

UNIVERSIDAD DEL VALLE

TESIS DE PREGRADO

Sobre los Operadores Pseudodiferenciales en el Toro

Autor:

Esteban Daniel Ospino
Tafur

Director:

Ph.D. Julio César
Delgado Valencia

*Trabajo de grado presentado como requisito para optar por el título de
Matemático.*

18 de agosto de 2025



**Universidad
del Valle**

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Resumen

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de matemáticas

Pregrado en matemáticas

Sobre los Operadores Pseudodiferenciales en el Toro

by Esteban Daniel Ospino Tafur

En este trabajo iniciaremos con la definición del Toro como un espacio cociente, lo cual permite tratar al toro como un grupo topológico compacto. Además haremos una observación sobre la relación entre el espacio toroidal y el espacio euclidiano. A partir de la estructura toroidal se desarrolla el concepto de operador pseudodiferencial periódico. También se construyen ejemplos concretos sobre funciones periódicas que permiten comprender la estructura y el fundamento de los operadores pseudodiferenciales en el entorno toroidal. Finalmente se estudian propiedades de regularidad asociadas a estos operadores y un teorema que precisa del concepto de elipticidad fuerte.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecerle a Dios por la sabiduría y el discernimiento. También a mis padres Augusto y Migdiela por el apoyo incondicional durante este trabajo y toda la carrera. A Yusmelis por sus sabias palabras que siempre quería escuchar. A Karen por su amor y motivación constante. A mi tía Soledad y a toda mi familia porque siempre estaban apoyándome.

A mi director de tesis Julio Delgado, que siempre estuvo atento y dispuesto a ayudarme, de él aprendí muchas cosas. También a todos los profesores que hicieron parte de mi formación académica.

A todas las personas que conocí en la universidad, con los que compartí el amor por la ciencia, en especial a mis amigos José, Juan Pablo, Kevin y Sebastián, mis compañeros y amigos de la carrera.

También quiero agradecer al doctor Darwin Peña, que me motivó con su tesis a explorar más el mundo de los operadores pseudodiferenciales.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	V
1. Preliminares	5
1.1. Estructura del Toro $\mathbb{T}^n$	7
1.1.1. Isomorfismo entre el toro $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$	7
1.2. Isomorfismo entre $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{R}^n$	8
1.3. Funciones periódicas	11
1.4. Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	12
1.4.1. Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	12
1.4.2. Transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	13
1.4.3. Transformada inversa de Fourier	16
1.4.4. El espacio dual de $\mathcal{S}$: el espacio de distribuciones tem- peradas $\mathcal{S}'$	18
1.5. Espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$	19
1.5.1. Propiedades del espacio L^2	20
1.5.2. Conexión con la transformada de Fourier	20
2. Operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{T}^n$	25
3. Aplicaciones	41
3.0.1. Ecuaciones Elípticas	42
Bibliography	47

Introducción

Los *operadores pseudodiferenciales* pueden considerarse extensiones naturales de los operadores diferenciales lineales, con los que comparten muchas propiedades esenciales. Su estudio surgió a partir de investigaciones realizadas en la década de 1960 sobre operadores integrales singulares.

Desde entonces, la teoría de operadores pseudodiferenciales ha evolucionado rápidamente, con contribuciones fundamentales de matemáticos como Hörmander, Calderón, Atiyah y Singer. En particular, alrededor de 1963, Michael Atiyah e Isadore Singer presentaron su célebre teorema del índice, utilizando herramientas que hoy reconocemos como operadores pseudodiferenciales. Con este resultado demostraron que los índices geométrico y analítico de un operador de Fredholm en una variedad compacta coinciden. Estos avances, junto con los desarrollos de Calderón, motivaron la formalización de una teoría general para esta nueva clase de operadores.

Una rama destacada de esta teoría se enfoca en los *operadores pseudodiferenciales periódicos*, especialmente relevantes cuando el espacio subyacente posee estructura periódica, como el toro $\mathbb{T}^n$. En las últimas décadas, esta teoría ha ganado relevancia debido a su aplicabilidad en diversas áreas, incluyendo la física matemática y la teoría cuántica de campos.

El objetivo de este trabajo es comprender la necesidad de este tipo de operadores y su correspondiente cuantización. En el Capítulo 1, se estudian las definiciones y herramientas básicas necesarias para describir la estructura del toro. En particular, se introducirá la transformada de Fourier en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y en el espacio de distribuciones periódicas $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$, siguiendo las presentaciones de [1]. Además, se revisarán propiedades fundamentales de la transformada de Fourier y se estudiará el espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$, que será esencial en el desarrollo posterior.

En el Capítulo 2, se abordarán los fundamentos del *cálculo pseudodiferencial*, herramienta clave en el análisis de ecuaciones diferenciales. Se introducirá el proceso de cuantización de operadores, y se presentarán ejemplos que muestran cómo la estructura periódica de $\mathbb{T}^n$ influye en la relación entre símbolos y operadores. En particular, se construirá un ejemplo sobre una función periódica, donde se aplicará una traslación seguida de un operador pseudodiferencial, analizando las propiedades preservadas. Asimismo, se estudiará un ejemplo concreto de una función en el toro unidimensional modificada por la acción de un operador pseudodiferencial.

Finalmente, se destacarán algunas *aplicaciones* de los operadores pseudodiferenciales en el toro, especialmente en el contexto de *ecuaciones elípticas*. En este sentido, se analizará el operador de Laplace, como ejemplo de operador elíptico que satisface propiedades fundamentales dentro de esta teoría.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos definiciones, teoremas y ejemplos de teoría de grupos, topología y análisis que nos serán útiles para comprender la teoría de operadores pseudodiferenciales en el toro. También hablaremos del origen de las funciones periódicas y cómo se relacionan con las series de Fourier, ya que esto es muy importante en este tema.

Para hablar de operadores pseudo-diferenciales y espacios como el Toro $\mathbb{T}^n$ es importante saber qué es un grupo y más específicamente el cociente de grupos, pues, veremos que $\mathbb{T}^n$ se definirá como $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Las siguientes definiciones y teoremas de álgebra serán tomadas del libro de Dummit (véase [2]). Recordemos que una *operación binaria* $\star$ en un conjunto G es una función $\star : G \times G \rightarrow G$. Para cualquier $a, b \in G$.

Definición 1.0.1 (Grupo). Un *grupo* es un par ordenado $(G, \star)$, donde G es un conjunto y $\star$ es una operación binaria en G , que satisface los siguientes axiomas:

- i) $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$, para todo $a, b, c \in G$.
- ii) existe un elemento e en G llamado *identidad* de G , tal que para todo $a \in G$ se cumple que $a \star e = e \star a = a$.
- iii) para cada $a \in G$, existe un elemento a^{-1} de G llamado *inverso* de a , tal que $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Si además se cumple que $a \star b = b \star a$ para todo $a, b \in G$, diremos que el grupo $(G, \star)$ es abeliano.

Ejemplo 1.0.2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son grupos bajo la operación $+$ con $e = 0$ y $a^{-1} = -a$.

A continuación definiremos la noción de subgrupo normal y grupo cociente. Ya que es importante para entender la estructura de ciertos grupos como lo es $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Definición 1.0.3 (Subgrupo Normal). Un subgrupo N de un grupo G es *normal* (denotado $N \triangleleft G$) si es un subgrupo y además, para todo $g \in G$ y todo $n \in N$, se cumple que $gng^{-1} \in N$. Es decir, N es invariante bajo conjugación por elementos de G .

Definición 1.0.4 (Grupo Cociente). Dado un grupo G y un subgrupo normal N , el *grupo cociente* G/N es el conjunto de las clases laterales de N en G , es decir, el conjunto de los conjuntos de la forma $gN = \{gn : n \in N\}$ para cada $g \in G$. La operación en G/N está definida por $(gN)(hN) = (gh)N$, y se verifica que esta operación está bien definida (no depende de los representantes) y cumple las propiedades de un grupo.

El siguiente teorema es uno de los más importantes en la teoría de grupos que nos permite relacionar el Kernel y el cociente de un grupo con la imagen de este.

Teorema 1.0.5 (Primer teorema de Isomorfismos de Grupos). Sean G y H grupos. Si $\varphi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos, entonces $\text{Ker } \varphi \triangleleft G$ y

$$G / \text{Ker } \varphi \cong \varphi(G). \quad (1.1)$$

Demostración. Consulte [2]. □

Estableceremos algunos conceptos de topología para analizar al toro desde un punto de vista topológico.

Definición 1.0.6 (Espacio Métrico). Una función $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ se dice que es una *métrica* en el conjunto X si para todo $x, y, z \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\iff x = y && \text{(no degeneración);} \\ d(x, y) &= d(y, x) && \text{(simetría);} \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) && \text{(desigualdad triangular).} \end{aligned}$$

Diremos que (X, d) es un *espacio métrico*.

Definición 1.0.7 (Topología). Una familia de conjuntos $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ se llama una *topología* en el conjunto X si

1. $\bigcup U \in \tau$ para toda colección $U \subset \tau$.
2. $\bigcap U \in \tau$ para toda colección finita $U \subset \tau$.

Entonces diremos que (X, τ) es un *espacio topológico*.

Si X es un espacio topológico con una topología τ , diremos que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si $U \in \tau$. Usando esta terminología, podemos decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X , llamados conjuntos abiertos tales que $\emptyset$ y X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos (véase [3]).

Con la finalidad de entender la estructura en la que vamos a trabajar, este capítulo presentaremos los aspectos topológicos necesarios para comprender al toro $\mathbb{T}^n$ como un espacio cociente.

1.1. Estructura del Toro $\mathbb{T}^n$

El toro $\mathbb{T}^n$ admite múltiples representaciones equivalentes: como producto de círculos S^1 ($S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$), como cociente $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, o como el dominio fundamental $[0, 1)^n$ con identificación de bordes. Todas estas representaciones son equivalentes como variedades. Sin embargo, en este trabajo utilizaremos la descripción $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, que dota al toro de una estructura natural de grupo topológico compacto. Esta formulación permite trabajar de manera directa con funciones periódicas, operadores definidos mediante series de Fourier y símbolos dependientes de una variable espacial $x \in \mathbb{T}^n$ y una frecuencia discreta $\xi \in \mathbb{Z}^n$, lo cual resulta particularmente conveniente en el estudio del cálculo pseudodiferencial en el Toro.

El toro $\mathbb{T}^n$ es un espacio topológico que se puede definir como el producto cartesiano de n copias de S^1 , donde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Este espacio es muy importante en análisis y geometría debido a sus propiedades topológicas y a su estructura.

1.1.1. Isomorfismo entre el toro $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Uno de los enfoques más conocidos y el que usaremos es ver al toro como un cociente del espacio euclidiano $\mathbb{R}$ y el grupo discreto $\mathbb{Z}$. Para esto definamos

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T} \\ \theta &\rightarrow e^{2\pi i \theta}.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\varphi(\theta_1 + \theta_2) = e^{2\pi i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{2\pi i \theta_1} e^{2\pi i \theta_2} = \varphi(\theta_1) \varphi(\theta_2).$$

Por lo que φ es un homomorfismo, ahora hallemos el núcleo de φ ,

$$\text{Ker } \varphi = \{\theta : \varphi(\theta) = 1\}$$

$$\varphi(\theta) = e^{2\pi i \theta} = 1 \tag{1.2}$$

$$= \cos(2\pi \theta) + i \sin(2\pi \theta) = 1 \tag{1.3}$$

$$= \cos(2\pi \theta) = 1. \tag{1.4}$$

Por lo tanto $\text{Ker } \varphi = \{\theta : \cos(2\pi \theta) = 1\} = \{\theta : \theta \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$. Así, por el teorema de Isomorfismos de Grupos

$$\mathbb{R} / \text{Ker } \varphi = \mathbb{R} / \mathbb{Z} \cong \mathbb{T}. \tag{1.5}$$

Aquí $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ representa un espacio donde cada punto en $\mathbb{R}$ se identifica con su traslación por cualquier entero, es decir, los puntos x y $x + n$ donde n es un entero, se consideran equivalentes.

Como $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^n &\cong \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \times \dots \times \mathbb{T}^1 \\ &= \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ &\cong \left(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)^n \\ &\cong \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.\end{aligned}$$

1.2. Isomorfismo entre $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{R}^n$

La pregunta es si $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{R}^n$ como grupos. Sabemos que $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, por lo que nuestra pregunta es análoga a cuestionarse si hay una especie de ley cancelativa, explícitamente

$$\left(\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n\right) \times \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{R}^n. \quad (1.6)$$

Volviendo a grupos, el siguiente teorema que fue tomado de un ejercicio de [2] nos será muy útil.

Teorema 1.2.1. *Sea C un subgrupo normal de A y D un subgrupo normal de B . Entonces*

$$(A \times B) / (C \times D) \cong (A/C) \times (B/D). \quad (1.7)$$

Nosotros buscamos un isomorfismo de la forma

$$(A/B) \times B \cong X.$$

Usando el Teorema 1.2.1 obtenemos que si B es un subgrupo normal de A

$$(A \times B) / (B \times \{0\}) \cong (A/B) \times (B/\{0\})$$

lo cual es equivalente a

$$(A \times B) / B \cong (A/B) \times B. \quad (1.8)$$

De aquí se desprende el siguiente corolario.

Corolario 1.2.2.

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n) / \mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n. \quad (1.9)$$

Demostración. Ahora vamos a demostrar que $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n) / \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{R}^n$.

Definamos

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (a, b) &\rightarrow a\end{aligned}$$

y veamos que φ es un homomorfismo de grupos.

Sea la función $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(a, b) = a$. Para verificar si φ es un homomorfismo de grupos, debemos comprobar que para todo $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$, se cumple la propiedad de homomorfismo:

$$\varphi((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = \varphi(a_1, b_1) + \varphi(a_2, b_2).$$

1. Primero, consideramos la suma en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n$:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

2. Aplicamos la función φ al resultado de la suma:

$$\varphi((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = \varphi(a_1 + a_2, b_1 + b_2) = a_1 + a_2.$$

3. Por otro lado, evaluamos φ por separado en (a_1, b_1) y (a_2, b_2) :

$$\varphi(a_1, b_1) = a_1 \quad \text{y} \quad \varphi(a_2, b_2) = a_2.$$

Entonces, sumando los resultados:

$$\varphi(a_1, b_1) + \varphi(a_2, b_2) = a_1 + a_2.$$

Dado que:

$$\varphi((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) = \varphi(a_1, b_1) + \varphi(a_2, b_2),$$

concluimos que φ es un homomorfismo de grupos.

Notemos que φ no mapea elementos de $\mathbb{Z}^n$, así $\text{Ker}\varphi = \{0\} \times \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^n$. De este modo, si usamos el primer teorema de isomorfismos de grupos obtenemos que

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n) / \text{Ker}\varphi \cong \text{Im}\varphi, \tag{1.10}$$

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n) / \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

En virtud del Corolario 1.2.2,

$$(A \times B) / B \cong (A / B) \times B, \tag{1.12}$$

luego

$$\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n) \times \mathbb{Z}^n \cong (\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n) / \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{R}^n. \quad (1.13)$$

Que es lo que se quería demostrar. $\square$

Los grupos topológicos han sido objeto de estudio en las últimas décadas; una gran cantidad de matemáticos dedicados a la rama del análisis han estudiado funciones en este tipo de espacios. El toro $\mathbb{T}^n$ es un grupo topológico compacto. Definamos antes la noción de grupo topológico (véase [1]).

Definición 1.2.3. Un *grupo topológico* G es un espacio topológico Hausdorff que también es un grupo con

$$(x, y) \mapsto xy.$$

Tal que las funciones $(x, y) \mapsto xy$ y $x \mapsto x^{-1}$ son continuas. La identidad del grupo es el elemento único e con la propiedad $xe = ex = x$ para todo $x \in G$.

Ejemplo 1.2.4. El toro n -dimensional $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ se define de la siguiente manera:

$$\mathbb{T}^n = [0, 1) \times \cdots \times [0, 1)$$

con la topología y operación usuales

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = ((x_1 + y_1) \bmod 1, \dots, (x_n + y_n) \bmod 1),$$

es un grupo topológico.

Observación 1.2.5. En cuanto a grupos normales abstractos (ignorando topología), sí es cierto que $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{R}^n$. Pero si los pensamos como grupos topológicos entonces no son isomorfos, pues $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ no es conexo, mientras que $\mathbb{R}^n$ sí es conexo.

Esta pregunta sobre el isomorfismo (1.13) surgió del interés en observar un símbolo cualquiera $\sigma(x, \xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, y dado que como grupos abstractos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \cong \mathcal{S}(\mathbb{T}^{2n} \times \mathbb{Z}^{2n})$, entonces se podría mirar lo que sucede con $\sigma(x, \xi)$ en el entorno toroidal. Pero el isomorfismo $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{R}^n$ considerado en esta sección es únicamente a nivel de grupos con las condiciones del Teorema 1.2.1, es decir, sin tener en cuenta ninguna estructura topológica. En particular, este isomorfismo no preserva propiedades adicionales como la topología, la diferenciabilidad o las estructuras funcionales, y no induce correspondencias naturales entre espacios de funciones o distribuciones definidas sobre estos conjuntos.

1.3. Funciones periódicas

El concepto de función es uno de los más importantes en matemáticas. Es por esto que cuando el término de "función" se globalizó, comenzó la tendencia a aritmetizar este tipo de objeto. En el inicio fue el problema de la cuerda vibrante, el cual consiste en estudiar el movimiento de una cuerda atada en sus extremos y que se permite vibrar libremente. Durante la primera mitad del siglo XVIII habían aparecido diferencias de opinión sobre la manera de representar funciones, cuando d'Alembert y Euler dieron sus soluciones al problema de la cuerda vibrante, en la llamada «forma cerrada», utilizando un par de funciones arbitrarias, mientras que Daniel Bernoulli había encontrado una solución en términos de una serie infinita de funciones trigonométricas (véase [4]). Quien dio solución a este problema fue Fourier, al mostrar que cualquier función $y = f(x)$ se puede representar por una serie de la forma

$$y = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots + b_n \sin nx + \cdots \quad (1.14)$$

la cual es conocida como serie de Fourier.

A continuación vamos a definir lo que es una función periódica en el contexto toroidal.

Definición 1.3.1 (Funciones periódicas). Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es *1-periódica* si $f(x + k) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{Z}^n$. Vamos a considerar que estas funciones están definidas en $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \{x + \mathbb{Z}^n : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Ejemplo 1.3.2. Un ejemplo de una función periódica en el toro $\mathbb{T}^n$ es una combinación finita de funciones $e^{2\pi i k \cdot x}$. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, |k| \leq N} c_k e^{2\pi i k \cdot x}, \quad x \in \mathbb{T}^n$$

donde c_k son coeficientes complejos, es una función suave y periódica en $\mathbb{T}^n$. Note que

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n, |k| \leq N} c_k e^{2\pi i k \cdot x}$$

se puede reescribir como

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n, |k| \leq N} c_k (\cos(2\pi k \cdot x) + i \sin(2\pi k \cdot x)).$$

Esta función está hecha de combinaciones lineales de elementos de una base de Fourier en el toro. Y gracias a la identidad $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, podemos apreciar más claramente la periodicidad de f .

1.4. Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

El espacio de Schwartz es el espacio donde se trabaja la teoría de operadores pseudodiferenciales, tomaremos como referencia para esta sección el libro de Elias M Stein y Rami Shakarchi. (véase [5]).

El espacio de Schwartz en $\mathbb{R}$ es el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables f , de modo que f y todas sus derivadas $f, f', f'', \dots, f^{(n)}, \dots$, son *rápidamente decrecientes*, esto es

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k f^{(n)}(x)| < \infty \quad \text{para todo } k, n \geq 0.$$

El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Además, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ se tiene que

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Esto nos dice que el espacio de Schwartz es cerrado bajo derivación y multiplicación por polinomios.

Un ejemplo de una función en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es la **Gaussiana** definida por

$$f(x) = e^{-x^2}$$

la cual juega un papel muy importante en la teoría de la transformada de Fourier, probabilidad, física, y operadores. Notemos que

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$f''(x) = -4x^2 e^{-x^2} + 2e^{-x^2}$$

y si seguimos podemos ver que las derivadas de f son de la forma $p(x)e^{-x^2}$ donde $p(x)$ es un polinomio lo que implica que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Notemos también que la función $e^{-|x|}$ decrece rápidamente a infinito, pero no es diferenciable en 0 y por tanto no pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Este tipo de polinomios han sido estudiados a lo largo del tiempo, consulte [6] sobre los polinomios de Hermite.

1.4.1. Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

En la siguiente definición usaremos el enfoque de las notas del curso de cálculo pseudodiferencial cuya fuente se encuentra en [7, 1]. Aquí definiremos el espacio de Schwartz ya de una manera generalizada para funciones en $\mathbb{R}^n$

Sean $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ multi-índices con entradas enteras $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, definiremos

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x) \quad \text{y} \quad x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}.$$

Para tales multi-índices escribiremos $\alpha, \beta \geq 0$.

Ahora bien, una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de funciones de decrecimiento rápido si φ es suave en $\mathbb{R}^n$ y si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty.$$

Ejemplo 1.4.1. La función $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pero $e^{-|x|}$ no lo es, ya que no es diferenciable en $x = 0$. La función infinitamente diferenciable $g(x) = (1 + |x|^4)^{-a}$, con $a > 0$, no está en $\mathcal{S}$, ya que decae únicamente como el recíproco de un polinomio fijo en el infinito. El conjunto de todas las funciones suaves de soporte compacto $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.4.2. Transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

La transformada de Fourier es una herramienta muy potente en la teoría de operadores porque es una forma de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales lineales. Además, en está incrustada en la definición de Operador Pseudodiferencial, como veremos a lo largo de este documento.

El espacio de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, es el conjunto de todas las funciones suaves en $\mathbb{R}^n$ cuyos valores, así como los de todas sus derivadas, decrecen más rápido que cualquier potencia inversa conforme $|x| \rightarrow \infty$. Este espacio desempeña un papel crucial en el análisis de la transformada de Fourier debido a las propiedades de regularidad y decrecimiento rápido de sus funciones. Usaremos la notación del libro de Ruzhansky [7].

La transformada de Fourier de una función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define como:

$$(\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$. Una de las propiedades fundamentales de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es que la transformada de Fourier es un isomorfismo de este espacio sobre sí mismo, es decir, tanto φ como $\mathcal{F}\varphi$ pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 1.4.2. Si $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ está definida en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\widehat{f}(\xi) = f(\xi).$$

Note que la función

$$s \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+is)^2} dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

es constante (y, por tanto igual a $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} dt$), ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds} \left(e^{-\pi(t+is)^2} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} -2\pi i(t+is) e^{-\pi(t+is)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} i \frac{d}{dt} \left(e^{-\pi(t+is)^2} \right) dt.$$

La función $e^{-\pi(t+is)^2}$ tiende uniformemente a cero cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Por tanto,

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-\pi(t+is)^2} dt = 0.$$

Teniendo esto en cuenta, calculemos la transformada de Fourier de la función $t \mapsto e^{-\pi t^2}$ en $\mathbb{R}$, completando cuadrados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{R}}(e^{-\pi t^2})(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t \tau} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+i\tau)^2} e^{\pi(i\tau)^2} dt \\ &= e^{\pi i^2 \tau^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+i\tau)^2} dt \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+i\tau)^2} dt \right) e^{-\pi \tau^2}. \end{aligned}$$

Sea $u = \sqrt{\pi}t$, entonces $\frac{du}{dt} = \sqrt{\pi}$, así $du = \sqrt{\pi} dt$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} dt &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} \frac{du}{\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi \left(\frac{u^2}{\pi}\right)} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}(e^{-\pi t^2})(\tau) = e^{-\pi \tau^2}.$$

Este ejemplo muestra que la transformada de Fourier de una gaussiana es una gaussiana.

En este documento la palabra operador es muy recurrente, por lo que vamos a recordar cada definición para tener todo muy claro. Empezando por la definición de un operador lineal, que es una función entre dos espacios vectoriales que satisface dos propiedades de linealidad. También definiremos la noción de operador diferencial, que son la esencia de los operadores oseudodiferenciales, abreviados como ψ do's.

Recordemos que un *operador lineal* es una aplicación $A : X \rightarrow Y$, donde X, Y son espacios vectoriales sobre un cuerpo K , que satisfacen las siguientes condiciones

- $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$
- $A(kx) = kA(x)$ para todo $k \in K, x \in X$.

Los operadores diferenciales que definiremos, son operadores lineales que satisfacen ciertas propiedades que nos van a permitir manipular ciertas expresiones que estudiaremos en el siguiente capítulo.

La operación convolución es fundamental en el análisis funcional.

Definición 1.4.3. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos la *convolución* $f * g$ como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy.$$

Observación 1.4.4. La convolución satisface las propiedades *asociativas* y *distributivas*, esto es:

1. $f * (g * h) = (f * g) * h$,
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$ y $(f + g) * h = f * h + g * h$.

Observación 1.4.5. La transformada de Fourier también es un operador lineal. Ahora, un operador diferencial es un operador de la forma

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Ahora continuaremos con algunas propiedades de la transformada de Fourier [1].

Proposición 1.4.6. Dadas $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$ y α un multiíndice. Tenemos:

1. $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,
2. $\widehat{f + g} = \widehat{f} + \widehat{g}$,
3. $\widehat{bf} = b\widehat{f}$,
4. $\widehat{f(-x)}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$,
5. $\widehat{\widehat{f}} = \overline{\widehat{f}}$,
6. $\widehat{f(x - y)}(\xi) = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{f}(\xi)$,
7. $\widehat{e^{2\pi i x \cdot y} f(x)}(\xi) = \widehat{f}(\xi - y)$,

8. $\widehat{f(ax)}(\xi) = a^{-n} \widehat{f}(\xi/a),$
9. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi),$
10. $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (-1)^{|\alpha|} (2\pi i)^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{f}(\xi),$
11. $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$
12. $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g},$
13. $\widehat{f \circ A}(\xi) = \widehat{f}(A\xi),$ donde A es una matriz ortogonal y $\widehat{f}$ es un vector columna.

1.4.3. Transformada inversa de Fourier

Ahora definimos la transformada de Fourier inversa.

Definición 1.4.7. Dada una función de Schwartz, definimos la transformada inversa de Fourier como

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}(f) = f^\vee(x) = \widehat{f}(-x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) d\xi$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora veamos algunas relaciones entre la transformada de Fourier y su inversa.

Teorema 1.4.8. Sean f, g, h en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tenemos

1.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dx,$$

2. (*Fórmula de inversión de Fourier*)

$$(\widehat{f})^\vee = f = (\check{f})^\wedge,$$

3. (*Relación de Parseval*)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{\widehat{h}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{h}(\xi)} d\xi,$$

4. (*Identidad de Plancherel*)

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f^\vee\|_{L^2},$$

5.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \widehat{h}^\vee(x) dx.$$

Demostración. Para demostrar (1) usaremos la definición de transformada de Fourier y el teorema de Fubini.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Para probar (2) usamos (1) con

$$g(\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot t} e^{-\pi |\varepsilon \xi|^2}.$$

Por el Corolario 1.4.6 con las identidades (7) y (8) y el Ejemplo 1.4.2 tenemos que

$$\hat{g}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\pi |(x-t)/\varepsilon|^2},$$

dicha función es una identidad aproximada. Ahora, usando (1) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varepsilon^{-n} e^{-\pi \varepsilon^{-2} |x-t|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot t} e^{-\pi |\varepsilon \xi|^2} d\xi. \quad (1.15)$$

Ahora, sea $\varepsilon \rightarrow 0$ en (1.15). El lado izquierdo de (1.15) converge a $f(t)$ uniformemente en conjuntos compactos (consulte [1]). El lado derecho de (1.15) converge a $(\hat{f})^\vee(t)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Concluimos que $(\hat{f})^\vee = f$ en $\mathbb{R}^n$. Reemplazando f por $\tilde{f}$ y usando el resultado recién probado, tenemos que $(f^\vee)^\wedge = f$.

Note que si $g = \widehat{\bar{h}}$, entonces por la identidad (5) de la Proposición 1.4.6 y la identidad (2) implica que $\hat{g} = \bar{h}$. Luego (3) se sigue de (1) expresando h en términos de g .

Para demostrar (4) tomamos $h = f$ en (3) y obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{f(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi. \quad (1.16)$$

Luego el producto interno en L^2 resulta que $\|f\|_{L^2}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2}^2$.

Finalmente (5) se sigue de (1) y (2) con $\hat{g} = h$.

□

1.4.4. El espacio dual de $\mathcal{S}$: el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$

El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ está formado por funciones suaves y rápidamente decrecientes junto con sus derivadas de todos los órdenes. Su estructura lo convierte en un espacio de Fréchet, y su dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se define como el conjunto de todos los funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{S}$.

Definimos el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de todos los funcionales lineales continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Esto significa que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si es un funcional $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

1. u es lineal, es decir,

$$u(a\varphi + b\psi) = au(\varphi) + bu(\psi) \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{C} \text{ y } \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

2. u es continuo, esto es,

$$\varphi_j \rightarrow \varphi \text{ en } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi) \text{ en } \mathbb{C}.$$

Donde la convergencia está dada de la siguiente manera:

Definición 1.4.9. Sean $u_j, u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Diremos que $u_j \rightarrow u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cuando $j \rightarrow \infty$ si $u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$ en $\mathbb{C}$ cuando $j \rightarrow \infty$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ son llamadas funciones de prueba para distribuciones temperadas en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Otra notación para $u(\varphi)$ es $\langle u, \varphi \rangle$.

Suponga que f y g son funciones en el espacio de Schwartz y α un multiíndice. Integrando por partes $|\alpha|$ veces, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x)g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\partial^\alpha g)(x) dx. \quad (1.17)$$

Si quisiéramos definir la derivada de una distribución temperada u , tendríamos que dar una definición que extienda la definición de la derivada de la función y que satisfaga (1.17) para $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.4.10. Sea $u \in \mathcal{S}'$ y α un multiíndice. Definimos

$$\langle \partial^\alpha u, f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha f \rangle.$$

Ahora veamos cómo se define la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'$.

Definición 1.4.11. Sea $u \in \mathcal{S}'$. Definimos la transformada de Fourier $\hat{u}$ y la transformada inversa $\check{u}$ de una distribución temperada por

$$\langle \hat{u}, f \rangle = \langle u, \hat{f} \rangle \quad \text{y} \quad \langle \check{u}, f \rangle = \langle u, \check{f} \rangle$$

para toda $f \in \mathcal{S}$.

Ejemplo 1.4.12. Observamos que $\hat{\delta}_0 = 1$. Más generalmente, para cualquier multiíndice α tenemos

$$(\partial^\alpha \delta_0)^\wedge = (2\pi i x)^\alpha$$

Para ver esto, observamos que para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle (\partial^\alpha \delta_0)^\wedge, f \rangle &= \langle \partial^\alpha \delta_0, \hat{f} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, \partial^\alpha \hat{f} \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_0, ((-2\pi i x)^\alpha f(x))^\wedge \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} ((-2\pi i x)^\alpha f(x))^\wedge(0) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i x)^\alpha f(x) dx. \end{aligned}$$

Este cálculo nos indica que $(\partial^\alpha \delta_0)^\wedge$ se identifica con la función $(2\pi i x)^\alpha$.

Ejemplo 1.4.13. La función $e^{|x|^2}$ no está en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, y por tanto su transformada de Fourier tampoco.

Para ver esto, supongamos lo contrario, que $e^{|x|^2}$ define una distribución temperada. Entonces el funcional

$$u(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2} \varphi(x) dx$$

estaría bien definido (cumple las condiciones de linealidad y convergencia) para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Pero si consideramos el test o función de prueba

$$\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Entonces,

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{|x|^2} e^{-|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} 1 dx = \infty$$

lo cual es una contradicción, ya que el funcional no está bien definido (la integral diverge).

1.5. Espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$

El espacio L^2 es fundamental en matemáticas y física, ya que proporciona el marco adecuado para estudiar funciones cuadrado integrables. En el caso del toro $\mathbb{T}^n$, el espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$ se define como el conjunto de todas las funciones cuadrado integrables con respecto a la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}^n$. Este espacio es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Debido a la estructura periódica del toro, $L^2(\mathbb{T}^n)$ tiene una base ortonormal dada por los exponentes de Fourier $e^{2\pi i k \cdot x}$ para $k \in \mathbb{Z}^n$, lo que permite representar cualquier función en $L^2(\mathbb{T}^n)$ mediante su serie de Fourier. Esta propiedad hace que $L^2(\mathbb{T}^n)$ sea el entorno natural para el estudio de operadores pseudodiferenciales en el toro, pues estos operadores suelen estar definidos a través de su acción en los coeficientes de Fourier de una función.

Además, el espacio $L^2(\mathbb{T}^n)$ es invariante bajo la acción de operadores fundamentales en análisis, como los operadores de traslación y convolución, y es el dominio canónico de los operadores de Fourier-multiplicación. Estas propiedades lo convierten en una herramienta esencial para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales y la teoría espectral en espacios periódicos.

Así pues, usando la definición de espacios L^p tendríamos que una función $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ si

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

El espacio L^2 es de suma importancia en el estudio de operadores pseudodiferenciales debido a varias razones que combinan análisis funcional y la teoría de operadores. Específicamente:

1.5.1. Propiedades del espacio L^2

L^2 es un espacio de Hilbert, lo que implica que está dotado de un producto interno que induce una norma. Esto permite usar herramientas como ortogonalidad, bases ortonormales y el teorema espectral.

L^2 es completo respecto a la norma inducida por su producto interno, lo que garantiza que las series convergentes (como series de Fourier) tienen un límite en L^2 . En muchos casos, el espacio dual de L^2 se identifica naturalmente con L^2 , lo que facilita el análisis de operadores.

1.5.2. Conexión con la transformada de Fourier

Los operadores pseudodiferenciales en general se definen en términos de la transformada de Fourier. En el caso toroidal, tenemos

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(f))(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad \text{con } \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

El espacio L^2 es el contexto ideal para la transformada de Fourier, ya que el operador de Fourier es unitario en L^2 . Veamos algunas propiedades relacionadas con la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{T}^n)$ presentadas en [1].

Sea H un espacio de Hilbert separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Recordemos que un subconjunto E de H es ortonormal si:

$$\langle f, g \rangle = 0 \quad \text{para todo } f \neq g \in E, \quad \text{mientras que } \langle f, f \rangle = 1 \quad \text{para todo } f \in E.$$

Un sistema ortonormal completo es un subconjunto de H con la propiedad adicional de que el único vector ortogonal a todos sus elementos es el vector cero.

En la siguiente proposición se resumen propiedades sobre sistemas ortonormales:

Proposición 1.5.1. *Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un sistema ortonormal en H . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal completo.
2. Para todo $f \in H$ tenemos

$$\|f\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2.$$

3. Para todo $f \in H$ tenemos

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq N} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

donde la serie converge en H .

Ahora consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}^n)$ definido al inicio de esta sección con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Sea φ_m una sucesión de funciones $\xi \mapsto e^{2\pi i m \cdot \xi}$ con $m \in \mathbb{Z}^n$. La ortonormalidad de la sucesión $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ es una consecuencia de la siguiente identidad:

$$\int_{[0,1]^n} e^{2\pi i m \cdot x} \overline{e^{2\pi i k \cdot x}} dx = \begin{cases} 1 & \text{cuando } m = k, \\ 0 & \text{cuando } m \neq k. \end{cases}$$

La completitud de la sucesión $\{\varphi_m\}$ se debe a que si $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$ satisfacen que $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces $f = g$ en casi todas partes. En particular, si $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ y $\langle f, \varphi_m \rangle = \widehat{f}(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, entonces si $\langle f, \varphi_m \rangle = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$, se sigue que $f = 0$ en casi todas partes.

El siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición 1.5.1:

Proposición 1.5.2. *Las siguientes afirmaciones son válidas para $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n)$:*

1. (Identidad de Plancherel)

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

2. (Relación de Parseval)

$$\int_{\mathbb{T}^n} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}.$$

3. El mapeo $f \mapsto \{\hat{f}(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$ es una isometría de $L^2(\mathbb{T}^n)$ en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

Demostración. (1) se sigue de la Proposición 1.5.1:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, \varphi_m \rangle|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|^2.$$

Para demostrar (2), reemplacemos f por $f + g$ en (1) y expandamos los cuadrados para obtener

$$\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle = \|f + g\|_{L^2}^2.$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m) + \hat{g}(m)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|^2 + |\hat{g}(m)|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\hat{f}(m) \overline{\hat{g}(m)} \right).$$

Y de esto se sigue que las partes reales de las expresiones en (2) son iguales. Ahora reemplacemos f por $f + ig$ en (1) y desarrollemos los cuadrados. Usando que $\operatorname{Re}(-iw) = \operatorname{Im}(w)$, obtenemos:

$$\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 + 2 \operatorname{Im} \langle f, g \rangle = \|f + ig\|_{L^2}^2,$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m) + i\hat{g}(m)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|^2 + |\hat{g}(m)|^2 + 2 \operatorname{Im} \left(\hat{f}(m) \overline{\hat{g}(m)} \right),$$

por tanto, las partes imaginarias son iguales en (2). Así, (2) se cumple. Ahora vamos a probar (3). Nosotros ya sabemos que el mapeo $f \mapsto \{\hat{f}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una isometría inyectiva. Solo falta probar que es sobreyectiva. Dada una sucesión cuadrado sumable $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de números complejos, definamos:

$$f_N(t) = \sum_{|m| \leq N} a_m e^{2\pi i m t}.$$

Observemos que f_N es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{T}^n)$ y por tanto converge a algún $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Entonces tenemos que $\hat{f}(m) = a_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$. □

1.4.3. Herramientas funcionales en L^2

Las funciones

$$\left\{ f(\xi) = e_{\xi}(x) = e^{2\pi i k \cdot x} : k \in \mathbb{Z}^n \right\},$$

forman una *base ortonormal* de L^2 , lo que permite representar operadores pseudodiferenciales en términos de series de Fourier. Los operadores pseudodiferenciales se estudian en L^2 porque es un marco natural para atender desigualdades clave, como los estimativos L^2 para operadores elípticos.

El espacio L^2 es fundamental en el análisis funcional y el estudio de operadores pseudodiferenciales debido a sus propiedades estructurales como espacio de Hilbert, lo cual facilita el análisis espectral y el uso de herramientas como la transformada de Fourier. Esto ha sido ampliamente documentado en la literatura, donde autores como Lars Hörmander y Subin M.A. han destacado su relevancia en la teoría matemática [8, 9]. Asimismo, el papel de los operadores pseudodiferenciales en aplicaciones físicas y de ingeniería ha sido analizado extensivamente en [10, 11, 12, 13], subrayando su utilidad en problemas que involucran transformaciones de Fourier y estimativos L^2 .

Ejemplo 1.5.3. La función constante $f(x) = 1$.

Como $|f(x)| = 1$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$, tenemos que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |1|^2 dx = 1 < \infty,$$

por lo tanto $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$.

La transformada de Fourier toroidal de f es

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = 0, \\ 0 & \text{si } \xi \neq 0. \end{cases}$$

Ejemplo 1.5.4. Sea $f(x) = e^{2\pi i \xi_0 \cdot x}$, con $\xi_0 \in \mathbb{Z}^n$.

Como $|f(x)| = 1$ para todo $x \in \mathbb{T}^n$, se tiene que $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$. Además,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i \xi_0 \cdot x} e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i (\xi_0 - \xi) \cdot x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \xi_0, \\ 0 & \text{si } \xi \neq \xi_0. \end{cases}$$

Ejemplo 1.5.5. Para $\sigma > \frac{n}{2}$, definimos la función:

$$f_\sigma(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{e^{2\pi i k \cdot x}}{|k|^\sigma}, \quad x \in \mathbb{T}^n.$$

Esta función está en $L^2(\mathbb{T}^n)$ siempre que $\sigma > \frac{n}{2}$, por convergencia de la serie de Parseval.

Ahora, aplicando la transformada de Fourier toroidal,

$$\hat{f}_\sigma(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} f_\sigma(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{|k|^\sigma} \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(k-\xi) \cdot x} dx.$$

Usando la ortonormalidad de $\{e^{2\pi i x \cdot \xi}\}_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$, se tiene

$$\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i(k-\xi) \cdot x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = k \\ 0 & \text{si } \xi \neq k. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\hat{f}_\sigma(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{|\xi|^\sigma} & \text{si } \xi \in \mathbb{N}^n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 1.5.6. La condición $\sigma > \frac{n}{2}$ es para asegurar la convergencia de esta serie en $L^2(\mathbb{T}^n)$, es decir, que $f_\sigma \in L^2$, o equivalentemente, que su norma L^2 sea finita:

$$\|f_\sigma\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \left| \frac{1}{|k|^\sigma} \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{|k|^{2\sigma}} < \infty.$$

Esta serie converge si y solo si $\sigma > \frac{n}{2}$.

Ejemplo 1.5.7. Definamos

$$f_2(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^2} \frac{e^{2\pi i k \cdot x}}{|k|^2}, \quad x \in \mathbb{T}^2.$$

Como $\sigma = 2$, es mayor que $\frac{n}{2} = 1$, esta serie converge en $L^2(\mathbb{T}^2)$ y su transformada de Fourier satisface

$$\hat{f}_2(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{|\xi|^2} & \text{si } \xi \in \mathbb{N}^2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Capítulo 2

Operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{T}^n$

En este capítulo introduciremos algunos conceptos fundamentales para entender cómo funcionan los operadores pseudodiferenciales en el toro. Se definirá la transformada de Fourier periódica toroidal y espacios con producto interno que son fundamentales para el desarrollo de esta teoría. Pero antes veamos cómo funciona la transformada de Fourier en operadores diferenciales, luego veremos por qué es importante, así, cuando tengamos todos los conceptos y propiedades claras podremos entender la importancia de estudiar este tipo de operadores en el Toro $\mathbb{T}^n$ en el cual veremos el papel que desarrollan las funciones periódicas.

Los operadores pseudodiferenciales han sido ampliamente estudiados en espacios no compactos como $\mathbb{R}^n$, donde la transformada de Fourier permite describir su acción de manera natural. Sin embargo, en espacios compactos como el toro $\mathbb{T}^n$, la estructura de Fourier cambia significativamente, lo que hace necesario desarrollar una teoría adecuada para estos entornos.

En particular, el toro $\mathbb{T}^n$ es fundamental en problemas donde la periodicidad juega un papel central, como en ecuaciones en derivadas parciales en dominios acotados, mecánica cuántica y análisis en grupos compactos. La cuantización en $\mathbb{T}^n$ permite extender herramientas del cálculo pseudodiferencial clásico a contextos donde la base de Fourier es discreta, lo que da lugar a una formulación distinta pero análoga a la del caso euclidiano.

El objetivo de este capítulo es definir y desarrollar una cuantización natural en $\mathbb{T}^n$, estableciendo una analogía con el caso clásico y explorando sus propiedades fundamentales. Además, se busca proporcionar herramientas analíticas que permitan su aplicación a ecuaciones diferenciales en el toro, con especial énfasis en la estructura de los operadores involucrados.

Seguiremos el orden de [14] para lo subsecuente.

Para operadores diferenciales parciales con coeficientes constantes, la transformada de Fourier nos da una simplificación notable. Cuando

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \quad (2.1)$$

es un operador diferencial en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes $a_\alpha \in \mathbb{C}$, si a la ecuación

$$P(D)u = f \quad (2.2)$$

(con $u, f \in S'$) le aplicamos la transformada de Fourier en S' obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(P(D)u) &= \mathcal{F}(f). \\ \mathcal{F}\left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u\right) &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathcal{F}(D^\alpha u) = \widehat{f}. \\ \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \mathcal{F}(D^\alpha u) &= \widehat{f}. \\ \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha \widehat{u} &= \widehat{f}(\xi). \\ p(\xi) \widehat{u}(\xi) &= \widehat{f}(\xi)\end{aligned}\tag{2.3}$$

donde $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$ es llamado el *símbolo* de $P(D)$.

La parte m -ésima de $P(D)$ se llama parte principal (también denotado como $P_m(D)$), y su símbolo asociado p_m el *símbolo principal*, es decir, i.e.,

$$\begin{aligned}P_m(D) &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha \\ p_m(\xi) &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha.\end{aligned}$$

Según [14], a menudo sucede que la parte principal es la que determina las propiedades de solubilidad de la ecuación $Pu = f$. En particular, el operador se llama *elíptico* si $p_m \neq 0$ para $\xi \neq 0$. Notemos que p_m es un polinomio homogéneo en ξ de grado m .

Esta formulación permite pensar simplemente en hacer $\widehat{u} = (1/p(\xi))\widehat{f}$ y luego tomar transformadas de Fourier inversas. Entonces resolver nuestra ecuación diferencial parcial se reduce a encontrar un operador T cuyo multiplicador de Fourier sea $1/p(\xi)$, y esto no es necesariamente un operador diferencial, lo que conlleva al estudio de operadores pseudodiferenciales en $\mathbb{R}^n$.

La teoría de operadores pseudo-diferenciales definidos en $\mathbb{Z}$ con símbolos en $\mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ comienza con S. Molajahloo (véase [15]) cuando estudia la continuidad L^p de operadores de *Hilbert-Schmidt* en $\mathbb{Z} \times \mathbb{S}^1$ (Recuerde que $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{T}$). A continuación definiremos el espacio de Schwartz de $\mathbb{Z}^n$.

Definición 2.0.1 (Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$). Sea $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ el espacio de funciones rápidamente decauyentes $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Esto es $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ si para cualquier $M < \infty$ existe una constante $C_{\varphi, M}$ tal que

$$|\varphi(\xi)| \leq C_{\varphi, M} \langle \xi \rangle^{-M}$$

se cumple para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Ejemplo 2.0.2. La función

$$\varphi(\xi) = e^{-|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n$$

es una función en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$.

Ahora podemos definir la transformada de Fourier toroidal o periódica basándonos en el trabajo de D.Cardona, M.Ruzhansky y J.Delgado en [16]. Dado que estamos trabajando en el toro, es necesario definir una versión de la transformada de Fourier que refleje la periodicidad del dominio.

Definición 2.0.3. Denotaremos por $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ la transformada de Fourier toroidal $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ definida como

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Observación 2.0.4. Escribiremos a veces $\hat{\varphi}(\xi)$ en lugar de $(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \varphi)(\xi)$.

La transformada de Fourier toroidal es una biyección y su inversa está dada por

$$\forall x \in \mathbb{T}^n, \quad \varphi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi).$$

Por lo tanto, para todo $h \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ tenemos

$$\forall x \in \mathbb{T}^n, \quad (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} h)(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} h(\xi).$$

Una noción fundamental para introducir las clases de Hörmander en el toro es la de **operadores de diferencia**. Nos permitirá "diferenciar" símbolos respecto de la variable discreta $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Para analizar la regularidad y el comportamiento de los símbolos en el dominio de las frecuencias discretas, es importante introducir la noción de diferencias finitas. Estas permiten definir derivadas discretas de los símbolos en $\mathbb{Z}^n$ (consulte [17]). Registramos esta noción de la siguiente manera.

Definición 2.0.5 (Diferencias Finitas $\Delta_{\xi_j}^\alpha$). Sea $\sigma : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y $1 \leq j \leq n$. Sea $\delta_j \in \mathbb{N}_0^n$ definida por

$$(\delta_j)_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Definimos el operador de diferencia parcial hacia adelante y hacia atrás Δ_{ξ_j} y $\bar{\Delta}_{\xi_j}$ respectivamente, como

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{Z}^n, \quad \Delta_{\xi_j} \sigma(\xi) &= \sigma(\xi + \delta_j) - \sigma(\xi), \\ \bar{\Delta}_{\xi_j} \sigma(\xi) &= \sigma(\xi) - \sigma(\xi - \delta_j), \end{aligned}$$

y para $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definimos

$$\Delta_{\xi}^{\alpha} := \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n}, \quad (2.4)$$

$$\overline{\Delta}_{\xi}^{\alpha} := \overline{\Delta}_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{\Delta}_{\xi_n}^{\alpha_n}. \quad (2.5)$$

Ejemplo 2.0.6. Consideremos la función

$$\sigma : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 + 1)(\xi_2 + 1).$$

Los valores que toma esta función se pueden calcular y obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma(0,0) &= 1 \\ \sigma(0,1) &= 2 \\ \sigma(0,2) &= 3 \\ \sigma(1,0) &= 2 \\ \sigma(1,1) &= 4 \\ \sigma(1,2) &= 6 \\ \sigma(2,0) &= 3 \\ \sigma(2,1) &= 6 \\ \sigma(2,2) &= 9 \end{aligned}$$

Recordemos que para todo $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2$, se define el operador diferencia parcial:

$$\Delta_{\xi_j} \sigma(\xi_1, \xi_2) = \sigma((\xi_1, \xi_2) + \delta_j) - \sigma(\xi_1, \xi_2).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_1} \sigma(\xi_1, \xi_2) &= \sigma((\xi_1, \xi_2) + (1, 0)) - \sigma(\xi_1, \xi_2) \\ &= \sigma(\xi_1 + 1, \xi_2) - \sigma(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

$$\Delta_{\xi_2} \sigma(\xi_1, \xi_2) = \sigma(\xi_1, \xi_2 + 1) - \sigma(\xi_1, \xi_2)$$

Análoga a la derivada cruzada $\partial_{\xi_1} \partial_{\xi_2} \sigma$, definimos para $\mathbb{Z}^2$:

$$\Delta_{\xi}^{\alpha} \sigma(\xi_1, \xi_2) := \Delta_{\xi_1} \Delta_{\xi_2} \sigma(\xi_1, \xi_2)$$

con $\alpha = (1, 1)$. Es decir,

$$\Delta_{\xi_1} \Delta_{\xi_2} \sigma(\xi_1, \xi_2) = \sigma(\xi_1 + 1, \xi_2 + 1) - \sigma(\xi_1, \xi_2 + 1) - \sigma(\xi_1 + 1, \xi_2) + \sigma(\xi_1, \xi_2).$$

Ahora, tomando $\xi = (1, 1)$, tenemos:

$$\Delta_{\xi_1} \sigma(1, 1) = \sigma(2, 1) - \sigma(1, 1) = 6 - 4 = 2$$

$$\Delta_{\xi_2} \sigma(1, 1) = \sigma(1, 2) - \sigma(1, 1) = 6 - 4 = 2$$

$$\Delta_{\xi_1} \Delta_{\xi_2} \sigma(1, 1) = \sigma(2, 2) - \sigma(2, 1) - \sigma(1, 2) + \sigma(1, 1) = 9 - 6 - 6 + 4 = 1.$$

Proposición 2.0.7 (Fórmulas para Δ_ξ^α). Sea $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Tenemos que para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\Delta_\xi^\alpha \varphi(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \varphi(\xi + \beta), \quad (2.6)$$

$$\overline{\Delta}_\xi^\alpha \varphi(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \varphi(\xi - \beta). \quad (2.7)$$

Demostración. Definimos los operadores de traslación $E_j := (I + \Delta_{\xi_j})$, actuando en funciones $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} (E_j \varphi)(\xi) &:= (I + \Delta_{\xi_j}) \varphi(\xi) \\ &= \varphi(\xi) + \Delta_{\xi_j} \varphi(\xi) \\ &= \varphi(\xi) + \varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi) \\ &= \varphi(\xi + \delta_j). \end{aligned}$$

Entonces $E_j = I + \Delta_j$. Por lo tanto, $\Delta_j = E_j - I$.

Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Definimos

$$\begin{aligned} E^\alpha &:= E_1^{\alpha_1} \cdots E_n^{\alpha_n}, \\ \Delta^\alpha &:= \Delta_1^{\alpha_1} \cdots \Delta_n^{\alpha_n} = (E_1 - I)^{\alpha_1} \cdots (E_n - I)^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Como los factores $(E_j - I)$ conmutan, se tiene:

$$\Delta^\alpha = (E - I)^\alpha.$$

Ahora usamos la identidad binomial multivariable. Sea A_j una familia de operadores conmutativos, entonces

$$(A_1 + B_1)^{\alpha_1} \cdots (A_n + B_n)^{\alpha_n} = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} A^\beta B^{\alpha-\beta}.$$

En nuestro caso, tomamos $A_j = E_j$ y $B_j = -I$, lo que implica

$$(E - I)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} E^\beta.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^\alpha \varphi(\xi) &= (E - I)^\alpha \varphi(\xi) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} E^\beta \varphi(\xi) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \varphi(\xi + \beta). \end{aligned}$$

Para $\bar{\Delta}_\xi^\alpha$ el prodecimiento es análogo. □

Observación 2.0.8. También tenemos la fórmula de Leibniz para diferencias finitas, establecidas en [17, 7]. Sean $\phi, \psi: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces

$$\Delta_\xi^\alpha(\phi\psi)(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\Delta_\xi^\beta \phi(\xi) \right) \Delta_\xi^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta).$$

Recordemos ahora la definición de las clases de símbolos toroidales. Definimos el *bracket japonés discreto*

$$\langle \xi \rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2} \quad \text{para } \xi \in \mathbb{Z}^n, \text{ con } |\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2,$$

usando la norma Euclidiana.

Definición 2.0.9. Sea $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. Entonces la *clase de símbolos toroidal* $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ consiste de aquellas funciones $a := a(x, \xi)$ que son suaves en $x \in \mathbb{T}^n$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, y que satisfacen la desigualdad de símbolo toroidal

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}$$

para todo $x \in \mathbb{T}^n$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Ejemplo 2.0.10. Sea $m \in \mathbb{R}$, consideremos la función

$$a(x, \xi) := \langle \xi \rangle^2 = 1 + |\xi|^2, \quad (x, \xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n.$$

Esta función no depende de la variable x , por lo tanto, $\partial_x^\alpha a(x, \xi) = 0$.

Queremos mostrar que $a(x, \xi)$ satisface

$$|\Delta_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{2 - |\beta|}, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Nos basta entonces estudiar las diferencias finitas de a respecto a ξ . Recordemos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_j} a(x, \xi) &= a(x, \xi + \delta_j) - a(x, \xi) \\ &= 1 + |\xi + \delta_j|^2 - (1 + |\xi|^2) \\ &= |\xi + \delta_j|^2 - |\xi|^2. \end{aligned}$$

Ahora expandimos el cuadrado:

$$\begin{aligned}
 |\xi + \delta_j|^2 &= \sum_{k=1}^n (\xi_k + \delta_{jk})^2 \\
 &= \sum_{k \neq j} (\xi_k + 0)^2 + (\xi_j + 1)^2 \\
 &= \sum_{k \neq j} \xi_k^2 + (\xi_j + 1)^2 \\
 &= |\xi|^2 - \xi_j^2 + (\xi_j + 1)^2.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta_{\xi_j} a(x, \xi) = |\xi|^2 - \xi_j^2 + (\xi_j + 1)^2 - |\xi|^2 = 2\xi_j + 1.$$

Así que

$$|\Delta_{\xi_j} a(x, \xi)| = |2\xi_j + 1| \leq C\langle \xi \rangle,$$

lo cual verifica la desigualdad

$$|\Delta_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi)| \leq C_{\beta} \langle \xi \rangle^{2-|\beta|}, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Además, como $\partial_x^{\alpha} a(x, \xi) = 0$ para $\alpha \neq 0$, se tiene en general

$$|\partial_x^{\beta} \Delta_{\xi}^{\alpha} a(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{2-|\beta|}, \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Por lo tanto,

$$a \in S_{1,0}^2(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n).$$

Observación 2.0.11. La función $a(x, \xi) = 1 + |\xi|^2$ es un polinomio de grado 2 en ξ . Entonces, al aplicar una diferencia finita de orden 1 en una variable ξ_j , se reduce el grado en 1, obteniendo una función lineal $2\xi_j + 1$. Si volvemos a aplicar una diferencia finita sobre ese resultado, obtenemos una constante, pues:

$$\Delta_{\xi_j}^2 a(x, \xi) = \Delta_{\xi_j}(2\xi_j + 1) = 2.$$

Si aplicamos una diferencia más,

$$\Delta_{\xi_j}^3 a(x, \xi) = 0.$$

Esto significa que cada aplicación de una diferencia finita en una dirección reduce el grado del polinomio en 1, hasta que eventualmente se anula.

Observación 2.0.12. La estimación obtenida para $\Delta_{\xi_j} a(x, \xi)$ en la dirección ξ_j se puede extender al caso general $\Delta_{\xi}^{\beta} a(x, \xi)$ con $\beta \in \mathbb{N}^n$, ya que

$$\Delta_{\xi}^{\beta} = \Delta_{\xi_1}^{\beta_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\beta_n}.$$

Observación 2.0.13. La familia de seminormas

$$p_{\alpha,\beta,m}(a) := \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^{-m+\rho|\alpha|-\delta|\beta|} |\partial_x^\beta \Delta_\xi^\alpha a(x, \xi)|$$

define una estructura de Fréchet en cada clase toroidal $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Consulte [18].

Observación 2.0.14. Una estructura de frechet es un espacio vectorial topológico X consiste en una familia de seminormas $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que definen una topología de Fréchet, es decir, una topología que convierte a X en un *espacio de Fréchet* (también llamado *espacio localmente convexo y completamente metrizables*).

Definición 2.0.15. Sea $m \in \mathbb{R}$ y sea $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. La *cuantización toroidal* asociada a un símbolo $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ es el operador definido

$$A = a(X, D) := \text{Op}(a) : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n),$$

definido como

$$Af(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi),$$

para $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, $x \in \mathbb{T}^n$.

Observación 2.0.16. Note que si uno tiene un operador lineal continuo $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$, su símbolo $a := a(x, \xi)$ se puede recuperar con la siguiente fórmula

$$a(x, \xi) = e^{-2\pi i x \cdot \xi} A e_\xi(x),$$

donde para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $e_\xi(x) = e^{2\pi i x \cdot \xi}$, $x \in \mathbb{T}^n$, es el *polinomio trigonométrico canónico*.

Definición 2.0.17. La familia de operadores pseudo-diferenciales definidos por la cuantización toroidal en 2.0.15 correspondientes a la clase de símbolos $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ será denotada por

$$\text{Op } S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n).$$

La cuantización toroidal ha sido analizada extensivamente en [7] para el caso general de $\mathbb{T}^n$ y en grupos de Lie compactos.

Observación 2.0.18. La familia de seminormas

$$p_{\alpha,\beta,m}(A) := \sup_{(x,\xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^{\rho|\alpha|-\delta|\beta|-m} |\partial_x^\beta \Delta_\xi^\alpha a(x, \xi)| < \infty, \quad A = \text{Op}(a),$$

define una estructura de Fréchet en cada clase

$$\text{Op}(S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)).$$

La siguiente proposición establece la equivalencia entre los símbolos euclidianos de Hörmander y los símbolos toroidales. Corresponde al corolario 4.6.19 en [7].

Proposición 2.0.19. *Para $m \in \mathbb{R}$, $0 \leq \delta \leq 1$ y $0 \leq \rho \leq 1$, tenemos*

$$\Psi_{\rho,\delta}^m = \text{Op } S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n) = \text{Op } S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n).$$

Es decir, las clases de operadores pseudodiferenciales $\Psi_{\rho,\delta}^m$ periódicas con símbolos euclidianos (de Hörmander) en $\text{Op } S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ y símbolos toroidales en $\text{Op } S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ coinciden.

Observación 2.0.20. Ahora recordemos la definición de espacio de Sobolev de orden $s \in \mathbb{R}$ en el toro. Para $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ ($\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ denota el espacio de distribuciones en $\mathbb{T}^n$ y es igual a $\mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^n), \mathbb{C})$), definimos la norma $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T}^n)}$ como

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} := \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \right)^{1/2}.$$

El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^n)$ es el espacio de distribuciones 1-periódicas u tales que $\|u\|_{H^s(\mathbb{T}^n)} < \infty$.

La siguiente observación sobre espacios de Sobolev es tomada de [7] donde vemos la relación que tienen los espacios de Sobolev y los espacios de distribuciones periódicas.

Observación 2.0.21. ■ $H^s(\mathbb{T}^n)$ y $H^{-s}(\mathbb{T}^n)$ son espacios duales.

- $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{T}^n)$.
- $C^\infty(\mathbb{T}^n) = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^s(\mathbb{T}^n)$.

El término cuantización toroidal se refiere al proceso de asociar a un símbolo $a(x, \xi)$ un operador pseudodiferencial $\text{Op}(a)$ que actúa sobre funciones definidas en $\mathbb{T}^n$. Lo que nos permite enunciar este teorema:

Teorema 2.0.22. *Sea σ_A el símbolo toroidal asociado a un operador lineal continuo $A : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Entonces*

$$Af(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \sigma_A(x, \xi) \hat{f}(\xi) \quad (2.8)$$

para todo $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $x \in \mathbb{T}^n$.

Demostración. Definamos un operador de convolución $A_{x_0} \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{T}^n), (C^\infty(\mathbb{T}^n)))$ por el kernel $K_A(x_0, y) = k_{x_0}(y)$, es decir, por

$$A_{x_0}f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} f(y) k_{x_0}(x - y) dy = (f * k_{x_0})(x).$$

Por tanto

$$\sigma_{A_{x_0}}(x, \xi) = \widehat{k_{x_0}}(\xi) = \sigma_A(x_0, \xi).$$

De modo que tenemos

$$A_{x_0}f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{A_{x_0}f}(\xi) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \sigma_A(x_0, \xi) \hat{f}(\xi),$$

donde usamos que $\widehat{f * k_{x_0}} = \hat{f} \cdot \widehat{k_{x_0}}$.

Esto implica el resultado, ya que x_0 era arbitrario

$$\widehat{A}f(x) = A_x f(x).$$

□

Observación 2.0.23. Recordemos que el operador A_{x_0} fue definido para coincidir con A evaluado en el punto x_0 . Es decir, construimos A_{x_0} con el núcleo k_{x_0} tal que:

$$A_{x_0}f(x_0) = Af(x_0), \quad \text{para todo } f.$$

Como A_{x_0} es un operador de convolución, su acción sobre $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ es:

$$A_{x_0}f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{k_{x_0}}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

Entonces, evaluando en $x = x_0$, se tiene:

$$A_{x_0}f(x_0) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x_0 \cdot \xi} \widehat{k_{x_0}}(\xi) \hat{f}(\xi).$$

Por otro lado, el operador A , al ser continuo, también admite representación en serie de Fourier de la forma:

$$Af(x_0) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x_0 \cdot \xi} \sigma_A(x_0, \xi) \hat{f}(\xi).$$

Comparando ambas expresiones y usando que $A_{x_0}f(x_0) = Af(x_0)$ para todo f , se deduce que deben coincidir los coeficientes:

$$\sigma_A(x_0, \xi) = \widehat{k_{x_0}}(\xi).$$

Para más detalles de la prueba anterior consulte [7].

Veamos cómo la estructura periódica del toro influye en la acción de operadores pseudodiferenciales y cómo esto se traduce en el formalismo pseudodiferencial.

Sea $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica. Para $h \in \mathbb{R}^n$ definimos el operador de traslación T_h como

$$(T_h f)(x) = f(x + h).$$

Dado que en $\mathbb{T}^n$ cualquier función f tiene expansión de Fourier

$$f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi}.$$

Podemos ver cómo actúa T_h sobre los exponentes e_ξ :

$$\begin{aligned} (T_h f)(x) &= T_h \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi} \right) \\ f(x + h) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi(x+h) \cdot \xi} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi} e^{i2\pi h \cdot \xi} \end{aligned}$$

esto significa que T_h actúa simplemente como un operador de multiplicación en los coeficientes de Fourier

$$\widehat{(T_h f)}(x) = e^{i2\pi h \cdot \xi} \hat{f}(\xi).$$

Ahora, si tenemos un operador pseudodiferencial P con símbolo $p(x, \xi)$, veamos cómo actúa P sobre $T_h f$:

$$P(T_h f)(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} p(x, \xi) e^{2\pi i \xi \cdot h} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x}.$$

Esto significa que la traslación cambia significativamente el operador pseudodiferencial, afectando cómo los símbolos dependen de x . En particular, si el símbolo $p(x, \xi)$ depende de x , la traslación puede cambiar la estructura del operador.

Veamos el caso de $P = -\Delta$:

$$\begin{aligned} -\Delta(T_h f)(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} 4\pi^2 |\xi|^2 e^{2\pi i \xi \cdot h} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \\ &= T_h(-\Delta f) = T_h \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} 4\pi^2 |\xi|^2 \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} \right). \end{aligned}$$

En este caso, podemos observar que

$$P(T_h f) = T_h(Pf).$$

Pero esto sucede porque el símbolo de $-\Delta$ no tiene una dependencia de la variable x .

Observación 2.0.24. Notemos que el operador T_h está bien definido, ya que en $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = \{x + \mathbb{Z}^n : x \in \mathbb{R}^n\}$ cada punto x está representado por una clase de equivalencia en $\mathbb{R}^n$, lo que implica que $x + h$ también es un representante de alguna clase en $\mathbb{T}^n$.

Definición 2.0.25. Un *multiplicador de Fourier* es un operador F tal que, para toda función f suave, se tiene

$$\widehat{Ff}(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi),$$

donde $m(\xi)$ es una función (el símbolo del operador) definida sobre el dominio frecuencial $\xi \in \mathbb{Z}^n$ o en el dual de un grupo compacto.

Estos operadores pueden verse como transformaciones lineales que actúan en el dominio de Fourier, y son tratados de forma explícita como casos especiales de operadores pseudodiferenciales en [7] capítulo 4.

De lo anterior podemos deducir que si F es un multiplicador de Fourier entonces F 'conmuta' con un operador de traslación, esto será condensado en el siguiente corolario.

Corolario 2.0.26. Sea F un multiplicador de Fourier, T un operador de traslación y $a(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ una función. Entonces

$$F(Ta) = T(Fa).$$

Demostración. Como F es un multiplicador de Fourier entonces existe $m : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\widehat{Fa}(\xi) = m(\xi) \widehat{a}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Como T es una traslación, entonces

$$(Ta)(x) = a(x + h),$$

luego, su transformada de Fourier satisface

$$\widehat{Ta}(\xi) = e^{2\pi i h \cdot \xi} \widehat{a}(\xi).$$

Dado que F es un multiplicador de Fourier, entonces

$$\begin{aligned} F(Ta)(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} m(\xi) \widehat{Ta}(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} m(\xi) e^{2\pi i h \cdot \xi} \widehat{a}(\xi). \end{aligned}$$

Reordenando los factores,

$$\begin{aligned} F(Ta)(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i (x+h) \cdot \xi} m(\xi) \widehat{a}(\xi) \\ &= T(Fa)(x). \end{aligned}$$

□

Ahora veremos un ejemplo de cuantización en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{T}^n$ con el fin de comparar un símbolo toroidal con su versión en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.0.27. En el espacio euclidiano, la cuantización de $p(\xi) = 2^\nu \pi^\nu |\xi|^\nu$ con $\nu \in \mathbb{R}^+$, da el operador pseudodiferencial

$$\text{Op}(p)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} (2^\nu \pi^\nu |\xi|^\nu) \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Este operador es la potencia fraccionaria del laplaciano, es decir,

$$\text{Op}(p) = (-\Delta)^{\nu/2}.$$

En el toro $\mathbb{T}^n$, la variable dual ξ ya no es continua, sino discreta, $\xi \in \mathbb{Z}^n$. La cuantización del mismo símbolo $p(\xi) = 2^\nu \pi^\nu |\xi|^\nu$ está dada por

$$\text{Op}_{\mathbb{T}^n}(p)f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} (2^\nu \pi^\nu |\xi|^\nu) \hat{f}(\xi).$$

Tal operador es la versión discreta de $(-\Delta)^{\nu/2}$.

Gracias a la estructura del Toro, podemos notar algunas propiedades

Ejemplo 2.0.28. Consideremos el operador diferencial $-\Delta + V(x)$ con $V(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Sea $f(x)$ una función periódica, entonces

$$\begin{aligned} (-\Delta + V(x))f &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \left(|\xi|^2 + V(x) \right) \hat{f}(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \left(e^{i2\pi x \cdot \xi} |\xi|^2 \hat{f}(\xi) + e^{i2\pi x \cdot \xi} V(x) \hat{f}(\xi) \right) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} |\xi|^2 \hat{f}(\xi) + \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} V(x) \hat{f}(\xi) \\ &= -\Delta f + V(x)f. \end{aligned}$$

Donde podemos ver una especie de propiedad distributiva.

Observación 2.0.29. En el Ejemplo 2.0.28 obviamos la constante $4\pi^2$ del símbolo del laplaciano para más simplicidad en la escritura.

En el siguiente ejemplo vamos a ver qué le hace un operador pseudodiferencial con un símbolo $\sigma(x, \xi)$ que depende de x y ξ a la función $\cos(2\pi x)$ en $\mathbb{T}^1$. Esto con el fin de mostrar la dependencia de la variable x ya que en los anteriores ejemplos $\sigma(x, \xi)$ dependía solo de ξ , digamos $\sigma(x, \xi) = \sigma(\xi)$.

Ejemplo 2.0.30. Consideremos la función $f(x) = \cos(2\pi x)$ en $\mathbb{T}^1$. Su serie de Fourier está dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \\ f(x) &= \frac{e^{2\pi i x} + e^{-2\pi i x}}{2} = \cos(2\pi x) \\ &= \frac{1}{2} e^{2\pi i x \cdot 1} + \frac{1}{2} e^{2\pi i x \cdot (-1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes de Fourier $\hat{f}(\xi)$ son:

$$\hat{f}(1) = \frac{1}{2}, \quad \hat{f}(-1) = \frac{1}{2}, \quad \hat{f}(\xi) = 0 \text{ si } \xi \neq \pm 1.$$

Sea

$$\sigma(x, \xi) = (1 + \sin(2\pi x)) \sqrt{1 + \xi^2},$$

este símbolo depende de $x \in \mathbb{T}^1$ y de $\xi \in \mathbb{Z}$.

El operador pseudodiferencial asociado es

$$\text{Op}(\sigma)f(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i x \xi} \sigma(x, \xi) \hat{f}(\xi).$$

Como vimos, $\hat{f}(\xi) \neq 0$ para $\xi = \pm 1$. Así que la suma se reduce a

$$\text{Op}(\sigma)f(x) = \frac{1}{2}e^{2\pi i x} \sigma(x, 1) + \frac{1}{2}e^{-2\pi i x} \sigma(x, -1).$$

Ahora evaluemos

$$\sigma(x, 1) = (1 + \sin(2\pi x)) \sqrt{1 + 1^2} = (1 + \sin(2\pi x)) \sqrt{2}$$

$$\sigma(x, -1) = (1 + \sin(2\pi x)) \sqrt{1 + (-1)^2} = (1 + \sin(2\pi x)) \sqrt{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{Op}(\sigma)f(x) &= \frac{1}{2}e^{2\pi i x} \left(\sqrt{2}(1 + \sin(2\pi x)) \right) + \frac{1}{2}e^{-2\pi i x} \left(\sqrt{2}(1 + \sin(2\pi x)) \right) \\ &= \sqrt{2}(1 + \sin(2\pi x)) \cdot \frac{1}{2} \left(e^{2\pi i x} + e^{-2\pi i x} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sin(2\pi x)) \cdot \left(e^{2\pi i x} + e^{-2\pi i x} \right) \\ &= \sqrt{2}(1 + \sin(2\pi x)) \cdot \cos(2\pi x). \end{aligned}$$

Este ejemplo ilustra de forma explícita cómo la dependencia del símbolo en la variable espacial x afecta el comportamiento del operador pseudodiferencial sobre funciones periódicas. A diferencia de los operadores clásicos definidos por símbolos independientes de x , aquí se observa que el operador ya no preserva la forma pura de la función base (como el coseno), sino que modula su amplitud por un factor también periódico.

En este caso, el operador $\text{Op}(\sigma)$, con

$$\sigma(x, \xi) = (1 + \sin(2\pi x)) \sqrt{1 + \xi^2},$$

transforma la función $f(x) = \cos(2\pi x)$ en

$$\text{Op}(\sigma)f(x) = \sqrt{2}(1 + \sin(2\pi x)) \cos(2\pi x),$$

mostrando así cómo la *estructura del símbolo se refleja directamente en el resultado*: la parte dependiente de ξ da lugar a un efecto diferencial (tipo Laplaciano fraccionario).

Capítulo 3

Aplicaciones

El cálculo psuedodiferencial periódico ha sido estudiado ampliamente en los últimos años, con los trabajos de M.Ruzhansky en [7], [19]. Cuenta con muchas aplicaciones en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, además es de suprema utilidad en la teoría de operadores Neuronales [20]. Otra de las aplicaciones son los operadores pseudodiferenciales *elípticos* en $\mathbb{T}^n$. Este capítulo será dedicado al estudio de ecuaciones elípticas junto con propiedades de regularidad en el entorno toroidal.

Un problema central en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales es determinar cómo resolver la ecuación

$$Lu = f$$

para un operador diferencial parcial dado L y una función conocida f . Es decir, queremos encontrar un operador L^{-1} tal que

$$L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = I,$$

siempre que estas composiciones estén bien definidas. En tal caso, la función $u = L^{-1}f$ representará una solución a la ecuación $Lu = f$.

Si el operador L tiene coeficientes variables, en muchos casos es complicado, si no imposible, hallar una expresión explícita para su inversa L^{-1} (cuando esta existe). Sin embargo, en numerosos problemas de la teoría de las EDPs, el interés no radica en obtener una expresión explícita de L^{-1} , sino en comprender ciertas propiedades esenciales de la solución u a la ecuación $Lu = f$.

Una de las propiedades más relevantes de la solución u es el comportamiento de sus singularidades. La cuestión que surge es si es posible determinar las singularidades de u a partir de las singularidades de f , donde $Lu = f$. En este contexto, no es estrictamente necesario encontrar una solución exacta de la ecuación $Lu = f$, sino que en muchas aplicaciones basta con describirla dentro de una clase de funciones más regulares.

En otras palabras, en lugar de buscar la inversa L^{-1} , nos interesa hallar un operador P tal que

$$u = Pf$$

sea una solución de $Lu = f$ en el sentido de funciones suaves. Esto significa que $(PL - I)f$ y $(LP - I)f$ son suaves para toda función f de cierta clase.

Dado que los operadores en $\psi^{-\infty} = \text{Op}(S_{1,0}^{-\infty}) = \text{Op}(\bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{1,0}^m)$ cumplen esta propiedad, definimos lo siguiente:

Definición 3.0.1. Se dice que un operador P es una *parametriz derecha* de L si satisface

$$LP - I \in \psi^{-\infty}.$$

Análogamente, un operador S es una *parametriz izquierda* de L si se cumple

$$SL - I \in \psi^{-\infty}.$$

Las parametrices izquierda y derecha están estrechamente vinculadas. En efecto, por definición, si

$$LP - I = R_1, \quad SL - I = R_2$$

con $R_1, R_2 \in \psi^{-\infty}$, se deduce que

$$S = S(LP - R_2) = (SL)P - SR_2 = P + R_2P - SR_1.$$

3.0.1. Ecuaciones Elípticas

Dado $p(x, \xi) \in \text{Op } S_{\rho, \delta}^m$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, diremos que $P = p(x, D)$ es un operador pseudodiferencial *elíptico* si existen $C, K \in (0, \infty)$ tales que

$$|p(x, \xi)^{-1}| \leq C \langle \xi \rangle^{-m} \quad \text{para } |\xi| \geq K. \quad (3.1)$$

En tal caso, si tomamos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $\varphi(\xi) = 1$ para $|\xi| \geq 2K$, 0 para $|\xi| \leq K$, se sigue que

$$q(x, \xi) = \varphi(\xi)p(x, \xi)^{-1} \in S_{\rho, \delta}^{-m} \quad (3.2)$$

Ahora usaremos los resultados del curso de cálculo pseudodiferencial para analizar lo siguiente:

Si $Q = q(x, D) \in \text{Op } S_{\rho, \delta}^{-m}$ (Q es el operador asociado al símbolo $q(x, \xi)$), entonces

$$PQ = I - R_1, \quad QP = I - S_1 \quad (3.3)$$

con $R_1, S_1 \in S_{\rho, \delta}^{-m}$.

Podemos tomar

$$E_r \sim \mathcal{Q} \left(\sum_{j \geq 0} R_1^j \right), \quad E_\ell \sim \left(\sum_{j \geq 0} S_1^j \right) Q \in \Psi_{\rho, \delta}^{-m}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n) \quad (3.4)$$

y obtener

$$PE_r = I - R, \quad E_\ell P = I - S, \quad R, S \in \Psi_{\rho, \delta}^{-\infty}. \quad (3.5)$$

La identidad $E_\ell(PE_r) = (E_\ell P)E_r$ implica que $E_\ell - E_r \in \text{Op } S_{1,0}^{-\infty}$, así que podemos fijar $E = E_\ell$ y obtener

$$PE = I - R, \quad EP = I - S, \quad R, S \in \Psi_{\rho,\delta}^{-\infty} = \text{Op}(S_{\rho,\delta}^{-\infty}). \quad (3.6)$$

E_r y E_ℓ en (3.4) son la parametriz derecha y parametriz izquierda respectivamente. El argumento que se acaba de dar muestra que si P tiene parametriz derecha e izquierda (es decir, si P es elíptico), entonces estas coinciden esencialmente, produciendo E como en (3.5), llamada parametriz (bilateral) de P .

Dada tal parametriz, se deducen varios resultados de regularidad global. Por ejemplo, suponga que $u \in H^{\sigma,2}(\mathbb{T}^n)$ para algún $\sigma \in \mathbb{R}$, y

$$Pu = f \quad (3.7)$$

Aplicando E a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} E Pu &= E f \Rightarrow (I - S)u = E f \\ &\Rightarrow u = E f + S u \in H^k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ahora $u \in H^{\sigma,2}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow S u \in H^{k,2}(\mathbb{T}^n), \forall k$, y $f \in H^{s,2}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow E f \in H^{s+m,2}(\mathbb{T}^n)$.

Por lo tanto,

$$f \in H^{s,2}(\mathbb{T}^n) \Rightarrow u \in H^{s+m,2}(\mathbb{T}^n). \quad (3.9)$$

Con el fin de mostrar ejemplos de ecuaciones elípticas daremos una definición equivalente de operador elíptico tomada de [21].

Definición 3.0.2. Sea $m \in \mathbb{R}$ y sea $\sigma \in S^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n) = S_{1,0}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Diremos que el correspondiente operador pseudodiferencial periódico T_σ es *elíptico de orden m* , si σ satisface

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n : |\xi| \geq n_0 \implies |\sigma(x, \xi)| \geq C_0 \langle \xi \rangle^m$$

para algunas constantes $n_0, C_0 > 0$.

También diremos que $\sigma(x, D)$ es un *operador fuertemente elíptico* si σ satisface

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n : |\xi| \geq n_0 \implies \text{Re } \sigma(x, \xi) \geq C_0 \langle \xi \rangle^m.$$

Ejemplo 3.0.3. Veamos que $-\Delta$ es un operador elíptico de orden 2.

$$-\Delta = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
-\Delta f(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi)(-\Delta)e_\xi(x) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi)(2\pi|\xi|)^2 e_\xi(x).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sigma_{-\Delta}(x, \xi) &= 4\pi^2|\xi|^2 \\
&\geq C(1 + |\xi|)^2 \\
&= C(1 + 2|\xi| + |\xi|^2).
\end{aligned}$$

De este modo, $-\Delta$ es un operador elíptico de orden 2.

Ahora miremos un caso más general propuesto en [21].

Teorema 3.0.4. *Sea ν un número real positivo. Si $Q \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Entonces $(-\Delta)^{\nu/2} + Q(x)$ es un operador fuertemente elíptico, y consecuentemente un operador de Fredholm de $H^\nu(\mathbb{T}^n)$ en $H^{s-\nu}(\mathbb{T}^n)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Escribimos

$$T = (-\Delta)^{\nu/2} + Q(x).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Te_\xi(x) &= ((-\Delta)^{\nu/2} + Q(x))e_\xi(x) \\
&= (-\Delta)^{\nu/2}e_\xi(x) + Q(x)e_\xi(x) \\
&= (2\pi|\xi|)^\nu e_\xi(x) + Q(x)e_\xi(x) \\
&= ((2\pi|\xi|)^\nu + Q(x))e_\xi(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sigma_T(x, \xi) = 2^\nu \pi^\nu |\xi|^\nu + Q(x).$$

Como Q es continua, deducimos que $\operatorname{Re} Q$ es también continua sobre el compacto $\mathbb{T}^n$, luego $\operatorname{Re} Q$ es acotada. Definimos

$$C_1 = \min_{x \in \mathbb{T}^n} \operatorname{Re} Q(x)$$

y observemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \sigma_T(x, \xi) &= 2^\nu \pi^\nu |\xi|^\nu + \operatorname{Re} Q(x) \\
&\geq 2^\nu \pi^\nu |\xi|^\nu + C_1 \\
&\geq C(|\xi| + 1)^\nu
\end{aligned}$$

para $|\xi|$ suficientemente grande. Por lo tanto, T es un operador fuertemente elíptico, y por tanto elíptico. Además, si usamos el Teorema 4.9.17 de [7], el cual afirma que elipticidad implica Fredholm, acabamos la prueba. $\square$

Veamos un ejemplo concreto:

Ejemplo 3.0.5.

Sea $P = (-\Delta)^{\nu/2}$ un operador pseudodiferencial del laplaciano y $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ una función. Queremos probar la siguiente propiedad:

$$\widehat{Pf}(\xi) = (2\pi|\xi|)^\nu \hat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(Pf)(\xi) = (2\pi|\xi|)^\nu \hat{f}(\xi).$$

Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, podemos escribirla en su serie de Fourier como

$$f(x) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} \hat{f}(\eta).$$

Aplicando el operador $(-\Delta)^{\nu/2}$, cuyo símbolo está dado por $\sigma(\eta) = (2\pi|\eta|)^\nu$, obtenemos que

$$(-\Delta)^{\nu/2} f(x) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} (2\pi|\eta|)^\nu \hat{f}(\eta) e^{2\pi i x \cdot \eta}. \quad (3.10)$$

Ahora, usando la transformada de Fourier sobre (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(Pf)(\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} (2\pi|\eta|)^\nu \hat{f}(\eta) e^{2\pi i x \cdot \eta} \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} (2\pi|\eta|)^\nu \hat{f}(\eta) \int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i x \cdot (\eta - \xi)} dx. \end{aligned}$$

La integral

$$\int_{\mathbb{T}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = 0 \quad \text{si } \eta \neq \xi$$

y 1 si $\eta = \xi$, usando la ortogonalidad de las bases de Fourier.

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(Pf)(\xi) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} (2\pi|\eta|)^\nu \hat{f}(\eta) \delta_{\eta, \xi} = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} (2\pi|\xi|)^\nu \hat{f}(\xi) \delta_{\eta, \xi}.$$

Cuando $\eta \neq \xi$, toda la suma colapsa, así que nos queda solo el término $\eta = \xi$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(Pf)(\xi) = (2\pi|\xi|)^\nu \hat{f}(\xi).$$

Bibliography

- [1] Loukas Grafakos et al. *Classical fourier analysis*. Vol. 2. Springer, 2008.
- [2] David Steven Dummit and Richard M Foote. *Abstract algebra*. Vol. 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [3] James Munkres. "Topology James Munkres Second Edition". In: ().
- [4] Carl B Boyer and Uta C Merzbach. *História da matemática*. Editora Blucher, 2019.
- [5] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*. Vol. 1. Princeton University Press, 2011.
- [6] Eric W Weisstein. "Hermite polynomial". In: <https://mathworld.wolfram.com/> (2002).
- [7] Michael Ruzhansky and Ville Turunen. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics*. Vol. 2. Springer Science & Business Media, 2009.
- [8] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators III: Pseudo-differential operators*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [9] Mikhail Aleksandrovich Shubin. "Pseudodifferential operators and spectral theory". In: (2001).
- [10] EM Stein. "Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals". In: *Princeton Mathematical Series* 43 (1993).
- [11] Man-Wah Wong. *Introduction to pseudo-differential Operators, An*. Vol. 6. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [12] Duván Cardona. "Estimativos L^2 para una clase de operadores pseudodiferenciales definidos en el toro". In: *Revista Integración, temas de matemáticas* 31.2 (2013), pp. 147–152.
- [13] Duván Cardona Sánchez. "Invertibilidad de operadores pseudo-diferenciales definidos en $\mathbb{Z}^n$ ". In: *Lecturas matemáticas* 34.2 (2013), pp. 179–186.
- [14] Gerd Grubb. *Distributions and operators*. Vol. 252. Springer Science & Business Media, 2008.
- [15] Shahla Molahajloo. "Pseudo-differential operators on ". In: *Pseudo-Differential Operators: Complex Analysis and Partial Differential Equations: International Workshop, York University, Canada, August 4–8, 2008*. Springer. 2010, pp. 213–221.
- [16] Duván Cardona, Julio Delgado, and Michael Ruzhansky. "Well-posedness for a class of pseudo-differential hyperbolic equations on the torus". In: *Aequationes mathematicae* 98.4 (2024), pp. 1019–1038.

- [17] Michael Ruzhansky and Ville Turunen. “Quantization of pseudo-differential operators on the torus”. In: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 16.6 (2010), pp. 943–982.
- [18] Julio Delgado. “L p-bounds for pseudo-differential operators on the torus”. In: *Pseudo-differential operators, generalized functions and asymptotics*. Springer, 2013, pp. 103–116.
- [19] Linda NA Botchway, Marianna Chatzakou, and Michael Ruzhansky. “Semi-classical Pseudo-differential Operators on $\mathbb{Z}^n$ and Applications”. In: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 30.4 (2024), p. 41.
- [20] Emilia Magnani et al. “Approximate Bayesian neural operators: Uncertainty quantification for parametric PDEs”. In: *arXiv preprint arXiv:2208.01565* (2022).
- [21] Julio Delgado. “A Poincaré determinant on the torus”. In: *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications* 13.3 (2022), p. 29.