



UN ACERCAMIENTO A LA VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A TRAVÉS DE PATRONES NUMÉRICOS

Jackeline Franco Urrea

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
2018



UN ACERCAMIENTO A LA VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A TRAVÉS DE PATRONES NUMÉRICOS

Jackeline Franco Urrea
Código: 1324474

Director:
Mg. Ligia Amparo Torres Rengifo

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Área de Educación Matemática
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
2018

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN	10
CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO.....	13
1.1 Problemática.....	13
1.2 Objetivos	15
1.2.1 Objetivo General.....	15
1.2.2 Objetivos Específicos	15
1.3 Justificación.....	16
1.4 Antecedentes	17
CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA.....	23
2.1 Perspectiva Curricular	23
2.2 Perspectiva Didáctica	28
2.2.1 Algunas dificultades presentadas en el álgebra	28
2.2.2 Dificultades en la generalización de un patrón.....	29
2.2.3 Dificultades asociadas al concepto de proporcionalidad directa	31
2.2.4 Algunas alternativas de tratamiento de las dificultades en el álgebra	32
2.3 Perspectiva Matemática.....	37
2.3.1 Concepto de función lineal y su relación con la proporcionalidad.....	37
2.3.2 Patrones	38
2.3.2 Proporcionalidad.....	40
CAPÍTULO 3. UN ACERCAMIENTO A LA VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A TRAVÉS DE PATRONES NUMÉRICOS	46
3.1 Sobre el diseño experimental	46
3.1.1 Sobre la Propuesta de Aula.....	46
3.1.2 La propuesta de aula	49
3.2 Sobre la implementación.....	57
3.2.1 La población	57
3.2.2 Metodología de implementación	58
3.2.3 Resultados y análisis de los resultados	59
CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES GENERALES	129
Referencias.....	134
Anexos	142

Lista de Tablas

Tabla 1 Ejemplo de patrón numérico.....	39
Tabla 2 Organización de las Situaciones y Tareas de la Propuesta de aula	48
Tabla 3 Rejilla de análisis	60
Tabla 4 Tipificación S1, T1, P1	62
Tabla 5 Tipificación S1, T1, P2	65
Tabla 6 Tipificación S1, T1, P3	67
Tabla 7 Tipificación S1, T1, P4	69
Tabla 8 Tipificación S1, T2, P1	72
Tabla 9 Tipificación S1, T2, P2	74
Tabla 10 Tipificación S1, T3, P1,	76
Tabla 11 Tipificación S1, T3, P2	78
Tabla 12 Tipificación S1, T3, P3,	80
Tabla 13 Tipificación S1, T3, P4	82
Tabla 14 Tipificación S2, T1, P1	84
Tabla 15 Tipificación S2, T1, P2	85
Tabla 16 Tipificación S2, T1, P3	87
Tabla 17 Tipificación S2, T1, P4	88
Tabla 18 Tipificación S2, T1, P5	90
Tabla 19 Tipificación S2, T1, P6	92
Tabla 20 Tipificación S2, T1, P7	94
Tabla 21 Tipificación S2, T1, P8	96
Tabla 22 Tipificación S2, T2, P1	98
Tabla 23 Tipificación S2, T2, P2	100
Tabla 24 Tipificación S2, T2, P3	102
Tabla 25 Tipificación S2, T2, P4	103
Tabla 26 Tipificación S2, T2, P5	106
Tabla 27 Tipificación S2, T2, P6	107
Tabla 28 Tipificación S2, T2, P7	109
Tabla 29 Tipificación S2, T2, P8	111
Tabla 30 Tipificación S2, T3, P1	115
Tabla 31 Tipificación S2, T3, P2	116
Tabla 32 Tipificación S2, T3, P3	118
Tabla 33 Tipificación S2, T3, P4	119
Tabla 34 Tipificación S2, T3, P5	121
Tabla 35 Tipificación S2, T3, P6	122
Tabla 36 Tipificación S2, T3, P7	124
Tabla 37 Tipificación S2, T3, P8	126
Tabla 38. Relaciones y diferencias entre el pensamiento variacional y el Early Algebra	143
Tabla 39. Resultados generales de la situación 1 Tarea 1.....	145
Tabla 40. Resultados generales de la situación 1 Tarea 2.....	146
Tabla 41. Resultados generales de la situación 1 Tarea 3.....	147
Tabla 42. Resultados generales de la situación 2 Tarea 1.....	148
Tabla 43. Resultados generales de la situación 2 Tarea 2.....	149
Tabla 44. Resultados generales de la situación 2 Tarea 3.....	150

Lista de Figuras

<i>Figura 1.</i> Coherencia vertical y horizontal en relación con los estándares seleccionados a desarrollar en la propuesta. (Adaptado de MEN, 2006).	26
<i>Figura 2.</i> Ejemplo de patrón de repetición. Por Queensland Studies Authority (2005)	38
<i>Figura 3.</i> Ejemplo de patrón pictórico. Por Billings (2008)	39
<i>Figura 4.</i> Aspectos conceptuales que sustentan el diseño de la propuesta de aula.....	46
<i>Figura 5.</i> S1, T1, P1, E3	64
<i>Figura 6.</i> S1, T1, P2, E3	66
<i>Figura 7.</i> S1, T1, P2, E33	66
<i>Figura 8.</i> S1, T1, P3, E29	68
<i>Figura 9.</i> S1, T1, P3, E20	69
<i>Figura 10.</i> S1, T1, P4, E31	71
<i>Figura 11.</i> S1, T2, P1, E3	73
<i>Figura 12.</i> S1, T2, P2, E2	75
<i>Figura 13.</i> S1, T3, P1, E1	77
<i>Figura 14.</i> S1, T3, P1, E28	78
<i>Figura 15.</i> S1, T3, P2, E1	79
<i>Figura 16.</i> S1, T3, P2, E28	79
<i>Figura 17.</i> S1, T3, P3, E7	81
<i>Figura 18.</i> S1, T3, P4, E29	83
<i>Figura 19.</i> S2, T1, P1, E7	85
<i>Figura 20.</i> S2, T1, P2, E12	87
<i>Figura 21.</i> S2, T1, P3, E3	87
<i>Figura 22.</i> S2, T1, P4, E14	89
<i>Figura 23.</i> S2, T1, P4, E23	89
<i>Figura 24.</i> S2, T1, P5, E14	91
<i>Figura 25.</i> S2, T1, P5, E3	91
<i>Figura 26.</i> S2, T1, P6, E34	93
<i>Figura 27.</i> S2, T1, P6, E2	93
<i>Figura 28.</i> S2, T1, P7, E23	95
<i>Figura 29.</i> S2, T1, P7, E2	95

<i>Figura 30.</i> S2, T1, P8, E3	97
<i>Figura 31.</i> S2, T2, P1, E31	99
<i>Figura 32.</i> S2, T2, P2, E11	101
<i>Figura 33.</i> S2, T2, P3, E2	103
<i>Figura 34.</i> S2, T2, P4, E14	105
<i>Figura 35.</i> S2, T2, P4, E2	105
<i>Figura 36.</i> S2, T2, P5, E1	107
<i>Figura 37.</i> S2, T2, P6, E6	108
<i>Figura 38.</i> S2, T2, P6, E19	109
<i>Figura 39.</i> S2, T2, P7, E34	111
<i>Figura 40.</i> S2, T2, P8, E29	113
<i>Figura 41.</i> S2, T2, P8, E27	113
<i>Figura 42.</i> S2, T3, P1, E15	116
<i>Figura 43.</i> S2, T3, P2, E9	117
<i>Figura 44.</i> S2, T3, P2, E21	117
<i>Figura 45.</i> S2, T3, P3, E1	119
<i>Figura 46.</i> S2, T3, P4, E9	120
<i>Figura 47.</i> S2, T3, P5, E7	122
<i>Figura 48.</i> S2, T3, P6, E21	124
<i>Figura 49.</i> S2, T3, P7, E9	126
<i>Figura 50.</i> S2, T3, P8, E9	128

Agradecimientos

A Dios por escucharme y por estar conmigo siempre

A la Universidad del Valle por su apoyo económico y por formarme académica, personal y profesionalmente

A mi tutora Ligia Amparo Torres Rengifo, por su dedicación, orientación, paciencia y por permitirme trabajar a su lado y aprender de sus conocimientos y experiencias

A mis profesores por su entrega y participación en el proceso de formación profesional

A mis padres y hermanos, por el amor, por el apoyo incondicional en mi proceso académico y por hacer posible mi formación profesional, enseñándome que la perseverancia y el esfuerzo son el camino para alcanzar las metas

A mis amigas de la residencia por su ayuda incondicional, por darme ánimos para continuar en este proceso

Y por último, a todas las personas que de una manera u otra estuvieron a mi lado en los diferentes momentos de esta etapa.

Resumen

El siguiente trabajo de grado presenta un acercamiento a conceptos y procesos relacionados con el álgebra (la generalización, las variables, relación de dependencia entre variables, la constante) en estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Veinte de Julio, a partir de una propuesta de aula sobre patrones numéricos de variación directamente proporcional, la cual está conformada por dos situaciones que integran aspectos de la propuesta curricular de los Estados Unidos, conocida como Early Algebra y los aspectos del marco conceptual de referencia, es decir, lo curricular, matemático y didáctico. La propuesta de aula fue implementada en cinco sesiones cuyos resultados y análisis de resultados, permiten inferir que los estudiantes de este ciclo de escolaridad, encuentran cualquier término de la secuencia numérica que se les propone, y algunos logran representar de diversas maneras los patrones propuestos, ya sea por medio del lenguaje natural o símbolos. Por otra parte, se puede decir que los estudiantes identifican relaciones entre las cantidades involucradas, lo cual les lleva a reconocer la razón como una relación entre parejas de números y no como una fracción o resultado de una división. Además, el trabajo de la proporcionalidad directa a través de patrones numéricos permite a los estudiantes la construcción de generalidades, a partir del estudio de casos particulares.

Palabras claves: Early Algebra, Pensamiento Variacional, Generalización, Patrones numéricos, Proporcionalidad directa.

Abstract

The following degree work presents an approach to concepts and processes related to algebra (generalization, variables, dependency ratio between variables, constant) in fifth grade students of the Educational Institution Twenty of July, from a Classroom proposal on numerical patterns of proportional variation, which is made up of two situations that integrate aspects of the curricular proposal of the United States, known as Early Algebra and the conceptual aspects of reference, that is, the curricular, didactic mathematics. The implementation proposal was implemented in five sessions whose results and analysis of results, allowed inferring that the students of this schooling cycle, or any other term of the numerical sequence, that is offered to them, and achieved in another way, the proposed patterns, either through natural language or symbols. On the other hand, it can be said that students identify the relationships between the quantities involved, which results in the relationship between pairs of numbers and not as a fraction or the result of a division. In addition, the work of direct proportionality through numerical patterns allows students to construct generalities, based on the study of particular cases. **Keywords:** Early algebra, Variational thinking, Generalization, Numerical patterns, Direct proportionality.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado que se inscribe en la Línea de formación en Didáctica de las Matemáticas, del Programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Universidad del Valle.

Este trabajo de grado nace como una motivación para favorecer un acercamiento a conceptos y procesos relacionados con el álgebra escolar, en estudiantes de grado quinto de la Educación Básica Primaria de una Institución Educativa Oficial de Cali, a través de una propuesta de aula basada en el enfoque Early Algebra y el pensamiento variacional.

Para esta propuesta se tienen en cuenta algunas investigaciones en Early Algebra (Kaput, Carraher & Blanton, 2008; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; Carraher & Schliemann, 2007; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2000), ya que estas reconocen que se puede construir el álgebra a través de la aritmética desde edades tempranas, para que los estudiantes tengan un conocimiento algebraico cuando estén en la secundaria. Una manera de hacerlo es a través del estudio de la generalización de patrones numéricos, aunque otros investigadores (Obando & Botero, 2006; Obando, Vanegas & Vásquez, 2006) consideran que la proporcionalidad directa es un concepto que permite estudiar aspectos del pensamiento numérico y variacional por la existencia de correlación de dos o más variables.

Respecto a la organización del trabajo de grado, este se realiza de la siguiente manera: en el primer capítulo se presenta la problemática, los objetivos, la justificación y los antecedentes. Ahora bien, el problema está basado en algunas dificultades que reportan distintas investigaciones, respecto a la transición de la aritmética al álgebra escolar, y la importancia de afrontar dichas dificultades a través de un acercamiento a conceptos y procesos relacionados con el álgebra escolar en estudiantes de la Educación Básica Primaria.

En el segundo capítulo se expone el marco conceptual de referencia, el cual documenta la problemática y es la base para el diseño de la propuesta de aula. El marco conceptual de referencia se organiza en tres perspectivas de análisis: la Perspectiva Curricular, Didáctica y Matemática.

En el tercer capítulo se presenta la propuesta de aula, se describe la metodología e implementación de esta, los resultados y análisis de resultados, en el que se relaciona el marco

conceptual de referencia con el diseño e implementación; además, se presentan algunas conclusiones de la implementación, también se hace el análisis de algunos estudiantes, sobre sus desarrollos o avances, a través del trabajo de la propuesta.

Lo anterior, se realiza con el propósito de caracterizar algunos desarrollos conceptuales y procedimentales relacionados con el álgebra escolar (la generalización, la variación lineal, las variables, correlación entre variables, entre otros) en estudiantes de grado quinto de Primaria, de una Institución Educativa en particular.

En el cuarto capítulo del trabajo, se examinan los resultados presentados en el capítulo tres, con el fin de validar o refutar la pregunta problema y los objetivos del trabajo.

Por último, se presentan las referencias bibliográficas de todos los autores y textos que sirvieron de apoyo para la construcción de este documento; y en los anexos se exponen las relaciones y diferencias entre dos propuestas curriculares y los desarrollos de los estudiantes.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DEL TRABAJO

En este capítulo se abordan los aspectos generales que estructuran el trabajo, de este modo, se presenta la problemática que se basa en algunas dificultades que reportan distintas investigaciones en torno a la transición de la aritmética al álgebra, y la importancia de introducir conceptos relacionados con el álgebra en los primeros ciclos de escolaridad. También se encuentran en este capítulo, los objetivos de la investigación, tanto el general como los específicos, la justificación que pretende dar cuenta de la importancia de este trabajo en la educación matemática y en la formación docente y por último se reportan algunos antecedentes que giran en torno al desarrollo del álgebra en los primeros ciclos de la escolaridad.

1.1 Problemática

Algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas (Booth, 1984; Gallardo & Rojano, 1988; Palarea & Socas, 1994; Grupo Azarquiel, 1994; Kieran, 1992/1995; Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996; Palarea, 1998; Socas, 1997, 2007, Godino & Font, 2003) han identificado dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Estas investigaciones mencionan que las dificultades pueden ser causadas por las actitudes afectivas y emocionales de los estudiantes hacia el álgebra por la naturaleza de esta, por la organización del currículo y la manera como se enseña y se concibe dicha rama de la matemática.

En relación con las dificultades asociadas a la naturaleza del álgebra, los investigadores mencionados consideran que estas se presentan cuando es imposible utilizar conocimientos o procedimientos que han sido útiles por un tiempo, y que en otro contexto estos son inadaptables o inadecuados. Por ejemplo, en la aritmética los dígitos representan la cantidad, las operaciones se realizan con datos conocidos y el resultado es un dato específico o un número, pero en álgebra se opera tanto con datos conocidos como con datos desconocidos (incógnitas), estos últimos suelen representarse con letras y se manipulan como si fueran conocidos.

De acuerdo con las investigaciones referenciadas, las dificultades asociadas a la naturaleza del álgebra, se manifiestan en los alumnos en errores procedimentales, errores en el uso de «métodos aritméticos informales» en problemas algebraicos, o por las características propias del lenguaje algebraico. Estos tres pueden presentarse de varias maneras, como se menciona a continuación.

Errores en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, errores por considerar que el valor de x es siempre positivo y para que sea negativo se deberían escribir $-x$, errores causados por la naturaleza y significado de los símbolos, como por ejemplo con el signo igual; ya que los estudiantes trasladan al álgebra significados aritméticos para este; por ejemplo cuando asumen que lo que está a la izquierda del signo igual es una operación y lo que está a la derecha es el resultado de esta, ($5 + 3 = 8$ pero $5x + 3y$ no es igual a 8 ni $8xy$) y respecto a las diversas interpretaciones de las letras, comúnmente los estudiantes solamente las conciben como números u objetos. Todo lo anterior puede generar interpretaciones erróneas y dificultades en la formulación y resolución de ecuaciones.

Ahora bien, algunos autores dicen que muchas de las dificultades y errores en secundaria con el álgebra, como las mencionadas anteriormente, radican en la manera como está estructurado y organizado el currículo y cómo los docentes conciben y enseñan el álgebra.

Según Martin Kindt (1980, citado por Castro & Molina, 2007) los problemas en la enseñanza del álgebra, tienen su origen en la falta de atención puesta al razonamiento y la generalización, y el salto demasiado rápido desde la aritmética al álgebra.

En Colombia por ejemplo, algunos docentes hacen una ruptura entre el pensamiento variacional y el pensamiento numérico porque no consideran ningún nexo o elemento de relación entre ambos tipos de pensamiento. “El álgebra es un paquete separado que se inicia una vez que se haya terminado la lista de contenidos que (supuestamente) corresponden al programa de aritmética” (Agudelo, C. en Mason, Graham, Pimm, & Gowar, 1985/1999, p. viii). Esta situación difiere con lo que plantea el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, 2006).

Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) proponen que desde la perspectiva del pensamiento variacional se puede superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados, porque este tipo de pensamiento incluye elementos de los demás tipos de pensamiento (numérico, espacial, métrico y aleatorio) y además se puede trabajar desde los primeros grados de la Educación Básica Primaria, a través de actividades de generalizaciones de secuencias o sucesiones de figuras, números o letras. Pero los docentes de primaria solo se concentran en las respuestas del cálculo de operaciones aritméticas, sin considerar las cantidades y las relaciones de las

expresiones utilizadas (Resnick, citado por Molina, 2006). Lo cual proviene de una concepción muy cerrada acerca del álgebra por parte de los docentes.

Finalmente, se puede decir que por la manera como los docentes conciben y enseñan el álgebra, y por las dificultades que presentan los adolescentes en esta área, algunos investigadores (Kaput, 2008; Molina, 2006; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; Carraher & Schliemann 2007) han considerado la posibilidad de ir construyendo el álgebra a través de la aritmética desde la educación primaria.

Sobre la base de las ideas expuestas anteriormente, en este trabajo se indaga sobre:

¿Cómo a partir de la implementación de una propuesta de aula sobre patrones numéricos de variación proporcional, basada en la perspectiva del Early Algebra y el pensamiento variacional, se puede acercar a los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Veinte de Julio, a conceptos y procesos relacionados con el álgebra (la generalización, las variables, relación de dependencia, la constante entre otros)?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Favorecer el acercamiento a los conceptos y procesos relacionados con el álgebra (la generalización, las variables, relación de dependencia, la constante entre otros), en estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Veinte de Julio, a través de una propuesta de aula sobre patrones numéricos de variación directamente proporcional, basada en la perspectiva del Early Algebra y el pensamiento variacional.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Determinar referentes matemáticos, curriculares y didácticos, para el diseño de una propuesta de aula desde la perspectiva del Early Algebra y el pensamiento variacional.
- Articular en una propuesta de aula sobre la generalización de patrones numéricos de variación directamente proporcional, los referentes conceptuales identificados.
- Caracterizar algunos desarrollos conceptuales y procedimentales relacionados con el álgebra, en los estudiantes de grado quinto de Primaria de la Institución Educativa Veinte de Julio, a través de la implementación de la propuesta de aula.

1.3 Justificación

Aunque algunas investigaciones han detectado las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, estas siguen presentes en la escuela colombiana, por esto se considera que la problemática propuesta en este trabajo sigue vigente y esto se puede comprobar por ejemplo con los resultados de las diferentes pruebas, tanto nacionales como internacionales, las cuales muestran que los estudiantes en esta área no logran alcanzar los niveles superiores.

A nivel internacional, las pruebas TIMSS 2007, muestran que “en matemáticas, más de las dos terceras partes de los estudiantes colombianos tienen dificultades en el manejo de los conocimientos básicos” (Fernandes, I., Cervantes, V., & Lopera, C., 2010, p. 21). En las pruebas PISA 2012 de matemáticas, “7 de cada 10 estudiantes colombianos se desempeñan por debajo del nivel 2” (Bos, M., Ganimian, A., Vegas, E., & Álvarez, H., 2014, p. 2).

A nivel nacional, las pruebas Saber 3°, 5° y 9° en el área de matemáticas, muestran que el 43% de los estudiantes colombianos están en el nivel insuficiente, es decir, los estudiantes no logran desarrollar las preguntas de menor complejidad, y el 29% de la población se ubica en el nivel mínimo, correspondiente a los estudiantes que responden la prueba con conceptos y procedimientos muy básicos (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2017), así pues la mayoría de los estudiantes colombianos siguen teniendo dificultades en el área de matemáticas.

Además de lo anterior, la enseñanza de la matemática en la educación primaria, pareciera estar enfocada más hacia lo procedimental y memorístico que hacia el proceso de generalización, el cual es un aspecto importante e inseparable del álgebra (Kaput, Carraher & Blanton, 2008).

Ahora bien, en este trabajo, además de tener en cuenta los aspectos del pensamiento variacional (MEN, 1998, 2006) se quiere considerar una propuesta curricular de los Estados Unidos, conocida como Early Algebra, cuya intención es construir bases sólidas en el álgebra en estudiantes de los primeros cursos, a través de situaciones problemas que motivan a la generalización; lo cual es algo que el Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) también propone, pero en ocasiones los docentes de primaria parecieran no acoger.

Ahora bien, los investigadores del Early Algebra consideran que las actividades de descubrir patrones pueden ser enriquecedoras para que los estudiantes hagan conjeturas acerca de la regla

que puede generar la serie (Carraher & Schliemann, 2007), lo cual es algo a lo que se quiere apuntar en este proyecto, que a partir de la generalización y simbolización de patrones numéricos de variación proporcional, los estudiantes logren un acercamiento a conceptos y procesos relacionados con el álgebra (la generalización, las variables, correlación entre variables, la constante, la función lineal, entre otros).

Otro aspecto importante tiene que ver con la importancia de la proporcionalidad directa en la enseñanza de las matemáticas, esta ha sido considerada como un posible puente entre el álgebra y la aritmética, porque conlleva a la conceptualización de la función lineal a través del estudio de la correlación entre dos o más cantidades que varían (Obando & Botero, 2006).

Este trabajo presenta una propuesta de actividades y situaciones relacionadas con el pensamiento variacional, con ayuda de patrones numéricos que tienen una variación proporcional, considerando la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (2006). "Es conveniente que las situaciones de aprendizaje propicien (...) el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional" (p. 54). Y así intentar reducir la brecha entre el pensamiento numérico y el pensamiento variacional que la escuela pareciera imponer.

Se espera aportar una reflexión en la incorporación de elementos curriculares, conceptuales y didácticos en el diseño de propuestas de aula, con el fin que docentes de matemáticas y maestros en formación se apropien de esta herramienta.

Además de esto, se quiere realizar una contribución a la enseñanza de un concepto matemático que favorece el paso de la aritmética al álgebra, como lo es la proporcionalidad directa.

1.4 Antecedentes

En esta sección se presentan algunas de las investigaciones locales, nacionales e internacionales que han realizado diferentes autores con respecto al estudio de la proporcionalidad, la introducción del enfoque del Early Algebra y la generalización de patrones, con estudiantes de la Educación Básica primaria.

A nivel local se revisaron las siguientes investigaciones.

El trabajo de Moreno (2015), propone el álgebra temprana (Early Algebra) como una alternativa para superar dificultades que presentan los estudiantes por el corte didáctico entre la aritmética y el álgebra. Teniendo en cuenta esto, diseña una secuencia de tareas matemáticas dirigida a estudiantes de grado tercero de primaria en una escuela pública de la Ciudad de Santiago de Cali, Colombia; enfocada en el trabajo con patrones numéricos.

De la implementación y análisis de la secuencia se concluye que los estudiantes desarrollaron los procesos de generalización propuestos por Mason et al. (1985/1999) el “ver” “decir” y “registrar” un patrón, expresándolo por medio del lenguaje natural o numérico verbal. Además de ello, los estudiantes se familiarizaron con las representaciones tabulares y las adoptaron como una forma de construir el patrón numérico o pictórico.

Por otra parte, Rivera & Sánchez (2013) diseñaron una secuencia didáctica que involucraba situaciones problema sobre multiplicación de naturales a través de patrones y variaciones numéricas, la cual se implementó a estudiantes de grado tercero de primaria de un colegio privado de la Ciudad de Santiago de Cali, Colombia.

Del análisis de los resultados obtenidos, se concluye que el uso de tablas permitió a los estudiantes identificar y establecer relaciones entre cantidades, favoreciendo el reconocimiento del patrón, también los estudiantes desarrollaron sin dificultad dos etapas propuestas por Mason (1985/1999), es decir, el “ver” y “el decir” un patrón, a través de su visualización y expresión de manera oral o escrita, aunque varios estudiantes se aproximaron al registro simbólico usando letras como variables, o como un número generalizado, probando con varios números particulares la validez de cierta relación.

Finalmente a nivel local Guacaneme (2001) en su trabajo de maestría realiza un análisis de algunos textos escolares de matemáticas de grado séptimo para identificar la manera como son descritos los conceptos de razón, proporción, magnitudes directa e inversamente proporcionales. De este análisis se concluye que la razón, la proporción y la proporcionalidad tienen un tratamiento aritmético en los textos escolares. Se trata la razón como un número y la proporción como la igualdad entre dos números racionales y que los dos tipos de proporcionalidad están ligados a las condiciones de correlación las cuales no son suficientes para definirlas.

A nivel nacional, la investigación doctoral de Vergel (2014) considera que de acuerdo con Radford (2010), la zona de emergencia del pensamiento algebraico ha permanecido ignorada por la obsesión de reconocer el álgebra solo como lo simbólico, por ello se propone indagar en los tipos de pensamiento algebraico temprano en 13 estudiantes de cuarto y quinto grado de primaria en un colegio público de Bogotá-Colombia, a partir de tareas sobre generalización de patrones.

Unas de las conclusiones de este trabajo es que los alumnos lograron hacer una generalización algebraica de patrones, a partir de la identificación de una característica común, lo cual les permitió deducir una fórmula o regla para hallar el valor de cualquier figura y que además los recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son esenciales en la construcción del pensamiento algebraico temprano.

A nivel internacional se encuentran diferentes investigaciones de las cuales se revisaron las siguientes.

Radford (2011) realizó una investigación longitudinal de 3 años con estudiantes de 8 años de edad, cuando estaban en segundo, tercero y cuarto de primaria, analizando el desarrollo del pensamiento algebraico y las nuevas relaciones que surgen entre la representación, percepción, y el uso de símbolos, en actividades con patrones. Ahora bien, del trabajo hecho en segundo de primaria se llega a que los estudiantes logran relacionar la estructura geométrica y numérica de un patrón, con ayuda del uso del ritmo, la deíctica¹ y los gestos de la maestra, además podían imaginar figuras remotas y también elaborar fórmulas recurriendo a cifras particulares.

En grado tercero los estudiantes coordinan la visualización, los gestos y el habla con mejor dominio a comparación con el año anterior. Para el grado cuarto en el que se les propuso la misma secuencia trabajada en segundo, se notó un uso más apropiado del lenguaje, incluso llegan a proponer dos expresiones simbólicas para expresar el patrón.

Fernández & Llinares (2011) realizaron un estudio en el que contemplaron las siguientes dificultades que tienen los estudiantes, el distinguir contextos proporcionales de contextos aditivos, reconocer las relaciones multiplicativas en términos de covariación, y la mecanización y

¹Los deícticos son pronombres y adverbios que relacionan el texto con el espacio, tiempo o personas que enmarcan la situación de enunciación, los cuales solo tienen sentido en el contexto en el que se emiten. (Blog de Lenguaje, 2013). Ejemplos de ello son “el que sigue”, “aquí arriba”, “aquí abajo” etc.

asociación de la razón con las fracciones, produciendo un uso excesivo de la proporcionalidad en situaciones no proporcionales. Por ello se propusieron analizar cómo en las relaciones multiplicativas influye la naturaleza de las cantidades (discretas o continuas, enteras o no enteras), para que los estudiantes diferencien situaciones aditivas (del tipo $f(x) = x + b, b \neq 0$, “Corren a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde”) y proporcionales (del tipo $f(x) = ax$, “Empezaron al mismo tiempo pero Tomás es más rápido”).

Para llevar a cabo lo anterior, Fernández & Llinares (2011) diseñaron 64 problemas, los cuales se dividieron en 8 cuestionarios diferentes de 12 problemas cada uno (4 proporcionales, 4 aditivos y 4 “distractores”), los cuales se implementaron a 197 estudiantes españoles. Del análisis de las respuestas se concluye que los estudiantes desarrollan mejor las situaciones aditivas que las proporcionales y que manejan mejor las razones enteras y las cantidades discretas para las situaciones proporcionales.

Butto & Rojano (2010) realizaron un estudio sobre la introducción temprana del álgebra a través del razonamiento proporcional y los procesos de generalización, con ayuda del entorno Logo y actividades con lápiz y papel, ellos consideraron como problemática la metodología de los enfoques tradicionales, ya que estos enseñan primero la sintaxis algebraica y al final resuelven problemas usando lo aprendido.

Por estas razones, diseñan una secuencia de enseñanza, implementada a nueve estudiantes de quinto y sexto de primaria, pertenecientes a una escuela pública de México, los cuales tuvieron dificultades para diferenciar e identificar lo variable y lo invariante, pero pudieron comprender ideas básicas de variación proporcional y describir y expresar la regla general de un patrón.

Por último, Schliemann, Carraher & Brizuela (2000) estudian las estrategias para tratar la proporcionalidad, tasas constantes de cambio, las relaciones y funciones lineales, a través de un experimento didáctico para la comprensión de la multiplicación como una relación funcional y algebraica. Para lo anterior diseñaron actividades que apuntaban a cambiar el enfoque de las relaciones escalares a las relaciones funcionales, y a la representación general.

Este trabajo se implementó con 18 estudiantes de tercero de primaria de una escuela pública en el área de Boston. Ellos encontraron que los niños podían llenar correctamente las tablas, pero parecían hacerlo sin pensar en las relaciones invariantes, la introducción de la notación algebraica

les ayudó a pasar de los resultados del cálculo específico, a generalizaciones acerca de cómo se interrelacionan dos series de números, los estudiantes finalmente pudieron enfocarse en la relación funcional.

De los antecedentes tanto locales, nacionales e internacionales, se puede decir que estas son una muestra de que sí es importante trabajar algunos aspectos del álgebra en estudiantes de la educación básica primaria, que permiten su fundamentación en los niveles de la secundaria, y que además, esto es posible con el trabajo de la generalización de patrones, ya sean numéricos o pictóricos y sus diferentes representaciones, como las tablas, las gráficas, los dibujos.

CAPÍTULO II

MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA

En esta sección se presentan los elementos conceptuales de referencia que permiten fundamentar la problemática y ser el marco para el diseño y el análisis de los resultados de la propuesta de aula, este marco se estructura en tres perspectivas: la Curricular, la Didáctica y la Matemática.

2.1 Perspectiva Curricular

Para el análisis de los elementos curriculares se consideran fundamentalmente los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). Además de lo anterior se incluyen los Enunciados y Evidencias propuestos por los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) relacionados con los estándares identificados. Específicamente de los elementos curriculares se consideran aquellos aspectos relacionados con el pensamiento variacional propuestos para los primeros grados de la escolaridad.

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) los aspectos que organizan el currículo de Matemáticas son, los procesos generales, los conocimientos básicos y los contextos, los cuales se describen a continuación.

El primer aspecto que organiza el currículo en Colombia son los procesos generales, los cuales son el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. De estos procesos generales se tendrá en cuenta los siguientes.

La modelación, que permite descubrir, generalizar y representar relaciones o regularidades de diferentes maneras (mental, gestual, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos) las cuales se pueden encontrar en una situación de la vida real.

La resolución de problemas para desarrollar, aplicar, verificar y generalizar diversas estrategias e interpretaciones de los resultados a la luz del problema original.

El razonamiento matemático, para justificar las estrategias y los procedimientos llevados a cabo en el tratamiento de problemas, crear conjeturas de los resultados obtenidos, encontrar patrones y expresarlos matemáticamente y utilizar argumentos propios para exponer ideas.

La comunicación matemática, para explicar un algoritmo, presentar un método para resolver un problema, explicar una representación gráfica, o proponer una conjetura.

El segundo aspecto que organiza el currículo en Colombia son los conocimientos básicos o procesos específicos del pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional.

Para efectos de este trabajo se tendrán en cuenta el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el cual se manifiesta en el desarrollo de la utilización de las operaciones y métodos de cálculo (escrito, mental, con calculadoras) para resolver problemas, en la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario. Del pensamiento métrico se tiene en cuenta la identificación de lo invariante en las variaciones del tiempo, el espacio.

Finalmente, del pensamiento variacional se consideran el modelo matemático de variación multiplicativa, es decir, la proporcionalidad directa, también la variación en tablas, el estudio de los patrones y las gráficas cartesianas, las cuales se amplían a continuación.

El trabajo con secuencias o sucesiones de figuras, números o letras; motiva a hacer conjeturas sobre la forma o el valor o los valores siguientes de la secuencia, lo cual se puede expresar, oralmente, por escrito, por medio de dibujos y otras representaciones; para finalmente llegar a formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita generalizar el patrón. Así pues, los estudiantes pueden formular conjeturas, ponerlas a prueba, generalizarlas o argumentarlas para sustentarlas o refutarlas.

También el trabajo con patrones prepara a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica, a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica.

El trabajo de la variación en tablas, permite iniciar el estudio numérico de la función y la comprensión de la variable, pues el uso de filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que esta puede tener un número infinito de valores de reemplazo; además, también ayuda a la escritura de las expresiones, tipo retórico o fórmulas para describir la variación o el cambio.

El tercer aspecto que organiza el currículo en Colombia son los contextos de las situaciones problemáticas, los cuales pueden ser de la matemática, de la vida diaria y de las otras ciencias.

Por otra parte, se encuentran los contextos en el aprendizaje de las matemáticas en los que se construye los contenidos matemáticos estableciendo conexión con la vida cotidiana de los estudiantes, la familia y la institución educativa, a continuación se describen cada uno de ellos. El primero es el contexto inmediato o de aula el cual está conformado por paredes, ventanas, muebles, materiales, las normas y la situación problemática diseñada por el docente.

El segundo es el contexto escolar o institucional, integrado por las actividades diarias, los saberes de los estudiantes, docentes, empleados administrativos y directivos, el PEI, las normas de convivencia, el currículo explícito de las distintas áreas curriculares y el llamado “currículo oculto” de la institución. El tercero es el contexto extraescolar o sociocultural integrado por todo lo que sucede fuera de la institución en la comunidad local, la región, el país y el mundo.

Bajo el contexto inmediato o de aula se desarrolla este trabajo ya que se estudian los avances en estudiantes de grado quinto de la Educación Básica Primaria de un Colegio de Santiago de Cali, además se tendrá en cuenta en la propuesta de aula el contexto extraescolar o sociocultural y de la vida diaria de los estudiantes.

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) los tres aspectos que organizan el currículo de Matemáticas se deben desarrollar a través de contextos de aprendizaje ricos en situaciones problema, procedentes de la vida diaria, de las matemáticas o de las otras ciencias, para que los estudiantes puedan explorar problemas, desarrollar preguntas y descubrir o reinventar modelos, es decir, las situaciones problemas ayudan al aprendizaje de distintos contenidos y procesos, pero estos tienen que ser interpretados por los estudiantes.

Para dar cuenta de lo planteado anteriormente se mencionan algunos de los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006), propuestos para el grupo cuarto a quinto:

- Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa.

De acuerdo con la propuesta de los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006), es importante rescatar la relación de los anteriores estándares del pensamiento numérico con los

estándares del pensamiento variacional y métrico (coherencia horizontal) y la relación de los estándares del pensamiento numérico de grado cuarto a quinto con los otros grados, en este mismo pensamiento (coherencia vertical) (Ver Figura 1).

La coherencia vertical se identifica porque desde primero hasta séptimo se plantea trabajar la proporcionalidad directa, aunque con enfoques diferentes, ya que de primero a tercero se propone estudiarla a través de situaciones problemas, de cuarto a quinto se debe modelar la proporcionalidad directa como una dependencia entre cantidades y finalmente de sexto a séptimo, se hace un mayor énfasis en que los estudiante justifiquen las representaciones y procedimientos que llevaron a cabo para trabajar una situación de proporcionalidad directa.

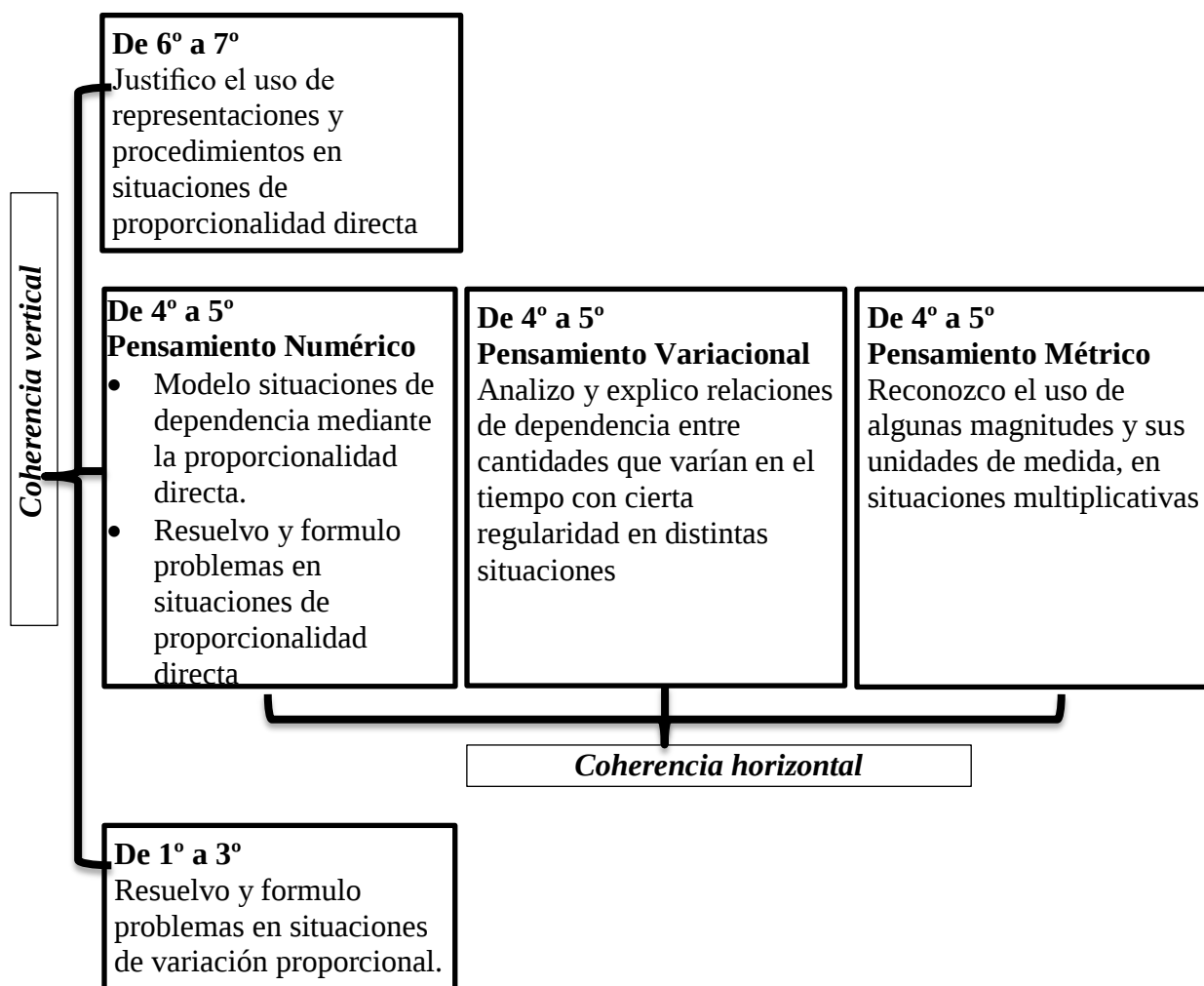


Figura 1. Coherencia vertical y horizontal en relación con los estándares seleccionados a desarrollar en la propuesta. (Adaptado de MEN, 2006).

Recientemente el Ministerio de educación Nacional ha propuesto los Derechos Básicos de Aprendizaje² (MEN, 2016), los cuales tienen la siguiente estructura, un enunciado que referencia el aprendizaje estructurante para el área, las evidencias de aprendizaje que expresan indicios claves que muestran a los maestros si se está alcanzando el aprendizaje expresado en el enunciado y el ejemplo que concreta y complementa las evidencias de aprendizaje.

Para efectos de este trabajo se exponen los siguientes Enunciados y Evidencias de los Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas correspondientes a los grados cuarto y quinto de primaria, asociados con la proporcionalidad y la generalización de patrones.

Enunciados:

- Describe e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades y las representa por medio de gráficas.
- Identifica patrones en secuencias (multiplicativas) y los utiliza para establecer generalizaciones aritméticas o algebraicas.

Evidencias de aprendizaje:

- Emplea las relaciones de proporcionalidad directa para resolver diversas situaciones.
- Propone patrones de comportamiento numérico.
- Comunica en forma verbal y pictórica las regularidades observadas en una secuencia
- Establece diferentes estrategias para calcular los siguientes elementos en una secuencia.
- Realiza cálculos numéricos, organiza la información en tablas, elabora representaciones gráficas y las interpreta para dar respuestas a los problemas.

² La promulgación de los Derechos Básico de Aprendizaje (D. B. A.) ha traído varias confrontaciones entre los educadores del país (ver por ejemplo Gómez, Castro, Bulla, Mora & Pinzón, 2016), debido a que los Derechos Básicos de Aprendizaje proponen el aprendizaje como un conocimiento coherente, pero más bien se contradice, porque el conocimiento es visto como un listado de actividades que se pueden desarrollar en el aula y aunque mencionan que guardan correspondencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia en el área de matemáticas por ejemplo, no tienen en cuenta los tipos de pensamiento ni la coherencia vertical y horizontal, más bien lo que han hecho es transformar los estándares como enunciados y evidencias para distribuirlos en todos los diferentes grados de la escolaridad. Por estas razones y porque los D. B. A. está en proceso de debate nacional, solamente se enuncian, por ser una directriz ministerial.

Sobre la base de las ideas expuestas, este trabajo considera los pensamientos numérico, métrico y variacional y los procesos de modelación, resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación, que proponen los Estándares Básicos de Competencia en Matemática (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los cuales son la base para el diseño y el análisis de la propuesta de aula.

2.2 Perspectiva Didáctica

En esta perspectiva de los elementos didácticos se consideran algunas dificultades en el álgebra, en la construcción de patrones y la conceptualización de la proporcionalidad. Pero también se presentan las alternativas de tratamiento que permiten abordar el álgebra desde edades tempranas, tal y como lo proponen las aproximaciones al álgebra de Bednarz, Kieran & Lee (1996) y el enfoque Early Algebra, la cual es una propuesta didáctica y metodológica que plantea la inclusión de conceptos relacionados con el álgebra, desde los primeros grados de la escolaridad.

2.2.1 Algunas dificultades presentadas en el álgebra

Diversas investigaciones (Booth, 1988; Mason et al., 1985/1999; Kieran, 1992/1995; Gallardo & Rojano, 1988; Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996; Godino, 2003) han identificado las dificultades en la introducción del álgebra, a continuación se exponen algunas de estas.

Gallardo & Rojano (1988) identifican que la manera como se realizan las operaciones aritméticas, generalmente de forma vertical, puede crear dificultades en álgebra, porque las ecuaciones se leen y operan de manera horizontal.

Por otra parte, Mason, Graham, Pimm & Gowar (1985/1999) mencionan que en aritmética se hace un mayor énfasis en la respuesta numérica y no en el proceso, pero además no son usuales las respuestas como $3 + 2$, lo cual crea dificultades para el álgebra, porque en esta la respuesta puede ser una expresión algebraica de la forma $ax + by$.

Socas, Camacho, Palarea & Hernández (1996) consideran que algunas de las dificultades de los estudiantes para aprender el álgebra, tienen su origen en errores aritméticos que han permanecido sin corregir, a continuación se amplía esta idea con algunos ejemplos.

Los estudiantes consideran que las dos expresiones algebraicas separadas por el signo igual, en una ecuación, siempre son equivalentes, pero las ecuaciones no son afirmaciones verdaderas universalmente sino que solo son verdaderas para algún caso en particular.

En otras palabras, la ecuación $3x + 2 = 2x + 5$, solo es verdadera cuando $x = 3$ y además las expresiones $3x + 2$ y $2x + 5$ no son expresiones equivalentes, caso que no sucede en aritmética en la que $5 + 3$ siempre será equivalente a $6 + 2$ y por ello se puede afirmar que siempre $5 + 3 = 6 + 2$.

Otro error que tiene que ver con la interpretación del signo igual, ya que los estudiantes asumen tanto en aritmética como en álgebra que lo que está a la izquierda del signo igual es una operación y lo que está a la derecha es el resultado de esta, por ejemplo, en aritmética los estudiantes comprenden que $5 + 3 = 8$ pero $5x + 3y$ no es igual a 8 ni $8xy$.

A lo anterior hay que añadir que las distintas interpretaciones de las letras³ en álgebra, pueden causar dificultad en los estudiantes o, a su vez, pueden ser un medio para lograr avanzar de manera progresiva en el estudio de la generalización algebraica.

Con la propuesta de aula se quiere intentar reducir la brecha existente entre el álgebra y la aritmética en los primeros grados de la escolaridad, ya que las investigaciones referenciadas apuntan a que los errores con el signo igual y los significados de las letras se pueden superar si se trabajan desde edades tempranas de manera correcta con conceptos que faciliten la transición e integración de ambas; como pueden ser los patrones numéricos y la proporcionalidad, aunque hay que reconocer que en ambas pueden haber dificultades en su construcción e interpretación.

2.2.2 Dificultades en la generalización de un patrón

En esta sección se presentan las dificultades y etapas en el proceso de generalización de un patrón (*ver, decir, registrar y probar la validez*), descritas por Mason et al. (1985/1999), quienes proponen el reconocimiento de estos como un medio potente para el desarrollo del proceso de la generalización, y que a su vez, este proceso es el centro del álgebra y de todas las matemáticas, para poder caracterizar en qué etapa de la generalización se encuentran los estudiantes de grado quinto, de la Institución Educativa Veinte de Julio.

³ De acuerdo con Küchemann (1978) la letra en álgebra puede ser utilizada como letra evaluada, ignorada, como objeto, como incógnita específica, como número generalizado y como variable

Ver un patrón está relacionado con el reconocer mentalmente alguna regularidad o algo común, lo cual puede suceder luego de contar, calcular o dibujar las dos o tres figuras o números siguientes de la secuencia, *ver* un patrón es una etapa difícil porque implica saber lo que alguien ve, a no ser que ese alguien diga algo sobre lo que ve. Los estudiantes comúnmente encuentran difícil moverse del ver al decir, por ello necesitan tiempo.

Decir el patrón hace referencia al expresar y articular en palabras, ya sea a uno mismo o a alguien en particular, alguna regularidad observada o algo común en un patrón. En esta etapa los estudiantes pueden tener más dificultad para explicar con palabras de manera precisa el patrón ya que no están acostumbrados a este tipo de actividades, les parece difícil considerar todos los componentes del patrón, pero expresarlo por medio de un diagrama lo consideran más fácil.

Registrar un patrón requiere por parte del sujeto escribir lo dicho del patrón, pero esto no es fácil para los estudiantes, puesto que muestran apatía por hacer registros, pocos logran analizar y generalizar la estructura de la secuencia y la mayor dificultad está en la escogencia de las variables para representar el patrón.

Ahora bien, de acuerdo con Mason et al. (1985/1999), existen cuatro formas de registrar o expresar la generalidad de manera algebraica, que van desde lo meramente verbal hasta lo netamente simbólico.

La primera es el *registro con palabras apoyándose de las figuras*, dibujos o diagramas de casos particulares para identificar las características generales del patrón.

La segunda es *registrar sólo con palabras*, es decir expresar en lenguaje cotidiano la generalidad, este registro no incluye símbolos matemáticos, excepto los dígitos.

La tercera es el *registro con palabras y símbolos matemáticos* de las operaciones.

Por último está el *registrar solo con símbolos*, como las letras, los símbolos de las operaciones ($+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\quad}$...), también se puede usar un recuadro ($\square$) o un signo de pregunta «?» para representar la incógnita.

Finalmente, Mason et al. (1985/1999), propone varias maneras de *probar la validez* de un patrón. La primera es tener en cuenta el registro hecho del patrón, el cual se valida usando los

casos en los que ya se sabe la respuesta, porque se ha dibujado anteriormente o hace parte del patrón numérico dado. La segunda es probar el registro del patrón, haciendo cálculos, para casos que se pueden verificar de otras manera, como dibujando o contando y la tercera es examinar la inconsistencia interna, es decir, cuestionar la regla general que se ha creado del patrón.

De manera general para Mason et al. (1985/1999) los estudiantes en los proceso de *ver*, *decir* y *registrar* un patrón se aburren y piensan que el propósito de la actividad es hacer operaciones y dibujos en sus cuadernos, también dice que no es fácil ver lo general en lo particular, y que una secuencia que parece simple para algunos, puede ser algo difícil de trabajar, para otros.

Ahora bien, las etapas del proceso de generalización de un patrón, propuestas por Mason et al. (1985/1999), se tendrán en cuenta para el diseño y análisis de la propuesta de aula, sobre todo, las diversas maneras en las que los estudiantes de grado quinto, pueden *registrar* el patrón, ya que esto no solamente es de manera simbólica.

2.2.3 Dificultades asociadas al concepto de proporcionalidad directa

Es importante reconocer que para estudiar la proporcionalidad directa y sus dificultades es necesario tener en cuenta el tratamiento de los conceptos que componen la proporcionalidad, como son la razón y la proporción.

Godino & Batanero (2002) advierten que una deficiencia en los estudiantes respecto al estudio de las razones y proporciones, es que ellos las reducen a unas técnicas aditivas y de conteo, por ejemplo, si 3 manzanas cuestan 20 dólares, 10 manzanas cuestan 27 dólares porque sí $10 - 3 = 7$ entonces $20 + 7 = 27$, así no dan lugar a razonamientos multiplicativos.

De acuerdo con Guacaneme (2001) en la matemática escolar, la razón pierde su esencia como una relación por ser reducida a una división exacta o indicada entre dos números, lo cual impide reconocer la proporción como una relación entre relaciones, ya que este concepto es concebido como un nuevo nombre para la igualdad de dos razones o fracciones equivalentes.

Para Post, Behr & Lesh (1988) la enseñanza de la propiedad fundamental de la proporción se ha convertido en un "proceso mecánico" que no permite comprender los problemas cotidianos de proporcionalidad, ya que existe un fuerte énfasis en considerar como esencial «determinar x », y no se da importancia al estudio de la relación existente entre las cantidades.

Respecto al tratamiento de la proporcionalidad directa en la escuela, este es más aritmético (proporcionalidad en términos de razones y proporciones), que algebraico (en términos de funciones lineales) (Hersant, citado por Obando, Vasco & Arboleda, 2014). La proporcionalidad está restringida al margen de la multiplicación y la división (Obando & Botero, 2006) y a la enseñanza de “la regla de tres”, que con frecuencia está enfocado en la memorización de dicho algoritmo como una «multiplicación en cruz».

Obando, Vanegas & Vásquez (2006) advierten que en la escuela no se tiene casi en cuenta las propiedades de la función lineal, ni se considera que esta modela la proporcionalidad directa, simplemente se estudia el uso de la regla de tres simple directa.

Guacaneme (2001) menciona que la falta de análisis sobre las restricciones o condiciones que imponen el tipo de magnitudes manejadas en la representación gráfica, conlleva a identificar de manera errónea la continuidad como característica de todas las variaciones proporcionales, es decir, en situaciones en las que se manejan magnitudes discretas, su gráfica no corresponde con una línea recta que pasa por el origen, sino unos puntos alineados en el plano cartesiano.

A pesar de todo lo anterior Obando, Vanegas & Vásquez (2006) resaltan que el estudio de la proporcionalidad directa ayuda al reconocimiento de las nociones de variable y variación, por ejemplo al usar una tabla, se puede comprender las relaciones de dependencia entre las cantidades involucradas y así poder representarlas gráficamente.

Todo esto evidencia que la proporcionalidad directa permite el estudio de conceptos del álgebra y la aritmética. Ahora bien, para efectos de este trabajo se tendrán en cuenta las dificultades relacionadas con el concepto de proporcionalidad presentadas anteriormente, para así mismo tratar de identificar si estas persisten en los estudiantes, cuando se les proponga la propuesta, y también poder estudiar su tratamiento.

2.2.4 Algunas alternativas de tratamiento de las dificultades en el álgebra

Hasta ahora se ha venido presentando las dificultades que las investigaciones han identificado, en relación con las temáticas de estudio; ahora bien, en esta sesión se quiere mostrar las alternativas de tratamiento que diversas investigaciones proponen.

Considerando que este trabajo intenta introducir en estudiantes de grado quinto de Primaria en conceptos y procesos relacionados con el álgebra, se considera importante tener en cuenta algunas de las aproximaciones al álgebra, propuestas por Bednarz, Kieran & Lee (1996, citado por Rengifo 2009), las cuales se describen a continuación.

El enfoque de la modelación propone que el lenguaje natural favorece el simbolismo, el cual se puede trabajar a través de acciones reales o imaginarias de situaciones de variación continua.

La aproximación funcional con ayuda de situaciones del mundo real y las diferentes representaciones (gráficas, tablas, ecuaciones, etc.) permiten el estudio de familia de funciones y sus propiedades.

La perspectiva de la resolución de problemas se considera como un medio que permite la transición de la aritmética al álgebra, ya que es necesario establecer la relación entre las incógnitas para construir ecuaciones y manipularlas, y así encontrar el valor numérico.

Finalmente el enfoque de la generalización en álgebra, se puede trabajar con figuras geométricas o secuencias numéricas y con la construcción de tablas de valores para crear una fórmula, pero no sólo desde el análisis de unos casos particulares, sino también la visualización y la manipulación de la figura o secuencia, para encontrar un patrón.

Por otra parte, algunos investigadores (Davis, 1985, Kaput, 2008; Kaput, Carraher & Blanton, 2008; Molina, 2006; Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008; Carraher & Schliemann 2007) señalan que el álgebra debe ocupar un lugar importante en el currículo de la escuela primaria, de acuerdo con las propuestas del Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM, 1989; 2000) y el Informe del Panel de Estudio de Matemáticas RAND, sobre Álgebra en K-12 (RAND Mathematics Study Panel, 2003). Para lo cual proponen un cambio curricular en los Estados Unidos, conocido como Early Algebra. La cual se caracteriza a continuación.

Los investigadores en Early Algebra plantean que el lenguaje natural sirve como un punto de partida importante para que los niños aprendan álgebra porque les permite describir conceptos algebraicos usando un lenguaje conocido, ayudándose también de dibujos, y que solo después de lo anterior, los estudiantes pueden ser capaces de trabajar notación algebraica, gráficas, tablas y otros tipos de representación convencional (Kaput, Carraher & Blanton, 2008).

Para Kaput (2008) el álgebra es como un cuerpo autónomo de conocimiento, un artefacto cultural que es recibido como parte de un patrimonio cultural, incrustado en el sistema educativo, es la generalización sistemática y simbólica de regularidades y también es el razonamiento sobre generalizaciones que se expresan con sistemas de símbolos convencionales.

De acuerdo con lo anterior Kaput (2008) define tres líneas para trabajar el álgebra en edades tempranas.

El álgebra como una aritmética generalizada, con el fin de construir aspectos sintácticos del álgebra desde la estructura de la aritmética, incluyendo la generalización de las operaciones aritméticas y sus propiedades, sus relaciones y sus formas, la explicitación de las estrategias del cálculo.

El álgebra a través de la generalización, comparación y expresión de regularidades de un patrón para introducir la idea de función, utilizando varios sistemas simbólicos incluyendo las tablas y los gráficos.

El álgebra a través de la aplicación de una variedad de lenguajes de modelación dentro y fuera de las matemáticas. En esta línea se presentan los siguientes tres tipos de modelación.

La modelación que requiere el uso de los aspectos sintácticos del álgebra para dar una solución, ya sea a través de una fórmula o ecuación; en este caso la variable es considerada como algo desconocido más que como una representación de una clase de situaciones.

La modelación para obtener una visión de la situación, en la que se hace uso de una o más variables para expresar una función o una clase de funciones.

La modelación como la generalización de soluciones a situaciones que no requieren manipulaciones algebraicas, en este caso la variable es tratada como un objeto desconocido y a menudo toma la forma de parámetro.

Por su parte Carraher & Schliemann (2007) asumen que el álgebra, es trabajar con variables, y en particular, la aritmética con variables, tal y como lo define Howe (2005), es representar, o "modelar" situaciones concretas con expresiones, establecer ecuaciones, manipular expresiones y

ecuaciones, para simplificar, resolver e interpretar, además, las reglas de la aritmética hacen parte también del álgebra.

A partir de dicha definición Carraher & Schliemann (2007) plantean que el Early Algebra considera aspectos del razonamiento algebraico, el cual no debe enseñarse después de la aritmética en los primeros grados (6-12 años), más bien se puede incluir el expresar las ideas y relaciones algebraicas no solo a través de la notación algebraica convencional, sino también a través de tablas, sentencias numéricas, gráficas y lenguaje natural.

Para llevar a cabo lo anterior, Carraher & Schliemann (2007) proponen tres enfoques del Early Algebra, el primero enfoque es trabajar la aritmética y el razonamiento numérico a través de sentencias numéricas y generalización de las propiedades aritméticas.

El segundo enfoque está basado en la aritmética y el razonamiento cuantitativo a través del trabajo de las medidas como expresiones de la magnitud de una propiedad seleccionada de objetos individuales o el resultado de la medición que asigna un número y la unidad de medida a cada objeto en cuestión.

El tercero enfoque es trabajar la aritmética y las funciones con el fin de lograr la concepción de las letras como variables en lugar de incógnitas, también este enfoque incluye el trabajo de las funciones como reglas para generar colecciones de figuras o secuencias, con el fin de conseguir la comprensión de las relaciones entre dos variables, también incluyen el trabajar desde los cálculos con números, hacía pensar en las relaciones entre los conjuntos de números.

Ahora bien, para Carraher & Schliemann (2007) un patrón no es un objeto matemático bien definido y no tiene conexiones claras con objetos matemáticos. Sin embargo, para ellos las tareas de descubrir patrones pueden ser valiosas para que los estudiantes hagan conjeturas sobre la regla que crea la serie, para generar cada elemento.

Además de lo anterior, ellos mencionan que las tablas pueden servir como tablas de funciones, es decir, como representaciones de funciones porque la primera columna de una tabla generalmente contiene valores de la variable independiente, mientras que la segunda columna se utiliza para mantener los valores respectivos de la variable dependiente, y así los estudiantes notan regularidades en los patrones.

Finalmente, Carraher & Schliemann (2007) proponen lo siguiente como un tipo de metodología a seguir en propuestas que integren el tercer enfoque del Early Algebra; no empezar con una representación matemática, como una expresión algebraica o un gráfico, sino más bien con la discusión de un problema o una situación relacionada con la función, para crear un entorno propicio para la presentación de las ideas propias de los niños, acerca del problema.

Además de lo anterior, se puede pedir a los estudiantes que dibujen o escriban lo que entienden de la situación propuesta, para luego compartirlo y compararlo con las representaciones e interpretaciones de los compañeros, y lograr introducir las diversas representaciones de la función.

Es importante aclarar también que el enfoque del Early Algebra no se debe confundir con el del Pre-Álgebra, el cual intenta facilitar la transición de la aritmética al álgebra redefiniendo los usos y significados de los símbolos matemáticos (+, -, =, $\times$, $\div$,) empleados en expresiones algebraicas y ecuaciones. Según el enfoque del Pre-Álgebra los estudiantes de los primeros grados no están preparados para el aprendizaje del álgebra, por ello creen importante intervenir un año antes de la enseñanza de ésta, para mitigar las dificultades que los estudiantes suelen mostrar en secundaria (Carraher & Schliemann, 2007).

Actualmente, Blanton, et al. (2017) proponen que la actividad de generalización, refuerza la capacidad de filtrar información para obtener características comunes y sacar conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas y que el justificar generalizaciones, permite que los estudiantes desarrollen argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta.

De la propuesta de Bednarz, Kieran & Lee (1996, citado por Rengifo 2009) se considera el enfoque de la generalización en álgebra, la cual considera importante la generalización de figuras geométricas o secuencias numéricas y la construcción de tablas de valores para crear una fórmula que permita encontrar cualquier término del patrón.

Teniendo en cuenta que este trabajo se enmarca dentro de la propuesta curricular Early Algebra, se retoma la idea de álgebra que tienen en cuenta Carraher & Schliemann (2007) en su propuesta, es decir la definición de Howe (2005), el cual propone que el álgebra es representar, o "modelar" situaciones concretas con expresiones, establecer ecuaciones, manipular expresiones y

ecuaciones y además, las reglas de la aritmética hacen parte también del álgebra. Aunque hay muchas discusiones alrededor de la idea de álgebra (Janvier, 1987; Kieran, 1992/1995), se asume esta sobre todo por las características del trabajo.

2.3 Perspectiva Matemática

Teniendo en cuenta la problemática planteada en este trabajo, se destacan los contenidos matemáticos de patrones numéricos y la proporcionalidad directa, los cuales permiten el estudio de la función. Cabe aclarar también que la proporcionalidad es un concepto que está asociado con la teoría de magnitudes, por esta razón se definen la razón, proporción y proporcionalidad en términos de magnitudes.

2.3.1 Concepto de función lineal y su relación con la proporcionalidad

Según Azcárate & Deulofeu (1990) la función comprende dos magnitudes variables, una dependiente y la otra independiente que guardan una relación entre ellas; de manera particular el modelo de la proporcionalidad entre dos magnitudes, puede interpretarse como la función lineal de la forma $y_i = k \cdot x_i$, siendo k la constante de proporcionalidad.

Según Euler (1749, citado por Fiol & Fortuny, 1990) la proporcionalidad entre dos magnitudes puede interpretarse bajo el concepto de función como una cantidad variable que depende de otra cantidad variable.

Para Luengo y el Grupo Beta (1990) una aplicación f de E en F es una relación de proporcionalidad si existe un número k tal que $f: E \rightarrow E'$ y $F: x \rightarrow k \cdot x$ o en otras palabras, si existe un número, tal que la imagen mediante f de todo elemento x del dominio E es igual a $k \cdot x$.

Así pues, una razón es una relación entre dos cantidades, o entre un número y una cantidad; en este sentido una razón no es un número y por tanto, no es un número fraccionario ni el resultado de una división. Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior, se puede definir la proporción como una relación entre razones, o una relación entre relaciones y no como una igualdad de fracciones equivalentes (Guacaneme, 2001; Perry, Guacaneme, Andrade & Fernández, 2003).

Por razones como las anteriores a través de la proporcionalidad directa y los patrones de crecimiento se puede estudiar un modelo de la función, en esta caso la función lineal, la cual se puede estudiar mediante el análisis de las relaciones entre las cantidades implicadas.

2.3.2 Patrones

Los patrones son un caso especial de las regularidades (entendidas como unidades de repetición), las cuales se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón, de esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón (MEN, 2006).

Pero además de lo anterior, un patrón está relacionado con conceptos como constante, variable, dependencia e independencia, la razón y los distintos tipos de modelos de variación de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial...) (Ministerio de Educación Nacional, 1998, 2006)

Tipos de patrones

Los patrones en álgebra se dividen en dos grandes categorías, los patrones de repetición y de crecimiento. En el primer tipo hay una unidad o núcleo de repetición, un ciclo que puede crearse repitiendo una parte de del patrón, el siguiente ejemplo (Ver Figura 2) es un patrón de repetición (Queensland Studies Authority, 2005).

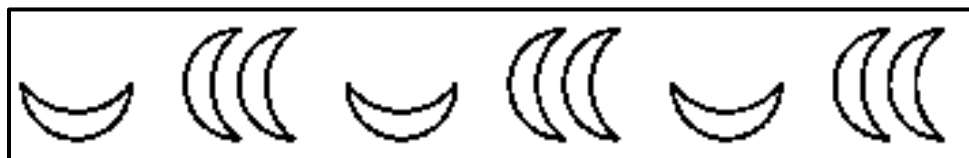


Figura 2. Ejemplo de patrón de repetición. Por Queensland Studies Authority (2005)

El segundo tipo de patrón tiene unidades o términos que dependen del anterior y de su posición en el patrón (Queensland Studies Authority, 2005).

Ahora bien este último tipo de patrón puede ser de dos clases, pictórico o numérico. La primera clase es una secuencia de figuras, en esta se involucran dos variables, la dependiente que tiene que ver con la cantidad total de elementos y la independiente relacionada con la posición de la figura en el patrón, un ejemplo de ello se muestra en la Figura 3 (Billings, 2008).



Figura 3. Ejemplo de patrón pictórico. Por Billings (2008)

A menudo, los patrones pictóricos se convierten en la segunda clase, es decir, en patrones numéricos, los cuales se constituyen de números, cuya posición de estos en la secuencia, es importante (Queensland Studies Authority, 2005).

Moreno (2015) define los patrones numéricos como una lista de números que se ordenan de acuerdo con una regla, la cual está asociada con alguna operación básica, estrategias de conteo, divisibilidad, proporcionalidad, relaciones funcionales, entre otros. El patrón 15, 23, 31, 36, 47... es un ejemplo de patrón numérico, cuya posición y regla son explicitadas a continuación (Ver Tabla 1)

Tabla 1

Ejemplo de patrón numérico.

Posición numérica	Regla	Secuencia numérica
1	$8x + 7$	15
2	$8x + 7$	23
3	$8x + 7$	31
4	$8x + 7$	36
5	$8x + 7$	47
6	$8x + 7$	59
7	$8x + 7$	63

Nota. Recuperado de Moreno (2015)

Para efectos de este trabajo se incluyen los patrones numéricos en situaciones relacionadas con el contexto de los estudiantes; para promover conceptos y procesos relacionados con el álgebra (la generalización, la variación lineal, las variables, correlación entre variables, entre otros), teniendo en cuenta un tipo de variación particular como lo es la proporcionalidad directa.

2.3.2 Proporcionalidad

Desde la perspectiva de Fiol & Fortuny (1990), De Trocóniz & Belda (1959) y Grupo Beta (1990), se puede ubicar los aspectos relativos a la teoría de la proporcionalidad en el contexto de la teoría de las magnitudes, por esto antes de entrar a definir la proporcionalidad se requiere distinguir entre magnitud y cantidad.

La magnitud es un conjunto que cumple las propiedades de la relación de equivalencia⁴ y tiene definida la operación suma y sus propiedades⁵ (Grupo Beta, 1990). De acuerdo con esto, dicho conjunto tiene una estructura similar a la de un grupo conmutativo⁶, sólo falta la existencia del inverso (Guacaneme, 2001).

Ahora bien, el conjunto de las magnitudes se pueden clasificar en escalares si los elementos del conjunto guardan además una relación de orden y sus propiedades⁷ (Grupo Beta, 1990). De acuerdo con esto, una magnitud escalar es un semigrupo conmutativo⁸ con elemento neutro totalmente ordenado (Guacaneme, 2001).

Las magnitudes escalares a su vez pueden ser absolutas y relativas. Las primeras cumplen que $\forall A, B \in E, A + B \geq A$ y $A + B \geq B$. En cambio para las segundas, algunas veces se satisface $A > A + B$ (De Trocóniz & Belda, 1959). En otras palabras: "En las magnitudes relativas existen cantidades llamadas opuestas, cuya suma es el elemento neutro 0 (...) y las magnitudes escalares absolutas, son aquellas en las que sólo tiene sentido la operación diferencia cuando el «minuyendo» es mayor que el «sustraendo»" (Grupo Beta, 1990, p. 55).

⁴ Propiedad reflexiva $\forall A \in E, A = A$; simétrica $\forall A, B \in E, si A = B \rightarrow A = B$ y transitiva $\forall A, B, C \in E, si A = B y B = C entonces A = C$.

⁵ Propiedades de la suma: uniforme $\forall A, B, C, D \in E$ tales que $A = B$ y $C = D \rightarrow A + C = B + D$; conmutativa $\forall A, B \in E \rightarrow A + B = B + A$; asociativa $\forall A, B, C \in E$ se tiene que $(A + B) + C = A + (B + C)$ y modulativa $\exists 0 \in E / \forall A \in E$ se cumple que $0 + A = A + 0 = A$.

⁶ "Un grupo consta de lo siguiente: un conjunto G ; una correspondencia (u operación) que asocia a cada par de elementos x, y de G , un elemento xoy de G de modo que $xo(yoz) = (xoy)oz, \forall x, y, z$ de G (asociatividad); existe un elemento [neutro] e en G tal que $eo x = xoe = x, \forall x$ de G ; a cada elemento x de G le corresponde un elemento [inverso] x^{-1} en G tal que $xox^{-1} = x^{-1}ox = e$ (...) Un grupo se dice conmutativo si satisface la condición $xoy = yox$ para cada x e y ." (Hoffman & Kunze, 1993, p. 82).

⁷ Propiedades de la relación de orden: reflexiva $\forall A, B \in E \rightarrow A \leq A$; antisimétrica $\forall A, B \in E$, se tiene que si $A \leq B$ y $B \leq A \rightarrow A = B$; transitiva $\forall A, B, C \in E$, si $A \leq B$ y $B \leq C \rightarrow A \leq C$ y de monotonía $\forall A, B, C \in E$, si $A \leq B \rightarrow A + C \leq B + C$.

⁸ Un semigrupo cumple la propiedad de cerradura $\forall x, y \in A, xoy \in A$; asociativa $\forall x, y, z \in A, xo(yoz) = (xoy)oz$ y cumple la propiedad conmutativa $\forall x, y \in A, xoy = yox$.

De acuerdo con lo anterior, sólo las magnitudes relativas tienen estructura de grupo conmutativo totalmente ordenado y las absolutas tienen una estructura de semigrupo conmutativo totalmente ordenado (Guacaneme, 2001). Además de considerar la clasificación de una magnitud escalar como relativa y absoluta, también se definen las magnitudes racionales como aquellas que cumplen el postulado de divisibilidad⁹ y el de Arquímedes¹⁰. A su vez, las magnitudes escalares racionales pueden ser de dos tipos, continuas o reales si cumplen el postulado de continuidad¹¹ (De Trocóniz & Belda 1959).

Por otra parte, una cantidad es el subconjunto parcial de los elementos iguales entre sí del conjunto magnitud, así pues, las cantidades cumplen todas las propiedades de las magnitudes mencionadas anteriormente (De Trocóniz & Belda, 1959). Ahora bien, si a cada una de las cantidades se le asigna un número, se tiene una función de $\mathcal{C}$ ¹² en $\mathbb{R}$ (Guacaneme, 2001).

El producto de la cantidad $a, b \in \mathcal{C}$ por $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades, distributiva a derecha del producto, sobre la suma $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$; distributiva a izquierda del producto, sobre la suma $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$; asociativa del producto $\alpha \cdot (\beta \cdot a) = (\alpha \cdot \beta) \cdot a$; y compatibilidad del producto con el orden, si $a \leq b$ entonces $\alpha \cdot a \leq \alpha \cdot b$ (si α es positivo) o $\alpha \cdot a \geq \alpha \cdot b$ (si α es negativo). Estas propiedades son importantes en el tratamiento de la proporcionalidad (Guacaneme, 2001).

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son proporcionales o directamente proporcionales, si sus cantidades se corresponden biunívocamente¹³, ordenadamente¹⁴, en la igualdad¹⁵ y en la suma¹⁶, así, las

⁹ Dado un elemento A cualesquiera del conjunto E y un número natural cualquiera n , existe siempre en E otro elemento B tal que $n \cdot B = A$, equivalente a $B + B + \dots^n \dots + B = A$, de estos elementos A y B se dice que A es n -múltiple de B y que B es n -submúltiple de A , lo cual se indica así: $B = A/n$ equivalente con $n \cdot B = A$.

¹⁰ Si $0 < A < B$ existe un número natural n , tal que $n \cdot A > B$.

¹¹ Para cada par de clases contiguas de elementos de E tales que todo elemento de la primera clase A_1 es menor que todo elemento de la segunda clase A'_1 y $A_1 < A'_1 < A_1 + D$ siendo D el elemento positivo más pequeño, del conjunto E ; existe en este conjunto un elemento único A , llamado elemento de separación, mayor o igual a todos los de A_1 y menor o igual que todos los de A'_1 .

¹² El conjunto $\mathcal{C}$ está formado por todas las cantidades asociadas a los elementos del conjunto E en el cual se ha definido la igualdad ($=$) y la suma ($+$)

¹³ La correspondencia biunívoca se establece cuando para cada elemento del primer conjunto que se corresponde con solo un elemento del segundo conjunto, tal elemento del segundo conjunto se corresponde con solo aquel elemento del primer conjunto.

cantidades de una magnitud y sus medidas, respecto de la misma unidad, se corresponden en la suma y es ordenada (De Trocóniz & Belda, 1959).

Para Fiol & Fortuny (1990), dos magnitudes son directamente proporcionales si se puede establecer un isomorfismo f entre sus cantidades, es decir, si $a < b$ implica $f(a) < f(b)$, si $c = a + b$ entonces $f(a + b) = f(a) + f(b) = f(c)$, y si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$.

Según Azcárate & Deulofeu (1990) las anteriores condiciones caracterizan la llamada función lineal o de proporcionalidad directa, cuyos pares de valores correspondientes $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ su cociente es constante, así $y_1/x_1 = y_2/x_2 = \dots = y_n/x_n = k$, o $y_i = k \cdot x_i$ y su representación cartesiana es una recta que pasa por el origen, si la función es de variable real.

En relación con lo anterior Fiol & Fortuny (1990) llegan a la conclusión de que los puntos correspondientes a las parejas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$, están alineados¹⁷ o la gráfica de la función de proporcionalidad es una línea recta.

Ahora bien, de acuerdo con lo anterior, De Trocóniz & Belda (1959) proponen una interpretación geométrica de la proporcionalidad directa, de la siguiente manera, sean x e y las medidas de las cantidades correspondientes en dos magnitudes proporcionales, es decir, $\frac{y}{x} = k$ (constante) o sea $y = k \cdot x$, se tiene que la gráfica de ésta es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Para el diseño de la propuesta de aula se consideran la interpretación geométrica propuesta por De Trocóniz & Belda (1959); también se tendrán en cuenta la definición de magnitudes proporcionales según Fiol & Fortuny y las condiciones que caracterizan la función de proporcionalidad directa según Azcárate & Deulofeu (1990).

¹⁴ La correspondencia en el orden implica que si las cantidades $a, b, c, \dots$ se suceden en cierto sentido (por ejemplo $a < c < b < \dots$), lo mismo debe ocurrir con las $a', b', c', \dots$ (o sea $a' < c' < b' < \dots$ o bien $a' > c' > b' > \dots$).

¹⁵ La correspondencia en la igualdad exige que si $a = b$ sea también $a' = b'$.

¹⁶ La correspondencia en la suma exige que si $c = a + b$, sea también $c' = a' + b'$.

¹⁷ En este trabajo se retoma la definición de puntos alineados propuesta por Vittone, Gianatti & Alegre (2016, p. 4): “Una cantidad arbitraria de puntos del espacio se dicen alineados si existe una recta a la cual todos ellos pertenecen”.

A modo de cierre se puede decir que la generalización de patrones numéricos y la proporcionalidad directa son alternativas que permiten estudiar, a través de secuencias numéricas, conceptos como la variación funcional, en particular la variación lineal con sus propiedades y sus diversas representaciones, y así mismo los estudiantes pueden desarrollar procesos como la generalización y la modelación matemática a través de situaciones problemas relacionadas con un contexto cercano a los estudiantes.

CAPÍTULO III

UN ACERCAMIENTO A LA VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A TRAVÉS DE PATRONES NUMÉRICOS

CAPÍTULO 3. UN ACERCAMIENTO A LA VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A TRAVÉS DE PATRONES NUMÉRICOS

En este capítulo, se presentan los aspectos relacionados con el diseño e implementación de una propuesta de aula, se hace la descripción general de esta, los conceptos matemáticos involucrados y las expectativas de desempeño de las situaciones. Además, se exponen los resultados y análisis de los resultados de los registros de los estudiantes que participaron en el estudio.

3.1 Sobre el diseño experimental

Para el diseño, puesta en acto y análisis de las situaciones, se toman en consideración los referentes conceptuales ya mencionados a lo largo de este trabajo, tales como Mason et al. (1985/1999), Carraher & Schliemann (2007), Kaput (2008) y Obando, Vanegas & Vásquez (2006).

3.1.1 Sobre la Propuesta de Aula

La propuesta de aula, está dirigida a estudiantes de grado quinto de la Educación Básica Primaria de la Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio de Cali. Las situaciones se diseñaron teniendo en cuenta el marco conceptual presentado en el capítulo dos, en el que se recalca la importancia de la generalización de patrones numéricos y el estudio de la proporcionalidad directa, como unas alternativas para estudiar procesos propios del álgebra, como la generalización, a través de la aritmética.

En la Figura 4, se detallan los aspectos del marco conceptual que se tuvieron en cuenta para el diseño de la propuesta de aula, y en la tabla 2 se detallan los aspectos que se tuvieron en cuenta durante el diseño de la Propuesta de aula, incluyendo lo relacionado con su estructura.

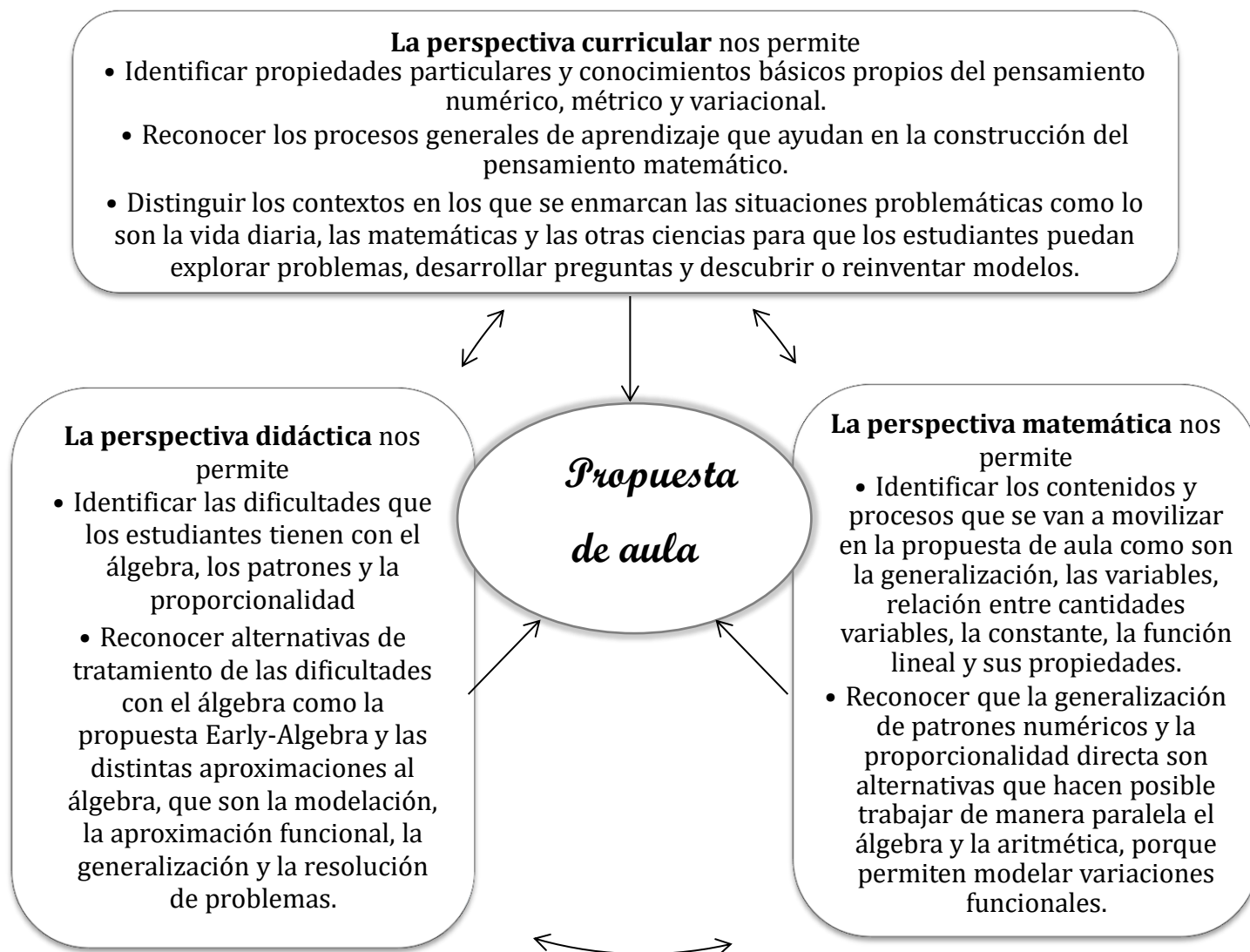


Figura 4. Aspectos conceptuales que sustentan el diseño de la propuesta de aula

Fuente: Elaboración propia obtenida del análisis de los referentes conceptuales

Tabla 2

Organización de las Situaciones y Tareas de la Propuesta de aula

Situaciones	No. Tareas	Contenidos Matemáticos	Desempeños
Situación 1: Patrones con Palillos y Figuras	3	• Patrones numéricos de variación directamente proporcional • Correspondencia entre cantidades	• Construir secuencias numéricas a partir de patrones pictóricos • Describir en lenguaje natural cómo se forma el patrón numérico de variación directamente proporcional • Representar el patrón numérico de variación directamente proporcional en una tabla. • Identificar la relación de dependencia que existe entre la cantidad de palillos por cada lado y la cantidad total de palillos de la figura.
Situación 2: Las canicas con puntajes proporcionales	3	• Patrones numéricos de variación directamente proporcional • Propiedades de la proporcionalidad directa entre dos magnitudes variables: ✓ Homogeneidad con respecto a la suma ✓ Homogeneidad con respecto al producto • Constante de proporcionalidad	• Reconocer y generalizar en palabras, el patrón numérico de variación directamente proporcional • Representar situaciones de variación directamente proporcional en tablas y gráficas. • Identificar la relación de dependencia que existe entre la cantidad de canicas fuera del círculo y el dinero que se gana • Reconocer y generalizar en palabras, que la función de proporcionalidad directa entre dos magnitudes variables es homogénea con respecto a la suma y al producto y que los puntos de su grafica están alineados

Nota: Elaboración propia

Propósito de la Situación 1

Esta primera situación está enfocada hacia el reconocimiento de patrones pictóricos, para poder completar correctamente los diseños presentados luego, a través de unas preguntas, se hace énfasis en la cantidad de palillos ubicados por cada lado y los que se utilizan en total en cada figura, para que reconozcan la relación entre dichas cantidades.

Propósito de la Situación 2

La situación 2 está enmarcada en de un contexto cotidiano como el juego de las canicas, con el cual se trabaja un patrón de variación directamente proporcional, para que los estudiantes identifiquen en él lo que cambia y lo que permanece constante, y que además identifiquen las propiedades que tiene dicha variación.

3.1.2 La propuesta de aula

Situación 1¹⁸: Patrones con Palillos y Figuras

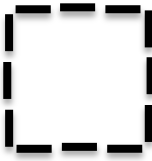
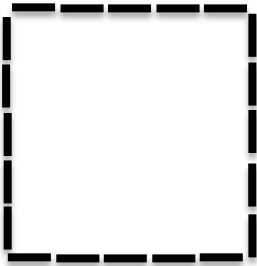
Los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Veinte de Julio, a la hora del descanso, se organizan en determinados grupos para jugar. Unos arman figuras cuadradas y triangulares con palillos, otros juegan con canicas, entre otros juegos.

Un grupo juega armando figuras cuadradas y triangulares de distintos tamaños cada una, con 60 palillos.

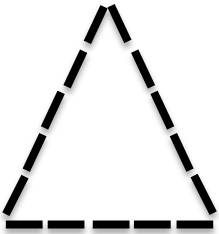
Tarea 1: Reconociendo el patrón

1. Si Juan construyó figuras cuadradas con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado.
 - a. ¿Cuántos palillos utilizó en cada caso, para formar las figuras cuadradas con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado? ¿Cómo obtuviste estas respuestas?
 - b. ¿Cuántos palillos utilizó en total? ¿Cómo obtuviste este cálculo?
2. A Juan se le desacomodaron algunas figuras.
 - a. Ayúdalo a construirlas y a calcular los palillos que necesita.

¹⁸ Esta situación tiene como punto de partida una actividad propuesta por Fiol & Fortuny (1990), a partir de la cual se hace la reformulación y diseño de las preguntas.

Figuras cuadradas con palillos					
Cantidad de palillos usados	4 palillos	8 palillos			24 palillos

- b. Indica como completaste la cantidad de palillos que Juan necesitaba.
- c. Indica que tuviste en cuenta para dibujar las figuras cuadradas que a Juan le faltaban.
3. Si Anita construyó figuras triangulares con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado.
- ¿Cuántos palillos utilizó en cada caso, para formar las figuras triangulares con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado? ¿Cómo obtuviste estas respuestas?
 - ¿Cuántos palillos utilizó en total? ¿Cómo obtuviste este cálculo?
 - Entre Juan y Anita ¿Cuál puede construir mayor número de figuras? ¿Por qué?
4. a. Ayuda a Anita a completar la siguiente tabla.

Figuras triangulares con palillos	Cantidad de palillos usados
	3
	6
	9
	
	21

- b. Indica cómo completaste la columna de cantidad de palillos.
- c. Indica que tuviste en cuenta para dibujar las figuras triangulares que faltaban.

Tarea 2: Patrones numéricos

1. Juan decide hacer otra tabla, sin hacer los dibujos de las figuras cuadradas.

- a. Ayúdalo a completarla

Número de palillos por lado	Procedimiento	Cantidad de palillos usados
4		16
	7×4	
8		32
	9×4	
		40
11		

- b. Escribe las cantidades que se mantienen constantes y las que varían, según la tabla. Explica tu respuesta.

2. Anita decide hacer otra tabla, sin hacer los dibujos de las figuras triangulares.

- a. Ayúdala a completarla

Número de palillos por lado	Procedimiento	Cantidad de palillos usados
	6×3	
8		
		27
10		
	11×3	
		36

- b. Escribe las cantidades que se mantienen constantes y las que varían según la tabla. Explica tu respuesta.
- c. Explícale a Anita y a Juan, que le sucede a la cantidad de palillos usados, cada vez que aumentan las cantidades de palillos por cada lado.

Tarea 3: Encontrando el patrón numérico

Si Juan y Anita tienen suficientes palillos para realizar figuras.

1. Indica para cada caso cuántos palillos necesita Juan para armar figuras cuadradas de 24, 15, 18 y 40 palillos por lado.
2. Indica para cada caso cuántos palillos necesita Anita para armar figuras triangulares de 30, 13, 15 y 50 palillos por lado.
3. Si Juan quiere formar una figura cuadrada con cualquier número de palillos por cada lado ¿Cuántos palillos necesita?
4. Si Anita quiere formar una figura triangular con cualquier número de palillos por cada lado ¿Cuántos palillos necesita?

Situación 2¹⁹: El juego de las bolas de cristal con puntajes proporcionales

Los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Veinte de Julio, a la hora del descanso, se organizan en determinados grupos para jugar. Unos arman figuras cuadradas y triangulares con palillos, otros juegan con canicas, entre otros juegos.

En el grupo que juega con bolas de cristal, cada jugador debe lanzar una bola hacia las que se encuentran al interior de un círculo dibujado en el suelo, buscando hacer que la mayor cantidad de bolas de cristal se desplacen fuera de él. Cada vez que el jugador desplaza 2 bolas de cristal fuera del círculo, gana \$100.

Tarea 1: Reconociendo el patrón numérico

1. Paola asegura que si desplaza 10 canicas fuera del círculo, ganaría \$850.
 - a. Indica si la afirmación es cierta o no.
 - b. Justifica tu respuesta.
2. Si Paola quiere ganar \$1.500.
 - a. Indica cuántas canicas debe desplazar fuera del círculo.
 - b. Justifica tu respuesta.
3. Escribe lo que gana Paola si no logra desplazar fuera del círculo ninguna canica. Justifica tu respuesta
4. Teniendo en cuenta que cada vez que se desplazan 2 bolas de cristal fuera del círculo, se gana \$100. Explícale a Paola cómo puede hallar el dinero que gana cuando desplaza 1 bola.
5. Paola hizo la siguiente tabla para saber el dinero obtenido al desplazar algunas canicas fuera del círculo.

- a. Ayúdala a completarla.

Cantidad de bolas Desplazadas	Valor de 2 canicas desplazadas	Dinero ganado por las bolas desplazadas
2	\$100	\$100
	\$100	\$200
7	\$100	
	\$100	\$500
14	\$100	
	\$100	\$850

- b. Indica cómo completaste los datos que faltaban en la tabla.
6. Si tú participas en el juego de las bolas de cristal aquí descrito, indica cómo calcular la cantidad de dinero que puedes ganar, para cualquier cantidad de bolas que se desplazan fuera del círculo.

¹⁹ Esta situación tiene como punto de partida una actividad propuesta por Obando & Botero (2006), a partir de la cual se hace la reformulación y diseño de las preguntas.

7. Paola dice que para calcular el dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, jugando con las bolas de cristal, se debe multiplicar \$50 por el número de bolas desplazadas.
 - a. Analiza y determina si Paola tiene razón y ¿por qué?
 - b. Encuentra el dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, al desplazar 13, 25 99 y 105 bolas, teniendo en cuenta lo dicho por Paola.
8. Mario es otro estudiante de grado quinto y dice que él calcula la cantidad de dinero que se obtiene por desplazar las bolas de cristal fuera del círculo, multiplicando el número de bolas desplazadas por \$100 y dividiendo este resultado entre 2.
 - a. Indica si Mario tiene razón y ¿por qué?
 - b. Encuentra el dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, al desplazar 13, 25 99 y 105 bolas, teniendo en cuenta lo dicho por Mario.
 - c. Compara los procedimientos propuestos por Paola y Mario, en las preguntas 7 y 8, y saca una conclusión.

Tarea 2: Propiedades del patrón

Pablo, Pedro, Tatiana y Sara son estudiantes de grado quinto, ellos decidieron ubicar en una tabla el dinero ganado y la cantidad de bolas desplazadas, de la siguiente manera:

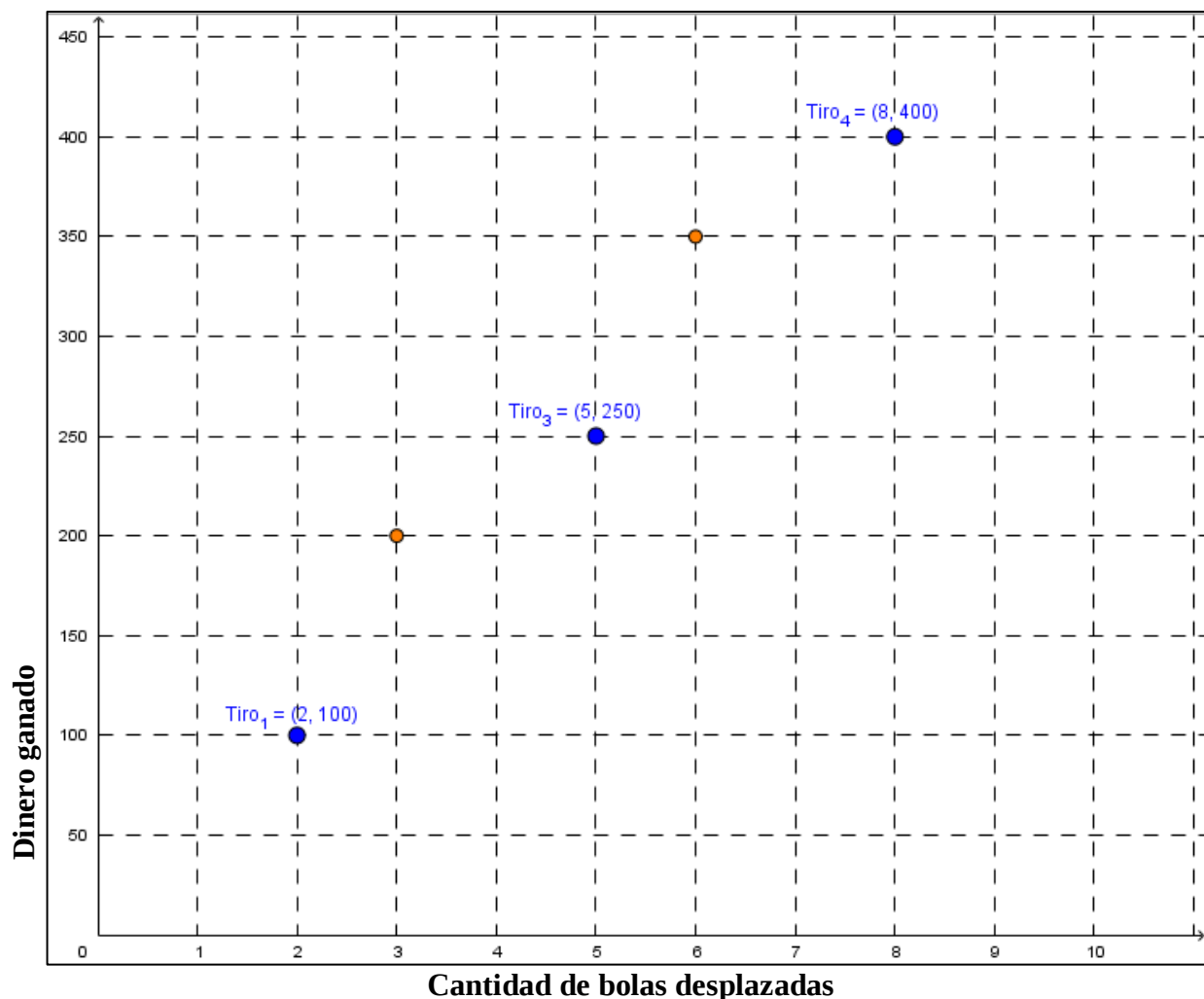
Número del tiro	Cantidad de bolas desplazadas	Dinero ganado por bolas desplazadas
1	7	\$350
2	8	\$400
3	23	\$1.150
4	15	\$750
5	38	\$1.900
6	2	\$100
7	14	\$700
8	18	\$900
9	3	\$150
10	21	\$1.050

1. Pablo afirma que el dinero que ganó al desplazar 38 bolas en el tiro 5, es el mismo que ganó, al desplazar 15 bolas en el tiro 4 y 23 bolas en el tiro 3. Indica si Pablo tiene razón y ¿por qué?
2. Indica si lo dicho anteriormente se cumple para el dinero que ganó Pablo en el tiro 3, y la suma del dinero que gana Pablo, en el tiro 4 y 2, y ¿por qué?
3. Según la propiedad anterior, que se cumple para casos similares, y teniendo en cuenta los datos de la tabla. Descomponga en dos tiros, lo que desplazó Pedro: 30, 46, 53, y 61 bolas.

4. Teniendo en cuenta lo anterior
 - a. Comprueba que el dinero que ganó Pedro al desplazar 30 bolas, es igual a la suma del dinero que ganó en los dos tiros que descompusiste. Así mismo, comprueba que el dinero que ganó Pedro al desplazar 46, 53 y 61 bolas, es igual a la suma del dinero que ganó en los dos tiros que descompusiste, para cada caso.
 - b. Explica con tus propias palabras, la propiedad que usaste en las preguntas 1, 2, 3 y 4a.
5. Sara afirma que el dinero que ganó al desplazar 18 bolas en el tiro 8, es el mismo que ganó al desplazar 3 bolas en el tiro 9, pero multiplicado por 6. Indica si la afirmación de Sara es correcta y ¿por qué?
6. Indica si lo dicho anteriormente se cumple para el dinero que ganó Sara en el tiro 10, y lo que ganó en el tiro 9, multiplicado por 7, y ¿por qué?
7. Según la propiedad anterior, que se cumple para casos similares, y teniendo en cuenta los datos de la tabla, ayúdale a Tatiana a buscar, un tiro que cumpla la propiedad de que al multiplicar, la cantidad de bolas desplazadas de ese tiro, por un número, obtengo 24 bolas. Así mismo, encuentra un tiro que cumpla la propiedad, para obtener 27, 36 y 60 bolas.
8. Teniendo en cuenta lo anterior
 - a. Comprueba que el dinero que ganó Tatiana al desplazar 24 bolas, es igual a lo que ganó, en el tiro que cumple la propiedad (al multiplicar, la cantidad de bolas desplazadas de ese tiro, por un número, obtengo 24 bolas) pero, multiplicado por 3. Así mismo, comprueba que el dinero que ganó Tatiana al desplazar 27, 36 y 60 bolas, es igual a lo que ganó en el tiro que cumple la propiedad, multiplicado por un número.
 - b. Explica con tus propias palabras, la propiedad que usaste en las preguntas 5, 6, 7 y 8a.

Tarea 3: Graficando la variación proporcional

Pedro, estudiante de grado quinto, y sus amigos, por turnos lanzan bolas de cristal. Para no olvidar sus puntajes, decidieron ubicarlos en la siguiente gráfica, donde cada punto azul, determina, la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado.



1. Toma las coordenadas de un punto cualquiera, de los dibujados por Pedro, y explica qué significado tienen, cada uno de esos números, con relación al juego de las bolas.
2. Observa la ubicación de los puntos azules, o tiros que hizo Pedro, y describe de qué manera están ordenados dichos puntos.
3. Ubica en la gráfica, los puntos correspondientes, para 4 y 7 bolas desplazadas. Luego indica si dichos puntos cumplen la misma característica que encontraste en la pregunta 2, y ¿por qué?
4. Pedro afirma que los puntos azules de su gráfica, están alineados. Explica lo dicho por Pedro, relacionando las coordenadas de los puntos azules.
5. Además, Pedro ubicó los puntos de color naranja que están en la anterior gráfica, pero tiene duda, si representan dos tiros distintos de alguien. Ayúdale a Pedro a salir de su duda, no olvides explicar tu respuesta.

6. Pedro después, hizo la siguiente tabla para saber el dinero obtenido al desplazar algunas canicas fuera del círculo, en otros tiros.
- a. Ayúdalo a completarla.

Cantidad de bolas desplazadas	Procedimiento	Dinero ganado por las bolas desplazadas
1	$1 \times \$50$	
3		
	$7 \times \$50$	
10		
		\$750
25		
...		

- b. Escribe las cantidades que se mantienen constantes y las que varían, según la tabla. Explica tu respuesta.
- c. Si n es la cantidad de bolas desplazadas por Pedro, escribe una fórmula que permita encontrar el dinero ganado por las bolas desplazadas.
7. Pedro y Marcos, estaban jugando con los números de la tabla, y encontraron que si tiene 3 canicas y \$150 de ganancia; 6 canicas y \$300 de ganancia; 9 canicas y \$450 de ganancia; 12 canicas y \$600 de ganancia, los valores de $\frac{150}{3}$, $\frac{300}{6}$, $\frac{450}{9}$ y $\frac{600}{12}$, guardan una relación.
- a. Encuentra la relación
8. Pedro y Marcos, estaban jugando con los números de la tabla, y encontraron que si tienen 3 canicas y \$150 de ganancia; 6 canicas y \$300 de ganancia; 9 canicas y \$450 de ganancia; 12 canicas y \$600 de ganancia, los valores de $\frac{3}{150}$, $\frac{6}{300}$, $\frac{9}{450}$ y $\frac{12}{600}$, guardan una misma relación.
- a. Encuentra la relación.
- b. Escribe que puede significar esta relación, en el contexto del juego de las bolas desplazadas del círculo.

3.2 Sobre la implementación

En este apartado se presentan algunos detalles de la población, la metodología llevada a cabo para la experimentación, el análisis de las respuestas producidas por los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa. En este análisis inicialmente se organiza las respuestas de los estudiantes en tablas de acuerdo con la situación, la tarea, la pregunta y la tipificación de la respuesta, teniendo en cuenta los registros escritos.

3.2.1 La población

El desarrollo de la propuesta de aula se llevó a cabo en la institución de carácter oficial; Institución Educativa Técnico Industria Veinte de Julio, de carácter oficial, la cual está ubicada en el nororiente de la ciudad, en la comuna 4, la cual tiene como propósito central orientar al estudiante para que desarrolle competencias laborales, específicas y ciudadanas, asociadas a la productividad y competitividad.

La Institución Educativa, tiene como misión contribuir en la formación integral del estudiante en los niveles de educación preescolar, básica primaria y bachillerato técnico industrial; con pertinencia, calidad y valores para una armónica convivencia, con un enfoque de inclusión, mediante el desarrollo de competencias referidas al desempeño académico, laboral y socio-ambiental.

Dicha institución está integrada por tres sedes:

- Sede Principal Veinte de Julio
- Sede Ignacio Rengifo
- Sede Cristina Serrano

La implementación de la propuesta de aula se realizó en la sede Ignacio Rengifo jornada de la mañana, en el grado quinto, el grupo está conformado por 40 estudiantes con edades entre los 10 y 13 años de edad, de los cuales, 18 son mujeres y 22 son hombres, la mayoría asisten de manera regular a las clases.

Dichos estudiantes no tiene un buen rendimiento en el área de matemáticas, porque de acuerdo con los resultados de las prueba Saber quinto 2017 (Instituto Colombiano para la

Evaluación de la Educación, 2017), el 89% de los estudiantes se encuentran entre el nivel insuficiente y mínimo, y el 11% tienen un nivel satisfactorio.

Además de lo anterior, de acuerdo con los resultados de las pruebas Saber tercero 2015 (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, 2015), los estudiantes están muy débiles en el componente Geométrico-Métrico y Aleatorio y en los procesos de razonamiento, argumentación comunicación, representación y modelación; pero muy fuertes en el componente Numérico-Variacional y en el proceso de planteamiento y resolución de problemas.

Ahora bien, la selección de los sujetos fue intencional, atendiendo al nivel educativo que cursaban los estudiantes y la disponibilidad de la institución, para participar en esta investigación.

3.2.2 Metodología de implementación

La propuesta de aula, se implementó en la institución mencionada anteriormente, en cinco sesiones con una duración de 2 horas cada una. Todas las tareas se realizan de manera individual, al finalizarlas, se realiza una plenaria para discutir las opiniones respecto al desarrollo de las tareas y las estrategias llevadas a cabo por cada estudiante. Durante la implementación se vio necesario reformular algún enunciado y finalmente se recogen los trabajos de los estudiantes.

La situación 1 consta de tres tareas las cuales se aplicaron en dos sesiones de la siguiente manera; el día 20 de octubre de 2017 los estudiantes desarrollaron la tarea 1 y el día 27 de octubre del 2017 realizaron las tareas 2 y 3. El tiempo de implementación en total fue de 210 minutos, la situación 2 consta de tres tareas las cuales se aplicaron en tres sesiones; la primera fue el día 15 de noviembre de 2017 y la última el 4 de diciembre de 2017; el tiempo de implementación de las tareas fue de 120 minutos cada una. En ambas situaciones hubo 20 minutos para la discusión de las preguntas, con el objetivo de que los estudiantes expongan y discutan las estrategias que utilizaron al momento de responder las preguntas planteadas, posibilitando un espacio de reflexión en la clase.

Hay que aclarar que en la implementación de la situación 1 se trabajó con material manipulativo de la siguiente manera, primero se le entregó a cada estudiante 28 palillos, después se les explicó cómo pueden construir una figura cuadrada y triangular con un palillo por lado, a continuación se les propuso que realizaran lo mismo pero para las figuras cuadradas y

triangulares con 2, 3, 4 y 5 palillos por lado y se les indicó que luego de armar una figura, debían desarmarla. Después de lo anterior, se recogió el material.

Finalmente, en ambas situaciones se entrega a cada estudiante la copia de la tarea a desarrollar, de la cual se realiza la lectura, haciendo énfasis en que cada pregunta debe estar explicada. En un segundo momento, se les pide que realicen las tareas de manera individual; no obstante, se aclara a los participantes que si no comprenden alguna pregunta, pueden recurrir a la investigadora para tratar de solucionar sus dudas. Al finalizar la situación, se recogen las copias de las tareas de cada estudiante.

3.2.3 Resultados y análisis de los resultados

En esta sección se presentan los registros y codificación de las respuestas, dadas por los estudiantes de grado quinto, de la Institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio de Cali, a las preguntas y consignas de la propuesta de aula; compuesta de dos situaciones (S1, S2) y de tres tareas cada una (T1, T2, T3).

Los resultados obtenidos se organizan en tablas, a partir de la tipificación de las respuestas expuestas en los registros, el número y porcentaje de estudiantes que corresponden a cada tipo (frecuencia absoluta y relativa), también se indican para cada tipo de respuesta, las explicaciones y justificaciones hechas por los estudiantes, con sus respectivas frecuencias. Cabe aclarar que en la tipificación de las respuestas, se especifican cada uno de los estudiantes que pertenecen a esta, por ejemplo, Estudiante 1 (E1).

En la realización de las tablas se utilizan algunas convenciones para organizar los datos.

Sn: Significa situación n, donde $n=1, 2$.

Tn: Significa Tarea n, donde $n=1, 2, 3$.

Pn: Significa pregunta n, donde $n=1, 2, 3...8$.

En: Significa Estudiante n, donde $n=1, 2, 3... 40$.

Fa: Significa frecuencia absoluta

Fr: Significa frecuencia relativa

Además de lo anterior, para el análisis de los resultados de las situaciones, se tienen en cuenta los registros escritos de los estudiantes y notas de campo; pero también se consideran los

siguientes criterios de análisis organizados en una rejilla (Ver Tabla 3), de acuerdo con lo expresado en el marco conceptual de referencia, citado en el capítulo 2.

Ahora bien, en esta rejilla se categorizan las posibles actuaciones de los estudiantes que pueden llegar a lograr, en el proceso de generalización de un patrón de acuerdo con sus registros (Mason et al. 1985/1999; MEN, 1998, 2006), también se consideran las acciones que dejan ver cómo los estudiantes avanzan en algunos aspectos del pensamiento variacional o aspectos propios del tercer enfoque del Early Algebra y además se consideran algunas dificultades asociadas a los conceptos de razón y proporcionalidad, que los estudiantes tuvieron en el desarrollo de las tareas.

Tabla 3

Rejilla de análisis

Unidades de análisis	Criterios de análisis
Etapas en el proceso de generalización de un patrón (Mason et al. 1985/1999, MEN, 1998, 2006)	Reconocer mentalmente alguna regularidad o algo común, luego de contar, calcular o dibujar las dos o tres figuras o números siguientes de la secuencia
	Expresar y articular en palabras, alguna regularidad observada o algo común en un patrón
	Escribir lo dicho del patrón, o construir una regla que muestre como construir los términos siguientes a partir de los precedentes, lo cual se puede hacer de varias maneras: ❖ Registrar con palabras apoyándose de las figuras, dibujos o diagramas de casos particulares para identificar las características generales del patrón. ❖ Registrar sólo con palabras, es decir expresar en lenguaje cotidiano la generalidad, este registro no incluye símbolos matemáticos, excepto los dígitos. ❖ Registrar con palabras y símbolos matemáticos de las operaciones. ❖ Registrar solo con símbolos, como las letras, los símbolos de las operaciones (+, -, $\times$, $\div$, $\sqrt{\dots}$) ❖ Escribir expresiones algebraicas, tipo retóricas, o fórmulas, a partir de una tabla, para describir la variación o el cambio

	Validar el patrón, lo cual se puede hacer de varias maneras: ❖ Usar los casos en los que ya se sabe la respuesta, porque se ha dibujado anteriormente o hace parte del patrón numérico dado ❖ Hacer cálculos, para casos que se pueden verificar de otras maneras, como dibujando o contando
Tercer enfoque del Early Algebra (aritmética y funciones) (Kaput, Carraher & Blanton, 2008, Carraher & Schliemann, 2007; Blanton et. Al, 2017, Bednarz, Kieran & Lee, 1996).	❖ Comprender las relaciones entre dos variables ❖ Notar regularidades en los patrones presentes en tablas ❖ Describir conceptos algebraicos usando un lenguaje conocido (lenguaje natural), ayudándose también de dibujos ❖ Obtener características comunes y sacar conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas. ❖ Justificar y desarrollar argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta.
Dificultades asociadas a los conceptos de razón, y proporcionalidad (Godino & Batanero, 2002; Guacaneme, 2001; Post, Behr & Lesh, 1988; Obando, Vanegas & Vásquez, 2006)	❖ Usar razonamientos intuitivos sobre las razones, como técnicas aditivas, en lugar de razonar en términos multiplicativos, ❖ Identificar la razón como una división exacta y no como una relación entre cantidades ❖ Asociar en situaciones en las que se manejan magnitudes discretas, la gráfica de proporcionalidad, corresponde con unos puntos alineados y no a una línea recta que pasa por el origen.
Aspectos de desarrollo del pensamiento variacional (MEN, 1998, 2006)	❖ Utilizar el lenguaje ordinario o técnico, las tablas, las gráficas (diagramas) y las representaciones icónicas, para representar o interpretar la variación ❖ Formular conjeturas, ponerlas a prueba, generalizarlas o argumentarlas para sustentarlas o refutarlas, teniendo en cuenta la elaboración e interpretación de alguna representación matemáticas (gráficas, tablas, ecuaciones, etc.) ❖ Caracterizar aspectos de la variación tales como las cantidades que cambian y permanecen constantes, las variables que intervienen, y las posibles relaciones entre esas variables.

Fuente: Elaboración propia obtenida del análisis de revisión documentada

3.2.3.1 Resultados y análisis de resultados de la Situación 1 (S1): Patrones con Palillos y

Figuras

Tarea 1: Reconociendo el patrón numérico

Situación 1, Tarea 1, Pregunta 1 (S1T1P1)

Población: 35 estudiantes

Tabla 4

Tipificación S1, T1, P1

Pregunta 1: Si Juan construyó figuras cuadradas con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado.					
a. ¿Cuántos palillos utilizó en cada caso? ¿Cómo obtuviste estas respuestas?					
b. ¿Cuántos palillos utilizó en total? ¿Cómo obtuviste este cálculo?					
Tipos de respuesta	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1 Estudiantes que encuentran correctamente los palillos que utilizaron para formar las figuras cuadradas con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado. Identifican el número de palillos por lado, como la posición de la Figura en la secuencia, e indican que utilizan 60 palillos en total (E1, E2, E3, E5, E6, E10, E12, E13, E14, E16, E22, E23, E26, E27, E34)	15	43%	En la justificación de los ítems <i>a</i> y <i>b</i> ; no realizan ninguna operación y se limitan al lenguaje natural (Hice una suma, una multiplicación, conté...)	3	20%
			Hacen el dibujo de cada una de las figuras cuadradas, y a partir de estas, realizan el conteo de los palillos, para así obtener lo que utilizan en total, o hacen la sumatoria de los palillos usados en cada caso ($4 + 8 + 12 + 16 + 20$)	10	67%
			Justifican haciendo unas sumas reiteradas ($1 + 1 + 1 + 1$) o unas multiplicaciones (2×4) y no indican como obtienen los palillos que utilizó en total	2	13%
2 Estudiantes que identifican correctamente los palillos que utilizaron, para formar las figuras cuadradas con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado pero indican de manera incorrecta los palillos usados en total (E8, E11, E20, E29, E32)	5	14%	Justifican aludiendo a la construcción de las figuras con los palillos o hacen los respectivos dibujos de estas y consideran que utilizan 28 en total, por ser esta la cantidad con que disponía el estudiante, para construir las figuras, o realizan de manera incorrecta la sumatorio de los palillos y obtienen como total 46 o 68	5	100%
3 Estudiantes que responden en forma parcial el ítem <i>a</i> , e indican de manera incorrecta los palillos usados en total (E4, E7, E18, E21, E25, E28, E31)	7	20%	No justifican como encuentran los palillos que se utilizan para formar las figuras de 1, 2 y 3 palillos por lado (4, 8, 12), indican de manera incorrecta los palillos que se utilizan para las figuras con 4 y 5 palillos por lado (20, 24) y en consecuencia de lo anterior, realizan de manera incorrecta la sumatorio de los palillos y obtienen como total 46, 50 o 68, palillos	7	100%
4 Estudiantes que responden de manera incorrecta los dos ítems (E9, E15, E17, E19, E24, E30, E33, E35)	8	23%	No encuentran los palillos que se necesitan en cada caso, pero indican que sumando los palillos les da en total 46 o 68, o indican que construyen la figura con 20 palillos por lado	5	63%
			Encuentran el total de palillos pero no justifican como obtienen dicha cantidad	2	25%
			No responde la pregunta	1	12%

En relación con los resultados de los 35 estudiantes correspondientes a la pregunta 1, Tarea 1 de la Situación 1, según la tabla 4, se observa que el 57% de los estudiantes contestan de manera correcta la parte *a* de la pregunta, es decir encuentran la cantidad de palillos que se utilizan en cada caso, para formar las figuras cuadradas con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado. De estos, el 14% no responden correctamente el apartado *b*, es decir no indican correctamente el total de palillos utilizados para todas las figuras anteriores.

Ahora bien, el 43% de los estudiantes no responden acertadamente los dos ítems y de estos, algunos (7 de 35) realizan respuestas parcialmente correctas.

Es importante anotar, en relación con la justificación o explicación de cómo se obtienen las respuestas anteriores, los estudiantes se basan en los conteos obtenidos a partir de los dibujos de cada figura cuadrada, y muy pocos (2 de 35) obtienen el total de los palillos, a través de operaciones, ya sea por suma reiterativa ($2 + 2 + 2 + 2$) o por producto (2×4).

Por otra parte el 14% de los estudiantes que no aciertan el total toman en consideración la cantidad de palillos entregados por el profesor para realizar la tarea (en total 28), y no el total real correspondiente a la sumatoria de los palillos utilizados para construir las figuras cuadradas de 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado, es decir 60 palillos.

A partir de lo anterior se infiere que el 57% de los estudiantes pueden reconocer un patrón de variación a partir de un enunciado, apoyados en el uso de material manipulativo, que les permite realizar cada figura y hacer el conteo.

Ahora bien, de acuerdo con Mason et al. (1985/1999) el 43% de los estudiantes logran *ver* alguna característica del patrón, ya que estos identifican por ejemplo, que el número de palillos por lado coincide con la posición de la Figura en la secuencia (Ver Figura 5), ya que en la pregunta no se les indica que la figura con 1 palillo por lado correspondería con la figura 1, y así con los otros casos.

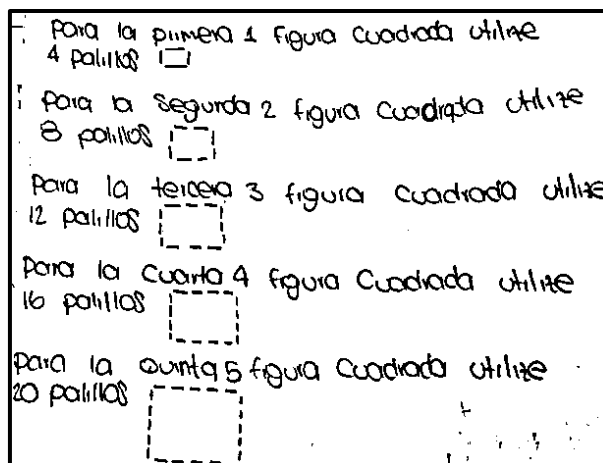


Figura 5. S1, T1, P1, E3

Cabe mencionar también que el patrón hace posible la comprensión de las relaciones entre dos cantidades que varían (Carragher & Schliemann, 2007) y el lenguaje natural permite describir dicha relación de tipo algebraica (Kaput, Carragher & Blanton, 2008) ya que dicho porcentaje de estudiantes, lograron relacionar el número de palillos por lado y la cantidad de palillos usados, lo cual expresan en lenguaje natural, en las respectivas justificaciones, como se puede observar en la Figura 5.

A parte de lo anterior también se puede decir que dos estudiantes logran ver el patrón (Mason et al., 1985/1999), porque lo usan, aunque no lo digan; por ejemplo E22, realiza sumas reiterativas para encontrar los palillos que necesita para cada figura ($1 + 1 + 1 + 1$) y multiplica el número de palillos por lado por 4 (2×4).

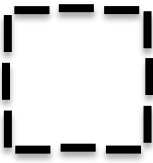
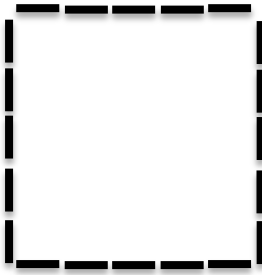
Se puede decir además que de acuerdo con Mason et al. (1985/1999), la mitad de los estudiantes (49%) tienen dificultad para explicar con palabras el patrón, posiblemente porque no están acostumbrados a este tipo de actividades, lo cual se puede evidenciar cuando los estudiantes no justifican cómo hallaron la cantidad de palillos para las figuras propuestas, o cuando solo mencionan que han realizado alguna operación (sumé o multipliqué).

Finalmente, el 20% de los estudiantes que responden en forma parcialmente correcta, indican una secuencia en la que solamente los primeros tres términos corresponden al patrón propuesto (4, 8, 12, 20, 24) y esto puede deberse, a que los estudiantes observaron los dibujos de las figuras cuadradas de la pregunta 2.

Situación 1: Tarea 1, Pregunta 2 (S1T1P2)**Población:** 35 estudiantes

Tabla 5

*Tipificación S1, T1, P2***Pregunta 2:** A Juan se le desacomodaron algunas figuras.**a.** Ayúdalo a construirlas y a calcular los palillos que necesita.

Figuras cuadradas con palillos				
Cantidad de palillos usados	4 palillos	8 palillos		24 Palillos

b. Indica cómo completaste la cantidad de palillos que Juan necesitaba.**c.** Indica que tuviste en cuenta para dibujar las figuras cuadradas que a Juan le faltaban.

Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que dibujan correctamente las figuras, completan la cantidad de palillos usados y responden los ítems <i>b</i> y <i>c</i> (E3, E7, E8, E9, E12, E17, E19, E20, E27, E28, E29, E30, E32)	13	37%	Cuentan los palillos de las figuras que están en la tabla y para dibujar las que faltan tienen en cuenta la cantidad de palillos usados que indica la tabla, o van contando los palillos	8	61%
				Para las dos justificaciones indican que suman los palillos	4	31%
				Tuvo en cuenta que en la tabla, dice que 8 en total, y que por eso la figura tiene 2 por cada lado.	1	8%
2	Estudiantes que dibujan las figuras, completan correctamente la cantidad de palillos usados pero responden en forma parcialmente correcta los ítems <i>b</i> y <i>c</i> o no los responden (E1, E2, E4, E5, E6, E10, E14, E16, E18, E21, E22, E23, E24, E25, E26, E31, E34)	17	49%	No indican como encuentran la cantidad de palillos usados y para dibujar las figuras, indican que tienen en cuenta la cantidad de palillos usados que indica la tabla o cuantos hay por cada lado y algunos realizan una multiplicación (4×6).	4	24%
				En las justificaciones no realizan ninguna operación y se limitan al lenguaje natural (Ej. Hice unas suma o una multiplicación)	3	18%
				Indican que cuentan, arman, desarman y completan	3	18%
				No justifican	7	41%
3	Estudiantes que dibujan de manera incorrecta la figura de 8 o de 24 palillos usados e indican de manera incorrecta los palillos usados que faltaban (E11, E13, E15, E33, E35)	5	14%	Hacen una figura de 24 palillos en total, pero con diferente cantidad de palillos por cada lado y no se le entiende el argumento en el que explica, como dibuja las figuras	3	60%
				Hacen una figura	2	40%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 2, Tarea 1, Situación 1, que se muestran en la tabla 5, se observa que el 86% de los estudiantes logran completar la tabla correctamente. De estos, el 49% no responden de manera adecuada los ítems *b* y *c*. Ahora bien, solo el 14% de los

estudiantes no contestan acertadamente la pregunta, es decir no dibujan de manera correcta las figuras que faltaban, o indican una cantidad de palillos usados que no corresponden con la figura.

Respecto a las justificaciones de cómo completaron la cantidad de palillos usados y los dibujos de las figuras cuadradas que faltaban, los estudiantes se basan en los conteos obtenidos, a partir de los dibujos de las figuras, y solo un estudiante (E6) justifica con un producto, como obtuvo la figura de 24 palillos en total.

Dichos resultados nos permiten afirmar que la mayoría de los estudiantes (86%), interpretan correctamente la tabla, porque tienen en cuenta que para poder dibujar las figuras cuadradas esta debe tener la cantidad de palillos que indica la fila de palillos usados. De manera similar para encontrar los palillos usados que faltaban, tienen que tener en cuenta las figuras que estaban en la tabla.

Así pues, de acuerdo con Obando, Vanegas & Vásquez (2006), la tabla permite a los estudiantes identificar la relación de dependencia entre las cantidades involucradas, que en este caso son, los palillos usados y el número de palillos por cada lado que tienen las figuras que estaban en la tabla, pero esto solo lo logra identificar E27, lo cual explica con un ejemplo (Ver Figura 6).

la tabla me indica dice que la figura tiene 2 por cada lado o sea 8 en total.

Figura 6. S1, T1, P2, E3

En relación con el 14% de los estudiantes que no interpretan correctamente la tabla, se encuentran los que asocian la cantidad de palillos usados, como la cantidad de palillos por cada lado (Ver Figura 7), y los que dibujan la figura de 24 palillo en total, pero con distinto número de palillos por cada lado, otros en cambio que se equivocaron en el conteo de los palillos de la figura que tenía 3 palillos por lado.

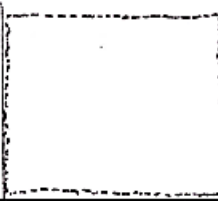
Figuras cuadradas con palillos					
Cantidad de palillos usados	4 palillos	8 palillos			24 palillos

Figura 7. S1, T1, P2, E33

Situación 1: Tarea 1, Pregunta 1 (S1T1P3)**Población:** 35 estudiantes

Tabla 6

Tipificación S1, T1, P3

Pregunta 3: Si Juan construyó figuras triangulares con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado. a. ¿Cuántos palillos utilizó, en cada caso? ¿Cómo obtuviste estas respuestas? b. ¿Cuántos palillos utilizó en total? ¿Cómo obtuviste este cálculo? c. Entre Juan y Anita ¿Cuál puede construir mayor número de figuras? ¿Por qué?					
Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1 Estudiantes que escriben los palillos que se utilizan, para formar las figuras triangulares con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado, identifican el número de palillos por lado, como la posición de la Figura en la secuencia, indican que utilizan 45 palillos en total y responden el ítem c (E2, E6, E12, E14, E20, E22, E23, E25, E27)	9	26%	En la justificación de los ítems <i>a</i> y <i>b</i> no realizan ninguna operación y se limitan al lenguaje natural (Ej. hice una suma, una multiplicación, conté...) e indican que Juan puede construir mayor número de figuras porque tiene más palillos	3	33%
			Hacen el dibujo de cada una de las figuras, y a partir de estas, realizan el conteo de los palillos, para así obtener lo que utilizan en total, o hacen la sumatoria de los palillos usados en cada caso ($3 + 6 + 9 + 12 + 15$), e indican que Juan puede construir mayor número de figuras porque tiene 45 palillos en total	6	67%
2 Estudiantes que responden en forma parcial el ítem <i>a</i> , indican de manera incorrecta los palillos usados en total y algunos responden el ítem <i>c</i> (E3, E7, E8, E9, E13, E16, E18, E19, E26, E28, E29, E30, E31, E34)	14	40%	Algunos justifican que para encontrar los palillos que se utilizan para formar las figuras, multiplican el número de palillos $\times$ los lados del triángulo, todos indican los palillos que se utilizan para las figuras con 1, 2 y 3 palillos por lado, pero para las de 4 y 5 palillos por lado lo hacen de manera incorrecta (15 y 21), y la sumatorio total de los palillos es incorrecta, además algunos responden que Anita puede construir mayor número de figuras porque tiene más palillos que Juan	12	86%
			Hacen de manera correcta el dibujo de las figuras triangulares de 1 y 2 palillos por lado, para las de 3, 4 y 5 palillos por lado lo hacen de manera incorrecta, y por esto al contar los palillos de los dibujos, obtienen como total 36 o 49 palillos, e indican que Juan puede construir mayor número de figuras porque tiene más palillos, o que la figura mayor es la de 21.	2	14%
3 Estudiantes que no responden el ítem <i>a</i> y contestan de manera incorrecta el ítem <i>b</i> (E1, E4, E5, E10, E11, E15, E17, E21, E24, E32, E33, E35)	12	34%	No explican cómo obtienen el total de palillos (36, 46, 54 o 56) e indican que Juan puede construir mayor número de figuras porque tiene mayor cantidad de palitos	4	33%
			Encuentran el total de palillos de manera correcta y no justifican como obtienen dicha cantidad	1	8%
			No responden la pregunta	4	33%
			Indican que en total fueron 54 palillos	3	25%

Según lo que se observa en la tabla 6, de los resultados correspondientes a la pregunta 3, Tarea 1, de la Situación 1, se observa que el 26% de los estudiantes contestan de manera correcta los ítems *a* y *b* de la pregunta, es decir encuentran la cantidad de palillos que se utilizan en cada caso, para formar las figuras triangulares con 1, 2, 3, 4 y 5 palillos por lado y los palillos que se

utilizan en total. Ahora bien, la mayoría de los estudiantes (74%) no responden correctamente los tres ítems y de estos, el 40% realizan respuestas parciales correctas, ya que indican una secuencia en la que solamente los tres primeros términos corresponden al patrón propuesto (3, 6, 9, 15, 21); esto debido a que los estudiantes observan los dibujos de las figuras cuadradas de la pregunta 4.

Cabe resaltar que el 100% de los estudiantes en el ítem c no comprenden el enunciado, posiblemente por su redacción; ya que los estudiantes identifican la persona que consideran que usa más palillos (Juan o Anita), pero lo correcto era que Juan con 60 palillos hizo 5 figuras cuadradas y que Ana aunque uso 45 palillos, también hizo 5 figuras triangulares.

Hay que mencionar además, que de acuerdo con Mason et al. (1985/1999) muchos estudiantes (69%) tienen dificultad para explicar con palabras el patrón, porque a lo mejor las prácticas de validación o justificación no son comunes en la escuela, ya que estos solo mencionan que han realizado alguna operación (sumé o multipliqué) o no justifican, no obstante, E29 si logra explicar el procedimiento de manera general (Ver Figura 8), lo cual es un registro del patrón.

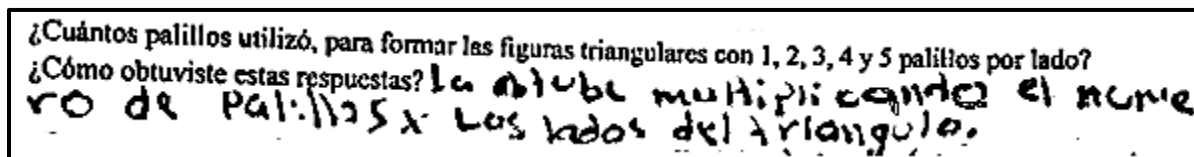


Figura 8. S1, T1, P3, E29

Lo anterior permite afirmar que muy pocos estudiantes (26%) logran construir la secuencia numérica propuesta, para los cinco primeros términos, y para ello se apoyan en el uso de material manipulativo, que les permite realizar cada figura y hacer el conteo. A diferencia de la pregunta 1 (57%), la cual era similar pero con figuras cuadradas; se esperaba que el porcentaje de acierto de la pregunta 3 fuera más alto, pero esto se debe a que muchos estudiantes responden en forma parcial la pregunta 3.

Ahora bien, el 26% de los estudiantes, de manera similar a la pregunta 1, logran ver el patrón (Mason et al., 1985/1999) ya que estos identifican alguna regularidad, como por ejemplo, que el número de palillos por lado coincide con la posición de la Figura en la secuencia, lo cual dejan notar en las explicaciones que hacen (“Para la Figura 1 utilice 3 palillos”...), ya que en la pregunta no se les indica que la figura con 1 palillo por lado correspondería con la figura 1, y así con los otros casos.

Es posible decir también que, el patrón hace posible la comprensión de las relaciones entre dos cantidades que varían (Carragher & Schliemann, 2007) y el lenguaje natural les permitió describir dicha relación de tipo algebraica (Kaput, Carragher & Blanton, 2008), ya que dicho porcentaje de estudiantes lograron relacionar correctamente el número de palillos por lado y la cantidad de palillos usados, lo cual expresan en lenguaje natural, en las respectivas justificaciones, o indican de manera correcta las cantidades, en forma de parejas ordenadas (Ver Figura 9).

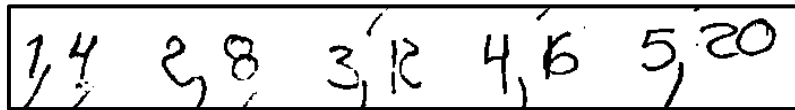


Figura 9. S1, T1, P3, E20

Situación 1: Tarea 1, Pregunta 1 (S1T1P4)

Población: 35 estudiantes

Tabla 7

Tipificación S1, T1, P4

Pregunta 4

a. Ayuda a Anita a completar la siguiente tabla.

Figuras triangulares con palillos	Cantidad de palillos usados
	3
	6
	9
	21

- b. Indica cómo completaste la columna de cantidad de palillos.
- c. Indica que tuviste en cuenta para dibujar las figuras triangulares que faltaban

Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que dibujan las figuras de manera correcta, completan la cantidad de palillos usados y responden correctamente los ítems <i>b</i> y <i>c</i> (E1, E2, E5, E7, E8, E12, E14, E27, E29, E31, E34)	11	31%	Justifican con unas operaciones (7×3 ó $21 \div 3$)	2	18%
				Indican que cuentan el número de palillos de la figura triangular y que tienen en cuenta la cantidad de palillos usados que ponía la tabla	8	72%
				Dibuja las figuras triangulares de 1, 2, 3, 5 y 7 palillos por lado, hace unas multiplicaciones ($3 \times 1 \dots 3 \times 7$) e indica que tuvo en cuenta la tabla del 3	1	9%
2	Estudiantes que dibujan las figuras de manera correcta, completan la cantidad de palillos usados y responden de manera incorrecta los ítems <i>b</i> y <i>c</i> (E4, E6, E9, E10, E15, E16, E18, E19, E20, E23, E24, E26, E28, E30, E32)	15	43%	No justifican	11	73%
				En la justificación de los ítems <i>b</i> y <i>c</i> no realizan ninguna operación y se limitan al lenguaje natural (Ej. hice una suma, una multiplicación)	2	13%
				Hace unas sumas de manera incorrecta ($3 + 3 = 6 + 3 = 9$)	1	7%
				Justifica que resta el doble de cada una y que tiene en cuenta la figura anterior	1	7%
3	Estudiantes que dibujan de manera incorrecta las figuras de 6, 9 o 21 palillos en total, o no responden la pregunta (E3, E11, E13, E17, E21, E22, E25, E33, E35)	9	26%	Hacen una figura de 21 palillos en total pero con diferente cantidad de palillos por cada lado y justifican que cuentan o suman	6	67%
				Hacen una figura de 6, 9 o 21 palillos por cada lado para las que debían tener 6, 9 y 21 palillos en total	2	22%
				No responde la pregunta	1	11%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 4, Tarea 1, Situación 1, que presenta la tabla 7, se puede inferir que el 74% de los estudiantes logran completar la tabla correctamente. De estos, el 43% no responden de manera acertada los apartados *b* y *c*. Ahora bien, solo el 26% de los estudiantes no contestan acertadamente la pregunta, es decir no dibujan de manera correcta las figuras que faltaban, o indican una cantidad de palillos usados que no corresponden con la figura.

Respecto a las justificaciones de cómo completaron la cantidad de palillos usados y los dibujos de las figuras triangulares que faltaban, los estudiantes se basan en los conteos obtenidos, a partir de los dibujos de las figuras, y solo tres estudiantes (E1, E8 y E31) justifican con operaciones ya sea con una división o un producto.

De los resultados anteriores podemos decir que la mayoría de los estudiantes (74%), interpretan correctamente la tabla, y además, se acercan al reconocimiento de las relaciones entre las variables implicadas en la situación, (Palillos por lado y palillos usados). Incluso en esta pregunta se tenían dos tipos de relaciones; la relación directa, la cual los estudiantes identifican porque encuentran los palillos usados que faltaban teniendo en cuenta las figuras que estaban en

la tabla (contando los palillos por lado); y la relación inversa; al reconocer que para poder dibujar las figuras triangulares (con cierta cantidad de palillos por lado), esta debía tener la cantidad de palillos, que indica la columna de palillos usados; pero lo anterior los estudiantes no logran explicitarlo; solamente E1, se acerca en la identificación de ambas relaciones, ya que este realiza dos operaciones inversas ($7 \times 3 = 21$ y $21 \div 3 = 7$).

Además de lo anterior, se puede decir que según Mason et al. (1985/1999), y Carraher & Schliemann (2007), E31 logra *registrar* el patrón con figuras y ve una regularidad presente en la tabla, es decir, el patrón se puede obtener por la tabla del 3 (Ver Figura 10).

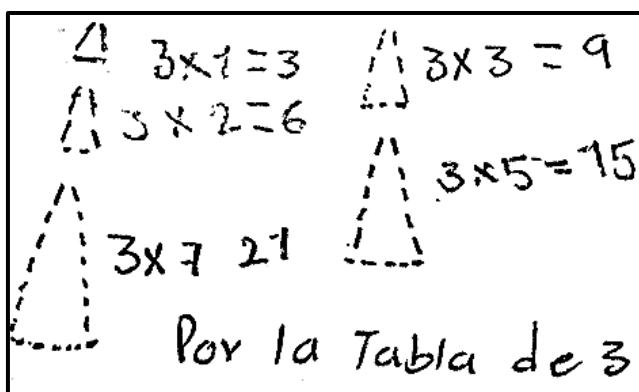


Figura 10. S1, T1, P4, E31

En relación con el 26% de los estudiantes que no interpretan correctamente la tabla, se encuentran los que asocian la cantidad de palillos usados, como la cantidad de palillos por cada lado, también hay estudiantes que dibujan la figura con distintos números de palillos por lado, pero tiene en total, los palillos correspondientes, al que indica la tabla, así pues, el 26% de los estudiantes no identifican la relación de dependencia entre el número de palillos por cada lado de las figuras y los palillos usados.

Tarea 2: Patrones numéricos**Situación 1: Tarea 2, Pregunta 1 (S1T2P1)****Población:** 35 estudiantes

Tabla 8

Tipificación S1, T2, P1

Pregunta 1: Juan decide hacer otra tabla, sin hacer los dibujos de las figuras cuadradas.

a. Ayúdalo a completarla

Número de palillos por lado	Procedimiento	Cantidad palillos usados
4		16
	7×4	
8		32
	9×4	
		40
11		

b. Escribe las cantidades que se mantienen constantes y las que varían según la tabla. Explica tu respuesta.

Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan la tabla correctamente, identifican que el 4 se mantiene constante y que los números de palillos por lado (7,8,9,5,11) son las cantidades que varían (E1, E2, E3, E6, E8, E26, E28)	7	20%	No justifican	3	43%
				Indican que el número que no cambia es el 4 porque la figura tiene 4 lados o es un cuadrado	2	29%
				No justifica el ítem <i>b</i> pero indica que los que cambian son la cantidad de palillos usados y el número de palillos por lado	2	29%
2	Estudiantes que completan la tabla de manera correcta e indican de manera incorrecta las cantidades que varían o las constantes (E7, E9, E12, E16, E17, E19, E22, E23, E27, E29, E30, E31, E32, E33, E34)	15	43%	Indican que los números del 7 hasta el 11 se mantienen y todos se multiplican por 4	8	53%
				Indica que 7×4 y 9×4 se mantienen y que 4×4 , 8×4 , 10×4 y 11×4 varían	1	7%
				Indican que cambian 7×7 , 8×8 , 9×9 , 10×10 y 11×11	2	13%
				El argumento no se entiende	2	13%
				No justifican	2	13%
3	Estudiantes que no logran completar correctamente la tabla, por errores en los cálculos realizados y responden de manera incorrecta el ítem <i>b</i> , o no lo responden (E4, E5, E10, E11, E13, E14, E15, E18, E20, E21, E24, E25, E35)	13	37%	Indican que no cambia el 4	6	46%
				No hacen la explicación	6	46%
				No responde la pregunta	1	8%

En relación con los resultados de los 35 estudiantes correspondientes a la pregunta 1, Tarea 2 de la Situación 1, según la tabla 8, se observa que el 63% de los estudiantes completan la tabla de manera correcta. De estos, el 43% no responden acertadamente el apartado *b*, es decir indican de manera incorrecta las cantidades que varían o las constantes. En cuanto a la justificación de la escogencia de las cantidades que se mantienen constantes, solo 3 estudiantes logran hacerlo correctamente y para las cantidades que varían, solo un estudiante indica de manera general

dichas cantidades, es decir, no las escribe, sino que alude a los nombre de las columnas de la tabla (cantidad de palillos usados y el número de palillos por lado).

Considerando los resultados anteriores, se observa que posiblemente la mayoría de los estudiantes (63%) se acercan a la identificación de la relación de dependencia entre las cantidades involucradas presentes en la tabla (Obando, Vanegas & Vásquez, 2006), ya que para poder obtener la cantidad de palillos usados tenían que multiplicar por 4 el número de palillos por lado, o dividir entre 4 la cantidad de palillos usados para obtener los palillos por lado, aunque este último no fue teniendo en cuenta por ningún estudiante.

Con respecto al ítem *b*, el 37% de los estudiantes (entre los que completan la tabla de manera correcta e incorrecta), logran identificar las cantidades que varían, y el 23% las que se mantienen constantes según la tabla, pero solo 3 estudiantes (E1, E6, E26) escriben las cantidades que para ellos son las que “cambian”, las cuales corresponden a las cantidades de la columna de número de palillos por lado, y E3 identifica que además de estas, también varían las cantidades de los palillos usados.

Lo anterior puede deberse, a que la columna de procedimiento, permite visualizar el número constante, que en este caso es el número 4, así pues, esta representación del patrón, facilita la comprensión de la variable (MEN, 1998). Cabe añadir, que dicho porcentaje de estudiantes (37%) con ayuda de la tabla, se acercan a la comprensión de algunos aspectos relacionados con el pensamiento variacional (MEN, 2006), ya que describen lo que cambia o varía y lo permanece constante o que no cambia (Ver Figura 11), y además, utilizan el lenguaje natural para describir la variación, lo cual logran interpreta a partir de la tabla.

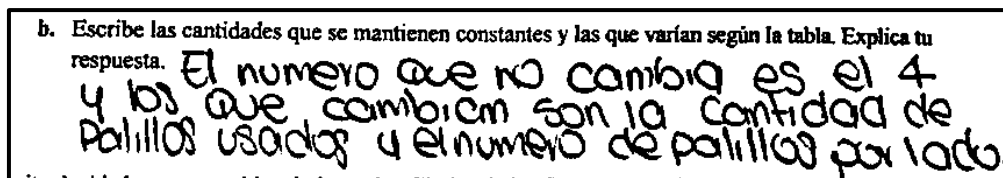


Figura 11. S1, T2, P1, E3

Ahora bien, de este porcentaje, solo 2 estudiantes (E2, E8), logran *ver* y *registrar* el patrón presente en la tabla, (Mason et al., 1985/1999), porque encuentran algo común (La cantidad constante es 4, porque las figuras son cuadradas o tienen cuatro lados).

Situación 1: Tarea 2, Pregunta 2 (S1T2P2)

Población: 35 estudiantes

Tabla 9

*Tipificación S1, T2, P2***Pregunta 2:** Anita decide hacer otra tabla, sin hacer los dibujos de las figuras triangulares.**a.** Ayúdala a completarla

Número de palillos por lado	Procedimiento	Cantidad palillos usados
	6×3	
8		
		27
10		
	11×3	
		36

b. Escribe las cantidades que se mantienen constantes y las que varían según la tabla. Explica tu respuesta**c.** Explicale a Anita y a Juan, que le sucede a la cantidad de palillos usados, cada vez que aumentan las cantidades de palillos por cada lado.

Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan la tabla correctamente, indican que la cantidad constante es el 3, que los números de palillos por lado (6,8,9,10,11,12) son las cantidades que varían y hacen la explicación pedida del ítem c (E1, E2, E6, E13, E14, E25, E26, E28)	8	23%	No justifican los ítems a y b, e indican en el ítem c que aumenta la cantidad de palillos usados, o que se hacen más grandes las figuras	7	88%
				Justifica que el número que no cambia es el 3 porque la figura tiene 3 lados y que la cantidad de palillos y el número de palillos por lado va aumentando cada número y cada cantidad de palillos	1	12%
2	Estudiantes que completan la tabla correctamente e indican que el número que no cambia es el 3 (E8, E23, E32)	3	9%	No justifica	1	33%
				Indica que el 3 no cambia porque es un triángulo	1	33%
				La justificación no se entiende	1	33%
3	Estudiantes que completan la tabla, indican de manera incorrecta las cantidades que varían y las constantes, y algunos hacen la explicación pedida del ítem c (E3, E7, E9, E12, E16, E17, E19, E27, E29, E30, E34)	11	31%	Indica que el número que no cambia es el 4	7	64%
				Indica que se mantiene constante el resultado del número de la multiplicación y que aumenta el número de palillos	1	9%
				Indican que 6×3 y 11×3 se mantienen, que 8×3 , 9×3 , 10×3 y 12×3 varían, y respecto al ítem c indican que se usan más palitos, porque sigue aumentando el número de lados	2	18%
				Indica que ya viene siendo 2 por cada lado y luego 3 por cada lado	1	9%
4	Estudiantes que no logran completar correctamente la tabla, por errores en los cálculos realizados (E4, E5, E10, E11, E15, E18, E20, E21, E22, E24, E33, E31, E35)	13	37%	Indica que el 3 no cambia	1	8%
				Indican que los constantes son los 3 y en el ítem c indican que se hacen más grandes las figuras	2	15%
				No justifican	9	69%
				No responde la pregunta	1	8%

Según lo que se observa en la tabla 9, los porcentajes son similares a la pregunta anterior, ya que el 63% de los estudiantes completan la tabla de manera correcta y el 37% no logran hacerlo, por errores en los cálculos realizados. Ahora bien, del 63% de los estudiantes que completan la

tabla correctamente, el 31% no responden acertadamente el apartado *b*, es decir no indican de manera correcta las cantidades que varían y las que se mantienen constantes, según la tabla.

En cuanto a la justificación de la escogencia de las cantidades que se mantienen constantes, solo 2 estudiantes logran hacerlo correctamente; para las cantidades que varían el 23% se limitan a escribir, las cantidades de la columna, número de palillos por lado.

Respecto al 68% de los estudiantes que no responden correctamente el ítem *b*, se puede decir que E3 confunde la cantidad variable de la tabla anterior, ya que indica que es 4, E9 de nuevo identifica como cantidades constantes, a las multiplicaciones que ya estaban en la tabla en la columna de procedimiento (6×3 y 11×3), y las demás multiplicaciones son las que varían.

Considerando los resultados anteriores, se observa que la mayoría de los estudiantes (63%) se acercan a la identificación de la relación de dependencia entre las cantidades involucradas presentes en la tabla (Obando, Vanegas & Vásquez, 2006), lo cual se trabaja en el ítem *c*, aunque solamente E2, logra relacionar en su explicación ambas cantidades (Ver Figura 12).

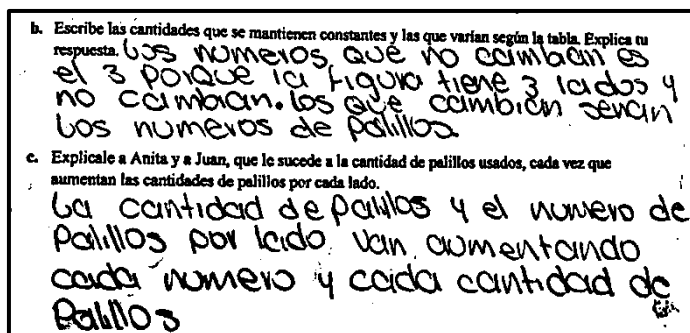


Figura 12. S1, T2, P2, E2

Otros en cambio (E7, E9, E20, E28) identifican que aumentan una de las dos, ya sea el número de palillos por lado o la cantidad de palillos usados, o tienen en cuenta la construcción de las figuras con los palillos, e indican que se hacen más grandes las figuras (E13, E14, E25), lo cual puede estar relacionado con que la cantidad de palillos usados aumenta.

Por lo que se refiere a las cantidades que varían, 5 estudiantes (E1, E3, E6, E11, E26) escriben las cantidades que para ellos son las que “cambian”, las cuales corresponden a las cantidades de la columna de número de palillos por lado, y aunque E2 no escribe dichos números, alude a los números de dicha columna.

Con respecto al ítem *b*, el 32% de los estudiantes logran identificar las cantidades que varían según la tabla y el 14% identifican las que se mantienen constantes (“El 3 no cambia”), y esto puede deberse, a que la columna de procedimiento permite visualizar el número constante, que en este caso es el número 3, así pues, esta representación del patrón facilita la comprensión de la variable (MEN, 1998).

Cabe añadir, que dicho porcentaje de estudiantes (37%) con ayuda de la tabla, están desarrollando algunos aspectos del pensamiento variacional, ya que estos logran identificar lo que cambia o varía y que lo permanece constante o no cambia (MEN, 2006) (Ver Figura 12). Ahora bien, de este porcentaje, al igual que en la pregunta anterior, los mismos 2 estudiantes (E2, E8), logran *ver* y *registrar* el patrón presente en la tabla, porque encuentran algo común (La cantidad constante es 3, porque las figuras son triangulares o tienen tres lados).

Tarea 3: Encontrando el patrón numérico

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 1 (S1T3P1)

Población: 35 estudiantes

Tabla 10

Tipificación S1, T3, P1

Pregunta 1: Si Juan y Anita tienen suficientes palillos para realizar figuras. Indica para cada caso cuántos palillos necesita Juan para armar figuras cuadradas de 24, 15, 18 y 40 palillos por lado.						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que identifican correctamente los palillos que se utilizan para armar figuras cuadradas de 24, 15, 18 y 40 palillos por lado (E1, E2, E3, E6, E7, E9, E10, E11, E12, E23, E26, E27, E28, E29, E31)	15	43%	No hace ninguna operación	3	20%
				Multiplican por 4 cada cantidad	11	73%
				Dibuja 4 cuadrados y en los 4 lados de los cuadrados escribe el número de palillos por lado, también relaciona con el signo igual cada figura con el total	1	7%
2	Estudiante que encuentran en forma parcialmente correcta, los palillos que se utilizan para armar figuras cuadradas de 24, 15, 18 y 40 palillos por lado o tienen algún error en los cálculos (E5, E14, E16, E19, E25, E30, E34)	7	20%	Multiplica 24×4 , 18×4 , 40×4	1	14%
				Escribe los palillos que necesita para formar las figuras cuadradas (60,72,160), pero para 24 palillos por lado, lo indica de manera incorrecta (126)	1	14%
				Tienen errores en los cálculos realizados	4	57%
				Hace unas sumas reiterativas para cada caso pero se equivoca en los resultados para 15 y 18 palillos por lado	1	14%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E4, E8, E13, E15, E17, E18, E20, E21, E22, E24, E32 E33, E35)	13	37%	Realiza de manera incorrecta los dibujos de las figuras	1	8%
				Hace una suma ($24 + 40 + 15 + 18$)	1	8%
				Escriben un número (50 ó 15)	2	15%
				La respuesta no se entiende	2	15%
				No responden la pregunta	7	54%

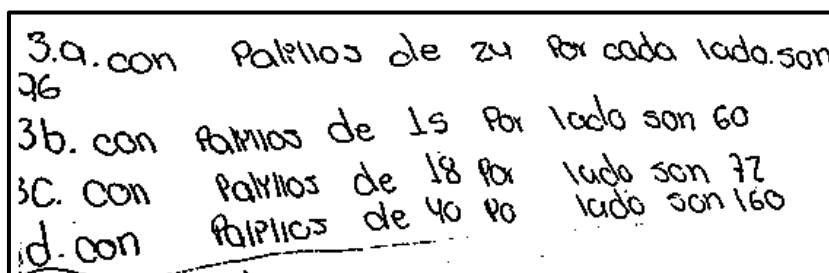
De acuerdo con los resultados presentados en la tabla 10, se puede deducir que el 63% de los estudiantes logran encontrar para cada caso, cuántos palillos necesita Juan, para armar las figuras cuadradas de 24, 15, 18 y 40 palillos por lado. De estos, la mayoría (17 de 22 estudiantes), realizan operaciones para encontrar los resultados, aunque algunos (20%) lo hacen de forma parcialmente correcta.

Respecto al 37% de los estudiantes que no logran responder correctamente, 3 estudiantes no interpretan correctamente el enunciado, porque algunos suman la cantidad de palillos por lado y otros indican un número, el cual no corresponde con las cantidades que deberían obtener.

Considerando los resultados anteriores, es posible decir que el 63% de los estudiantes logran ver el patrón de dos formas, ya que estos, multiplican el número de palillos por lado por 4 (24×4), o suman cuatro veces la cantidad correspondiente ($24 + 24 + 24 + 24$), y algunos (3 de 20) al parecer tienen en cuenta alguno de estos dos procedimientos, puesto que logran indicar las cantidades correctas, pero no hay una evidencia de un procedimiento aritmético, en sus escritos (Ver Figura 13).

También se puede afirmar que dicho porcentaje de estudiantes logran encontrar los palillos usados para las figuras cuadradas de 24, 15, 18 y 40 palillos por lado, porque tuvieron en cuenta la tabla que completaron en la pregunta 1 de la tarea 2.

Ahora bien, de acuerdo con Carraher & Schliemann (2007) al trabajar el patrón como una regla que genera la colección de las figuras cuadradas, 3 estudiantes (E1, E23, E27) relacionan las dos cantidades que varían (los palillos por lado y los palillos usados) pero aun, esto no logran generalizarlo en sus justificaciones (Ver Figura 13).



3a. con	palillos de 24	por cada lado son	96
3b. con	palillos de 15	por lado son	60
3c. con	palillos de 18	por lado son	72
3d. con	palillos de 40	por lado son	160

Figura 13. S1, T3, P1, E1

Hay que añadir a lo anterior que E28 se apoya de unas representaciones pictóricas (unos cuadrados) para responder la pregunta, de lo cual se puede inferir que *ve y registra* el patrón

(Mason et al, 1985/1999), como el cálculo del perímetro, porque el estudiante en cada lado del cuadrado, escribe el número que correspondería con la cantidad de palillos por cada lado, e indica el total de palillos para cada figura (Ver Figura 14).

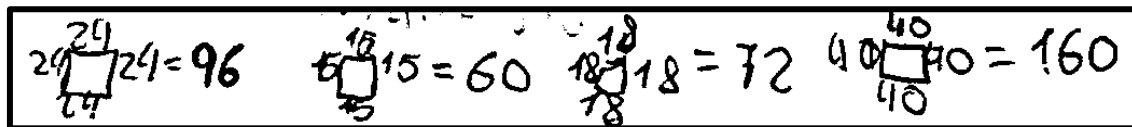


Figura 14. S1, T3, P1, E28

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 2 (S1T3P2)

Población: 35 estudiantes

Tabla 11

Tipificación S1, T3, P2

Pregunta 2: Si Juan y Anita tienen suficientes palillos para realizar figuras. Indica para cada caso, cuántos palillos necesita Anita para armar figuras triangulares de 30, 13, 15 y 50 palillos por lado.					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	
1	Estudiantes que identifican correctamente los palillos que se utilizan para armar figuras cuadradas de 30, 13, 15 y 50 palillos por lado (E1, E2, E3, E5, E6, E7, E9, E13, E16, E14, E10, E12, E23, E25, E26, E27, E28, E29, E31, E34)	20	57%	No hacen ninguna operación	5 25%
				Multiplan por 3 cada cantidad	13 65%
				Dibuja 4 triángulos y en los 3 lados escribe el número de palillos por lado, también relaciona con el signo igual cada figura con el total	1 5%
				Hace unas sumas reiterativas (30 + 30 + 30 ...)	1 5%
2	Estudiantes que responden en forma parcialmente correcta (E11, E19, E30)	3	9%	Hacen correctamente las multiplicaciones excepto una (13 × 3 = 93 ó 31 × 3 = 34)	3 100 %
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E4, E8, E15, E17, E18, E20, E21, E22, E24, E32, E33, E35)	12	34%	Escriben un número (67 o 15)	2 16%
				La respuesta no se entiende	1 8%
				No responden la pregunta	9 75%

De acuerdo con los resultados presentados en la tabla 11, se puede deducir que el 66% de los estudiantes logran encontrar para cada caso cuántos palillos necesita Anita, para armar las figuras triangulares de 30, 13, 15 y 50 palillos por lado. De estos, la mayoría de los estudiantes (17 de 23 estudiantes) realizan operaciones para encontrar los resultados, aunque algunos (9%) lo hacen de forma parcialmente correcta.

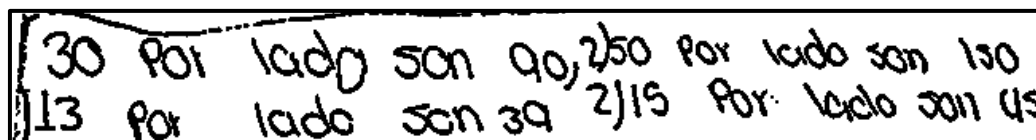
Respecto al 34% de los estudiantes que no logran responder correctamente, 3 estudiantes no interpretan correctamente el enunciado porque indican un número, el cual no corresponde con ninguna de las cantidades que deberían obtener.

Considerando lo dicho anteriormente y los porcentajes obtenidos en la pregunta 1, los resultados son muy similares, el 66% de los estudiantes, logran ver el patrón de dos formas, ya

que estos, multiplican el número de palillos por lado por 3 (30×3), o suman tres veces la cantidad correspondiente ($13 + 13 + 13$), y algunos estudiantes (5 de 23) al parecer tienen en cuenta alguno de estos dos procedimientos, puesto que logran indicar las cantidades correctas, pero no hay una evidencia de un procedimiento aritmético, en sus escritos.

También se puede afirmar que dicho porcentaje de estudiantes logran encontrar los palillos usados para las figuras cuadradas de 24, 15, 18 y 40 palillos por lado, porque tuvieron en cuenta la tabla que completaron en la pregunta 2 de la tarea 2, y los mismos 3 estudiantes (E1, E23, E27) de la pregunta anterior, relacionan dichas cantidades en sus respuestas, es decir, no se limitan a realizar una operación, sino que indican los palillos por lado y los palillos usados (Ver Figura 15).

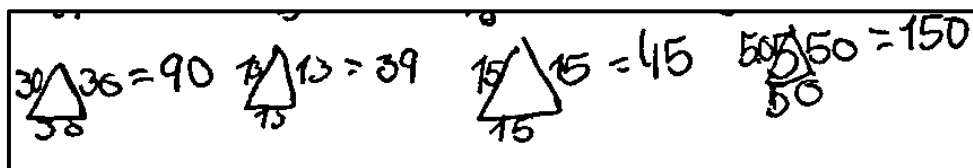
Así pues, de acuerdo con Carraher & Schliemann (2007) al trabajar el patrón como una regla que genera la colección de las figuras cuadradas, 3 estudiantes logran identificar las relaciones entre estas dos cantidades (los palillos por lado y los palillos usados) que varían, pero aun esto no logran generalizarlo en sus justificaciones (Ver Figura 15).



30	Por lado son	90	250	Por lado son	150
13	Por lado son	39	215	Por lado son	45

Figura 15. S1, T3, P2, E1

Hay que añadir a lo anterior que E28, al igual que en la pregunta 1, se apoya de representaciones pictóricas (unos triángulos) para responder a la pregunta, de lo cual se puede inferir que *ve y registra* el patrón, como el cálculo del perímetro, porque el estudiante en cada lado del triángulo escribe el número que correspondería con la cantidad de palillos por cada lado, e indica el total de palillos para cada figura (Ver Figura 16).



$\triangle$ 30 30 30 = 90	$\triangle$ 13 13 13 = 39	$\triangle$ 15 15 15 = 45	$\triangle$ 50 50 50 = 150
------------------------------	------------------------------	------------------------------	-------------------------------

Figura 16. S1, T3, P2, E28

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 3 (S1T3P3)**Población:** 35 estudiantes

Tabla 12

Tipificación S1, T3, P3

Pregunta 3: Si Juan quiere formar una figura cuadrada con cualquier número de palillos por cada lado ¿Cuántos palillos necesita?						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que describen el patrón y responden dando un ejemplo particular, multiplicando por 4 (E1, E2, E7, E14, E27, E28, E30, E31)	8	23%	Indican que multiplican el número de palillos por la figura y que por ejemplo cada 4 palillos $\times$ 4 lados = 16	2	25%
				Suman cuatro veces una cantidad (500, un millón o 10)	3	38%
				Hacen una multiplicación ($90.000.000 \times 4$ ó 100.000×4 ó 150×4)	3	38%
2	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E3, E5, E6, E9, E10, E11, E12, E13, E16, E17, E19, E20, E24, E25, E26, E29, E34)	17	49%	Hacen una suma ($4 + 8 + 12 + 16 + 20$)	5	29%
				Escriben un número (2 ó 20 ó 200 ó 45 ó 46 ó 60 ó 105)	10	59%
				Indica que necesita formar la figura con números de palillos iguales	1	6%
				Indica que necesita la cantidad de los lados para hacer cualquier cantidad	1	6%
3	Estudiantes que no responden la pregunta E4, E8, E15, E18, E21, E22, E23, E32, E33, E35)	10	29%	No responden la pregunta	10	100%

En relación con los resultados de los 35 estudiantes correspondientes a la pregunta 3, Tarea 3 de la Situación 1, según la tabla 12, se observa que el 23% de los estudiantes contestan de manera correcta la pregunta, la mitad de los estudiantes (49%) no responden acertadamente y el 29%, no responden la pregunta.

Es importante anotar que la justificación o explicación de cómo pueden saber la cantidad de palillos que necesita Juan, si quiere formar una figura cuadrada con cualquier número de palillos por cada lado, solo el 23% de los estudiantes logran hacerlo de diversas maneras, ya sea describiendo el procedimiento o apoyándose de ejemplos.

Sobre la base de las ideas expuestas, se infiere que el 23% de los estudiantes lograron *ver y validar* el patrón (Mason et al., 1985/1999), ya que estos lo usan de dos maneras, ya sea haciendo el producto de un número por cuatro (150×4) o hacen una suma reiterativa ($10 + 10 + 10 + 10$) para encontrar el número de palillos que necesita Juan.

Ahora bien, de estos estudiantes; E7 y E30, lograron *registrar* el patrón solamente con palabras (Mason et al., 1985/1999), pero además, ellos identifican la cantidad constante como el

número de lados de la figura y la cantidad variable como el número de palillos, los cuales deben ser los de los lados (Ver Figura 17).

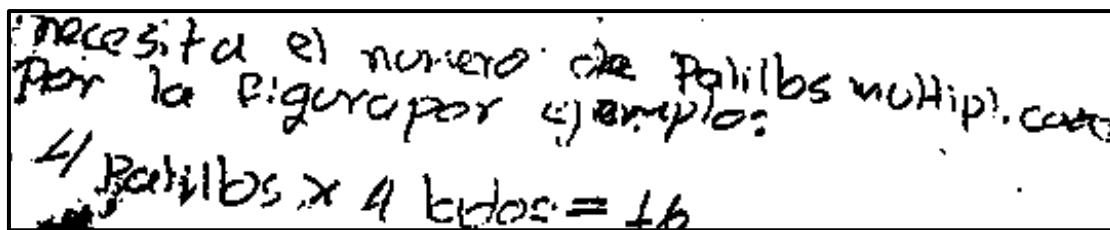


Figura 17. S1, T3, P3, E7

Cabe añadir, que en el ejemplo anterior se ve claramente, lo que Kaput, Carraher & Blanton (2008) proponen, es decir, el lenguaje natural les permite a los estudiantes describir conceptos algebraicos y como dice el Ministerio de Educación Nacional (2006), la generalización de patrones numéricos preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica, a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes, que en este caso es la que expresión que permite encontrar los palillos que se necesitan para una figura con cualquier cantidad de palillos por cada lado (Ver Figura 16).

Respecto al 49% de los estudiantes que responden de manera incorrecta, se puede inferir que dos estudiantes (E9 y E29) logran ver el patrón porque notan alguna regularidad (Mason, et al., 1985/1999), como por ejemplo que la figura debe tener el mismo número de palillos por cada lado, o que esta cantidad es importante conocerla, para así hacer cualquier figura, ya que estos indican por ejemplo que necesita formar la figura con números de palillos iguales.

Ahora bien, de dicho porcentaje, la mayoría (10 de 17), posiblemente por la manera como estaba redactada la pregunta, interpretaron que se les pedía indicar una cantidad de palillos, con la que se pudiera construir alguna figura cuadrada, incluso algunos (5 de 17) consideraron los 60 palillos como respuesta.

Situación 1: Tarea 3, Pregunta 4 (S1T3P4)**Población:** 35 estudiantes

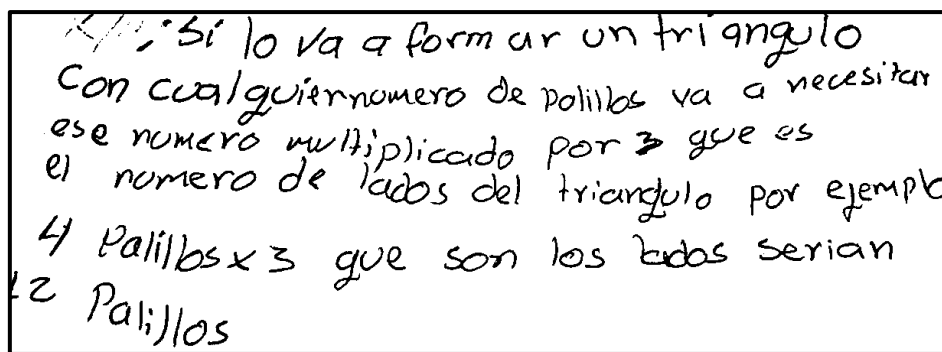
Tabla 13

Tipificación S1, T3, P4

Pregunta 4: Si Anita quiere formar una figura triangular con cualquier número de palillos por cada lado ¿Cuántos palillos necesita?					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	
1	Estudiantes que describen el patrón y responden dando un ejemplo particular, multiplicando por 3. (E2, E14, E27, E28, E29, E31)	6	17%	Hacen una multiplicación (500.000×3 ó $60.000.000 \times 3$ ó 150×3)	3
				Suman tres veces alguna cantidad (un millón ó 10)	2
				Indica que para un triángulo con cualquier número de palillos, necesita ese número multiplicado por 3, por ejemplo 4 palillos $\times 3$	1
2	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E3, E5, E6, E7, E9, E10, E11, E12, E13, E16, E17, E20, E24, E25, E26, E30, E34)	17	49%	Hacen una suma ($3 + 9 + 6 + 15 + 21$)	5
				Escriben un número (2 ó 15 ó 54 ó 108 ó 200 ó 46)	9
				Indica que multiplica el número de los lados	2
				Indica que necesita la cantidad de los lados si quiere hacer cualquier cantidad	1
3	Estudiantes que no responden (E1, E4, E8, E15, E18, E19, E21, E22, E23, E32, E33, E35)	12	34%	No responden la pregunta	12

En relación con los resultados de los 35 estudiantes correspondientes a la pregunta 4, Tarea 3 de la Situación 1, según la tabla 13, se observa que el 17% de los estudiantes contestan de manera correcta la pregunta, la mitad de los estudiantes (49%) no responden acertadamente y el 34%, no responden la pregunta. Es importante anotar, respecto a la justificación o explicación de cómo saber la cantidad de palillos que necesita Anita, si quiere formar una figura triangular con cualquier número de palillos por cada lado, el 17% de los estudiantes logran hacerlo de diversas maneras, ya sea describiendo el procedimiento o apoyándose de ejemplos.

Lo anterior nos permite afirmar que solamente 6 estudiantes (23%) lograron *ver y validar* el patrón (Mason et al., 1985/1999), ya que estos lo usan de dos manera, ya sea haciendo el producto de un número por cuatro (150×3) o hacen una suma reiterativa ($10 + 10 + 10$) para encontrar el número de palillos que necesita Anita. Ahora bien, de estos estudiantes; E29 logra *registrar* el patrón solo con palabras (Mason et al., 1985/1999), pero además, explicita, que la cantidad constante es 3 porque la figura tiene tres lados y habla en términos de “cualquier cantidad”, lo cual se puede decir que posiblemente la identifica como la cantidad variable (Ver Figura 18).



Si lo va a formar un triángulo
 Con cualquier número de palillos va a necesitar
 ese número multiplicado por 3 que es
 el número de lados del triángulo por ejemplo
 4 palillos $\times 3$ que son los lados serían
 12 palillos

Figura 18. S1, T3, P4, E29

Cabe añadir, que en el ejemplo anterior se ve claramente, lo que Kaput, Carraher & Blanton (2008) proponen, es decir, el lenguaje natural les permite a los estudiantes describir conceptos algebraicos y como dice el Ministerio de Educación Nacional (2006), la generalización de patrones numéricos preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica, así, pues, este 17% de los estudiantes están muy cerca de lograr formular la regla para saber, la cantidad de palillos que necesita Juan, si quiere formar una figura triangular con cualquier número de palillos por cada lado.

Respecto al 49% de los estudiantes que responden de manera incorrecta, se puede inferir que dos estudiantes (E7 y E30) logran *ver y registrar* el patrón (Mason, et al., 1985/1999), pero en forma parcial porque ellos solamente indican que “multiplican el número de los lados”.

En conclusión, algunos estudiantes en sus argumentos se acercan a una expresión general que permite hallar cualquier cantidad de palillos usados a partir del número de palillos por lado, de los cuales E29 y E7 muestran un acercamiento a la comprensión de lo indeterminado de la variable.

Cabe destacar que los demás estudiantes si logran reconocer el patrón, ya que ellos calculan la cantidad de palillos usados para el número de palillos por lado que se les pedía en las diferentes preguntas, ya sea con una multiplicación por 3 o por 4, o con una suma reiterativa. Además de esto, dichos estudiante logran identificar en los patrones, las cantidades que varían y las que se mantienen constantes, las logran relacionar en algunas ocasiones.

3.2.3.2 Resultados y análisis de resultados de la Situación 2 (S2) El juego de las bolas de cristal con puntajes proporcionales

Tarea 1: Reconociendo el patrón numérico

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 1 (S2T1P1)

Población: 34 estudiantes

Tabla 14

Tipificación S2, T1, P1

Pregunta 1: Paola, estudiante del grado quinto, asegura que si desplaza 10 canicas fuera del círculo, ganaría \$850.						
a. Indica si la afirmación de Paola es cierta o no.						
b. Justifica tu respuesta.						
	Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que la afirmación de Paola es falsa (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E19, E21, E23, E24, E25, E26, E27, E28, E29, E30, E31, E33, E34, E35, E36, E37, E38, E39)	33	97%	Justifica con dos multiplicaciones (50×10 , 100×5) e indica que una bola cuesta 50 y 2 cuestan 100	1	3%
				Justifican con una multiplicación (10×50) e indican que si 1 bola vale \$50, 10 bolas valen 500	20	61%
				Justifican que si se desplazan 2 bolas se gana \$100, entonces si se desplaza 10 bolas se gana 500	6	18%
				Indican que si dos bolas de cristal son 100, 10 son 500, realizan una multiplicación (10×5) y aumentan un cero al resultado	2	6%
				Realizan una suma reiterativa (5 veces 100 o 10 veces 50) y algunos indican que con una bola gana \$50 o que con 2 bolas ganan \$100 o que para ganar 850 necesita sacar 17 bolas	4	12%
2	Estudiante que no responde la pregunta (E40)	1	3%	No responde	1	100%

De acuerdo con la tabla 14, el 97% de los estudiantes responden de manera correcta a la pregunta planteada, es decir, identifican que Paola no puede ganarse \$1.500 por desplazar 10 bolas además infieren que 1 bola vale \$50; de estos, el 100% logran justificar de manera correcta su respuesta, ya sea por medio del lenguaje natural o a través de operaciones. Ahora bien solo el 3% de los estudiantes no responden la pregunta.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede afirmar que el 97% de los estudiantes comprenden el problema; de estos el 76%, logran identificar relaciones existentes entre las cantidades implicadas en la situación (Post, Behr & Lesh, 1988) (Ver Figura 19), y además en sus justificaciones dan muestra de que infieren nuevas relaciones (si el jugador desplaza 2 bolas de cristal fuera del círculo, gana \$100, por eso si se desplaza una bola se gana \$50”).

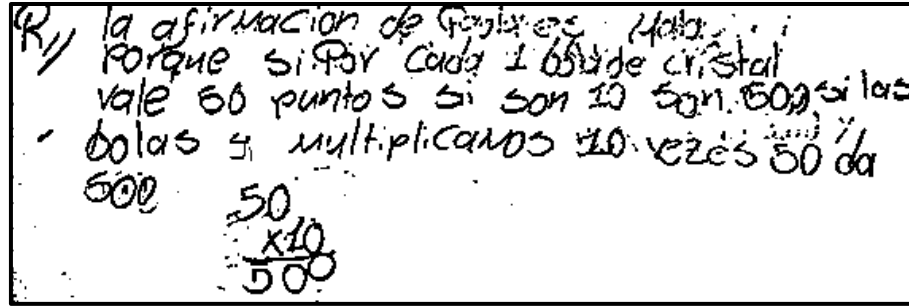


Figura 19. S2, T1, P1, E7

Se puede señalar también que la mayoría de los estudiantes lograron *ver* el patrón (Mason et al., 1985/1999), porque realizaron un producto para identificar que \$850 no corresponde con lo que se gana Paola al desplazar 10 canicas; pero además dos estudiantes (E6 y E26) *ven* que el patrón es equivalente a multiplicar por 5 la cantidad de bolas desplazadas, pero agregando al resultado, un cero al final y E23 *ve* de dos manera el patrón, ya que este realiza el producto de 100×5 y 50×10 .

Ahora bien, el 97% que respondieron correctamente dan muestra de que justifican y desarrollan argumentos matemáticos, para defender la validez de una conjetura (Si desplaza 10 canicas fuera del círculo, ganaría \$850).

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 2 (S2T1P2)

Población: 34 estudiantes

Tabla 15

Tipificación S2, T1, P2

Pregunta 2: Si Paola quiere ganar \$1.500.						
a. Indica cuántas canicas debe desplazar fuera del círculo.						
b. Justifica tu respuesta.						
	Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes indican que Paola debe desplazar 30 bolas fuera del círculo (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E10, E11, E12, E13, E14, E21, E23, E24, E26, E27, E28, E29, E30, E33, E34, E36, E37, E38, E39, E40)	27	79%	Realizan una multiplicación (30×50) y algunos indican que Paola debe desplazar 30 bolas fuera del círculo para ganar \$1.500	10	37%
				Justifican que si con 10 canicas gana 500, con 30 canicas gana 1.500, y hacen una suma reiterativa ($500 + 500 + 500$)	2	7%
				Hacen dos multiplicaciones (30×50 y 100×15)	2	7%
				Realizan una división ($1500 \div 50$) y algunos indican que Paola debe desplazar 30 bolas fuera del círculo para ganar \$1.500	11	41%
				Hacen una multiplicación (30×50) y una división ($1500 \div 50$)	1	4%
				No justifica	1	4%

2	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E7, E9, E15, E19, E25, E31, E35)	7	21%	Indica que debe desplazar 3 canicas, y algunos indican que si desplaza 2 canicas gana 100 puntos y que si a 2 le suma 1 canica, gana 1.500	3	43%
				Indica que debe desplazar 30 canicas pero realiza de manera incorrecta una multiplicación ($30 \times 50 = 200$)	1	14%
				Realiza de manera incorrecta una división ($5.00 \div 50 = 30$)	1	14%
				No responden la pregunta	2	29%

De acuerdo con la tabla 15, se puede afirmar que el 79% de los estudiantes responden de manera correcta a la pregunta planteada, es decir, indican cuántas bolas debe desplazar Paola, para ganar \$1.500, para lo cual utilizan diversas estrategias (una multiplicación, una división o suma reiterativa). Ahora bien, respecto a la pregunta anterior (3%), en la pregunta 2, el porcentaje de estudiantes que no responden correctamente es mayor (21%), lo cual puede deberse a que la relación que se propone es de tipo inversa.

Con base en lo anterior se puede afirmar que del 79% que responden correctamente, logran ver el patrón de dos maneras, el 44% de este porcentaje lo identificaron como $m \div 50 = n$, siendo $m=1500$, $n=30$, y otro 44% consideran el patrón como $n \times 50 = 1.500$, ya que estos indican la multiplicación de $30 \times 50 = 1500$. Ahora bien, cabe resaltar que E8 logra ver el patrón de estas dos formas, de manera simultánea, ya que este realiza ambas operaciones.

Hay que resaltar también, las expresiones numéricas equivalentes que E23 logra identificar, las cuales llevan al mismo resultado, pero implican dos razonamientos distintos, es decir al realizar 50×30 , se tiene en cuenta que por cada bola desplazada se gana \$50, y al multiplicar 100×15 , se tiene en cuenta que 100 es el doble de 50 y 15 es la mitad de 30. De esta interpretación se puede inferir, que E23 posiblemente ve el patrón como $50 \cdot n$ y $100 \cdot \frac{n}{2}$, aunque esto no lo registre.

Finalmente se puede decir que el 24% de los estudiantes relacionan correctamente las cantidades implicadas lo cual es importante en el estudio de la proporción (Post, Behr & Lesh, 1988), ya que estos identifican que “al desplazar 30 bolas, se puede ganar 1.500”, incluso E12 y E26 logran relacionarlas de manera inversa (Ver Figura 20), en cambio otros estudiantes solo indican que Paola debe desplazar 30 bolas o realizan la operación.

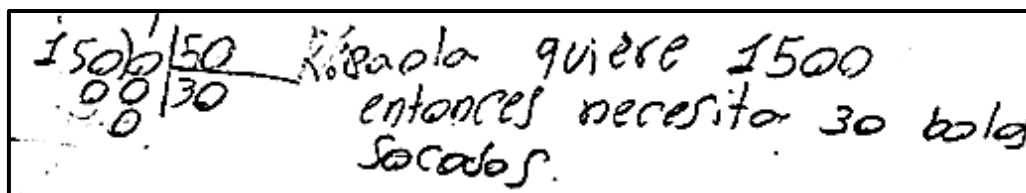


Figura 20. S2, T1, P2, E12

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 3 (S2T1P3)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 16

Tipificación S2, T1, P3

Pregunta 3: Escribe lo que gana Paola si no logra desplazar fuera del círculo ninguna canica. Justifica tu respuesta					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	
1	Estudiantes que indican que Paola no gana nada (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, E11, E12, E13, E14, E15, E21, E25, E26, E27, E29, E30, E33, E34, E35, E36, E37, E38, E39, E40)	28	82%	No justifican	14 50%
				Realizan una multiplicación (50×0) y algunos indican que todo número multiplicado por cero da cero o que no gana nada porque no desplaza ninguna canica	13 46%
				Indica que nada porque tiene que sacar mínimo una para ganar \$50	1 4%
2	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E7, E19, E23, E24, E28, E31)	6	18%	Multiplican 0×0 y realizan un dibujo	2 33%
				Indica que lo que gana es 1500	1 17%
				No responden la pregunta	3 50%

De acuerdo con la tabla 16, el 82% de los estudiantes identificaron que si se desplaza 0 bolas, gana \$0, pero solo el 46% de estos, justificaron su respuesta por medio de una multiplicación y el 50% no lo hicieron. Ahora bien, solo, el 18% no responden correctamente, de los cuales dos no reconocen el patrón $50 \cdot n$, ya que estos realizan el producto de 0×0 .

De lo anterior se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes (82%) reconocen que si no se desplaza ninguna bola, el resultado es \$0; ahora bien, de este porcentaje el 39% relacionan correctamente las cantidades implicadas, lo cual es importante en el estudio de la proporción (Post, Behr & Lesh, 1988), ya que estos identifican que “al no desplazar ninguna bola, no se puede ganar nada” (Ver Figura 21), en cambio otros estudiantes solo indican que Paola no gana nada.

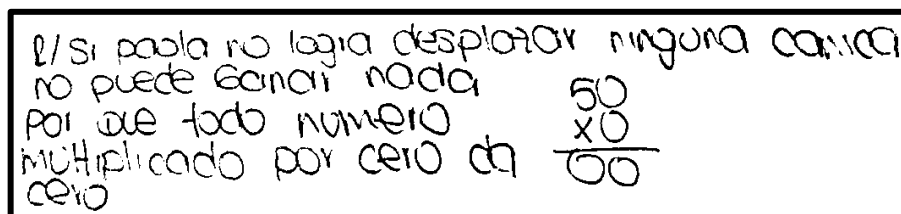


Figura 21. S2, T1, P3, E3

Ahora bien, del 82% que respondieron correctamente, el 46%, dan muestra de que justifican y desarrollan argumentos matemáticos, para defender o refutar la validez de su conjetura (“Si no desplaza ninguna, no gana nada porque $50 \times 0 = 0$ ” o “tiene que sacar mínimo una, para ganar \$50”) y además sacan conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas, aunque esto último lo logran 4 estudiantes, los cuales identifican que “todo numero multiplicado por cero da 0” Cabe aclarar que las justificaciones de estos estudiantes dejan ver lo que mencionan, Kaput, Carraher & Blanton (2008) y Carraher & Schliemann (2007), el lenguaje natural; les permite desarrollar el proceso de generalización.

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 4 (S2T1P4)

Población: 34 estudiantes

Tabla 17

Tipificación S2, T1, P4

Pregunta 4: Teniendo en cuenta que cada vez que se desplazan 2 bolas de cristal fuera del círculo, se gana \$100. Explícale a Paola cómo puede hallar el dinero que gana cuando desplaza 1 bola.					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	
1	Estudiantes que explican cómo hallar el dinero que gana cuando desplaza 1 bola (E4, E5, E6, E8, E10, E12, E21, E23, E27, E28, E29, E30, E33, E34, E36, E37, E38)	17	50%	Justifican que la mitad de 100 es 50, algunos indican que la mitad de 2 es 1, y realizan dos divisiones ($100 \div 2$ y $2 \div 2$)	12 71%
				Realiza una resta ($100 - 50$)	1 6%
				Realizan una suma ($50 + 50$)	3 18%
				Realiza un dibujo	1 6%
2	Estudiantes que indican el dinero que se gana cuando se desplaza 1 bola pero no explican (E1, E2, E3, E9, E14, E15, E26, E35, E39)	9	26%	Indica que si desplaza 1 bola gana \$50 y con dos \$100	5 55%
				No justifican	4 44%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E7, E11, E13, E19, E24, E25, E31, E40)	8	24%	Indican que multiplica pero no escriben los factores	2 25%
				Interpretan de manera incorrecta el enunciado (Paola gana 100 o 200, si desplaza 1 canica)	2 25%
				Estudiante escribe $100 \div 2$, pero no opera.	1 12%
				No responden la pregunta	3 38%

Teniendo en cuenta los datos de la Tabla 17, el 76% de los estudiantes, logran hallar el dinero que gana Paola cuando desplaza 1 bola con diversas operaciones (división, suma o resta), lo cual en las preguntas anteriores han ido identificando y solo el 26% de estos, no justifican su respuesta. Ahora bien, del 24% de los estudiantes que no responden correctamente, el 38% no responden la pregunta.

Con base en lo anterior se puede decir que del 76% de los estudiantes que responden correctamente, el 46% conciben la proporción (Con 2 bolas ganas 100 y con 1 bola ganas 50)

como una división y no como una relación, ya que estos indican que ‘la mitad de 100 es 50’, pero no relacionan a qué corresponde el 100 y el 50, lo cual si logran hacer otros 5 estudiantes (Ver Figura 22).

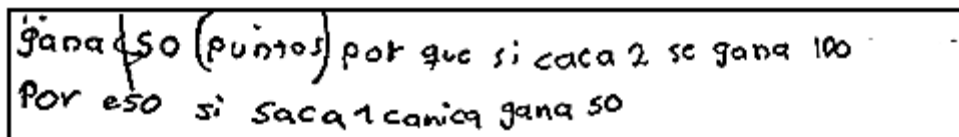


Figura 22. S2, T1, P4, E14

Otro estudiante en cambio da muestra que *ve* y *registra* el patrón con palabras apoyándose de las figuras (Mason et al., 1985/1999) (Ver Figura 23).



Figura 23. S2, T1, P4, E23

Teniendo en cuenta todo lo anterior, los registros icónicos como los dibujos y las justificaciones hechas en lenguaje natural, actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos o algoritmos que definen el patrón (Ministerio de Educación Nacional, 2006), aunque en este caso, los estudiante solo logran identificar el valor constante de este, lo cual es parte de la fórmula del patrón.

Ahora bien, el 50% de los estudiantes que respondieron correctamente, dan muestra de que justifican y desarrollan argumentos matemáticos, para defender o refutar la validez de su conjetura (“Cuando desplaza 1 bola se gana \$50”) (Blanton et al., 2017), y además, esto lo logran a través de la interpretación de sus representaciones matemáticas (MEN, 2006), ya que estos realizan alguna operación ($100 \div 2$ y $2 \div 2$) o se apoyan de un dibujo, para lograr dar respuesta al interrogante y al mismo tiempo justifican.

Ahora bien, 4 de 26 estudiantes que responden correctamente, dejan ver que no necesariamente razonan en términos multiplicativos (Godino & Batanero, 2002), ya que en su justificación muestran unas técnicas aditivas ($100 - 50$ ó $50 + 50$).

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 5 (S2T1P5)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 18

Tipificación S2, T1, P5

Pregunta 5: Paola hizo la siguiente tabla para saber el dinero obtenido al desplazar algunas canicas fuera del círculo						
a. Ayúdala a completarla.						
		Cantidad de bolas desplazadas	Valor de 2 canicas desplazadas	Dinero ganado por las bolas desplazadas		
		2	\$100	\$100		
			\$100	\$200		
		7	\$100			
			\$100	\$500		
		14	\$100			
			\$100	\$850		
b. Indica cómo completaste los datos que faltaban en la tabla						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que completan correctamente la tabla e indican como lo hicieron (E1, E2, E3, E4, E8, E9, E12, E14, E15, E21, E23, E24, E27, E28, E29, E30, E31, E34, E35, E36, E39)	21	62%	Hace una lista de los 88 casos	1	5%
				Cuenta de 50 en 50 para todos los casos, pero al 14 le suma 3, y a 700 le suma 150.	1	5%
				Hace unas multiplicaciones (2×50 , 4×50 , 7×50 , 10×50 , 14×50 , 17×50) y un estudiantes indica que multiplica por 50 la cantidad de bolas desplazadas	16	76%
				Hace una división ($4 \div 2$) e indica que suma de dos en dos y de 100 en 100	1	5%
				Indica que hace unas sumas (7 veces 50, 8 veces 50, 10 veces 50, 14 veces 50 y 17 veces 50)	2	9%
2	Estudiantes que completan la tabla pero justifican de manera incorrecta (E5, E6, E10, E11, E13, E19, E25, E26, E37, E38, E40)	11	32%	Realizan unas sumas con algunos errores ($200 + 200$, $500 + 500$, $350 + 350$, $700 + 700$, $850 + 850$) y escriben como respuesta 4, 7, 10, 14 y 17	4	36%
				En la justificación no realizan ninguna operación y se limitan al lenguaje natural (Ej. hice una suma, una multiplicación)	5	45%
				Indica que resta de 50 en 50, 17 veces	1	9%
				Sin justificación	1	9%
3	Estudiantes que no completa la tabla o no responden la pregunta (E7, E33)	2	6%	Indica que hace una suma pero no escribe los sumandos	1	50%
				No responde la pregunta	1	50%

De acuerdo con los resultados de la pregunta 5, de la situación 2, tarea 1, presentes en la tabla 18, se infiere que el 94% de los estudiantes lograron completar la tabla correctamente, pero el 32% de estos, no justifica la manera cómo lo hicieron y solo el 6% de los estudiantes no logran completar la tabla o no responden.

Respecto al ítem *b*, se puede mencionar que el 50% de los estudiantes tienen diversas maneras de justificar, la mayoría de estos (97%) multiplican por 50 la cantidad correspondiente; cabe aclarar que aunque para algunos casos se requería la relación inversa, por ejemplo $850 \div 50 =$

17, pero los estudiantes de manera implícita tuvieron en cuenta la ecuación $50 \times n = 850$, para poder encontrar la cantidad de bolas desplazadas, ya que estos indican el producto (17×50). (Ver Figura 24).

Además de lo anterior, E14, demuestra en su justificación que logra ver el patrón presente en la tabla y lo *registra* solo con palabras, de lo cual se puede decir que la variación en tablas ayuda a la escritura de las expresiones algebraicas tipo retóricas, para describir la variación (Ministerio de Educación Nacional, 1998), y además E14, crea una fórmula, que infiere del análisis de unos casos particulares (Bednarz, Kieran & Lee, 1996) (Ver Figura 24).

Figura 24. S2, T1, P5, E14

Hay que rescatar también, la explicación hecha por E3, en ella se ve claro cómo va avanzando en su razonamiento, empieza contando de 50 en 50 y finalmente, llega a utilizar los datos que ya tiene en la tabla, e incluso logra identificar una propiedad de la función lineal [$f(a + b) = f(a) + f(b)$]. Así pues, E3 da muestra de que el lenguaje natural le permite describir conceptos algebraicos (Kaput, Carraher & Blanton, 2008; Carraher & Schliemann, 2007) lo cual se observa en sus explicaciones (Ver Figura 25).

Figura 25. S2, T1, P5, E3

Ahora bien, del 32% de los estudiantes que, aunque completan correctamente la tabla, no justifican de manera acertada, el 36% de estos (4 de 11) realizan unas técnicas aditivas (suman dos veces el dinero ganado) para obtener la cantidad de bolas desplazadas, lo cual deja ver que no razonan en términos multiplicativos (Godino & Batanero, 2002) y por ende no identifican la relación de las cantidades implicadas, como una proporción.

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 6 (S2T1P6)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 19

Tipificación S2, T1, P6

Pregunta 6: Si tú participas en el juego de las bolas de cristal aquí descrito, indica cómo calcular la cantidad de dinero que puedes ganar, para cualquier cantidad de bolas que se desplazan fuera del círculo.					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	
1	Estudiantes que describen cómo calcular la cantidad de dinero que se gana, para cualquier cantidad de bolas que se desplazan fuera del círculo (E3, E29, E34, E35, E36, E39)	6	18%	Indica que cuenta o multiplica por 50 porque cada bola vale 50	1 16%
				Indica que mira el número de bolas, que tiene en cuenta que cada bola vale \$50, que 50 se multiplica por dos, y que así va de 2 en 2	1 16%
				Realizan una multiplicación (950×50 ó 35×50) e indican que ponen cualquier número y lo multiplican por 50 o que multiplican el valor de cada bola $\times 50$	4 66%
2	Estudiantes que presentan un ejemplo de cómo calcular la cantidad de dinero que se gana, para cualquier cantidad de bolas que se desplazan fuera del círculo (E2, E5, E6, E8, E10, E12, E14, E26, E27, E37)	10	29%	Realiza una multiplicación ($150 \times \$50 = \7.500) y señala con flechas que 150 son las canicas, \$50 el valor y \$7.500 el valor de ganancias	1 10%
				Realizan una multiplicación (5×50 ó 35×50 ó 45×50)	5 50%
				Realizan una división $1750 \div 50$ ó $1500 \div 50$ y alguno hace una multiplicación (30×50)	2 20%
				Hacen una multiplicación (35×5) y aumentan un cero al resultado	2 20%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E1, E9, E4, E7, E11, E13, E19, E21, E23, E24, E25, E30, E31, E33, E38, E40, E15, E28)	18	53%	Indica que la calcula en la mente sumando un porcentaje	1 5%
				Realizan una multiplicación de manera incorrecta	2 11%
				Realiza de manera incorrecta una suma reiterada ($50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 = 400$)	1 5%
				No responden	14 78%

De acuerdo con la tabla 19, el 47% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, es decir, indican cómo calcular la cantidad de dinero, para cualquier cantidad de bolas que se desplazan fuera del círculo. De estos, el 18% encuentran una expresión en lenguaje natural y algunos se ayudan de un ejemplo y el 29% solo justifican con la multiplicación de un número por 50. Ahora bien, la mayoría de los estudiantes (53%) no responden correctamente la pregunta.

Con base en lo anterior se puede afirmar que el 35% de los estudiantes logran ver el patrón numérico porque lo describen, o realizan unas operaciones en las que multiplican un número cualquiera por 50. Cabe destacar también que del 29% de los estudiantes, 4 (E5, E6, E12, E27) ven el patrón de tres formas diferentes, ya que multiplican por 5 el número de bolas desplazadas o dividen la cantidad de dinero por 50 ($1750 \div 50$ ó $1500 \div 50$) o multiplican 5×50 .

Se puede decir además que el 18% de los estudiantes logran *registrar* el patrón con palabras, apoyados de casos particulares, para identificar las características generales de este (Ver Figura 26). Así pues, se cumple lo mencionado por el Ministerio de Educación Nacional (2006), las variaciones no solo se representan por medio del sistema algebraico, también se expresan por medio del lenguaje natural.

Figura 26. S2, T1, P6, E34

Ahora bien, el 29% de los estudiantes, solamente realizan un cálculo numérico para explicar cómo calcular la cantidad de dinero que pueden ganar, para cualquier cantidad de bolas que se desplazan fuera del círculo; lo cual deja ver como a partir de casos particulares pueden identificar las características generales del patrón (Ver Figura 27), por ejemplo E2, clasifica las cantidades del producto, en canicas, valor y valor de ganancias.

Figura 27. S2, T1, P6, E2

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 7 (S2T1P7)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 20

Tipificación S2, T1, P7

Pregunta 7: Paola dice que para calcular el dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, jugando con las bolas de cristal, se debe multiplicar \$50 por el número de bolas desplazadas.					
a. Analiza y determina si Paola tiene razón y por qué					
b. Encuentra el dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas, teniendo en cuenta lo dicho por Paola.					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	
1	Estudiantes que determinan que Paola tiene razón y encuentran correctamente el dinero que pueden obtener al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas (E1, E2, E3, E4, E5, E8, E10, E12, E23, E26, E27, E31, E37)	13	38%	Justifican que 50 es el valor de una bola realizan la multiplicación de un número, por 50, algunos indican que el número que escogieron son las bolas desplazadas y hacen unas multiplicaciones en forma vertical u horizontal y otros realizan un dibujo (50×13 , 50×25 , 50×99 , 50×105).	13 100%
2	Estudiantes determinan que Paola tiene razón y encuentran de forma parcial el dinero que pueden obtener al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas, (E6, E7, E9, E11, E13, E14, E19, E21, E24, E28, E29, E30, E34, E36)	14	41%	Multiplican un número por 50 y no logran obtener correctamente el dinero que se gana al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas, por errores en los cálculos realizados ($13 \times 50 = 1.100$, $25 \times 50 = 1.050$, $105 \times 50 = 7000$, $99 \times 50 = 4.900 \dots$)	14 100%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta uno o dos ítems (a, b) (E15, E25, E33, E35, E38, E39, E40)	7	21%	Indican que la afirmación de Paola es falsa y no logran obtener correctamente lo que se gana al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas, por errores en los cálculos realizados	2 29%
				Suma de manera incorrecta la cantidad de bolas desplazadas ($9 + 11 + 13 + 25 = 58$) o hacen una suma ($29 + 51 + 91 + 91 + 13 + 50$)	2 29%
				No responden la pregunta	3 43%

De la tabla 20 se infiere que el 79% de los estudiantes logran identificar que Paola tiene razón, al decir que para calcular el dinero que pueden obtener, jugando con las bolas de cristal, se debe multiplicar \$50 por el número de bolas desplazadas, lo cual comprueban con un ejemplo y el otro 21% de los estudiantes no logran hacerlo.

Respecto al dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas según la regla de Paola, el 21% lo hace en forma parcialmente correcta ya que estos tienen errores en los cálculos y solo el 38% lo encuentran correctamente.

Con base en lo anterior, el 79% de los estudiantes logran *validar* el patrón haciendo cálculos para casos en los que se puede verificar el resultado con un conteo de 50 en 50, usan casos en los que ya se sabe la respuesta (por ejemplo $5 \times 10 = 500$ estaba en la tabla de la pregunta 5) y un

estudiante (E23) valida el patrón usando los casos en los que ya se sabe la respuesta (Ver Figura 28), y ha dibujado anteriormente en la pregunta 4 (Ver Figura 23).

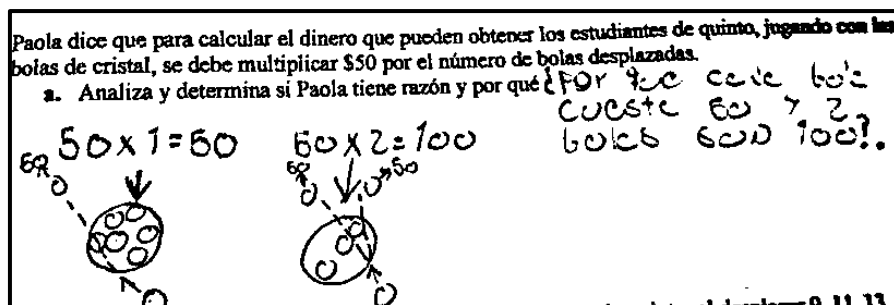


Figura 28. S2, T1, P7, E23

Cabe resaltar que dos estudiantes (E2, E4) logran identificar la razón como una relación (Guacaneme, 2001) ya que estos relacionan en su ejemplo de validación, que la cantidad que escogieron corresponde a las bolas desplazadas y relacionan el dinero ganado correspondiente para este (Ver Figura 29).

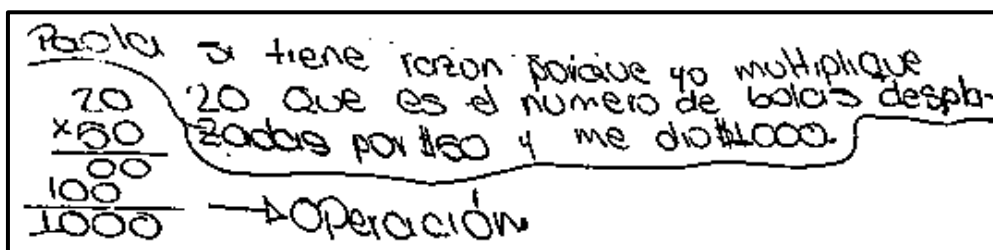


Figura 29. S2, T1, P7, E2

También se puede decir que el 76% de los estudiantes lograron ver el patrón, ya que estos lo utilizaron para encontrar el dinero correspondiente por desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas, multiplicando por 50 cada una de estas cantidades, aunque 14 de ellos (41%), tuvieron errores en los cálculos.

Finalmente, respecto al 21% de los estudiantes que responden de manera incorrecta se observa que 2 de ellos (E33, E35), en el ítem *b* dejan ver como reducen la razón, a unas técnicas aditivas (Godino & Batanero, 2002), ya que estos realizan unas sumas ($9 + 11 + 13 + 25 + 29 + 51 + 91 + 91 + 13 + 50$).

Situación 2: Tarea 1, Pregunta 8 (S2T1P8)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 21

Tipificación S2, T1, P8

Pregunta 8: Mario; otro estudiante de grado quinto, dice que él calcula la cantidad de dinero que se obtiene por desplazar las bolas de cristal fuera del círculo, multiplicando el número de bolas desplazadas por \$100 y dividiendo este resultado entre 2. a. Indica si Mario tiene razón y por qué. b. Encuentra el dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, al desplazar 13, 25 99 y 105 bolas, teniendo en cuenta lo dicho por Mario. c. Compara los procedimientos propuestos por Paola y Mario, en las preguntas 7 y 8, y saca una conclusión.						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que afirmar que Mario tiene razón, encuentran de manera correcta el dinero que pueden obtener al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas, y sacan una conclusión de los procedimientos (E2, E3, E5, E6, E8, E10, E12, E26, E27, E37)	10	29%	Realizan las operaciones respectivas que decía Mario, para algún número, algunos indican que este corresponde a las bolas desplazadas, y multiplican por 50 dicha cantidad de bolas, también hacen las operaciones respectivas que indicaba Mario, para 13, 25, 99 y 105 bolas, algunos multiplican por 50 dichas cantidades y concluyen que aunque fueron procedimientos diferentes eran los mismos resultados	10	100 %
2	Estudiantes que responden en forma parcialmente correcta dos ítems (<i>a</i> y <i>b</i>) (E1, E4, E7, E9, E11, E13, E14, E19, E28, E29, E30, E34, E36,	13	38%	Realizan unas operaciones (100×5 , 50×5 , $100 \div 2$) o realizan las respectivas operaciones que indica Mario, para cierta cantidad de bolas pero tienen errores en los cálculos, hacen en forma parcialmente correcta las operaciones respectivas que indicaba Mario, para 13, 25, 99 y 105 bolas, e indican que los procedimientos son diferentes	13	100 %
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta algunos ítem (E15, E21, E23, E24, E25, E31, E33, E35, E38, E39, E40)	11	32%	Indican que cada canica son 50 y 2 son 100 o realizan las operaciones respectivas, para cierta cantidad de bolas y multiplican por 50 cada cantidad de bolas desplazadas (13, 25, 99 y 105)	2	9%
				Para el ítem <i>a</i> , realiza una división ($100 \div 2$) y en el ítem <i>b</i> realiza una suma ($29 + 91 + 91 + 11 + 03 + 55 = 278$)	1	4%
				Realiza de manera incorrecta unas multiplicaciones	3	4%
				No responden la pregunta	5	22%

Respecto a los resultados presentes en la tabla 21 se observa que el 67% de los estudiantes logran identificar que Mario tiene razón, al decir que para calcular el dinero que pueden obtener, jugando con las bolas de cristal, se debe multiplicar el número de bolas desplazadas por \$100 y dividir este resultado entre 2, lo cual comprueban con un ejemplo y el otro 32% de los estudiantes no logran hacerlo correctamente.

En relación con el dinero que pueden obtener los estudiantes de quinto, al desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas según la regla de Mario, el 38% lo hace en forma parcialmente correcta ya que estos tienen errores en los cálculos y solo el 29% lo encuentran correctamente.

Con base en lo anterior, el 67% de los estudiantes logran *ver* y *validar* el patrón propuesto, que en este caso era $\frac{100 \cdot n}{2}$ haciendo cálculos pero a diferencia de la pregunta 7, las cantidades que los estudiantes usan para verificar el patrón no necesariamente se pueden comprobar a través del conteo, y además logran *ver* que dicho patrón es equivalente al anterior, ya que estos multiplican por 50 cada cantidad de bolas desplazadas (13, 25, 99 y 105 bolas).

Es importante mencionar como E3 logra identificar en su ejemplo de validación, que la cantidad que escoge corresponde a las bolas desplazadas (Ver Figura 30), y además lo relaciona con el dinero ganado, lo cual nos permite inferir que dicho estudiante logra identificar la razón como una relación (Guacaneme, 2002). Con base en lo anterior, el 67% de los estudiantes lograron usar el patrón propuesto para encontrar el dinero correspondiente por desplazar 13, 25, 99 y 105 bolas, aunque algunos (38%) tuvieron errores en los cálculos.

The image shows a student's handwritten work. On the left, there is a multiplication problem: 10×100 , with intermediate steps showing 00 , 00 , 10 , and a final result of 1.000 . To the right of this, there is a long division problem: $1000 \overline{) 2000}$, with a quotient of 2 and a remainder of 500 . To the right of the division problem, there is a handwritten explanation in Spanish: "¿SI por que se dice que cada Bola vale 50 y Si desplazo 10 Bolas se Gana 500 y eso fue el Resultado que me dio."

Figura 30. S2, T1, P8, E3

Finalmente, y de manera similar a la pregunta 7, del 32% de los estudiantes que responden de manera incorrecta, los mismos dos estudiantes (E33, E35), en el ítem *b* siguen reduciendo la razón, a unas técnicas aditivas (Godino & Batanero, 2002), ya que estos realizan unas sumas ($29 + 91 + 91 + 11 + 03 + 55 = 278$).

Tarea 2: Propiedades del patrón

Pablo, Pedro, Tatiana y Sara son estudiantes de grado quinto, ellos decidieron ubicar en una tabla el dinero ganado y la cantidad de bolas desplazadas, de la siguiente manera:

Número del tiro	Cantidad de bolas desplazadas	Dinero ganado por bolas desplazadas
1	7	\$350
2	8	\$400
3	23	\$1.150
4	15	\$750
5	38	\$1.900
6	2	\$100
7	14	\$700
8	18	\$900
9	3	\$150
10	21	\$1.050

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 1 (S2T2P1)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 22

Tipificación S2, T2, P1

Pregunta 1: Pablo afirma que el dinero que ganó al desplazar 38 bolas en el tiro 5, es el mismo que ganó, al desplazar 15 bolas en el tiro 4 y 23 bolas en el tiro 3. Indica si Pablo tiene razón y ¿Por qué?						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que identifican que el dinero que se gana al desplazar 38 bolas en el tiro 5, es el mismo que se gana, al desplazar 15 bolas en el tiro 4 y 23 bolas en el tiro 3 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E13, E14, E15, E17, E19, E25, E26, E27, E29, E30, E31, E32, E33, E34, E36, E37, E38, E39)	29	85%	Indican que si suma 23 más 15 le da 38, si suma 1.150 más 750 le da 1.900 y que en el tiro 5 desplaza 38 bolas y gana 1.900 y si sumas la cantidad de los primeros da lo mismo	6	21%
				Hacen una suma en forma vertical (1.150 + 750), e indican que al sumar lo del tiro 3 o lo que se gana por desplazar 23 bolas y lo del tiro 4 o lo que se gana por desplazar 15 bolas, da el mismo valor de \$1.900 del tiro 5	10	34%
				Hace dos suma (1.150 + 750 y 23 + 15) y una multiplicación (38 × 50) e indica que en el tiro 5 desplazan 38 bolas y al desplazar 15 y 23 bolas da 38	1	3%
				Estudiante que hacen una suma en forma vertical (1.150 + 750)	12	41%
2	Estudiantes que comprueban que al sumar las bolas desplazadas de los tiros 4 y 3 obtienen la misma cantidad del tiro 5 (E18, E24)	2	6%	Hacen una suma (23 + 15) e indican que Pablo tiene razón porque 15 y 23 da 38	2	100%
3	Estudiante que responde de manera incorrecta (E16, E20, E35)	3	9%	Hace de manera incorrecta una suma en forma vertical (750 + 1150 = 8656)	1	33%
				No responden la pregunta	2	66%

De la tabla 22 se infiere que el 91% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, es decir identifican que el dinero que gana Pablo al desplazar 38 bolas en el tiro 5, es el mismo que se gana, al desplazar 15 bolas en el tiro 4 y 23 bolas en el tiro 3; aunque dos de ellos

solamente comprobaron la equivalencia para la cantidad de bolas desplazadas, también hay que mencionar que el 9% de los estudiantes no responden correctamente.

Respecto a la justificación de la pregunta, la mayoría realizan las sumas correspondientes, ya sea de las bolas desplazadas, del dinero ganado o de ambas; ahora bien, solo un estudiante realiza además de lo anterior la multiplicación de 38×50 .

Lo anterior nos permite afirmar que el 85% de los estudiantes tuvieron en cuenta los datos de la tabla para usar la propiedad de la proporcionalidad directa si “ $c = a + b$ entonces $f(a + b) = f(a) + f(b) = f(c)$ ”²⁰, así, para la pregunta 1 $f(a + b) = f(15 + 23) = f(15) + f(23) = \$750 + \$1.150 = \$1900 = f(38)$. Esto se infiere a partir de las operaciones hechas por el 91% de los estudiantes, de los cuales algunos identifican la condición inicial $c = a + b$, que en este caso era $38 = 15 + 23$ y la mayoría encuentran el dinero correspondiente por desplazar 15 bolas y 23 bolas ($f(15) + f(23) = \$750 + \1.150). Cabe resaltar que E27, además de lo anterior, usa el patrón para comprobar su resultado (38×50).

Solo el 21% de los estudiantes, logran identificar correctamente las correspondencias entre la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado lo cual puede deberse a que la tabla les permite comprender las relaciones de dependencia entre dichas cantidades (Obando, Vanegas & Vásquez, 2006) (Ver Figura 31). Ahora bien, dicha relación la expresan en lenguaje natural, de lo cual se puede decir que este tipo de registro les permite a los estudiantes describir conceptos algebraicos (Kaput, Carraher & Blanton, 2008, Carraher & Schliemann, 2007), en este caso es la relación entre las cantidades implicadas (Para 23 bolas ganó \$1.150...).

1.150	en el tiro 3 Desplazo 23 bolas y gano \$1.150
950	en el tiro 4 Desplazo 15 bolas y gano \$750
2.100	en el tiro 5 Desplazo 38 bolas y gano \$1.900

Figura 31. S2, T2, P1, E31

A lo anterior hay que añadir que el 26% de los estudiantes relacionan correctamente el número del tiro, con el dinero ganado, lo cual registran en lenguaje natural o señalan con una

²⁰ Siendo a , b y c números naturales

flecha en cada dinero. También hubo estudiantes (38%) que solamente realizaron correctamente la suma del dinero de los tiros 3 y 4, por lo tanto, dichos estudiantes no identifican la relación descrita anteriormente, pero si dan muestras de que logran desarrollar un aspecto del pensamiento variacional (MEN, 2006) porque prueban una conjetura (el dinero que ganó al desplazar 38 bolas en el tiro 5, es el mismo que ganó, al desplazar 15 bolas en el tiro 4 y 23 bolas en el tiro 3), a partir de la interpretación de una tabla.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 2 (S2T2P2)

Población: 34 estudiantes

Tabla 23

Tipificación S2, T2, P2

Pregunta 2: Indica si lo dicho anteriormente se cumple para el dinero que ganó Pablo en el tiro 3, y la suma del dinero que gana Pablo, en el tiro 4 y 2, y ¿Por qué?						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que indican que si se cumple para el dinero que ganó Pablo en el tiro 3, y la suma del dinero que gana Pablo, en el tiro 4 y 2 (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E13, E14, E15, E17, E19, E24, E25, E26, E27, E29, E30, E32, E34, E36, E38, E39)	27	79%	Hacen una suma en forma vertical ($750 + 400$) e indican que si suman la cantidad de dinero ganado de los tiros 4 o el dinero por desplazar 15 bolas y lo del tiro 2 o el dinero por desplazar 8 bolas, da 1.150 que es la cantidad del tiro 3	15	55%
				Hace dos sumas ($15 + 8$ y $400 + 750$) e indica que al sumar 15 y 8 el resultado es 23 y cuando suma 400 y 750 da 1.150 y es lo mismo que el tiro 3	1	4%
				Hacen una suma en forma vertical ($750 + 400$)	11	40%
2	Estudiante que comprueba que al sumar las bolas desplazadas de los tiros 4 y 3 obtienen la misma cantidad del tiro 5 (E37)	1	3%	Indica que si suma el tiro 4 con el tiro 2 da 23	1	100%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E16, E18, E20, E31, E33, E35)	6	18%	Hacen una suman en forma vertical ($1.150 + 750 = 1.900$ ó $34 + 2 = 56$ ó $76 + 38$)	4	66%
				No responden la pregunta	2	33%

De acuerdo con los datos presentados en la tabla 23, se puede decir que el 82% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, es decir identifican que el dinero que se gana Pablo en el tiro 3, es igual a la suma del dinero que gana en el tiro 4 y 2; aunque E37 solo comprueba la equivalencia para la cantidad de bolas desplazadas; también hay que decir que el 18% de los estudiantes no responden correctamente. Respecto a la justificación de la pregunta, la mayoría realizan las sumas correspondientes, ya sea de las bolas desplazadas, del dinero ganado o de ambas. Ahora bien, en el enunciado de la pregunta 2 a diferencia del anterior, se omite

mencionar las bolas desplazadas de los tiros, lo cual puede ser la causa por la que el porcentaje de acierto en esta pregunta sea más bajo que el de la pregunta anterior.

A partir de lo anterior se puede decir que el 79% de los estudiantes tuvieron en cuenta los datos de la tabla, para usar la propiedad de la proporcionalidad directa “si $c = a + b$ entonces $f(a + b) = f(a) + f(b) = f(c)$ ”, así para la pregunta 2 $f(a + b) = f(15 + 8) = f(15) + f(8) = \$750 + \$450 = \$1.150 = f(23)$. Esto se infiere a partir de las operaciones hechas por el 82% de los estudiantes, de los cuales algunos identifican la condición inicial $c = a + b$, que en este caso era $23 = 15 + 8$ y la mayoría encuentran , el dinero correspondiente por desplazar 15 bolas y 8 bolas ($f(15) + f(8) = \$750 + \450).

Ahora bien, de manera similar a la pregunta 1, el 9% de los estudiantes, logran identificar correctamente las correspondencias entre la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado, aunque lo relacionan con flechas (Ver Figura 34), lo cual puede deberse a que la tabla les permite comprender las relaciones de dependencia entre dichas cantidades (Obando, Vanegas & Vásquez, 2006) (Ver figura 34).

Handwritten student work showing a calculation of money earned based on balls moved. It lists 750 for 15 balls and 400 for 8 balls, sums them to 1150, and concludes that the result is the sum of 23.

$$\begin{array}{r} 750 \rightarrow \text{cuando desplazo 15 canicas} \\ 400 \rightarrow \text{cuando desplazo 8 canicas} \\ \hline 1150 \\ \downarrow \\ \text{el resultado es suma 23} \end{array}$$

Figura 32. S2, T2, P2, E11

A lo anterior hay que añadir que el 44% de los estudiantes relacionan correctamente el número del tiro con el dinero ganado, lo cual registran en lenguaje natural o señalan con una flecha en cada dinero; también hubo estudiantes (23%) que solamente realizaron correctamente la suma del dinero de los tiros 4 y 2, por lo tanto, dichos porcentajes no identifican la relación descrita anteriormente, pero si dan muestras de que logran desarrollar un aspecto del pensamiento variacional (MEN, 2006), porque prueban una conjetura (el dinero que se gana Pablo en el tiro 3, es igual a la suma del dinero que gana en el tiro 4 y 2), a partir de la interpretación de una tabla.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 3 (S2T2P3)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 24

Tipificación S2, T2, P3

Pregunta 3: Según la propiedad anterior, que se cumple para casos similares, y teniendo en cuenta los datos de la tabla. Descomponga en dos tiros, lo que desplazo Pedro: 30, 46, 53, y 61 bolas.						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que hacen unas sumas en forma horizontal o vertical, [30 bolas (23 + 7), 46 bolas (38 + 8 o 23 + 23) bolas, 53 bolas (15 + 38), y 61 bolas (23 + 38)] (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E13, E14, E15, E17, E19, E24, E25, E26, E27, E29, E31, E34, E36, E37, E38, E39)	27	79%	Relacionan las bolas desplazadas y el tiro correspondiente (7 bolas es del tiro 1, ... 15 bolas es del tiro 4)	18	67%
				Realizan unas multiplicaciones (30 × 5, 46 × 5, 53 × 5, 61 × 5) y relacionan los tiros con el dinero que se gana o con las bolas (<i>el tiro 1 y 3 = 1.500 ... o el tiro 1 y 3 = 30 ...</i>)	2	7%
				A algunas bolas, no le relacionan correctamente el tiro correspondiente (al 7 lo asocian como tiro 14 y el 8 como tiro 18)	2	7%
				Relacionan el total de las bolas desplazadas con el dinero que se gana por dichas bolas (30 <i>bolas</i> = 1.500)	5	18%
2	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E16, E18, E20, E30, E32, E33, E35)	7	21%	Indica que dos tiros que al sumarlos dan 30 sería sumar las bolas del tiro 3 y la bolas del tiro 1	1	14%
				Hacen unas sumas en forma vertical (38 + 8 ó 23 + 7, 42 + 4, 51 + 3, 61 + 1)	3	43%
				No responden la pregunta	3	43%

De la tabla 24 se infiere que el 79% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, la cual tenía la intención de que los estudiantes identificaran otros tiros (30, 46, 53, y 61 bolas desplazadas), que se obtenían al sumar la cantidad de bolas desplazadas de dos tiros que estaban en la tabla. Ahora bien, del 21% de los estudiantes que responden de manera incorrecta, dos descomponen 30, 46, 53, y 61, con cantidades que no estaban en la tabla. Cabe destacar también, como 3 estudiantes del 21% que responden de manera incorrecta, identifican equivalencias numéricas correctas, pero estas no corresponden con las cantidades propuestas en la tabla ($23 + 7 = 30$, $42 + 4 = 46$, $51 + 3 = 54$, $61 + 1 = 62$).

Con base en lo anterior, se puede afirmar que el 79% de los estudiantes logran expresar equivalencias numéricas de la forma $c = a + b$ ó $a + b = c$, donde a y b son cantidades que pertenecen a la columna de bolas desplazadas y c es una de las bolas desplazadas dadas (30, 46, 53 ó 61), lo cual requieren para luego identificar en la pregunta 4, la correspondencia en la suma, que tienen dos magnitudes directamente proporcionales, es decir, “si $c = a + b$, también $c' = a' + b'$ ”.

Del mismo modo que las preguntas anteriores, el 67% de estos estudiantes relacionan de manera adecuada las bolas desplazadas con los tiros (Ver Figura 33), y esto la mayoría lo hacen directamente en la descomposición, es decir señalan para cada cantidad, su tiro correspondiente, lo cual es una muestra de que así justifican y desarrollan argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una conjetura (Teniendo en cuenta los tiros de la tabla se pueden descomponer 30, 46, 53, y 61 bolas) (Blanton et al., 2017), ya que estos realizan alguna operación (30 bolas ($23 + 7 \dots$), para lograr dar respuesta al interrogante y al mismo tiempo justifican.

The image shows four handwritten calculations arranged in a 2x2 grid. Each calculation starts with a horizontal sum of bets (tiros) and an arrow pointing to a number of balls (bolas).
 Top-left: $110 \quad 3 \quad 4 \quad 23 \rightarrow 30$. Below it, a vertical sum: $110 \quad 1 \quad 17 \quad 30$.
 Top-right: $110 \quad 3 \quad 4 \quad 23 \rightarrow 46$. Below it, a vertical sum: $110 \quad 3 \quad 4 \quad 23 \quad 46$.
 Bottom-left: $110 \quad 5 \quad 4 \quad 38 \rightarrow 53$. Below it, a vertical sum: $110 \quad 4 \quad 15 \quad 53$.
 Bottom-right: $110 \quad 5 \quad 4 \quad 38 \rightarrow 61$. Below it, a vertical sum: $110 \quad 3 \quad 4 \quad 23 \quad 61$.

Figura 33. S2, T2, P3, E2

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 4 (S2T2P4)

Población: 34 estudiantes

Tabla 25

Tipificación S2, T2, P4

Pregunta 4: Teniendo en cuenta lo anterior.					
a. Comprueba que el dinero que ganó Pedro al desplazar 30 bolas, es igual a la suma del dinero que ganó en los dos tiros que descompusiste. Así mismo, comprueba que el dinero que ganó Pedro al desplazar 46, 53 y 61 bolas, es igual a la suma del dinero que ganó en los dos tiros que descompusiste, para cada caso.					
b. Explica con tus propias palabras la propiedad que usaste en las preguntas 1, 2, 3 y 4a.					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	
1	Estudiantes que realizan unas sumas en forma vertical u horizontal [para 30 bolas ($1.150 + 350$), para 46 bolas ($400 + 1.900$ ó $1.150 + 1.150$), para 53 bolas ($1.900 + 750$) y para 61 bolas ($1.150 + 1.900$)] y explican con sus propias palabras la propiedad que usaron (E1, E2, E3, E5, E8, E10, E11, E13)	8	24%	Relacionan el dinero ganado con las bolas desplazadas (30 bolas $\rightarrow \$1500\dots$), algunos multiplican por 50 las bolas desplazadas e indican que tuvieron que sumar un tiro con otro, para poder obtener el mismo resultado de otro tiro	2
				Relacionan el dinero ganado con el tiro correspondiente (1.150 con el tiro 3... 750 con el tiro 4), multiplican por 50 las bolas desplazadas e indican que al sumar dos tiros de la tabla, hay un resultado de otro tiro en la tabla o que al sumar dos tiros da otro tiro	6
2	Estudiantes que responden correctamente el ítem a (E4, E6, E7, E9, E14, E17, E19, E27,	13	38%	Realizan unas sumas en forma vertical u horizontal [para 30 bolas ($1.150 + 350$), para 46 bolas ($400 + 1.900$ ó $1.150 + 1.150$),	13

	E29, E31, E34, E36, E39)			para 53 bolas ($1900 + 750$) y para 61 bolas ($1.150 + 1.900$), algunos relacionan correctamente el dinero con el tiro correspondiente (1.150 con el tiro 3,... 750 con el tiro 4), o multiplican por 50 las bolas desplazadas o asocian las bolas como tiros ($Tiro\ 30 = 1.500 \dots$)		
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E15, E16, E18, E20, E24, E25, E26, E30, E32, E33, E35, E37, E38)	13	38%	No responden la pregunta	4	31%
				Descomponen 30, 46, 53 y 61 bolas, en tiros y cantidades de bolas	3	23%
				Hacen unas sumas ($350 + 100$ ó $1900 + 400$)	3	23%
				No realiza ninguna operación y asocia las bolas como tiros ($Tiro\ 30 = 1.500 \dots$)	1	8%
				Realizan de manera incorrecta el producto de las bolas desplazadas por 50	2	15%

De la tabla 25 se infiere que el 62% de los estudiantes responden correctamente la pregunta 4a, la cual tenía la intención de que relacionaran el dinero de los tiros encontrados anteriormente, en que se han descompuesto 30, 46, 53 y 61 bolas desplazadas. Además de esto, también hay estudiantes que usan el patrón $50 \times n$, para comprobar su resultado. Ahora bien, del 38% de los estudiantes que no responden correctamente, la mayoría (69%) no interpretan correctamente el enunciado, ya que estos responden lo mismo de la pregunta 3 o hacen cálculos incompletos o incorrectos. Respecto al ítem b, solo el 24% de los estudiantes logran explicar, en lenguaje natural, la propiedad que han usado en las preguntas anteriores.

Sobre la base de las ideas expuestas anteriormente, se puede decir que el 62% de los estudiantes tuvieron en cuenta los datos de la tabla, para usar la propiedad de la proporcionalidad directa $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Cabe resaltar que 14 estudiantes, además de lo anterior, usan el patrón, para comprobar su resultado ($50 \times 30, 50 \times 46, 50 \times 53, 50 \times 61$), lo cual es una muestra de que *validan* el patrón y que justifican y desarrollan argumentos matemáticos, para defender la validez de su argumento (Blanton et. Al, 2017), que en este caso era el resultado obtenido, luego de realizar las respectivas operaciones (Para 30 bolas $1.150 + 350 \dots$).

Por otro lado, del total de estudiantes, el 21% logran identificar correctamente las correspondencias entre la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado, lo cual puede deberse a que la tabla les permite comprender las relaciones de dependencia entre dichas cantidades (Obando, Vanegas & Vásquez, 2006), la cual indican señalando con flechas las bolas desplazadas y el dinero ganado (Ver Figura 34).

$\begin{array}{r} 30 \text{ bolas} = 1.150 - \text{tiro } 23 \\ + 350 - \text{tiro } 9 \\ \hline 1.500 \end{array}$	30 bolas $\rightarrow \$1.500$
$\begin{array}{r} 46 \text{ bolas} = 1.150 - \text{tiro } 23 \\ + 1.150 - \text{tiro } 23 \\ \hline 2.300 \end{array}$	46 bolas $\rightarrow \$2.300$
$\begin{array}{r} 53 \text{ bolas} = 1.900 - \text{tiro } 18 \\ + 750 - \text{tiro } 15 \\ \hline 2.650 \end{array}$	53 bolas $\rightarrow \$2.650$
$\begin{array}{r} 61 \text{ bolas} = 1.150 - \text{tiro } 3 \\ + 1.900 - \text{tiro } 5 \\ \hline 3.050 \end{array}$	61 bolas $\rightarrow \$3.050$

Figura 34. S2, T2, P4, E14

A lo anterior hay que añadir que el 29% de los estudiantes relacionan correctamente el número del tiro con el dinero lo cual señalan con una flecha en cada dinero. También hubo 3 estudiantes que solamente realizaron correctamente la suma del dinero de los tiros, por lo tanto, dichos estudiantes, no identifican la relación descrita anteriormente, pero si dan muestras de que logran desarrollar un aspecto del pensamiento variacional (MEN, 2006), porque prueban una conjetura (el dinero por desplazar 30, 46, 53 y 61 bolas, es igual a la suma del dinero que ganó en los dos tiros que descompusiste), a partir de la interpretación de una tabla.

Finalmente, respecto al ítem c, el 24% de los estudiantes lograron explicar, la propiedad de la proporcionalidad $f(a + b) = f(a) + f(b)$, pero en términos de tiros y no del dinero ganado o bolas desplazadas (Ver Figura 35). Así pues, el lenguaje natural sirve como un punto de partida para que los estudiantes, usen e identifiquen propiedades y reconozcan relaciones (Kaput, Carragher & Blanton, 2008), que en este caso era la propiedad de la proporcionalidad y las relaciones entre las cantidades involucradas.

Al sumar 2 tiros de la tabla observe
que en la tabla había un resultado
de otro tiro.

Figura 35. S2, T2, P4, E2

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 5 (S2T2P5)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 26

Tipificación S2, T2, P5

Pregunta 5: Sara afirma que el dinero que ganó al desplazar 18 bolas en el tiro 8, es el mismo que ganó al desplazar 3 bolas en el tiro 9, pero multiplicado por 6. Indica si la afirmación de Sara es correcta y ¿por qué?						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que realizan una multiplicación en forma vertical u horizontal (150×6) y justifican su respuesta (E1, E2, E3, E5, E7, E8, E10, E11, E13, E14, E17, E19, E24, E27, E29, E30, E31, E32, E34, E36, E39)	22	65%	Indica que la afirmación de Sara es correcta porque 18 bolas/ dinero 900, 9 bolas/dinero 150	1	4%
				Indican que la afirmación de Sara es correcta porque 150 que es del tiro 9, al multiplicarlo por 6, da el valor de \$900 que es lo del tiro 8	8	36%
				Escriben que Tiro $8 \rightarrow \$900$ $Tiro\ 9 \times 6 \rightarrow \150×6 e indican que ella quería que le diera el mismo resultado	4	18%
				Relacionan el dinero con el tiro correspondiente ($150 \rightarrow$ Tiro 9, $900 \rightarrow$ Tiro 8)	5	23%
				El argumento no se entiende	4	18%
2	Estudiantes que comprueban que las bolas desplazadas en el tiro 8 es el mismo desplazado el tiro 9, pero multiplicado por 6 y afirman que Sara está en lo correcto (E6, E9, E26)	3	9%	Indica que Tiro $8 \rightarrow 18$ bolas, Tiro $9 \rightarrow 3\ bolas \times 6 = 18\ bolas$	1	33%
				Realizan una multiplicación (3×6) e indican que la afirmación es correcta porque 3 por 6 es 18 y da lo mismo que 18 bolas en el tiro 8	2	66%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E15, E25, E33, E35, E37, E16, E18, E20, E38)	9	26%	Hacen una suma en forma vertical ($18 + 68 + 39$ ó $18 + 8 + 3 + 9 + 6$)	2	22%
				Indican que gano = 900	2	22%
				No responden la pregunta	4	44%
				Indica que 18 bolas son 700 y multiplicado por 6 son 1000	1	11%

De la tabla 26 se infiere que el 74% de los estudiantes responden correctamente, es decir identifican que el dinero que gana Sara al desplazar 18 bolas en el tiro 8, es el mismo que ganó al desplazar 3 bolas en el tiro 9, pero multiplicado por 6; aunque tres de ellos solamente comprobaron la equivalencia para la cantidad de bolas desplazadas, también hay que decir que el 26% de los estudiantes no responden correctamente.

Respecto a la justificación de la pregunta, la mayoría realiza la multiplicación correspondiente, ya sea de las bolas desplazadas por 6, del dinero ganado por 6 o de ambas.

De acuerdo con lo anterior, el 65% de los estudiantes tuvieron en cuenta los datos de la tabla, para usar la propiedad de la proporcionalidad directa si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$, donde $f(x)$ es la función del dinero ganado y x la cantidad de bolas desplazadas, así, para la pregunta 5, $f(a) = f(r \cdot e) = f(6 \cdot 3) = 6 \cdot f(3) = 6 \cdot \$150 = \$900 = f(18)$. Esto se

infiere a partir de las operaciones hechas por el 74% de los estudiantes, de los cuales algunos identifican la condición inicial $a = r \cdot e$, que en este caso era $18 = 6 \times 3$ y la mayoría encuentran, el dinero correspondiente por desplazar 3 bolas ($f(3) = \$150$).

Ahora bien, en esta pregunta, del 65% de los estudiantes, ninguno logra identificar la correspondencia entre la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado, solamente E1, lo hace en forma parcialmente correcta (Ver Figura 36).

la afirmacio de sara es correcta
 Por esto: 18 bolas / dinero 900
 9 bolas / dinero 150

$$\begin{array}{r} 150 \\ \times 6 \\ \hline 900 \end{array}$$

Figura 36. S2, T2, P5, E1

Los estudiantes lo que hacen es, relacionar correctamente el número del tiro, con el dinero ganado, lo cual registran en lenguaje natural o señalan con una flecha en el dinero, y esta es la manera como justifican y desarrollan argumentos matemáticos para validar la hipótesis propuesta que en este caso era que el dinero que ganó al desplazar 18 bolas en el tiro 8, es el mismo que ganó al desplazar 3 bolas en el tiro 9, pero multiplicado por 6.

Cabe destacar también como 2 estudiantes que respondieron de manera incorrecta, no consideran la propiedad de la proporcionalidad directa que se les estaba indicando en el enunciado, si no que más bien dejan ver que razonan en términos multiplicativos (Godino & Batanero, 2002), ya que en su justificación muestran unas técnicas aditivas ($18 + 68 + 39$ ó $18 + 8 + 3 + 9 + 6$), de las cuales se infiere que uno de ellos lo que hace es sumar los número que aparecen en el enunciado.

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 6 (S2T2P6)

Población: 34 estudiantes

Tabla 27

Tipificación S2, T2, P6

Pregunta 6: Indica si lo dicho anteriormente se cumple para el dinero que ganó Sara en el tiro 10, y lo que ganó en el tiro 9, multiplicado por 7, y ¿Por qué?					
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa Fr
1	Estudiantes que comprueban que el dinero que ganó Sara en el tiro 10, es el mismo que ganó en el tiro 9, multiplicado por 7 y	16	47%	Indica que el patrón se cumple porque en el tiro 10 gana 1.050 y el dinero del tiro 9 multiplicado por 7 da lo mismo	1 6%
				Escriben <i>Tiro 10</i> → \$1.050, <i>Tiro 9</i> × 7 → 150 × 7	5 31%

	justifican su respuesta (E1, E2, E3, E4, E8, E9, E14, E19, E27, E29, E30, E31, E32, E34, E36, E39)			Hacen una multiplicación (150×7) e indican que Sara tiene razón porque 150 que es del tiro 9, al multiplicarlo por 7, da el valor de \$1.050 que es lo del tiro 10	4	25%
				Hacen una multiplicación (150×7) y relacionan el dinero ganado con el tiro, ($150 \rightarrow \text{tiro 9}$ y $1.050 \rightarrow \text{tiro 10}$)	4	25%
				Hacen una multiplicación (150×7) y presentan un argumento que no se entiende	2	12%
2	Estudiantes que comprueban que las bolas desplazadas en el tiro 10 es el mismo desplazado el tiro 9, pero multiplicado por 7 (E6, E26, E37)	3	9%	Escriben que $\text{Tiro 10} \rightarrow 21$, $\text{Tiro 9} \rightarrow 3 \text{ bolas} \times 7 = 21$	2	66%
				Indica que 3×7 da 21 y el tiro 10 dio 21	1	33%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E5, E7, E10, E11, E13, E15, E16, E17, E24, E25, E35, , E18, E20, E33, E38)	15	44%	Indican que $\text{Tiro 9} \rightarrow \1.050 $\text{Tiro 9} \times 6 \rightarrow 150 \times 6$	4	27%
				Indican que $\text{Tiro 10} \rightarrow 1.050$ $\text{Tiro 9} \times 7 = 150 = 1.050$	4	27%
				Tienen errores en las multiplicaciones	2	13%
				No responden	5	33%

Como se observa en la tabla 27, el 56% de los estudiantes responden correctamente, es decir identifican que el dinero que gana Sara al desplazar 18 bolas en el tiro 8 es el mismo que ganó al desplazar 3 bolas en el tiro 9, pero multiplicado por 6; aunque tres de ellos solamente comprobaron la equivalencia para la cantidad de bolas desplazadas, también hay que decir que el 44% de los estudiantes no responden correctamente.

Respecto a la justificación de la pregunta, la mayoría realiza la multiplicación correspondiente, ya sea de las bolas desplazadas por 6, del dinero ganado por 6 o de ambas.

Ahora bien, en el enunciado de la pregunta 6 a diferencia del anterior, se omite mencionar las bolas desplazadas de los tiros, lo cual puede ser la causa por la que el porcentaje de acierto en esta pregunta sea más bajo que el de la pregunta anterior. Cabe destacar también, como, al igual que en la pregunta 5, el 9% de los estudiantes solo comprueban la equivalencia, para la cantidad de bolas desplazadas ($a = r \cdot e$) (Ver Figura 38), posiblemente es porque en la redacción de la pregunta no se alude al dinero, sino a lo que gana.

Handwritten student work showing two calculations:

$$\text{Tiro 10} \rightarrow 21$$

$$\text{Tiro 9} \rightarrow 3 \text{ bolas} \times 7 = 21$$

Figura 37. S2, T2, P6, E6

Con base en lo anterior, se infiere que el 47% de los estudiantes tuvieron en cuenta los datos de la tabla, para usar la propiedad de la proporcionalidad directa “si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$ ”, así, para la pregunta 6 $f(a) = f(r \cdot e) = f(7 \cdot 3) = 7 \cdot f(3) = 7 \cdot \$150 = \$1.050 = f(21)$. Ahora bien, en esta pregunta, del 49% de los estudiantes que responden correctamente, ninguno logra identificar la correspondencia entre la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado. Los estudiantes lo que hacen es relacionar correctamente el número del tiro, con el dinero ganado, lo cual registran en lenguaje natural o señalan con una flecha en el dinero (Ver Figura 37).

Dicha estrategia es la manera como los estudiantes justifican y desarrollan argumentos matemáticos, para validar la hipótesis propuesta que en este caso era, que el dinero que ganó Sara en el tiro 10, es el mismo que ganó en el tiro 9 multiplicado por 7.

Handwritten student work showing a calculation: "tiro 10 -> 1.050" and "el tiro 9 x 7 = 150 x 7 = 1.050".

Figura 38. S2, T2, P6, E19

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 7 (S2T2P7)

Población: 34 estudiantes

Tabla 28

Tipificación S2, T2, P7

Pregunta 7: Según la propiedad anterior, que se cumple para casos similares, y teniendo en cuenta los datos de la tabla. Ayudale a Tatiana a buscar, un tiro que cumpla la propiedad de que al multiplicar, la cantidad de bolas desplazadas de ese tiro, por un número, obtengo 24 bolas. Así mismo, encuentra un tiro que cumpla la propiedad, para obtener 27, 36 y 60 bolas.					
	Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa Fr
1	Estudiantes que realizan unas multiplicaciones en forma vertical [24 bolas (8 bolas $\times$ 3 ó 3 bolas $\times$ 8 ó 3 $\times$ 8), 27 bolas (3 bolas $\times$ 9 ó 3 $\times$ 9) 36 bolas (18 bolas $\times$ 2 ó 2 bolas $\times$ 18 ó 18 $\times$ 2) 60 bolas (15 bolas $\times$ 4 ó 4 bolas $\times$ 15 ó 15 $\times$ 4)] (E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, E11, E13, E14, E19, E24, E25, E26, E27, E29, E30, E31, E32, E34, E36, E39)	25	73%	Relacionan las bolas con los tiros (8 bolas $\rightarrow$ tiro 2, 3 bolas $\rightarrow$ tiro 9, 18 bolas $\rightarrow$ tiro 8, 15 bolas $\rightarrow$ tiro 4, 2 bolas $\rightarrow$ tiro 6).	25 100%
2	Estudiantes responden de manera incompleta o incorrecta (E15, E16, E17, E18, E20, E33, E35, E37 E38)	9	27%	Hacen unas multiplicaciones (27 = 3 $\times$ 9, 9 $\times$ 4 = 36, 60 = 10 $\times$ 6, 24 = 8 $\times$ 3)	2 22%

			Hacen unas sumas ($24 \text{ bolas} = 21 \text{ bolas} + 3 \text{ bolas}$, $27 \text{ bolas} = 24 \text{ bolas} + 3 \text{ bolas}$, ó $27 + 36 + 60$) y alguno hace una multiplicación ($36 \text{ bolas} = 4 \text{ bolas} \times 4 \text{ bolas}$)	2	22%
			No responden la pregunta	5	56%

Teniendo en cuenta los datos de la tabla 28 se infiere que el 73% de los estudiantes entendieron el enunciado de la pregunta, la cual tenía la intención de que identificaran, otros tiro (24, 27, 35 y 60 bolas) que se podían obtener, al multiplicar un número por la cantidad de bolas desplazadas de un tiro de la tabla. Ahora bien, del 27% de los estudiantes que responden de manera incorrecta, dos realizan sumas o multiplicaciones con cantidades que no necesariamente estaban en la tabla.

Se puede decir además, que del 27% de los estudiantes que responden de manera incorrecta, dos identifican equivalencias numéricas correctas, pero estas no corresponden con las cantidades propuestas en la tabla ($3 \times 9 = 27$, $9 \times 4 = 36$, $10 \times 6 = 60$, $8 \times 3 = 24$).

En base a lo anterior, es posible afirmar que el 73% de los estudiantes logran expresar equivalencias numéricas de la forma $a = r \cdot e$, siendo a una de las bolas desplazadas dadas (24, 27, 35 y 60 bolas), e una cantidad que pertenecen a la columna de bolas desplazadas, y r un numero natural (Fiol & Fortuny, 1990), lo cual requieren, para luego identificar en la pregunta 8, la propiedad de la proporcionalidad directa (si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$).

Ahora bien, de manera similar a las preguntas anteriores, el 73% de estos estudiantes, relacionan de manera adecuada las bolas desplazadas con los tiros (Ver Figura 39), y esto la mayoría lo hacen directamente en la descomposición, es decir señalan para cada cantidad, su tiro correspondiente. Dicha estrategia es la manera como los estudiantes justifican y desarrollan argumentos matemáticos, para validar la hipótesis propuesta (Blanton et. Al, 2017), (Hay un tiro tal que, al multiplicar, la cantidad de bolas desplazadas de ese tiro, por un número, obtienes 24, 27, 36 o 60 bolas). Ahora bien, de dicho porcentaje de estudiantes, E34 logra identificar dos equivalencias para 24 y 60 bolas (Ver Figura 39).

Handwritten work showing proportional reasoning with balls and shots. The work includes several equations and relationships:

- $24 \text{ bolas} = 5 \text{ tiros} \times 8$ (with arrows pointing from 5 to 8 and from 8 to 40)
- $24 \text{ bolas} = 8 \text{ tiros} \times 3$ (with arrows pointing from 8 to 3 and from 3 to 24)
- $27 \text{ bolas} = 3 \text{ tiros} \times 9$ (with 9 circled)
- $36 \text{ bolas} = 18 \text{ tiros} \times 2$ (with 18 circled and 2 circled, and an arrow pointing from 18 to 72)
- $60 \text{ bolas} = 12 \text{ tiros} \times 5$ (with 12 circled and 5 circled, and an arrow pointing from 12 to 60)
- $60 \text{ bolas} = 15 \text{ tiros} \times 4$ (with 15 circled and 4 circled, and an arrow pointing from 15 to 60)

Figura 39. S2, T2, P7, E34

Situación 2: Tarea 2, Pregunta 8 (S2T2P8)**Población:** 34 estudiantes

Tabla 29

Tipificación S2, T2, P8

Pregunta 8: Teniendo en cuenta lo anterior.

a. Comprueba que el dinero que ganó Tatiana al desplazar 24 bolas, es igual a lo que ganó, en el tiro que cumple la propiedad (al multiplicar, la cantidad de bolas desplazadas de ese tiro, por un número, obtengo 24 bolas) pero, multiplicado por 3. Así mismo, comprueba que el dinero que ganó Tatiana al desplazar 27, 36 y 60 bolas, es igual a lo que ganó en el tiro que cumple la propiedad, multiplicado por un número.

b. Explica con tus propias palabras la propiedad que usaste en las preguntas 5, 6, 7 y 8a

	Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que realizan unas multiplicaciones en forma horizontal o vertical 24 bolas = Tiro $2 \times 3 = 400 \times 3$ ó Tiro $9 \times 8 = 150 \times 8$ 27 bolas = Tiro $9 \times 9 = 150 \times 9$ 36 bolas = Tiro $8 \times 2 = 900 \times 2 =$ Tiro $6 \times 18 = 100 \times 18$, 60 bolas = Tiro $4 \times 4 = 750 \times 4$), comprueban cada resultado multiplicando por 50 las bolas desplazadas y responden el ítem b (E2, E3, E5, E6, E8, E9, E10, E14, E27)	9	26%	En el ítem b indica lo que hizo en la pregunta 2 Indican que al coger un tiro y multiplicarlo por un número obtienen el resultado de otro tiro Indica que multiplica otro tiro y ve que le da otro tiro Indica que multiplica 2 tiros y le da otro tiro Indica que coge un tiro y lo multiplica por un número Indica que multiplica 1 tiro con el número 6 y que le da otro tiro	1 3 1 1 2 1	11% 33% 11% 11% 22% 11%

2	Estudiantes que responden el ítem <i>a</i> y no responden el ítem <i>b</i> (E1, E4, E7, E11, E13, E19, E25, E26, E29, E30, E31, E32, E34, E36, E39)	15	44%	Realizan unas multiplicaciones en forma horizontal o vertical 24 bolas = Tiro $2 \times 3 = 400 \times 3$ ó Tiro $9 \times 8 = 150 \times 8$ 27 bolas = Tiro $9 \times 9 = 150 \times 9$, 36 bolas = Tiro $8 \times 2 = 900 \times 2$ = Tiro $6 \times 18 = 100 \times 18$, 60 bolas = Tiro $4 \times 4 = 750 \times 4$), y comprueban cada resultado multiplicando por 50 las bolas desplazadas	15	100%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta o incompleta (E15, E16, E17, E18, E20, E24, E33, E35, E37, E38)	10	29%	Hacen unas multiplicaciones (9×3 , 4×9 , 10×6 , ó 27×3 , 36×3 , 60×3 , ó 150×8 , 150×9 ó 24×50)	4	40%
				No se entiende la operación e indica que el resultado es 918	1	10%
				No responden	5	50%

De los datos presentados en la tabla 29 se infiere que el 70% de los estudiantes entendieron el enunciado de la pregunta 8a, la cual tenía la intención de que los estudiantes, relacionaran el dinero, de los tiros encontrados anteriormente, para 24, 27, 36 y 60 bolas. Además de esto, también hay estudiantes que usan el patrón $50 \times n$, para comprobar su resultado.

Ahora bien, del 29% de los estudiantes que no responden correctamente, el 40% de estos, no interpretan correctamente el enunciado, ya que estos responden lo mismo de la pregunta 7 o hacen cálculos incompletos o incorrectos. Respecto al ítem *b*, solo el 26% de los estudiantes logran explicar, en lenguaje natural, la propiedad de la proporcionalidad directa que han usados en las preguntas anteriores.

Sobre la base de las ideas expuestas anteriormente, se puede decir que el 70% de los estudiantes tuvieron en cuenta los datos de la tabla, para usar la propiedad mencionada anteriormente y además de lo anterior, usan el patrón, para comprobar su resultado (24×50 , 27×50 , 36×50 , 60×50) lo cual es una muestra de que *validan* el patrón y que justifican la validez de su argumento, que en este caso era el resultado obtenido, luego de realizar las respectivas operaciones (Para 24 bolas = 400×3 ó $150 \times 8 \dots$).

Se puede decir que del total de estudiantes, el 11%, (E6, E26, E29, E31), logran relacionar correctamente la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado, lo cual puede deberse a que la tabla les permite comprender las relaciones de dependencia entre dichas cantidades (Obando, Vanegas & Vásquez, 2006). Ahora bien, dicha relación la indican señalando con flechas, las

bolas desplazadas y el dinero ganado (Ver Figura 40). A lo anterior hay que añadir que el 59% de los estudiantes relacionan correctamente el número del tiro, con el dinero, lo cual señalan con una flecha en cada dinero, por lo tanto, dicho porcentaje no logra identificar la relación descrita anteriormente.

$$\begin{array}{l}
 24 \text{ bolas} = 8 \text{ bolas} \times 3 \\
 \downarrow \\
 \$1200 = \$400 \times 3 = 1200 \\
 \\
 27 \text{ bolas} = 3 \text{ bolas} \times 9 \\
 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 \$1350 \qquad \qquad 150 \times 9 = 1350 \\
 \\
 36 \text{ bolas} = 18 \text{ bolas} \times 2 \\
 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 \$1800 \qquad \qquad 900 \times 2 = 1800 \\
 \\
 60 \text{ bolas} = 15 \text{ bolas} \times 4 \\
 \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 \$3000 \qquad \qquad 750 \times 4 = 3000
 \end{array}$$

Figura 40. S2, T2, P8, E29

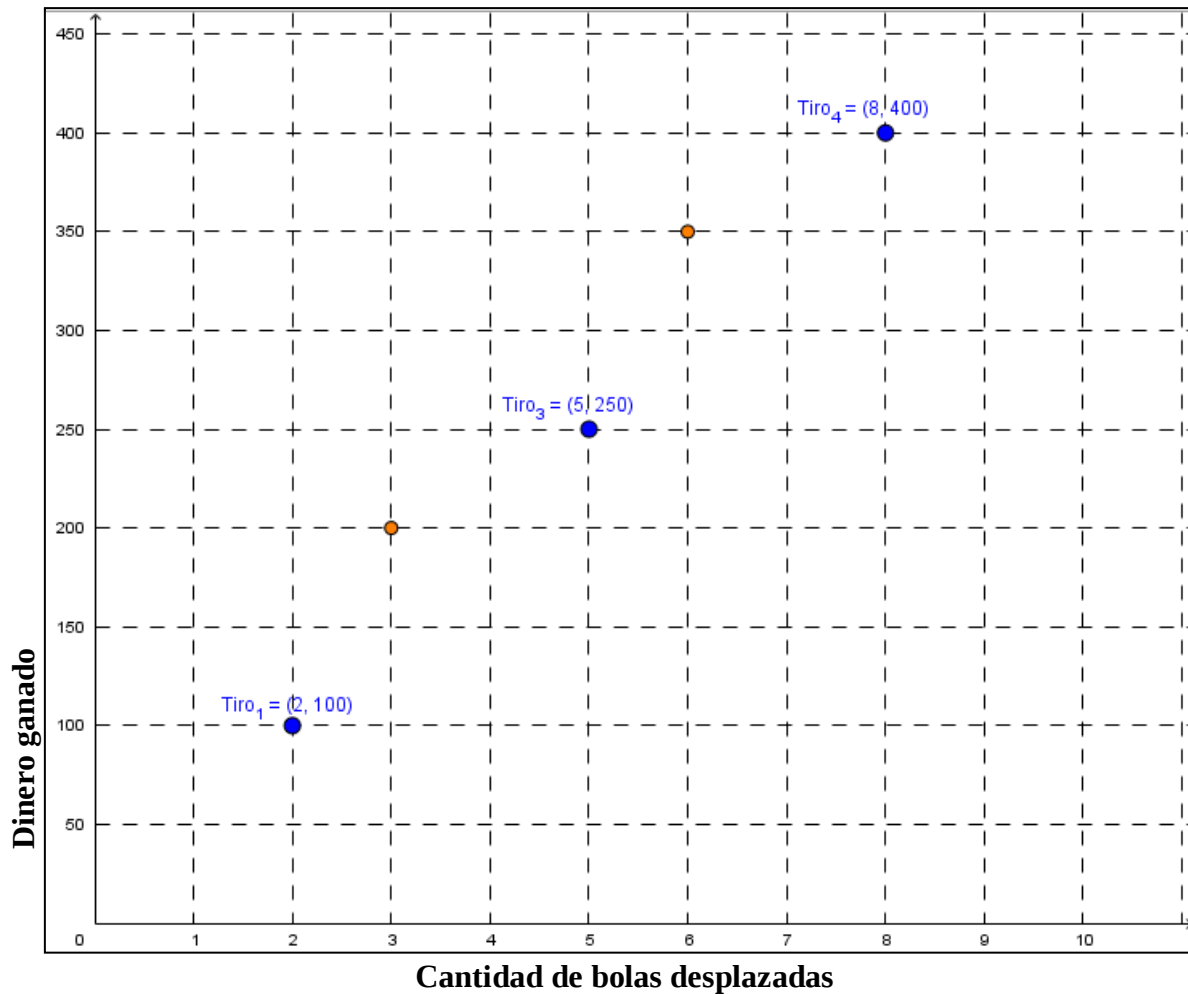
Finalmente, respecto al ítem c, el 26% de los estudiantes lograron explicar, la propiedad de la proporcionalidad directa, “si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$ ”, pero en términos de tiros y no del dinero ganado o bolas desplazadas (Ver Figura 41). Así pues, el lenguaje natural sirve como un punto de partida para que los estudiantes, usen e identifiquen propiedades y reconozcan relaciones (Kaput, Carraher & Blanton, 2008), que en este caso era la propiedad de la proporcionalidad y las relaciones entre las cantidades involucradas.

en la quinta tuve que multiplicar un tiro
por un numero y luego fui a la tabla
y me dio otro tiro

Figura 41. S2, T2, P8, E27

Tarea 3: Graficando la variación proporcional

Pedro, estudiante de grado quinto, y sus amigos, por turnos lanzaron bolas de cristal. Para no olvidar sus puntajes, decidieron ubicarlos en la siguiente gráfica, donde cada punto azul, determina, la cantidad de bolas desplazadas y el dinero ganado.



Situación 2: Tarea 3, Pregunta 1 (S2T3P1)**Población:** 26 estudiantes

Tabla 30

Tipificación S2, T3, P1

Pregunta 1: Toma las coordenadas de un punto cualquiera, de los dibujados por Pedro, y explica qué significado tienen, cada uno de esos números, en relación al juego de las bolas.					
Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1 Estudiantes que escogen el Tiro 3 (5,250) (E1, E3, E4, E5, E7, E8, E10, E12, E14, E15, E21, E25, E30, E31)	14	54%	El 5 es la cantidad de bolas desplazadas y el 250 es el dinero ganado	9	64%
			Pedro tiene 5 bolitas y con esas bolitas gana 250 entonces es (5,250)	1	7%
			En el tiro 3 saco 5 bolas y el dinero que gano fue \$250	2	14%
			Por 5 bolas gano \$250	2	14%
2 Estudiantes que escogen el Tiro 1 (2,100) (E6, E26, E33, E35)	4	15%	El dos son bolas desplazadas y 100 el dinero ganado	2	50%
			Al tirar 1 bola gana \$50 pero si tira 2 bolas gana \$100	1	25%
			Desplazo 2 bolas y por eso gana 100	1	25%
3 Estudiantes que escogen el Tiro 4 (8,400) (E9, E11, E19, E27, E34, E36, E37)	7	27%	8 es la cantidad de bolas desplazadas y 400 es la cantidad de dinero ganado	4	57%
			Cuando saca 8 bolitas se gana 400	2	29%
			8 bolas desplazadas y dinero ganado 400, porque ocho por cincuenta 400 y porque por una bola pagan cincuenta y luego multiplique (hace una multiplicación 8×50)	1	14%
4 Estudiante que escoge varios tiros pero no indica las coordenadas (E18)	1	4%	Para 8 bolas desplazadas 400 es el dinero ganado, para 5 bolas desplazadas 250 es el dinero que gana y para 2 canicas de cristal gana 100 pesos	1	100%

De la tabla 30 se infiere que el 100% de los estudiantes responden correctamente la pregunta, lo cual permite inferir que logran interpretar las coordenadas de los tiros que contiene la gráfica, además un estudiante (E27) comprueba que 400 es el dinero obtenido por 8 bolas desplazadas y el 4% describe todo los tiros.

En base a lo anterior, 10 de 26 estudiantes logran expresar correctamente en lenguaje natural, la razón, como una relación entre dos cantidades (Guacaneme, 2001), que en este caso eran las bolas desplazadas y el dinero ganado (Ver Figura 42), según el tiro que escogen, lo cual permite afirmar que dicho registro les permite describir conceptos algebraicos usando un lenguaje conocido (Kaput, Carraher & Blanton, 2008), pero esto lo hacen basándose en el análisis hecho a partir de la gráfica, lo cual deja ver que los estudiantes están desarrollando algún aspecto del pensamiento variacional (MEN, 2006).

Ahora bien, los demás estudiantes lo que hacen es indicar de manera separada a que corresponde cada número, mas no los relacionan entre sí (“8 es la cantidad de bolas desplazadas y 400 es la cantidad de dinero ganado”).

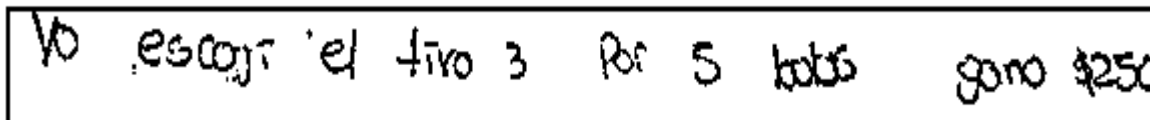


Figura 42. S2, T3, P1, E15

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 2 (S2T3P2)

Población: 26 estudiantes

Tabla 31

Tipificación S2, T3, P2

Pregunta 2: Observa la ubicación de los puntos azules, o tiros que hizo Pedro, y describe de qué manera están ordenados dichos puntos.						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes describen con sus palabras que los puntos azules están alineados (E1, E3, E4, E5, E7, E8, E10, E11, E12, E14, E19, E21, E30, E31, E33, E34, E36, E37)	18	69%	Indican que los ven ordenados en una línea y algunos dibujan un segmento con tres puntos	6	33%
				Indica que ve que los puntos están ordenados de manera alineada y dibuja un segmento con tres puntos	1	5%
				Indica que los puntos están ubicados en una línea diagonal	6	33%
				Indica que ve una raya derecha y dibuja un segmento con tres puntos	4	22%
				Indica que los ve en línea recta y como en escala	1	5%
2	Estudiantes establecen características que no están relacionadas con la linealidad (E6, E9, E15, E18, E25, E26, E27, E35)	8	31%	Indican que están ordenados por 2, 5, 8 o de menor a mayor o de manera horizontal	4	50%
				Realiza un segmento con tres puntos, los cuales nombra como tiro 1, tiro 3 y tiro 4.	1	12%
				Indica que los ordeno de esta manera: 250 lo unió al punto azul y del azul al punto 5	2	25%
				Indica que los puntos están para mostrar la respuesta y los números para indicar la respuesta y dibuja un segmentos con tres puntos	1	12%

De acuerdo con la tabla 31, el 69% de los estudiantes, entendieron la pregunta 2, lo cual implica que lograron reconocer que los puntos azules estaban ordenados de manera alineada, aunque ellos no indican que los puntos correspondientes a las parejas ordenadas (2,100); (5,250) y (8,400) están alineados (Fiol & Fortuny, 1990); y esto puede deberse a la redacción de la pregunta, aunque solo E9 se acerca a dicha descripción (Ver Figura 43).

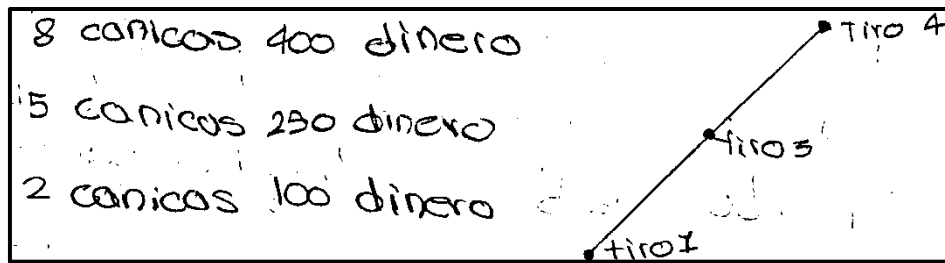


Figura 43. S2, T3, P2, E9

Dicho porcentaje de estudiantes más bien relacionan la linealidad, al estar ordenados en una raya o línea, y dibujan un segmento con tres puntos, lo cual infieren luego de trazar un segmento por los tres puntos azules de los tiros (Ver Figura 44), pero este procedimiento es un error de continuidad (Guacaneme, 2001), porque la gráfica no era una línea recta, debido a que en la situación se manejaban magnitudes discretas (bolas y dinero en pesos colombianos).

Aunque si se puede resaltar que los estudiantes, justifican y desarrollan argumentos matemáticos, para defender o refutar la validez de una generalización propuesta (Blanton et. Al, 2017), lo cual realizan en lenguaje natural o con ayuda de dibujos.

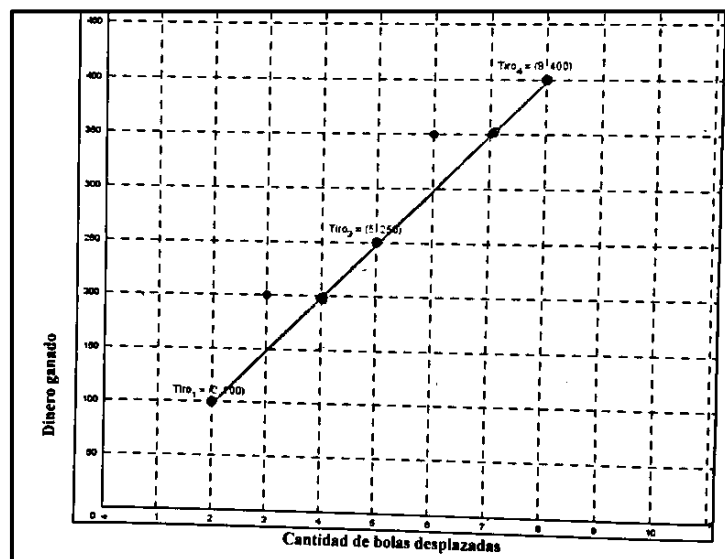


Figura 44. S2, T3, P2, E21

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 3 (S2T3P3)**Población:** 26 estudiantes

Tabla 32

Tipificación S2, T3, P3

Pregunta 3: Ubica en la gráfica, los puntos correspondientes, para 4 y 7 bolas desplazadas. Luego indica si dichos puntos cumplen la misma característica que encontraste en la pregunta 2, y ¿Por qué?					
Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1 Estudiantes que ubican correctamente los puntos para 4 y 7 bolas desplazadas, en la gráfica, e indican que los puntos cumplen la misma característica que encontraron en la pregunta 2. (E1, E3, E4, E5, E7, E9, E12, E19, E30, E31, E34, E36, E37)	13	50%	Dibujan la gráfica, ubican los puntos correspondientes, o escriben las coordenadas e indican que los puntos 4 y 7 siguen alineados	3	23%
			Indican que los puntos 4 y 7 siguen como una línea diagonal o línea trazada y algunos indican que ningún punto se corre ni queda en otro lado	7	54%
			Indica que le toco marcar los puntos porque estaban mal, porque decía 200 y estaba en el 3 y el otro era 350 y estaba en el 6, pero también van en línea recta o en escalera o en diagonal	1	8%
			Indica que la línea de los puntos 4 y 7 esta derecha y dibuja un segmento con 5 puntos	1	8%
			Indica que los puntos están en la línea de los puntos 1, 3 y 4, y dibuja un segmento con tres puntos, los cuales nombra como tiro 1, tiro 3 y tiro 4.	1	8%
2 Estudiantes que ubican correctamente los puntos para 4 y 7 bolas desplazadas, en la gráfica pero argumentan de manera incorrecta (E6, E8, E10, E11, E14, E15, E21, E26, E27, E33, E35)	11	42%	Indican que los tiros están ordenados de la misma manera que los otros puntos	2	18%
			Indica que 4 bolas desplazadas valen 200 y 7 bolas desplazadas valen 350	5	45%
			Indica que los puntos naranja muestran el lugar del punto 4 y el punto 7	1	9%
			Indica que no porque son números diferentes porque en la segunda esta 258 y en la tres tira 28	1	9%
			Indica que no tienen ninguna bola desplazada	1	9%
3 Estudiantes que no ubican los puntos (E18, E25)	2	8%	Indica que 1 bola de cristal valen por 500 pesos y si son 20 serian 10.000 pesos y escribe una operación en forma vertical ($2 + 100 = 300$)	1	50%
			Indica que no tiene ninguna bola desplazada	1	50%

De acuerdo con los resultados de la tabla 32, el 92% de los estudiantes lograron ubicar los puntos correspondientes para 4 y 7 bolas desplazadas en la gráfica o en su propia gráfica (Ver Figura 45), aunque algunos no indicaron las respectivas coordenadas. Ahora bien, respecto a la segunda parte de la pregunta, el 50% de los estudiantes logran indicar en lenguaje natural que los puntos (4,200) y (7,350) siguen alineados, y el 42% no relacionan si la característica encontrada anteriormente para los puntos azules, se cumple para los nuevos puntos.

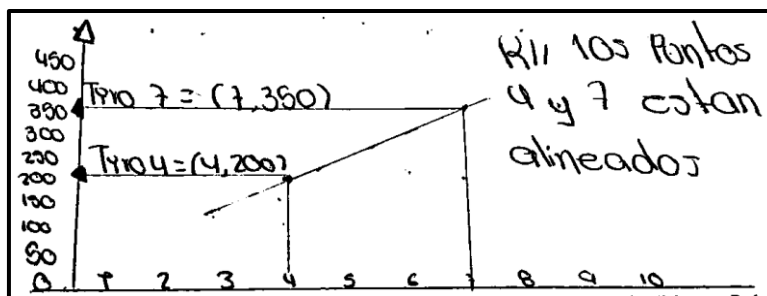


Figura 45. S2, T3, P3, E1

En base a lo anterior, se puede considerar que el 50% de los estudiantes están desarrollando algún aspecto del pensamiento variacional, porque el Ministerio de Educación Nacional (2006), indica que para ello, los estudiantes deben estar en capacidad de poner a prueba su conjetura, la cual habían construido en la pregunta 2, respecto a la manera como veían la ubicación de los tiros, y además algunos logran su generalización (“los puntos están alineados”), y esto pudo ser posible gracias a la elaboración e interpretación de la representación gráfica del patrón.

Además de lo anterior, 5 estudiantes no indican la característica de linealidad sino que refieren lo que significan las coordenadas de los puntos (“4 bolas desplazadas valen 200 y 7 bolas desplazadas valen 350”). Ahora bien, E18, responde de manera incorrecta porque no considera la razón adecuada (por 1 bola desplazada, ganas \$50), sino que este indica que 1 bola de cristal vale 500 pesos y además reduce la razón, a unas técnicas aditivas (Godino & Batanero, 2002), ya que este realiza una suma ($2 + 100 = 300$).

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 4 (S2T3P4)

Población: 26 estudiantes

Tabla 33

Tipificación S2, T3, P4

Pregunta 4: Pedro afirma que los puntos azules de su gráfica, están alineados. Explica lo dicho por Pedro, relacionando las coordenadas de los puntos azules.						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que explican porque los puntos azules están alineados (E1, E3, E8, E9, E27, E37)	6	23%	Dibujan un segmento con tres puntos e indica que lo dicho es correcto, porque en la gráfica que dibujo Pedro los puntos están alineados	1	16%
				Indica que ellos siguen rectos pero uno va encima del otro y así por eso son alineados	1	16%
				Indica que al unir los tres puntos queda alineado y dibuja un segmento con tres puntos los cuales nombra como tiro 1, tiro 3, tiro 4.	1	16%
				Indica que todos están en una raya	1	16%
				Indica que están ordenados en la línea diagonal	2	33%
2	Estudiantes que responden de manera incorrecta (E4,	20	77%	Escriben las coordenadas de los tiros (2.100 - 4.200 - 5.250 - 7.350 - 8.400)	7	35%

E5, E6, E7, E10, E11, E12, E14, E15, E18, E19, E21, E25, E26, E30, E31, E33, E34, E35, E36)			El argumento no se entiende o no justifican	3	15%
			Indica que los puntos azules están alineados para no tener el mismo resultado	3	15%
			Indica que los puntos están alineados en orden de una equis	1	5%
			Indica que los puntos azules no están alineados porque no están en una línea recta, están en diagonal	2	10%
			No responden la pregunta	4	20%

Respecto a los datos presentados en la tabla 33, se observa que el 23% de los estudiantes logran interpretar que los puntos alineados, son aquellos en los que existe una recta a la cual todos ellos pertenecen (Vittone, Gianatti & Alegre, 2016), aunque para algunos los puntos están en un segmento o una raya, lo cual dejan notar en sus dibujos o explicaciones.

Ahora bien, el 23% de los estudiantes expresan en lenguaje natural lo que entienden por puntos alineados, lo cual deja ver que dicho registro les permite describir esta propiedad del patrón, usando un lenguaje conocido y algunos se ayudan también de dibujos (Kaput, Carraher & Blanton, 2008; Carraher & Schliemann, 2007), pero no relacionan las coordenadas de los tiros, solamente E9 se acerca a dicha respuesta, apoyándose de un dibujo (Ver Figura 46), y el 35% de los 20 estudiantes que responden de manera incorrecta solo indican las coordenadas, pero no las relacionan.

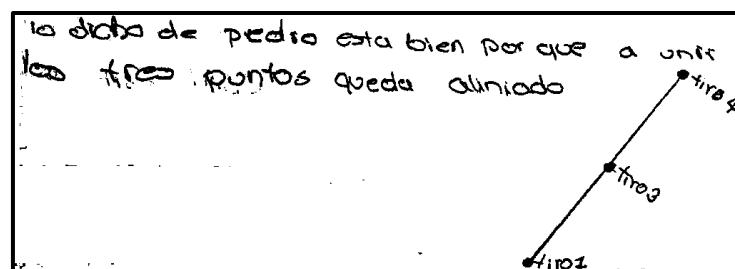


Figura 46. S2, T3, P4, E9

En base a lo anterior, se puede considerar que en este caso, pocos estudiantes (23%) están desarrollando algún aspecto del pensamiento variacional, porque el Ministerio de Educación Nacional (2006), indica que para ello, los estudiantes deben argumentar para sustentar o refutar una hipótesis, que en este caso era que los puntos azules de la gráfica, están alineados, y esto fue posible gracias a la elaboración e interpretación de la representación gráfica del patrón.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 5 (S2T3P5)**Población:** 26 estudiantes

Tabla 34

Tipificación S2, T3, P5

Pregunta 5: Además Pedro ubicó los puntos de color naranja que están en la anterior gráfica, pero tiene duda, si representan dos tiros distintos de alguien. Ayudale a Pedro a salir de su duda, no olvides explicar tu respuesta.						
Tipos de respuestas		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que explican porque los puntos de color naranja que están en la gráfica, no están ubicados correctamente (E1, E3, E5, E7, E8, E9, E11, E19, E21, E27, E30, E31, E34, E36)	14	54%	Indica que con 3 bolas no ganas 200 y con 6 bolas no ganas 350	1	7%
				Indican que cuando desplazas 3 bolas gana 150 y para 6 bolas gana 300	10	71%
				Indica que no están bien ubicados porque dice que cantidad de bolas desplazadas 3 y dinero ganado 200 y eso no es porque si dos bolas valen 100 y una 50 entonces seria 150 no 300	1	7%
				Indica que el punto naranja de 3 está mal ubicado porque 3×50 da 150 no 200 y el punto naranja de 6 está mal ubicado porque 6×50 da 300 no 350, además realiza dos multiplicaciones en forma vertical(50×3 y 50×6)	2	14%
2	Estudiantes responden de manera incorrecta (E4, E6, E10, E12, E14, E15, E18, E25, E26, E33, E35, E37,)	12	46%	Indica que los puntos naranjas están mal organizados porque no dan lo que está ahí	2	17%
				No se entiende el argumento o indica que está en lo correcto	4	33%
				Indica que los puntos de color naranja están ordenados de la misma forma que los azules aunque más pequeños y dibujan un segmento con tres puntos	1	8%
				Escribe 3,200 y 6,350	1	8%
				Indica que la línea recta es ascendente porque va de menor a mayor	1	8%
				No responden la pregunta	3	25%

De acuerdo con las respuestas de los estudiantes y lo que muestra la tabla 34, el 54% de los estudiantes responden de manera correcta, ya que ellos rectifican los valores correspondientes para 3 bolas (\$150) y 6 bolas (\$300), lo cual describen en lenguaje natural, y de este porcentaje, dos estudiantes verifican lo dicho con una multiplicación. Cabe destacar también que E12 aunque no responde correctamente en esta pregunta, si lo hace en la pregunta 3 (“Me toco marcar los puntos porque estaban mal, porque decía 200 y estaba en el 3 y el otro era 350 y estaba en el 6”).

En base a lo anterior, se puede afirmar que del 54% de los estudiantes que responden correctamente, la mayoría (71%) identifican la razón como una relación entre dos cantidades (Guacaneme, 2001), ya que estos justifican relacionando las bolas desplazadas y el dinero ganado, para 3 y 6 bolas (Ver Figura 47).

los puntos naranjas estan mal ubicados en la grafica porque cuando desplaza 3 bolas el dinero ganado es de \$50 y cuando desplaza 6 el dinero es de \$300.

Figura 47. S2, T3, P5, E7

Así pues, el 54% de los estudiantes logran argumentar para refutar el enunciado de la pregunta (Los puntos de color naranja representan dos tiros distintos de alguien) (MEN, 2006; Blanton, et al, 2017), lo cual hace la mayoría en lenguaje natural y solo E8 justifica su respuesta con unas multiplicaciones (50×3 y 50×6), y además, se puede decir que dicha argumentación la logran luego de analizar la representación gráfica del patrón.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 6 (S2T3P6)

Población: 26 estudiantes

Tabla 35

Tipificación S2, T3, P6

Pregunta 6: Pedro después, hizo la siguiente tabla para saber el dinero obtenido al desplazar algunas canicas fuera del círculo, en otros tiros.

a. Ayúdalo a completarla.

Cantidad de bolas desplazadas	Procedimiento	Dinero ganado por las bolas desplazadas
1	$1 \times \$50$	
3		
	$7 \times \$50$	
10		
		\$750
25		
...		...

b. Escribe las cantidades que se mantienen constantes y las que varían, según la tabla. Explica tu respuesta.

c. Si n es la cantidad de bolas desplazadas por Pedro, escribe una fórmula que permita encontrar el dinero ganado por las bolas desplazadas.

Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1. Estudiantes que completan la tabla de manera correcta o con un solo error, indican las cantidades que se mantienen constantes, las que varían y escriben una fórmula para encontrar el dinero ganado por las bolas desplazadas. (E1, E7, E8, E9, E10, E12, E14, E19, E26, E27, E34, E36)	12	46%	Indican que las cantidades que se mantienen constantes son el número 50 o el 1×50 , y que la fórmula es multiplicar n por 50 o escriben $n \times 50$	2	40%
			Indican que no cambia el 50, escribe que varían las cantidades de la columna bolas desplazadas (1, 3, 7, 10, 15, 25) y que la fórmula es $n \times 50$ ó $50 \times n$ ó $n \times \$50$ o que para saber cuánto gana desplazando un número; lo tiene que multiplicar por 50, o que la fórmula es el 50 porque da lo que necesita (Realiza una multiplicación, 50×5)	10	60%

2	Estudiantes que completan la tabla en forma parcialmente correcta, indican las cantidades que se mantienen constantes, las que varían y algunos escriben una fórmula para encontrar el dinero ganado por las bolas desplazadas (E3, E4, E5, E6, E11, E15, E18, E30, E31, E35)	10	39%	Multiplica la cantidad de bolas desplazadas con el dinero ganado ($3 \times 150 \dots 25 \times 1.250$), indica que las que varían son el dinero ganado por las bolas desplazadas, el procedimiento y la cantidad de bolas desplazadas y que la fórmula es sumar o contar	1	10%
				Los numero que cambian son 15×50 y 25×12 y la formula es $N \times 50$	1	10%
				No cambia el 50 y escribe que cambian las cantidades de la columna bolas desplazadas (1,3,7,10,14,25)	5	50%
				Indica que se mantiene constante el número \$50 o que multiplicó por 50	2	20%
				Indica que todas eran 50 pesos y que uno gana 50 pesos en las bolas desplazadas, y en su cantidad es lo mínimo en total	1	10%
3	Estudiantes que completan de manera incorrecta la tabla y responden de manera incorrecta los ítem <i>b</i> y <i>c</i> (E37, E21, E25, E33)	4	15%	Hace unas multiplicaciones (1×50 , 7×50) y una suma en la que ubica de manera incorrecta los sumandos ($50 + 150 + 350 + 500 + 750 + 1.050 = 23.550$)	1	25%
				Indica que los números que se mantienen distantes son 50, 10, 350 y que Si Pedro saca dos tres o cuatro, ganaría 450 puntos y dinero	1	25%
				No responden la pregunta	2	50%

De acuerdo con la tabla 35 y las respuestas de la pregunta 6a, se puede decir que el 85% de los estudiantes completan la tabla, en forma parcial o correctamente, ya que algunos tuvieron dificultad para calcular el dinero ganado por 25 bolas, o la cantidad de bolas desplazadas por ganar \$750. Hay que aclarar también que, en la tabla se dejó la última fila vacía de manera intencional y algunos estudiantes pusieron el 0 en las bolas desplazadas y dinero ganado.

De acuerdo a las explicaciones dadas por los estudiantes en la pregunta 6b, se puede afirmar que el 65% de ellos interpretaron de manera correcta la variación en la tabla, ya que estos identifican los números constantes (50) y variables (1, 3, 7, 10, 14, 25), lo cual deja ver como desarrollan algún aspecto del pensamiento variacional (MEN, 2006), pero solo E14 generaliza los que varían, es decir, no indica casos particulares sino que a partir de la tabla infiere que son aquellos de la columna cantidad de bolas desplazadas (Ver Figura 48). Ahora bien, solo E1, justifica porque 50 es la cantidad constante (“El 50 es un número multiplicador”).

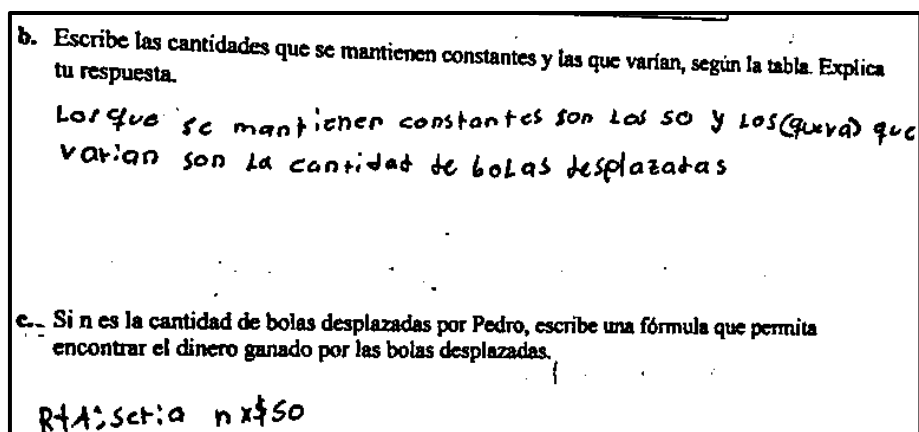


Figura 48. S2, T3, P6, E21

Así, pues, se cumple lo que propone el Ministerio de Educación Nacional (1998), la variación en tablas permite la comprensión de la variable pues el uso de filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que esta puede tener un número infinito de valores y además, se evidencia lo que mencionan Carraher & Schliemann (2007), los estudiantes notan regularidades en las tablas, y en este caso fueron las cantidades variables y constantes.

Finalmente de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 6c, se puede deducir que para el 50% (entre los que respondieron correctamente y en forma parcial) la tabla sirvió como intermediaria, para la construcción de la fórmula que define el patrón (MEN, 2006) y además registraron de diversas maneras el patrón (Mason et al, 1985/1999); ya sea solo con palabras apoyado de un ejemplo (“para saber cuánto gana desplazando un número; lo tiene que multiplicar por 50”), con palabras y símbolos (“multiplico n por 50”), y solo con los símbolos de las operaciones y letras (Ver Figura 48), de los cuales, algunos lo escriben en forma vertical (E7, E19, E34, E36) y otros horizontal (E5, E9, E10, E14, E26, E27).

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 7 (S2T3P7)

Población: 26 estudiantes

Tabla 36

Tipificación S2, T3, P7

Pregunta 7: Pedro y Marcos, estaban jugando con los números de la tabla, y encontraron que si tiene 3 canicas y \$150 de ganancia; 6 canicas y \$300 de ganancia; 9 canicas y \$450 de ganancia; 12 canicas y \$600 de ganancia, los valores de $\frac{150}{3}$, $\frac{300}{6}$, $\frac{450}{9}$ y $\frac{600}{12}$, guardan una relación. Encuentra la relación						
Tipos de respuesta		Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1	Estudiantes que dividen $150 \div 3$, $3 \div 3$, $300 \div 6$, $6 \div 6$, $450 \div 9$, $9 \div 9$, $600 \div 12$, $12 \div 12$, relacionan las	12	46%	La relación que hay entre los valores de $\frac{150}{3}$, $\frac{300}{6}$, $\frac{450}{9}$ y $\frac{600}{12}$ es que al dividir cada una de esas fracciones nos da lo mismo	1	8%
				Todo me da 50 o $\frac{50}{1}$	8	67%

	fracciones equivalentes, $\frac{150}{3} = \frac{50}{1}$, $\frac{300}{6} = \frac{50}{1}$, $\frac{450}{9} = \frac{50}{1}$, $\frac{600}{12} = \frac{50}{1}$, e indican la relación existente (E3, E5, E7, E8, E9, E11, E12, E14, E21, E26, E27, E36)			Todos los números 50 y 1 son iguales	1	8%
				La relación que hay es 50 y el 1	1	8%
				$\frac{50}{1}$ no cambia	1	8%
2	Estudiantes que dividen $150 \div 3$, $300 \div 6$, $450 \div 9$, $600 \div 12$, algunos relacionan las fracciones equivalentes, $\frac{150}{3} = \frac{50}{1}$, $\frac{300}{6} = \frac{50}{1}$, $\frac{450}{9} = \frac{50}{1}$, $\frac{600}{12} = \frac{50}{1}$ (E1, E4, E6, E10, E15, E19, E30, E33, E34, E35)	10	38%	Escribe unas divisiones, pero para cada una realiza una suma reiterada, ($\frac{150}{3} =$ $50 + 50 + 50 = 150$), $\frac{300}{6} =$ $6 \text{ veces } 50 = 300$, $\frac{450}{9} = 9 \text{ veces}$ $50 = 450$, $\frac{600}{12} = 12 \text{ veces } 50 = 600$), e indica que la relación que encuentra es que todos los números al dividirlos da 50	1	10%
				La relación se encuentra en los puntos numéricos por ejemplo $\frac{150}{3}$ da una relación numérica y es que cuando hago las divisiones todo me da 50 y 50 vale una bola	2	20%
				No indican la relación	7	70%
3	Estudiantes que responden de manera incorrecta la pregunta, escriben $\frac{150}{3} = 1 = 50$, $\frac{300}{6} = 3 =$ 100 , $\frac{450}{9} = 4 = 112$, $\frac{600}{12} = 10 =$ 600 (E18, E25, E31, E37)	4	16%	Indica que primero es 50 y el otro 100	1	25%
				No indica la relación	1	25%
				No responden la pregunta	2	50%

De acuerdo con la tabla 36 se infiere que el 84% de los estudiantes entienden la pregunta, pero solo el 46%, logran identificar que los valores de $\frac{150}{3}$, $\frac{300}{6}$, $\frac{450}{9}$ y $\frac{600}{12}$, siempre dan 50, y esto lo identifican luego de simplificar las fracciones, otros en cambio (38%) dividen el numerador entre el denominador de cada fracción y el 16% no realiza correctamente el procedimiento, ya sea de simplificación o división.

En base a lo anterior se puede mencionar que el 50% de los estudiantes logra *ver* el patrón, ya que estos identifican alguna regularidad o algo común, luego de hacer las simplificaciones o divisiones antes mencionadas (Ver Figura 49) y además, identifican de manera implícita que los pares de valores correspondientes (3,150); (300,6); (450,9) y (600,12), tienen un cociente constante (Azcárate & Deulofeu, 1990), es decir $\frac{150}{3} = \frac{300}{6} = \frac{450}{9} = \frac{600}{12} = 50$.

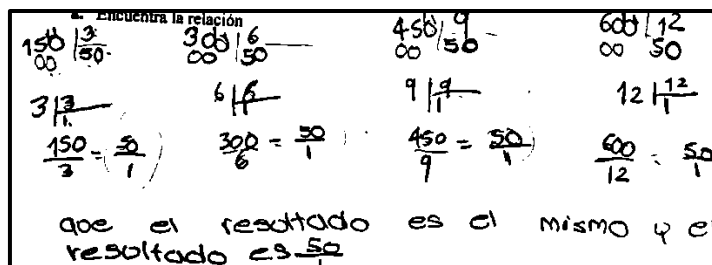


Figura 49. S2, T3, P7, E9

Hay que destacar también, como E1, aunque responde correctamente, en su justificación, muestra unas técnicas aditivas ($\frac{150}{3} = 50 + 50 + 50 = 150$, $\frac{300}{6} = 6 \text{ veces } 50 = 300$, $\frac{450}{9} = 9 \text{ veces } 50 = 450$, $\frac{600}{12} = 12 \text{ veces } 50 = 600$, las cuales dejan ver que no razona en términos multiplicativos (Godino & Batanero, 2002) sino aditivos.

De acuerdo con lo dicho hasta ahora, no se logra un acercamiento a la noción de proporción como relación entre relaciones, pues los estudiantes indican una igualdad de fracciones equivalentes, ahora bien, este aspecto se puede superar si las razones propuestas en la consigna tuvieron las unidades correspondientes, es decir, $\frac{\$150}{3 \text{ canicas}}$, $\frac{\$300}{6 \text{ canicas}}$, $\frac{\$450}{9 \text{ canicas}}$, $\frac{\$600}{12 \text{ canicas}}$.

Situación 2: Tarea 3, Pregunta 8 (S2T3P8)

Población: 26 estudiantes

Tabla 37

Tipificación S2, T3, P8

Pregunta 8: Pedro y Marcos, estaban jugando con los números de la tabla, y encontraron que si tiene 3 canicas y \$150 de ganancia; 6 canicas y \$300 de ganancia; 9 canicas y \$450 de ganancia; 12 canicas y \$600 de ganancia, los valores de $\frac{3}{150}$, $\frac{6}{300}$, $\frac{9}{450}$ y $\frac{12}{600}$, guardan una relación.					
a. Encuentra la relación b. Escribe que puede significar esta relación, en el contexto del juego de las bolas desplazadas del círculo.					
Tipos de respuestas	Fa	Fr	Explicación	Fa	Fr
1. Estudiantes que relacionan las fracciones equivalentes, $\frac{3}{150} = \frac{1}{50}$, $\frac{6}{300} = \frac{1}{50}$, $\frac{9}{450} = \frac{1}{50}$, $\frac{12}{600} = \frac{1}{50}$, indican la relación existente y lo que esta significa (E3, E5, E7, E8, E9, E10, E11, E12, E19, E21, E26, E27, E34, E36)	14	54%	Indican que la relación que hay, al dividir 3 entre 150, y así mismo con todos, nos da el mismo resultado y que 50 es lo que vale una bola	1	7%
			La relación es que siempre da $\frac{1}{50}$ y que 50 es lo que vale una bola o que con dos gana 100 y con una gana 50	2	14%
			Todos los números 50 y 1 son iguales y por 1 bola que desplaza gana \$50	3	21%
			Hacen unas divisiones ($150 \div 3$, $3 \div 3$, $300 \div 6$, $6 \div 6$, $450 \div 9$, $9 \div 9$, $600 \div 12$, $12 \div 12$), indican que la relación que hay es el 1 y el 50 o que los resultados son iguales y que el 1 es la bola desplazada y el 50 es el dinero ganado de desplazar una bola	3	21%

				Indica que la relación es que están al revés, porque $\frac{1}{50}$ y en el otro estaba $\frac{50}{1}$, o no indican la relación, y que 50 es el valor de una bola	5	36%
2	Estudiantes responden de manera incorrecta (E1, E4, E6, E14, E15, E18, E25, E30, E31, E33, E35, E37)	12	46%	Escriben $\frac{150}{3} = \frac{50}{1}$, ... ó $\frac{3}{150} = \frac{50}{1}$... indican que la relación es que cada número al dividirlo nos da como resultado 50 y que cada bola vale 50 o que el 50 significa el dinero ganado y el 1 significa el número de bolas desplazadas Hacen unas divisiones ($150 \div 3 = 5$, $300 \div 6 = 5$, ó $\frac{3}{150} = 150 \div 3$, $\frac{6}{300} = 300 \div 6$... $\frac{3}{150} = 50$, $\frac{6}{300} = 100$, $\frac{9}{450} = 300$ ó $112 = 600$, $\frac{12}{600} = 150 = 114$) Por una bola que desplaza gana sesenta No responden la pregunta	2 5 1 4	17% 42% 8% 33%

De acuerdo con la tabla 37 se puede decir que el 54% de los estudiantes entienden la pregunta, es decir, logran identificar que los valores de $\frac{150}{3}$, $\frac{300}{6}$, $\frac{450}{9}$ y $\frac{600}{12}$, siempre dan $\frac{1}{50}$, y esto lo identifican teniendo en cuenta las divisiones hechas en la pregunta 7, ya que solamente E8 indica las operación hechas. Ahora bien, del 46% que responden de manera incorrecta, 7 estudiantes realizan cálculos incorrectos, ya que estos retoman las fracciones de la pregunta anterior.

Con base en lo anterior se puede mencionar que de manera similar a la pregunta 7, el 54% de los estudiantes logra ver el patrón, ya que estos identifican alguna regularidad o algo común que en este caso es el resultado de la simplificación (Ver Figura 50) y además, logran identificar de manera implícita que los pares de valores correspondientes (3,150); (300,6); (450,9) y (600,12), tienen un cociente constante (Azcárate & Deulofeu, 1990), es decir $\frac{3}{150} = \frac{6}{300} = \frac{9}{450} = \frac{12}{600} = \frac{1}{50}$.

De acuerdo con lo dicho hasta ahora, con esta pregunta no se logra un acercamiento a la noción de proporción como relación entre relaciones, pues los estudiantes indican una igualdad de fracciones equivalentes, ahora bien, este aspecto se puede superar si las razones propuestas en la consigna tuvieron las unidades correspondientes, es decir,

$$\frac{3 \text{ canicas}}{\$150}, \frac{6 \text{ canicas}}{\$300}, \frac{9 \text{ canicas}}{\$450}, \frac{12 \text{ canicas}}{\$600}.$$

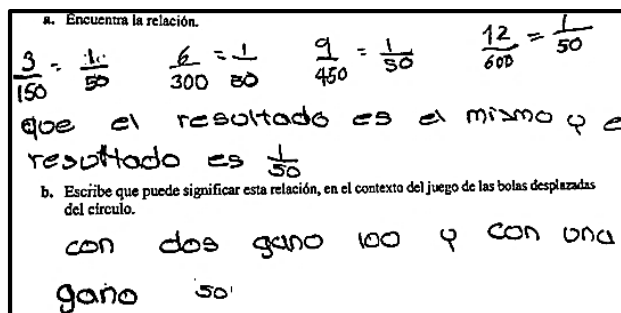


Figura 50. S2, T3, P8, E9

Respecto a la pregunta 8b, el 54% de los estudiantes, logran relacionar el resultado obtenido ($\frac{1}{50}$), como el dinero que se gana al desplazar una bola (Ver Figura 50). Así pues, dicho porcentaje de estudiantes logran identificar la proporción, como una relación (por 1 bola que desplazada se gana \$50), y no solo como la igualdad de dos o más fracciones equivalentes (Guacaneme, 2001).

En conclusión, la mitad de los estudiantes encuentran una expresión general para el patrón (Ver Tabla 35), de los cuales la mayoría utiliza los símbolos de las operaciones y letras, cuya fórmula permite hallar el dinero ganado para n cantidad de bolas desplazadas. Además de esto, dichos estudiante logran identificar a través de las distintas representaciones del patrón (tablas o graficas), las cantidades que varían y las que se mantienen constantes, las cuales logran relacionar correctamente.

Por otra parte, se puede decir de manera general, a partir de los desarrollos de los estudiantes²¹, que algunos logran avanzar en sus conocimientos, a través del trabajo de la propuesta o por el contrario, siempre tuvieron muchas dificultades. A continuación se hace una descripción de algunos casos relevantes, teniendo en cuenta los resultados descritos en las tablas 39, 40, 41, 42, 43 y 44.

Por ejemplo, E4, desarrolló con dificultad la situación 1, en cambio la situación 2 la hizo correctamente, aunque el porcentaje de acierto iba disminuyendo hasta llegar a un desarrollo parcial. E15 tuvo dificultades en la situación 1, en cambio para la situación 2 logró un desarrollo parcial. E18 desarrolló con dificultad las dos situaciones, en cambio E1 lo hizo correctamente en ambas.

²¹ Ver Anexo 2

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES GENERALES

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES GENERALES

Las conclusiones relacionadas con la determinación de referentes curriculares, matemáticos y didácticos; los diseños de la situación y la implementación y análisis de los resultados, se pueden escribir a través del análisis de la consecución de los objetivos.

En relación con el primer objetivo específico, se puede concluir que se logró incorporar los siguientes elementos conceptuales, desde tres perspectivas: curricular, matemática y didáctica, que permitieron el diseño de la propuesta de aula:

- 1a. Desde la perspectiva curricular del Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006), se incluye el trabajo a través de situaciones problema que integren el estudio de distintas representaciones, como las tablas y las gráficas cartesianas; y la proporcionalidad directa, para introducir pronto a los estudiantes en el estudio de relaciones funcionales, como un modelo de variación entre variables. También se reconoce la importancia de los distintos procesos generales como por ejemplo el razonamiento, el cual en ocasiones no es muy desarrollado en clase de matemáticas, porque no se da importancia al justificar las estrategias y procedimientos llevados a cabo en la resolución de un problema; o el crear conjeturas de los resultados obtenidos no es algo habitual, lo cual se puede lograr a través del estudio de los patrones.
- 2a. Desde lo didáctico se reconocen las dificultades que los estudiantes de básica primaria pueden tener en el reconocimiento, expresión y registro de los patrones numéricos, como por ejemplo el expresar con palabras el patrón, la falta de claridad de lo que intenta expresar; y respecto a la variación directamente proporcional, esta es poco reconocida como una relación entre variables, y este es un aspecto que se logra con la propuesta de aula, también se consideran los aportes de los enfoques o aproximaciones al álgebra, como el tercer enfoque de la propuesta del Early Algebra, es decir, el trabajo de la aritméticas y las funciones; y las aproximaciones de modelación y generalización; las cuales se relacionan con la perspectiva curricular (MEN, 1998, 2006) y con el Early Algebra, ya que en estas se reconocen la importancia del lenguaje natural para modelar situaciones de variación y la generalización con figuras geométricas o secuencias numéricas.

- 3a. Desde lo matemático se caracteriza la función como una relación, los patrones y la proporcionalidad, para movilizar en la propuesta de aula la generalización, las variables, relación entre variables, la constante y la función lineal, así pues, la generalización de patrones numéricos y la variación directamente proporcional son alternativas que hacen posible trabajar de manera paralela el álgebra y la aritmética, porque permiten estudiar dichos conceptos y procesos, desde edades tempranas.

De igual forma, en relación con el segundo objetivo específico, el cual hace referencia al diseño de la propuesta de aula, se concluye que se pudo articular algunos elementos de los referentes conceptuales identificados, de los cuales se infiere lo siguiente:

- 1b. En la propuesta de aula se logra dar importancia a situaciones que fomentan la argumentación, refutación y generalización de una conjetura, a partir de la elaboración e interpretación de algún tipo de representación (gráficas o tablas) lo cual, según los Estándares Básicos de Competencia (2006), deja ver que los estudiantes caracterizan aspectos de la variación tales como las cantidades que cambian y que permanecen constantes, las variables y sus relaciones. Ahora bien, lo anterior se logra en el diseño de cada una de las preguntas de la propuesta de aula, ya que en esta, se les presenta a los estudiantes enunciados o representaciones de la situación, que deben interpretar y en ocasiones refutar, para después no solo dar una respuesta numérica, sino también una justificación a dicha solución.
- 2b. El diseño de una propuesta de aula que considere algunas dificultades que surgen en la expresión de la generalidad de los patrones y el reconocimiento de la variación proporcional, permite identificar si se presenta, o se logra reducir, el corte didáctico entre la aritmética y el álgebra, en estudiantes de primaria.
- 3b. Además, respecto a la metodología propuesta por el Early Algebra, es importante recalcar que esta fue fundamental tanto en el diseño como en la implementación, lo cual se puede considerar no solo para una investigación sino también en la práctica, porque en ocasiones se empieza la actividad matemática con una representación gráfica o una expresión algebraica, y no se da importancia a lo que los estudiantes están interpretando, respecto a la situación que se les presenta; es decir, para lograr en estudiantes de primaria el manejo de las diferentes representaciones de la variación,

hay que dar mayor importancia al lenguaje natural y a partir de esta, y de manera paulatina, ir desarrollando los otros tipos de representación. Por estas razones y otras (Ver Anexo 1), se puede concluir además que la propuesta curricular Early Algebra guarda mucha relación, con lo que plantea el Ministerio de Educación Nacional (1998, 2006) respecto al pensamiento variacional.

- 4b. Finalmente se puede decir que la proporcionalidad directa es una buena alternativa para trabajar con patrones, dado que las operaciones que están asociadas con dicho concepto, como la multiplicación y división, permiten la construcción y justificación de generalidades, a partir del estudio de casos particulares.

De otro lado, y en términos del tercer objetivo específico, se puede concluir de los resultados de la implementación de la propuesta, los siguientes aspectos relacionados con los desarrollos conceptuales y procedimentales de los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Veinte de Julio:

- 1c. Los estudiantes, logran reconocer patrones pictóricos y numéricos de variación directamente proporcional presentes en situaciones de la vida cotidiana como el juego con palillos y canicas, para lo cual la mayoría se apoyaron del material concreto o dibujos; sobre todo en la primera situación, la cual pretendía que los estudiantes se familiarizaran con los patrones numéricos.
- 2c. De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes desarrollan la primera etapa propuesta por Mason (1985/1999), es decir “ver el patrón”, ya que estos logran identificar alguna regularidad o algo común, luego de calcular o dibujar algunas figuras o números que pertenecen al patrón. Ahora bien, respecto a la tercera etapa “registrar el patrón” (Mason, 1985/1999) hubo una gran diferencia entre los resultados de las situaciones, ya que en la primera fueron muy pocos los estudiantes que lograron registrar el patrón con palabras apoyados de figuras o casos particulares (Ver Figura 15; Figura 13; Figura 16; Figura 17) y para la segunda situación, los estudiantes dan muestra de diversos registros (Ver Tabla 35; Figura 47), entre los cuales se encuentra que la mayoría logran hacerlo con símbolos como las letras y pocos lo hacen con palabras apoyados de casos particulares.

- 3c. Con base en lo anterior, se resalta la transición que tienen los estudiantes por las distintas representaciones, partiendo del lenguaje natural y dibujos, o cálculos de casos particulares, para finalmente acercarse a una representación algébrica del patrón, lo cual permite decir que los estudiantes logran tener desarrollos en algunos aspectos del pensamiento variacional (MEN, 2006) con ayuda de los patrones numéricos de variación directamente proporcional. Además, la mayoría de los estudiantes identifican las representaciones tabulares y gráficas, como una manera de organizar el patrón numérico o pictórico, lo cual les permite reconocer lo que permanece constante y lo que varía, aunque los estudiantes, tuvieron más dificultad en el reconocimiento de la cantidad constante.
- 4c. A partir de lo anterior se puede decir, que los registros tabulares y gráficos permiten a los estudiantes identificar relaciones entre las cantidades involucradas, y además logran reconocer la razón como una relación entre parejas de números, que en este caso eran naturales y no como una fracción o resultado de una división, pero son un poco menos de la mitad, los que logran expresar dichas relaciones en sus registros. Por estas razones se establece que dichos resultados concuerdan con la propuesta de los Lineamientos curriculares (1998), la cual resalta que la variación en tablas permite el inicio del estudio numérico de la función y la comprensión de la variable, y para la mayoría de los estudiantes fue una ayuda en la escritura de las expresiones algébricas tipo retóricas o fórmulas, que les permitía encontrar cualquier término del patrón.
- 5c. Por otro lado, respecto a las propiedades de la función lineal (si $c = a + b$ entonces $f(a + b) = f(a) + f(b) = f(c)$, y si $a = r \cdot e$ entonces $f(a) = f(r \cdot e) = r \cdot f(e)$), se consigue atender al llamado de Obando, Vanegas & Vásquez (2006), ya que se logra dar importancia a estas propiedades en la propuesta y los estudiantes se aproximan a dicha propiedad. Cabe aclarar en este punto que para la tarea en que se trabajan estas propiedades se presenta una tabla, que contiene una columna de número de tiro, la cual tenían la intención de ser un apoyo para la redacción de las distintas preguntas, intentado hacer que no se le estuviera indicando toda la propiedad, sino que más bien los estudiantes debían relacionar correctamente, las dos cantidades asociadas a este, pero esta nueva columna no permitió que los estudiantes expresaran que las propiedades se cumplen para las cantidades implicadas en la situación.

Por lo tanto, el objetivo general se logra porque la propuesta de aula a través del contexto empleado en cada situación (Construcción de figuras con palillos y el juego de canicas), permite a los estudiantes tener un primer acercamiento a conceptos y proceso relacionados con el álgebra, como la generalización, las variables, la constante, la relación de dependencia; por lo tanto se logra aportar a la enseñanza de la proporcionalidad directa y dar muestra de un posible paso de la aritmética al álgebra.

Referencias

- Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. (Matemáticas: Cultura y aprendizaje; 26). Madrid: Síntesis.
- Bachelard, G. (1938) *La formation de l'esprit Scientifique*. Vrin. Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico. Siglo Veintiuno. México. Recuperado de <http://ow.ly/sV3M30bnzsO>
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. In Approaches to algebra (pp. 3-12). Springer Netherlands.
- Billings, E. M. H. (2008). Exploring generalization through pictorial growth patterns. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics* (pp. 279-293). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. Recuperado de <http://ow.ly/Gfyk30bnzkM>
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., Stroud R., Fonger N. & Stylianou, D. (2017). Implementing a Framework for Early Algebra. In Kieran, C. (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 27-49). Springer, Cham.
- Blog de Lenguaje. (2013). Deícticos. [Blog]. Recuperado de <https://www.blogdelenguaje.com/deicticos.html>
- Booth, L. R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. The ideas of algebra, K-12, 19, 299-306. Recuperado de <https://goo.gl/DmeYOF>
- Bos, M., Ganimian, A., Vegas, E. & Álvarez, H. (2014). América Latina en PISA 2012: Colombia en PISA 2012: Logros y desafíos pendientes. Recuperado de <https://goo.gl/5qgwjS>
- Bressan, A., & Bogisic, B. (1996). Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos. Recuperado de <https://goo.gl/nGLqPq>

- Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4 núm. 2, pp. 165-198.
- Butto Zarzar, C., & Rojano Ceballos, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, 22(3), 55-86. Recuperado de <http://somidem.com.mx/descargas/Vol22-3.pdf>
- Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, (2), 669-705. Recuperado de <https://goo.gl/XwUpE2>
- Carraher, D., Schliemann, A. & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In Kaput, J., Carraher, D & Blanton, M. (Eds.). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum. Recuperado de <https://goo.gl/24wIZa>
- Castro, E., & Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, 19(2), 67-94. Recuperado de <http://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol19-2.pdf>
- Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behavior*, 4, 195-208.
- De Trocóniz, A. & Belda, E. (1959). *Análisis Algebraico*. Bilbao: Talleres Gráficos Ordorica
- Díaz, C., Álvarez, J., Torres, A. & Guacaneme, E. (1997). *Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas -TIMSS- Colombia*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia
- Fernández, C., & Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y aprendizaje*, 34(1), 67-80.
- Fernandes, I., Cervantes, V., & Lopera, C. (2010). Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Informe ejecutivo. Recuperado de <https://goo.gl/9A19U4>

- Fiol, M. L. & Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. (Matemáticas: Cultura y aprendizaje; 20). Madrid: Síntesis.
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(2), 1-20. Recuperado de http://www.teresarojano.net/system/files/articulos/2.1.a.3_copia.pdf
- Godino, J. D. & Batanero, C. (2002). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf
- Godino, J. D. & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf
- Gómez, P., Castro, D. P., Bulla, A., Mora, M. F., & Pinzón, Á. A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste. *Educación y Educadores*, 19(3), 315-338. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/7270/>
- Grupo Azarquiel. (1994). *Estrategias utilizadas en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico*. (16), 48-53. Recuperado de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/16/048-053.pdf>
- Grupo Beta. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. (Matemáticas: Cultura y aprendizaje; 14). Madrid: Síntesis.
- Guacaneme, E. A. (2000). ¿Es posible “sumar” razones? *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, 5(3), 284-289.
- Guacaneme, E. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas*. (Tesis de Maestría en educación), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de <https://goo.gl/uZxuZe>
- Guacaneme, E. (2002). *Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas*. *Revista EMA*, 7(1), pp. 3-42. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1146/1/80_Guacaneme2002Una_RevEMA.pdf

- Hoffman, K. & Kunze, R. (1993). *Álgebra lineal*. México: Prentice–Hall. Hispanoamericana S.A.
- Howe, R. (2005). Comments on NAEP algebra problems. En *Algebraic Reasoning: Developmental, Cognitive, and Disciplinary Foundations for Instruction*. From https://www.brookings.edu/wp-content/uploads/2012/04/Howe_Presentation.pdf
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). *Publicación de resultados Saber 3º, 5º, y 9º*. Recuperado de <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2017). *Publicación de resultados Saber 3º, 5º, y 9º*. Recuperado de <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>
- Janvier, C. (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics (27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J., Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (2008). Algebra in the early grades. (Studies in mathematical thinking and learning). Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning. In *Algebra in the early grades*, (pp. 5-17) Estados Unidos: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (1995). El aprendizaje y enseñanza del álgebra escolar. (Mesa, Vilma, Trad.) Bogotá: Una empresa docente. (Trabajo original publicado en 1992).
- Kieran, C. (Ed.). (2017). Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice. Springer.
- Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. Mathematics in School, 7(4), 23-26. Recuperado de <https://www.researchgate.net/publication/281367139>
- Lacasta, E. & Pascual, J. R. (1998). Las funciones en los gráficos cartesianos. Madrid: Síntesis
- Luengo, R. & Grupo Beta (1990). Proporcionalidad geométrica y semejanza. Madrid: Editorial Síntesis.

- Mason, J.; Graham, A.; Pimm, D. & Gower, N. (1999). *Rutas hacia el/ Raíces del Álgebra*. (Agudelo, Cecilia, Trad.). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985)
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Santafé de Bogotá. Recuperado de http://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf
- Ministerio De Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Santafé de Bogotá. Recuperad de http://www.mineduacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio De Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas (DBA v. 2)*. Santafé de Bogotá. Recuperado de http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf
- Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/544/>
- Moreno, G. A. (2015). *Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos* (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de <http://hdl.handle.net/10893/9755>
- NCTM. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. NCTM. Reston, VA.
- NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM. Reston, VA.
- Obando, G. (2000). Sí, es posible sumar algunas razones. Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática, 6(1), 71-80. Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/300822957_Si_es_Posible_Sumar_algunas_Razones

- Obando, G., Vanegas, M. & Vásquez, N. (2006). Unidad 5: De la multiplicación a la Proporcionalidad. En Obando, Vanegas & Vásquez; Módulo 1 Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. (pp. 121-134). Medellín: Colombia. Gobernación de Antioquia. Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad. <https://goo.gl/gKsS8q>
- Obando, G. & Botero, O. (2006). Unidad 3: La proporcionalidad directa e inversa a partir de la modelación de situaciones de variación. En Posada, F., Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. (pp. 77-125). Medellín, Colombia: Gobernación de Antioquia. Secretaria de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad. Recuperado de <https://goo.gl/uV7k9F>
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17(1), 59-81. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33530083004>
- Palarea, M. & Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 16, 91-98. Recuperado de <http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf>
- Palarea, M. (1998). La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en el álgebra por alumnos de 12 a 14 años (Tesis doctoral). Universidad de la Laguna, España. La Laguna, Tenerife: Universidad de La Laguna. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/dctes?codigo=991>
- Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. & Fernández, F. (Eds.) (2003). Transformar la enseñanza de la Proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer (pp. 3-54). Bogotá: Una Empresa Docente. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/671/>
- Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.) The Idea of Algebra K-12: Yearbook National Council of Teachers of Mathematics (pp. 78-90). Reston, VA: NCTM. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/88_10.html

- Queensland Studies Authority (2005). About patterns and algebra. Queensland, Australia. 151-159. Recuperado de:
http://www.qsa.qld.edu.au/downloads/p_10/kla_maths_info_pattern.pdf
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. Recuperado de http://www.luisradford.ca/pub/13_PME352011AnkaraRR.pdf
- RAND Mathematics Study Panel (2003). Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in Mathematics Education. Santa Mónica, CA: RAND
- Rengifo U. (2009,10 de marzo). Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza. [Blog]. Recuperado de
<http://culturamaticasigloxxi.blogspot.com.co/2009/03/aproximaciones-al-algebra-perspectivas.html>
- Rivera, E. & Sánchez, L. (2013). *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos* (Trabajo de grado para optar el título Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas), Universidad del Valle, Cali. Recuperado de <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/4599/1/CB-0472509.pdf>
- Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2000). From quantities to ratio, functions, and algebraic relations. Recuperado de <https://goo.gl/r3gxGJ>
- Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. In Coulange & Drouhard (Eds.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives*. Special Issue of *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 109-124. Recuperado de <http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/publications/2012/algebraElementary.pdf>
- Segovia, I. & Fernández, F. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la razón y la proporción. Porcentajes. En Flores, P. & Rico, L. (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 307-322). Ediciones Pirámide, Madrid.

- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra*. (Matemáticas: Cultura y aprendizaje; 23). Madrid: Síntesis.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori. Recuperado de <https://goo.gl/Ndz7Cu>
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 19-52). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1247/>
- Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* (Tesis Doctoral), Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Recuperado de <http://hdl.handle.net/11349/2608>
- Vittone, F., Gianatti, J., & Alegre, M. (2016). *Unidad 1: Puntos, rectas, planos y figuras planas elementales*. Recuperado de www.fceia.unr.edu.ar/~vittone/geometria_1/Unidad12016.pdf

ANEXOS

Anexo 1. Relaciones y diferencias entre dos propuestas curriculares

Es significativo para este trabajo, encontrar que existen muchos aspectos en común entre el enfoque Early-Algebra y la propuesta curricular del Ministerio de Educación Nacional Colombiano (MEN, 1998, 2006) sobre el pensamiento variacional, ya que esto permitió hacer un diseño y análisis de manera más coherente. Ahora bien, en la Tabla 38 se explicitan en cada fila, las relaciones que se han encontrado tanto en el pensamiento variacional como en el Early Algebra, de acuerdo a los referentes conceptuales del capítulo 2.

Tabla 38.

Relaciones y diferencias entre el pensamiento variacional y el Early Algebra

Pensamiento Variacional	Early Alega
El trabajo con secuencia o sucesiones de figuras, números o letras; para motivar a hacer conjeturas sobre la forma o el valor o los valores siguientes de la secuencia (MEN, 2006)	Según Carraher & Schliemann, (2007) las actividades de descubrir patrones pueden ser enriquecedoras para que los estudiantes hagan conjeturas acerca de la regla que puede generar la serie.
Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos, preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica (MEN, 2006)	Carraher & Schliemann (2007) proponen tres enfoques del álgebra temprana, el tercero es trabajar la aritmética y las funciones en el que se trabaja las funciones como reglas para generar colecciones de figuras o secuencias, con el fin de conseguir la comprensión de las relaciones entre dos variables.
La organización de la variación en tablas, permite iniciar el estudio numérico de la función, inicia la comprensión de la variable pues el uso de filas con variables ayuda a que el estudiante comprenda que esta puede tener un número infinito de valores de reemplazo, además, también ayuda a la escritura de las expresiones algebraicas, tipo retórico o fórmulas para describir la variación o el cambio (MEN, 1998)	Las tablas pueden servir como tablas de funciones, es decir, como representaciones de funciones porque la primera columna de una tabla generalmente contiene valores de la variable independiente, mientras que la segunda columna se utiliza para mantener los valores respectivos de la variable dependiente, y así los estudiantes notan regularidades en los patrones y las tablas de valores (Carraher & Schliemann, 2007)

El sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como el lenguaje ordinario o técnico, las tablas, las gráficas (diagramas) y las representaciones icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo (MEN, 2006)	Los investigadores en Early-Algebra plantean que el lenguaje natural sirve como un punto de partida importante para que los niños aprendan álgebra, porque les permite describir conceptos algebraicos usando un lenguaje conocido, ayudándose también de dibujos, y que solo después de lo anterior, los estudiantes pueden ser capaces de trabajar notación algebraica, tablas, gráficas y otros tipos de representación convencional (Kaput, Carraher & Blanton, 2008, Carraher & Schliemann, 2007).
En las situaciones de aprendizaje que fomentan el desarrollo de este tipo de pensamiento, también se dan múltiples oportunidades para la formulación de conjeturas, la puesta a prueba de las mismas, su generalización y la argumentación para sustentar o refutar una conjetura o una propuesta de generalización (MEN, 2006)	Blanton, M et al. (2017) proponen que es importante involucrar a los niños de primaria, en la actividad de generalización, porque refuerza la capacidad de filtrar información para obtener características comunes y sacar conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas, también el justificar generalizaciones, permite que los estudiantes desarrollen argumentos matemáticos para defender o refutar la validez de una generalización propuesta.
Un aspecto importante en el aprendizaje del álgebra corresponde a la utilización con sentido y al estudio formal de los objetos algebraicos, para lo cual es necesario ampliar la notación del lenguaje aritmético y utilizar las propiedades características de los sistemas numéricos (como la conmutativa, la asociativa, la distributiva...) (MEN, 2006)	Kaput (2008) define tres líneas para trabajar el álgebra en edades tempranas, la primera, es estudiar el álgebra como una aritmética generalizada, con el fin de construir aspectos sintácticos del álgebra desde la estructura de la aritmética, incluyendo la generalización de las operaciones aritméticas y sus propiedades, sus relaciones y sus formas, la explicitación de las estrategias del cálculo.

Nota: Elaboración propia obtenida del análisis de revisión documentaria

Anexo 2. Desarrollos de los estudiantes

A continuación se explicitan en las Tablas 39, 40, 41, 42, 43 y 44, los progresos de los estudiantes en cada tarea, de las dos situaciones, de acuerdo a la cantidad de ítems contestados. En las tablas, el color amarillo indica que desarrollan correctamente la Tarea, de la propuesta de aula, el color verde, muestra los estudiantes que responden en forma parcial y en rojo, los que desarrollan con dificultad la tarea.

Tabla 39.

Resultados generales de la situación 1 Tarea 1

Situación 1 Tarea 1					
Estudiantes	Ítems correctos	Respuestas parcialmente correctas	Ítems incorrectos	Total de Ítems contestados	Porcentaje Ítems correctos
E1	7	1	2	10	70%
E2	11	0	0	11	100%
E3	8	2	1	11	72%
E4	2	1	2	5	20%
E5	7	2	2	11	63%
E6	7	3	0	10	70%
E7	6	3	2	11	54%
E8	8	1	2	11	73%
E9	6	3	2	11	54%
E10	6	2	1	9	67%
E11	1	4	4	9	50%
E12	8	3	0	11	73%
E13	2	1	1	4	50%
E14	4	0	0	4	100%
E15	0	1	2	3	0%
E16	4	0	0	4	100%
E17	0	0	4	4	0%
E18	1	2	1	4	25%
E19	1	2	1	4	25%
E20	1	2	1	4	25%
E21	1	1	0	4	25%
E22	3	1	0	4	75%
E23	4	0	0	4	100%
E24	1	1	2	4	25%
E25	2	2	0	4	50%
E26	3	1	0	4	75%
E27	4	0	0	4	100%
E28	2	2	0	4	50%

E29	3	1	0	4	100%
E30	2	1	1	4	50%
E31	2	2	0	4	50%
E32	2	1	0	3	66%
E33	0	0	3	3	0%
E34	4	0	0	4	100%
E35	0	0	2	2	0%
E36	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E37	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E38	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E39	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E40	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió

Tabla 40.

Resultados generales de la situación 1 Tarea 2

Situación 1 Tarea 2					
Estudiantes	Ítems correctos	Respuestas parcialmente correctas	Ítems incorrectos	Total de Ítems	Porcentaje Ítems correctos
E1	4	1	0	5	80%
E2	5	0	0	5	100%
E3	4	0	0	4	100%
E4	0	1	1	2	0%
E5	2	2	0	4	50%
E6	5	0	0	5	100%
E7	3	2	0	5	60%
E8	4	0	0	4	100%
E9	2	2	1	5	40%
E10	0	0	2	2	0%
E11	1	3	0	4	25%
E12	3	2	0	5	60%
E13	3	2	0	5	60%
E14	4	1	0	5	80%
E15	1	1	0	2	20%
E16	2	2	1	5	40%
E17	3	2	0	5	60%
E18	0	2	0	2	0%
E19	3	2	0	5	60%
E20	4	1	0	5	80%
E21	0	0	0	0	0%
E22	1	2	0	3	33%
E23	3	0	1	4	75%
E24	0	1	1	2	0%

E25	4	1	0	5	80%
E26	4	1	0	5	80%
E27	3	2	0	5	60%
E28	4	1	0	5	80%
E29	2	3	0	5	40%
E30	2	3	0	5	40%
E31	2	0	2	4	50%
E32	2	2	0	4	50%
E33	1	1	2	4	25%
E34	2	3	0	5	40%
E35	1	0	3	4	25%
E36	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E37	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E38	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E39	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E40	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió

Tabla 41.

Resultados generales de la situación 1 Tarea 3

Situación 1 Tarea 3					
Estudiantes	Ítems correctos	Respuestas parcialmente correctas	Ítems incorrectos	Total de Ítems	Porcentaje Ítems correctos
E1	3	0	0	3	75%
E2	4	0	0	4	100%
E3	2	2	0	4	50%
E4	0	0	0	0	0%
E5	2	2	0	4	50%
E6	2	2	0	4	50%
E7	3	1	0	4	75%
E8	0	0	0	0	0%
E9	2	2	0	4	50%
E10	2	2	0	4	50%
E11	2	2	0	4	50%
E12	2	2	0	4	50%
E13	1	3	0	4	25%
E14	3	1	0	4	75%
E15	0	0	0	0	0%
E16	2	2	0	4	50%
E17	0	0	4	4	0%
E18	0	0	0	0	0%
E19	0	4	0	4	0%
E20	0	0	0	0	0%

E21	0	0	0	0	0%
E22	0	1	0	1	0%
E23	1	3	0	4	25%
E24	0	4	0	4	0%
E25	1	3	0	4	25%
E26	2	2	0	4	50%
E27	4	0	0	4	100%
E28	4	0	0	4	100%
E29	3	1	0	4	75%
E30	2	2	0	4	50%
E31	4	0	0	4	100%
E32	0	1	0	1	0%
E33	0	0	0	0	0%
E34	2	2	0	0	50%
E35	0	0	0	0	0%
E36	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E37	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E38	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E39	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E40	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió

Tabla 42.

Resultados generales de la situación 2 Tarea 1

Situación 2 Tarea 1					
Estudiantes	Ítems correctos	Ítems parcialmente correctos	Ítems incorrectos	Total de Ítems	Porcentaje Ítems correctos
E1	10	1	1	12	83%
E2	12	0	0	12	100%
E3	12	0	0	12	100%
E4	9	1	0	10	90%
E5	11	0	1	12	92%
E6	10	1	1	12	83%
E7	6	0	0	6	50%
E8	12	0	0	12	100%
E9	11	1	0	12	92%
E10	11	0	1	12	92%
E11	10	0	1	11	90%
E12	11	1	0	12	92%
E13	8	0	3	11	73%
E14	12	0	0	12	100%
E15	5	0	1	6	42%
E16	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió

E17	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E18	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E19	6	1	1	8	66%
E20	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E21	10	1	0	11	90%
E22	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E23	7	1	3	11	63%
E24	8	2	0	10	80%
E25	4	2	5	11	36%
E26	9	3	0	12	75%
E27	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E28	8	1	2	11	72%
E29	11	0	1	12	92%
E30	10	1	0	11	91%
E31	5	1	1	7	36%
E32	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E33	5	1	4	10	50%
E34	11	1	0	12	92%
E35	7	0	2	9	70%
E36	11	1	0	12	92%
E37	11	1	0	12	92%
E38	5	1	0	6	42%
E39	10	1	0	11	90%
E40	3	1	1	5	30%

Tabla 43.

Resultados generales de la situación 2 Tarea 2

Situación 2 Tarea 2					
Estudiantes	Ítems correctos	Ítems parcialmente correctos	Ítems incorrectos	Total de Ítems	Porcentaje Ítems correctos
E1	9	1	0	10	90%
E2	10	0	0	10	100%
E3	10	0	0	10	100%
E4	8	0	0	8	88%
E5	10	0	0	10	100%
E6	7	3	0	10	70%
E7	8	0	0	8	88%
E8	10	0	0	10	100%
E9	8	2	0	10	80%
E10	8	1	1	10	80%
E11	9	0	0	9	90%
E12	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió

E13	8	0	1	9	89%
E14	9	1	0	10	90%
E15	3	3	2	8	37%
E16	0	0	0	0	0%
E17	6	1	1	8	70%
E18	0	3	1	4	0%
E19	8	0	0	8	80%
E20	0	0	0	0	0%
E21	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E22	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E23	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E24	6	2	0	8	60%
E25	7	1	2	10	70%
E26	8	0	0	8	80%
E27	10	0	0	10	100%
E28	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E29	8	0	0	8	80%
E30	6	0	2	8	70%
E31	7	1	0	8	79%
E32	6	1	0	7	70%
E33	1	2	2	5	10%
E34	8	0	0	8	80%
E35	0	2	6	8	0%
E36	8	0	0	8	80%
E37	2	3	3	8	20%
E38	4	0	2	6	33%
E39	7	1	0	8	70%
E40	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió

Tabla 44.

Resultados generales de la situación 2 Tarea 3

Situación 2 Tarea 3					
Estudiantes	Ítems correctos	Ítems parcialmente correctos	Ítems incorrectos	Total de Ítems	Porcentaje Ítems correctos
E1	8	1	1	10	80%
E2	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E3	10	1	0	11	91%
E4	4	3	1	8	50%
E5	10	1	0	11	91%
E6	4	3	4	11	36%
E7	11	0	0	11	100%
E8	9	2	0	11	82%

E9	11	0	0	11	100%
E10	8	3	0	11	73%
E11	9	1	0	10	90%
E12	9	0	2	11	82%
E13	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E14	7	3	1	11	64%
E15	3	2	3	8	36%
E16	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E17	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E18	3	4	4	11	27%
E19	10	1	0	11	91%
E20	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E21	8	1	0	9	80%
E22	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E23	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E24	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E25	1	0	3	4	10%
E26	7	2	2	11	64%
E27	8	3	0	11	73%
E28	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E29	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E30	4	1	3	8	50%
E31	6	0	0	6	60%
E32	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E33	3	3	4	10	30%
E34	10	1	0	11	91%
E35	3	4	3	10	30%
E36	10	1	0	11	91%
E37	3	2	6	11	27%
E38	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E39	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió
E40	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió	No asistió