece en el Corolario 2.18 del Capítulo 2). Se definen los subespacios de dimensión finita  $V_m = \text{span}\{w_1, \dots, w_m\}$ . Se busca una solución aproximada  $u_m(t)$  dentro de  $V_m$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .
- (2) **Sistema de EDOs:** Se proyecta la formulación débil (4.3) de la EDP sobre el subespacio  $V_m$ . Esto conduce a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) para los coeficientes de  $u_m(t)$  en la base  $\{w_j\}$ .
- (3) **Existencia de Soluciones Aproximadas:** Se demuestra que el sistema de EDOs tiene solución (al menos localmente en el tiempo), usualmente aplicando el Teorema de Existencia de Carathéodory o el Teorema de Picard-Lindelöf si los términos no lineales son localmente Lipschitz.
- (4) **Estimaciones a Priori:** Se obtienen cotas para las normas de las soluciones aproximadas  $u_m$  en espacios funcionales adecuados (por ejemplo,  $L^\infty(0, T; X)$  y  $L^2(0, T; V)$ ). Crucialmente, estas cotas deben ser *independientes* de la dimensión  $m$ .
- (5) **Paso al Límite:** Utilizando las estimaciones a priori y teoremas de compacidad (como Aubin-Lions-Simon, Teorema 2.35, y Banach-Alaoglu, Teorema ?? del Capítulo 2), se

extrae una subsucesión  $\{u_{m_k}\}$  que converge (en algún sentido débil o fuerte) a una función límite  $u$ .

(6) **Identificación del Límite:** Se demuestra que la función límite  $u$  es, de hecho, una solución débil de la EDP original, satisfaciendo la Definición 4.1.

(7) **Unicidad:** Se demuestra (si es posible) que la solución débil obtenida es única.

En las siguientes secciones, aplicaremos estos pasos a la ecuación de Burgers 2D sin incompresibilidad.

## 4.3 Construcción de las aproximaciones de Galerkin

El método de Faedo-Galerkin se basa en la construcción de soluciones *aproximadas* de la ecuación de Burgers en subespacios de dimensión finita del espacio funcional  $V = (H_0^1(\Omega))^2$ . Estas soluciones aproximadas se obtendrán como soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs).

### 4.3.1 Base de $V$ y subespacios de dimensión finita

Como el espacio  $V = (H_0^1(\Omega))^2$  es un espacio de Hilbert separable (ver Proposición ?? del Capítulo 2), existe una base ortonormal de Hilbert  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$  de  $V$ . Dado que  $V$  es denso en  $X = (L^2(\Omega))^2$ , si la base  $\{w_j\}$  se elige como las autofunciones del operador  $A = -\nu\Delta$  (ver Corolario 2.18), entonces esta base también es ortogonal en  $X$  (y puede normalizarse para ser ortonormal en  $X$ ). Específicamente,  $Aw_j = \alpha_j w_j$  con  $\alpha_j > 0$ , y  $\langle w_j, w_k \rangle_X = \delta_{jk}$  (si están normalizadas en  $X$ ) y  $\langle w_j, w_k \rangle_V = \langle A^{1/2} w_j, A^{1/2} w_k \rangle_X = \alpha_j^{1/2} \alpha_k^{1/2} \langle w_j, w_k \rangle_X$  (no necesariamente ortogonal en  $V$  de esta forma, pero  $\langle Aw_j, w_k \rangle_X = \alpha_j \delta_{jk}$ ).

Por conveniencia, y basándonos en el Corolario 2.18, elegimos la base  $\{w_j\}_{j=1}^\infty$  de  $V$  tal que  $w_j \in D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$  para todo  $j$ , y que estas  $w_j$  son las autofunciones del operador  $A = -\nu\Delta$ , normalizadas en  $X$ .

- $Aw_j = \alpha_j w_j$ , con  $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ .
- $\langle w_j, w_k \rangle_X = \delta_{jk}$  (ortonormal en  $X$ ).
- $\langle Aw_j, w_k \rangle_X = \alpha_j \delta_{jk}$ .
- $\langle \nabla w_j, \nabla w_k \rangle_{(L^2)^{2 \times 2}} = \frac{1}{\nu} \langle Aw_j, w_k \rangle_X = \frac{\alpha_j}{\nu} \delta_{jk}$ . Así, las  $w_j$  son ortogonales en  $V$  con  $\|w_j\|_V^2 = \alpha_j / \nu$ .

Para cada entero positivo  $m$ , definimos el subespacio de dimensión finita  $V_m \subset V$  como

$$V_m = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m c_j w_j : c_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Observación 4.1.** A medida que  $m \rightarrow \infty$ ,  $V_m$  “llena” el espacio  $V$  en el sentido de que para cualquier  $v \in V$ , la proyección de  $v$  sobre  $V_m$  converge a  $v$  en la norma de  $V$ . Adicionalmente,  $\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$  es denso en  $V$ .

### 4.3.2 Soluciones aproximadas

Buscamos soluciones aproximadas  $u_m(t)$  de la ecuación de Burgers (4.1) en la forma:

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j,$$

donde los coeficientes  $g_{jm}(t)$  son funciones escalares (dependientes del tiempo) que debemos determinar. Notar que, para cada  $t \geq 0$ ,  $u_m(t) \in V_m \subset V$ .

### 4.3.3 El sistema de EDOs de Galerkin

Para determinar las funciones  $g_{jm}(t)$ , sustituimos la expresión de  $u_m(t)$  en la formulación débil (4.3), pero restringiendo las funciones de prueba  $v$  al subespacio  $V_m$ . Es decir, requerimos que para c.t.p.  $t \in (0, T)$ :

$$\frac{d}{dt} \langle u_m(t), v \rangle_X + \nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla (u_m)_k(t) \cdot \nabla v_k \, dx + b(u_m(t), u_m(t), v) = 0, \quad (4.4)$$

para todo  $v \in V_m$ . La condición inicial para  $u_m(t)$  se toma como la proyección ortogonal del dato inicial  $u_0 \in X$  sobre  $V_m$ :

$$u_m(0) = P_m u_0 =: u_{0m}, \quad (4.5)$$

donde  $P_m : X \rightarrow V_m$  es el proyector ortogonal sobre  $V_m$  en el espacio  $X$ , dado explícitamente por

$$P_m z = \sum_{j=1}^m \langle z, w_j \rangle_X w_j, \quad \text{para } z \in X.$$

**Observación 4.2.** Por propiedades de la proyección ortogonal,  $\|u_{0m}\|_X \leq \|u_0\|_X$ . Además, si  $u_0 \in X$ , entonces  $u_{0m} \rightarrow u_0$  fuertemente en  $X$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Si  $u_0 \in V$ , entonces  $u_{0m} \rightarrow u_0$  fuertemente en  $V$  también.

Como los  $\{w_k\}_{k=1}^m$  forman una base de  $V_m$ , es suficiente que la ecuación (4.4) se cumpla para  $v = w_l$ , con  $l = 1, 2, \dots, m$ . Sustituyendo  $u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j$  y  $v = w_l$ : El primer término es

$$\frac{d}{dt} \left\langle \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j, w_l \right\rangle_X = \frac{d}{dt} g_{lm}(t),$$

usando  $\langle w_j, w_l \rangle_X = \delta_{jl}$ . El segundo término es

$$\nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla \left( \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) (w_j)_k \right) \cdot \nabla (w_l)_k \, dx = \nu \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \left( \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla (w_j)_k \cdot \nabla (w_l)_k \, dx \right).$$

Recordando que  $\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla(w_j)_k \cdot \nabla(w_l)_k dx = \|w_j\|_V^2 \delta_{jl}$  si los  $w_j$  fuesen ortogonales en  $V$ , o  $\langle \nabla w_j, \nabla w_l \rangle_{(L^2)^{2 \times 2}}$  en general. Usando  $a(w_j, w_l) = \nu \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \nabla(w_j)_k \cdot \nabla(w_l)_k dx = \langle Aw_j, w_l \rangle_X = \alpha_j \langle w_j, w_l \rangle_X = \alpha_j \delta_{jl}$ . Entonces, este segundo término queda

$$\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)(\alpha_j \delta_{jl}) = \alpha_l g_{lm}(t).$$

El tercer término es

$$b\left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)w_i, \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j, w_l\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{im}(t)g_{jm}(t)b(w_i, w_j, w_l).$$

Así, el sistema de EDOs para los coeficientes  $g_{lm}(t)$  (para  $l = 1, \dots, m$ ) es:

$$g'_{lm}(t) + \alpha_l g_{lm}(t) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g_{im}(t)g_{jm}(t)b(w_i, w_j, w_l) = 0. \quad (4.6)$$

Este es un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer orden para las  $m$  funciones desconocidas  $g_{1m}(t), \dots, g_{mm}(t)$ . La no linealidad proviene del término trilineal  $b$ . Las condiciones iniciales para este sistema se obtienen de (4.5):  $u_m(0) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(0)w_j = u_{0m} = \sum_{j=1}^m \langle u_0, w_j \rangle_X w_j$ . Por lo tanto, por la ortonormalidad de  $\{w_j\}$  en  $X$ :

$$g_{lm}(0) = \langle u_0, w_l \rangle_X, \quad l = 1, \dots, m.$$

#### 4.3.4 Existencia de las soluciones aproximadas

##### **Teorema 4.1. (Existencia y Unicidad Local para el Sistema de EDOs de Galerkin)**

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , el sistema de EDOs (4.6) con las condiciones iniciales  $g_{lm}(0) = \langle u_0, w_l \rangle_X$  tiene una única solución local  $\mathbf{g}_m(t) = (g_{1m}(t), \dots, g_{mm}(t))^T$  definida en un intervalo máximo  $[0, T_m)$ , donde  $T_m > 0$ . Consecuentemente, existe una única solución aproximada  $u_m \in C^1([0, T_m]; V_m)$  del problema de Galerkin (4.4)-(4.5).

*Demostración.* El sistema de EDOs (4.6) es de la forma  $\mathbf{g}'_m(t) = \mathbf{H}_m(\mathbf{g}_m(t))$ , donde  $\mathbf{g}_m(t) = (g_{1m}(t), \dots, g_{mm}(t))^T$  es el vector de coeficientes y la función  $\mathbf{H}_m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  está definida por los términos lineales y cuadráticos en  $g_{im}, g_{jm}$  que provienen del término  $b(w_i, w_j, w_l)$  y del término  $\alpha_l g_{lm}(t)$ . Como  $b$  es trilineal, los términos  $\sum \sum g_{im}g_{jm}b(w_i, w_j, w_l)$  son polinomios de segundo grado en las componentes de  $\mathbf{g}_m$ . Por lo tanto,  $\mathbf{H}_m$  es una función continua y localmente Lipschitz continua con respecto a  $\mathbf{g}_m$ . El teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf (o Cauchy-Lipschitz) para sistemas de EDOs garantiza la existencia y unicidad de una solución local maximal  $\mathbf{g}_m(t)$  definida en un intervalo  $[0, T_m)$ , con  $T_m > 0$ . Como los coeficientes  $g_{jm}(t)$  son  $C^1([0, T_m))$ , la solución aproximada  $u_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j$  pertenece a  $C^1([0, T_m]; V_m)$ .  $\square$

**Observación 4.3.** Este teorema asegura que, para cada  $m$ , existe una solución aproximada  $u_m(t)$  bien definida, al menos localmente en el tiempo. El siguiente paso crucial es obtener estimaciones *a priori* sobre estas  $u_m(t)$  que sean *independientes* de  $m$ . Estas estimaciones permitirán extender las soluciones a un intervalo de tiempo común  $[0, T]$  (para  $T < \liminf T_m$ ) y pasar al límite cuando  $m \rightarrow \infty$ .

## 4.4 Estimaciones a priori

El núcleo del método de Faedo-Galerkin reside en obtener estimaciones para las soluciones aproximadas  $u_m(t)$  que sean *uniformes* con respecto a  $m$ . Estas estimaciones son cruciales para asegurar la existencia global de las soluciones aproximadas y para aplicar los teoremas de compacidad que permiten pasar al límite.

### 4.4.1 Estimaciones de energía fundamentales (datos en $L^2$ )

Iniciamos el análisis con la hipótesis más general,  $u_0 \in X = (L^2(\Omega))^2$ . El objetivo es obtener cotas para la energía ( $\|u_m\|_X$ ) y la disipación viscosa ( $\|u_m\|_V$ ).

#### La identidad de energía y la desigualdad diferencial

El primer paso es el método de energía estándar. Tomando  $v = u_m(t)$  en la ecuación de Galerkin (4.4), se obtiene la identidad de energía:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_X^2 + \nu \|u_m(t)\|_V^2 = -b(u_m(t), u_m(t), u_m(t)). \quad (4.7)$$

Para controlar el término no lineal, especializamos una de las cotas de la Proposición 2.38 al caso  $b(u, u, u)$ , lo que nos da la siguiente desigualdad fundamental, válida en 2D

$$|b(u, u, u)| \leq C_0 \|u\|_X \|u\|_V^2, \quad (4.8)$$

donde  $C_0$  es una constante que solo depende del dominio  $\Omega$ . Sustituyendo esta cota en la identidad de energía, llegamos a la desigualdad diferencial

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_X^2 + 2(\nu - C_0 \|u_m(t)\|_X) \|u_m(t)\|_V^2 \leq 0. \quad (4.9)$$

#### Cota uniforme en $L^\infty(0, T; X)$

A continuación, se desarrolla el análisis formal para obtener la cota a partir de la desigualdad (4.9). Sea  $y(t) = \|u_m(t)\|_X$  y el valor crítico  $K = \nu/C_0$ . Queremos demostrar que  $y(t) \leq \max(y(0), K)$ .

La clave está en analizar el signo del coeficiente del término disipativo.

- (1) Si  $y(t) \leq K$ , El coeficiente  $(\nu - C_0 y(t))$  es no negativo. La desigualdad (4.9) implica entonces que:

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_X^2 \leq -2 \underbrace{(\nu - C_0 y(t))}_{\geq 0} \underbrace{\|u_m(t)\|_V^2}_{\geq 0} \leq 0.$$

Esto significa que si la norma de la solución está por debajo del valor crítico  $K$ , la energía es no creciente.

- (2) Combinamos esta observación con un argumento de continuidad.

- (i) Si  $y(0) \leq K$ , la norma no puede superar  $K$ . Si lo hiciera, existiría un primer tiempo  $t_0$  tal que  $y(t_0) = K$ . Pero en ese punto, como acabamos de ver, su derivada  $\frac{d}{dt}y^2$  debe ser  $\leq 0$ , impidiendo que la función cruce ese nivel. Por lo tanto,  $y(t) \leq y(0) \leq K$  para todo  $t$ .
- (ii) Si  $y(0) > K$ , la norma  $y(t)$  puede decrecer. Si en algún momento  $t_1$  alcanza el valor  $K$ , por el mismo argumento, no podrá volver a superarlo. Por lo tanto, la norma siempre estará acotada por su valor inicial.

Este análisis formal demuestra que la norma está controlada por el máximo entre su valor inicial y el valor crítico. Dado que  $\|u_m(0)\|_X \leq \|u_0\|_X$ , obtenemos la cota uniforme en  $m$  y  $t$ :

$$\|u_m(t)\|_X \leq \max(\|u_0\|_X, \nu/C_0) =: C_X. \quad (4.10)$$

Esta cota es fundamental pues garantiza que la sucesión  $\{u_m\}$  está uniformemente acotada en  $L^\infty(0, T; X)$  para cualquier  $T > 0$ .

### Cota uniforme en $L^2(0, T; V)$

Una vez establecida la cota  $C_X$ , la estimación en  $L^2(0, T; V)$  sigue, pero depende de los parámetros. Integrando (4.9) de 0 a  $T$  y reorganizando se obtiene:

$$\int_0^T 2(\nu - C_0 \|u_m(s)\|_X) \|u_m(s)\|_V^2 ds \leq \|u_m(0)\|_X^2.$$

Usando  $\|u_m(s)\|_X \leq C_X$ , se tiene:

$$2(\nu - C_0 C_X) \int_0^T \|u_m(s)\|_V^2 ds \leq \|u_0\|_X^2.$$

Esta desigualdad proporciona una cota uniforme para la norma en  $L^2(0, T; V)$  si y solo si el coeficiente  $(\nu - C_0 C_X)$  es estrictamente positivo, lo que requiere una condición de dato pequeño o viscosidad grande. Para el caso general, se apela a resultados más profundos de la teoría.

### 4.4.2 Estimación de la derivada temporal en $L^{4/3}(0, T; V')$

Esta estimación es un pilar para el argumento de compacidad. El objetivo es encontrar una cota uniforme para  $\{u_{m,t}\}$  en un espacio  $L^p(0, T; V')$  con  $p > 1$ . La derivación se realiza en varios pasos.

Tratamos a  $u_{m,t}(t)$  como un elemento del espacio dual  $V'$ . A partir de la ecuación de Galerkin (4.4), para cualquier  $v \in V_m$ , tenemos

$$\langle u_{m,t}(t), v \rangle_X = -a(u_m(t), v) - b(u_m(t), u_m(t), v).$$

Por la definición de la norma en el espacio dual, y usando la desigualdad de triangular

$$\|u_{m,t}(t)\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} |\langle u_{m,t}(t), v \rangle_{V',V}| \leq \sup_{\|v\|_V=1} |a(u_m, v)| + \sup_{\|v\|_V=1} |b(u_m, u_m, v)|.$$

Esto es equivalente a  $\|u_{m,t}\|_{V'} \leq \| -Au_m \|_{V'} + \| -F(u_m) \|_{V'}$ , donde  $F(u_m)$  es el término no lineal. Acotaremos cada término por separado.

El término viscoso es directo de acotar por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|a(u_m, v)| = |\nu \langle \nabla u_m, \nabla v \rangle_{L^2}| \leq \nu \|\nabla u_m\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} = \nu \|u_m\|_V \|v\|_V.$$

Tomando el supremo sobre los  $v$  con  $\|v\|_V = 1$ , obtenemos  $\|Au_m(t)\|_{V'} \leq \nu \|u_m(t)\|_V$ . Como ya sabemos que  $\{u_m\}$  está acotada en  $L^2(0, T; V)$ , concluimos que  $\{Au_m\}$  está uniformemente acotada en  $L^2(0, T; V')$ .

El siguiente paso es el paso más técnico. Para acotar  $b(u_m, u_m, v)$ , usamos la desigualdad de Hölder, seguida de la desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg en 2D,  $\|w\|_{L^4} \leq C \|w\|_X^{1/2} \|w\|_V^{1/2}$ , y la inmersión de Sobolev  $V \hookrightarrow L^4$ .

$$\begin{aligned} |b(u_m, u_m, v)| &= \left| \int_{\Omega} (u_m \cdot \nabla u_m) \cdot v \, dx \right| \\ &\leq \|u_m\|_{L^4} \|\nabla u_m\|_{L^2} \|v\|_{L^4} \quad (\text{Hölder con exponentes } 4, 2, 4) \\ &\leq \left( C \|u_m\|_X^{1/2} \|u_m\|_V^{1/2} \right) \cdot \|u_m\|_V \cdot (C_S \|v\|_V) \quad (\text{Gagliardo-Nirenberg y Sobolev}) \\ &= C' \|u_m\|_X^{1/2} \|u_m\|_V^{3/2} \|v\|_V. \end{aligned}$$

Al tomar el supremo sobre los  $v$  con  $\|v\|_V = 1$ , obtenemos la cota para la norma del término no lineal en  $V'$

$$\|F(u_m)(t)\|_{V'} \leq C' \|u_m(t)\|_X^{1/2} \|u_m(t)\|_V^{3/2}.$$

Ahora, integramos esta última desigualdad a la potencia  $4/3$  para obtener una cota en el espacio  $L^{4/3}(0, T; V')$ .

$$\int_0^T \|F(u_m)(t)\|_{V'}^{4/3} \, dt \leq \int_0^T \left( C' \|u_m(t)\|_X^{1/2} \|u_m(t)\|_V^{3/2} \right)^{4/3} \, dt.$$

Simplificando el exponente y usando la cota uniforme  $\|u_m(t)\|_X \leq C_X$  que tenemos de  $L^\infty(0, T; X)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \|F(u_m)(t)\|_{V'}^{4/3} \, dt &\leq (C')^{4/3} \int_0^T \|u_m(t)\|_X^{2/3} \|u_m(t)\|_V^2 \, dt \\ &\leq (C')^{4/3} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|u_m(t)\|_X^{2/3} \right) \left( \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \, dt \right) \\ &\leq (C')^{4/3} (C_X)^{2/3} \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \, dt. \end{aligned}$$

Como ya hemos establecido que  $\int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \, dt$  está uniformemente acotada, concluimos que el lado derecho está acotado por una constante independiente de  $m$ . Por lo tanto,  $\{F(u_m)\}$  está uniformemente acotada en  $L^{4/3}(0, T; V')$ .

Finalmente, como  $u_{m,t} = -Au_m - F(u_m)$ , y sabemos que  $\{Au_m\}$  está acotada en  $L^2(0, T; V')$  y  $\{F(u_m)\}$  está acotada en  $L^{4/3}(0, T; V')$ , la sucesión  $\{u_{m,t}\}$  está acotada en el espacio de menor integrabilidad, que es  $L^{4/3}(0, T; V')$ .

#### 4.4.3 Estimaciones de regularidad superior (Datos en $V \cap L^\infty$ )

Ahora, asumimos la hipótesis más fuerte de que el dato inicial  $u_0 \in V \cap (L^\infty(\Omega))^2$ . Demostraremos que esta regularidad adicional se conserva, al menos por un tiempo, lo que conduce a una solución más regular (solución fuerte).

La estrategia para obtener una cota para  $\|u_m(t)\|_V$  consiste en derivar una ecuación para su evolución. Para ello, tomamos el producto interno de la ecuación de Galerkin (4.4) con una función test más elaborada:  $v = Au_m(t) = -\nu \Delta u_m(t)$ . Esta elección es válida ya que la base de Galerkin está compuesta por las autofunciones de  $A$ , lo que garantiza que  $Au_m(t) \in V_m$ . La ecuación resultante es:

$$\left\langle \frac{du_m}{dt}, Au_m \right\rangle_X + \nu \langle \nabla u_m, \nabla (Au_m) \rangle_X + b(u_m, u_m, Au_m) = 0.$$

Analizamos los dos primeros términos usando la auto-adjunción del operador  $A$

- (i)  $\left\langle \frac{du_m}{dt}, Au_m \right\rangle_X = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle A^{1/2} u_m, A^{1/2} u_m \rangle_X = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|A^{1/2} u_m\|_X^2$ . Usando la relación  $\|w\|_V^2 = \frac{1}{\nu} \|A^{1/2} w\|_X^2$ , este término es  $\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_V^2$ .
- (ii)  $\nu \langle \nabla u_m, \nabla (Au_m) \rangle_X = \langle u_m, A(Au_m) \rangle_X = \langle Au_m, Au_m \rangle_X = \|Au_m\|_X^2$ .

Sustituyendo estos resultados, obtenemos la identidad de energía para la norma  $V$ :

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 + \|Au_m(t)\|_X^2 = -b(u_m, u_m, Au_m). \quad (4.11)$$

El paso clave es acotar el término no lineal  $|b(u_m, u_m, Au_m)|$ . Aquí es donde la hipótesis  $u_0 \in L^\infty(\Omega)^2$  se vuelve indispensable para nuestro argumento, ya que nos proporciona la cota a priori  $\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} =: M_\infty$ .

$$\begin{aligned} |b(u_m, u_m, Au_m)| &= | \langle -(u_m \cdot \nabla u_m), Au_m \rangle_X | \\ &\leq \|u_m \cdot \nabla u_m\|_X \|Au_m\|_X && \text{(Cauchy-Schwarz en X)} \\ &\leq \|u_m\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}} \|Au_m\|_X && \text{(Hölder)} \\ &\leq M_\infty \|u_m\|_V \|Au_m\|_X && \text{(Usando la cota } M_\infty \text{ y la norma V)} \end{aligned}$$

Sustituimos esta cota en la identidad de energía (4.11):

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 + \|Au_m(t)\|_X^2 \leq M_\infty \|u_m(t)\|_V \|Au_m(t)\|_X.$$

Ahora, utilizamos la desigualdad de Young ( $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$ ) en el lado derecho con  $a = \|Au_m\|_X$ ,  $b = M_\infty \|u_m\|_V$  y  $\epsilon = \frac{1}{2}$ :

$$M_\infty \|u_m\|_V \|Au_m\|_X \leq \frac{1}{2} \|Au_m\|_X^2 + \frac{M_\infty^2}{2} \|u_m\|_V^2.$$

Insertando esto en la desigualdad anterior:

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 + \|Au_m(t)\|_X^2 \leq \frac{1}{2} \|Au_m(t)\|_X^2 + \frac{M_\infty^2}{2} \|u_m(t)\|_V^2.$$

Simplificando y reorganizando, obtenemos una desigualdad diferencial lineal para  $y(t) = \|u_m(t)\|_V^2$ :

$$\frac{d}{dt} \|u_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{\nu} \|Au_m(t)\|_X^2 \leq \frac{M_\infty^2}{\nu} \|u_m(t)\|_V^2.$$

Descartando el término no negativo  $\frac{1}{\nu} \|Au_m\|_X^2$ , llegamos a  $\frac{d}{dt} y(t) \leq \frac{M_\infty^2}{\nu} y(t)$ .

### Conclusión de las cotas

La desigualdad anterior es la forma diferencial del Lema de Gronwall. Aplicándolo, obtenemos la cota en  $L^\infty(0, T; V)$ :

$$\|u_m(t)\|_V^2 \leq \|u_m(0)\|_V^2 \exp\left(\frac{M_\infty^2}{\nu} t\right).$$

Como  $\|u_m(0)\|_V \leq \|u_0\|_V$ , la sucesión  $\{u_m\}$  está uniformemente acotada en  $L^\infty(0, T; V)$ . Finalmente, para obtener la cota en  $L^2(0, T; D(A))$ , integramos la desigualdad  $\frac{1}{\nu} \|Au_m(t)\|_X^2 \leq -\frac{d}{dt} \|u_m\|_V^2 + \frac{M_\infty^2}{\nu} \|u_m\|_V^2$  en  $[0, T]$ . Dado que ya sabemos que el lado derecho es integrable y está uniformemente acotado, concluimos que  $\{u_m\}$  está uniformemente acotada en  $L^2(0, T; D(A))$ .

### 4.4.4 Proposición resumen de estimaciones

Los resultados de las derivaciones de esta sección se condensan en la siguiente proposición.

**Proposición 4.2. (Resumen de Estimaciones a Priori)** *La sucesión de soluciones de Galerkin  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  satisface las siguientes cotas uniformes, independientes de  $m$ :*

(a) Si  $u_0 \in L^2(\Omega)^2$ , entonces para cualquier  $T > 0$ :

- (i)  $\{u_m\}$  está acotada en  $L^\infty(0, T; X)$ .
- (ii)  $\{u_m\}$  está acotada en  $L^2(0, T; V)$  (para el caso general, este es un resultado profundo; se demuestra directamente bajo una condición de dato pequeño/viscosidad grande).
- (iii)  $\{u_{m,t}\}$  está acotada en  $L^{4/3}(0, T; V')$ .

(b) Si adicionalmente se asume que  $u_0 \in V = (H_0^1(\Omega))^2$ , entonces para un  $T^* > 0$  (que puede depender de la norma de  $u_0$ ):

- (i)  $\{u_m\}$  está acotada en  $L^\infty(0, T^*; V)$ .
- (ii)  $\{u_m\}$  está acotada en  $L^2(0, T^*; H^2(\Omega)^2)$ .

*Demostración.* Las afirmaciones son una consecuencia directa de las derivaciones rigurosas presentadas en las subsecciones de esta sección.  $\square$

**Observación 4.4. (Alternativa para Datos en  $L^\infty(\Omega)^2$ )** El requisito de dato pequeño o viscosidad grande para la cota en  $L^2(V)$  se puede eludir si se asume una mayor regularidad del dato inicial, específicamente  $u_0 \in (L^2(\Omega))^2 \cap (L^\infty(\Omega))^2$ . En este caso, el Principio del Máximo establece primero la cota  $\|u_m(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} =: M_\infty$ . Usando esta cota, el término no lineal se acota de forma más favorable:

$$|b(u_m, u_m, u_m)| \leq \frac{1}{2} M_\infty \|u_m\|_V \|u_m\|_X.$$

Aplicando la desigualdad de Young a esta expresión y sustituyendo en la identidad de energía (4.7), se conduce a la siguiente desigualdad diferencial:

$$\frac{d}{dt} \|u_m\|_X^2 + \nu \|u_m\|_V^2 \leq \frac{1}{4\nu} M_\infty^2 \|u_m\|_X^2.$$

A diferencia de la desigualdad (4.9), el coeficiente del término  $\|u_m\|_V^2$  es simplemente  $\nu$ , que es siempre positivo. Esto permite obtener las cotas en  $L^\infty(0, T; X)$  y  $L^2(0, T; V)$  de manera incondicional para cualquier  $T > 0$ .

## 4.5 Paso al límite (convergencia débil)

Con las cotas a priori uniformes establecidas en la Proposición 4.2, tenemos las herramientas necesarias para aplicar los teoremas de compacidad y pasar al límite en la formulación de Galerkin. Recordemos que hemos demostrado que la sucesión de soluciones aproximadas  $\{u_m\}$  satisface:

- $\{u_m\}$  está uniformemente acotada en  $L^\infty(0, T; X)$  y en  $L^2(0, T; V)$ .
- $\{u_{m,t}\}$  está uniformemente acotada en  $L^{4/3}(0, T; V')$ .

Estas cotas nos permiten extraer una subsucesión convergente. Por los teoremas de compacidad de la Sección 2.5

- (1) **(Banach-Alaoglu)** Como  $\{u_m\}$  está acotada en los espacios reflexivos  $L^2(0, T; V)$  y  $L^\infty(0, T; X)$  (que es el dual de  $L^1(0, T; X')$ ), existe una función  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; X)$  y una subsucesión (que renombramos  $\{u_m\}$ ) tal que

- (i)  $u_m \rightharpoonup u$  débilmente en  $L^2(0, T; V)$ .
- (ii)  $u_m \rightharpoonup^* u$  débil-\* en  $L^\infty(0, T; X)$ .

- (2) **(Aubin-Lions-Simon, Teorema 2.35)** Como la inmersión  $V \hookrightarrow X$  es compacta y tenemos las cotas para  $\{u_m\}$  en  $L^2(0, T; V)$  y para  $\{u_{m,t}\}$  en  $L^{4/3}(0, T; V')$ , el teorema garantiza que podemos extraer una subsucesión tal que:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } L^2(0, T; X).$$

### Paso al límite en la formulación variacional

Ahora, pasamos al límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en la ecuación de Galerkin. El principal obstáculo es el término no lineal. Debemos demostrar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T b(u_m, u_m, v) \phi(t) dt = \int_0^T b(u, u, v) \phi(t) dt,$$

para una función test espacial  $v \in V_k$  y una función test temporal  $\phi \in C_c^\infty(0, T)$ .

Para analizar la convergencia, estudiamos la diferencia y usamos la trilinealidad de  $b$

$$\begin{aligned} & \int_0^T [b(u_m, u_m, v) - b(u, u, v)] \phi(t) dt \\ &= \int_0^T [b(u_m - u, u_m, v) + b(u, u_m - u, v)] \phi(t) dt \\ &= \underbrace{\int_0^T b(u_m - u, u_m, v) \phi(t) dt}_{\text{Término 1}} + \underbrace{\int_0^T b(u, u_m - u, v) \phi(t) dt}_{\text{Término 2}}. \end{aligned}$$

Demostraremos que ambos términos tienden a cero.

**Análisis del Término 2 (convergencia débil).** Este término es el más sencillo. Lo reescribimos usando la definición de  $b$

$$\text{Término 2} = \int_0^T \left( \int_{\Omega} (u \cdot \nabla(u_m - u)) \cdot v dx \right) \phi(t) dt.$$

Como  $u$  y  $v$  son funciones fijas y regulares, podemos integrar por partes en la variable espacial para transferir la derivada de  $(u_m - u)$  a los otros términos (que no dependen de  $m$ )

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla(u_m - u)) \cdot v dx = - \int_{\Omega} (u_m - u) \cdot (u \cdot \nabla v) dx - \int_{\Omega} (u_m - u) \cdot ((\nabla \cdot u)v) dx.$$

Ambos términos tienen la forma  $\langle u_m - u, \Psi(t) \rangle_X$ , donde  $\Psi(t)$  es una función que no depende de  $m$ . Como sabemos que  $u_m - u \rightharpoonup 0$  débilmente en  $L^2(0, T; X)$ , por la propia definición de convergencia débil, la integral en el tiempo de este producto interno tiende a cero. Por lo tanto:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\text{Término 2}) = 0.$$

**Análisis del Término 1 (convergencia fuerte).** Aquí es donde la convergencia fuerte es indispensable. Consideramos el valor absoluto:

$$\begin{aligned} |\text{Término 1}| &= \left| \int_0^T b(u_m - u, u_m, v) \phi(t) dt \right| \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(0, T)} \int_0^T |b(u_m - u, u_m, v)| dt. \end{aligned}$$

Usamos la desigualdad de Hölder en el espacio y la inmersión  $V \hookrightarrow L^4$  para  $v$ :

$$|b(u_m - u, u_m, v)| \leq \|u_m - u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_v \|u_m - u\|_X \|u_m\|_V.$$

Sustituyendo y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el tiempo:

$$\begin{aligned} \int_0^T |b(u_m - u, u_m, v)| dt &\leq C_v \int_0^T \|u_m - u\|_X \|u_m\|_V dt \\ &\leq C_v \underbrace{\left( \int_0^T \|u_m - u\|_X^2 dt \right)^{1/2}}_{\rightarrow 0 \text{ (conv. fuerte)}} \underbrace{\left( \int_0^T \|u_m\|_V^2 dt \right)^{1/2}}_{\text{acotado}}. \end{aligned}$$

El primer término de la derecha,  $\|u_m - u\|_{L^2(0,T;X)}$ , tiende a cero gracias a la convergencia fuerte del Lema de Aubin-Lions-Simon. El segundo término,  $\|u_m\|_{L^2(0,T;V)}$ , está uniformemente acotado por nuestras estimaciones a priori. El producto de algo que tiende a cero por algo acotado, tiende a cero. Por lo tanto:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{Término 1} = 0.$$

**Conclusión del paso al límite.** Como ambos términos tienden a cero, hemos demostrado la convergencia del término no lineal. Al pasar al límite en todos los términos de la ecuación de Galerkin, se concluye que la función límite  $u$  satisface la formulación variacional (4.3).

## 4.6 Teorema de Existencia para datos pequeños

Los pasos del método de Galerkin, junto con las estimaciones a priori que hemos derivado, nos permiten enunciar un teorema de existencia global para datos iniciales en  $L^2(\Omega)^2$  que son suficientemente pequeños.

**Teorema 4.3. (Existencia global para datos pequeños en  $L^2$ )** Sea  $u_0 \in X = (L^2(\Omega))^2$ . Supongamos que el dato inicial satisface la condición de dato pequeño

$$\|u_0\|_X < \frac{\nu}{C_0},$$

donde  $C_0$  es la constante de la desigualdad (4.8). Entonces, para cualquier  $T > 0$ , existe al menos una solución débil  $u$  del sistema de Burgers 2D en el intervalo  $[0, T]$ , tal que:

- (i)  $u \in L^\infty(0, T; X) \cap L^2(0, T; V)$ .
- (ii)  $u_t \in L^{4/3}(0, T; V')$ .
- (iii)  $u$  satisface la ecuación variacional (4.3) para casi todo  $t \in (0, T)$ .
- (iv)  $u \in C([0, T]; X)$  y, por tanto, satisface la condición inicial en el sentido fuerte:  $u(0) = u_0$  en  $X$ .

*Demostración.* La prueba sigue el método de Faedo-Galerkin. La hipótesis que permitió la obtención de los estimativos fue  $\|u_0\|_X < \nu/C_0$  permite que las estimaciones a priori de la Sección 4.4 sean válidas para cualquier tiempo  $T > 0$  sin condiciones adicionales. Específicamente, esta condición garantiza la obtención de cotas uniformes para la sucesión  $\{u_m\}$  en  $L^\infty(0, T; X)$  y en  $L^2(0, T; V)$ , así como para la derivada temporal  $\{u_{m,t}\}$  en  $L^{4/3}(0, T; V')$ .

Con estas cotas uniformes, el argumento de compacidad de la Sección 4.5, basado en el Lema de Aubin-Lions-Simon, asegura la existencia de una subsucesión convergente. Al pasar al límite en la formulación de Galerkin, se demuestra que el límite de esta subsucesión es una solución débil que posee la regularidad enunciada.  $\square$

**Observación 4.5. (Sobre el caso de datos grandes)** El teorema anterior garantiza la existencia global para datos iniciales pequeños. Para un dato inicial arbitrario  $u_0 \in L^2(\Omega)^2$  que no cumpla la condición de pequeñez, la prueba rigurosa de la cota en  $L^2(0, T; V)$  es más técnica y se apoya en resultados más profundos de la teoría de ecuaciones parabólicas no lineales en 2D (e.g., [18]), los cuales están fuera del alcance de la derivación detallada de esta tesis. Sin embargo, la existencia de soluciones débiles globales en 2D para el sistema de Burgers es un hecho conocido en la literatura.

## 4.7 Unicidad de la solución débil

Una vez establecida la existencia de una solución débil, es natural preguntarse si esta solución es única. La unicidad es importante para que el problema esté bien planteado y para la validez de las simulaciones numéricas.

**Teorema 4.4. (Unicidad de la Solución Débil)** *La solución débil de la ecuación de Burgers 2D, en el sentido de la Definición 2.21, es única, al menos bajo la hipótesis de que el dato inicial  $u_0 \in V = (H_0^1(\Omega))^2$ .*

*Demostración.* La prueba se basa en el método de energía aplicado a la diferencia de dos posibles soluciones.

Sean  $u$  y  $v$  dos soluciones débiles en  $[0, T^*]$  con el mismo dato inicial  $u_0 \in V$ . De la Proposición 4.6, sabemos que ambas soluciones pertenecen a  $L^\infty(0, T^*; V)$ . Sea  $w = u - v$ . La diferencia  $w$  satisface  $w(0) = 0$  y la siguiente ecuación variacional para todo  $\phi \in V$ :

$$\langle w_t, \phi \rangle_X + a(w, \phi) + b(u, u, \phi) - b(v, v, \phi) = 0.$$

Usando la identidad  $b(u, u, \phi) - b(v, v, \phi) = b(u - v, u, \phi) + b(v, u - v, \phi) = b(w, u, \phi) + b(v, w, \phi)$ , la ecuación para  $w$  es:

$$\langle w_t, \phi \rangle_X + a(w, \phi) + b(w, u, \phi) + b(v, w, \phi) = 0.$$

Elegimos como función test  $\phi = w(t)$ , lo cual es una elección válida. Esto nos da la identidad de energía para  $w$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_X^2 + \nu \|w(t)\|_V^2 = -b(w(t), u(t), w(t)) - b(v, w, w)(t). \quad (4.12)$$

Tomando el valor absoluto y usando la desigualdad del triángulo:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_X^2 + \nu \|w(t)\|_V^2 \leq |b(w, u, w)| + |b(v, w, w)|.$$

Ahora acotamos cada término no lineal. Utilizando una de las cotas fundamentales para la forma trilineal de la Proposición 2.38, que establece que  $|b(f, g, h)| \leq C \|f\|_V \|g\|_V \|h\|_X$  para  $f, g \in V$  y  $h \in X$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} |b(w, u, w)| &\leq C \|w\|_V \|u\|_V \|w\|_X \\ |b(v, w, w)| &\leq C \|v\|_V \|w\|_V \|w\|_X \end{aligned}$$

Sumando ambas cotas:

$$|b(w, u, w)| + |b(v, w, w)| \leq C(\|u(t)\|_V + \|v(t)\|_V) \|w(t)\|_X \|w(t)\|_V.$$

Sustituimos esta cota en la desigualdad de energía:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_X^2 + \nu \|w\|_V^2 \leq C(\|u\|_V + \|v\|_V) \|w\|_X \|w\|_V.$$

Ahora usamos la desigualdad de Young ( $ab \leq \frac{\epsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon}b^2$ ) en el lado derecho para absorber el término  $\|w\|_V$ . Sea  $\epsilon = 2\nu$ :

$$\begin{aligned} C(\|u\|_V + \|v\|_V) \|w\|_X \|w\|_V &\leq \frac{2\nu}{2} \|w\|_V^2 + \frac{1}{2(2\nu)} (C(\|u\|_V + \|v\|_V) \|w\|_X)^2 \\ &= \nu \|w\|_V^2 + \frac{C^2}{4\nu} (\|u\|_V + \|v\|_V)^2 \|w\|_X^2. \end{aligned}$$

Insertando esta última cota en la desigualdad principal:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_X^2 + \nu \|w\|_V^2 \leq \nu \|w\|_V^2 + \frac{C^2}{4\nu} (\|u\|_V + \|v\|_V)^2 \|w\|_X^2.$$

Cancelando el término  $\nu \|w\|_V^2$  y multiplicando por 2, obtenemos la desigualdad diferencial:

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_X^2 \leq \frac{C^2}{2\nu} (\|u(t)\|_V + \|v(t)\|_V)^2 \|w(t)\|_X^2.$$

Esta es una desigualdad de la forma  $y'(t) \leq g(t)y(t)$ , donde  $y(t) = \|w(t)\|_X^2$  y  $g(t) = \frac{C^2}{2\nu} (\|u(t)\|_V + \|v(t)\|_V)^2$ . Como  $u, v \in L^\infty(0, T^*; V)$ , el término  $(\|u\|_V + \|v\|_V)^2$  está en  $L^\infty(0, T^*)$ , por lo que  $g(t)$  es integrable.

Dado que la condición inicial para la diferencia es  $y(0) = \|w(0)\|_X^2 = 0$ , el Lema de Gronwall (Lema 2.30) implica que  $y(t) = \|w(t)\|_X^2 = 0$  para todo  $t \in [0, T^*]$ . Esto demuestra que  $u = v$ , estableciendo la unicidad de la solución.  $\square$

## 4.8 Regularidad de la solución débil

La solución débil  $u$  obtenida mediante el método de Faedo-Galerkin posee una regularidad intrínseca que va más allá de su definición en espacios  $L^p$ . En esta sección, detallamos estas propiedades de continuidad.

**Proposición 4.5. (Continuidad en el Tiempo de las Soluciones Débiles)** *La solución débil  $u$  obtenida en el Teorema 4.3 es fuertemente continua en el tiempo con valores en  $X$ . Es decir:*

$$u \in C([0, T]; X).$$

*Demostración.* Las estimaciones a priori nos dieron que  $u \in L^2(0, T; V)$  y  $u_t \in L^{4/3}(0, T; V')$ . Un resultado clásico de interpolación, a menudo conocido como Lema de Lions-Magenes, establece que estas dos condiciones son suficientes para garantizar la continuidad fuerte en el espacio intermedio  $X$ . Este resultado se puede encontrar en [29, Capítulo III, Lema 1.2] o [11, Sección 5.9.2, Teorema 3]. Esto justifica que la condición inicial  $u(0) = u_0$  se alcance en el sentido fuerte y no solo en un sentido débil.  $\square$

**Proposición 4.6. (Regularidad Adicional para Datos en  $V$ )** *Si el dato inicial es más regular,  $u_0 \in V = (H_0^1(\Omega))^2$ , entonces la solución débil  $u$  obtenida tiene una regularidad mayor:*

- (i)  $u \in L^\infty(0, T^*; V)$  para algún  $T^* > 0$ .
- (ii)  $u \in L^2(0, T^*; H^2(\Omega)^2)$ .
- (iii)  $u_t \in L^2(0, T^*; X)$ .

*Como consecuencia, la solución es fuertemente continua con valores en  $V$ :*

$$u \in C([0, T^*]; V).$$

*Demostración.* Las cotas en  $L^\infty(0, T^*; V)$  y  $L^2(0, T^*; H^2(\Omega)^2)$  se obtienen de la estimación a priori de orden superior, como se detalló en la Subsección 4.4.3.

Una vez que sabemos que  $u \in L^2(0, T^*; H^2(\Omega)^2)$ , el término lineal  $Au = -\nu\Delta u$  pertenece a  $L^2(0, T^*; X)$ . De igual forma, la regularidad  $u \in L^\infty(0, T^*; V)$  es suficiente para demostrar que el término no lineal  $F(u) = -u \cdot \nabla u$  también pertenece a  $L^2(0, T^*; X)$ . De la ecuación  $u_t = Au + F(u)$ , concluimos que  $u_t \in L^2(0, T^*; X)$ .

Finalmente, tenemos la regularidad requerida para aplicar el Lema de Interpolación 2.36. Tomando los espacios  $V_0 = (H^2(\Omega))^2$ ,  $H = V = (H_0^1(\Omega))^2$  y  $V_1 = X = (L^2(\Omega))^2$ , las condiciones

- (i)  $u \in L^2(0, T^*; V_0)$
- (ii)  $u_t \in L^2(0, T^*; V_1)$

implican directamente que  $u \in C([0, T^*]; H)$ , es decir,  $u \in C([0, T^*]; V)$ .  $\square$

**Observación 4.6.** La regularidad adicional  $u \in C([0, T^*]; V)$  obtenida cuando  $u_0 \in V$  es importante porque, como veremos en la siguiente sección, implica que la solución débil construida por Faedo-Galerkin coincide con la solución integral (mild) obtenida por semigrupos en el Capítulo 3.

## 4.9 Conexión entre soluciones débiles, integrales y clásicas

En los Capítulos 3 y 4, hemos demostrado la existencia de soluciones para la ecuación de Burgers 2D utilizando dos enfoques distintos: el método de semigrupos (que conduce a soluciones integrales) y el método de Faedo-Galerkin (que proporciona soluciones débiles). En esta sección, establecemos las relaciones entre estos tipos de soluciones.

### 4.9.1 Soluciones Débiles vs. Soluciones Integrales

Recordemos que una solución integral satisface la ecuación de Duhamel, mientras que una solución débil satisface la formulación variacional. La conexión es la siguiente:

**Teorema 4.7.** *Si  $u$  es una solución débil de la ecuación de Burgers que satisface la regularidad adicional  $u \in C([0, T]; V)$ , entonces  $u$  es también una solución integral. En particular, si  $u_0 \in V$ , la solución débil obtenida por el método de Faedo-Galerkin es una solución integral.*

*Demostración.* Sea  $u$  una solución débil con  $u \in C([0, T]; V)$ . La formulación débil implica que  $u_t = Au + F(u)$  en  $V'$  para c.t.p.  $t$ , donde  $A = -\nu\Delta$  y  $F(u) = -u \cdot \nabla u$ . Como  $u \in C([0, T]; V)$  y el operador  $F : V \rightarrow X$  es continuo (Proposición 3.1), la función  $t \mapsto G(t) = F(u(t))$  pertenece a  $C([0, T]; X)$ .

El problema de Cauchy abstracto  $w' = Aw + G(t)$  con  $w(0) = u_0$  tiene una única solución integral  $w$  dada por la fórmula de Duhamel. Como la solución débil  $u$  satisface la misma ecuación abstracta y condición inicial, y tiene la regularidad necesaria, por unicidad de la solución integral se debe tener que  $u = w$ . Por lo tanto,  $u$  satisface la fórmula de Duhamel.  $\square$

### 4.9.2 Soluciones integrales vs. soluciones clásicas

La regularidad del dato inicial determina si una solución integral (o débil) es también una solución clásica.

**Teorema 4.8.** *Si el dato inicial  $u_0$  es suficientemente regular (e.g.,  $u_0 \in D(A)$ ), entonces la solución integral (y por tanto la solución débil) de la ecuación de Burgers es una solución clásica.*

*Demostración.* La demostración se basa en las propiedades de regularización del semigrupo analítico. Como se mostró en el Teorema 3.4, si  $u_0 \in D(A)$ , la solución integral única  $u$  pertenece a  $C([0, T^{**}]; D(A)) \cap C^1([0, T^{**}]; X)$ , lo que coincide con la definición de una solución clásica.  $\square$

### 4.9.3 Comparación de los enfoques: semigrupos vs. Faedo-Galerkin

A continuación, se presenta un diagrama y una tabla que resumen las relaciones entre los espacios de datos iniciales y los tipos de soluciones obtenidas con cada método.

**Tabla 4.1.** Comparación de los enfoques de Semigrupos y Faedo-Galerkin.

| Característica                | Enfoque de Semigrupos<br>(Capítulo 3)                                                                                          | Enfoque de Faedo-Galerkin<br>(Capítulo 4)                                                                                                    |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Tipo de Solución</b>       | Solución <i>integral</i> (mild). Se convierte en solución <i>clásica</i> para $t > 0$ .                                        | Solución <i>débil</i> . Se convierte en solución <i>fuerte</i> si el dato inicial $u_0 \in V$ .                                              |
| <b>Dato Inicial Requerido</b> | Regular, típicamente $u_0 \in V = (H_0^1)^2$ o espacios de mayor regularidad $X_s$ con $s \geq 1/2$ .                          | General, $u_0 \in X = (L^2)^2$ .                                                                                                             |
| <b>Existencia</b>             | <b>Local en tiempo.</b> Se garantiza en un intervalo $[0, T^*)$ donde $T^*$ depende inversamente de la norma del dato inicial. | <b>Global en tiempo.</b> Se garantiza para cualquier $T > 0$ (bajo una condición de dato pequeño o suponiendo el resultado estándar en 2D).  |
| <b>Unicidad</b>               | Garantizada en el espacio de trabajo (e.g., en $C([0, T^*]; V)$ ).                                                             | Garantizada para soluciones regulares (si $u_0 \in V$ ). Para el caso general $u_0 \in L^2$ , es un problema abierto.                        |
| <b>Regularidad Obtenida</b>   | Si $u_0 \in V$ , la solución $u \in C([0, T^*]; V) \cap C^1((0, T^*]; X)$ , y $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$ .                   | Si $u_0 \in L^2$ , la solución $u \in L^\infty(X) \cap L^2(V)$ y $u_t \in L^{4/3}(V')$ . Además, $u \in C([0, T]; X)$ .                      |
| <b>Ventajas</b>               | Marco teórico elegante. Proporciona regularidad instantánea y una fórmula explícita de la solución (Duhamel).                  | Más constructivo (base para métodos numéricos). Funciona para la clase más amplia de datos iniciales ( $L^2$ ). Prueba la existencia global. |
| <b>Desventajas</b>            | Requiere datos iniciales más regulares. La prueba de existencia global no es directa y puede fallar para datos grandes.        | No proporciona una fórmula para la solución. La regularidad es más limitada y debe ser probada por etapas.                                   |

En resumen, ambos enfoques son poderosos y complementarios. El método de semigrupos proporciona soluciones más regulares y una representación integral, mientras que el método de Faedo-Galerkin es más constructivo, es la base de muchos métodos numéricos y permite tratar datos iniciales en  $L^2$ . Si la solución débil tiene suficiente regularidad (si  $u_0 \in V$ ), coincide con la solución integral.



## Capítulo 5

# Experimentación numérica

En este capítulo, utilizaremos la librería FEniCS sobre Python de uso libre para realizar simulaciones numéricas de la ecuación de Burgers 2D (sin incompresibilidad). FEniCS es un conjunto de herramientas de código abierto (open-source) diseñadas para la solución automatizada de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) mediante el método de elementos finitos (MEF).

### 5.1 Introducción a FEniCS

Antes de detallar la implementación, es pertinente introducir brevemente la herramienta computacional seleccionada. Se ha optado por FEniCS debido a su alto nivel de abstracción, que permite traducir la formulación matemática variacional a código de una manera directa y eficiente. Para mayor detalle sobre FEniCS ver [34], [20].

#### 5.1.1 ¿Qué es FEniCS?

FEniCS se distingue por su alto nivel de abstracción y su enfoque en la forma variacional (formulación débil) de las EDPs. Esto permite a los usuarios expresar el problema matemático de una manera muy cercana a su formulación matemática, delegando a FEniCS las tareas de bajo nivel, como la generación de mallas, el ensamblaje de matrices y vectores, y la resolución de los sistemas lineales o no lineales resultantes. Algunas de las ventajas clave de FEniCS son:

- **Facilidad de uso:** FEniCS proporciona una interfaz de alto nivel (en Python o C++) que permite escribir código conciso y legible, muy cercano a la notación matemática.
- **Automatización:** FEniCS automatiza muchas de las tareas tediosas y propensas a errores asociadas con el MEF, como la generación de mallas y el ensamblaje de matrices.

- **Flexibilidad:** FEniCS es altamente flexible y permite a los usuarios elegir entre una variedad de elementos finitos, solucionadores lineales y no lineales, y esquemas de discretización temporal.
- **Extensibilidad:** FEniCS es de código abierto y está diseñado para ser extensible. Los usuarios pueden añadir sus propios elementos finitos, solucionadores, etc.
- **Comunidad activa:** FEniCS cuenta con una comunidad activa de usuarios y desarrolladores que proporcionan soporte y contribuyen al desarrollo del proyecto.

FEniCS se compone de varios componentes, cada uno con una función específica:

- **DOLFIN:** Es la interfaz principal de C++/Python para FEniCS. Proporciona las estructuras de datos para mallas, espacios de funciones, formas variacionales, etc., y los algoritmos para ensamblar y resolver los sistemas lineales y no lineales.
- **FFC (FEniCS Form Compiler):** Es el compilador de formas. Toma la formulación débil de una EDP (expresada en UFL, ver más adelante) y genera código C++ optimizado para el ensamblaje de las matrices y vectores.
- **FIAT (Finite Element Automatic Tabulator):** Se encarga de generar la base de funciones para una variedad de elementos finitos.
- **UFL (Unified Form Language):** Es un lenguaje de dominio específico (DSL) integrado en Python que permite expresar la formulación débil de una EDP de forma muy cercana a la notación matemática.

**Observación 5.1.** En este documento, utilizaremos la interfaz de Python de FEniCS, que es más intuitiva y adecuada para la experimentación rápida.

### 5.1.2 Recursos para Aprender FEniCS

Para las personas nuevas en FEniCS, algunos recursos útiles para aprender a usarlo son los siguientes:

- **Documentación oficial:** <https://fenicsproject.org/documentation/>
- **El tutorial de FEniCS:** <https://fenicsproject.org/pub/tutorial/> (altamente recomendado para empezar).
- **El libro de FEniCS:** *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method* ([20]). Este libro es una referencia completa sobre FEniCS.

En las siguientes secciones, presentaremos el código FEniCS para resolver la ecuación de Burgers 2D, explicando cada paso en detalle.

## 5.2 Implementación del Esquema Numérico

En esta sección, se detalla el proceso para traducir el problema teórico a un esquema computacionalmente resoluble. Partiremos de la formulación variacional continua para luego discretizarla tanto en el tiempo como en el espacio, obteniendo así un sistema de ecuaciones no lineales que puede ser resuelto numéricamente en cada paso de tiempo.

### 5.2.1 Discretización de la Formulación Variacional

Para la implementación numérica, partimos de la formulación variacional del problema: encontrar  $u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; X)$  tal que  $u(0) = f$  y para casi todo  $t \in (0, T)$ , se satisface

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) = 0, \quad \text{para todo } v \in V,$$

donde  $(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx$ ,  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx$  y  $b(w, u, v) = \int_{\Omega} (w \cdot \nabla u) \cdot v \, dx$ .

Primero, discretizamos en el tiempo utilizando el método de Euler implícito (de primer orden). Sea  $\Delta t$  el paso de tiempo y denotemos por  $u^n$  la aproximación de  $u(t_n)$  en el tiempo  $t_n = n\Delta t$ . La derivada temporal se aproxima por  $\frac{d}{dt}(u(t_n), v) \approx (\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v)$ . Sustituyendo en la formulación variacional y evaluando los términos restantes en el tiempo  $t_n$ , obtenemos la formulación semidiscreta: encontrar  $u^n \in V$  tal que

$$\left( \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}, v \right) + \nu a(u^n, v) + b(u^n, u^n, v) = 0, \quad \text{para todo } v \in V.$$

Multiplicando por  $\Delta t$  y reordenando, llegamos a la ecuación no lineal que debe resolverse en cada paso de tiempo:

$$(u^n, v) + \nu \Delta t a(u^n, v) + \Delta t b(u^n, u^n, v) = (u^{n-1}, v), \quad \text{para todo } v \in V.$$

A continuación, discretizamos en el espacio. Sea  $V_h \subset V$  un subespacio de elementos finitos de dimensión finita (por ejemplo, elementos de Lagrange continuos). El problema completamente discreto consiste en: dado  $u_h^{n-1} \in V_h$ , encontrar  $u_h^n \in V_h$  tal que

$$(u_h^n, v_h) + \nu \Delta t a(u_h^n, v_h) + \Delta t b(u_h^n, u_h^n, v_h) = (u_h^{n-1}, v_h), \quad \text{para todo } v_h \in V_h. \quad (5.1)$$

Esta es la formulación débil discreta que implementaremos.

### 5.2.2 Resolución del sistema no lineal (Método de Newton)

La formulación débil discreta (5.1) es no lineal debido al término convectivo  $u_h^{n+1} \cdot \nabla u_h^{n+1}$ . Para resolver este sistema no lineal, utilizaremos el método de Newton. En cada paso de tiempo, el método de Newton resuelve un problema linealizado, donde la linealización se realiza en torno a una aproximación de la solución.

Definimos la forma variacional no lineal  $F(u; v)$  como:

$$F(u; v) = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx + \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \, dx + \Delta t \int_{\Omega} (u \cdot \nabla u) \cdot v \, dx - \int_{\Omega} u^n \cdot v \, dx. \quad (5.2)$$

El problema no lineal consiste en encontrar  $u_h^{n+1} \in V_h$  tal que  $F(u_h^{n+1}; v) = 0$  para toda  $v \in V_h$ . El método de Newton genera una sucesión de aproximaciones  $u_h^{n+1,k}$  (donde  $k$  es el índice de la iteración de Newton) que convergen a  $u_h^{n+1}$ . En cada iteración, se resuelve un problema linealizado. La forma variacional linealizada (el Jacobiano) se obtiene calculando la derivada de Fréchet de  $F$  con respecto a  $u$ :

$$\begin{aligned} J(u; \delta u, v) &= \frac{\partial F(u; v)}{\partial u}(\delta u) \\ &= \int_{\Omega} \delta u \cdot v \, dx + \nu \Delta t \int_{\Omega} \nabla \delta u : \nabla v \, dx + \Delta t \int_{\Omega} (\delta u \cdot \nabla u) \cdot v \, dx + \Delta t \int_{\Omega} (u \cdot \nabla \delta u) \cdot v \, dx. \end{aligned}$$

El método de Newton se formula entonces como sigue:

(I) **Inicialización:**  $u_h^{n+1,0} = u_h^n$ .

(II) **Iteración:** Para  $k = 0, 1, 2, \dots$  hasta convergencia:

(i) Resolver el problema lineal: Encontrar  $\delta u_h \in V_h$  tal que:

$$J(u_h^{n+1,k}; \delta u_h, v) = -F(u_h^{n+1,k}; v), \text{ para todo } v \in V_h.$$

(ii) Actualizar la solución:  $u_h^{n+1,k+1} = u_h^{n+1,k} + \delta u_h$ .

(iii) Verificar convergencia: Si  $\|\delta u_h\|$  (en alguna norma adecuada) es menor que una tolerancia dada, parar. Si no, incrementar  $k$  y repetir.

### 5.2.3 Implementación en FEniCS

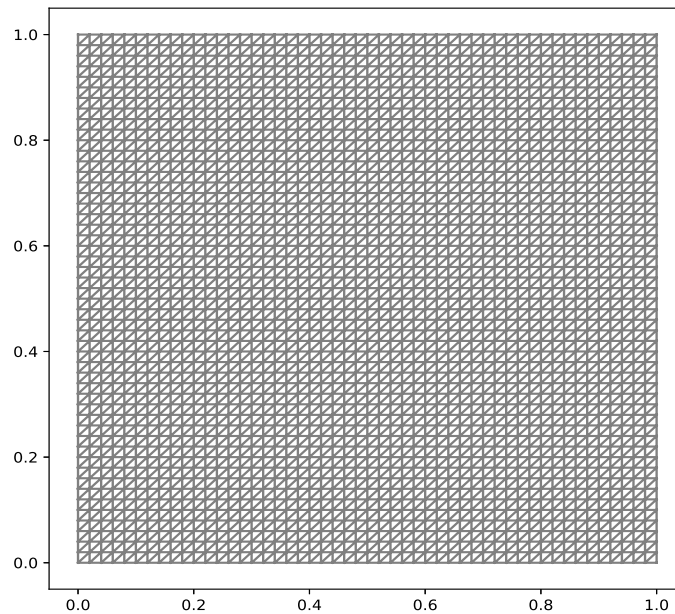
Ahora, presentamos algunos detalles más importantes en la implementación que se realizó usando la librería FEniCS (usando la interfaz de Python) de la formulación débil discreta y el método de Newton para aproximar las soluciones del sistema (1.1).

```
from dolfin import *
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir una malla en forma rectangular
nx = ny = 50
mesh = RectangleMesh(Point(0, 0), Point(1, 1), nx, ny)
```

**Código 5.1.** Definición del Dominio y la Malla

Este código crea una malla de un cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$ , dividida en  $50 \times 50$  celdas triangulares (ver Figura 5.1).



**Figura 5.1.** Triangulación del dominio computacional.

```
# Definir espacios de funcion (Elementos de Lagrange de orden 1)
V = VectorFunctionSpace(mesh, 'P', 1) # o ("CG", 1)
```

**Código 5.2.** Definición de los espacios de Elementos finitos

Aquí, definimos el espacio de funciones  $V_h$  como el espacio de funciones vectoriales con componentes que son polinomios de Lagrange continuos de grado 1 (elementos P1).

```
# Funcion de prueba
v = TestFunction(V)      # Funcion de prueba

# Solucion en el paso actual y el siguiente
u = Function(V)          # Solucion actual
u_n = Function(V)        # Solucion del paso anterior
```

**Código 5.3.** Definición de las funciones de prueba y de solución

```
# Definir las fronteras
inflow  = 'near(x[0], 0)'
outflow = 'near(x[0], 1)'
walls   = 'near(x[1], 0) || near(x[1], 1)'

# Define condiciones de Dirichlet en todas las fronteras (u=0)
bcu_inflow = DirichletBC(V, Constant((0, 0)), inflow)
bcu_outflow = DirichletBC(V, Constant((0, 0)), outflow)
bcu_walls   = DirichletBC(V, Constant((0, 0)), walls)

bcu = [bcu_inflow, bcu_outflow, bcu_walls]
```

**Código 5.4.** Definición de las condiciones de frontera

Este código impone condiciones de Dirichlet  $u = (0, 0)$  en toda la frontera del dominio.

```
# Parametros
nu = 0.01
dt = 0.001
T = 1.0
t = 0.0

# Dato inicial
u_0 = Expression(('sin(pi*x[0])*sin(pi*x[1])', '0.0'), degree=1)
u_n.assign(interpolate(u_0, V)) #Inicializamos
```

**Código 5.5.** Definición de los parámetros y dato inicial

```
# Formulacion variacional (No lineal)
F = dot((u-u_n)/dt,v)*dx + nu*inner(grad(u),grad(v))*dx + dot(dot(u,grad
(u)), v)*dx

# Archivo para guardar solucion
xdmffile_u = XDMFFile('velocityBurgers.xdmf')
```

**Código 5.6.** Definición de formulación variacional

Aquí,  $F$  corresponde la formula variacional presentada en (5.2) después de multiplicar por  $\Delta t$  y ubicar el término  $-\int_{\Omega} u^n \cdot v \, dx$  al final.

```
# Bucle en el tiempo
while t < T:
    t += dt
    print(f"t = {t:.3f}")

    J = derivative(F, u)

    # Resolver el problema NO lineal (Metodo de Newton)
    solve(F == 0, u, bcu, J = J)

    # Actualizar la solucion anterior
    u_n.assign(u)

    # Guardar la solucion (para Paraview)
    xdmffile_u.write(u, t)
    plot(u)
    plt.show()

    # Visualizar con matplotlib (opcional)
    if t>0 and int(t/dt) % 5 == 0: #Grafica cada 5 pasos.
    # --- Visualizar la componente x de la velocidad ---

    # Obtener los valores de u[0] en los nodos de la malla:
    u_values = u.vector().get_local()
    u1_values = u_values[:,2] #Componente x

    # Obtener las coordenadas de los nodos de la malla:
    x = mesh.coordinates()[:, 0]
    y = mesh.coordinates()[:, 1]
```

```

# Crear una figura y ejes
fig, ax = plt.subplots()

# Graficar con tricontourf (contornos rellenos)
triangulation = matplotlib.tri.Triangulation(x,y,mesh.cells())
contour = ax.tricontourf(triangulation, u1_values, cmap="viridis")

# Anadir una barra de color
fig.colorbar(contour)

# Configurar etiquetas y titulo
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_title(f"Componente x de la velocidad, t = {t}")

# 7. Mostrar la figura
plt.show()

```

Código 5.7. Bucle temporal e iteración de Picard

**Observación 5.2.** El bucle temporal implementa el esquema de Euler implícito junto con el método de Newton para resolver la ecuación de Burgers no lineal. Aquí tienes una explicación de los pasos clave:

- `while t < T` : Este bucle principal itera sobre el tiempo, avanzando desde  $t = 0$  hasta el tiempo final  $T$  en incrementos de `dt`.
- `solve(F == 0, u, bcu, J=J)` : Resuelve el problema no lineal en cada paso de tiempo, utilizando el método de Newton. Se le pasa la forma variacional no lineal `F`, la incógnita `u`, las condiciones de frontera `bc`, y la Jacobiana `J` (calculada previamente con `derivative(F, u)`).
- `u_n.assign(u)` : Una vez que el método de Newton ha convergido (internamente, FEniCS se encarga de las iteraciones de Newton), la solución actual `u` se copia en `u_n` para ser usada como la solución del paso anterior en el siguiente paso de tiempo.
- `print(f"t = t")` : Imprime el valor actual del tiempo (opcional).
- `xdmffile_u.write(u, t)` : Guarda la solución actual `u` y el tiempo actual `t` en un archivo que puede ser leído por Paraview.
- `plot(u[0])` : Grafica la solución (solo la componente x de la velocidad, en este caso) usando la función `plot` de FEniCS (y matplotlib). La parte de graficación está incluida para visualización, pero se puede comentar si no se desea.

## 5.3 Resultados de la simulación numérica

A continuación, se presenta un caso de estudio para ilustrar el comportamiento del esquema numérico propuesto y la dinámica cualitativa de la solución de la ecuación (1.1). No se

realiza un estudio formal de convergencia, el cual requeriría un análisis cuantitativo sobre una secuencia de mallas refinadas, sino una simulación sobre una configuración fija para observar la evolución de la solución.

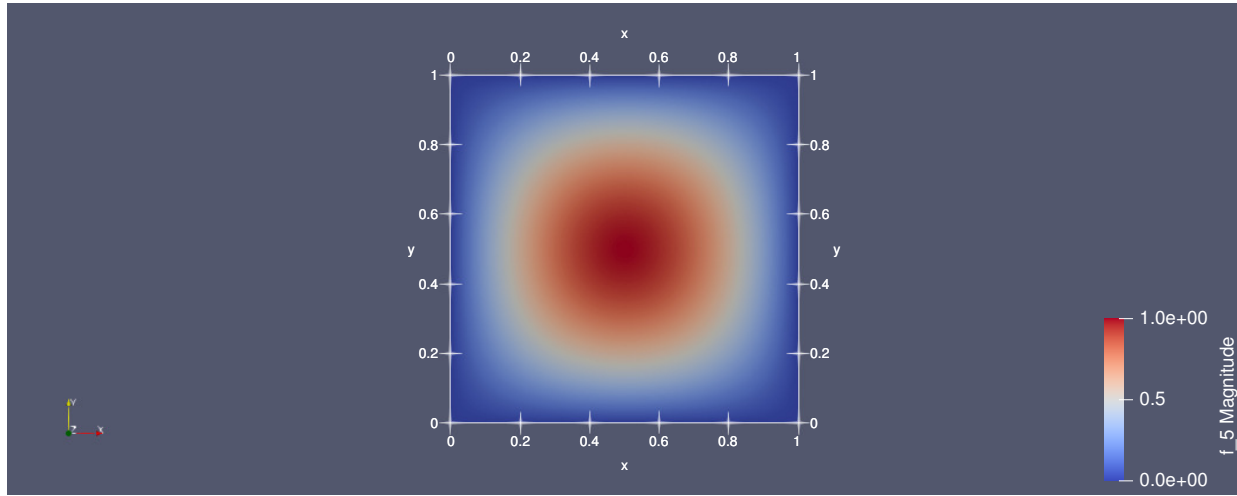
Se considera un dominio cuadrado  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  y el dato inicial

$$u_0(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(\pi y), 0).$$

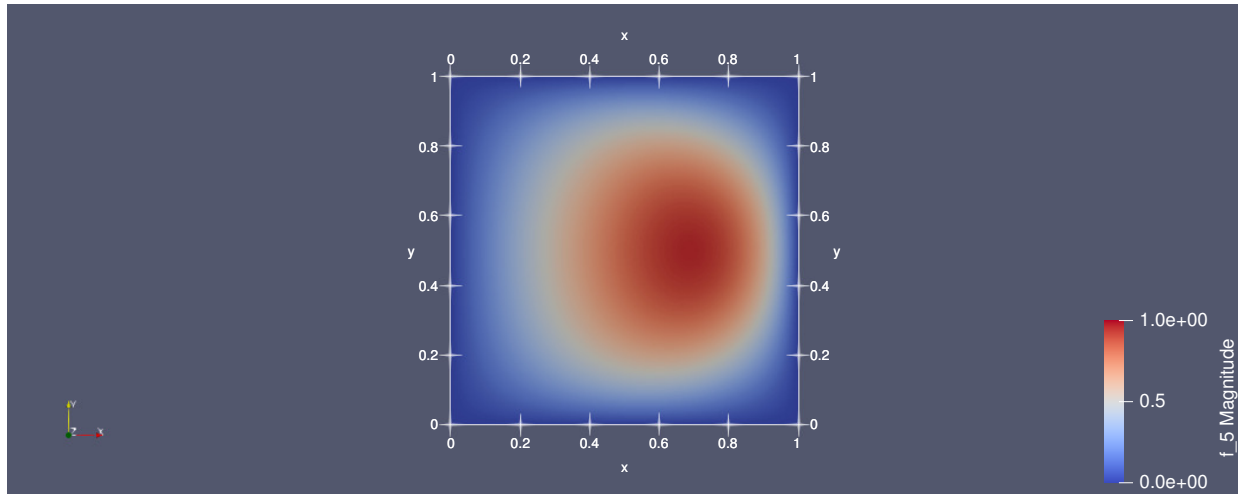
Los parámetros para la simulación son los siguientes: se utiliza una malla triangular con  $50 \times 50$  celdas, elementos finitos de Lagrange de orden 1, un paso de tiempo  $\Delta t = 10^{-3}$ , una viscosidad  $\nu = 0,01$ , y un tiempo final de  $T = 1,0$ .

En las Figuras 5.2 a 5.6, se muestra la evolución del módulo del campo de velocidad,  $|u(x, y, t)|$ , en diferentes instantes de tiempo. Se observa que la solución evoluciona de manera cualitativamente consistente con un proceso de convección-difusión. El perfil inicial (Figura 5.2), centrado en el dominio, es transportado por el propio campo de velocidad (término no lineal  $u \cdot \nabla u$ ) mientras es disipado por el efecto de la viscosidad (término  $\nu \Delta u$ ). Las figuras muestran que la solución respeta en todo momento las condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas, ya que el módulo de la velocidad es nulo en  $\partial\Omega$ .

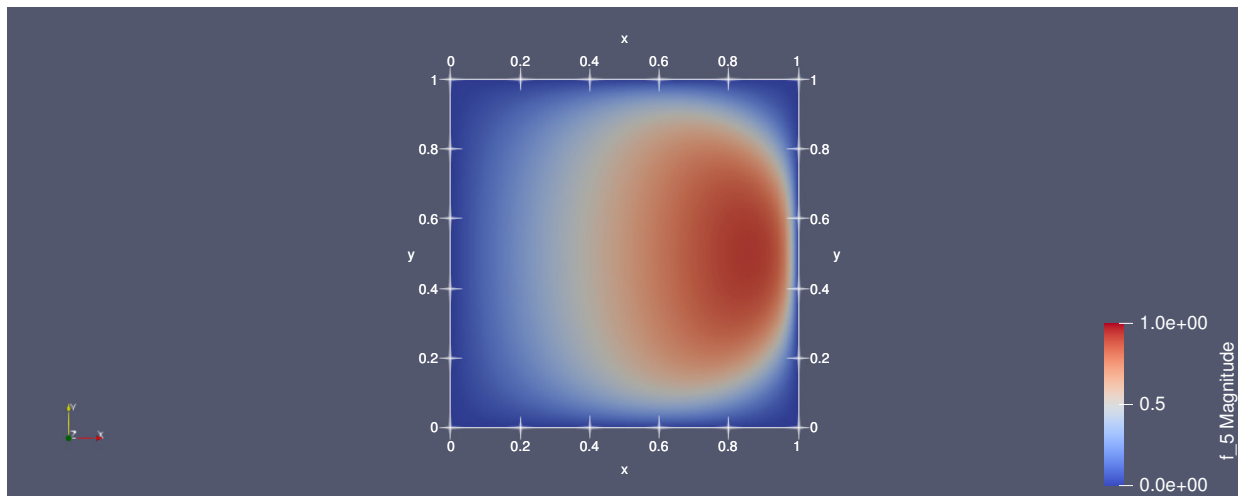
Estos resultados gráficos sugieren que la implementación del método es correcta y que el esquema es estable para los parámetros elegidos, reproduciendo el comportamiento físico esperado. Un análisis cuantitativo de la convergencia y la precisión del método queda propuesto como trabajo futuro.



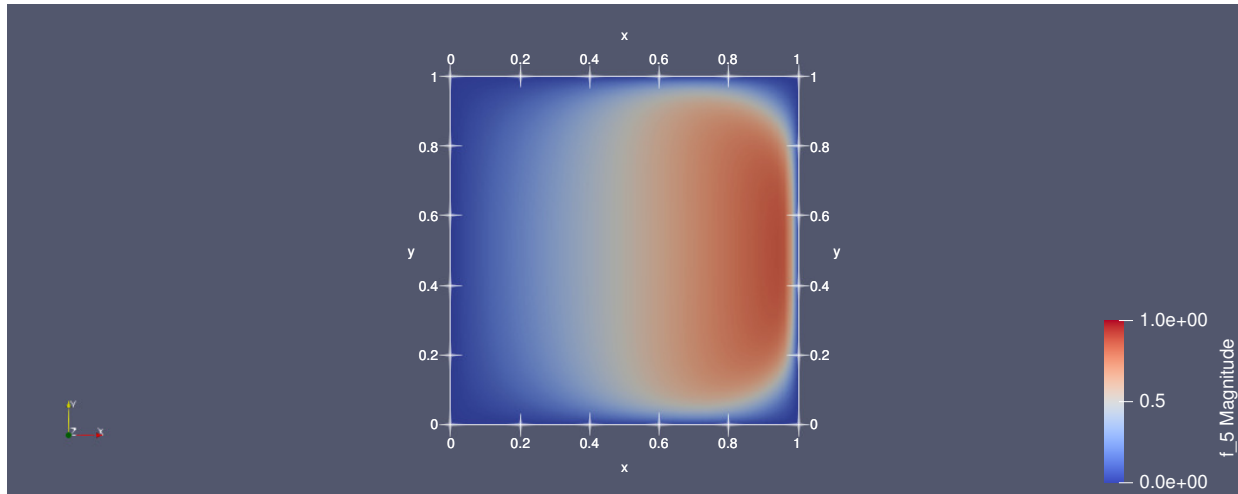
**Figura 5.2.** Módulo del campo de velocidad para  $t = 0$ .



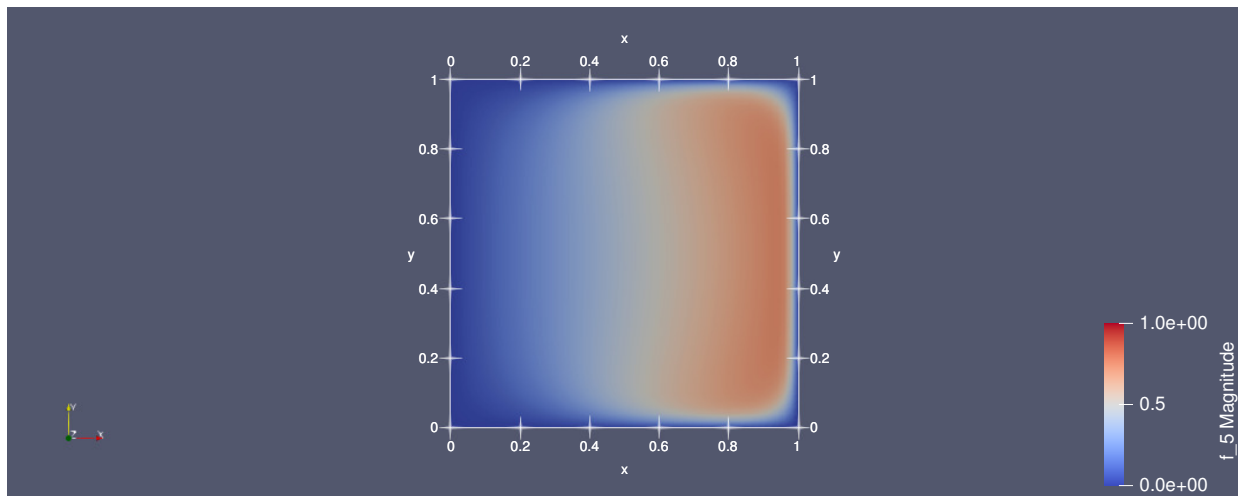
**Figura 5.3.** Módulo del campo de velocidad para  $t = 0,2$ .



**Figura 5.4.** Módulo del campo de velocidad para  $t = 0,4$ .



**Figura 5.5.** Módulo del campo de velocidad para  $t = 0,6$ .



**Figura 5.6.** Módulo del campo de velocidad para  $t = 0,8$ .

# Bibliografía

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *\*Sobolev Spaces\**, Second Edition. Pure and Applied Mathematics, Vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1965. (Reprinted by AMS Chelsea Publishing, 2010).
- [3] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*. Springer, 2010.
- [4] F. Boyer and P. Fabrie, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*. Applied Mathematical Sciences 183, Springer, New York, 2013.
- [5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [6] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations*. Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. 10, 2003.
- [7] P. Constantin and C. Foias, *Navier-Stokes Equations*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1988.
- [8] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [9] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
- [10] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 194. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [11] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2nd edition, 2010.
- [12] J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, New York, 1985.

- [13] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011.
- [14] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840, Springer-Verlag, 1981.
- [15] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*. Reprint of the 1980 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [16] O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, 1969.
- [17] G. Leoni, *A First Course in Sobolev Spaces: Second Edition*. Graduate Studies in Mathematics, 181, American Mathematical Society, 2017.
- [18] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod; Gauthier-Villars, 1969.
- [19] J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1. Dunod, Paris, 1968.
- [20] A. Logg, K.-A. Mardal, and G. N. Wells (Eds.). *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1995 (Reprint of the 1995 edition).
- [22] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1983.
- [23] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis*. Revised and Enlarged Edition. Academic Press, New York, 1980.
- [24] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, New York, 1975.
- [25] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2nd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [26] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. Third Edition. McGraw-Hill, Inc., New York, 1987.
- [27] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations I-III*. Applied Mathematical Sciences, 115-117, Springer, New York, NY, 2nd edition, 2011.
- [28] H. Tanabe, *Equations of Evolution*. Pitman Monographs, 1979.

- [29] R. Temam, *Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*. AMS Chelsea Publishing, 2001.
- [30] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Second Edition. Applied Mathematical Sciences, Vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [31] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience [A Wiley-Interscience Publication], New York, 1999.
- [32] K. Yosida, *Functional Analysis*, sixth ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 123, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [33] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Vol. I-V. Springer-Verlag, 1986-1990.
- [34] M. S. Alnaes, J. Blechta, J. Hake, A. Johansson, B. Kehlet, A. Logg, ... & G. N. Wells. The FEniCS project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 9-23, 2015.
- [35] J. P. Aubin, *Un théorème de compacité*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 256, 5042-5044, 1963.
- [36] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*. Monthly Weather Rev. 43 (1915), 163–170.
- [37] J. M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*. Adv. Appl. Mech. 1 (1948), 171–199.
- [38] L. Caffarelli and A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*. Ann. of Math. (2) 171 (2010), no. 3, 1903–1930.
- [39] A. S. Carasso, *Data Assimilation in 2D Viscous Burgers Equation Using a Stabilized Explicit Scheme Run Backward in Time*. Inverse Problems in Science and Engineering, 29(12) (2021), 2775–2794.
- [40] D. Chae, *On the regularity of the axisymmetric 3D Euler equations*. Nonlinearity 19 (2006), no. 4, 775-780.
- [41] J. D. Cole, *On a Quasi-Linear Parabolic Equation Occurring in Aerodynamics*. Quarterly of Applied Mathematics, 9 (1951), 225–236.
- [42] P. Constantin, *Euler equations, Navier-Stokes equations and turbulence*. Mathematical foundation of turbulent viscous flows, 1–43, Lecture Notes in Math., 1871, Springer, Berlin, 2006.
- [43] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem. I*. Arch. Rational Mech. Anal. 16 (1964), 269-315.
- [44] E. Hopf, *The Partial Differential Equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* . Communications on Pure and Applied Mathematics, 3(3) (1950), 201–230.

- [45] E. Hopf, *Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen*. Math. Nachr. 4, (1951). 213–231.
- [46] T. Kato, *Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in  $\mathbb{R}^3$* . J. Functional Analysis 9 (1972), 296–305.
- [47] A. Kiselev and F. Nazarov, *A variation on a theme of Caffarelli and Vasseur*. Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 370 (2009), Kraevye Zadachi Matematicheskoi Fiziki i Smezhnye Voprosy Teorii Funktsii. 40, 58–72; translation in J. Math. Sci. (N.Y.) 167 (2010), no. 4, 467–474.
- [48] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. Acta Math., 63 (1934), pp. 193–248.
- [49] J. Simon, *Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$* . Annali di Matematica Pura ed Applicata, 146(1), 65–96, 1987.
- [50] F. B. Weissler, Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in  $L^p$ , *Indiana University Mathematics Journal*, **29**(1), (1980), 79–102.
- [51] F. B. Weissler, The Navier-Stokes initial value problem in  $L^p$ , *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **74**(3), (1981), 219–230.