

**Aproximación Histórica a los Conceptos de Infinito Matemático, Físico y
Metafísico**

Autora:

Laila Alejandra Cabal Vega

1629530-3250

Licenciatura en Filosofía, Departamento de Filosofía, Facultad de Humanidades,
Universidad del Valle, sede Cali

Director:

Germán Guerrero Pino, Doctor en Filosofía

2023

Tabla de contenido

Agradecimientos.	3
Resumen.	4
Introducción.	5
Cap. 1: Un acercamiento a la diversidad del concepto de infinito.	7
1.1 El concepto de infinito.	12
1.2 Nociones actuales del infinito.	13
Cap. 2: Los conceptos de infinito físico y metafísico.	16
2.1. Zenón, Aristóteles y Lucrecio.	16
2.2 Neoplatonismo y reintroducción de Aristóteles (escolástica).	28
2.3 Renacimiento.	30
2.4 El cálculo, los indivisibles y sus avances en la actualidad.	35
Cap. 3: Cantor y la noción de infinito actual.	40
3.1 Introducción: Concepciones del infinito actual.	40
3.2 Axiomatización de los conjuntos numéricos y la hipótesis de continuo.	43
3.3 Los conceptos de álef, de ordinales y conclusión.	51
Conclusiones finales.	59
Referencias.	58

Agradecimientos

Agradezco a mis padres que me apoyaron en todo este proceso, que me dieron ánimos para seguir y culminar a cabalidad. A mi director de monografía por embarcarse en esta investigación sobre el concepto de infinito. A mis amigos y pareja que compartieron incontables momentos conmigo a lo largo de estos años. A la Universidad del Valle que me dio la oportunidad de estudiar una carrera, de conocer personas maravillosas que me permitieron crecer y formarme como persona, lugar donde aprendí, reí y lloré. Por último Infinitas gracias al universo.

Resumen (u Objetivos)

Primero el documento busca contextualizar al lector sobre algunas de las definiciones del concepto de infinito en la filosofía occidental. Segundo se presentan las principales teorías de diversos pensadores, evidenciando cómo esos aportes modificaron la manera de entender e interactuar con el concepto de infinito. Los principales conceptos que se desarrollan, que concuerdan con los presentados en el artículo de Rucker (2022) publicado en la Enciclopedia Británica, son el infinito visto desde las disciplinas física, metafísica y matemática. Tercero en el texto se evidencia el desarrollo o cambio del concepto de infinito, partiendo desde las ideas de los pensadores griegos hasta los planteamientos del matemático Cantor, centrándose en cómo se percibe desde esas posturas o disciplinas el concepto de infinito hasta la actualidad.

Abstract (or Objectives)

First, the document seeks to contextualize the reader about some of the definitions of the concept of infinity in Western philosophy. Second, the main theories of various thinkers are presented, evidencing how these contributions modified the way of understanding and interacting with the concept of infinity. The main concepts that are developed, which agree with those presented in Rucker's article (2022) published in the British Encyclopedia, are the infinite seen from the physical, metaphysical and mathematical disciplines. 3) Third, the text shows the development or change of the concept of infinity, starting from the ideas of the Greek thinkers to the approaches of the mathematician Cantor, focusing on how the concept of infinity is perceived from those positions or disciplines up to the present.

Palabras clave / Keywords: concepto de infinito matemático, concepto de infinito físico, concepto de infinito metafísico. /concepts of mathematical infinity, physical infinity and methaphysical infinity.

Introducción

El objetivo general de este trabajo es ampliar el conocimiento de la comunidad educativa y académica en general sobre el concepto de infinito, históricamente, centrándose en autores y pensadores específicos, los cuales evidencian el cambio conceptual que tuvo el concepto de infinito desde los antiguos griegos hasta la actualidad. Como referencia se usa la taxonomía presentada en el artículo de Rucker (2022), aunque los capítulos no se dividirán en esa clasificación, pero sí se trabajaran los tres conceptos que presenta, infinito matemático, físico y metafísico, buscando evidenciar los cambios conceptuales que tuvo el concepto de infinito en la filosofía occidental. Históricamente, el infinito también se pensó como infinito potencial e infinito actual, pero la noción aristotélica sobre la aceptación de la primera noción y la negación de la segunda noción fue la que perduró por más siglos, incluso con las modificaciones y separaciones que ocurrieron con el paso de los siglos respecto a las ideas Aristotélicas, la aceptación del infinito actual solo fue posible a finales del siglo XIX, desde los desarrollos matemáticos de G. Cantor (Piñeiro 2013)

La introducción del concepto de infinito actual, por parte de George Cantor, revolucionó el entendimiento del concepto de infinito en todo el mundo investigativo y general, porque su manera de entender el infinito desde la matemática fue lo que permitió el avance conceptual sobre el infinito.

El propósito de este trabajo consiste en ampliar los tres tipos de conceptos de infinito, con el fin de contextualizar a la comunidad filosófica de esta distinción, especialmente. Por ello, el documento se divide en los capítulos titulados: 1: *Un acercamiento a la diversidad del concepto de infinito*; 2: *Los conceptos de infinito físico y metafísico*, y 3: *Cantor y la noción de infinito actual*. Para ello se procederán de la siguiente forma. En el capítulo 1 se hace un recorrido histórico de las diversas perspectivas sobre el concepto de infinito desde los antiguos griegos hasta la

actualidad, exponiendo posturas de diversos pensadores, pero sin ampliar en profundidad en las características de cada teoría, con el fin de conocer, las principales modificaciones históricas que tuvo el concepto de infinito con el paso de los siglos. En el capítulo 2 se presenta históricamente el concepto de infinito relacionado con el espacio, el tiempo y la divinidad, esta reconstrucción histórica es occidental y se centra en ideas o nociones que se dividen en apartados. El último capítulo se centra en expresar las principales nociones de la teoría de conjuntos, la aceptación del infinito actual y cómo Cantor descubrió dichas nociones, lo cual significó un cambio en la teoría matemática y en la forma en que las personas comprenden el mundo. En los capítulos 2 y 3 se encontrarán fragmentos que hacen referencia al infinito metafísico, en el capítulo 2 se menciona el apartado titulado “Neoplatonismo y reintroducción de Aristóteles”, el concepto de infinito toma una connotación más teológica o religiosa que la planteada siglos antes por Aristóteles; de la postura sobre el universo aristotélica-religiosa se distancia Giordano Bruno (García, 2014), en esta época se introducen nociones más teológicas o religiosas al concepto de infinito – pero no se dejan de lado la idea del infinito potencial y no actual expresado por Aristóteles (en sus libros Física y Metafísica) –, algunas de las cuales son retomada por Cantor para complementar su teoría, como veremos en el último capítulo, como forma de salvaguardar su teoría de conjuntos y que él denomina infinito absoluto.

Cap. 1: Un acercamiento a la diversidad del concepto de infinito

En este capítulo se hará una breve introducción a las diversas nociones de infinito, buscando contextualizar el tema en lo que tiene que ver con los avances y desarrollos que existieron de este concepto, con vistas a ampliar el concepto históricamente y de manera específica en los siguientes capítulos, sobre algunos aspectos principales del concepto de infinito expuestos en este capítulo. Si bien es un tema amplio, no se busca determinar el recorrido histórico aquí presentado como único ni completo, sino ilustrar sobre la gran variedad de valoraciones y opiniones coyunturales que han existido sobre el infinito. Se inicia exponiendo la información existente sobre el infinito, dando unos ejemplos históricos importantes, luego se desarrolla el concepto de infinito y por último se expone la categoría actual de este concepto presente en la Enciclopedia Británica.

Del infinito se ha escrito y hablado a través de la historia, desde ámbitos matemáticos y físicos, desde lo metafísico o religioso y desde las artes. Si bien hay información sobre el concepto de infinito, el acercamiento y asimilación de las nociones se limitan a la comprensión humana, es decir, los avances e investigaciones que se han realizado sobre el infinito permiten, a su vez, profundizar y explicar sobre él. Como dice Tessier:

El infinito es una noción que todos utilizamos frecuentemente en nuestra vida cotidiana, pero sobre la que nunca nos paramos a pensar. Muchas veces, cuando hablamos del infinito, se nos viene a la mente una serie de conceptos relacionados con él. Así, imaginamos el infinito como un algo que no tiene fin o nos referimos con este concepto a aquellas cosas sobre las que, al no ver su fin, decimos que son algo infinito, pero no estamos seguros de que en verdad lo sean. (2015, p. 3)

Si bien existen diversas definiciones del infinito, no es posible determinar ampliamente qué es, sino que para explicar sobre él es necesario relacionarlo con un concepto, ejemplo u opinión. Comencemos, entonces, con el concepto de infinito en los antiguos griegos.

A la vez que los antiguos griegos se preguntaban por el origen y constitución del universo, surgió la cuestión sobre el final o el límite de las cosas y entes; las respuestas fueron amplias y desde diferentes ámbitos como el matemático y el metafísico, entre otros. Las diversas respuestas a esta pregunta dieron origen a la idea de infinito aristotélico, noción fundamental en la historia del concepto de infinito, como veremos más abajo.

Una de las primeras nociones cercanas a la idea de infinito fue la del *ápeiron* palabra griega que se definía sin límite, es decir, tiene forma infinita, materia infinita, etc. (López, C, 2014). Otra noción sobre el infinito fue la definición de límite usada por Arquímedes (287 a. C. – 212 a. C.) para calcular el perímetro del círculo en relación con polígonos a través del método de exhaustión. Este método, desarrollado por Arquímedes consistía en usar polígonos con un número x de lados circunscritos o inscritos sobre una circunferencia, usando cada vez polígonos con más lados; de este modo al conocer la medida de los lados es posible acercarse a la medida del círculo, por ello, entre más lados tenga el polígono más cerca se estará de conocer el perímetro del círculo. Aun así, un polígono tiene un número finito de lados, lo que imposibilita obtener el perímetro exacto del círculo, porque siempre va a quedar un espacio del círculo que no es cubierto por el polígono. (Domínguez, 2013)

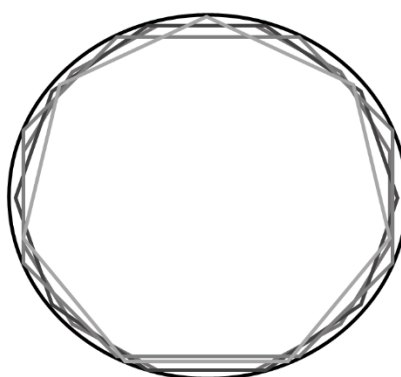
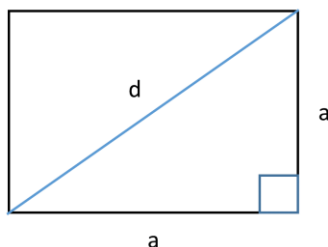


Figura 1. *Círculo y polígonos inscritos*

Nota: Círculo que no está completamente cubierto por los polígonos inscritos, en el método de exhaución se pueden usar dos tipos de polígonos inscritos y circunscritos, pero en la imagen solo está el primero.

Otro ejemplo de una noción del infinito en los antiguos griegos es la inconmensurabilidad de la hipotenusa con respecto a los catetos de un triángulo rectángulo; en algunos casos, la razón matemática de esa operación no daba resultado en los números naturales, enteros o racionales, sino que daba un número decimal no periódico cuyos decimales son infinitos (número irracional); este resultado no era aceptado por los griegos (pitagóricos), ya que las operaciones hasta la fecha realizadas daban resultados medibles en números naturales, enteros o racionales. Este descubrimiento se hizo presente en la escuela pitagórica, aproximadamente en el año 500¹ a. C. Para los pitagóricos el universo se representaba por los números, por lo tanto, todas las magnitudes debían ser medidas y eran conmensurables entre sí.

[...] es decir: *dadas dos magnitudes A y B, se dice que son conmensurables si existen números n y m tales que $nA=mB$* . Sin embargo, dentro de la misma escuela pitagórica se evidenció que no todas las magnitudes eran conmensurables, es decir que existían magnitudes A y B tales que *para todos números n y m, $nA \neq nB$* . Es decir, surge el gran problema de los pitagóricos: las magnitudes inconmensurables. Uno de los problemas donde se evidencia el problema de la inconmensurabilidad es el de la diagonal de un cuadrado con su lado; los pitagóricos demostraron que, en un cuadrado, su lado a era inconmensurable con la diagonal “d”. (García, 2014, p. 24²)



¹ Hípaso de Metaponto, integrante de la escuela pitagórica a quien se le atribuye el descubrimiento de la inconmensurabilidad de las magnitudes. Gustavo Bueno, La metafísica presocrática, Pentalfa, Oviedo, 1974, p. 120.

² Para ver la explicación completa remítase a García, p. 24-26.

Figura 2. Cuadrado con diagonal

Nota: Inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado.

El surgimiento de la inconmensurabilidad desbarataba la idea pitagórica del número como principio perfecto de todas las cosas, lo que generaba un gran conflicto para ellos, por lo que decidieron negarlo, al punto que organizaron toda su teoría para no tocar el tema y dejaron de lado las nociones aritméticas y algebraicas, para centrarse solamente en nociones geométricas (López, C, 2014).

Los integrantes de la escuela eleática (500 a. C. – 470 a. C., aproximadamente) dieron sus propias nociones sobre el concepto de infinito y/o límite. Estas nociones se dividían entre lo finito y lo infinito. La postura de Parménides (nacimiento entre el 530 y 515 a. C., muerte en 430 a. C.) rechaza el pluralismo y cualquier tipo de cambio, delimitando el ser a lo finito y delimitado (García, 2014). Meliso (470 a. C. – 430 a. C.) desarrolló una postura contraria a la de su maestro, él se centró en lo infinito. En tanto, Zenón (490 a. C. – 425 a. C.) desarrolló una postura sobre la imposibilidad del cambio, al igual que su maestro Parménides, aunque explicó su teoría por medio de paradojas (García, 2014).

Para Platón (427 a. C. – 347 a. C.) el infinito también es un principio que está tanto en el mundo sensible como en el mundo inteligible, diferenciándose un infinito pequeño de un infinito grande (Aristóteles, 1995). Aristóteles (384 a. C. – 322 a. C.) rompe con la idea del infinito como principio o sustancia (ideas de los pitagóricos y de Platón), buscando la verdad sobre dicha noción, en algunos apartados de los textos la Física y la Metafísica Aristóteles desarrolló la noción del infinito, planteando porque no era actual, pero si potencial. El primero es el infinito en su totalidad, completo. El segundo es el infinito en su totalidad, completo la continua suma de unidades que permite un crecimiento prolongado de las mismas ilimitadamente (1,2,3...). Aristóteles afirma la existencia del segundo, pero niega la existencia del primero (Ortiz, 2014).

Con el paso del tiempo, la noción de infinito tomó también una connotación teológica o religiosa, esto se debió a las nociones de los neoplatónicos y a la reintegración de la postura de Aristóteles (reincorporada por los árabes en el siglo VIII d. C.), la cual fue tomada por pensadores posteriores (siglo VIII d. C. en adelante) – que la relacionaron con un ente superior o deidad al cual se le atribuyó la cualidad de infinito –, entre los que destacan San Agustín y Tomas de Aquino. Estos le dieron al infinito connotaciones religiosas (siglo IV d. C. – siglo XVI d. C. aproximadamente). Al respecto Ortiz (1994) nos dice lo siguiente: “[...] en esta época, el debate sobre la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas más bien que matemáticas, al considerar al infinito como propiedad exclusiva de la majestad divina de Dios” (1994, p. 62).

Durante la época medieval y renacimiento muchos autores reflexionan sobre el infinito desde perspectivas platónicas, aristotélicas, pitagóricas y/o paradigmáticas, entre ellos San Agustín, Tomás de Aquino, Giordano Bruno, Galileo Galilei, entre otros.

La revolución científica del siglo XVII trajo innovaciones en la forma de comprender el mundo, ya no se hablaba de un mundo cerrado sino de un universo infinito, según propuesta de Alexandre Koyré³, quien consideraba que el modelo cosmológico de Aristóteles de las dos esferas, estaba limitado por la esfera exterior, o esfera de las estrellas fijas. John Wallis (1616-1703) introdujo el símbolo ∞ (lemniscata) para representar el infinito⁴ en el libro *Arithmetica infinitorum* (1656).

Durante este siglo los descubrimientos de diferentes autores respecto a problemáticas matemáticas y/o científicas, convergieron en los trabajos presentados por Newton y Leibniz. La cuestión de los números infinitamente pequeños, el límite, el infinito, entre otros problemas matemáticos de la época llevó al descubrimiento del cálculo, a finales del siglo XVII, por el matemático inglés Isaac Newton y el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz. Los avances

³ Koyré (1982), Del mundo cerrado al universo infinito. México, Siglo XXI Editores

⁴ Potencial.

de estos últimos modificaron la forma de entender la matemática y las ciencias en siglos posteriores.

Durante el siglo XIX muchos exponentes continuaron aceptando el infinito potencial y negando el infinito actual (Kant, Gauss, Cauchy), hasta que Bernard Bolzano (1781 – 1848) trató de fundamentar la noción de infinito actual en su obra póstuma *Paradojas del Infinito* publicada en 1851 (Ortiz, 1994).

Finalizando el siglo XIX, Cantor rechaza la distinción existente entre el infinito potencial y el infinito actual, postulando que aceptar el infinito potencial implica la existencia del infinito actual (Ortiz, 1994). Cantor también postuló la existencia de infinitos de diferente tamaño, por ejemplo, el conjunto infinito de los números naturales es más pequeño que el conjunto infinito de los números reales, fundando de esta manera la teoría de conjuntos.

En el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en 1900, Hilbert propuso una lista de problemas matemáticos a resolver en el transcurso del siglo XX, los cuales fueron solucionados en su mayoría en el inicio de siglo; entre estos problemas incluyó el problema de la hipótesis del continuo que surge en la formalización del infinito actual en la teoría de conjuntos. El desarrollo tecnológico contemporáneo ha dado paso a nuevos tópicos en el ámbito científico, los cuales continuaron llevando al infinito de la mano, por ejemplo, el uso de inteligencia artificial y la Internet.

1.1 El concepto de infinito

Si bien no se tiene una definición única y definitiva del concepto de infinito, a lo largo de la historia se ha tendido a pensar de dos maneras:

La primera lo comprende como un ente que existe, o que por lo menos puede ser pensado sin causar serios problemas. Es decir, se dice que el infinito existe y que lo podemos

entender⁵. [...] La segunda manera de entenderlo lo sitúa inalcanzable, incomprensible e ignoto⁶. (Domínguez, 2013, p. 2)

Esta división, tal y como la presenta Domínguez, fue temporal y se puede entender como la distinción entre infinito actual e infinito potencial, precisada por Aristóteles. El primero, como plantea Domínguez, es puntual, exacto y pertenece a la divinidad. La segunda manera hace referencia a una secuencia que nunca termina, que se podía representar con puntos suspensivos o con la expresión “sin fin”, esta denominación era usada para representar colecciones de objetos, operaciones o distancias inmensas. Existen otras maneras de ver y entender esta división, pero siempre se hizo referencia a la distinción entre infinito actual y potencial.

El infinito en un principio permeó varias disciplinas, entre ellas, la filosofía y la matemática, aunque posteriormente, se extendió a otras, estando presente en todas las áreas del conocimiento humano. Actualmente el infinito puede verse desde dos disciplinas, la matemática y la física –directa e indirectamente– obviamente hay otras, pero en las primeras es más evidente.

El análisis físico del problema de lo infinito contribuye mucho más al conocimiento concreto de la naturaleza que la simple manipulación matemática de ese concepto. En Matemáticas, lo infinito aparece bien como un número mayor que la cifra enunciada anteriormente, bien como un proceso interminable, que se repite constantemente y es homogéneo en todas sus etapas. (Meliujin, 1960, p.14)

Además, si bien existe la comprensión del infinito desde una disciplina metafísica, postulada por diversos autores, entre ellos Cantor, esta postura no es tan conocida y manejada.

1.2 Nociones actuales del infinito

De manera introductoria y con vistas a las precisiones que haremos al respecto en los próximos capítulos, a continuación, se presentan las nociones actuales del infinito. El infinito

⁵ Infinito actual.

⁶ Infinito potencial.

como concepto puede ser entendido desde diferentes disciplinas y perspectivas; el artículo que presenta las más actuales es el de la Enciclopedia Británica, donde se diferencian tres conceptos del infinito, los cuales son: el infinito matemático, físico y metafísico.

En la construcción del concepto matemático de infinito encontramos autores como los pitagóricos, Aristóteles, Galileo, Cantor y quienes trabajan en las ciencias de la computación, entre otros. A lo largo de la historia, el aporte de los anteriores y otros pensadores permitió una idea sobre el infinito como conjunto numérico, según la teoría de conjuntos y/o los números transfinitos según los avances de Cantor, etc., que se representan aritmética o gráficamente y que por lo general son manejados por especialistas en matemática, física o alguna ingeniería, pero que al ser una definición abstracta no logra ser comprendida por los alumnos de bachillerato—esa noción no se profundiza demasiado en la educación básica secundaria ni educación media—

En la actualidad, el concepto matemático de infinito hace referencia a nociones abstractas de números y conjuntos, mientras que el concepto de infinito físico hace referencia a nociones de distancia (espacio) y tiempo. Este concepto aparece a la par del concepto matemático, tuvo su inicio en los griegos antiguos, evidenciado en las paradojas de Zenón (García, 2014) o en los libros Física y Metafísica de Aristóteles. El concepto de infinito físico tuvo cambios en el transcurso de los siglos y con el descubrimiento y desarrollo de teorías. En la actualidad se puede hablar de infinito físico en la teoría de la relatividad general de Einstein, en la 5 teoría de cuerdas (sí, hay más de una), en nociones de cosmología, en la teoría M (membrana), en 11 dimensiones que busca solucionar los problemas entre la mecánica de Newton y la Teoría de la Relatividad General de Einstein, entre otras; existen diferentes teorías físicas que buscan explicar el universo (el espacio-tiempo) pero no hay una sola que predomine sobre las demás, todas aportan y amplían los saberes de las personas.

La otra disciplina actual que abarca el concepto de infinito, según el artículo de Rucker (2022), sería la disciplina metafísica, en relación con la explicación del infinito absoluto expresada

por Cantor, quien separó el infinito actual y el infinito absoluto, el primero se representaba con los conjuntos numéricos y al segundo le corresponde los atributos de Dios. Esta noción es planteada por Cantor para poder relacionar sus descubrimientos con sus creencias y nociones religiosas, los cuales surgieron durante la reincorporación de los textos aristotélicos por parte de los árabes (siglo VIII aproximadamente). La cual permeó la noción de infinito relacionándolo con la existencia divina. Existe una distinción mucho más amplia sobre el infinito en metafísica desde otros autores y desde otras épocas, pero espero que en el apartado se logre evidenciar el cambio que tuvo el concepto de infinito al relacionarse con la teología o la religión, con el fin de mostrar la importancia que tuvo esa noción o definición en un pensador como Cantor. Aun así, mi formación en el ámbito teológico-filosófico (religioso) no es muy amplia.

Cap. 2: Los conceptos de infinito físico y metafísico

“[...] la infinitud del mundo sigue siendo, ante todo, un problema filosófico” (S. Meliujin, 1960, p. 159).

El origen del infinito físico, al igual que el infinito matemático, se remite a los antiguos griegos, cuando los humanos empezaron a preguntarse (investigar) si el espacio y el tiempo eran finitos o infinitos. Si bien en los griegos antiguos no hacían una distinción entre infinito matemático y físico, en la actualidad se puede encontrar esta distinción. Para llegar a cómo se entiende el infinito físico es necesario hacer un recorrido histórico por algunas nociones -occidental- de este concepto. A continuación, se expondrá qué se entiende por infinito físico y se desarrollarán tres concepciones griegas sobre este infinito. Luego se desarrollará el concepto de infinito físico durante los siglos III al XII y en el renacimiento (en el curso de esta época el concepto de infinito tomó una connotación más metafísica que física). Por último, se expondrán las nociones sobre estos conceptos en la actualidad.

2.1. Zenón, Aristóteles y Lucrecio

El infinito físico se relaciona con el espacio y el tiempo, hay diversas opiniones y debates entre su finitud o infinitud. Los presocráticos dieron sus apreciaciones sobre el infinito, entre estas se encuentran los átomos de Demócrito, las paradojas de Zenón, el ápeiron⁷ de Anaximandro, el mundo finito⁸ de Aristóteles entre otras. Las tres nociones que se desarrollarán serán sobre Zenón, Aristóteles y Lucrecio.

Las paradojas de Zenón de Elea se centraban en el continuo, específicamente sobre el movimiento y la pluralidad. Proclo (412 d. C. – 485 d. C.) dice que fueron 40, las cuales se

⁷ El elemento infinito o indefinido del cual había surgido el universo.

⁸ S. Meliujin, 1960, p.162.

centraban en reafirmar la postura de Parménides (no existe el movimiento), pero por contingencias de la vida, en la actualidad solo se conocen nueve o diez, las cuales fueron usadas, refutadas o mencionadas en diversos textos por otros autores, por ejemplo: Aristóteles, Arquímedes, entre otros.

Estas paradojas que encontramos en la Física de Aristóteles son la paradoja de la dicotomía, la de Aquiles y la Tortuga, la de flecha, la del estadio, la del lugar, la del grano de mijo, la de densidad y la del tamaño finito. (Colaboradores de Wikipedia, 2013). Las cuales aportaron al desarrollo del concepto de infinito.

Las paradojas permitieron a Zenón plantear que existen dos concepciones sobre el espacio y el tiempo: la primera era que estos se dividen indefinidamente, la segunda era que estaban formados por intervalos indivisibles. Estas concepciones fueron explicadas por Zenón en la paradoja de la dicotomía, la de Aquiles y la Tortuga, la de la flecha y la del estadio, estas paradojas son sobre el movimiento y la continuidad. (López, C, 2014).

A continuación, se explicara la paradoja de la dicotomía, esta paradoja se puede traducir como cortar en dos, el ejemplo que nos presenta la paradoja, es un sujeto que para llegar de un punto B a un punto C, debe recorrer solo la mitad del recorrido y en cada nueva ocasión él recorrer solo la mitad de la distancia anterior, cada recorrido con un tiempo específico (finito). Esta reducción de espacio y el tiempo en dimensiones cada vez más pequeñas impiden a largo plazo que el sujeto llegue al punto C, porque el tiempo que transcurriría en realizar todo el recorrido debería ser infinito y, por ende, el sujeto nunca llegaría a su destino. Como no es posible que el tiempo sea infinito en un trayecto finito se genera la paradoja. Con lo anterior, Zenón quería mostrar que el movimiento no existe, pero en la actualidad esta paradoja puede ser entendida y solucionada matemáticamente. La paradoja de la dicotomía se puede representar como una recta con una sucesión de números (véase figura 3) en el cual el sucesor del primero es la mitad del antecesor ($1/2, 1/4, 1/8, \dots$) y así sucesivamente, el número que sigue será la mitad del anterior si bien esta sucesión es infinita, se ha logrado demostrar que la suma de infinitos

valores finitos da un resultado finito, en el caso de la anterior secuencia, la suma de todos sus valores da 1, esto se puede ver al representar las distancia recorridas por el sujeto en relación con las áreas de los cuadrados en el interior del cuadrado de razón 1x1 (véase figura 4).

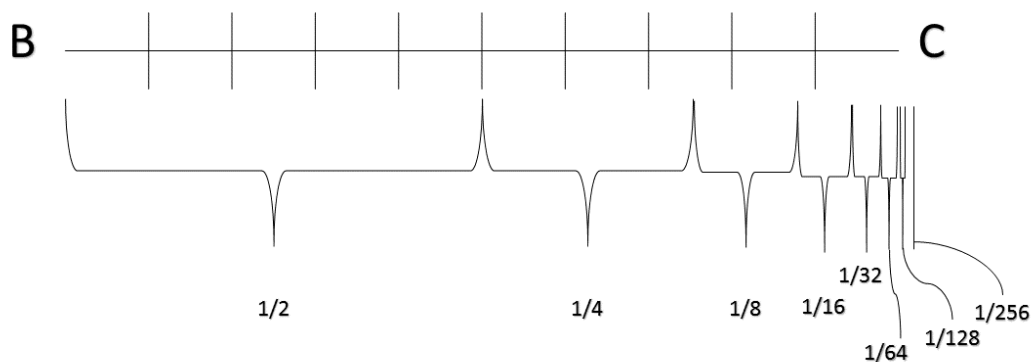


Figura 3. Representación de la paradoja de la dicotomía (Zenón)

Nota: En la representación de la paradoja de la dicotomía, la persona recorre una distancia cada vez más pequeña que la anterior, lo que implica que sus pasos serán más cortos y no llegará al punto C. Si bien es clara la acción del sujeto en la paradoja, en la gráfica no es posible representar segmentos más pequeños que la última línea de la figura 3, pero es posible hacerlo mentalmente (si se quiere) dividiendo el anterior segmento o paso por la mitad y así consecutivamente.

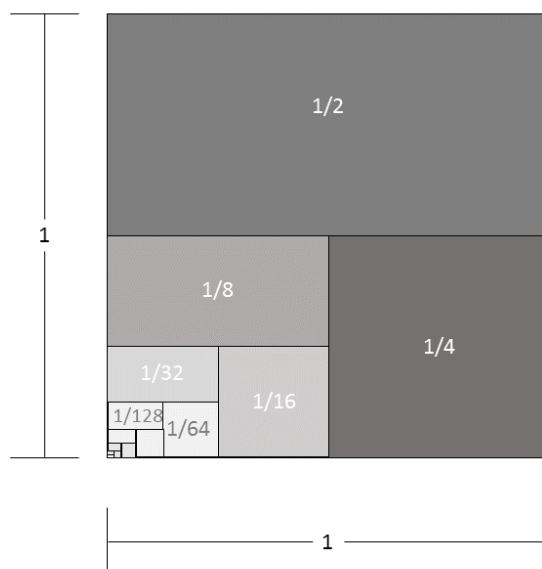


Figura 4. Representación de la paradoja de la dicotomía matemáticamente en el área de un cuadrado

Nota: En el área del cuadrado se puede representar los mismos segmentos de distancia que recorre el sujeto en la paradoja de la dicotomía, de la siguiente forma, hay un cuadrado de área 1×1 , y es posible representar un cuadrado que representa la mitad de esa área $1/2$; esta operación de dividir y representar un cuadrado de la mitad de área que el anterior se puede repetir infinitamente. En la figura 4 podemos observar que hay cuadrados con la misma distancia que en la figura, pero que en este caso todos ingresan dentro del área del cuadrado grande (1×1). (TED-Ed Español, 2022)

Con la paradoja de la dicotomía se evidencia uno de los temas que inquietó a la comunidad científica y académica por años, de esta paradoja se desprenden las otras tres

paradojas sobre el movimiento. Otra paradoja muy conocida es la paradoja de Aquiles y la Tortuga.

La carrera de Aquiles y la Tortuga ocurre en un espacio matemático que puede ampliarse hacia lo infinitamente grande (la recta es infinita) o lo infinitamente pequeño (los pasos dados por cada uno son cada vez más pequeños), por lo que la carrera no finaliza, sino que se podría amplía continuamente, en tal caso Aquiles no logrará alcanzar a la Tortuga, porque cada vez, que llega al sitio en el que se encontraba la Tortuga, está ya se habrá movido un espacio más, es decir, al Aquiles intentar llegar al sitio que anteriormente ocupaba la Tortuga, estará compitiendo con el anterior movimiento de la Tortuga y no con el último, por lo que siempre estará un paso atrás. Esto se entiende de la siguiente forma: Aquiles y la Tortuga están en el punto 0, la ventaja de la Tortuga en t_1 , cuando Aquiles recorre t_1 , la Tortuga se encuentra en t_2 , cuando Aquiles llegue a t_2 , la Tortuga estará en t_3 , y así sucesivamente, la Tortuga siempre estará un paso más a delante de Aquiles, aunque ese paso sea infinitamente pequeño.

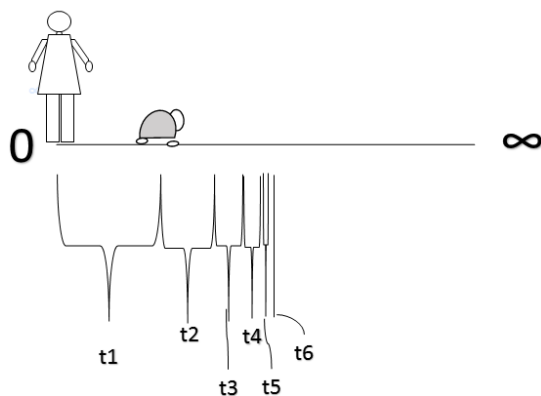


Figura 5. Representación de la paradoja de Aquiles y la Tortuga

Nota: En la imagen se la distancia recorrida por la Tortuga, es decir la ventaja que le da Aquiles t_1 , mientras este se encuentra en 0, para cuando Aquiles llegue a t_1 , la Tortuga

estará en t_2 y cuando Aquiles llegue a t_2 , la tortuga estará en t_3 y así sucesivamente, la Tortuga estará un paso infinitamente más pequeño delante de Aquiles. No es posible recrear todos los pasos infinitos en la imagen, por lo que solo se llega hasta la línea, como última representación, pero en la recta de 0 a ∞ aparecen infinitos puntos más pequeños (pasos) no visibles para el observador, pero que existen.

Así es como Aquiles, el más rápido de los hombres no podrá alcanzar nunca al más lento de los animales, la Tortuga, si se da a esta una ventaja inicial en la carrera. Pues, mientras Aquiles recorre el camino que la Tortuga llevaba por la mencionada ventaja inicial, la Tortuga habrá recorrido otra porción, aunque más pequeña. Cuando Aquiles haya llegado a recorrer esta última porción de camino, la Tortuga habrá avanzado otra porción más pequeña, y así la Tortuga llevará siempre la ventaja en espacios infinitamente pequeños, con lo cual, Aquiles no podrá alcanzarla nunca. (López, C, 2014, p. 280)

En la paradoja de Aquiles y la Tortuga, Zenón plantea que Aquiles nunca podrá alcanzar a la Tortuga, en primero porque esta nunca se detendrá y en segundo porque en cada paso dado por Aquiles, este recorre la distancia recorrida anteriormente por la Tortuga, pero no logra rebasar la ventaja inicial obtenida por esta, la cual estará un paso más adelante, por lo que la Tortuga se distanciará en cada vez más de Aquiles (López, C. 2014). La paradoja evidencia en un espacio matemático que Aquiles no logra alcanzar a la Tortuga y además con esta paradoja Zenón quiere mostrar que el movimiento no existe. Porque llega un momento en que la distancia que debe recorrer Aquiles es infinitamente pequeña que no podrá realizar el movimiento, por lo que Aquiles permanece inmóvil.

Para Zenón el movimiento no existe, porque Aquiles no puede repetir la acción infinitamente, ya que en algún momento Aquiles no podrá realizar la acción (avanzar la distancia recorrida por la Tortuga en un paso anterior) y dejará de moverse; además, el tiempo no puede ser tratado como una magnitud discreta, siendo continua.

Además, en la paradoja de Aquiles y la Tortuga, la carrera infinita en pasos infinitamente pequeños representa el infinito potencial, lo cual ocurre con la suma de los pasos dados por los

dos corredores sin detenerse. Asimismo, el primero nunca alcanzará a la segunda, porque ello representaría el infinito en acto que sería la suma de todos los infinitos pasos dados por los corredores en la carrera, lo cual no se podía concebir (en la época de los griegos antiguos) porque no había manera de llegar al último dígito de una sumatoria de números infinitamente pequeños, dado que era una tarea infinita, imposible de realizar (la suma) por seres finitos como lo son los humanos. Por lo tanto, solo se representaba el infinito potencial en la carrera como la división del tiempo y/o espacio recorrido de la Tortuga respecto a Aquiles, siendo la acción de estos últimos (la carrera) infinita (López, C, 2014).

Las paradojas de Zenón planteaban la idea de que el movimiento continuo no ocurre. Aristóteles analiza las paradojas de Zenón y diferencia el infinito por adición y por división, además, refuta a Zenón, evidenciando que no se puede correr un tiempo finito en infinitos puntos (García, 2014).

Aristóteles analiza y rebate las ideas de sus contemporáneos sobre el infinito, el movimiento, el lugar, entre otros conceptos; en los apartados 7 y 8 del libro III de la Física, Aristóteles se centra en debatir los tipos de infinito (potencial y actual), aceptando el primero y negando el segundo (García, 2014). Este tema se ampliará en los siguientes párrafos.

El concepto de infinito tuvo múltiples definiciones en la antigüedad. Una de ellas fue como principio o sustancia elemental, como pensaban Platón y los pitagóricos. Pero Aristóteles rompe esa idea al plantear lo siguiente:

[...] ¿cómo es posible que exista el Infinito mismo, si ni existen el Número mismo ni la Magnitud misma, de los que el infinito es de suyo una propiedad. La necesidad de que exista este infinito es aún menor que la del número o la magnitud en sí. Es también evidente que no es posible que lo infinito exista como un ser en acto o como una substancia y un principio. (Aristóteles, Física, Libro III, 204^a línea 17-20)

Para Aristóteles las realidades matemáticas no son anteriores a las cosas sensibles, sino solo respecto al enunciado y no viven separadas de las cosas, también existen las características

que se les atribuyen. Respecto al número o la unidad, Aristóteles dice que no es posible diferenciar al enunciarlos si son cantidad o cualidad, porque de los dos (número y/o unidad) se puede decir y no decir lo mismo (cantidad y/o cualidad) por ello intentar demostrar que se encuentran en el mundo y que pueden ser una idea externa fuera de mundo sensible es absurdo. Lo anterior, era una crítica al pensamiento platónico sobre las realidades matemáticas (Aristóteles, 1970).

Y sobre la idea de los pitagóricos, Aristóteles dice ellos no separan al número de la realidad, pero suponen que los cuerpos están compuestos por números, porque no hay una magnitud indivisible (muy pequeña) ni se le puede atribuir magnitud a las unidades (infinitamente grande), es decir, el número es finito o es infinito, pero no los dos, no es infinito porque debe determinarse si ese número infinito es par o impar y esto no se puede porque a ese número que consideremos infinito deberá seguirle otro y determinar si es par o impar y así sucesivamente. Y no puede ser finito porque eso delimita las cantidades que se pueden medir, porque de ser las cantidades finitas hay que decir porque hasta ese número y no hasta otro, por tanto, no se puede decir del número que no es infinito ni tampoco finito (Aristóteles, 1970).

Con lo anterior Aristóteles explica en metafísica porque el número no encaja con principio o sustancia en relación con las nociones platónicas y pitagóricas y porque una noción como el número no estaría fuera de la realidad sensible, por ende, el infinito que no tiene las cualidades del número no puede pretender ser más que este, entonces no puede ser principio o sustancia.

El infinito no puede ser recorrido ni limitado, no se encuentra separado, no es una magnitud ni una multitud; el estudio que realiza Aristóteles sobre el infinito se centra en que no es posible abarcarlo (recorrerlo), en que no es divisible, porque sus partes no pueden ser finitas ni infinitas. Del infinito se dice respecto a la magnitud, el movimiento y el tiempo, pero cada uno se explica o relaciona con él de forma diferente, pero se interrelacionan entre sí (Aristóteles, 1970).

El infinito en acto no es viable para Aristóteles porque: 1) Eso lo hace indivisible, pero ya se dijo que no podía ser una sustancia o principio, pero tampoco puede ser una magnitud ni una pluralidad, porque estas son divisibles. 2) No puede ser divisible porque sus partes serían a la vez infinitas y no es posible que un atributo del infinito sea infinito; porque si una de sus partes es infinita, entonces no debería ser divisible; entrando en una contradicción de si se puede dividir o no; por tanto, el infinito actual debe ser indivisible y carecer de partes.

Pero Aristóteles niega la existencia del infinito actual, porque infinito en acto hace referencia a algo completo, en esencia a algo a lo que se puede llegar a conocer, pero el infinito es incognoscible, por tanto, no puede hablar de él como un todo, como algo completo o determinado o finito, es decir, el infinito en acto sería algo acabado y del infinito no podemos decir que está completo, sino que es incognoscible y que puede ser recorrido en su totalidad.

Además, Aristóteles dice sobre el infinito que no es un cuerpo, estos son finitos; no es una magnitud, porque eso lo limitaría a un cuerpo y no hay un cuerpo infinito; no es un lugar, porque estos tienen una limitación y si se limita al infinito, dejaría de ser infinito y los lugares tienen una localización y no es posible decir el infinito está en tal lugar (arriba, abajo, izquierda o derecha); no debería poder dividirse en partes, porque eso implicaría que las partes fueran infinitas y una parte del infinito no puede ser igual de infinita que su totalidad; no es un atributo de algo, porque es en sí mismo, aunque no existe por sí mismo; aunque sea indivisible no es una sustancia, porque la esencia del infinito no puede ser, que sea infinito; tampoco es un número por separado, ya que los números están en una secuencia y son numerables, (Aristóteles, 1995).

Pero no es posible negar por completo el infinito porque genera contradicciones, por lo tanto, Aristóteles explica que del infinito solo se puede hablar por adicción o división, esto en referencia al infinito en potencia, pero no en acto (Aristóteles, 1995).

Aristóteles niega que sea posible llegar del infinito en potencia al infinito en acto, él explica que la denominación “de potencia” no se entiende como la posibilidad o cualidad que tiene un cuerpo u objeto para llegar a ser otra cosa -como el cobre puede llegar a ser la estatua- , sino

que se entiende la potencia como una suma o división de una acción constante, que no se detiene, y por lo cual está en potencia, pero que nunca llegará a ser, por tanto la noción de “potencial” en este apartado no se debe tomar al pie de la letra, en el sentido de conformar otra cosa a futuro, dado que del infinito potencial no se puede llegar al infinito actual. Solo puede referirse al infinito en un momento determinado según nuestra observación de su existencia, es decir, “el día es”, “la competición es”, “el infinito es”. Aunque esta definición no será fija, puesto que la noción de infinito varía (Aristóteles, 1995).

Para que el infinito se dé por división o adición, debe ser la misma fracción finita la que se adicione o se divida; pero en el caso de la sustracción, es más factible, dado que se reduce, en algún momento, a una fracción más pequeña (llegando a la cantidad mínima). Mientras que en la adición no la toma como una suma de partes infinitas, porque llevaría al infinito en acto, sino que solo sería viable si se tomar un fragmento (x) limitado y divisible, explicando que se realizaría una operación contraria a la división y se suma solo la cantidad dividida anteriormente, pero el mismo Aristóteles luego niega por completo esa posibilidad, negando por completo el infinito por adición, ya que para él esto implica el infinito en acto (Aristóteles, 1995). Por lo tanto, Aristóteles determina el infinito como potencial y divisible.

En realidad, el infinito es la materia de la compleción de una magnitud, y es potencialmente un todo, aunque no actualmente; y es divisible por reducción e inversamente por adición, siendo un todo y finito no en sí mismo, sino con respecto a otro; y en tanto que infinito no abarca, sino que es abarcado. Por eso en tanto que infinito es incognoscible, ya que la materia no tiene forma. Es, pues, evidente que hay que concebir al infinito más bien como una parte que como un todo, ya que la materia es una parte del todo, como el bronce en una estatua de bronce. (Aristóteles, *Física*, Libro III, 207^a línea 20-28)

Como se expresó anteriormente, Aristóteles en la *Física* presenta una distinción marcada entre infinito potencial e infinito actual. Hasta el momento (Libro III) se ha negado el infinito actual, aceptándose el infinito potencial y planteando de él una subdivisión anteriormente mencionada, infinito por división y/o por adición. En los párrafos anteriormente desarrollados, Aristóteles

niega el infinito por adición por dirigir al infinito actual, dejando la posibilidad del infinito potencial por división. En el libro VIII de la Física, principalmente en los apartados del 8 al 10, Aristóteles niega rotundamente el infinito por división. Si bien, los apartados de Aristóteles en el libro VIII son claros, también son amplios, por lo que quiero presentar este mismo punto desde una perspectiva más matemática, citando a Piñeiro.

[...] Tomemos, por ejemplo, un segmento de 10 cm de longitud. Si lo dividimos en 10 partes iguales, cada una de ellas medirá 1 cm. Si lo dividimos en 100 partes iguales, cada una medirá 0,1 cm. Si lo dividimos en 1000 partes iguales, cada una medirá 0,01 cm de longitud. Pero si lo dividiéramos en una cantidad infinita de partes iguales, cada una de ellas mediría 0 cm; es decir, el segmento estaría formado por partes de longitud exactamente cero. Pero ya vimos que esto último es imposible; por lo tanto, no se podría dividir un segmento en infinitas partes. (Piñeiro, 2013, p. 26)

Como acabamos de ver, Aristóteles en sus textos (Física y metafísica) al hablar sobre el infinito se centró en explicar porque era viable un tipo de infinito (potencial) y no otro (actual), desarrollando este pensamiento con su forma de pensar y entender el mundo. El infinito para Aristóteles no es una noción separada de las cosas, tampoco es una noción que puede explicar la realidad porque es incognoscible, pero si hay una parte de ella que se conoce y se puede hablar de ella, la cual es el infinito potencial. El pensamiento de Aristóteles fue tan importante en su momento como en los siglos futuros (cuando fue reincorporado por los árabes) porque sus nociones se tomaron como base para el desarrollo de sociedades, Además que sus saberes permeó muchas ramas de investigación científica y del conocimiento.

En los párrafos anteriores se puede evidenciar cómo Aristóteles en sus libros Física y metafísica no solo negó el infinito actual, sino que también negó el infinito por división y por adición, aceptando solamente el infinito potencial. Además, Aristóteles planteaba el espacio como finito, pero sin límite y el tiempo como cíclico, es decir que todo se repite en algún momento de la historia: los ciclos de los planetas e incluso los pensadores y escritores como Platón y

Homero, esta misma explicación las dan varias culturas para explicar el inicio del mundo (Mitología), (Bombal, 2010).

Tito Lucrecio Caro (99 a. C. – 55 a. C.), un pensador posterior a Aristóteles creía en la infinitud del espacio, se apoyaba en el argumento del pitagórico Arquitas (428 a. C. - 360 a. C., aproximadamente) quien planteaba que era posible extender la mano en el borde del universo encontrando así más espacio. Por ello, Lucrecio planteaba que, al llegar al extremo del universo, se podía llegar más lejos estirando la mano o lanzando un objeto, lo cual alejaba cada vez más los bordes, esto demostraba la amplitud de ese espacio (Meliujin,1960).

Meliujin (1960) planteó que el pensamiento sobre el espacio infinito no avanzó desde los griegos y que, aparte de Lucrecio, nadie planteó o avanzó sobre la infinitud del universo. La postura que predominó durante los siguientes siglos sobre el infinito potencial y actual fue la aristotélica.

Por qué las nociones sobre un universo infinito no se desarrolló desde los Griegos antiguos hasta el siglo XVI aproximadamente, lo explica Kuhn en el libro Revolución Copernicana y es lo siguiente: la idea del universo finito entre dos esferas: una fija -la Tierra- (sublunar) y otra en movimiento -los estrellas del cielo- alrededor de la primera (supralunar), las cuales comparten un mismo centro y con las mismas periferias, fue predominante en la Grecia antigua (siglo IV a. C.) y se estableció en el colectivo mental de muchos pensadores del momento y cada pensador teniendo como referencia el modelo del mundo esférico, le dio en él una explicación al movimiento de las estrellas, el transcurrir de los días y demás cambios estacionales u observados respecto al firmamento; muchas acciones cotidianas como la navegación eran compatibles con la idea del universo de las dos esferas, por ello, era fácil relacionar las circunstancias o actividades cotidianas con esa explicación astronómica. Y las nociones sobre el espacio infinito, el movimiento del planeta Tierra, entre otras, tenían explicaciones incongruentes que hicieron que fueran consideradas erróneas por siglos

Con la caída de Grecia en el siglo III a. C. por la conquista de Alejandro Magno y posteriormente la caída del Imperio Romano Occidental (siglo IV d. C. aproximadamente) los saberes desarrollados hasta el momento en esa época se perdieron en su mayoría, quedando solo fragmentos. Los pensamientos desarrollados en la época posterior, es decir, en los siguientes siglos, tuvo dos vertientes: 1) los textos que quedaron de Platón y 2) la reincorporación de textos aristotélicos por parte de los árabes en el siglo VIII aproximadamente. Lo cual permitió la apropiación y ampliación de saberes en la Europa occidental, y a su vez, la influencia o no (depende del siglo) de la teología o la religión en el saber de la época, lo cual generó un cambio en el conocimiento, que se hace evidente en el siglo XVI y XVII, provocando que se planteen otras ideas sobre las matemáticas, la astronomía y demás disciplinas del saber (Kuhn, 1996). Este tema se ampliará en el apartado 2.3.

2.2 Neoplatonismo y reintroducción de Aristóteles

Los pensadores neoplatónicos centraron sus investigaciones en aplicar las ideas de Aristóteles o Platón (principalmente textos platónicos), entre ellos se encuentra Plotino (205-270 d. C.), quien buscaba recuperar la dualidad platónica; el espacio toma una constitución diferente. Plotino vuelve un conjunto el mundo sensible y el mundo suprasensible, creando un conjunto superior llamado Uno (primera hipóstasis). En un conjunto está el mundo suprasensible y el mundo sensible, dividido como lo expresa Platón, y en un conjunto superior pone al Uno, este conjunto es inaccesible para los seres vivos. El Uno (lo divino: infinito e ilimitado) es único, singular, trascendente, autosustentable, es inaprensible, inexpresable y separado del ser. Para Plotino, el Uno se entiende mejor desde una perspectiva negativa, es decir, el Uno no es finito, no es limitado, etc. Además, el Uno no se entiende como una forma o una idea, como un número o cantidad, no es monoteísta (Cavallazzi, 2020), es diferente a las ideas pitagóricas y platónicas

de siglos anteriores. Plotino explica otras dos hipóstasis con el fin de explicar cómo del Uno emanan otras cosas del universo, las cuales dependen de él: “El Uno en cuanto principio es principio de todo, pero no es todo” (Plotino, Eneadas, 5,2,1).

Las otras dos hipóstasis de Plotino son el Nous y el Alma, el primero hace referencia a lo pensado, lo generado en un sentido formal y el segundo hace referencia a la esencia o sustancia material de las cosas (esto en un sentido vital y no religioso) -el cual tiene subdivisiones-. (Cavallazzi, 2020)

Con la llegada del cristianismo, el pensamiento filosófico neoplatónico tomó connotaciones más religiosas, como por ejemplo en San Agustín de Hipona (354 d. C. - 430 d. C.). Él se centra en el Génesis para explicar el origen del universo y en otros libros de las Sagradas Escrituras para explicar las demás circunstancias que han ocurrido en la Tierra (las edades de la Tierra se relacionan con los sucesos de las escrituras: expulsión del paraíso, diluvio universal, etc.), él puso a Dios como creador y no como arquitecto u organizador. Para San Agustín, el tiempo es lineal y no cíclico (como sí lo era para los griegos antiguos). Los escritos de San Agustín se centran en las nociones planteadas en las escrituras (Antiguo y Nuevo Testamento), es decir, que el enfoque de sus textos buscaba llegar a la verdad dada por Dios a través del Antiguo Testamento y las enseñanzas de Jesús a los apóstoles. (Cavallazzi, 2021)

Posterior a San Agustín, hubo muchos textos sobre religión, filosofía, teología y demás, que se relacionaban o planteaban atributos de Dios, entre otros temas que fueron de suma importancia en la época. Para el siglo VIII los árabes introdujeron escritos aristotélicos (desconocidos en la Europa occidental) e integraron mucha de su cultura y saberes a la Europa occidental, lo que permitió avances respecto a la investigación filosófica y teológica de la época.

En el siglo XIII, los Dominicos introdujeron los textos de Aristóteles a la fe católica, Uno de sus principales exponentes es Tomas de Aquino (1224-1274) quien divide las cualidades de los entes o las cosas en dos: esencia y existencia; la primera la relaciona con el infinito en potencia y la segunda con el infinito en acto. Una vez explicada esta separación, Aquino afirma

que solamente Dios es esencia y existencia a la vez, es decir, existe tanto en potencia como en acto. Además, acepta (hasta donde le conviene) la cadena evolutiva aristotélica, que tiene a Dios en la cima de la creación, también quita la idea de la supremacía del alma humana (noción platónica) limitando esta última al cuerpo. Durante esta época el infinito se entiende como algo eterno o pleno (García, 2014).

El concepto de infinito metafísico, que se ha expuesto en estas líneas, no logra englobar todos los avances y saberes que se desarrollaron durante esa época, pero permite comprender el cambio conceptual que tuvo el concepto de infinito durante esos siglos. Además, representa los inicios de nociones religiosas que perduran hoy día, obviamente ha habido cambios en la noción divina y religiosa con el paso de los siglos, y el motivo de que esto se halle en este documento es el peso dogmático que representa para las generaciones venideras, específicamente para George Cantor en el siglo XIX; las nociones de infinito metafísico introducidas aquí son un tema importante para comprender el concepto de infinito metafísico que desarrolló Cantor en la teoría de conjuntos, el cual se expone en la Enciclopedia Británica y se abordará en el siguiente capítulo.

2.3 Renacimiento

La idea del mundo dividido en dos esferas: una donde está la Tierra y otra en donde están las estrellas, el Sol y demás astros que se perciben con la visión, se planteó en la época de los griegos antiguos (aunque no fue la única idea sobre la forma u organización del mundo) y perduró hasta la época que denominamos renacimiento. La idea del mundo dividido en dos esferas se modificó con el paso de los años, tuvo como se plantea en el apartado anterior (2.2) influencia teológica o religiosa, por ende su conformación y explicación se relacionaban en los siglos posteriores al VIII d. C. con Dios, y por ello, la idea de un ser Divino con cualidades eternas (infinitas) y perfectas estuvieron presentes en la formación de nuevo conocimiento a partir de esa época.

Sin embargo, la percepción del mundo cambió con el tiempo, por ello, en los siglos XV y XVI las ideas sobre el mundo (el espacio) se modificaron. Por ejemplo, un pensador como Nicolás de Cusa (1401 - 1464) conservó la idea de las dos esferas del mundo en un sentido metafísico y no físico, es decir, la magnitud del universo y quien se encuentra en su centro es Dios, y el hombre no lograra comprender esto en su totalidad, sino solo una parte del él. Además, plantea un universo (físico) indeterminado e incompleto, los planetas, incluyendo la Tierra no son completamente esféricos como lo sería una esfera en matemáticas, sino que tienen irregularidades, y que el planeta Tierra no era inmóvil, sino que se movía a una velocidad más lenta que los otros astros, por estar más cerca de Dios que las estrellas lejanas; lamentablemente las nociones de Cusa terminaron siendo negadas e incluso olvidadas. Paligenius (1500 - 1543), un siglo más tarde que Cusa, mantiene la idea de un mundo esférico, donde la Tierra es inmóvil, pero introduce la idea de un infinito cielo que pertenece a Dios (supracielo).

Copérnico mantiene la idea de un universo en dos esferas (la esfera de las estrellas fijas y la esfera de la Tierra, la cual se mueve), plantea al Sol como el astro en el centro de las esferas, por la vitalidad y calor (luz) que emite y no la Tierra la cual rota sobre sí misma y se traslada alrededor del Sol, además de las esferas planetarias que también se trasladaban alrededor del Sol. Y determina al mundo de las estrellas fijas como inmedible y en reposo.

Otros pensadores, unos años más tarde de las ideas de Copérnico, plantean la idea de un universo infinito e ilimitado, rompiendo la idea de un mundo esférico limitado. Estos pensadores son Digges quien plantea la esfera de las estrellas móviles como infinita y Bruno quienes plantea un universo abierto e infinito y no de uno cerrado (esférico) y limitado. Esto se ampliará a continuación.

Durante la época denominada renacimiento, hubo varios autores que plantean nociones sobre el infinito, entre ellos la noción del espacio infinito, idea antes negada por la iglesia y por pensadores como Copérnico, quienes mantenían la idea aristotélica del mundo como una esfera

finita y perfecta. Uno de los primeros autores en abogar por una idea del espacio infinito fue Thomas Digges (García, 2014).

Digges planteó lo siguiente: “El orbe de las estrellas fijas se extiende en altitud hacia arriba infinitamente y esféricamente siendo por ende inmóvil (...) este lugar infinito supera a todos los demás tanto en cualidad como en cantidad” (Gyocoolea, recuperado 2013, p. 7). Como vemos, Digges sigue planteando un mundo esférico, pero le da una connotación teológica a la esfera celeste la cual es infinita. El planteamiento de Digges se completa con la idea del Sol⁹ como centro del universo, pero esto a su vez, genera una paradoja que niega la posibilidad del espacio infinito, la paradoja en la siguiente: “plantear la existencia de un sólo Sol como centro del cosmos es una contradicción porque en un espacio infinito el centro puede estar en cualquier punto, como afirmaba el Cusano (Cusa)” (Gyocoolea, recuperado 2013, pág. 7). La paradoja generaba la necesidad de un centro y una periferia para la existencia del mundo de las dos esferas, mientras que sin un centro cualquier estrella o planeta cumplía y a la vez no satisfacía la condición de estar en el centro (Kuhn, 1996), por lo que la idea del universo de Digges no fue tan relevante para generar un cambio en el pensamiento sobre el espacio finito de la época (García, 2014).

Hasta el momento habían surgido autores o pensadores que replanteaban un universo infinito, con los textos de los atomistas (Lucrecio), o como lo fueron algunos neoplatónicos, quienes tenían ideas diferentes a las aristotélicas, pero la noción predominante en el renacimiento seguía siendo la aristotélica, la cual incluía nociones teológicas. Se representaron otros modelos, como el heliocentrismo presentado por Copérnico y modificado por Digges, pero

⁹ Digges completa esta afirmación con un diagrama donde el núcleo central del universo es idéntico al del De revolutionibus copernicano, pero las estrellas han sido arrancadas de la sphaera mundi y esparcidas en el espacio exterior infinito. (T. Digges, Perfit Description of the Caelestiall Orbes according to the most aunicien doctrine of the Pythagoreans lately revived by Copernicus and by Geometrical Demostrations approved; 1576; Koyré 1998, 38-9; Kuhn 1996, II, 301-2)

estos no fueron aceptados, hasta que Giordano Bruno introdujo un modelo no esférico, no limitado e infinito.

Giordano Bruno desarrolló la idea del espacio infinito, aceptando el modelo copernicano, el cual tenía al Sol en el centro de un sistema de planetas, pero Bruno no puso ni al Sol ni a la Tierra en el centro del universo, porque para él, el universo era infinito, además intuyó las estrellas vistas a lo lejos podían ser soles o planetas, que estarían repartidos por el espacio infinito o vacío, en los que podía haber seres vivos, para Bruno el universo infinito era una creación de Dios, que se diferencia del infinito perfecto de Dios, es decir el universo infinito de Bruno era pequeño en comparación con la infinitud de Dios (Koyré, 1998).

Para Bruno, lo más importante fue comprender la naturaleza del espacio sin cuestionarse qué es. Su interpretación del infinito se acerca a la idea de infinito actual que se maneja hoy día. La idea de Bruno permitía pensar en infinitos acabados. Además, desliga el infinito de la materia y el límite del espacio o de un lugar (García, 2014).

La comprensión del concepto de espacio infinito, por parte de Bruno, permitió el acceso y comprensión del infinito, este descubrimiento permitió muchos avances en la ciencia y en la filosofía.

Además, con él se rompe la idea de un universo limitado y se comienza a pensar y hablar de un universo abierto, Bruno es con quien se da el quiebre cosmológico, no se deja de lado a Dios, pero la astronomía y la teología se transforman o moldean en los siguientes dos siglos. En su momento las ideas de Bruno no fueron aceptadas, él fue condenado a la hoguera por su pensamiento, pero sus ideas no se olvidaron, sino que fueron la base para el pensamiento de Galileo, Descartes, Newton, entre otros pensadores del siglo XVII y XVIII, sobre el universo, el espacio, los planetas, Dios, entre otros.

Las investigaciones posteriores al siglo XVI toman una perspectiva diferente, no se centran cien por ciento en la religión como fue en el medioevo, aunque muchos pensadores continúan relacionando sus ideas o nociones con teología, es decir, se realizan investigaciones

para encontrar la verdad, teniendo la posibilidad de desligarse de las ideas preconcebidas por la iglesia o no, pero explicando cada quien cómo sus ideas se podían relacionar con Dios o no. En la antigüedad era por medio de la filosofía natural que se intentaba explicar los acontecimientos del mundo, pero con el paso de los siglos las disciplinas se fueron especializando y determinando en campos de estudio. Antes del siglo XVII no había una separación específica de la matemática y de la filosofía natural, por lo que muchas investigaciones aritméticas, geométricas, entre otras, fueron parte fundamental para comprender el mundo. El cambio de la noción de filosofía natural y la conformación de la física como disciplina no se dio de un momento a otro, sino que paso con el correr de los siglos, las investigaciones y demás descubrimientos del hombre. Las disciplinas que conforman las ciencias en la actualidad, como la química, la física, la matemática, entre otras, no estaban divididos como lo entendemos hoy día, Kuhn en su artículo “Tradición matemática y tradición experimental en el desarrollo de la física” del libro *La tensión esencial* nos muestra que los saberes que se investigaron en la antigüedad se dividían en ramas o temas de interés, es decir, una persona podía hacer investigaciones sobre geometría, fenómenos estacionales y los cultivos en relación con el firmamento, pero con el paso de los siglos la investigación se fue dividiendo en disciplinas específicas. Respecto a la a la disciplina científica en el siglo XVII había dos ramas principales: las ciencias clásicas (la astronomía, la armonía, la matemática, la óptica y la estática) y las ciencias baconianas (electricidad y magnetismo) las primeras se relacionan con matemáticas y las segundas con la filosofía experimental, es decir, la inducción y la observación es fundamental para comprender los cambios del mundo, el pensamiento de Bacon se adelanta a los avances presentados siglos más tarde por Newton respecto a la inducción (Kuhn,1996). Para el siglo XVIII las dos ciencias (clásicas y baconianas) formalizadas o surgidas en el siglo XVII eran fundamentales para el entendimiento del mundo, pero se encontraban separadas, es decir, estudiaban cambios distintos y se trataban como disciplinas separadas, no fue hasta que el uso de herramientas y el perfeccionamiento de disciplinas hacia el siglo XIX fundamento y delimito las áreas de estudio específicamente, es

decir, se formalizaron disciplinas como la química, la física, entre otras, en las cuales cada persona se fundamentaba en un solo saber, es decir, aparecieron los químicos, los físicos los matemáticos, etc., quienes sabían solamente sobre su área del conocimiento. En la actualidad la física teórica y/o experimental están tan fundamentadas que su explicación del mundo que los especialistas no logran conocer todo sobre esas ramas del conocimiento (Kuhn,1996).

2.4 El cálculo, los indivisibles y sus avances en la actualidad

Desde la época de los griegos la investigación científica buscaba dar respuesta a interrogantes matemáticos en diferentes áreas del conocimiento con el fin de mejorar la comprensión del saber y la vida de los individuos. En el siglo XVII la investigación científica buscaba dar respuesta a cuatro interrogantes fundamentales para la ciencia, los cuales era: 1) teniendo la distancia y el tiempo, encontrar la velocidad y la aceleración en cualquier instante x , y al revés; teniendo la aceleración y el tiempo, encontrar la velocidad y la distancia recorrida, 2) la tangente de una curva, 3) valor máximo y mínimo de una función, y 4) la longitud de curva, las cuales fueron representados y solucionados geométrica y algebraicamente (Kline, 1992).

Las respuestas a estos interrogantes se dieron en el transcurso del siglo XVII y tuvo un variado tipo de respuestas; en su momento encontrar la mejor solución matemática a esos problemas era el foco de atención de los pensadores en Europa. Las soluciones a estos problemas se dieron desde la particularidad, es decir, cada pensador género soluciones puntuales a una de las problemáticas y pocas veces se evidenció la relación que tenían las problemáticas entre sí, ya que, se buscaba fundamentar el conocimiento y demostrar que era el indicado para usar sobre otras propuestas similares de la época. No fue hasta que años más tarde, en el mismo siglo, que el interés de solucionar esos dilemas y encontrar un modo preciso y general de comprender las cuestiones se consolidó en la creación del cálculo diferencial e integral, por Newton y Leibniz (Kline, 1992).

En el siglo XVII es mayormente conocido por los avances realizados por Newton y Leibniz, pero el cálculo diferencial e integral fue la culminación del pensamiento e investigación presentada en años anteriores por sus contemporáneos. No se va a explicar en este texto cómo cada pensador contemporáneo de Newton y Leibniz aportó a las cuestiones matemáticas de la época, pero es necesario resaltar que ellos, solucionaron en gran medida los cuatro problemas científicos del siglo XVII, anteriormente mencionados (Kline, 1992)

Entre los avances propuestos por Newton encontramos el teorema fundamental del cálculo, las fluxiones (que se puede entender hoy día como derivadas), las integrales, las series infinitas, etc., también niega el uso de los infinitesimales frente a las cantidades divisibles evanescentes, además, realizó aportes en mecánica, en física, en química, en óptica, en filosofía entre otras áreas (Kline, 1992).

Leibniz desarrolló investigaciones sobre mecánica, hidrostática, matemática, óptica, lógica, ciencia náutica, filosofía, entre otras áreas, además creó una máquina para calcular (calculadora de cuatro operaciones). En matemáticas algunos de los aportes de Leibniz son los siguientes: sumatoria, diferencial, cálculo de diferencias usando infinitesimales, etc., Leibniz aportó a los problemas matemáticos que había en la época y sus aportes fueron innovadores, pero no completamente claros, por lo que otros pensadores -los hermanos Bernoulli: Jacques y Jean-interesados en el tema desarrollaron trabajos y esquemas al respecto para que fuera más entendible y práctico para todos (Kline, 1992).

Newton y Leibniz aportaron las bases para fundamentar el cálculo, buscando solucionar los problemas científicos del siglo XVII, sus aportes revolucionaron la matemática, física, ciencia, filosofía, entre otras disciplinas del conocimiento. En sus nociones de expresar el cálculo Leibniz desarrolla el principio de continuidad, donde plantea que el infinito (como un número infinitamente grande) y los infinitesimales (como un número infinitamente pequeño) usado en el cálculo como valores en la operación matemática (derivada o integral) permite hacer un cálculo a gran escala sin incurrir en error, era mucho más práctico que usar dígitos finitos. Si bien esta noción no

fundamento el cálculo fue de utilidad para otros análisis en la formalización del mismo (Kline, 1992).

El infinito ∞ (lemniscata) se fundamentó en este siglo (XVII) y los pensadores buscaron fundamentar los indivisibles como su contrario, pero su formalización al mismo grado que el del infinito no fue posible, aun así, hubo muchos trabajos al respecto de los indivisibles.

Uno de los principales avances durante el siglo XVII fue que el concepto de indivisibles se transformó, tomando gran relevancia en el ámbito científico (matemático) y académico, porque de ellos surgen los infinitesimales; esto permitió ahondar en el concepto de infinito (como partículas infinitamente pequeñas) (Acevedo, A. C. T., Chavarro, L. S. & Flórez, J. F. G., 2019). En los siglos XVI y XVII, el término indivisible se relaciona con “lo no divisible”, “lo continuo”, “lo infinito” y “lo cambiante” (Acevedo, A. C. T., Chavarro, L. S. & Flórez, J. F. G., 2019). Muchos autores aportaron a la formación de los indivisibles como Cavalieri, Pascal, Roberval, Newton, Leibniz, entre otros.

Los temas expuestos anteriormente, el cálculo y los infinitesimales, son amplios e importantes histórica y conceptualmente en la formación académica y científico, pero en este documento no profundizaré más, dado que el objetivo es plantear cómo Newton y Leibniz comprenden el infinito físico (el espacio y el tiempo), por ello, a continuación, explicaré cómo Newton y Leibniz entendían el espacio y el tiempo.

Para Newton, “El espacio absoluto es inmóvil, y el tiempo absoluto fluye uniformemente, sin depender de factores externos” (López, F., 2016, p. 2) y para Leibniz “el espacio no existe en ausencia de objetos. En forma equivalente, Leibniz, concebía al tiempo como una abstracción basada en el orden de los sucesos” (López, F., 2016, p. 2). Los aportes de estos dos autores permitieron avanzar en la conformación de estos conceptos, hasta la aparición de la teoría de conjuntos (finales del siglo XIX) y la teoría de la relatividad especial (principios del siglo XX). Esta última transformó nuevamente los conceptos de espacio y tiempo.

En la teoría de la relatividad especial el tiempo y el espacio están íntimamente relacionados y dependen de uno o varios observadores. (Rubén, J. & Morones Ibarra, Jose, 2004).

En la actualidad, los conceptos de espacio y tiempo a gran escala se entienden desde la Teoría de la Relatividad Especial (TER) la cual formula el concepto de espacio-tiempo y la mecánica compatible con la teoría electromagnética de Maxwell, desde la Teoría de la Relatividad General (TGR) que reformula la gravedad (como presencia de un campo) y una nueva concepción de la geometría espacio-temporal (evolución del universo); y desde la Teoría de Cuerdas (TC) que permite formular fenómenos atómicos y subatómicos (Balsas, 2019). Y en relación a lo infinitamente pequeño, se estudiarían desde la física de partículas (teoría con rigor formal insuficiente), la cual describe la dinámica de las partículas elementales conocidas a partir de tres de las cuatro interacciones fundamentales conocidas (electromagnética, nuclear fuerte y débil, dejando por fuera la gravitatoria); con sus limitaciones (no explica el origen o las interacciones de esas mismas partículas en relación con la materia, incluso siendo estas tan pequeñas que no son observables por el ojo humano; y no explica la interacción con la gravitación ni la interacción con la energía oscura) (Balsas, 2019). Otras teorías y líneas de investigación (que se acercan a la teoría de la gravedad cuántica) postulan que el espacio no es infinitamente divisible (teoría de cuerdas, gravedad cuántica de lazos o geometría cuántica, geometrías no conmutativas y teoría de los conjuntos causales o *causal set theory*) (Balsas, 2019). En cosmología, desde la TRG se plantea el universo como finito pero ilimitado. Las teorías físicas actuales funcionan para explicar circunstancias del universo a pequeña y gran escala, pero no existe una sola teoría física unificada que permita comprender completamente el origen y formación del universo en el momento mismo del Big Bag. En cosmología relativista clásica (sin Mecánica Cuántica), el infinito se relaciona de dos maneras con la infinitud del espacio-tiempo: 1) puntos o regiones infinitamente distantes y 2) singularidades, en este ámbito de investigación

la estructura suave y continua del espacio-tiempo se rompe, lo que imposibilita la formalización de cálculos sobre el infinito (Balsas, 2019).

Como hemos visto, el concepto de infinito en física ha llegado hasta donde las teorías y herramientas científicas lo permiten. Por lo tanto, desde la física el concepto de infinito relacionado con el espacio y el tiempo puede ser visto desde lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, pero no es posible determinar con veracidad su naturaleza, ya que cada teoría física manejada en la actualidad busca dar respuesta desde sus saberes, pero no ha sido posible una integración de dichas teorías físicas en una sola ni el descubrimiento de la verdadera naturaleza de lo que llamamos infinito.

Como se ha visto a lo largo del texto, han existido muchas investigaciones sobre el infinito físico, desde la época de los antiguos griegos y aun hoy día, cada autor y postura ha permitido un avance en la investigación respecto a los conceptos de espacio y tiempo como infinitos o finitos. Las nociones sobre el concepto de infinito en física evidencian que no hay una postura definitiva sobre el infinito desde esta disciplina y que hay mucho campo de investigación al cual no se ha logrado acceder, ya sea por las limitaciones de la vida humana o de las herramientas que se tienen. Lo genial de la física, la matemática y demás ciencias que están desarrollando las investigaciones en la actualidad es que cada una aporta desde sus conocimientos para acercarse lo más posible a la verdad del universo y del concepto de infinito y eso es parte de lo que se ha realizado en esta modesta investigación documental. Además, se expuso la postura religiosa o teológica que existió durante lo que se denomina edad media, noción fundamental en la creación del dogma o creencia espiritual o divina de los sujetos, que está implícita en los descubrimientos e investigaciones posteriores a su aparición, como veremos en el siguiente capítulo, respecto a las concepciones religiosas de Cantor.

Cap. 3: Cantor y la noción de infinito actual

3.1 Introducción: Concepciones del infinito actual

El infinito matemático como concepto fue establecido por Cantor a finales del siglo XIX, concretamente desde la teoría de conjuntos, donde él descubrió que el infinito se podría considerar como infinito en acto, que existían infinitos de diferente tamaño y que era posible hacer operaciones entre ellos.

Antes de esta época el concepto de infinito potencial y actual mantenía una connotación aristotélica, la cual estuvo tan arraigada a la creencia religiosa que no fue posible desligarse de la idea de infinito actual y potencial planteada por él, pero a lo largo de los siglos posteriores a las ideas de Aristóteles se dieron muchos avances en la investigación sobre el infinito, lo que permitió que se consolida en el siglo XIX los descubrimientos de Cantor.

Las investigaciones de Cantor son fundamentales, porque determina lo que es el infinito en acto, pero también fue el fruto de avances e investigaciones de sus antecesores, como vimos, en el capítulo anterior los griegos descubrieron los números irracionales (raíces no exactas), aunque no los aceptaron; además buscaban el diámetro y perímetro de un círculo con el método de exhaustión de Arquímedes, pero no determinaron la infinidad de dígitos de π . Françoise Viète (1540 – 1603), precursor del álgebra, aportó en la formación del infinito demostrando que π tenía infinito dígitos decimales, calculando sin error los diez primeros, este descubrimiento introdujo por primera vez, la idea de números con infinitos dígitos decimales. John Wallis da nociones de límites y formaliza el infinito ∞ a gran escala, es decir, hacia lo infinitamente grande, también fue precursor del cálculo al presentar soluciones a uno de los problemas matemáticos (cicloides) del siglo XVII. Leonard Euler (1707- 1783) sistematizó las matemáticas, definió las constantes matemáticas e (base de logaritmos naturales), $f(x)$ (función), i (raíz cuadrada de -1), halló la suma de series convergentes, introdujo el cálculo con números algebraicos, etc.

Como vimos en el párrafo anterior, con el paso de los siglos diferentes pensadores hicieron descubrimientos sobre el infinito en diversas disciplinas esas investigaciones fueron

fundamentales para Cantor, pero el primero en especificar una teoría sobre el infinito actual y revolucionar el pensamiento de la época fue George Cantor y por ello, en este capítulo me centraré en cómo fue que el desarrollo la teoría de conjuntos y la noción de infinito actual.

La aceptación del concepto de infinito actual le tomó muchos años a Cantor. Él inició sus investigaciones en 1869 en Halle por recomendación del colega Heinrich Eduard Heine (1821 – 1881); el tema de investigación que Heine venía trabajando era:

[...] si podía llegar a suceder que un gráfico periódico tuviera dos escrituras diferentes como serie trigonométrica. Heine logro demostrar que si el grafico no tiene saltos o discontinuidades, entonces la descomposición es, en efecto, única. Sin embargo, no había encontrado una demostración general que abarcara todas las situaciones posibles. (Piñeiro, 2013, p. 98)

Por ello, Heine, le propuso a Cantor que investigara si es siempre única la descomposición de un gráfico periódico, con una cantidad de saltos indefinidos. En 1870, Cantor tuvo una primera respuesta y es que la descomposición de un gráfico periódico es única siempre y cuando los saltos estén distribuidos de determinada manera -los puntos de un gráfico tienen dos coordenadas (abscisa y ordenada)- y es que las abscisas de los saltos deben cumplir unas condiciones. Estas condiciones se explican en el concepto de conjunto derivado propuesto por Cantor, que consiste en un conjunto p' que contiene a todos los elementos que pueden aproximarse a p . Cantor explica en 1870 el conjunto derivado en términos de infinito potencial, pero 10 años más tarde es lo que le permite acercarse y explicar el infinito en acto el cual, años más tarde, dio paso a la teoría de conjuntos (Piñeiro, 2013).

Pero aquí, con el propósito de lograr una mejor comprensión del concepto de infinito en acto, de la noción de conjunto y sus operaciones, de álef, de ordinal, de la hipótesis del continuo, se procederá a la inversa, comenzando con la noción de conjunto, para posteriormente introducir y ampliar las nociones antes mencionadas.

El concepto de conjunto numérico hace referencia al infinito actual, ya que un conjunto numérico representa todos los números desde el 1 hasta el ∞ , sin contar uno por uno. La noción de infinito actual nace en las investigaciones de Cantor sobre el infinito, donde se introducen los conjuntos numéricos como representación del infinito en acto, esto significa que las nociones de Aristóteles se reestructuran desde la perspectiva de Cantor. En el capítulo anterior, en el apartado correspondiente a Aristóteles, éste explica que al infinito en acto no es posible llegar, porque se entendería el infinito como algo completo y finito y eso no es posible ya que el infinito es incognoscible y ilimitado, por lo que solo se logra ver una parte del infinito, el cual diremos que está en potencia, es decir, solo comprenderemos una parte de él, por ej: cuando la gente enumeraba los números o los representa en una recta numérica, solo en ese momento ejemplifica el infinito en potencia, pero no logra representar el infinito en acto. Esto cambia en el momento en que Cantor introduce la noción de conjunto numérico porque hace posible representar la completud del infinito, al hacer uso de los conjuntos N , Z , Q y Q^* , ya sea en un ejemplo o en una operación.

La teoría de conjuntos se centra en estudiar los conjuntos conformados con diversos elementos y las operaciones que se pueden efectuar entre ellos. Un conjunto o colección, en términos elementales, se entiende que está conformado por elementos, en lo que puede o no importar su orden. Así, un conjunto es una entidad abstracta. Por ejemplo, es posible imaginar un conjunto que contenga las casas de una cuadra o las manzanas de un árbol, los cuales serían conjuntos finitos; o todos los granos de arena de la playa de Piangüita en Buenaventura, el cual sería un número grande, difícilmente contable, pero no infinito. Los ejemplos anteriores hacen referencia a conjuntos finitos, unos pequeños otros grandes, pero todos finitos. Otro ejemplo es el conjunto que corresponde a los números naturales (N) el cual es imaginable y representable en la recta numérica, usando el símbolo ∞ (lemniscata) para indicar que los naturales son infinitos (véase la imagen de abajo). Al hablar de este último como un conjunto completo estamos hablando de infinito actual.

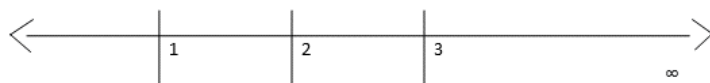


Figura 6. *Recta numérica*

Nota: En la recta se presentan los números naturales desde el 1 hacia el infinito positivo.

El infinito actual fue el fruto de las investigaciones de Cantor entre los años 1882-84. Cantor logró para esos años formular simbólica y textualmente la teoría de conjuntos y las operaciones entre infinitos de diferente tamaño. Por ello, desde ese momento cuando se habla de los conjuntos infinitos como el de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, se da por hecho que se está hablando del infinito en acto.

Para Cantor, como vamos a ver, los conjuntos infinitos tienen reglas diferentes a los conjuntos finitos. Lamentablemente, al concepto de infinito se acostumbraba a denominarlo negativamente, es decir, es infinito porque no es finito. Finalmente, Dedekind propuso la siguiente definición de conjunto infinito: “la colección infinita en acto debe ser coordinable con alguna parte de sí misma” (Piñeiro, 2013).

Ahora bien, todo lo que viene a continuación se construye a partir del concepto de infinito en acto. De ahí la importancia de este concepto en matemáticas y en particular para la teoría de conjuntos.

3.2 Axiomatización de los conjuntos numéricos y la hipótesis de continuo

Para comprender cómo Cantor desarrolló la teoría de conjuntos y encontró la noción de infinito anteriormente mencionada es necesario comprender varias nociones de la teoría de conjuntos, lo cual se ampliará en este capítulo, posterior a ello, se explicarán algunos procesos básicos de la teoría de conjuntos.

Iniciemos con la clasificación de los números, la cual comprende los conjuntos numéricos, para este capítulo solo explicaremos los conjuntos que nombramos con los símbolos N , Z , Q , Q' y R . El conjunto de los números naturales (N) se relaciona con los números contables (positivos): 1, 2, 3, ... y sus sucesores hacia el infinito positivo (∞). El conjunto de los números enteros (Z) hace referencia a números contables negativos y positivos que no tienen decimales, incluyendo el cero: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... El conjunto de los números racionales (Q) se da como el resultado de una división de números enteros sin factores comunes y el denominador diferente de cero (Piñeiro, 2013). Los racionales también se conocen como decimales periódicos porque la división entre el numerador y el denominador da como resultado uno o varios decimales que consecutivamente se repiten, ej. $1/3 = 0,33333...$, estos se presentan también con una raya (-) sobre el número periódico que se repite, para así no poner puntos suspensivos, ej. $\frac{1}{3} = 0,3'$. Por otra parte, los números irracionales (Q') no pueden representarse en fracciones periódicas ni es posible conocer todos los decimales que componen el número irracional, al este último ser infinito, pero no periódico. Por lo general se representa una operación como: ej. $\sqrt{2}$ pero no se pone en decimales. En el conjunto Q' es que se pueden hacer operaciones con dichos números. Para ordenarlos es práctico usar la recta numérica, en la cual se pueden encontrar infinitos números irracionales (Piñeiro, 2013). El conjunto de los números reales está compuesto por los conjuntos anteriormente mencionados (N , Z , Q) y los números irracionales Q' , estos son números con decimales no periódicos (infinitos), los cuales se dividen en algebraicos y trascendentes. Los números algebraicos se pueden entender como el resultado de una operación o ecuación algebraica y pueden pertenecer a los conjuntos anteriormente mencionados (N , Z , Q y Q'). Los

números trascendentes, al contrario de los números algebraicos, no son el resultado de operaciones algebraicas, pertenecen al conjunto de los Q' (no es numerable).

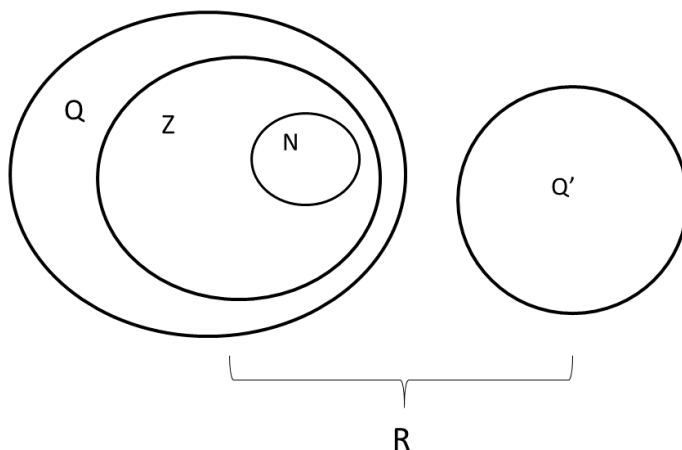


Figura 7. Representación de los conjuntos numéricos que componen R

Nota: Representación de los conjuntos numéricos en forma de diagrama de Venn unidos con un corchete para evidenciar que la unión de los conjuntos conforma el conjunto de los reales. $R = Q \cup Q'$ (Los reales son la unión de los racionales con los irracionales).

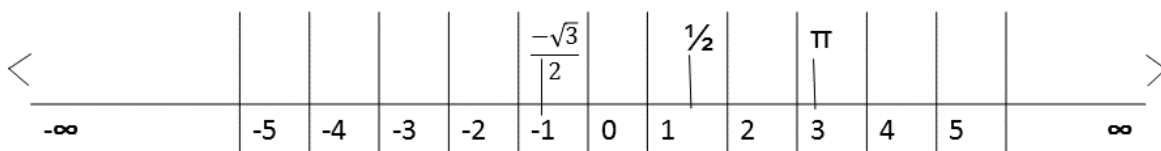


Figura 8. Recta numérica R

Nota: Recta numérica que representa números de los conjuntos que pertenecen a R .

Ahora pasemos a la noción de cardinal. El cardinal de un conjunto representa la cantidad de elementos de ese conjunto o colección. En el texto de Piñeiro se presenta el siguiente ejemplo: de las letras de la palabra cielo se puede formar un conjunto, el cual se puede poner en correspondencia con el conjunto de las letras que conforman la palabra cinco, es decir, las letras de la palabra cielo y de la palabra cinco tienen el mismo cardinal, el cardinal es 5, pero Cantor no usa el número sino asteriscos con el fin de representar la cardinalidad de los conjuntos infinitos de otra manera, la cual se introducirá más adelante; para un conjunto infinito como el de los números naturales el cardinal sería *****... (Piñeiro, 2013). Cantor usa los cardinales para diferenciar el tamaño de los conjuntos numéricos, más adelante se ampliará cómo descubrió la cardinalidad de los conjuntos y los diferentes tamaños de los infinitos, pero para ello es necesario centrarnos primero en la correspondencia uno a uno entre conjuntos numéricos.

Esta noción de correspondencia uno a uno entre conjuntos fue planteada por Galileo de la siguiente forma: se cumple la correspondencia uno a uno, si en un baile hay igualdad de hombres y de mujeres y estos pueden bailar en pareja, pero si sucede que queda una persona sin pareja, no habría correspondencia uno a uno y, por ende, el grupo al que pertenecía esa persona será más grande que el otro grupo. Galileo traspasaba esta analogía a las colecciones de números, él comparó los números naturales con los números cuadrados (2, 4, 6, 8, ...), afirmando que los primeros eran mayores porque había a simple vista más cantidad.

Cantor demostró que había una incongruencia en la investigación de Galileo, porque a simple vista uno concluye (incorrectamente) que hay más naturales que cuadrados, pero al hacer la correspondencia uno a uno, no queda ningún número por fuera de la correspondencia, es decir, cada número natural se corresponde con un número cuadrático, por tanto, los números natural y los números cuadrados se corresponden bidireccionalmente, tal y como se puede observar a continuación.

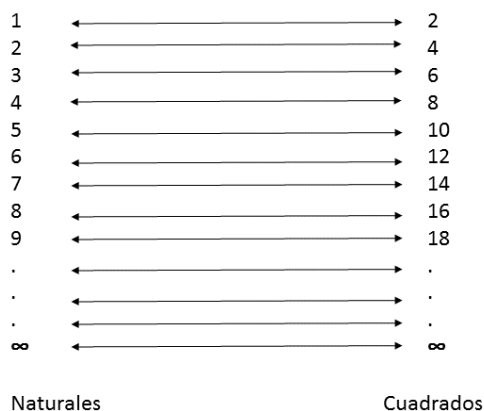


Figura 9. Correspondencia entre números naturales y cuadrados

Nota: Se evidencia la correspondencia entre los números que componen el conjunto de los números naturales y el conjunto que componen los números cuadrados.

Luego de haber demostrado la correspondencia entre las colecciones de naturales y cuadrados, Cantor se centró en la correspondencia entre los naturales, los enteros y los racionales. Al comparar la colección de los números naturales con la colección de los números enteros, Cantor demostró que sí hay correspondencia, equiparando cada elemento de los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6... con cada elemento de los números enteros: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3... de esta forma se comprobó la correspondencia uno a uno entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ (Piñeiro, 2013).

Otra colección de números es la de los racionales. Cantor demostró la correlación de los racionales con los naturales, demostrando que tienen la misma cardinalidad. Para eso se ubican en una misma línea las fracciones que la suma del numerador y el denominador corresponden a números enteros, luego se organizan en orden de suma, es decir, 1/1 que corresponde al número 2, va primero (omitimos fracciones que contengan el cero), luego el 1/2 y 2/1 que corresponden al número 3 y así sucesivamente [1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, ...]. Una vez armada la fila de los números fraccionarios positivos, se ubica al cero de primero y se intercalan fraccionarios

positivos con fraccionarios negativos. $[0, 1/1, -1/1, 1/2, -1/2, 2/1, -2/1, 1/3, -1/3, 3/1, -3/1, \dots]$, véanse las ilustraciones a continuación. Una vez completada la fila de números racionales se compara con la fila de los números naturales, comprobando que para cada elemento de los naturales corresponde un elemento de los racionales, es decir, se cumple la correspondencia (Piñeiro, 2013).

En síntesis, Cantor, para explicar la correspondencia de los naturales con los enteros o con los racionales habría dicho lo siguiente: “Deducimos entonces que decir que una colección de números es coordinable con los naturales es lo mismo que decir que sus miembros pueden organizarse en forma de sucesión infinita”. (Piñeiro, 2013 p. 46)

demuestra que en cualquier sucesión infinita de números reales que se intente, siempre habrá infinitos números reales entre ellos (Piñeiro, 2013). Piñeiro nos presenta en su libro el siguiente ejemplo de la diagonal, que no es el mismo presentado por Cantor en su época, pero nos permite comprender la noción desarrollada por Cantor.

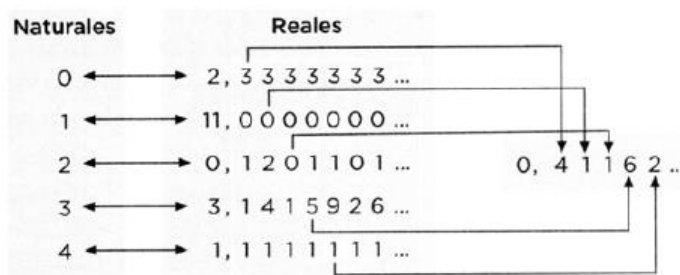


Figura 12. Argumento de la diagonal

Nota: En la figura 11 se ve la fila de los números naturales y se ve una posible fila de los números reales, pero esta no es fija, ya que es posible observar por el argumento de la diagonal otro posible número que surge de los ya fijados. Con el argumento de la diagonal se evidencia que entre dos números reales puede haber infinitos números reales, por lo tanto, el grupo que conforma a los reales es mucho más grande que el grupo de los reales, lo que imposibilita la correspondencia entre el conjunto de los naturales que incluyen el cero con el conjunto de los reales. Imagen de Piñeiro, 2013, p. 50.

Una vez expresada la no correspondencia entre naturales y reales, es posible explicar la diferencia de cardinalidad que hay entre estos conjuntos. El conjunto de los números reales, que contiene a los irracionales, es más grande que el conjunto de los números naturales, es decir tiene más elementos, por ende, tiene un cardinal más grande que el de los números naturales (Piñeiro, 2013). Este descubrimiento del cardinal de los números reales, plantea la idea de diferentes órdenes de infinitud.

Piñeiro especifica que los conjuntos numerables ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y algebraicos) son coordinables entre sí y que los no numerables ($\mathbb{Q}'$ y trascendentes) se coordinan con los reales, lo que implica que los conjuntos de números existentes tienen una cardinalidad específica y no hay un conjunto intermedio entre los contables y los no contables (Piñeiro, 2013). Lo anterior, con el fin de mostrar que no hay una colección intermedia entre las colecciones antes mencionadas, es lo que se conoce como «hipótesis del continuo».

Finalmente, después de fracasar en todos los intentos de hallar una colección intermedia, en 1877 Cantor llegó a la convicción de que tal colección no existe y formuló la siguiente conjetura, que es conocida como la «hipótesis del continuo»: no existe una colección infinita con un cardinal intermedio entre el de los naturales y el de los reales [...]. (Piñeiro, 2013, p. 66)

3.3 Los conceptos de *álef*, ordinales y conclusión

Hasta aquí, se ha tratado alguna terminología y conceptos básicos para entender la teoría de conjuntos numéricos, ahora me centraré en exponer dos conceptos necesarios en la teoría de conjuntos: ordinales y cardinales (*álef*).

Para el año 1882, Cantor retomó el tema de la descomposición de los conjuntos, centrándose en conjuntos infinitos.

En esa carta¹⁰, Cantor [...] en 1882 se dio cuenta finalmente de que esos símbolos ∞ , $\infty + 1$, $\infty + 2$..., $\infty + \infty$, $\infty + \infty + 1$... representaban nada menos que números infinitos, números que permiten contar más allá de los naturales (Piñeiro, 2013, p.105).

¹⁰ A Dedekind en 1882.

Cantor les asignó un nombre y un símbolo diferente al del infinito potencial (∞), los llamó *ordinales* y el símbolo para representar el infinito en acto es una letra del alfabeto griego: omega minúscula (ω) (Piñeiro, 2013). Además, postuló dos principios para su entendimiento: 1) todo ordinal tiene un sucesor que es otro ordinal; 2) existiendo una sucesión de ordinales, siempre hay un ordinal superior a los anteriores (Piñeiro, 2013).

Los ordinales de clase I son: 1,2,3..., hasta llegar a ω . Los ordinales de clase II, que continúan la primera sucesión, son $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$..., hasta llegar al ordinal $\omega + \omega$. Finalmente, por el segundo principio de generación, vienen más clases de ordinales, así $\omega + \omega + 1$, $\omega + \omega + 2$, $\omega + \omega + 3$..., hasta llegar a $\omega + \omega + \omega$ y así sucesivamente aparecen otras clases de ordinales (Piñeiro, 2013).

En este punto, Cantor planteó otro interrogante al relacionar las sucesiones de clases de ordinales y teniendo en cuenta los principios de esos conjuntos infinitos, la pregunta es la siguiente ¿Es posible determinar la clase del ordinal subsiguiente al conjunto de todos los ordinales de clase II? y ¿Qué símbolo tendría ese ordinal? (Piñeiro, 2013). La respuesta a este interrogante sería dada en un artículo de 1883, donde Cantor demostró que las clases de ordinales I y II crean un conjunto no numerable y que Ω es el primer ordinal de clase III, es decir, es el sucesor de todos los números que se encuentran en las clases I y II (Piñeiro, 2013)

La existencia de niveles de cardinalidad mayores que la de los naturales y los reales, le permitió a Cantor plantear niveles de cardinalidad infinita (Piñeiro, 2013). Lamentablemente, la teoría de Cantor no fue aceptada en sus inicios, por no poder demostrar la hipótesis del continuo, a esto se le sumó el hecho de que otros pensadores descartaron los conceptos de ordinales¹¹ y de cardinalidad, además se le adicionó el surgimiento de la siguiente paradoja en 1882:

¹¹ Simplemente, no existían. Como respuesta, Cantor ofreció su propia filosofía de las matemáticas, según la cual cualquier objeto que un matemático define, por el mero hecho de ser definido, existe, con la única condición de que esa definición no conduzca a contradicciones lógicas. (Piñeiro, 2013, p.108)

Volvamos al segundo principio de generación: dada cualquier sucesión de ordinales, siempre hay otro nuevo ordinal que es mayor que todos ellos. A la luz de este principio, si consideramos la sucesión formada por todos los ordinales, tiene que haber un nuevo ordinal mayor que todos ellos; pero ¿cómo puede haber un nuevo ordinal si la sucesión ya contenía a todos los ordinales? (Piñeiro, 2013, p. 108 -109) ¹²

Si bien la aceptación de los conceptos planteados por Cantor, tomó tiempo, para él fue necesario presentar una solución a la paradoja que surgió en 1882, la cual consistía en introducir un tercer principio de generación: “[...] que dice básicamente que el segundo principio no se puede aplicar a la sucesión completa de todos los ordinales. En definitiva, un parche que solucionaba el problema de la paradoja” (Piñeiro, 2013, p.109).

La aparición de la paradoja no presentó un problema para Cantor, sino que implicaba la aparición de un segundo tipo de infinito, el infinito absoluto, en el cual ingresaba el conjunto de todos los ordinales, un tipo de conocimiento superior perteneciente solamente a la divinidad. Por medio de esta conjetura, Cantor pudo solucionar las incógnitas de la teoría de conjuntos que lo interrogaban desde sus inicios (Piñeiro, 2013).

A comienzos del siglo XX, diversos pensadores vieron esperanzas en la teoría de conjuntos para la explicación y aplicación de las matemáticas, por lo que su fundamentación fue uno de los temas principales de dicho siglo. Las nociones matemáticas dejaron de basarse en nociones geométricas e inició a pensarse desde nociones conjuntistas. Autores como Dedekind y Hilbert aportaron desde sus saberes a esa fundamentación, el primero con su artículo «*Was sind und was sollen die Zahlen*» [Qué son y para qué sirven los números]¹³, donde fundamentó los números, algunas propiedades de la teoría de conjuntos y conjuntos como los naturales, que a su vez, dieron soporte a los enteros, racionales y reales, justificando de ese modo la teoría de conjuntos (Piñeiro, 2013).

¹² Esto es una contradicción lógica, una paradoja que Cantor descubrió en 1882.

¹³ Piñeiro, 2013, p.115.

[...], —dijo Dedekind—, todas las nociones matemáticas pueden reducirse a nociones conjuntistas. Esta forma de pensar en las matemáticas como basadas totalmente en la teoría de conjuntos tuvo una enorme influencia a lo largo de todo el siglo XX e inclusive sigue siendo muy influyente en nuestros días; [...]. (Piñeiro, 2013, p.117)

En «Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos» (1895), Cantor introdujo la noción de álef $\aleph$, con la cual se describe la cardinalidad de los conjuntos infinitos. Álef está acompañada de un subíndice que diferencia la cardinalidad de los conjuntos, así, el conjunto de los naturales y demás conjuntos que se puedan bidireccional en correspondencia infinita con los naturales, tendrían cardinalidad $\aleph_0$ (álef sub-cero), el conjunto de los reales y demás conjuntos que se relacionan en correspondencia infinita con los reales tendrán como cardinal $\aleph_1$ (álef sub-uno) y así sucesivamente, los conjuntos que tuvieran un infinito mayor, les corresponde un cardinal superior (Piñeiro, 2013). Es así que los cardinales de clase uno (I) se representarán con Álef sub-cero, los de clase dos (II) con álef sub-uno y así sucesivamente, todos los cardinales existentes se representan con un álef mayor (Piñeiro, 2013).

Además, Cantor en «Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos» creó la aritmética de los transfinitos y desarrolló la cardinalidad de los enteros y los racionales, equiparándola con la cardinalidad de los naturales y diferenciando esta de la cardinalidad de los reales. Además, mostró que la suma o unión entre enteros y racionales no modifica la cardinalidad que ellos tenían, es decir, los enteros tienen cardinalidad $\aleph_0$ y los racionales tienen cardinalidad $\aleph_0$; por lo tanto, su suma o unión da la misma cardinalidad $\aleph_0$. De igual modo, si se suma el conjunto de los enteros con el conjunto de los reales, la suma da el cardinal de los reales $\aleph_1$ (Piñeiro, 2013).

En realidad, puede probarse que si se suma dos veces un mismo cardinal infinito el resultado es otra vez ese mismo cardinal (como en el caso de $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$), y que si se suman dos cardinales infinitos diferentes, entonces el resultado es el mayor de los dos

(como $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$). En consecuencia, por ejemplo, podemos afirmar que $\aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1$ y que $\aleph_1 + \aleph_2 = \aleph_2$. (Piñeiro, 2013, p. 123.)

Veamos por último la noción de partes de un conjunto, que permite dividir un conjunto en todas las partes que los conforman, hasta llegar a un conjunto vacío, también permite comprender mejor el conjunto de los reales, como veremos a continuación. Para hablar de conjuntos, es necesario poder hablar de partes de conjuntos, esto se representa con la letra $P(n)$, donde n es el conjunto principal del que se va a hablar. Por ello, se diferencian los conjuntos de los números por medio de los corchetes $\{ \}$, es decir, 1 es un número y $\{1\}$ es el conjunto que contiene a uno. Cantor, en su artículo de 1892¹⁴, demostró por medio de secuencias de unos y ceros que $P(N)$ no es numerable, y planteó que esto no implicaba que tuviera el mismo cardinal que los reales¹⁵. Este descubrimiento se dió por medio del argumento diagonal que presentamos arriba (Piñeiro, 2013). En el mismo artículo, Cantor también demostró que $P(N)$ tiene el mismo cardinal que los reales, por medio de la secuencia de 1 y 0 o escritura binaria (Piñeiro, 2013). Otra operación de infinitos matemáticos es la potenciación, esta permite generar secuencias de ceros y unos que potenciadas generan otras parejas de ceros y unos.

Tenemos así que hay 2^1 secuencias de una cifra: (0) y (1), 2^2 secuencias de dos cifras: (1, 1), (0, 0), (1, 0) y (0, 1), 2^3 secuencias de tres cifras: (1, 1, 1), (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1) y (1, 0, 1), y así sucesivamente. Parece lógico suponer que para las secuencias de « $\aleph_0$ cifras» el cardinal correspondiente sea $2^{\aleph_0}$. (Piñeiro, 2013, p. 130)

Piñeiro dijo al respecto:

Preguntarnos por el cardinal del conjunto de todas las secuencias infinitas de ceros y unos es hacerlo por todos los modos posibles de cubrir a N usando dos elementos. [...]; entonces, por definición, según Cantor, el cardinal de todos los modos de cubrir a ω con

¹⁴ «Sobre una cuestión elemental de la teoría de conjuntos».

¹⁵ Recordemos que el conjunto de los números reales tampoco es numerable.

dos elementos es $2^{\aleph_0}$. Y como el conjunto de todas las secuencias de ceros y unos es coordinable con $\mathbb{R}$, concluimos entonces que el cardinal de $\mathbb{R}$ es también $2^{\aleph_0}$; por lo tanto, otro modo de enunciar el problema de la hipótesis del continuo es con la pregunta: ¿será $2^{\aleph_0}$ igual a $\aleph_1$? (Piñeiro, 2013, p. 131).

Lamentablemente, Cantor no pudo darle respuesta a esta interrogante en vida. Esto generó incertidumbres que fueron abordadas en años posteriores por otros investigadores.

Entre los años 1938 y 1940 Kurt Gödel (1906 - 1978) publicó varios artículos donde demostró que la consistencia de la hipótesis del continuo y el axioma de elección en la teoría de conjuntos, dependía de que los axiomas de esta teoría fueran compatibles entre sí, pero que la hipótesis del continuo no dependía ni se derivaba de los axiomas. En 1964 Paul Cohen (1934 - 2007) tomando de base los artículos de Gödel demostró que la negación de la hipótesis del continuo también era compatible con la teoría de conjuntos (Estrada, L, 2006).

En la formalización de la teoría de conjuntos se presentaron otras paradojas, como el conjunto de todos los conjuntos, pero fueron solucionadas o reestructurado el argumento para evitarlas, por ejemplo, para la paradoja anteriormente mencionada Cantor desarrolló el tercer principio de generación, (explicado unos párrafos antes).

Independientemente de las paradojas y problemáticas que se generaron en la matemática a raíz de la teoría de conjuntos, esta sigue siendo la fundamental en la investigación matemática y en la explicación del infinito matemático en la actualidad. De este modo, se han presentado y desarrollado los dos conceptos centrales de la teoría de conjuntos, álef y ordinales, los cuales fueron desarrollados por Cantor y luego aceptados e introducidos por toda la comunidad científico-académica.

A modo de conclusión, la teoría de conjuntos revolucionó el pensamiento de la época y permitió la adquisición y uso del concepto de infinito actual, además de la aceptación de infinitos de diferentes tamaños. La única noción que no fue aceptada con el paso del tiempo por investigadores y pensadores fue la idea de un infinito absoluto perteneciente solo a la divinidad, esa idea fue retirada al no poder ser demostrada científicamente. Si bien la teoría de conjuntos

es usada hoy día por diferentes autores e investigadores, cada persona ha tratado de consolidarla o ampliarla desde su área de estudio, lo que conlleva a la existencia de varios tipos de teorías de conjuntos: ZFC (La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y el axioma de escogencia, este último se puede entender de la siguiente forma, existe un subconjunto de x y al escoger un elemento del subconjunto de x este elemento también debe pertenecer al conjunto X , este subconjunto no debe estar vacío, si lo anterior se cumple todo conjunto debería poder ser bien ordenado). NBG (teoría de conjuntos de Von Neumann-Bernays-Gödel), MK (teoría de conjuntos de Morse-Kelley), entre otras. Aun así, no se ha podido demostrar una versión de la teoría de conjuntos como superior o mejor que otra, lo que conlleva al uso de una o varias según las necesidades del investigador.

Conclusiones finales

En el transcurso de este trabajo se desarrollaron los tres conceptos de infinito: matemático, físico y metafísico, en concordancia con lo que plantea el artículo de Rucker, con el fin de contextualizar a la comunidad académica en general sobre los conocimientos y saberes que se han desarrollado entorno al infinito. Se hizo un recorrido histórico en varios pensadores, lo que permitió una mirada amplia sobre el concepto; luego se puntualizaron las posturas de autores que evidenciaran el cambio del concepto en la filosofía occidental, partiendo desde los antiguos griegos, hasta llegar a las definiciones del concepto de infinito matemático, físico y metafísico planteados en la actualidad. Podemos decir que el principal cambio sobre el concepto de infinito tiene que ver con el paso de pensarlo sólo como algo potencial a ser algo actual. Tal cambio se debió a los sistemáticos y profundos trabajos del matemático G. Cantor, que dieron nacimiento a la bien conocida teoría de conjuntos.

Todo lo anterior, con el fin de evidenciar la amplitud del concepto, la gran variación de saberes que se pueden desarrollar al respecto e incentivar a la comunidad a aprender más de él. El concepto de infinito se trabajó desde las disciplinas anteriormente mencionadas, pero no son las únicas, es posible encontrar el infinito desde la poesía, la literatura y demás artes que encontramos en el mundo. El infinito no se limita a lo escrito o dicho sobre él, sino que es mucho más amplio y, tal vez, indescifrable en su totalidad, pero como concepto es posible deslumbrar parte de lo que es, y esto es algo de lo que se ha hecho en este trabajo.

Referencias

Acevedo, A. C. T., Chavarro, L. S. & Flórez, J. F. G. (2019, enero). La teoría de los indivisibles matemáticos en el siglo XVII. En la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Aristóteles (1995) Física. Ed. Gredos. Recuperado de:
https://www.academia.edu/10331123/F%C3%ADsica_Arist%C3%B3teles

Aristóteles (1970) Metafísica. Ed. Gredos S. A. Madrid, España.

Balsas, A. (2019) El infinito desde la física. Pensamiento, vol. 75 (2019), núm. 283, pp. 5-28.

Bombal, F. (2010) Un paseo por el Infinito. XII Programa de Promoción de la Cultura Científica y Tecnológica. Rev. Real Acad. Ci. Exact. Fis. Nat. (Esp.) Vol. 104, No. 2 (2010), 427-444, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, Madrid.

Cavallazzi, A. [Estamos Filosofando] (2020, noviembre 22) ¿Fue Plotino el más grande después de Aristóteles? uno, nous y alma | V Neoplatonismo 2 | T05 E02 [video] recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=6nVpQD5OB1U&ab_channel=Estamosfilosofando

Cavallazzi, A. [Estamos Filosofando] (2021, Julio 24) El más grande padre de la iglesia: San Agustín VI |Filosofía medieval 3 | T06 E03 [video] recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=C5TjAYzcbKY&list=PLNi2PoC_p-L21dgKNvB-v-xWnm4orhNVz&index=3&ab_channel=Estamosfilosofando

Domínguez, S. (2013) El infinito. *CIENCIORAMA. Divulgación de la ciencia*, UNAM. Recuperado de <http://www.cienciorama.unam.mx/#!/titulo/315/?el-infinito>

Estrada, L (2006) Acerca de la importancia histórica de Gödel, Elementos 63, p. 21 - 2
 Recuperado de <https://elementos.buap.mx/directus/storage/uploads/00000002360.pdf>

García, J. (2014) Del “horror al infinito” de los antiguos griegos a la Noción de límite moderno [Trabajo de grado presentado al Programa Académico Licenciatura en Matemáticas y Física como requisito para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física] Universidad del Valle.

Gyocolea, R. (recuperado 2013) Metafísica del infinito y concepto de espacio en Giordano Bruno (1548-1600). A parte rie. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.

Kline, M (1992) “la creación del cálculo”, El pensamiento matemático I, Alianza Editorial, España, p. 696-794

Koyre, A (1998) Del mundo cerrado al universo abierto. Ed. Siglo Veintiuno de editores, s. a. México D. F.

Kuhn, T (1996) La revolución copernicana. Editorial Ariel S. A., Barcelona, España.

Kuhn, t (1996) “Tradición matemática y tradición experimental en el desarrollo de la física”, La tensión esencial, Estudios selectos sobre la tradición y el cambio en el ámbito de la ciencia, Fondo de cultura económica. España, p. 56-89

López, Claudia Andrea (2014) “El infinito en la historia de la matemática” en Ciencia y Tecnología, 14, 2014, pp. 277-298.

López, F. (2016) El espacio y el tiempo. Boletín Radio@stronómico, Vol: año 14, No. 53. Recuperado de: <http://tux.iar.unlp.edu.ar/boletin/bol-jun16/El%20espacio%20y%20el%20tiempo.pdf>

Meliujin, S. (1960) El problema de lo finito y lo infinito. Ed. Grijalbo S. A. México D.F.

Ortiz, J. R. (1994) El concepto de infinito. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, ISSN-e 1315-4125, Vol. 1, No. 2, 1994, págs. 59-81.

Paradojas de Zenón. (2023, 7 de marzo). Wikipedia, La enciclopedia libre. Fecha de consulta: 16:23, marzo 8, 2023 desde https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Paradojas_de_Zen%C3%B3n&oldid=149728998.

Piñeiro, G. (2013) Cantor - El Infinito en Matemáticas. Editor digital: SkynetPub base r2.1

Plotino (1998) Enéadas V-VI Ed. Gredos S. A. Madrid, España. Recuperado de <file:///E:/plotino%20eneadas-v-vi-gredos.pdf>

Rubén, J. & Morones, J. (2004) La evolución de los conceptos de espacio y tiempo. Ingenierías, Enero-Marzo 2004. Vol. VII, No. 22. Recuperado en: https://www.researchgate.net/publication/228851698_La_evolucion_de_los_conceptos_de_espacio_y_tiempo

Rucker, R. (2022, 10 de noviembre) infinito _ Enciclopedia Británica. <https://www.britannica.com/science/infinity-mathematics>

TED-Ed Español (2022, agosto 5) ¿Qué es la paradoja de la dicotomía de Zenón? - Colm Kelleher [video] recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=SolpJZ859kQ>

Tessier, D. (2015) "El Infinito En Matemáticas". Recuperado en : <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/7128/Daniel%20Tessier%20Nu%c3%b1ez.pdf?sequence=1&isAllowed=y>