

**Trayectorias de razonamiento geométrico y estrategias de medición de congruencia
en niños pequeños utilizando Ambientes de Geometría Dinámica**



Jazmín Andrea Hernández Cardona-1703539

Directora: Yenny Otálora Sevilla, PhD.

**Maestría en Psicología
Instituto de Psicología
Universidad del Valle
Santiago de Cali**

Agradecimientos

En primer lugar, muchas gracias a mí maestra académica y tutora **Yenny Otálora Sevilla**, porque sin su constancia este trabajo no habría sido posible. Gracias por su paciencia en cada reunión al escuchar, leer y corregir cada uno de los apartados de esta tesis que tuvieron errores inigualables, siendo sincera a veces llegue a decir que no parecía tener fin mis errores. Pero de corazón le agradezco por ser una persona exigente y por pulirme día a día en este proceso académico con sus enseñanzas que despertaron más mi interés y fascinación por la rama de la psicología educativa.

Muchas gracias también a las jurados Marlenny Guevara Guerrero y Barbara M, Brizuela, por el tiempo que le dedicaron a leer y corregir el trabajo, sus enseñanzas fueron muy valiosas. En especial Profesora Marlenny, le agradezco por su calidez y amabilidad con que recibí cada asesoría de parte suya cuando las necesite, y sobre todo por sus voces de aliento, la verdad fue una grata sorpresa para mí contar con usted.

A mí familia gracias por el apoyo incondicional que recibí de ustedes siempre, y por su amor tan constante que significó más para mí de lo que son conscientes o de lo que mis palabras podrían llegar a expresar. A mis amigos Alejandra Urbina, Yesenia Morales, Laura LaRotta, Daniel Penagos, Raquel Lozano, Carol Martínez y Carolina Bojacá, muchas gracias por su apoyo, las enseñanzas, las palabras de aliento, la paciencia y por ayudarme leyendo algunos apartados de la tesis.

Para mí amor incondicional, muchas gracias por apoyarme en esos últimos tres meses intensos de este proceso, no sabes lo importante que fue para mí que me acompañaras en esos días en que me internaba todo un día hacerle a la tesis y tú me dabas ánimos en cada instante.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
2. Planteamiento del Problema.....	7
3. Objetivos	11
Objetivo General	11
Objetivos específicos	11
4. Antecedentes	12
4.1. Relaciones geométricas a edades tempranas y la noción de congruencia	12
4.2 El objeto geométrico en AGD: El uso de las tecnologías digitales interactivas y el papel del gesto	14
4.3 Estudios de microanálisis: un enfoque en el razonamiento geométrico	18
5. Marco Teórico	21
5.1 Cambio y variabilidad en los procesos de aprendizaje.....	21
5.2. Aprendizaje de relaciones geométricas y uso de tecnologías digitales en AGD.....	24
5.3. Cognición en el cuerpo [Embodiment] y uso del gesto.....	28
6. Método	31
6.1 Participantes	31
6.2. Diseño	31
6.2.1 Instrumentos/tareas: Secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje “Construyendo las Llaves del Castillo Mágico”	34
6.2.2. <i>Procedimiento</i>	38
6.3. Estrategias de Recolección de información.....	39
6.4. Análisis de los datos.....	41
7. Resultados	50
7.1 Frecuencias de uso de estrategias de medición	50
7.2 Trayectorias de los tipos de estrategias de medición de triángulos congruentes.....	56
7.3. Trayectorias de razonamiento geométrico sobre la congruencia y uso del gesto.....	67
7.4. Análisis cualitativo del gesto.....	85
8. Discusión.....	106
9. Conclusiones	117
10. Referencias Bibliograficas	119
11. Anexos.....	123

Índice de Tablas

	Pág.
Tabla 1 <i>Estructura de la secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje “construyendo las llaves del castillo mágico”</i>	33
Tabla 2. <i>Sesiones por pareja de niños en semanas y días y sesiones para presentar la secuencia de situaciones de ambiente de aprendizaje “construyendo las Llaves del Castillo Mágico”</i>	38
Tabla 3. <i>Descripción de estrategias de medición</i>	42
Tabla 4. <i>Esquema de codificación escalar de Categorías de los niveles de razonamiento geométrico sobre la congruencia, basadas en los tipos de conocimientos sobre las formas geométricas.</i>	44
Tabla 5. <i>Esquema de codificación de tipos de gesto por fuera del iPad que acompaña la verbalización</i>	47
Tabla 6. <i>Pareja 1-frecuencias de tipos de estrategias y subtipos de estrategias</i>	53
Tabla 7. <i>Pareja 2-frecuencias de tipos de estrategias y subtipos de estrategias</i>	54
Tabla 8. <i>Pareja 3-frecuencias de tipos de estrategias y subtipos de estrategias</i>	55

Índice de Figuras

	Pág.
Figura 1. <i>Frecuencias de categorías de estrategias de la pareja 1, la pareja 2 y la pareja 3.....,</i>	50
Figura 2. <i>Frecuencias de tipos y subtipos de estrategias de la pareja 1, la pareja 2 y la pareja 3.....</i>	51
Figura 3. <i>Trayectoria de tipo de estrategias de medición de la pareja 1 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje.....</i>	57
Figura 4. <i>Trayectoria de tipo de estrategias de medición de la pareja 2 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje</i>	60
Figura 5. <i>Trayectoria de tipo de estrategias de medición de la pareja 3 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje.....</i>	63
Figura 6. <i>Trayectoria de razonamiento geométrico sobre la congruencia de la pareja 1 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje.....</i>	68
Figura 7. <i>Trayectoria de razonamiento geométrico sobre la congruencia de la pareja 2 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje.....</i>	74
Figura 8. <i>Trayectoria de razonamiento geométrico sobre la congruencia de la pareja 2 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje.....</i>	79
Figura 9. <i>Uso de gesto Pareja 1- sesión 1, en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia.....</i>	85
Figura 10. <i>Uso de gesto Pareja 1- sesión 1, en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia.....</i>	86
Figura 11. <i>Uso de gesto Pareja 1- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de resolución de problemas de formas simple.....</i>	88
Figura 12. <i>Uso de gesto Pareja 1- sesión 3 en la tarea N2 de la situación de la situación de resolución de problemas de formas simples.....</i>	89
Figura 13. <i>Uso de gesto Pareja 1- sesión 6 en la tarea N5de la situación de la situación de resolución de problemas de formas compuestas</i>	91
Figura 14. <i>Uso de gesto Pareja 1- sesión 7 en la tarea N6 de la situación de la situación de resolución de problemas de formas compuestas</i>	92
Figura 15. <i>Uso de gesto Pareja 2- sesión 1 en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia.</i>	94

Figura 16. <i>Uso de gesto Pareja 2- sesión 1 en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia.</i>	95
Figura 17. <i>Uso de gesto Pareja 2- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de figuras simples.</i>	97
Figura 18. <i>Uso de gesto Pareja 2- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de figuras simples.</i>	98
Figura 19. <i>Uso de gesto Pareja 2- sesión 4 en la tarea N3 de la situación de resolución de problemas de formas simples.</i>	99
Figura 20. <i>Uso de gesto Pareja 3- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de resolución de problemas de formas simples.</i>	100
Figura 21. <i>Uso de gesto Pareja 3- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de resolución de problemas de formas simples.</i>	101
Figura 22. <i>Uso de gesto Pareja 3- sesión 5 en la tarea N4 de la situación de resolución de problemas de formas compuestas.</i>	102
Figura 23. <i>Uso de gesto Pareja 3- sesión 6 en la tarea N5 de la situación de resolución de problemas de formas compuestas</i>	103

Resumen

La manera como los niños razonan geométricamente a edades tempranas, principalmente sobre el concepto de *congruencia* fue el enfoque principal de este estudio. La pertinencia de haber estudiado el razonamiento geométrico informal en niños de 7 años desde el campo de la psicología educativa, fue que permitió ampliar el panorama investigativo sobre la manera en que los niños razonan respecto a relaciones entre objetos geométricos. El interés de esta investigación fue caracterizar las trayectorias de razonamiento de los niños sobre la noción de congruencia y sobre las estrategias de medición de triángulos congruentes en parejas de niños trabajando en un periodo corto de tiempo en un Ambiente de Geometría Dinámica, y examinar el rol del *gesto* en ese proceso de cambio desde un análisis microgenético.

Los análisis fueron realizados a partir de gráficos de *línea de tiempo* para caracterizar las trayectorias de las estrategias de medición y de razonamiento sobre la congruencia a partir de un ambiente de aprendizaje que se implementó durante 9 sesiones en 3 parejas de niños de 7 años. El gesto se analizó de dos formas: mediante un análisis cualitativo de secuencias de gestos y en las trayectorias de razonamiento al identificar el tipo de gesto que emergió- atributos, propiedades y relaciones. En los resultados se encontró que en las trayectorias de las estrategias de medición y de razonamiento sobre la congruencia se evidenciaron procesos de cambio a partir de variabilidad intra e intersesión en las 3 parejas. Los gestos fueron usados por las 3 parejas y en algunos momentos de las sesiones fueron precursores de cambios en los niveles de razonamiento.

Palabras claves: Razonamiento geométrico, congruencia, estrategias de medición, gesto, variabilidad y cambio.

1. Introducción

Las matemáticas, en especial las nociones geométricas, son importantes para la etapa escolar temprana porque proporcionan elementos básicos para que los niños desarrollen conocimientos que les permitan desenvolverse en situaciones en grados superiores (Clements & Samara, 2014; Otálora 2016, 2017). La *congruencia geométrica* es una noción del campo de la geometría que las personas, incluyendo los niños, utilizan en su vida cotidiana para comprender la estructura del entorno (Wu, 2005).

El presente estudio, surge de la investigación realizada por Otálora (2016, 2017) en el que exploró el concepto de congruencia de triángulos en niños de 7-8 años, centrándose en los tipos de relaciones geométricas que los niños fueron capaces de inferir, y las formas de razonar que utilizaron. Sin embargo, en este estudio se pretende ampliar el enfoque y panorama de lo investigado por la autora, al caracterizar las trayectorias de razonamiento sobre la noción de congruencia y de las estrategias de medición de triángulos congruente en parejas de niños que tenían un rango de edad de 7-7.11 años trabajando en un Ambiente de Geometría Dinámica (desde aquí llamado AGD) en un periodo corto de tiempo, y examinar el rol del gesto en ese proceso de cambio.

Partiendo de un enfoque educativo, en esta investigación es menester profundizar el estudio sobre razonamiento geométrico informal porque se puede aprovechar de varias maneras: por un lado, se puede comprender cómo los niños logran acceder a pensamientos geométricos complejos a edades tempranas al ampliar el panorama investigativo acerca de su manera de razonar sobre las relaciones entre objetos geométricos desde una perspectiva matemática y los procesos cognitivos que conlleva. A su vez, beneficiar en los niños a

edades tempranas procesos de aprendizaje sobre la noción de congruencia y aspectos geométricos de formas en 2D; y propiciar que, en la enseñanza de los primeros grados de la etapa escolar se imparta la exploración de conocimientos intuitivos geométricos como sería el concepto de congruencia cuando se enfoquen en aspectos matemáticos.

Este estudio indaga sobre nociones geométricas en etapa escolar temprana porque posiblemente proporciona elementos básicos para que los niños tengan conocimientos generales, que les permitan adaptarse ante situaciones matemáticas de mayor complejidad en grados superiores. Por ejemplo, hacer cálculos a partir de las relaciones que encuentran entre las formas como área o perímetro; siendo el razonamiento geométrico y espacial esencial para el funcionamiento cognitivo (Hawes, Moss, Caswell, Naqvi, & MacKinnon, 2017; Lee & Spelke, 2008; Ng & Sinclair, 2015; Otálora, 2016).

La congruencia desde una perspectiva dinámica es la noción geométrica central en este estudio, la cual parte de un enfoque de transformación por el movimiento de los objetos geométricos en el plano. Tran, Reys, Teuscher, Dingmany y Kasmer (2016) argumentan que la congruencia se da cuando los niños comprenden que una figura bidimensional es congruente con otra, si la segunda puede obtenerse de la primera mediante una secuencia de rotaciones, reflexiones y traslaciones generando dos figuras congruentes a pesar de las transformaciones aplicadas. En otras palabras, a partir de esa secuencia de rotación, traslación y reflexión de una figura en el plano ésta se desplaza generando cambios de su posición y orientación pero conservando su forma y tamaño, así la distancia de los lados y ángulos se conservan guardando el principio de igualdad al haber una secuencia de transformaciones en una de ellas.

El objetivo de este estudio se centra en caracterizar las trayectorias de razonamiento geométrico y de las estrategias de medición entre triángulos congruentes y examinar el rol

del gesto en este proceso de cambio en niños de 7 años, durante una secuencia de actividades exploratorias y de resolución de problemas que exigen construir triángulos congruentes y usarlos en la composición de nuevas figuras en un AGD. Según Siegler (2006) las estrategias no son un procedimiento obligatorio pero tienen un objetivo dirigido hacia un fin. Analizar las estrategias de medición que utilizan los niños en la resolución y explicación de las tareas permite en este estudio vislumbrar o corroborar si los niños logran construir triángulos congruentes, componer figuras con triángulos congruentes y verificar en estos dos tipos de situaciones que dos o más figuras pueden ser congruentes entre sí.

La importancia de enfocarse en el rol del gesto en este proceso de aprendizaje del razonamiento geométrico está enmarcado en el que los niños cognitivamente son capaces de representar diferentes propiedades del mundo físico, y algunas de esas representaciones son matemáticas y espaciales que codifican y utilizan de manera espontánea encontrando relaciones geométricas de distancias y ángulos, y el reconocimiento de esas propiedades denotan en el niño un razonamiento informal geométrico (Lee & Spelke, 2011; Shusterman, Lee, & Spelke, 2008).

Los niños generan ideas geométricas (Clements, Battista, & Sarama, 2001) que co-construyen a partir del entorno en una relación entre cuerpo-mente-artefacto, evidenciando que tanto el cuerpo como los artefactos ofrecen opciones ilimitadas de razonamiento en un acoplamiento directo de sensación, acción, representación, cuerpo, movimiento y mente (Malaforius, 2013). El gesto es un precursor de cambio que permite entender cuándo el niño está en un estado de transición-aprendizaje, al comunicar conocimientos y propiciar procesos de cambio (Goldin, 2001).

La mano es un canal muy importante por el cual interactúa el sujeto con el mundo (tocar) y empieza a darle significado y generar clasificaciones conceptuales. La forma de

analizar el lenguaje ha evolucionado, es decir, no solo se tiene en cuenta para analizarlo el aspecto verbal sino también un sistema gestual (cara, mano, cuerpo) que permite identificar en el ser humano la manera como razona sobre el mundo que lo rodea (Malafouris, 2013). Por lo tanto, al estar los niños inmersos en un mundo semiótico ellos expresan sus comprensiones a partir de la interacción comunicativa que abarca palabras, acciones y gestos (Ng & Sinclair, 2015).

El gesto constituye en sí mismo el razonamiento propio de la persona y cuando los niños hacen uso del gesto pueden emerger procesos de aprendizaje matemático (Radford, 2014; Sinclair et al., 2013), es decir, el niño puede crear mediante una representación con la mano una noción matemática que no logra decir mediante el habla al utilizar gestos individuales o secuencias de gestos con las manos, que les permitan comunicar con los otros (investigador y el par) la manera en que están razonando sobre la congruencia.

Para estudiar el razonamiento geométrico y las estrategias de medición que tienen los niños sobre la noción de congruencia, se propone el diseño e implementación de una secuencia de ambientes de aprendizaje llamada “Construyendo las Llaves del Castillo Mágico”, la cual incorpora cuatro situaciones: dos exploratorias, una de resolución de problemas de formas simples y una de resolución de problemas de compuestas con triángulos en un AGD.

Los AGDs se basan en tecnologías digitales interactivas que permiten promover en las personas nuevos saberes a través de la reflexión, la retroalimentación y la observación de objetos matemáticos en forma dinámica (Ng & Sinclair, 2015; Sinclair, Freitas, & Ferrara, 2013; Sinclair & Yurita, 2008). Las tecnologías digitales interactivas permiten el movimiento del objeto geométrico y el software *Geometer's Sketchpad* para iPad que se implementa en este estudio es una de ellas. La tecnología multi-touch que permite este tipo

de software favorece la colaboración, las habilidades para resolver problemas y mejora el uso de representaciones matemáticas a través de la flexibilidad, la expresividad gestual y la exploración táctil (Hegedus, 2013). Además, permite que los elementos estén continuamente en movimiento en función del tiempo a partir de la manipulación y la interacción directa del sujeto con los objetos. Al utilizar los niños los AGDs generan diferentes nociones geométricas al explorar patrones, formas, comparar magnitudes, explorar cambios dinámicos, clasificar y realizar relaciones espaciales (Seo & Ginsburg, 2004).

Utilizar tecnologías digitales en AGD permite evidenciar varias modalidades de comunicación como verbalizaciones, acciones y gestos que son la fuente de análisis de las comprensiones que realizan los niños sobre el objeto geométrico. En este sentido, la manera en como los niños del estudio comunican la forma en que están razonando geométricamente sobre la congruencia y las estrategias de medición que utilizan, se evidencian a partir de la secuencia de tareas de aprendizaje “Construyendo las Llaves del Castillo Mágico” implementadas en el software Sketchpad para Ipad, en un AGD.

Los tipos de comunicación que se tienen en cuenta como fuente de análisis para el estudio son las acciones, las verbalizaciones y los gestos. Para facilitar el proceso de comunicación los niños no trabajan solos directamente con el software y en relación con el investigador, sino que realizan un trabajo en parejas en un proceso de interacción social desde una perspectiva histórica-cultural-material en una coordinación semiótica entre el habla interna, externa, acciones, formas sensoriales, gestos, artefactos y herramientas culturales como el software (Radford, 2014) y con apoyo de una entrevista basada en tareas (Healy & Hoyles, 1999) compuesta por preguntas enfocadas en indagar sobre el proceso o solución que ellos desempeñan en toda la secuencia de aprendizaje.

Este estudio emplea un diseño microgenético que permite analizar la emergencia y cambio de las trayectorias de las estrategias de medición y de razonamiento geométrico sobre la congruencia, mediante las medidas repetidas recolectadas en una escala de tiempo a corto plazo mediante el uso del AGD específicamente el software Sketchpad en una secuencia de tareas de ambiente de aprendizaje con situaciones exploratorias y de resolución de problemas. Estas situaciones permiten la indagación, reflexión y comprensión de los niños cuando aplican relaciones de atributos y propiedades, y generan procesos de composición y descomposición (Clements & Sarama, 2014).

2. Planteamiento del Problema

Actualmente existen algunos estudios que han indagado sobre razonamiento geométrico enfocado en el concepto de congruencia en niños a edades tempranas (Beilin, Klein, & Whitehurst, 1982; Clements, Batista, & Sarama, 2001; Clements & Sarama, 2014; Otálora 2016,2017). En general, estos estudios han mostrado que los niños logran razonar geométricamente sobre la noción de congruencia aunque para ellos dar sentido a estas relaciones geométricas representa grandes desafíos. Sin embargo, a pesar de estos hallazgos pocos estudios se han enfocado en realizar un estudio sistemático del desarrollo de la congruencia (Beilin et al., 1982; Clements et al., 2001; Otálora 2016,2017).

En particular, existen cuatro estudios enfocados al desarrollo del concepto de congruencia que arrojan evidencia de un razonamiento informal en niños entre los 4 y 8 años, algunos desde una perspectiva psicológica (Beilin et al., 1982; Otálora 2016, 2017); y otros desde una perspectiva de la educación matemática (Clements et al., 2001).

Beilin et al. (1982) evidenciaron que niños entre los 4 a 8 años utilizaban estrategias de medición para determinar figuras congruentes, pero mostraron habilidades de congruencia limitadas porque ellos tendían a comparar solo un lado de las formas para decidir si dos figuras eran congruentes o no. Las estrategias sofisticadas como la superposición que implicaba sobreponer una figura sobre la otra, eran utilizadas principalmente por niños de 9 a 11 años. La dificultad del enfoque de Beilin et al. (1982) es que estaban limitados a ver lo que los niños podían expresar verbalmente enfocando sus resultados en acierto o error en las actividades.

Clements et al. (2001) estudiaron el concepto de congruencia en una intervención instructiva sobre conceptos de geometría en una escuela primaria mediante el uso de herramientas de programación y manipuladores informáticos para introducir temas

geométricos conocidas como Logo. En sus resultados encontraron que los niños de 6 y 7 años desarrollaron ideas intuitivas sobre congruencia y fueron capaces de dar un criterio sobre si los pares de figuras tienen o no la misma forma y tamaño. La investigación de Clements et al. (2001) es una de las primeras investigaciones en indagar sobre la noción de congruencia utilizando artefactos tecnológicos, pero sus análisis estaban enfocados en el rendimiento de los niños (éxitos y dificultades) y no en sus procesos de creación matemática en las diferentes tareas.

Dos investigaciones realizadas por Otálora (2016, 2017) estuvieron enfocadas en la manera en que los niños razonaban sobre la noción de congruencia y en la utilización de estrategias de medición en ambientes de geometría dinámica. Otálora, (2016, 2017) exploró la emergencia y desarrollo del concepto de congruencia de triángulos en niños de 7-8 años en una escuela pública de Massachusetts, EE.UU. El estudio se enfocó en reconocer los tipos de relaciones que grupos de niños son capaces de inferir en situaciones colaborativas de resolución de problemas y de exploración sobre congruencia, evidenciando su razonamiento sobre la congruencia y las estrategias de medición que utilizaron para resolver este tipo de situaciones.

Otálora (2016) evidenció en sus resultados aspectos importantes en niños entre los 7 y 8 años: 1) utilizaron varias estrategias colectivas de medición para crear triángulos congruentes (p.e. superposición de dos triángulos, alineación de los puntos de dos triángulos utilizando el eje x; y estimación de distancias entre los puntos alineados), y para asegurar que las dos figuras presentadas, en ese caso triángulos, tuvieran la misma forma y tamaño; 2) establecieron relaciones entre dinamismo e invariancia matemática respecto a la congruencia de los triángulos congruentes; y 3) utilizaron expresividad gestual como una manera para planificar y crear los triángulos congruentes.

Otálora (2017) en este estudio realizó una ampliación de las estrategias de medición empleadas por los niños en contraste con las reportadas en su estudio anterior: 1) *la alineación de los puntos correspondientes de los triángulos*, 2) *conteo de cuadros de las diferentes filas dentro de los triángulos* 3) *estimación de distancias con los dedos en el interior del triángulo* 4) *utilización de línea de simetría*, y 5) *seguimiento del Tamaño marcadores*. A su vez, encontró que el gesto podría jugar un rol en el desarrollo de estas estrategias enfatizando 3 puntos importantes: 1) el gesto fue preponderante en la emergencia y cambio de las estrategias; 2) los gestos individuales (representar una sola vez con la mano) y la secuencia de gestos con las manos son los que permitieron a los niños comunicar relaciones de congruencia en especial por el entorno de colaboración-tecnológica.; y 3) los gestos de las manos jugaron un papel fundamental en los niños en las actividades ya que encarnaron significados específicos que denotaban relaciones matemáticas y fueron cambiantes con el tiempo, dependiendo de la idea que querían comunicar.

En resumen en los dos estudios de Otálora (2016,2017) se evidencia el uso de estrategias de medición y de gestos en los niños como un factor importante en la comunicación en AGD; sin embargo, es necesario profundizar en: 1) la emergencia y cambio de las trayectorias que siguen las estrategias de medición que los niños utilizaron para llegar a la comprensión de “misma forma y mismo tamaño” de los triángulos en períodos cortos de tiempos; y 2) ¿cómo el gesto juega un papel importante en el cambio de razonamiento geométrico de los niños sobre la congruencia?

El presente estudio pretende examinar de manera sistemática estas dos cuestiones desde una perspectiva microgenética, partiendo de los hallazgos previos de que: 1) los niños poseen ideas intuitivas relacionadas con la congruencia antes de ingresar a la

escolarización a través de sus experiencias cotidianas, y con el tiempo logran construir un conocimiento que cada vez se hace más elaborado (Clements et al., 2001); 2) alrededor de los 7 y 8 años de edad los niños comienzan a utilizar estrategias espontáneas para comparar algunas propiedades de formas congruentes (Beilin et al., 1982); y 3) el uso de tecnologías en AGD facilitan el dinamismo de los objetos geométricos mediante el uso de la tecnología, propiciando en los niños la emergencia del razonamiento geométrico sobre la congruencia, y la utilización de estrategias de medición en situaciones de resolución de problemas y de exploración (Otálora 2016, 2017). Estas premisas respaldan la suposición de este estudio de que en edades entre los 7 y 8 años los niños pueden comenzar el proceso de analizar informalmente figuras congruentes.

Teniendo en cuenta estos planteamientos, el presente estudio se guía por las siguientes preguntas de investigación: *¿Cómo emergen y cambian las trayectorias de las estrategias de medición de triángulos congruentes y de razonamiento geométrico sobre la congruencia, en parejas de niños de 7 años, durante una secuencia de actividades exploratorias y de resolución de problemas en un AGD desde un enfoque microgenético? y ¿cuál es el rol del gesto en ese proceso de cambio?*

3. Objetivos

Objetivo General

Caracterizar las trayectorias de las estrategias de medición de triángulos congruentes y de razonamiento sobre la congruencia, y examinar el rol del gesto en este proceso de cambio, en parejas de niños de 7 años, durante una secuencia de actividades diseñadas en AGD que implicaba construir triángulos congruentes y usarlos en la composición de nuevas figuras.

Objetivos específicos

- 1) Diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje, con una secuencia de situaciones exploratorias y de resolución de problemas en el software Geometer's Sketchpad, que permitan identificar en el proceso de construir y componer figuras de triángulos congruentes, las estrategias de medición que los niños utilizan y sus razonamientos sobre el concepto de congruencia, a partir de su proceso comunicativo de acciones, verbalizaciones y gestos.
- 2) Caracterizar la emergencia y posibles trayectorias de las estrategias de medición de triángulos congruentes y de razonamiento geométrico sobre la congruencia.
- 3) Examinar el rol del gesto en el proceso del cambio de las trayectorias de razonamiento geométrico sobre triángulos congruentes en un AGD.

4. Antecedentes

4.1. Relaciones geométricas a edades tempranas y la noción de congruencia

El concepto de congruencia no se estudia comúnmente en edades tempranas, sin embargo, existen estudios que evidencian que los niños muestran desarrollo de habilidades geométricas tempranas que les permiten acceder cognitivamente a este concepto. Por ejemplo, Spelke, Gilmore, y McCarthy (2011) y Shustermann, Lee, y Spelke (2008) en sus estudios, encontraron que niños de 4 a 6 años son capaces de distinguir o ser sensibles a ángulos y distancias que les permitió entender diseños geométricos bidimensionales y realizar correspondencias o relaciones geométricas, con el fin de resolver problemas que se les presentaron que incluían figuras geométricas tales como triángulos.

Un aporte importante respecto a las estrategias de medición es lo reportado por Beilin et al. (1982) al corroborar con su estudio que niños con rango de edades entre los 4 y 8 años dieron cuenta de su razonamiento sobre congruencia al solucionar situaciones entre triángulos congruentes utilizando estrategias. Los autores encontraron principalmente 4 estrategias: 1) *La estrategia de emparejamiento de bordes*: que involucró que los niños colocaron un triángulo al lado del otro, con la intención de que uno de los bordes del triángulo a transformar estuviera en paralelo del borde del triángulo modelo; 2) *Superposición*: los niños ubicaron una figura sobre otra que indica que tuvieron en cuenta la figura como un todo unificándolas, y esa ubicación de una figura sobre otra podría ser realizada por un movimiento de anticipación;

3) *Selección casual/azar*: que indica que los niños escogieron la figura aleatoriamente, en este caso los autores reportaron que solo en los niños de 4 años se presentó con una frecuencia relativamente baja debido a que ellos realizaban también una

organización para resolver la tarea; y 4) *La inspección visual sin verificación*: los niños realizaban una comparación perceptiva de las figuras. Las 2 primeras estrategias reflejaron el conocimiento y las habilidades informales emergentes de los niños sobre la congruencia.

El punto crucial que aporta la investigación de Beilin et al. (1982) es que los niños entre los 4 a 8 años ya tienen ideas intuitivas que tienen alusión a razonamiento sobre congruencia, reflejadas en la utilización de estrategias de verificación de la relación de congruencia entre 2 figuras. En particular, los niños de 7 y 8 años utilizaron estrategias avanzadas que les permitió verificar la congruencia entre 2 triángulos, como la superposición que conlleva consigo ideas de anticipación de la estructura espacial de las figuras.

Otros investigadores también han encontrado que los niños de 4 - 7 años muestran habilidades tempranas que implican relaciones sobre los atributos de las figuras. Particularmente Hawes, Moss, Caswell, Naqvi, y MacKinnon (2017) evidenciaron que niños de 4 a 8 años de edad lograron reconocer a partir de dichas habilidades de razonamiento geométrico viso-espacial y de transformaciones espaciales, nociones de congruencia como “misma forma” y “mismo tamaño”, enfocándose en relaciones entre la cantidad de lados de las figuras compuestas.

Adicionalmente, en este estudio de Hawes et al. (2017) implementaron tareas de intervención educativa con uso de geometría en 2D de figuras que incluían composición de formas. Los autores evidenciaron que los niños entre los 4 y 8 años lograron realizar procesos de composición y descomposición de figuras compuestas a partir de relaciones de propiedades de formas simples y compuestas. Las tareas que utilizaron los autores en su investigación facilitaron la creación de la segunda parte de las situaciones de resolución de

problemas de este estudio relativas a la construcción de figuras compuestas de triángulos congruentes.

4.2 El objeto geométrico en AGD: El uso de las tecnologías digitales interactivas y el papel del gesto

Las investigaciones reportadas a continuación estarán enmarcadas dentro de la perspectiva del uso de tecnologías digitales llamadas ambientes de geometría dinámica (AGD). Estos son sistemas interactivos digitales que sirven para trabajar con objetos geométricos dinámicos, por ejemplo triángulos congruentes. El dinamismo se logra a medida que el usuario mueve el objeto geométrico con un mouse o con los dedos y este se transforma continuamente, pero sus características matemáticas permanecen invariables (Moreno et al., 2008).

Algunos investigadores, han reconocido los beneficios que tiene el uso de las tecnologías digitales interactivas para evidenciar el conocimiento intuitivo sobre el objeto geométrico en niños a edades tempranas a través de la expresividad verbal y también la no verbal, como por ejemplo la gestual (Hegedus, 2013; Ng & Sinclair, 2015; Sinclair, De Freitas, & Ferrara, 2013).

Existe evidencia (Ng & Sinclair, 2015; Sinclair, et al., 2013) que demuestra que las tecnologías digitales facilitan en los niños representaciones multimodales que favorecen su producción de estrategias matemáticas, es decir, los niños evidencian representaciones a partir de lo visual y lo gestual de los objetos geométricos que benefician la producción de estrategias matemáticas para resolver problemas relacionados con conceptos geométricos.

Investigadores como Ng y Sinclair (2015) señalan que el uso de tecnologías digitales interactivas facilitó el uso y observación de objetos geométricos en forma

dinámica favoreciendo la representación y el razonamiento en los niños mediante las transformaciones de las figuras, al generar retroalimentación a los individuos en tiempo real y producción constante de signos mediante expresividad gestual cuando trabajaron en grupo los niños en el aula de clase.

En relación a la expresividad gestual y lo simbólico Sinclair, et al. (2013) y Ng y Sinclair (2015), en sus investigaciones reconocen dichos factores como un componente importante para comprender las relaciones geométricas en AGD. Los niños en los dos estudios trabajaron con tecnologías digitales como el *software sketchpad*, y se refirieron a los objetos matemáticos mediante un lenguaje signado cuando utilizaron gestos compartidos en pequeños grupos e identificaron o expresaron relaciones geométricas.

En esta misma vía, Bussi y Baccaglin (2015) usaron un experimento de enseñanza con niños de 6-7 años en el cual ellos debían sembrar semillas usando una operación matemática (relaciones) a través de la herramienta digital de *abeja-bot*. En los resultados los investigadores evidenciaron que los gestos fueron los más eficaces en la comunicación quizás especialmente en la auto-comunicación, y facilitaron la forma de compartir y de representar en los niños la noción de ángulo.

Otálora (2016, 2017), utilizó un enfoque de uso de tecnologías interactivas multimodales para investigar la emergencia y desarrollo de relaciones de congruencia a edad temprana. La autora examinó la forma en que niños trabajando en pequeños grupos de segundo grado con edades de 7-8 años, desarrollaron formas de razonar sobre la congruencia mientras exploraban y resolvían problemas de manera colaborativa con representaciones dinámicas de triángulos usando Sketchpad en el iPad. El estudio implementó una secuencia de 7 actividades con tareas de congruencia y similaridad en que

los niños debían utilizar estrategias matemáticas para crear triángulos congruentes dentro de un entorno multi-touch.

Otálora (2016) evidenció los siguientes hallazgos: 1) El uso del software Sketchpad en AGD sirvió como un mediador al evidenciar en niños de 7 a 8 años el dinamismo de relaciones geométricas relativas a la congruencia de triángulos, como por ejemplo “mismo cambio de tamaño” y “mismo movimiento”; 2) los niños utilizaron la expresividad gestual mediada por la planificación colectiva en las estrategias para crear triángulos congruentes en AGD, es decir, los niños utilizaban los gestos en el iPad para representar un triángulo y propiedades del mismo. Por ejemplo, mediante gestos con las manos representaron los lados de los triángulos o el área del mismo; 3) Los niños de 7 a 8 años utilizaron estrategias informales de medición emergentes con un enfoque matemático cuando trabajaban en grupo para asegurar que 2 triángulos tuvieran la misma forma y tamaño, durante la creación colectiva de triángulos congruentes como por ejemplo: *superposición* de dos triángulos, *alineación de los puntos de dos triángulos* utilizando el eje x y *estimación de distancias* entre los puntos alineados. Estas formas informales de medición les permitieron a los niños igualar correctamente la longitud de todos los lados.

Otálora (2017) encontró una ampliación de nuevas estrategias de medición que evidenciaban razonamiento de los niños sobre la congruencia, aparte de las reportadas en su estudio anterior, las cuales son: 1) *la alineación de los puntos correspondientes de los triángulos*, 2) *conteo de cuadros de las diferentes filas dentro de los triángulos* 3) *estimación de distancias con los dedos en el interior del triángulo* 4) *utilización de línea de simetría*, 5) *seguimiento del Tamaño marcadores*. A su vez, la autora evidenció cómo la aparición y desarrollo del razonamiento en los niños sobre la congruencia estaba mediada por los siguientes factores: 1) el dinamismo de los objetos geométricos y las tecnologías

facilitó la aparición de razonamiento en los niños sobre la congruencia; 2) los niños se basaron en sus experiencias previas de la cotidianidad como medios para matematizar las actividades de congruencia; 3) la colaboración entre pares trabajando en pequeños grupos fue un papel fundamental en el apoyo del desarrollo de maneras de razonar de los niños dentro y fuera de las actividades; 4) la colaboración de la investigadora a través de preguntas y diseño de la secuencia de actividades fomentó el desarrollo del razonamiento de los niños; 5) los gestos individuales (acciones emergentes que realizaron los niños con las manos) y la secuencia o cadena de gestos que emergieron con las manos, les permitió a los niños comunicar relaciones de congruencia, en especial mediante la cadena de gestos que se enriquecía socialmente por el entorno de colaboración-tecnológica.

En relación a este último resultado Otálora (2017) identificó aspectos fundamentales del gesto: 1) fue preponderante en la utilización de las estrategias; 2) los gestos individuales y la secuencia de gestos con las manos son los que permitieron a los niños comunicar relaciones de congruencia, en especial por el entorno de colaboración-tecnológica; y 3) los gestos de las manos jugaron un papel fundamental en los niños en las actividades, ya que encarnaron significados específicos que denotaban relaciones matemáticas y estos son cambiantes con el tiempo dependiendo de la idea que querían comunicar.

Estos tipos de estudios con tecnología dinámica facilitan en esta investigación identificar que utilizar tecnologías digitales en AGD permite varias modalidades de comunicación como verbalizaciones, acciones y gestos que son una fuente de análisis para identificar la forma en que los niños están razonando geométricamente sobre la congruencia y las estrategias de medición que utilizan. Por otro lado, de los estudios de Otálora (2016, 2017) se obtiene una base de las estrategias de medición que se pueden llegar a encontrar en esta investigación.

4.3 Estudios de microanálisis: un enfoque en el razonamiento geométrico

Las investigaciones reportadas a continuación, están enmarcadas dentro de la perspectiva del uso del método microgenético para estudiar el razonamiento matemático de los niños enfocándose en cómo se producen los cambios en una condición experimental en particular. Investigadores han utilizado la metodología microgenética mediante la implementación de estudios de casos únicos ya sean con o sin instrucción (Goldin, 2001; Guevara y Puche, 2010; Novack & Goldin-Meadow, 2015); otros se han centrado en presentarle a los niños una densidad alta de experiencia con el objetivo de realizar un análisis más detallado de los cambios de lo que sea posible (Guevara, van Dijk, & van Geert, 2016; Siegler & Crowley, 1994; Siegler & Jenkins, 1989). Estos dos tipos de estudios no requieren un grupo control debido a que se centran en identificar la forma en como el cambio se produce (Siegler, 2006).

Siegler y Shrager (1984) en una investigación de corte microgenético estuvieron interesados en estudiar resolución de problemas de suma y resta y arrojaron un hallazgo que solo mediante la observación de medidas repetidas lograron evidenciar, es decir, ellos identificaron que los niños utilizaron varias estrategias en lugar de un único enfoque (una sola estrategia) cuando debían resolver las tareas de suma o resta. En esta misma vía, Siegler y Jenkins (1989) propusieron un estudio microgenético con niños de 4 - 5 años de edad en que debían resolver problemas de suma. Los investigadores encontraron que inicialmente los niños usaban estrategias menos avanzadas como contar desde uno y no la más eficiente *min* que implicaba añadir cifras desde el sumando mayor. No obstante, los niños descubrieron en el proceso de la investigación la estrategia *min* y la usaban más constantemente para resolver las situaciones problema.

Estos estudios se mencionaron porque analizan procesos de desempeño matemático en situaciones con alta densidad de observaciones que permiten evidenciar: 1) que las estrategias siguen diferentes vías de cambio; 2) que no hay una sola forma de resolver una tarea sino varias; y 3) que las rutas que toman las trayectorias muestran como el conocimiento se desenvuelve.

Por otro lado, una investigación que implementa diseños microgenéticos de estudios de casos con enfoque cualitativo y a profundidad es la realizada por Goldin (2001), en la cual aplicó 2 tipos de tareas a los niños sobre conceptos matemáticos: 1) *conservación*, en la cual le presentaban al niño dos filas con dos magnitudes iguales y ellos debían decir si conservaban la misma cantidad mediante diversos niveles; y 2) *equivalencia*, en la cual los niños debían encontrar el número que generaba la misma cantidad en ambos lados de la operación ($5 + 6 + 7 = _ + 7$). Siendo el resultado más importante que el gesto fue precursor de cambio y de aprendizaje matemático, principalmente el gesto espontáneo.

En conclusión, estas investigaciones que se han mencionado en este apartado de revisión bibliográfica son de importancia para este estudio por las siguientes razones: 1) demuestran que los niños a edades tempranas ya son capaces de razonar de manera intuitiva sobre aspectos geométricos (Lee & Spelke, 2011; Shusterman, Lee, & Spelke, 2008); 2) entre los 7 y 8 años de edad los niños comienzan a utilizar estrategias espontáneas para comparar propiedades de formas congruentes (Beilin et al., 1982; Otálora 2016, 2017); lo que sustenta que a estas edades los niños podrían comenzar el proceso de analizar informalmente figuras congruentes y utilizar estrategias matemáticas no solo para comparar los objetos geométricos y establecer relaciones de congruencia, sino para verificar que la congruencia existe; 3) denotan la utilización de tecnologías digitales interactivas en AGD para facilitar la aproximación a varias formas de representaciones matemáticas y generar

nuevas formas de razonamiento simbólico; 4) la colaboración entre pares trabajando en pequeños grupos juega un papel fundamental en el desarrollo de maneras de razonar de los niños dentro y fuera de las actividades; 5) evidencian que los niños entre los 7 y 8 años utilizan gestos que acompañan el habla, para explicar lo que están entendiendo de los objetos geométricos y realizar relaciones matemáticas;

6) demuestran que los estudios microgenéticos son una buena fuente de información en el análisis de los cambios (Goldin, 2001; Pine, Lufkin, & Kirk, 2007; Siegler 1994;), es decir, al identificar las fuentes de cambio, las rutas o trayectorias de cambio, por la densidad de las observaciones que se registran y por la variabilidad que permite encontrar las diferencias entre los niños así como al conjunto cambiante de estrategias utilizadas por cada niño (Siegler 1994, 2006).

5. Marco Teórico

5.1 Cambio y variabilidad en los procesos de aprendizaje

El cambio desde la perspectiva de autores clásicos como Piaget y Vygotsky, se comprende desde el primer autor como una transición en el desarrollo de la persona sin tener en cuenta procesos de continuidad que pueden surgir en ese paso de un estado a otro como una base que oriente un desarrollo posterior; y desde la perspectiva contextual dialéctica de Vygotsky, los planteamientos centrales son en los cambios culturales e individuales al identificar procesos biológicos, sociales, culturales e históricos para realizar un análisis dialéctico entre todos esos factores propiciando la multicausalidad y multidireccionalidad (Larreamendy, Puche, & Restrepo, 2008).

No obstante, el cambio en este estudio es desde una mirada de la microgénesis que se enfoca en el proceso de aprendizaje en un tiempo corto y en una situación particular o situada que es descrito por Siegler (2006), como estados de transición que implican regresiones y progresiones que son importantes para que sucedan los cambios y se debe estudiar de cerca mientras los niños están aprendiendo. El cambio no es un proceso abrupto sino que es gradual a partir de relaciones flexibles en el uso de las estrategias por parte del niño al combinar varias estrategias (2 o 3) para resolver un problema. Los cambios se pueden producir de cuatro maneras enfocadas en el uso de las estrategias “1) *al introducir estrategias nuevas y más avanzadas*; 2) *uso creciente de las estrategias más avanzadas entre las que ya se conocen*, 3) *ejecución de estrategias cada vez más efectivas*, y 4) *opciones más adaptativas entre las estrategias*” (Rittle-Johnson & Siegler, 1999, p. 333). El cambio puede ser analizado por cinco dimensiones descritas por Siegler (2006):

1) la fuente de cambio se refiere a las causas que ponen en marcha el cambio ; 2) las rutas de cambio, es la secuencia de estados de conocimiento, representación o comportamientos predominantes que utilizan los niños mientras que ganan la competencia; 3) la tasa de cambio, indica cuánto tiempo o experiencia separa el uso inicial de un nuevo enfoque del uso consistente del mismo; 4) la amplitud del cambio implica cuando el nuevo enfoque se generaliza a otros problemas y contextos; y 5) la variabilidad, se refiere a las diferencias entre los niños en las otras dimensiones de cambio, así como al conjunto cambiante de estrategias utilizadas por niños individuales. (p. 479)

La identificación de los procesos que regulan los cambios en la cantidad y el tipo de variabilidad es importante para reconocer y comprender el cambio (Sielger, 2007); y los fenómenos centrales en este estudio para analizar el cambio son las rutas de cambio o trayectoria, y la variabilidad intra e interindividual en el proceso de aprendizaje.

En las rutas de cambio enfoques nuevos cualitativamente y cuantitativamente distintos aparecen que permiten al investigador identificar las rutas para describir o representar los razonamientos predominantes que utilizan los niños mientras están en una situación que pueden ser analizadas de dos formas, mediante una consistencia en estados de razonamiento o desviaciones en los mismos. En este sentido, las rutas de cambio son las trayectorias que permiten identificar las vías que está tomando el razonamiento de los sujetos que puede ser variable en estados de consistencia y desviaciones, es decir, reflejar cambios en el razonamiento al emerger nuevas rutas que pueden ser similares o tener variaciones entre diferentes niños de la misma edad expuestos al mismo procedimiento experimental (Siegler, 2006).

El razonamiento de los niños es variable ya sea entre niños de diferentes edades, con el mismo rango de edad e incluso dentro de un mismo individuo resolviendo una tarea o series de problemas (Siegler, 2006). En este sentido, razonar y actuar de diversas maneras les da a los niños la oportunidad de explorar el entorno de la tarea cuando es el caso y observar las consecuencias a partir de diversos enfoques alternativos (Rittle-Johnson & Siegler, 1999). La *variabilidad inter-individual*, implica las variaciones entre los niños de un mismo grupo que tiene varias fuentes incluyendo la edad, el contexto y el conocimiento inicial que influye en el aprendizaje (Ordoñez, 2011; Siegler 1994; Siegler & Crowley, 1991). Además, existe *variabilidad intraindividual* que son las fluctuaciones que cambian en un mismo sujeto en el tiempo (Siegler & Crowley, 1991; Siegler, 1994, 1996).

De acuerdo con Siegler (2006) la alta variabilidad inicial del uso de una estrategia predice un aprendizaje posterior. Los niños a menudo usan enfoques más avanzados en un ensayo y luego regresan a unos menos avanzados en los posteriores incluso cuando la misma situación problema se presenta en días próximos en el tiempo; en este sentido, la variabilidad en el niño es importante para predecir, analizar y comprender los mecanismos del cambio (Siegler, 2007). Existen dos mecanismos que especifican cómo la variabilidad conduce cambios: 1) el uso entre estrategias más y menos avanzadas, y 2) la co-ocurrencia de varias estrategias en un mismo ensayo o entre situaciones, es decir, dos o más estrategias aparecen en un mismo momento de observación. En este estudio se utiliza la definición de estrategia de Siegler (2006), que alude a un procedimiento o conjunto de acciones no obligatorias que realiza una persona para llegar a un objetivo.

Hay ocasiones en el proceso de aprendizaje en que se presenta disminución o baja variabilidad, aumento o alta variabilidad y periodos de relativa estabilidad, es decir, que se pueden encontrar momentos más variables que otros y un patrón que se repita durante el

proceso de aprendizaje que evidencia surgimiento, fortalecimiento de nuevos conocimientos y debilitamiento de razonamientos anteriores (Siegler, 2006). No obstante, todo este proceso de variabilidad es un componente esencial ya que plantea que el aprendizaje de un estado/significado en una persona parte de la utilización de estrategias diferentes de su propio repertorio en la resolución de problemas (Siegler, 1996).

5.2. Aprendizaje de relaciones geométricas y uso de tecnologías digitales en AGD

El aprendizaje sobre la noción de congruencia se analiza a partir de como los niños representan, usan las formas y establecen relaciones entre ellas. Existe un estudio realizado por Clements y Sarama (2014) en el cual identificaron trayectorias de aprendizaje sobre cómo los niños empiezan a razonar sobre las formas y llegan a nociones de congruencia geométrica.

Los niños son sensibles a las formas desde el primer año de vida y las manipulan activamente. La forma es un concepto fundamental en el proceso cognitivo y existen tipos de formas como los “ejemplares”, que son las formas típicas como triángulos, cuadrados, rectángulos, círculos, entre otras (Clements & Sarama, 2014). Los niños en su proceso de aprendizaje sobre las formas no reconocen fácilmente todas las formas, por ejemplo los triángulos y rectángulos son los más difíciles de identificar por ellos ya que alrededor de los 4-6 años es que muestran un razonamiento sobre este tipo de formas (Clements & Sarama, 2014).

Clements y Sarama (2014) plantean que existen atributos y propiedades para identificar una forma. Los *atributos* se refieren a describir las partes o cualquier tipo de característica (4 lados) de la forma; y las *propiedades* describen relaciones entre las partes de las formas. Los niños entre los 2 y 4 años no solo generan ideas sobre los atributos y las

propiedades de las formas, sino que en el tiempo cambian ese razonamiento e indagan sobre *relaciones geométricas* entre las propiedades de las formas tales como simetría, congruencia, similaridad y transformaciones en el plano a partir de los 7 años en adelante.

Preguntas sobre la congruencia es uno de los principales interrogantes de los niños *¿estas formas son iguales o son diferentes?* pero para responder esta duda el niño requiere realizar relaciones no solo entre las partes de una misma figura, sino de diferentes figuras. Los niños entre los 6 y 8 años de manera gradual transitan de considerar solo alguna parte de la figura a efectuar relaciones entre las partes de la figura incluyendo relaciones espaciales, y después pasan a considerar relaciones entre las partes de varias figuras (Clements & Sarama, 2014).

Existen algunas consideraciones sobre trayectorias que describen cómo los niños empiezan a comprender las formas y llegar a nociones de congruencia, empezando por descripciones meramente perceptivas, descifrando atributos y finalmente realizando relaciones, las cuales han sido planteadas por Clements y Sarama (2014):

- De los 2-3 años los niños reconocen formas como círculos y cuadrados. A partir de los 4 años los niños empiezan a comparar y realizar combinaciones de formas al reconocer los atributos, pero sólo examina una parte de la figura.
- De los 5-6 años reconocen ángulos, formas 3D y describen las formas más comunes incluyendo rombos.
- A los 7 años pueden determinar la congruencia mediante la comparación de todos los atributos y relaciones espaciales (misma forma y tamaño al comparar sus lados y ángulos).
- De los 8 años en adelante, los niños representan ángulos de forma explícita, explican mediante transformaciones las propiedades geométricas, y no dan sólo

explicaciones sobre los atributos, sino que realizan relaciones de propiedades denotando lo invariante en la forma (comienzan a utilizar lenguaje técnico).

Los niños entre los 6 y 8 años no solo identifican formas simples y las comparan, sino que también son capaces de construir figuras compuestas a partir de formas mediante procesos de composición y descomposición. Estos dos procesos en los niños también tienen una trayectoria y requieren de una competencia de combinación de formas para producir formas compuestas, tal como fue propuesto por Clements y Sarama (2014):

- A partir de los 6 años los niños empiezan a combinar formas para crear nuevas formas enfocando sus explicaciones en los atributos de las formas. Sin embargo, sus acciones se basan en sustituciones de formas pequeñas, utilizan el ensayo y error, se les dificulta descomponer formas y requieren ayuda de un otro.
- A los 7 años repiten una forma compuesta y se guían por patrones pero no realizan coordinación de unidades. Descomponen la forma de manera independiente a partir de imágenes y no como un todo.
- De los 8 años en adelante son capaces de construir una estructura grande realizando combinación de patrones para luego juntarlos como un todo. Son conscientes de que las formas compuestas están constituidas por otras formas. Además, logran descomponer la figura como un todo, volverla a armar y crear figuras diferentes a partir de estas.

Existen maneras de fomentar el aprendizaje de los niños sobre relaciones geométricas mediante la utilización de entornos tecnológicos. Clements y Sarama (2014) señalan que “animar a los niños a realizar y analizar los movimientos geométricos mejora sus habilidades espaciales, por eso es importante utilizar entornos informáticos para que los niños aprendan sobre la congruencia y simetría” (p. 155). Las tecnologías digitales

promueven en los niños la reflexión, discusión y permiten desarrollar su razonamiento acerca de las relaciones entre las clases de formas mediante la implementación de actividades que permitan identificar, explorar, promover y crear formas.

Las tecnologías digitales interactivas son mediadores que generan conocimiento emergente, debido a que el conocimiento está relacionado con las representaciones que se muestran en el artefacto mediador y el razonamiento asociado al uso de estas (Armella & Santos, 2016). Este tipo de tecnologías pueden apoyar a la comprensión y organización de ideas geométricas al ser un mediador que fomenta la ejecutabilidad de múltiples representaciones, la interacción de los niños con variadas formas de representación, promueve el desarrollo del razonamiento intuitivo y habilidades en matemáticas a temprana edad (Hegedus, 2013; Moreno-Armella, Hegedus, & Kaput, 2008; Sinclair & Moss, 2012; Sinclair et al. 2013).

Investigadores han planteado que la utilización de tecnologías digitales en procesos de aprendizaje posibilitan elaboración y progreso de nuevas nociones matemáticas en los niños (Hegedus, 2013; Moreno-Armella, et al., 2008; Ng & Sinclair, 2015; Otalora, 2016). Se destacan cinco características de las tecnologías digitales como promotores del desarrollo del razonamiento intuitivo sobre el objeto geométrico a edades tempranas (Moreno-Armella et al., 2008): 1) El proceso de *coacción* permite al niño guiar o ser guiado de manera simultánea por un entorno de software dinámico generando retroalimentación visual y háptica; 2) el *dinamismo* que puede ser discreto o continuo. Por una parte, discreto en cuanto a los medios de comunicación que pueden ser maleables y re-animan notaciones. Por otro lado, el continuo es sensible a la entrada cenestésica o *co-acción*; detectar movimiento a través del tiempo y espacio permite la interacción gestual. Un ejemplo de este es el software Skechpad para Ipad que permite realizar acciones continuas con

dispositivos hápticos multitouch; 3) Interacción desde un enfoque dinámico, está relacionado directamente con lo que la persona puede realizar a partir de la mediación o lo que brinda la herramienta, como representaciones ejecutables; 4) Ejecución de las acciones son intencionales y son provocadas por el entorno en que actúan, por ejemplo, permite explorar figuras dinámicas, formular conjeturas y argumentación (Armella & Santos, 2016); y 5) la *multimodalidad* son las formas en que las personas generan diversos signos, es decir, utilizan el habla, los gestos, las acciones y los diagramas en la comprensión del objeto geométrico y resolución de tareas matemáticas.

La multimodalidad pone de manifiesto en las personas la capacidad visual, gestual y expresiva a partir de sistemas de comunicación (Ng & Sinclair, 2015; Sinclair et al., 2013). Para caracterizar el sistema de comunicación en niños Radford (2014) propone la unión entre la comunicación y el razonamiento como procesos inherentes el uno del otro. La comunicación puede ser analizada mediante tres modalidades: las verbalizaciones, acciones y gestos (acciones materializadas) que los niños generan para dar explicaciones en su proceso comunicativo en el contexto de las actividades que les presentan (Ng & Sinclair, 2015; Otálora, 2016; Radford, 2014; Sinclair et al., 2013).

5.3. Cognición en el cuerpo [Embodiment] y uso del gesto

La importancia de mirar el rol del gesto está enmarcado en que los niños cognitivamente son capaces de representar diferentes propiedades del mundo físico (Lee & Spelke, 2011; Shusterman, Lee & Spelke, 2008), y estas ideas no solamente son expresadas por lo que pueden comunicar verbalmente, sino que también recae en lo que sus gestos pueden expresar siendo parte del conocimiento en sí mismo (Radford, 2104). Los niños generan ideas geométricas (Clements, Batista & Sarama, 2001) que co-construyen a partir

del entorno en una relación entre cuerpo-mente-artefacto, evidenciando que tanto el cuerpo como los artefactos ofrecen opciones ilimitadas de razonamiento en un acoplamiento directo de sensación, acción, representación, cuerpo, movimiento y mente (Malaforius, 2013).

Lo anterior está enmarcado dentro del paradigma de la cognición en el cuerpo [“*embodiment*”] que rompe la barrera cuerpo-mente y propone la relación cerebro-cuerpo-artefacto. El cuerpo interactúa con artefactos que fomentan el proceso cognitivo interno, es decir, la cognición puede ser ampliamente extendida hacia el mundo externo (Malafouris, 2013). La mano es el principal canal por el cual interactúa el sujeto con el mundo (tocar) y empieza a darle significado y generar clasificaciones conceptuales. El lenguaje ha evolucionado como un sistema gestual (cara, mano, cuerpo) que le permite al ser humano razonar sobre el mundo que lo rodea mediante ellos (Malafouris, 2013).

En esta investigación se va a tener en cuenta el razonamiento geométrico como un proceso en que el razonamiento y la comunicación desde la perspectiva histórico-cultural-material de Radford (2014) se deben estudiar juntos. El razonamiento es una unidad dinámica de componentes materiales e ideales de reflexión- acción que ocurre no solo en la mente del sujeto sino que emprende una coordinación semiótica entre el habla interna y externa, acciones, formas sensoriales, los gestos, símbolos, artefactos y herramientas culturales que son propios de la comunicación (Radford, 2014).

El gesto puede cumplir dos roles en el proceso de aprendizaje, es decir, como precursor del cambio o un rol comunicativo donde el gesto en sí mismo es el conocimiento embebido en el cuerpo del niño (Radford, 2014) y que puede representar una creación matemática (Clements & Sarama, 2013; Sinclair et al., 2013). Desde el enfoque de la comunicación el gesto es una acción que puede significar algo conceptualmente sofisticado

o algo muy simple, es decir, los niños pueden complementar el habla con los gestos o utilizarlo cuando no encuentran las palabras para decir lo que están pensando de manera verbal, representando el niño el gesto como una forma especial de acción en sus cuerpos (Radford, 2014).

Por otro lado, como precursor del cambio la autora Goldin (2001) se refiere a los gestos espontáneos para identificarlos como precursor de cambio en el aprendizaje que aplica para todos los dominios de conocimiento. Los gestos espontáneos generan una visión en el otro de las comprensiones que puede estar teniendo la persona que no puede expresar de manera explícita mediante el habla. El conocimiento que subyace a este tipo de gestos es implícito debido a que el conocimiento en algunas ocasiones es inaccesible al lenguaje verbal, es decir, la persona no logra articular lingüísticamente el concepto para explicarlo pero el gesto contiene un carácter simbólico y un significado que demuestra que los niños a pesar de que no puedan expresar su conocimiento de manera explícita, si tienen esa representación interna que daría cuenta de sus comprensiones mediante el gesto (Goldin, 2001).

No obstante, a pesar de que se tiene en cuenta los postulados teóricos de esta autora, en este estudio el interés es de retomar el gesto como precursor de cambio. A su vez, hay un distanciamiento frente a su postura al referirse al gesto como si representara alguna cosa interna y no como si fuera el propio razonamiento en sí mismo del sujeto, lo cual va en contraposición de la teoría del embodiment, es decir, en esta investigación se va a tomar el gesto como el razonamiento en sí mismo tanto para el rol comunicativo y el rol de precursor de cambio.

6. Método

6.1 Participantes

6 niños de 7 años de edad ($\mu=7.3$; Rango 7-7.11 años) participaron en el estudio incluyendo 3 niños y 3 niñas. Los participantes se escogieron de 3 aulas diferentes de primer grado de una escuela privada de la ciudad de Cali y debían tener un acercamiento al uso de tecnologías pero no directamente con el *software*, debido a que se realizó una familiarización con el programa dentro del ambiente de aprendizaje diseñado. Los niños se agruparon en 3 parejas para el estudio. La participación de los niños fue mediada por dos tipos de consentimientos: uno institucional que se presentó mediante una carta formal que explicaba el objetivo, propósito e implicaciones del proyecto; y un consentimiento informado que se remitió a los padres de los participantes informándoles sobre las actividades que realizaron, con el propósito de que autorizaran voluntariamente por escrito la participación de sus hijos en la investigación. Por último, se les pidió a los niños firmar un asentimiento informado en la primera sesión que se les presentaron las actividades a realizar.

6.2. Diseño

Se realizó una investigación con un enfoque microgenético para analizar la emergencia y cambio de las trayectorias de las estrategias de medición de triángulos congruentes y de razonamiento geométrico sobre la congruencia mediante las medidas repetidas recolectadas en una escala de tiempo a corto plazo, es decir, durante las 9 sesiones en el contexto de un ambiente de aprendizaje en el que se le presentó a los participantes una secuencia de tareas. El método microgenético tiene tres dimensiones (Siegler & Crowley, 1991): a) *observación* que abarcará todo el proceso de cambio, es decir, desde que los niños

inicien la resolución de la tarea desarrollada, hasta un estado relativamente estable de sus desempeños; b) *densidad* de la observación referente a la velocidad de cambio que tenga el fenómeno a evaluar; y c) análisis intensivo *del comportamiento observado* ensayo por ensayo que propicia aspectos cuantitativos y cualitativos subyacentes a los procesos de cambio.

En este estudio microgenético se diseñó un ambiente de aprendizaje en formato digital que se denominó “Construyendo las Llaves del Castillo Mágico” que se presentó a los niños durante 9 sesiones. Este ambiente consistía en una secuencia de 4 situaciones, dos exploratorias y dos de resolución de problemas (Ver tabla 1). *Las dos situaciones exploratorias* cada una tenía una tarea y un ítem en cada tarea, en las cuales se les mostraba a los niños dos triángulos y ellos mediante movimientos dinámicos como rotaciones, traslaciones, dilatación y traslación daban cuenta de procesos de transformación y evidenciaban si ambos triángulos tenían “la misma forma” y “mismo tamaño” (lados y ángulos iguales).

La tercera situación fue la *de resolución de problemas de formas simples*: se le presentaba a los niños 3 tareas cada una subdividida en 3 ítems, es decir, cada ítem presentaba una tarea isomorfa donde lo que cambia era lo contextual. Este tipo de tareas demandaban construir triángulos congruentes al volver un triángulo idéntico a otro referente, pero la diferencia entre las tres tareas estaba en la cantidad de lados que pasaba por los ejes y los tipos de ángulos que tenían los triángulos (adaptadas de Otálora, 2016)

La cuarta situación fue la *de resolución de problemas de formas compuestas*: se le presentaba a los niños 5 tareas cada una subdividida en 3 ítems, es decir, cada ítem presentaba una tarea isomorfa donde lo que cambia era lo contextual. Los participantes debían construir figuras compuestas a partir de triángulos congruentes pero la diferencia

entre las 3 tareas estaba en que iban aumentando la cantidad de triángulos y el modelo se volvía más complejo porque debían realizar una mayor cantidad de relaciones (tarea adaptada de Hawes, Moss, Caswell, Naqvi, & MacKinnon, 2017). En ambas situaciones los niños debían verificar o demostrar si los triángulos eran congruentes entre sí. En total, se presentaron a cada pareja de niños 10 tareas para la secuencia de las 4 situaciones del ambiente de aprendizaje “Construyendo las Llaves del Castillo Mágico”, y entre todas sumaron 26 ítems distribuidos entre las 9 sesiones (Ver Tabla 1).

Tabla 1

Estructura de la secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje “construyendo las llaves del castillo mágico”

Situaciones	Tareas	No de Ítems por tarea	Sesión
Situación 1. Exploratoria 1	1 Tarea Exploratoria	1	
Situación 2: Exploratoria 2	1 Tarea Exploratoria	1	1
Situación 3: Resolución de problemas “formas simples”	Tarea N1	3	2
	Tarea N2	3	3
	Tarea N3	3	4
Situación 4: Resolución de problemas “formas compuestas”	Tarea N4	3	5
	Tarea N5	3	6
	Tarea N6	3	7
	Tarea N7	3	8
	Tarea N8	3	9
TOTAL	10	26	9

Nota: N= nivel de complejidad

El propósito de este diseño que estuvo distribuido en 4 situaciones, fue que los niños logaran el descubrimiento del principio geométrico implicado en el objeto matemático como lo es la congruencia geométrica entre triángulos. En esta secuencia de situaciones se plantearon dos metas de aprendizaje: (1) Exploración de la congruencia geométrica a través de modalidades sensoriales como la visión, el tacto y la modalidad háptica, e (2) identificación de propiedades y relaciones geométricas implicadas en los triángulos congruentes mediante resolución de problemas.

6.2.1 Instrumentos/tareas: Secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje “Construyendo las Llaves del Castillo Mágico”. Las 4 situaciones de exploración de congruencia y de resolución de problemas son una secuencia de aprendizaje denominada “Construyendo las llaves del castillo mágico”, la cual se implementó a partir de un juego digital utilizando el software *Geometer’s Sketchpad* versión 5 (Jackiw, 2009) para iPad con el app *Sketchpad Explorer*. El *Sketchpad* permite desplazar (arrastrar), manipular o animar los objetos matemáticos presentados de manera visual para ayudar en la comprensión de los conceptos fundamentales en áreas como geometría, álgebra, cálculo y entre otros. Este programa se puede utilizar con niños desde edad preescolar hasta jóvenes universitarios.

El ambiente de aprendizaje se les presentó a los niños como un juego en el iPad que tiene una historia: *“Había una vez en un lugar muy lejano, un castillo que ha estado gobernado por un dragón grande y fuerte, pero nadie ha podido entrar al castillo porque tiene muchas puertas y sólo tenemos partes de las llaves para abrirlas y poder ver qué hay escondido detrás de cada una. Por eso me van ayudar a construir las llaves. Hay unas llaves que tienen pocas partes y otras que se tienen varias partes para construirla”*. A su vez, antes de presentarles las 4 situaciones se les mostró una tarea de familiarización la cual contenía dos triángulos no congruentes, uno rosado (estático) y el otro azul (dinámico) que tenían puntos rojos que permitían el movimiento o no de los mismos. En la familiarización se les realizaban preguntas como *¿Cuáles son los nombres de estas formas? ¿Cuántas hay? ¿Qué colores?* Después de que reconocían las figuras como triángulos, se les decía que señalaran los puntos del triángulo rosado y del triángulo azul para explicarles que estos puntos permitían arrastrar los triángulos, y se les pedía que los movieran y comentaran qué

pasaba con cada uno de estos cuando intentaban moverlos. Posterior a la presentación del ambiente de aprendizaje y de la familiarización, se presentó la secuencia de las 4 situaciones:

1) ***Exploración de congruencia uno.*** Se les mostraron a los niños dos triángulos rectos dinámicos congruentes de color azul y rosado con puntos rojos que permitían el movimiento. En este caso el triángulo azul se movía y se transformaba en relación al rosado, es decir, cuando el triángulo rosado se transformaba el azul también lo hacía paralelamente cambiando a la misma forma y tamaño simultáneamente, pero no orientación y posición en la pantalla. En la consigna se les pedía a los niños que arrastraran el triángulo azul en la pantalla y dijeran qué pasaba con el triángulo rosado cuando movían el triángulo azul. Posteriormente, se les realizaban preguntas de seguimiento enfocadas en *rotación* (¿Qué sucede con el triángulo rosado cuando giras el triángulo azul?), *en dilatación* (¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando haces el triángulo azul más grande?), *en reducción* (¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando haces el triángulo azul más pequeño?), *en traslación* (¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando deslizas el triángulo azul?), *en tamaño* (¿Cómo se compara el tamaño del triángulo rosado con el tamaño del triángulo azul?) y *en forma* (¿Cómo se comparan la forma del triángulo rosado a la forma del triángulo verde? (Ver anexo 2).

2) ***Exploración de congruencia dos.*** Se les mostraba a los niños dos triángulos dinámicos congruentes uno verde que se movía y se transformaba completamente en relación al rosado cambiando su orientación y posición idéntica entre sí, llegando al caso de ser superpuestos los dos triángulos pero conservando la misma estructura geométrica en relación a sus propiedades de congruencia. En este caso, se les pidió a los niños que

arrastraran el triángulo verde y dijeran qué pasaba con el triángulo rosado. Se les hacían las mismas preguntas de la tarea de exploración de congruencia uno (Ver anexo 2).

3) **Situación de resolución de problemas formas simples.** Se le presentaron a los niños 3 tareas que demandaban construir triángulos congruentes al volver un triángulo idéntico a otro referente (Ver tabla 1). La red o cuadrícula con el plano cartesiano y los marcadores de tamaño que es donde se mostraba cuanto miden los triángulos en centímetros, siempre fueron visibles para ser utilizados como herramienta. En la tarea N1, N2 y N3 en cada uno de los 3 ítems se le mostraban a los niños dos triángulos no congruentes uno estático (referente) y otro dinámico de diferente color, y se les pedía que hicieran el triángulo dinámico idéntico al triángulo estático para que posteriormente dijeran la estrategia que usaron. Se les pidió a los niños explicación y justificación de por qué son idénticos ambos triángulos después de transformar el triángulo dinámico en cada ítem de las 3 tareas.

La diferencia entre cada tarea estaba implicada en los elementos estructurantes, es decir, en la tarea N1 el triángulo referente tiene un ángulo recto y dos lados sobre el eje X o Y; en la tarea N2 el triángulo referente es un triángulo isósceles con dos lados y ángulos iguales. Sólo un lado pasa sobre uno de los ejes sea Y o X; y en la tarea N3 el triángulo referente es obtuso al tener tres lados y ángulos diferentes y dos lados pasan sobre uno de los ejes. En este sentido, las tareas de la N1-N3 aumenta el nivel de complejidad a medida que los lados dejan de estar sobre los ejes X o Y, y eso hace que dificulte la tarea en especial la N3.

4) **Situación de resolución de problemas formas compuestas.** En esta situación se le presentó a los niños 5 tareas que demandaban que construyeran figuras compuestas a partir de triángulos congruentes que iban aumentando la cantidad de fichas, y el modelo entre

cada tarea era más complejo componiendo una mayor cantidad de relaciones (Ver Tabla 1). La red o cuadrícula con el plano cartesiano siempre fueron visibles, pero los marcadores de tamaño solamente eran visibles para la tarea N4 y N5 aunque los niños podían hacerlos aparecer mediante un botón que tenía la herramienta. En las tareas N3, N4, N5, N6 y N7 en cada uno de los 3 ítems que se subdivide cada una se les mostraba a los niños al lado izquierdo de la pantalla triángulos no congruentes (dinámicos) y al lado derecho triángulos congruentes que conformaban una figura compuesta por estos (figura referente estática). En cada consigna de las tareas se les decía a los niños que su misión era construir con los triángulos (dinámicos no congruentes) una llave idéntica a la del boceto (la llave referente conformada por triángulos estáticos).

Posteriormente, se les dijo *“piensen y digan la estrategia que usaron”* pidiéndoles explicación de cómo lo hicieron y justificación de por qué son idénticos ambas llaves y los triángulos entre sí con que la construyeron. Solo si los niños no referían espontáneamente se les presentaban preguntas de seguimiento sobre *forma* (¿Podrían comparar las formas de los dos triángulos y decirme qué observan?) y *tamaño* (¿Podrían comparar la longitud de estos dos lados de los dos triángulos? ¿Qué notan?).

La diferencia entre cada tarea estaba implicada en los elementos estructurantes, es decir, en la tarea N4 los participantes debían transformar 4 triángulos dinámicos isósceles no congruentes en congruentes utilizando procesos como traslación, rotación y reflexión para construir una figura paralela a la llave referente presentada que estaba conformada por cuatro triángulos isósceles congruentes estáticos; en la tarea N5 los participantes transformaban 5 triángulos verdes dinámicos no congruentes en congruentes para construir una figura paralela a la llave referente presentada que estaba conformada por cinco triángulos isósceles congruentes estáticos; en la tarea N6 los participantes transformaban 6

triángulos dinámicos no congruentes en congruentes para construir una figura paralela a la llave referente presentada que estaba conformada por 6 triángulos isósceles congruentes estáticos; en la tarea N7 los participantes debían transformar 8 triángulos dinámicos no congruentes azules en congruentes para construir una figura paralela a la llave referente presentada que estaba conformada por 8 triángulos isósceles congruentes estáticos; y en la tarea N8 debían transformar 10 triángulos dinámicos no congruentes cafés en congruentes para construir una figura paralela a la llave referente presentada que estaba conformada por 10 triángulos rectos congruentes estáticos.

6.2.2. Procedimiento.

Para implementar el diseño se realizaron 9 sesiones de observación dos veces por semana con cada una de las 3 parejas durante un mes y una semana entre los meses de abril y mayo del 2019 (Ver Tabla 2). Los niños trabajaron en parejas dirigidos por el investigador en un escenario informal por fuera del aula de clase y no en el contexto de educación formal. Se realizó una observación participante con entrevista basada en tareas (Healy & Hoyles, 1999) a los niños mientras resolvían la secuencia de situaciones de ambiente de aprendizaje en el iPad. Cabe aclarar que el tiempo máximo para las sesiones fue de 45 minutos.

Tabla 2.

Sesiones por pareja de niños en semanas y días y sesiones para presentar la secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje “Construyendo las llaves del castillo mágico”

Tiempo	Semana 1		Semana 2		Semana 3		Semana 4		Semana 5
	Mcles S1	Jueves S2	Mcles S3	Jueves S4	Martes S5	Jueves S6	Martes S7	Jueves S8	Martes S9
45 Min.	Pareja 1		Pareja 2		Pareja 3		Pareja 1		Pareja 2
45 Min	Pareja 2		Pareja 3		Pareja 1		Pareja 2		Pareja 3
45 Min	Pareja 3		Pareja 1		Pareja 2		Pareja 3		Pareja 1

Nota: S=sesiones, y el cambio de orden de las parejas dependió de la franja horaria en que la pareja de niños debía salir del salón.

6.3. Estrategias de Recolección de información

Se utilizó la entrevista basada en tareas (Healy & Hoyles, 1999) durante la aplicación de la secuencia de aprendizaje, y como fuente primaria de los datos se utilizaron las transcripciones de las entrevistas. Igualmente, se utilizó la información proporcionada por dos cámaras de video que permitieron grabar las aplicaciones, una de ellas enfocada en el rostro y las manos de los participantes y la otra cámara enfocada directamente en las manos de los participantes sobre el objeto. Además, se realizó una tabla de registro por sesión que sirvió como guía para conocer en qué parte de la secuencia de tareas del ambiente de aprendizaje estaba cada pareja de niños, y si lograban resolver o no las tareas (no tienen ninguna incidencia evaluativa). Las estrategias que se utilizaron para recoger la información se describen a continuación de manera detallada.

6.3.1. Entrevista basada en tareas. El propósito de emplear la entrevista basada en tareas fue que se realizaron preguntas pre-establecidas pero otras surgieron en el proceso de interacción e intercambio de ideas al investigador emplear un protocolo flexible que movilizaba en los niños el razonamiento geométrico sobre la congruencia, mientras exploraban las tareas y resolvían problemas en un entorno tecnológico (Healy & Hoyles, 1999)

La entrevista basada en tareas fue realizada con cada una de las 3 parejas e implementada en la secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje. Cada entrevista fue realizada en cada ítem de las 4 situaciones presentadas de exploración o de resolución de problemas, es decir, que se realizó 26 veces con cada pareja (Ver Tabla 1 para la distribución de la secuencia de aprendizaje). La pareja de niños estaba sentada alrededor de una mesa con el iPad en la mitad de ambos y en cada ítem que se le presentaba se le realizó una pregunta abierta predeterminada. Igualmente, después de escuchar lo que ellos

planteaban se realizaban preguntas de seguimiento para profundizar, es decir, habían preguntas que estaban explícitas en el protocolo pero otras que surgieron dentro del proceso de la entrevista (Ver entrevista en Anexo 2).

Las indicaciones fueron dirigidos a acciones que los niños debían hacer directamente en la manipulación y observación de la parte geométrica de los objetos presentados en las tareas de exploración de congruencia “*Me gustaría que arrastren el triángulo azul y me digan que pasa con el triángulo rosado*”; mientras que las directrices en las tareas de resolución de problemas fueron dirigidas a estipular el problema y fomentar a los niños a generar una estrategia que les permita resolverlo “*me gustaría que hicieran el triángulo azul idéntico al triangulo rosado, piensen y díganme una estrategia para volver el triángulo azul idéntico al rosado*”. Además, algunas directrices iban dirigidas a interrogar su razonamiento (¿qué opinas de?), su forma de pensar acerca de lo que dijo o hizo el otro niño (¿qué piensas de lo que él o ella dijo?), o pedirles demostrar o mostrar algo (¿me podrías mostrar lo que estas explicando?).

6.3.2. Observación de los videos. Durante la aplicación de la secuencia de tareas de aprendizaje se utilizaron dos cámaras de video: Una de las cámaras estaba al frente de los niños enfocando el rostro y manos de los participantes; y la otra cámara estaba diagonal a los participantes para capturar sus manos (los dedos) sobre el iPad y el producto de la manipulación sobre la pantalla. La observación de las cintas de video se consideró una segunda fuente de información que permitió analizar en detalle las acciones y los gestos de los niños en su proceso de comunicación, para identificar el uso de las estrategias y el razonamiento geométrico de ellos.

6.4. Análisis de los datos

La unidad de análisis para describir y analizar cada una de las 3 parejas fueron las acciones, gestos y verbalizaciones de cada pareja de niños trabajando juntos en su proceso comunicativo (Radford, 2014) durante las tareas de tipo exploratoria y de resolución de problemas a lo largo de las secuencias de situaciones del ambiente de aprendizaje de la sesión 1 a la 9, en el contexto del entorno tecnológico con preguntas que orientaba una persona con más conocimiento en el proceso (Ng y Sinclair, 2015; Otálora, 2016). Es decir, que para analizar este proceso comunicativo no se tuvo en cuenta cada niño de la pareja por separado, sino el diálogo conjunto donde se evidenciaba las estrategias de medición, los niveles de razonamiento y el uso del gesto.

6.4.1 Frecuencias y trayectorias de las estrategias de medición. Para identificar las estrategias en este estudio se analizaron el conjunto de acciones, gestos y verbalizaciones que utilizaron los niños mientras trabajan en parejas en tareas de exploración y resolución de problemas de congruencia en el AGD con el iPad y guiado por el investigador, durante las 9 sesiones en que se presentaron las tareas del ambiente de aprendizaje. Se realizó un árbol categorial o mapa de codificación con las diversas estrategias que se evidenciaron en Otálora (2017), Beilin et al. (1982) y en el pilotaje del presente estudio realizado durante el mes de octubre del 2018 (Ver Tabla 3). Las estrategias se organizan en tres niveles: 1) *viso-espacial*, que se refiere a desempeños relacionados con percepciones visuales y espaciales para resolver situaciones o problemas de congruencia (Otálora, 2017); 2) *cualitativo*, que se refiere a utilizar estrategias de medición que implican tener en cuenta la cualidad del objeto enfocado en sus propiedades y características (Otálora, 2017); y 3) *cuantitativo*: implica usar estrategias que tengan en cuenta la cantidad, es decir, utilizar procesos de cuantificación o representar numéricamente el objeto o lo que

se está observando (Ross, 2007). En general, no surgieron categorías de estrategias emergentes después de analizar los resultados, sin embargo, sí se identificó la categoría de línea de simetría que no se había evidenciado en pilotaje realizado en el 2018.

Las estrategias de medición de congruencia se analizaron de dos formas: 1) Se realizó un análisis de frecuencia para identificar cuantas veces aparecieron los tipos de estrategias de cada categoría, durante cada sesión teniendo en cuenta el esquema de categorías (Ver Tabla 3); y 2) Para el análisis de las trayectorias se empleó la Técnica de Series de Tiempo basado en la estrategia metodológica utilizada por Yan y Fisher (2002) en su diseño, para generar un gráfico de trayectorias que incluía la variable dependiente sobre el eje Y de *Categorías de estrategias de medición*; y en el eje X la variable independiente *tiempo* con las 9 sesiones de observación. En esta figura se analizó la variabilidad intra e intersesión teniendo en cuenta los momentos de cambios que presentó la trayectoria.

Tabla 3.
Descripción de estrategias de medición

Categoría	Tipo de Estrategia	Descripción	Indicador
1 Viso-Espaciales	<i>Inspección visual sin verificación (IV)</i>	Ejecución basado en lo visual	1. Crean una forma que se ve como el triángulo referente, basado en una percepción visual global de este referente pero no es congruente. No verifican si es congruente (tiene diferentes longitudes de lados y ángulos).
	<i>Línea de simetría (LS)</i>	Utilizan el eje de simetría para dejar en paralelo las formas simples y compuestas.	1. Los niños utilizan un eje de simetría (una línea vertical en medio de los triángulos) para transformar los triángulos, ubicando el triángulo dinámico en forma de espejo con respecto al triángulo referente.
	<i>Alineación (AL)</i>	Realiza o total basada en la relación de los elementos de los triángulos.	1. Los niños ubican un triángulo al lado del otro o en paralelo del borde del triángulo modelo (puede tener una distancia relativa pero debe estar alineado). Puede ser una única coincidencia de bordes o varias. Realizan una línea paralela de uno o varias puntas del triángulo referente al dinámico. Alineación de los puntos correspondientes de los dos triángulos.
	<i>Superposición (SU)</i>	Ubica una figura sobre otra y hace que coincidan las formas, teniendo en cuenta la figura como un todo basada en la correspondencia entre todos los	1. Hace yuxtaposición de formas 2. Los niños superponen un triángulo sobre el otro, que indica que tuvieron en cuenta la figura como un todo unificado. Esa ubicación podría ser realizada por un movimiento de anticipación 3. En este proceso los niños denotan invariancia matemática respecto a la congruencia de los triángulos, es decir, al superponer un triángulo sobre otro iguala cada lado de la figura dinámica en la referente, teniendo en cuenta la distancia que
2. Cualitativas			

	elementos del triángulo.	hay entre cada punta de los lados que deben quedar igual.
3. Cuantitativas	<i>Utilización de marcadores cualitativa (CM)</i>	Igualan los tamaños teniendo en cuenta los marcadores pero no en sentido numérico 1. Los niños utilizan expresiones como “miden lo mismo” “por el mismo número” “se vuelve del mismo centímetro” pero no dicen el número del marcador o lo señalan. Todos los indicadores muestran que usan información cualitativa más que cuantitativa.
	<i>Utilización de marcadores cuantitativa (QM)</i>	Igualan los triángulos teniendo en cuenta los marcadores de tamaño que dice el perímetro de cada triángulo 1. Los niños dicen el número que representa los marcadores de tamaño como una forma de monitoreo. Dice mide 25.55 el triángulo rosado y el triángulo azul. Los señalan. 2. Los niños suman las cantidades de cada triángulo para decir cuánto es la medida total de la figura.
	<i>Conteo (CO)</i>	Utilizan estrategias de cuantificación 1. Los niños cuentan los cuadros de la cuadrícula dentro del triángulo modelo posteriormente al triángulo que deben transformar para que quede igual. Con el dedo sobre el iPad en uno de los lados de la figura simulando medir al fraccionar el dedo utilizando la cuadrícula (Ponemos el dedo aquí (sobre la figura original) y contamos los cuadros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (señala con el dedo entre la figura y el dedo sobrepuesto).

Nota. IV= Inspección visual sin verificación, LS= Línea de simetría, AL= Alineación, SU= Superposición, CM= Utilización de marcadores cualitativa, QM= Utilización de marcadores cuantitativa, CO= Conteo. Estas siglas se utilizarán para presentar los análisis y serán los códigos de los subtipos de las estrategias de medición viso-espaciales, cualitativas y cuantitativas.

6.4.2 Trayectorias de razonamiento geométrico y uso del gesto. Particularmente, para analizar el *razonamiento* en este estudio el autor principal de referencia es Radford (2014) quien lo define como “una forma ideal de material de reflexión y acción, el cual no solo ocurre en la cabeza sino también a través de una coordinación semiótica sofisticada entre el habla, cuerpo, gestos, símbolos y herramientas” (p. 268). En este sentido, las maneras de razonar en los niños se definieron a partir de sus actos comunicativos (Ng & Sinclair, 2015; Otálora, 2016; Radford, 2014) durante la secuencia de tareas de ambiente de aprendizaje. La forma de identificar el razonamiento geométrico sobre congruencia fue mediante un esquema de 5 categorías (Ver Tabla 4). Estas categorías se basaron en un modelo de desarrollo de conceptos geométricos como ‘congruencia’, ‘simetría’ y ‘similaridad’, que elabora el grupo Cognición Científica y Matemática del *Centro de Investigaciones en Psicología, Cognición y Cultura* de la Universidad del Valle en la ciudad de Cali, en el proyecto *Desarrollo de Principios Conceptuales sobre Diseño de*

Ambientes de Aprendizaje para el Acceso Inclusivo al Pensamiento en STEM –Ciencias, Tecnologías, Ingenierías y Matemáticas– en Escuelas y Museos.

Una vez definidas las categorías se analizaron las trayectorias de razonamiento geométrico sobre la congruencia. Para esto se empleó igualmente la Técnica de Series de Tiempo y se clasificó por niveles el razonamiento a partir del esquema de codificación (Ver Tabla 4), es decir, se generó un gráfico de trayectorias que incluye la variable dependiente sobre el eje Y de *niveles de razonamiento geométrico sobre congruencia*; y en el eje X la variable independiente *tiempo* con las 9 sesiones. En esta figura se analizó la variabilidad intra e intersesión teniendo en cuenta los momentos de cambios que presentó la trayectoria.

Tabla 4

Esquema de codificación escalar de Categorías de los niveles de razonamiento geométrico sobre la congruencia, basadas en los tipos de conocimientos sobre las formas geométrica.

Nivel	Categorías	Descripción	Indicadores
1	Conocimiento implícito sobre la geometría de la forma enfocado en atributos.	Los niños son capaces de reconocer los atributos de las formas. Se enfocan en los atributos más que en las propiedades geométricas o relaciones geométricas. Por lo tanto, los niños no atribuyen una organización geométrica de los triángulos como un todo, no hacen las transformaciones del objeto y no establecen relaciones de congruencia entre ellos. No realizan una estrategia de medición para verificar la congruencia.	Razonamiento centrado en los atributos de la figura de manera aislada. 1. Reconoce los patrones geométricos de los triángulos en sus partes: por ejemplo decir tiene rayas, líneas, puntos, lados. 2. No reconoce los triángulos presentados desde el punto de vista de sus propiedades. 3. No reconoce las relaciones de igualdad entre las partes de los triángulos. 4. No reconoce las relaciones de igualdad entre los triángulos.
2	Conocimiento implícito sobre la geometría de la forma enfocado en propiedades geométricas, es decir, relaciones entre atributos de las figuras geométricas.	Los niños son capaces de reconocer la forma presentada como triángulos e identificar sus propiedades. Se enfocan en las propiedades geométricas, o relaciones entre atributos, más que en las relaciones entre propiedades geométricas. Por lo tanto, no establecen relaciones de congruencia resultantes de la transformación de los triángulos, referida a las relaciones de igualdad entre las partes de un solo triángulo, o las relaciones de igualdad entre triángulos. Utilizan una estrategia de basado en lo visual.	Razonamiento centrado en relaciones entre dos o más atributos geométricos. 1. Reconoce que las formas presentadas son triángulos. 2. Reconoce propiedades geométricas, es decir, relaciones entre atributos en un solo triángulo (tiene 3 lados, tiene 3 puntas), pero no se refiere a la igualdad entre ellos, utilizando alguna medida de medición. 3. No elabora una explicación sobre el porqué son triángulos basándose en la transformación realizada. 4. No reconoce las relaciones de igualdad entre los triángulos. 5. Utiliza estrategias viso-espaciales, como la inspección visual sin verificación.

3	Conocimiento implícito sobre la geometría de la forma enfocado en <i>relaciones geométricas de congruencia parciales</i> entre propiedades o comparaciones parciales.	Los niños son capaces de reconocer las formas presentadas como triángulos e identificar sus propiedades geométricas. Igualmente establecen <i>relaciones geométricas de congruencia parciales entre propiedades</i> , resultantes de la transformación de los triángulos dinámicos, referida a las relaciones de igualdad entre las partes de las figuras. Sin embargo, aún no establecen relaciones de congruencia entre triángulos, que implica la coordinación simultánea de varias relaciones entre propiedades. Utiliza combinación de estrategias para comparar entre si una parte de los triángulos.	Razonamiento centrado en relaciones parciales entre las propiedades de una figura o dos figuras: 1.Explicación sobre las operaciones realizadas para la transformación de los triángulos dinámicos: Rotación, Traslación, Reflexión 2. Reconoce relaciones de igualdad entre las partes de un mismo triángulo o figura compuesta, por ejemplo tiene tres lados con la misma longitud. 3. Reconoce relaciones de igualdad entre las partes de dos triángulos o figuras compuestas, pero no reconoce las relaciones de igualdad entre los triángulos presentados. Por ejemplo compara un solo lado entre los dos triángulos (nivel 1-3 del microanálisis) o un solo lado de las figuras compuestas (nivel 4-7 del microanálisis) . 4. Utiliza combinación de estrategias de medición para realizar sus explicaciones de igualdad entre los triángulos en las situaciones: 1) ubica un lado del triángulo dinámico paralelo al lado del triángulo referente y dice que son iguales y señala solo ese lado, utiliza estrategia de emparejamiento de borde y utiliza marcadores de tamaño, pero menciona sólo la relación de un lado de igualdad (aplica para formas simples y complejas); 2) cuenta cada uno de los cuadros que conforman los lados de cada lado del triángulo referente y dice que son igual a los lados paralelos al dinámico que transformaron (aplica para formas simples y compuestas)
4	Conocimiento implícito/ explícito sobre la geometría de la forma enfocado en relaciones geométricas de congruencia entre propiedades de las figuras geométricas, que hacen alusión solo al tamaño o solo a la forma para referirse a la noción	Los niños son capaces de reconocer los triángulos e identificar sus propiedades geométricas. Igualmente establecen relaciones geométricas de congruencia entre las propiedades, resultantes de la transformación de los triángulos dinámicos, referida a las relaciones de igualdad entre las partes de los triángulos y entre los triángulos, lo que implica la coordinación simultánea de varias relaciones entre propiedades de las formas. Sin embargo, las relaciones de congruencia están enfocadas o bien en la forma o bien en el tamaño, pero no se refieren al tamaño y a la forma al mismo tiempo.	Razonamiento centrado en relaciones entre las propiedades de ambas figuras enfocada solo en forma o solo en tamaño para dar alusión a la noción de congruencia: 1.Reconoce las figuras resultantes. 2.Realiza expresiones de dinamismo en la argumentación y explicación sobre las operaciones realizadas como: Rotación, Traslación,-Reflexión 3. Reconoce relaciones de igualdad entre las partes de los triángulos, y argumenta el porqué de las relaciones de igualdad entre los triángulos ya sea verbal y/o gestual. 4. En su narración se refiere a relaciones que hacen alusión sola a forma o bien sola al tamaño en el momento de comparar los triángulos o la figura construida con triángulos. Por ejemplo: el niño dice son lo mismo porque ambos tienen 3 lados y 3 puntas (...) para dar alusión la forma. Para dar alusión al tamaño el niño compara los tres lados de ambos triángulos enfocado en las longitudes al contar cada cuadro de la cuadrícula que conforma cada lado de los triángulos o de la figura compuesta referente y la construida por ellos. 5.Realizan combinación de estrategias, por ejemplo, utilizan emparejamiento de bordes ubicando los triángulos uno al lado del otro y realizan una línea de una punta superior del triángulo dinámico a la misma punta del triángulo referente y realizan el mismo proceso con las puntas inferiores, cuentan las longitudes de los lados (ya sea teniendo como referente el dedo o contando los cuadros de la cuadrícula) y señalan los marcadores de tamaño de ambos triángulos o de ambas figuras compuestas.

5	Conocimiento explícito sobre la geometría de la forma, enfocada en relaciones geométricas de congruencia entre propiedades de las figuras geométricas, que hacen alusión a forma y tamaño en sus explicaciones, es decir, realizan una comparación total de las figuras.	Los niños son capaces de reconocer los triángulos e identificar sus propiedades geométricas. Igualmente establece relaciones de congruencia resultantes de la transformación de los triángulos dinámicos, referida a las relaciones de igualdad entre las partes de los triángulos y entre triángulos, lo que implica la coordinación de varias relaciones entre propiedades de las formas. Sin embargo, las relaciones de congruencia están enfocadas en forma y tamaño, lo cual permite identificar una comparación total de las figuras geométricas simples o compuestas.	Razonamiento sobre la congruencia centrado en relaciones entre las propiedades de ambas figuras enfocada en forma y en tamaño, que permite una comparación total de las figuras: 1. Logra realizar todos los indicadores del nivel 4, pero en este nivel, reconoce y compara en su totalidad las figuras presentadas, es decir, es capaz de integrar una argumentación en que exprese tanto forma y tamaño, para dar cuenta del proceso de congruencia sin importar su posición u orientación, es decir, a pesar de las isometrias aplicadas reconoce el principio de invariancia y conservación de las figuras geométricas. Por ejemplo dice que son iguales los dos triángulos porque tienen tres lados y dos lados miden 5 cuadros (señala los lados de la figura referente y la construida por ellos) y el otro tiene 4 cuadros (señala el lado base de la figura referente y de la figura construida por ellos) 2. Realiza combinación de estrategias, por ejemplo, utiliza la estrategia de superposición del triángulo dinámico sobre el referente y realiza conteo de los cuadros que conforman la longitud de los lados cuando ya están superpuestos. Otro ejemplo es que superponen el/los triángulos y leen los marcadores de tamaño para verificar la igualdad, y dicen ninguna punta sobresale.
---	--	--	---

Dado que este estudio se propuso a vislumbrar el cambio en los niveles de razonamiento de los niños, el análisis se centró en la relación gesto-habla enfocándose en los gestos matemáticos que aparecieron durante la secuencia de tareas exploratorias y de resolución de problemas del ambiente de aprendizaje durante las 9 sesiones. En este estudio la manera en cómo se categorizo el gesto fue a partir de lo que los niños representaron mediante sus manos por fuera del iPad para llegar a nociones de congruencia enfocado en tres categorías, es decir, *atributo, propiedades o relaciones* (Ver Tabla 5) En este sentido, se llevó a cabo un análisis de la emergencia de estas categorías del gesto en relación con las trayectorias de razonamiento sobre la congruencia en las 3 parejas y se identificó el rol del gesto en el proceso de cambio del razonamiento geométrico.

La intención de generar este tipo de análisis de líneas de tiempo, fue igualmente encontrar puntos de convergencia con el uso del gesto que aparecieron sobre cada nivel de razonamiento en las trayectorias (representación como un ícono) teniendo en cuenta los

tipos de gesto que se presentan en la Tabla 5. Posteriormente a tener los tipos de gestos que emergen en la trayectoria se analizó la variabilidad intra e intersesión. En la variabilidad intersesión se identificaron los cambios en el uso de los tres tipos de gestos que se presentaron entre las sesiones; y en la variabilidad intrasesión los tipos de gestos que posiblemente fueron precursores de cambio en los niveles de razonamiento de las parejas de niños. Cabe aclarar, que en la variabilidad intra-sesión los gestos que se evidenciaron como posiblemente precursores de cambio en las trayectorias dentro de las sesiones en las parejas de niños son los mismos que se presentaron en el análisis cualitativo del gesto.

Tabla 5

Esquema de codificación de tipos de gesto por fuera del iPad que acompaña la verbalización

Nivel	Categorías	Indicadores
1	Gesto que refiere <i>atributos</i> : Cualquier característica de una figura (ej. longitud de un lado)	1. Alza la mano en forma recta representando un lado del triángulo. Une las dos manos una horizontal y otra vertical y forma un ángulo. 2. Dice “está como parado” dibuja una línea horizontal en el aire sobre el triángulo verde. 3. Dice “por las líneas” Dibuja en el aire con el dedo el lado izquierdo del triángulo verde y dibuja en el aire con el dedo el lado derecho del triángulo verde
2	Gesto que refiere a <i>propiedades</i> : tiene en cuenta relaciones entre las partes de una misma figura, es decir relaciones entre atributos (ej. número de lados y longitudes de la misma figura)	1. Junta el dedo pulgar e índice de ambas manos y realiza la forma de un triángulo. y dice “tiene tres lados-rayas y tres puntos” 2. Coloca el dedo horizontalmente en el lado base del triángulo amarillo, el mismo dedo lo coloca la lado derecho del triángulo, y finalmente lo coloca al lado izquierdo del triángulo amarillo. 3. Dice “el triángulo es así derecho” coloca los dedos índice y pulgar de ambas manos en el aire, formando un triángulo recto 4. Dice “los lados son los tres lados” señala triángulo naranja). Dice “los lados de acá” traza una línea siguiendo el lado izquierdo del triángulo naranja. Dice “de acá” traza una línea siguiendo el lado derecho. Dice “y de acá” traza una línea siguiendo el lado superior 5. Dice “representan como lo grande que es” se para de la silla y extiende los brazos. 6. Dice “algo que es largo” Coloca el dedo índice sobre la mesa y alza el brazo. Desliza el dedo de la otra mano sobre el dedo subiendo por la mano
3	Gesto que refiere <i>relaciones entre propiedades</i> de dos figuras. (ej. reconocer que los tres lados de un triángulo y los tres lados de otro triángulo tienen la misma longitud)	1. Empuña su mano derecha, después empuña su mano izquierda y las coloca en paralelo de manera idéntica; dice “porque este” señala la mano derecha, y dice “es igual a este” señala su mano izquierda. 2. Coloca las manos en forma paralela en el aire y dice “son iguales” 3. Dice “porque éste está más alargado” con las dos manos simula el largo de la figura verde. Dice “y éste está del mismo tamaño alargado” hace el mismo gesto sobre la figura rosada. Dice “sino que éste señala triángulo verde está para este lado” dibuja una línea vertical sobre la figura verde. Dice “y éste del otro lado señalando la figura rosada”. 4. Dice “metemos una figura en la otra figura adentro de la figura” la mano izquierda la coloca de manera cocaba horizontal y la mano derecha la extiende y la mueve hacia la izquierda y las une.

-
5. Dice “los lados del triángulo, los tres lados el lado de acá” con la mano horizontal la coloca sobre el aire encima del lado derecho del triángulo rosado y azul de los triángulos superpuestos, con la mano horizontal la coloca sobre el aire encima del lado izquierdo del triángulo rosado y azul de los triángulos superpuestos, con la mano horizontal la coloca sobre el aire encima del lado base del triángulo rosado y azul de los triángulos superpuestos. Dice “son idénticos el lado derecho izquierdo y el de abajo”
 6. Dice “medimos las unidades de medida del ancho y de largo de ambas. De largo son 12 unidades” traza una línea vertical en el aire. Dice “y de ancho son 16 unidades” traza una línea horizontal en el aire.
 7. Dice “estas líneas están como en éste” con el dedo dibuja una línea imaginaria horizontal que atraviesa ambas figuras. Dice “y termina en esta línea “hace otra línea imaginaria en la parte inferior que conecta las figuras”
 8. coloca el dedo índice entre en la base del triángulo amarillo, coloca el dedo índice en la base del triángulo naranja, coloca el dedo índice en el lado derecho del triángulo naranja, coloca el dedo índice en el lado derecho del triángulo amarillo-paralelo, coloca el dedo índice en el lado izquierdo del triángulo naranja, coloca el dedo índice en el lado izquierdo del triángulo amarillo-paralelo. Dice “miden lo mismo”
-

6.4.3 Análisis cualitativo del gesto. En este caso también se tuvo en cuenta los gestos que los niños representaron mediante sus manos por fuera del iPad. En este sentido, se analizaron algunos fragmentos específicos de las transcripciones de las 3 parejas donde apareció el gesto en relación con el habla acompañada de la imagen de la secuencia de gestos o del gesto individual, y se analizó cuál era la incidencia de ese gesto en el razonamiento que estaban teniendo los niños.

Los fragmentos que se presentaron estaban enfocados en evidenciar dos roles del gesto: 1) *el gesto en su rol comunicativo*, los fragmentos e imágenes que se analizaron evidenciaron en las 3 parejas que los gestos representaban algo conceptualmente sofisticado o algo muy simple, es decir, los niños complementaron el habla con los gestos o los utilizaron cuando no encontraban las palabras para decir lo que están pensando de manera verbal representando los niños el razonamiento embebido; y 2) *el gesto como precursor del cambio*, los fragmentos e imágenes presentadas en el análisis fueron seleccionados al contrastar con las trayectorias de razonamiento donde apareció el gesto en un momento de

observación y había un cambio a un nivel de razonamiento avanzado en el siguiente momento de observación dentro de la sesión.

Para corroborar ese cambio, se identificó en el proceso comunicativo de los niños en los videos y las transcripciones esos momentos de cambio evidenciados en las trayectorias de razonamiento de cada una de las 3 parejas, es decir, los fragmentos e imágenes presentadas en los análisis demostraban cuando cada una de las 3 parejas usó un gesto individual o una secuencia de gestos en un momento de observación (intervalo de cinco minutos de observación) y había un cambio en sus nivel de razonamiento a niveles superiores en un momento de observación posterior en una misma sesión.

7. Resultados

7.1 Frecuencias de uso de estrategias de medición

En este primer apartado del capítulo se va a identificar y explicitar lo referente a los resultados de frecuencia sobre el uso de los tipos de estrategias de medición y las estrategias específicas de medición (ver descripción de categorías y subcategorías en Tabla 3) utilizadas por las 3 parejas, para caracterizar cómo fue su desempeño en toda la secuencia de tareas del ambiente de aprendizaje y a nivel intra e intersesión.

En la Figura 1 se presenta el uso de las estrategias cualitativas, cuantitativas y viso-espaciales de cada una de las 3 parejas durante las 9 sesiones mediante un diagrama de barras.

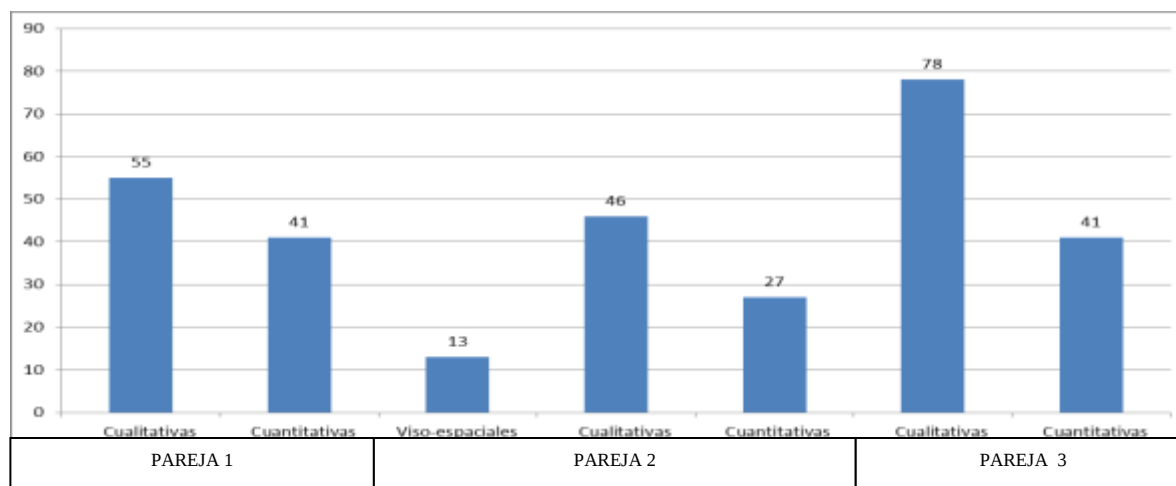


Figura.1. Frecuencias de categorías de estrategias de la pareja 1, la pareja 2 y la pareja 3.

En la Figura 1, se evidenció que la pareja 1 y 3 no utilizaron ninguna estrategia viso-espacial, pero la pareja 2 sí lo hizo con una frecuencia de 13 veces. Todas las parejas utilizaron estrategias cualitativas y cuantitativas. La estrategia más predominante en las 3 parejas fue la cualitativa. Las estrategias cuantitativas fueron utilizadas por las parejas 1 y 3 en una misma cantidad de veces, es decir, 41.

En la Figura 2, se identificó a partir de un diagrama de frecuencias cuáles fueron los subtipos de estrategias de medición cualitativas, cuantitativas y viso-espaciales que aparecieron en cada una de las 3 parejas en toda la secuencia de aprendizaje. Las siglas que aparecen en la Figura 2 son para realizar el análisis y serán los códigos de los tipos de las estrategias de medición viso-espaciales, cualitativas y cuantitativas, es decir, IV= Inspección visual sin verificación, LS= Línea de simetría, AL= Alineación, U= Superposición, CM= Utilización de marcadores Cualitativa, QM= Utilización de marcadores cuantitativa; y CO= Conteo.

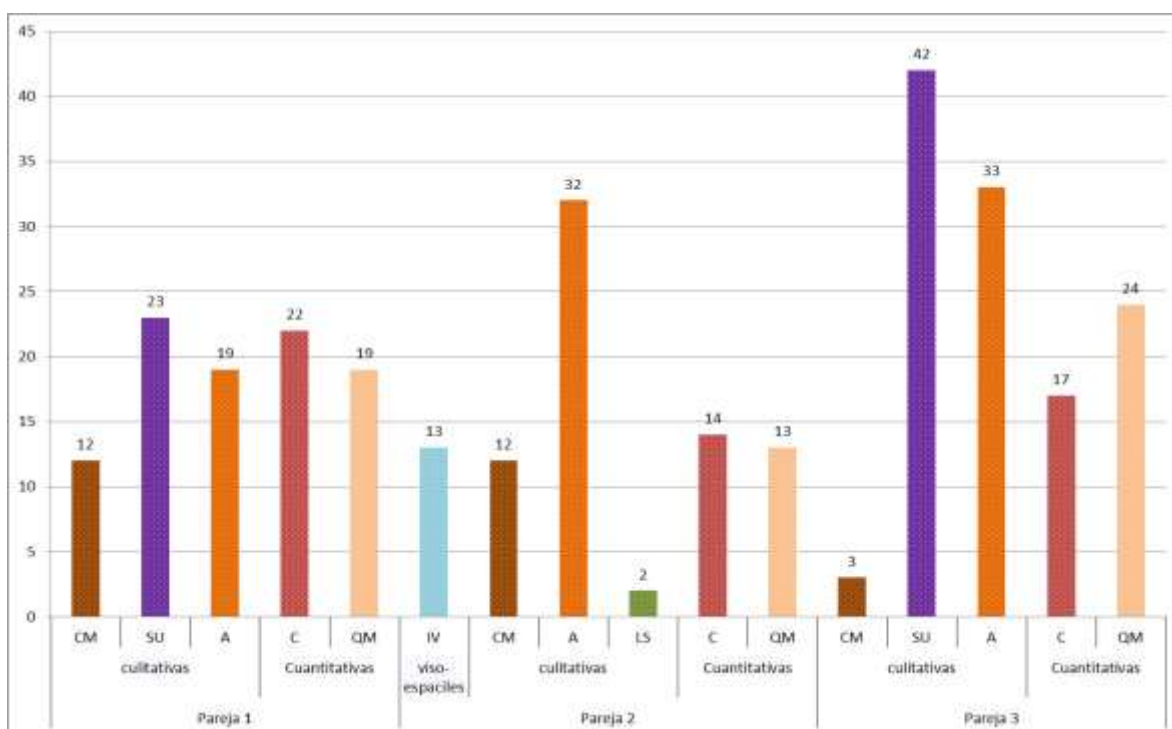


Figura 2. Frecuencias de tipos y subtipos de estrategias de la pareja 1, la pareja 2 y la pareja 3. Nota: Las siglas son los subtipos de las estrategias de medición IV= Inspección visual sin verificación, LS= Línea de simetría, AL= Alineación, U= Superposición, CM= Utilización de marcadores Cualitativa, QM= Utilización de marcadores cuantitativa; y CO= Conteo.

En la Figura 2, se destaca que los tipos de estrategias que fueron más usadas por la pareja 1 fue SU y CO, por la pareja 2 AL y por la pareja 3 SU. En relación a la pareja 2 fue la única que utilizó estrategias viso-espaciales IV y estrategias cualitativas como AL y LS.

En este sentido, el uso de la estrategia *IV* demuestra que la pareja 2 se enfocó en crear una forma que se veía como el triángulo referente pero no era congruente y no verificaron si estaba igual (tenía diferentes longitudes en los lados y ángulos). Cuando la pareja 2 utilizó la estrategia *AL*, implicó que ellos ubicaron un triángulo al lado del otro o en paralelo del borde del triángulo modelo (puede tener una distancia relativa pero debe estar alineado), generando una única coincidencia de bordes o varias; y en relación a la estrategia *LS* remite a que la pareja 2 usó una línea vertical en medio de los triángulos a manera de eje de simetría para transformar los triángulos ubicando el triángulo dinámico en forma de espejo al triángulo referente.

La estrategia cualitativa de *SU* solo la usaron las parejas 1 y 3, es decir, que los niños colocaron una figura sobre otra y dieron cuenta de la figura como un todo unificado. A su vez, la estrategia *CM* fue usada por las 3 parejas, lo que significa que ellos utilizaron expresiones de medición que no tienen una relación con el proceso de conteo explícitamente por ejemplo, “miden lo mismo”, “por el mismo número” y “se vuelve del mismo centímetro”. En relación a las estrategias cuantitativas la de *CO* fue la más utilizada por la pareja 1 (N=22) y menos utilizada por la pareja 2 (N=14); mientras que el uso de la estrategia cuantitativa *QM* fue más utilizada por la pareja 3 (N=24) y seguido por la pareja 1 (N=19). Las estrategias más utilizadas fueron las cualitativas y cuantitativas debido a que las emplearon las 3 parejas. Las estrategias viso-espaciales solo fueron usadas por la pareja 2 (N=3).

Por último, en la Tabla 6 (pareja 1), en la Tabla 7 (pareja 2), y en la Tabla 8 (pareja 3) se presentan las frecuencias para cada pareja de los tipos de las estrategias de medición viso-espacial, cualitativa y cuantitativa intra e inter-sesión a lo largo de toda la secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje.

Tabla 6.

Pareja 1-frecuencias de tipos de estrategias y subtipos de estrategias

Categorías	Viso-espaciales	Cualitativas				Cuantitativas	
Tipo de estrategia	IV	CM	SU	LS	A	C	QM
Sesión 1	0	2	1	0	0	0	5
Sesión 2	0	4	3	0	3	1	1
Sesión 3	0	1	3	0	3	2	2
Sesión 4	0	2	3	0	3	4	2
Sesión 5	0	0	3	0	3	3	3
Sesión 6	0	1	3	0	3	3	2
Sesión 7	0	3	4	0	3	3	2
Sesión 8	0	0	3	0	3	3	1
Sesión 9	0	0	3	0	1	4	2

La pareja 1 utilizó estrategias de tipo cualitativa y cuantitativa pero no viso-espaciales (Ver Tabla 6). En relación a la variabilidad intra-sesión la pareja 1 utilizó varios tipos de estrategias en cada sesión, es decir, usaron entre 3 a 5 tipos de estrategias.

En relación a la variabilidad intersesión se evidencia en la Tabla 6 que la pareja 1 usó estrategias más avanzadas que otras, es decir, a medida que las sesiones avanzaron hubo cambio en el uso de estrategias por parte de la pareja: 1) en el paso de la sesión 4 a la 5 cuando cambiaron de las tareas *de resolución de problemas de formas simples a formas compuestas*, el uso por parte de la pareja 1 de las estrategias *CM* y *QM* disminuyeron y la de *CO* aumentó, es decir, a partir de la sesión 5 la frecuencia de uso de la estrategia *CO* fue entre 3 y 4 convirtiéndose en una de las estrategias efectivas para ellos en la resolución y explicación de las tareas en co-ocurrencia con las estrategias de *SU* y *AL*; 2) en el paso de la sesión 1 a la 2 en el cambio de tareas de *exploración* a la *de resolución de problemas de formas simples*, la frecuencia de uso por parte de la pareja 1 de las estrategias *AL* y *SU* permaneció relativamente constante, posiblemente porque fueron las más eficaces para ellos al resolver las tareas y dar sus explicaciones de cómo eran las figuras y los triángulos entre si.

Tabla 7.

Pareja 2- frecuencias de tipos de estrategias y subtipos de estrategias

Categorías	Viso-espaciales	Cualitativas				Cuantitativas	
Tipos de estrategias	IV	CM	SU	LS	A	C	QM
Sesión 1	0	1	0	0	2	1	2
Sesión 2	3	0	0	0	5	0	3
Sesión 3	1	2	0	0	4	0	1
Sesión 4	3	2	0	2	2	0	1
Sesión 5	2	3	0	0	3	2	2
Sesión 6	3	1	0	0	5	4	2
Sesión 7	1	1	0	0	4	2	1
Sesión 8	0	1	0	0	3	2	1
Sesión 9	0	1	0	0	4	3	0

En la variabilidad intra-sesión se encontró que en la pareja 2 hubo un uso cambiante de las estrategias debido a que utilizaron entre 3 a 5 en la misma sesión y en el mismo tipo de tarea, siendo el tipo de estrategias de diferente naturaleza (viso-espacial, cualitativa, cuantitativa) y de distinta complejidad, es decir, unas más avanzadas que otras (Ver Tabla 7). Por otro lado, en esta pareja 2 no apareció el tipo de estrategia SU y la estrategia de LS la usaron solo en la sesión 4 en las últimas tareas de figuras simples.

Se identificó variabilidad inter-sesión en esta pareja 2 en el cambio del uso de las estrategias en la Tabla 7: 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 con el cambio de las tareas de *exploración* a *resolución de problemas de formas simple* la estrategia IV apareció; 2) en el paso de la sesión 4 a la 5 cuando cambiaron la pareja 2 de las tareas de *resolución de problemas de formas simples* a *formas compuestas*, ellos empezaron a utilizar en mayor medida a partir de la sesión 5 estrategias más avanzadas como *Conteo* (antes su frecuencia había sido de 1 en la primera sesión y entre la sesión dos y cuatro su frecuencia fue de 0) y disminuyeron la de *CM* a una frecuencia de 1 después de esta sesión hasta la 9. A su vez, a partir de esta sesión 5 la pareja 2 empezó a disminuir la estrategia de *MC*, *AL* y *la* IV; y empezó a tener un uso creciente de estrategias más avanzadas y cada vez mas efectivas, es

decir, apareció co-ocurrencia en el uso de las estrategias porque utilizaron la cuantitativa como *CO* a la par con cualitativas como *Al* para solucionar y dar sus explicaciones; y 3) en el paso de la sesión 5 a la 6 y hasta la 9 la pareja 2 aumentó el uso de la estrategia *AL* a una frecuencia entre 3 y 5.

Tabla 8.

Pareja 3- frecuencias de tipos de estrategias y subtipos de estrategias

Categorías	Viso-espaciales	Cualitativas				Cuantitativas	
Tipos de estrategias	IV	CM	SU	LS	A	C	QM
Sesión 1	0	1	4	0	2	1	1
Sesión 2	0	1	4	0	5	0	4
Sesión 3	0	0	4	0	3	0	6
Sesión 4	0	1	4	0	1	0	3
Sesión 5	0	0	4	0	5	3	5
Sesión 6	0	0	5	0	4	4	3
Sesión 7	0	0	4	0	4	3	1
Sesión 8	0	0	7	0	4	3	1
Sesión 9	0	0	6	0	5	3	0

En la Tabla 8, se presentan los resultados de la pareja 3 y se evidenció que no utilizaron estrategias viso-espaciales como la IV y tampoco la cualitativa de LS en ninguna de las sesiones. En relación a la variabilidad intra-sesión se identifica que en las sesiones utilizaban entre 3 a 5 tipos de estrategias cualitativa y cuantitativa, siendo unas más avanzadas que otras dentro de la misma tarea y en la misma sesión.

En la variabilidad inter-sesión de la pareja 3 existe un cambio en el uso de las estrategias, es decir, en el paso de la sesión 4 a la 5 cuando cambiaron del tipo tareas de *resolución de problemas de formas simples a formas compuestas*, la pareja disminuyó el uso de la estrategia *CM* y aumentó el uso de la estrategia de tipo cuantitativa de *CO* y la cualitativa de *Al*. Estos dos tipos de estrategias permitieron en la pareja 3 una ejecución mas efectivas para resolver y explicar las últimas tareas posiblemente por una co-ocurrencia entre ellas a partir de la sesión 5.

En este sentido, los tipos de estrategias *SU* y *AL* ya habían sido usadas por la pareja en las sesiones anteriores, pero a partir de la sesión 5 sus frecuencias aumentaron en un rango entre 4 y 7 para *SU*, y de 4 a 5 para *AL*. La de *CO* solo había aparecido una vez en la sesión 1, y aumentó su frecuencia entre 3 y 4 a partir de la sesión 5.

7.2 Trayectorias de los tipos de estrategias de medición de triángulos congruentes

En este sub-apartado se presentan las trayectorias de los tipos de estrategias de medición entre triángulos congruentes –visoespaciales, cualitativas y cuantitativas (ver descripción de las categorías en Tabla 3) durante la secuencia de tareas del ambiente de aprendizaje y en cada una de las 9 sesiones de la pareja 1, la pareja 2 y la pareja 3. Para el análisis se identificó la variabilidad intra e intersesión y los cambios que se presentaron durante la trayectoria entre cada sesión y dentro de cada sesión.

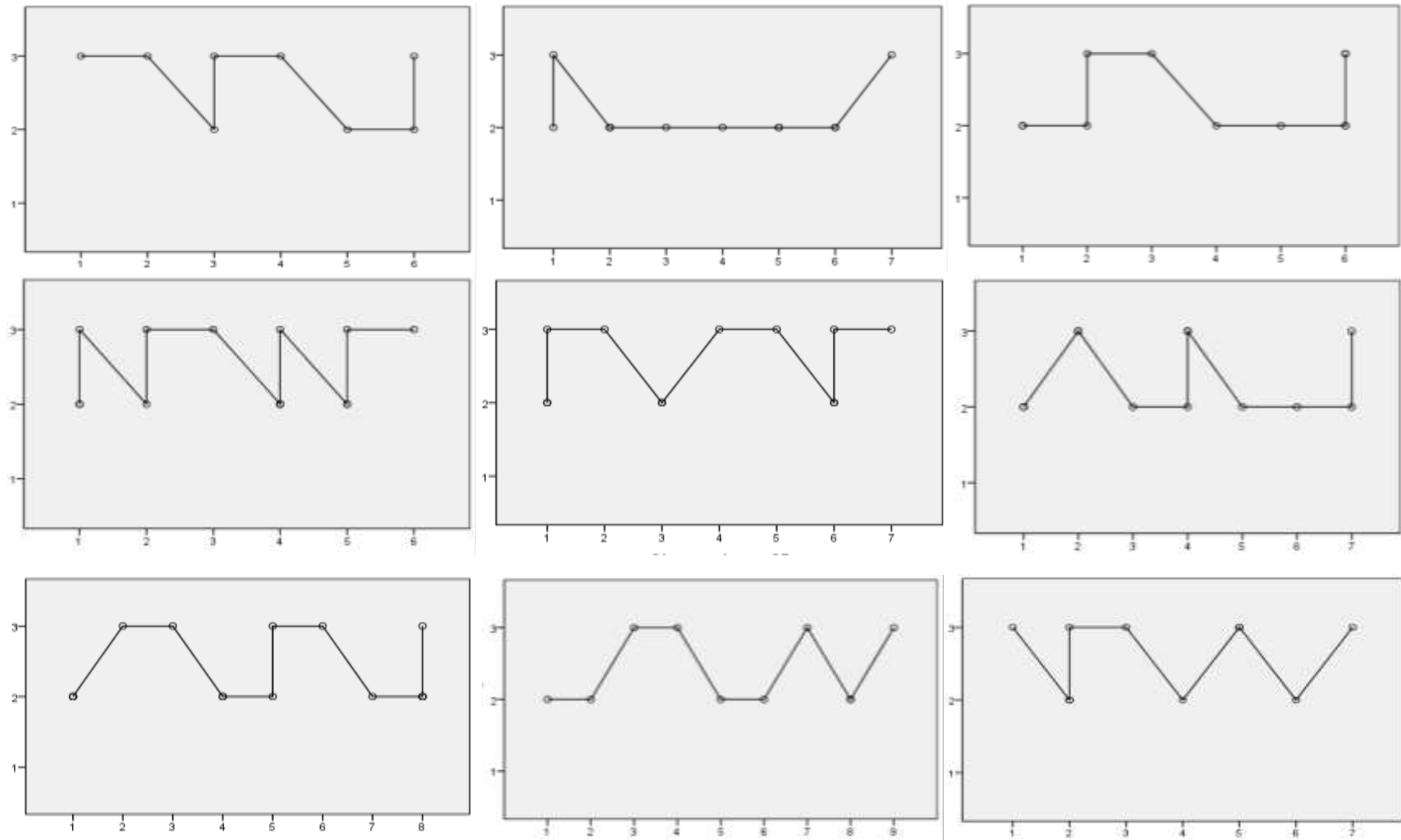


Figura.3. Trayectoria de las estrategias de medición de la pareja 1 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje. Nota: la lectura de la gráfica se debe hacer de manera horizontal y cada cuadro especifica una sesión en orden ascendente del 1 hasta el 9, es decir, el primero cuadro es la sesión 1 y el último es la sesión 9. El eje Y son las categorías de las estrategias. 1=visuo-espaciales; 2= Cualitativas y 3=cuantitativas. En el eje X, son las observaciones que se realizaron en un intervalo de 5 minutos. En las sesiones se registraron con un máximo de 6 a 9 momentos dependiendo de cuánto tiempo se tomaron la pareja en terminar las tareas de la sesión.

En la variabilidad inter-sesión de la trayectoria de estrategias de medición en la secuencia de aprendizaje presentada en la Figura 3, se evidenciaron cambios en las estrategias en 4 momentos representativos de variabilidad: 1) se evidenció un cambio en las estrategias en el paso de la sesión 1 a la 2, es decir, la pareja 1 usó para la sesión 1 estrategias de tipo cuantitativo en las tareas de *exploración*, pero cuando pasaron a la sesión 2 a las tareas *resolución de problemas de figuras simples* hubo un mayor uso por parte de ellos de estrategias cualitativas.; 2) en el paso de la sesión 3 a la 4 cuando se les presentó a los niños las últimas tareas *de formas simples*, se evidenció un cambio en las estrategias debido a un paso de relativa estabilidad de estrategias cualitativas a una alta variabilidad de estrategias más avanzadas como las cuantitativas; 3) en el paso de la sesión 4 a la 5 con el cambio de la tareas de *resolución de problema de formas simples a formas compuestas* por triángulos congruentes, pasaron la pareja 1 de un estado de alta variabilidad y co-ocurrencia entre estrategias cualitativas y cuantitativas a momentos de relativa estabilidad en estrategias cuantitativas en la sesión 5;

4) en el paso de la sesión 6 a la 7 cuando se aumentó la cantidad de triángulos que debían componer en las tareas de *figuras compuestas* la pareja 1, hubo un cambio por parte de ellos en el uso de las estrategias debido a una mayor variabilidad caracterizada por fluctuaciones entre estrategias cualitativas y cuantitativas, y menos estados de relativa estabilidad en las estrategias en las últimas 3 sesiones. Esta tendencia se mantuvo hasta la sesión 8, y cambio en la sesión 9 cuando aumentó la variabilidad y las estrategias cuantitativas tuvo un mayor uso por parte de la pareja 1.

La variabilidad intra-sesión se evidencia en todas las sesiones en la Figura 3, al oscilar la pareja 1 entre las estrategias cualitativas y cuantitativas aunque no usaron las viso-espaciales. Las sesiones 4 y 5 fueron una de las más variables y se evidenció cambios

en el uso por parte de los niños de estas estrategias, es decir, se caracterizaron estas sesiones por fluctuaciones entre las dos estrategias y co-ocurrencia entre ellas en los momentos en que los niños realizaron la solución de las tareas o generaron sus explicaciones: 1) la sesión 4 fue la más variable porque la pareja 1 usó 6 veces las estrategias cuantitativa y 4 veces las estrategias cualitativas pero no de manera continua sino de manera fluctuante, es decir, realizaron los niños uso de estrategias más y menos avanzadas con mayor recuento de las cuantitativas. A su vez, realizaron ellos co-ocurrencia de 2 estrategias cualitativas y cuantitativas al mismo tiempo en 4 momentos dentro de la sesión; y 2) la sesión 5 también fue variable porque los niños usaron 6 estrategias cuantitativas y 3 estrategias cualitativas de manea fluctuante, y realizaron co-ocurrencia entre dos tipos de estrategias en 2 momentos dentro de la sesión para dar sus explicaciones o solucionar la tarea.

Igualmente, también se evidenció momentos de baja variabilidad intra-sesión en las sesiones 2, 3 y 6 que se caracterizaron por relativa estabilidad en estrategias de tipo cualitativo.

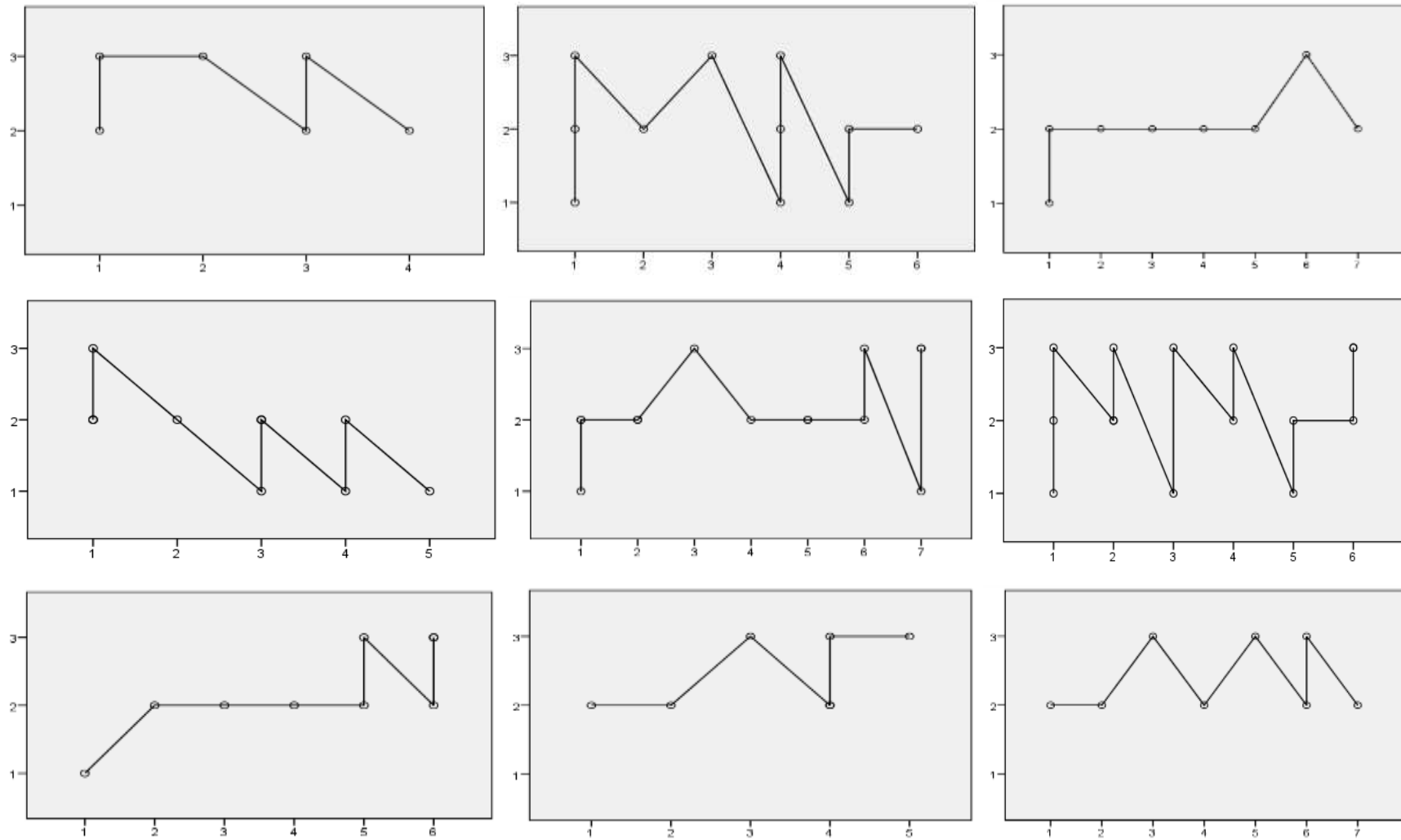


Figura.4. Trayectoria de las estrategias de medición de la pareja 2 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje.. Nota: la lectura de la gráfica se debe hacer de manera horizontal y cada cuadro especifica una sesión en orden ascendente del 1 hasta el 9, es decir, el primero cuadro es la sesión 1 y el último es la sesión 9. En el eje Y son las estrategias. 1=visio-espaciales; 2= Cualitativas y 3=cuantitativas. En el eje X, son las observaciones que se realizaron es en un intervalo de 5 minutos. En las sesiones se registraron con un máximo de 6 a 7 momentos dependiendo de cuánto tiempo se tomaron la pareja en terminar las tareas de la sesión.

En la variabilidad inter-sesión en la Figura 4 se evidenció que la pareja 2 utilizó las estrategias viso-espaciales, cualitativas y cuantitativas. A su vez, se identificaron cambios en el uso de las estrategias en momentos representativos de variabilidad en la trayectoria: 1) hay un momento de cambio en el uso de las estrategias en el paso de la sesión 1 a la 2, debido a que la pareja 2 empezó a utilizar las estrategias viso-espaciales cuando cambiaron de las tareas de *exploratorias* a las de *resolución de problemas de figuras simples*.; 2) en el paso de la sesión 3 a la 4 cuando la pareja 2 resolvió las últimas tareas de *las figuras simples*, pasó de una relativa estabilidad del uso de estrategias cualitativas a un mayor uso de estrategias viso-espaciales; 3) en el paso de la sesión 4 a la 5 en el cambio de tareas de *figuras simples a figuras compuestas*, la pareja 2 usó menos las estrategias viso-espaciales y más las cualitativas por periodos de tiempos de observación;

4) en el paso de la sesión 5 a la 6 hubo un cambio en el uso de estrategias por parte de la pareja 2, debido a que pasaron de una variabilidad media en la sesión 5 a una variabilidad alta en la sesión 6 cuando aumentó la cantidad de triángulos para componer la figura; y 5) en el paso de la sesión 7 a la 8 la pareja 2 dejó de usar estrategias viso-espaciales y solo utilizó estrategias más avanzadas como las cualitativas y cuantitativas.

En la variabilidad intra-sesión se evidenció que el uso de las estrategias por parte de la pareja 2 osciló entre las estrategias cualitativas y cuantitativas en las sesiones 1, 8 y 9; y entre las viso-espaciales, cualitativas y cuantitativas entre las sesiones 2 y 7. Las sesiones 2, 4 y 6 fueron las más variables y presentaron cambios en el uso de las estrategias por parte de los niños, es decir, se caracterizaron por fluctuaciones entre las 3 estrategias, y los niños realizaron co-ocurrencia entre ellas para realizar la solución de las tareas o generar sus explicaciones. Por ejemplo, la sesión 2 fue variable porque la pareja 2 usó 3 veces las estrategias de tipo cuantitativa, 5 veces las estrategias cualitativas y 3 las viso-espaciales

pero no de manera continua sino fluctuando su aparición. A su vez, los niños realizaron co-ocurrencia de las estrategias cualitativas y viso-espaciales en 2 momentos dentro de la sesión.

La sesión 4 fue variable y se evidenció cambio en el uso de las estrategias, porque la pareja 2 utilizó las 3 estrategias de manera fluctuante entre la sesión y no de manera continua, es decir, utilizaron 4 cualitativas, 1 cuantitativa y 3 viso-espaciales pero en forma de zigzag. A su vez, realizaron los niños co-ocurrencia de estrategias en la sesión, por ejemplo, en la observación 1 realizaron co-ocurrencia entre estrategias cualitativas y cuantitativas, y en la observación 3 y 4 emergieron estrategias cualitativas y viso-espaciales en una co-ocurrencia de estrategias.

Por último, la sesión 6 fue variable y ocurrió cambios de estrategias en la pareja 2 porque usaron las 3 estrategias, es decir, 5 veces las cuantitativas, 5 las cualitativas y 3 las viso-espaciales. A su vez, la pareja 2 realizó co-ocurrencia en el uso de estrategias cualitativas, viso-espaciales y cuantitativas. Por ejemplo, en el momento de observación 1 de esta sesión la pareja 2 realizó co-ocurrencia de estrategias viso-espacial y estrategias cuantitativas para solucionar una parte de la tarea o dar una explicación.

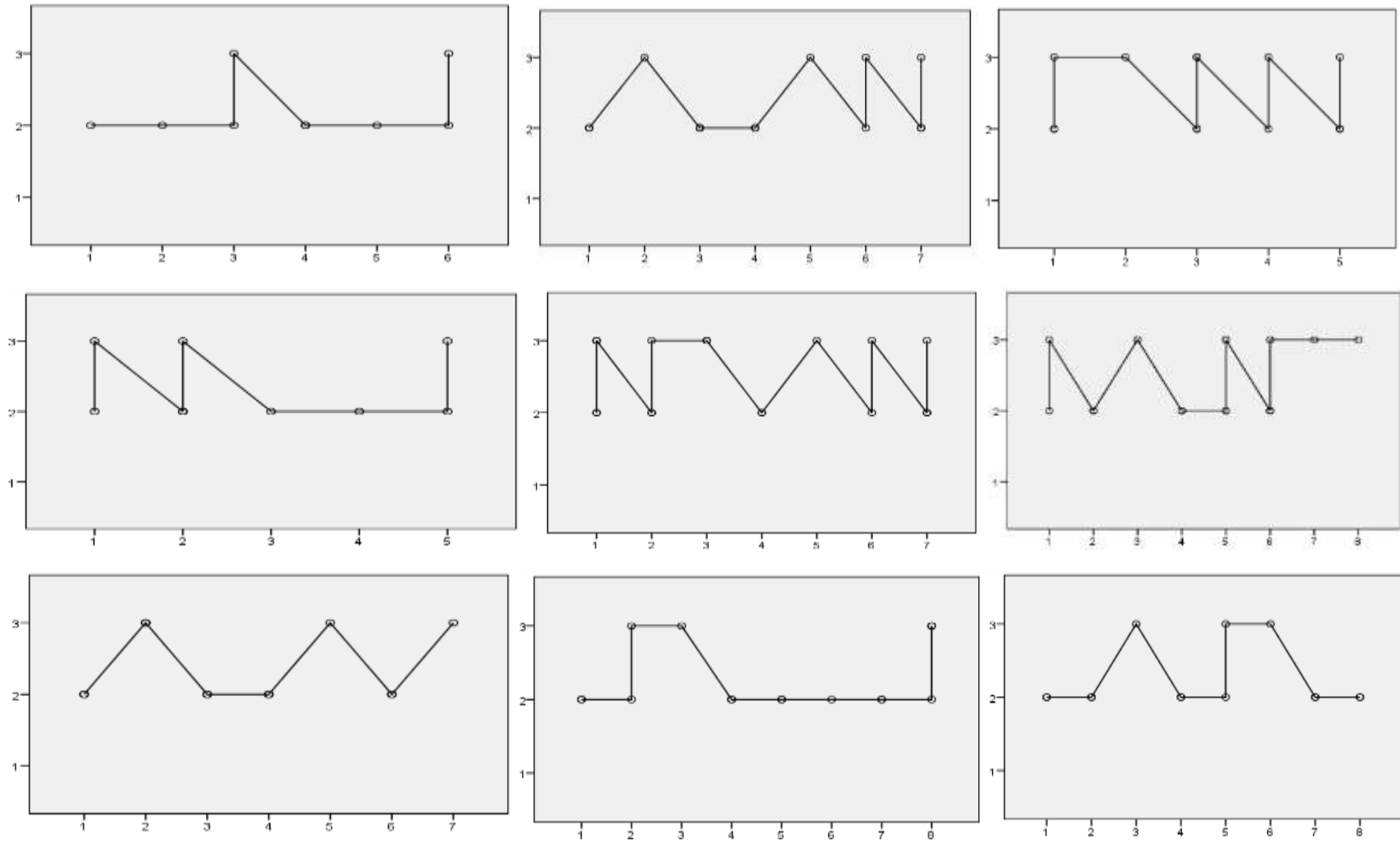


Figura.5. Trayectoria de tipo de estrategias de medición de la pareja 3 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje. Nota: la lectura de la gráfica se debe hacer de manera horizontal y cada cuadro especifica una sesión en orden ascendente del 1 hasta el 9, es decir, el primero cuadro es la sesión 1 y el último es la sesión 9. En el eje Y son las estrategias. 1=visio-espaciales; 2= Cualitativas y 3=cuantitativas. En el eje X, son las observaciones que se realizaron es en un intervalo de 5 minutos. En las sesiones se registraron con un máximo de 6 a 7 momentos dependiendo de cuánto tiempo se tomaron la pareja en terminar las tareas de la sesión.

El análisis de la variabilidad inter-sesión se logró evidenciar en la Figura 5 que la pareja 3 usó 2 estrategias las cualitativas y las cuantitativas. A su vez, se identificaron cambios en las estrategias en momentos representativos de variabilidad en la trayectoria: 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 hubo un cambio en el uso de las estrategias por parte de la pareja 3 cuando pasaron de las tareas de *exploración* a las tareas de *resolución de problemas de formas simples*, debido a que la pareja paso de usar de manera relativamente estable estrategias cualitativas en la sesión 1 a fluctuar entre cualitativas y cuantitativas en la sesión 2; 2) en el paso de la sesión 3 a la 4 presentó un cambio la pareja 3, es decir, pasaron de un estado de alta variabilidad a baja variabilidad en el uso de las estrategias cuando realizaron las últimas tareas *de resolución de problemas de formas simples*;

3) en el paso de la sesión 4 a la 5 cuando cambiaron de las tareas de *resolución de problemas de formas simples a formas compuestas* hubo otro cambio en el uso de las estrategias por parte de la pareja 3, es decir, ellos usaron estrategias más avanzadas como las cuantitativas y presentaron mayor fluctuación entre las 2 estrategias cualitativas y cuantitativas, pasando de una relativa estabilidad en la sesión 4 a una variabilidad alta en la sesión 5; y 4) en el paso de la sesión 6 a la 7 la pareja 3 usó estrategias cualitativas por períodos de tiempo largos, es decir, presentaron períodos de mayor estabilidad en estrategias cualitativas; mientras que en las sesiones 5 y 6 fueron de alta variabilidad por fluctuaciones entre las estrategias cualitativas y cuantitativas.

La variabilidad intra-sesión se evidenció en todas las sesiones en la Figura 5, al oscilar en la pareja 3 el uso de las estrategias entre cualitativas y cuantitativas, aunque no apareció la viso-espacial. Las sesiones 2, 3, 5 y 6 fueron las más variables y donde se evidenció mayores cambios en el uso de las mismas. En la sesión 2 la pareja 3 usó 5 veces las estrategias cuantitativas y 4 veces las cualitativas, lo cual denota variabilidad dentro de

la sesión, y realizaron co-ocurrencia de estrategias cualitativas y cuantitativas en los 2 últimos momentos de observación en la sesión. Las sesiones 5 y 6 fueron las más variables en la pareja 3 porque usaron 6 estrategias cuantitativas y 5 estrategias cualitativas. A su vez, realizaron los niños co-ocurrencia entre 2 estrategias en 3 momentos de observación, y usaron estrategias más avanzadas como las cuantitativas en mayor medida (N=6) en ambas sesiones.

En relación a la trayectoria intra-sesión que presentó la pareja 3, se identificó sesiones que se parecen entre sí en su comportamiento en el uso de las estrategias por parte de ellos, es decir, las sesiones 1, 4 y 8 se parecen al presentar momentos de baja variabilidad y estados de relativa estabilidad de estrategias cualitativas en los últimos momentos de observación de las sesiones.

En conclusión, en relación a las trayectorias de las estrategias de medición entre las 3 parejas, se evidenció que la pareja 2 fue la que presentó una variabilidad alta, debido a que utilizaron estrategias de tipo cualitativa y cuantitativa durante toda la situación de aprendizaje, pero también usaron estrategias viso-espaciales entre las sesiones 2 hasta la 7. No obstante, las otras 2 parejas también tuvieron procesos de cambio y variabilidad en su trayectoria, es decir, las parejas 1 y 3 presentaron una variabilidad media en el uso de las estrategias porque fluctuaron entre cualitativas y cuantitativas.

A su vez, las parejas 1 y 3 realizaron co-ocurrencia en el uso de estrategias cualitativas y cuantitativas, pero la pareja 2 realizó co-ocurrencia entre cualitativas, cuantitativas y viso-espaciales. En este sentido, las gráficas presentadas de las 3 parejas demuestran que puede haber co-correncia entre 2 o 3 estrategias en un mismo momento dentro de una misma sesión con una tarea específica, siendo más predominante esta co-ocurrencia entre estrategias en las parejas 2 y 3 que en la 1.

Se identifican cambios en el uso de las estrategias en momentos representativos de variabilidad en la trayectoria de las 3 parejas a partir del cambio en las tareas : 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 hubo un cambio en el uso de las estrategias por parte de las 3 parejas, cuando pasaron de las tareas de *exploración* a las *de resolución de problemas de formas simples*; 2) en el paso de la sesión 4 a la 5 se identificó otro cambio en el uso de las estrategias por parte de las 3 parejas, al pasar de tareas de *resolución de problemas de formas simples a formas compuestas* que demandaba que los niños realizaran mayor coordinación de patrones para componer las figuras; y 3) en el paso de la sesión 3 a la 4 cuando las parejas realizaron las últimas tareas de las situaciones de resolución de problemas de formas simples, hubo otro cambio en el uso de las estrategias.

Por último, en relación a la variabilidad intra-sesión en las 3 parejas se encuentran sesiones con variabilidad alta, por ejemplo la pareja 1 y 2 tienen en común la sesión 4 con alta variabilidad, y la pareja 1 y 3 las sesiones 5 y 6.

7.3. Trayectorias de razonamiento geométrico sobre la congruencia y uso del gesto

En este sub-apartado se presenta lo relacionado con las trayectorias de razonamiento geométrico sobre la congruencia entre triángulos congruentes, enfocado en los momentos de variabilidad intra e intersesión en cada una de las 3 parejas durante la secuencia de tareas del ambiente de aprendizaje. La trayectoria representa los desempeños que obtuvo cada pareja en las 9 sesiones, es decir, qué nivel de razonamiento geométrico sobre la congruencia obtuvieron durante los momentos de observación en cada sesión (ver descripción de desempeño en Tabla 4). Estos momentos de observación oscilaban en un rango entre 1 a 8 separándose por intervalos de 5 minutos.

A su vez, se identificó en la trayectoria el uso y aparición de cada tipo de gesto (relaciones, propiedades y atributos) utilizado por cada pareja intersesión e intrasesión. Para el análisis inter-sesión se tuvo en cuenta en la trayectoria cuando cambiaba el uso de los gestos utilizados por cada pareja; y el análisis intra-sesión se enfocó en analizar cuando el gesto fue un precursor del cambio.

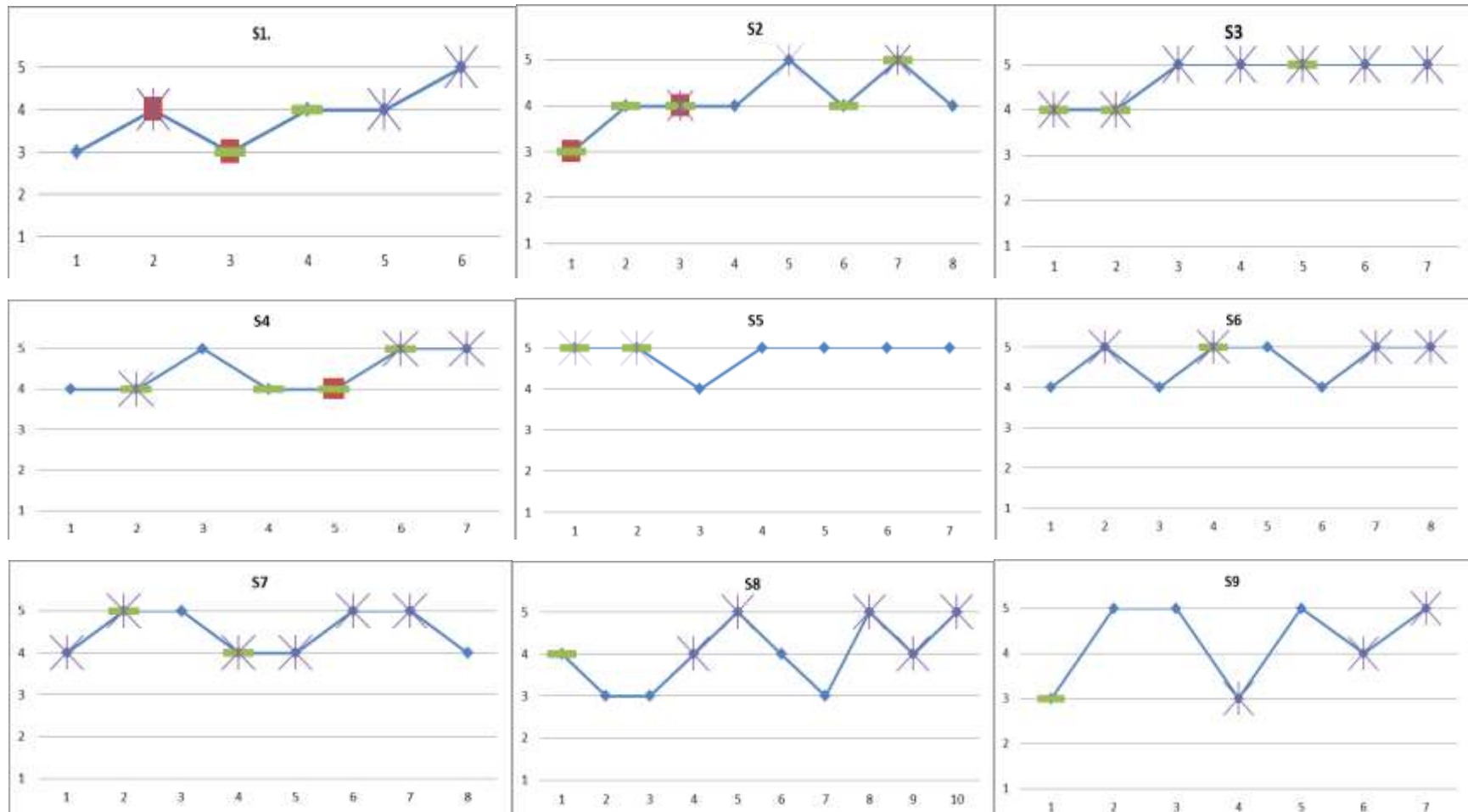


Figura.6. Trayectoria de razonamiento geométrico sobre la congruencia de la pareja 1 en las 9 sesiones de la secuencia de tareas del ambiente de aprendizaje. Nota: la gráfica se lee de izquierda a derecha en forma ascendente y S1-S9 significan las sesiones. En el eje Y se muestran los cinco niveles de razonamiento del 1 al 5 que fueron presentados en la Tabla 4 y los tipos de gesto ■ = atributos; — = propiedades y * = relaciones. En el eje X se muestran las observaciones que se realizaron por sesión que varían de 1 a 10, y cada observación es en un intervalo de 5 minutos.

En la Figura 6 se reporta la trayectoria de razonamiento geométrico sobre la noción de congruencia y el uso del tipo de gesto (atributo, propiedades y relaciones) durante la secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje en la pareja 1. En el análisis de la variabilidad inter-sesión de la pareja 1 se logró evidenciar que sus desempeños oscilaron en los niveles de razonamiento entre el 3 y 5, y se identificaron cambios a partir de momentos representativos de variabilidad en la trayectoria de razonamiento en la secuencia de aprendizaje: 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 en el cambio de tareas de *exploración* a las de *resolución de problemas de formas simples*, la pareja 1 pasó de una mayor variabilidad en el uso de los niveles de razonamiento a una menor variabilidad porque en la sesión 2 después del momento de observación 2, la pareja dejó de usar niveles de razonamiento 3 y empezó a fluctuar su razonamiento entre los niveles 4 y 5, es decir, que los niños pasaban de realizar relaciones entre un mismo triángulo o entre triángulos que describían la forma o el tamaño en el nivel 4, a razonar sobre la forma y el tamaño como un todo para dar explicaciones sobre la congruencia en el nivel 5. Este comportamiento de fluctuación entre estos niveles 4 y 5 estuvieron presentes hasta la sesión 7 sin aparecer el nivel de razonamiento 3;

2) otro cambio en los niveles de razonamiento fue en el paso de la sesión 3 a la 4 cuando se le presentó a la pareja 1 las últimas tareas de la situación de *resolución de problemas de formas simples*, debido a que ellos siguieron utilizando niveles de razonamiento de 4 y 5 que implicaba que razonaban sobre la forma o el tamaño en el nivel 4, y sobre la forma y el tamaño en el nivel 5 para dar explicaciones sobre la congruencia, pero con una mayor variabilidad, es decir, pasaron de momentos de relativa estabilidad en la sesión 3 en niveles de razonamiento 5 a presentar mayores fluctuaciones entre los niveles 4 y 5;

3) en el paso de la sesión 4 a 5 con el cambio de tareas de *resolución de formas simples a formas compuestas*, los niveles de razonamiento de la pareja 1 volvieron a presentar una relativa estabilidad en niveles de razonamiento 5; y 4) en el paso de la sesión 7 a la 8 y hasta la sesión 9 cuando se les presentó a la pareja 1 las últimas tareas de *formas compuestas*, se aumentó la cantidad de triángulos que tenían que componer (8 triángulos en la sesión 8 y 10 en la sesión 9) y hubo un cambio en el tipo de triángulos en la sesión 9, la pareja 1 empezó a presentar nuevamente fluctuación entre los niveles de razonamiento 3 y 5, es decir, la pareja retorno a niveles inferiores de razonamiento sobre la congruencia como el 3 para dar sus explicaciones enfocadas en relaciones parciales entre los triángulos.

La variabilidad intra-sesión de la pareja 1 se evidenció en todas las sesiones y se caracterizó por oscilar entre los niveles de razonamiento 3 y 5 en casi la mitad de las sesiones (sesiones 1, 2, 8 y 9), y en las sesiones restantes (sesiones 3 a la 7) entre los niveles de razonamiento 4 y 5. Sin embargo, las sesiones 1, 8, y 9 fueron las más variables, por ejemplo, en la sesión 8 la pareja 1 volvió a niveles inferiores al fluctuar sus desempeños entre los niveles 3 y 5 al final de las tareas de *resolución de problemas de formas compuestas* cuando se aumentó la cantidad de triángulos a 8, es decir, pasaban la pareja 1 de realizar sólo relaciones entre propiedades de un mismo triángulos, a comparaciones entre las propiedades de ambos triángulos como forma y tamaño.

Igualmente, la sesión 9 también fue variable y se evidenciaron cambios en los niveles de razonamiento de la pareja 1, porque fluctuaron sus niveles de razonamiento entre 3 y 5 cuando se les cambio el tipo de triangulo de isósceles a rectos y aumentó la cantidad de triángulos a 10. En este sentido, la pareja 1 empezó en un nivel de razonamiento 3 en que solo se enfocaban en relaciones parciales entre los triángulos, pero a medida que

avanzó la sesión sus niveles de razonamiento fluctuaron entre 4 y 5 al enfocarse sus explicaciones sobre la congruencia en el conocimiento sobre el tamaño, forma o ambos.

Se evidenció baja variabilidad en la sesión 3 y 5, debido a que hay momentos de relativa estabilidad y posiblemente procesos de aprendizaje sobre aspectos concretos sobre la congruencia referido a la forma y tamaño, es decir, en estas sesiones la pareja 1 permaneció en el nivel 5 de razonamiento explícito al identificar en sus explicaciones relaciones entre las propiedades en un triángulo y entre ellos enfocado en la forma y el tamaño durante un períodos largos de observación.

El uso del gesto se analizó en 2 momentos específicos inter-sesión e intra-sesión. En lo que respecta al uso del gesto inter-sesión en la pareja 1, se logró identificar que en toda la secuencia del ambiente de aprendizaje emergieron los 3 tipos de gestos, pero en menor medida el de atributos. El gesto de atributos estuvo presente en las sesiones 1, 2 y 4 en co-ocurrencia con otros 2 tipos de gestos, pero su uso por parte de la pareja 1 desapareció en la sesión 4. Sin embargo, los gestos de propiedades y relaciones aparecieron en toda las sesiones de la secuencia de aprendizaje.

La pareja 1 tuvo cambios en el uso del gesto durante la trayectoria entre las sesiones: 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 cuando se cambió de las tareas de *exploración* a las de *resolución de formas simples*, ellos aumentaron el uso de gestos en la sesión 2 y 3 (N=10 c/u). Los gestos más usado por la pareja 1 en la sesión 2 fue el de propiedades, es decir, ellos se enfatizaron en realizar relaciones entre las partes de una misma figura; y en la sesión 3 el gesto de relaciones entre propiedades de dos o más triángulos. Estos tipos de gestos de relaciones y propiedades fueron evidenciados en niveles superiores de razonamiento como el 4 y 5, que demandaban en los niños realizar relaciones entre las propiedades de un mismo triángulo y entre triángulos enfocado en forma, tamaño o ambos;

2) en el paso de la sesión 3 a la 4 cuando se les presentó a la pareja 1 las ultimas tareas de *formas simples* disminuyó por parte de ellos el uso de gestos, y apareció por última vez en toda la trayectoria el gesto de atributos en el nivel de razonamiento 4 acompañado por el gesto de propiedades;

3) en el paso de la sesión 4 a la 5 la pareja 1 dejó de usar el gesto de atributos referido solo a una característica del triángulo, y empezó a disminuir la cantidad de gestos utilizados por ellos en la sesión 5 (cantidad de gestos igual a 4); y 4) en el paso de la sesión 6 a la 7 la pareja 1 aumentó el uso de gestos y la co-ocurrencia entre los tipos de gestos de propiedades y relaciones. Es importante identificar que cuando la pareja 1 utilizó el gesto de relaciones y el de propiedades ellos desempeñaron principalmente los niveles de razonamiento de 4 y 5, que implicaba que ellos realizaban relaciones entre las partes de las figuras enfocados en forma, tamaño o ambos.

Se identificó en el análisis intra-sesión de la pareja 1 en la Figura 6, que el uso de gestos de relaciones y propiedades apareció en algunas sesiones durante la trayectoria como un precursor del cambio en los niveles de razonamiento sobre la congruencia: 1) cuando la pareja 1 usó en la sesión 1 en el momento de observación 4 el gesto de propiedades y en el momento de observación 5 el de relaciones, la emergencia y usó de estos 2 tipos de gestos posiblemente fue un precursor de cambio de un nivel de razonamiento 4 en que solo se enfocaban en la forma o en el tamaño para explicar la congruencia, a un nivel de razonamiento 5 que denotaba relaciones entre las partes de los triángulos que explicita forma y tamaño (se amplía la descripción en el análisis cualitativo del gesto en las figuras 9 y 10); 2) cuando la pareja 1 en la sesión 3 en el momento de observación 5 usó gestos de relaciones y propiedades, posiblemente estos fueron precursores de cambio de un nivel de razonamiento 4 de relaciones entre las propiedades de los triángulos enfocado en forma o

tamaño, a un nivel de razonamiento 5 en que ellos realizaban relaciones entre las propiedades de los triángulos evidenciando forma y tamaño en el cual permanecieron hasta terminar la sesión (se amplía la descripción en el análisis cualitativo del gesto en la figura 12). 3) Por último, en la sesión 7 el uso de gestos por parte de la pareja 1 de relaciones en una misma observación posiblemente fueron precursores de cambio en sus niveles de razonamiento de un nivel 4 a 5, es decir, ellos lograron en su explicación evidenciar relaciones entre las partes de los triángulos y en un mismo triángulo que daban alusión a forma y tamaño para explicar la congruencia apoyada también en gestos (se amplía la descripción en el análisis cualitativo del gesto en la figura 14).

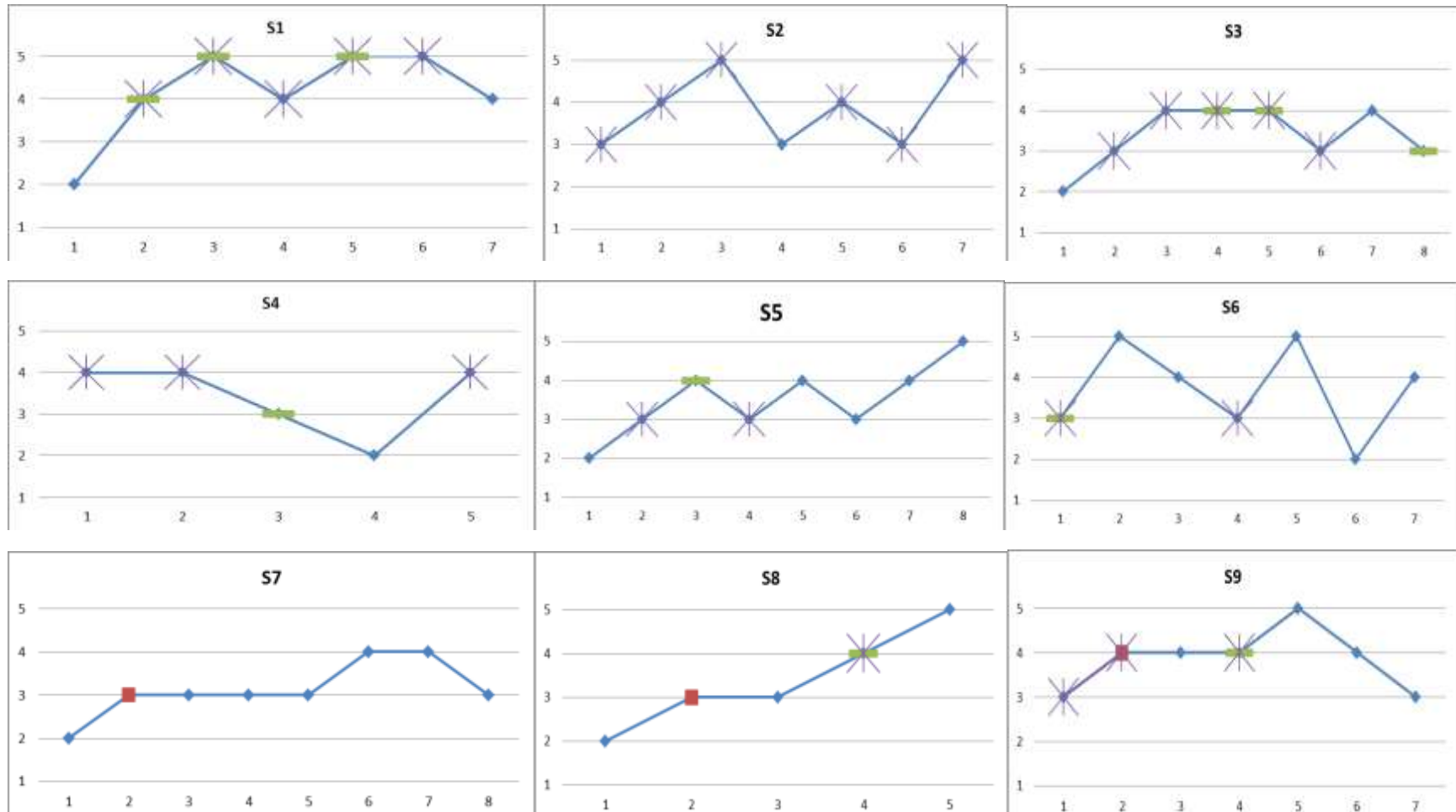


Figura 7. Trayectoria de razonamiento geométrico sobre la congruencia de la pareja 2 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje. Nota: la gráfica se lee de izquierda a derecha en forma ascendente y S1-S9 significan las sesiones. En el eje Y se muestran los cinco niveles de razonamiento del 1 al 5 que fueron presentados en la Tabla 4 y los tipos de gesto: ■ = atributos; — = propiedades y * = relaciones. En el eje X se muestran las observaciones que se realizaron por sesión que varían de 1 a 8, y cada observación es en un intervalo de 5 minutos.

En la Figura 7 se reporta la trayectoria de razonamiento geométrico sobre la noción de congruencia y el uso del tipo de gesto (atributo, propiedades y relaciones) durante la secuencia de situaciones del ambiente de aprendizaje de la pareja 2. Es importante aclarar que la pareja 2 en la sesión 7 no logró realizar la primera tarea isomorfa que se le presentó para componer una figura con 6 triángulos; y a partir de esa sesión y hasta la 9 se les siguió presentando las tareas isomorfas (3) que se debían componer con esa cantidad de triángulos congruentes.

En el análisis de la variabilidad inter-sesión en la Figura 7 se identificaron cambios en la pareja 2 a partir de momentos representativos de variabilidad en la trayectoria de razonamiento en la secuencia de aprendizaje: 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 la pareja 2 pasó de oscilar entre los niveles de razonamiento 2 y 5 a niveles de razonamiento entre 3 y 5, es decir, los niños pasaban de un razonamiento implícito de los triángulos enfocado solo en relaciones iniciales o comparaciones parciales en un mismo triángulo, a realizar relaciones entre los triángulos enfocado en forma y tamaño para explicar la congruencia; 2) en el cambio de la sesión 2 a la 3 y hasta la sesión 6 la pareja 2 pasó de fluctuar entre los niveles de razonamiento 3 y 5 en que reconocían relaciones entre las partes de un mismo triángulo o entre triángulos, a oscilar sus desempeños entre 2 y 5, es decir, que los niños iban de un razonamiento implícito en que solo reconocían que las formas presentadas eran triángulos identificando sus propiedades sin establecer relaciones entre las partes, a realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma y tamaño para explicar la congruencia;

3) en el paso de la sesión 4 a la 5 cuando se presentó el cambio de tareas de *resolución de problemas de figuras simples a figuras compuestas*, la pareja 2 empezó a presentar una mayor fluctuación entre los niveles de razonamiento 2 y 5, es decir, se evidenció menos estados de permanencia en el tiempo en un mismo nivel de razonamiento

y mayor fluctuación. Este comportamiento se evidenció hasta la sesión 6; y 4) en el paso de la sesión 6 a la 7 la pareja 2 bajo sus desempeños a niveles de razonamiento entre 2 a 4 cuando se aumentó a la cantidad a 6 triángulos isósceles, es decir, que los niños iban de un razonamiento implícito en que solo reconocían que las formas presentadas eran triángulos identificando sus atributos sin establecer relaciones entre las partes, a realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma o tamaño para explicar la congruencia.

La variabilidad intra-sesión de esta pareja 2 en la Figura 7 se evidenció en todas las sesiones y se caracterizó por oscilar en los niveles de razonamiento 2 y 5 en casi la mitad de las sesiones (sesiones 1, 5, 6 y 8), es decir, que los niños iban de un razonamiento implícito en que solo reconocían que las formas presentadas eran triángulos identificando sus propiedades sin establecer relaciones entre las partes, a realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma y tamaño para explicar la congruencia. En las sesiones restante 3, 4, y 7, la pareja 2 osciló entre niveles de razonamiento de 2 y 4, es decir, que los niños iban de un razonamiento implícito en que solo reconocían que las formas presentadas eran triángulos identificando sus propiedades sin establecer relaciones entre las partes, a un razonamiento explícito de los triángulos enfocado en relaciones entre un mismo triángulo o entre triángulos que describen la forma o el tamaño en el nivel 4.

Se evidenció en la pareja 2 dentro de las sesiones procesos de cambio a partir de la variabilidad: 1) en la sesión 5 y 8 la pareja 2 empezó en un nivel de razonamiento bajo como es el 2 en que solo identificaban que es un triángulo y sus partes sin realizar relaciones, pero a medida que avanzaba la sesión sus desempeños fluctuaron entre niveles de 3 y 5, es decir, ellos pasaban de realizar relaciones entre las partes de un mismo triángulo, a identificar relaciones entre las partes del triángulo y entre los triángulos enfocado en forma, tamaño o ambos; y 2) En la sesión 6 la pareja 2 empezó en un nivel de

razonamiento de 3 al solo realizar relaciones entre las partes de un mismo triángulo, pero al ir avanzado la sesión sus niveles de razonamiento fluctuaron entre el nivel 3 donde realizaban relaciones parciales cuando comparaban las figuras y en el nivel 5 donde sí identificaban relaciones entre las partes del triángulo y entre los triángulos enfocado en forma y tamaño. Sin embargo, la pareja 2 en la penúltima observación su nivel de razonamiento fue de 2 al solo identificar que la figura presentada era un triángulo sin lograr realizar relaciones entre las propiedades del mismo.

En las sesiones 3, 5, 7, 8 y 1 la pareja 2 empezaron con niveles de razonamiento 2 y terminaban en niveles altos de razonamiento como 4 y 5, es decir, ellos realizaban relaciones entre las propiedades de los triángulos y daban cuenta sobre la forma, el tamaño o ambos. Sin embargo, en las sesiones 3, 7 y 9 la pareja 2 presentó una baja variabilidad al evidenciar en la Figura 7 estados de relativa estabilidad, es decir, en la sesión 3 la pareja 2 evidenció niveles de razonamiento 4 por momentos de observación prolongado al realizar relaciones entre las partes de los triángulos enfocado en forma o tamaño; y en las sesiones 7 y 9 la pareja 2 por un tiempo prolongado evidenciaron un nivel de razonamiento 4, es decir, ellos mostraban relaciones entre las partes de un mismo triángulo y entre ellos enfocado en la forma o en el tamaño.

En lo que respecta al uso del gesto inter-sesión por parte de la pareja 2, se logró identificar que en toda la secuencia del ambiente de aprendizaje emergieron los 3 tipos de gestos, pero en menor medida el de atributos que solo estuvo presente al final de la secuencia de aprendizaje, es decir, en las sesiones 7, 8 y 9. Los gestos de relaciones aparecieron en todas las situaciones de la secuencia de aprendizaje, y el de propiedades solo no apareció en la sesión 2.

La pareja 2 tuvo cambios en el uso del gesto durante la trayectoria entre las sesiones: 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 cuando se cambió de las tareas de *exploración a resolución de problemas de formas simples*, ellos dejaron de utilizar el gesto de propiedades y solo evidenciaron el gesto de relaciones entre las partes de dos o más triángulos; 2) en el cambio de la sesión 2 a la 3, la pareja retomó el uso de gesto de propiedades que les permitió realizar relaciones entre las partes de un mismo triángulo; 3) a partir del paso de la sesión 4 a la 5 en el cambio de tarea *de resolución de problemas de formas simples a compuestas*, la pareja 2 disminuyó el uso de los gestos de relaciones y propiedades; 4) en el cambio de la sesión 6 a la 7 apareció el uso del tipo de gesto de atributos que refiere a cualquier característica del triángulo hasta la sesión 9; y 5) en el cambio de la sesión 7 a la 8 y hasta la sesión 9 apareció el uso de los 3 tipos de gestos de atributos, relaciones y propiedades.

Se identificó en el análisis intra-sesión, que el uso por parte de la pareja 2 de gestos de relaciones y propiedades apareció en algunas sesiones durante la trayectoria como un precursor del cambio en los niveles de razonamiento sobre la congruencia, por ejemplo: 1) en la sesión 1 el momento de observación 2 cuando la pareja 2 usó el gesto de relaciones, este posiblemente fue un precursor de cambio de un nivel de razonamiento 4 a 5, es decir, pasaron los niños de identificar relaciones entre las partes de los triángulos enfocada en la forma o el tamaño, a dar explicaciones de relaciones entre las partes enfocados en forma y tamaño (se amplía la descripción en el análisis cualitativo del gesto en las Figuras 15 y 16); y 2) en el momento de observación 2 en la sesión 2 cuando la pareja utilizó el gesto de relaciones, este posiblemente fue un precursor del cambio de un nivel de razonamiento de 4 a 5, al ellos pasar a realizar relaciones entre varios triángulos que dan alusión a forma y tamaño (se amplía la descripción en el análisis cualitativo del gesto en las Figuras 17 y 18).

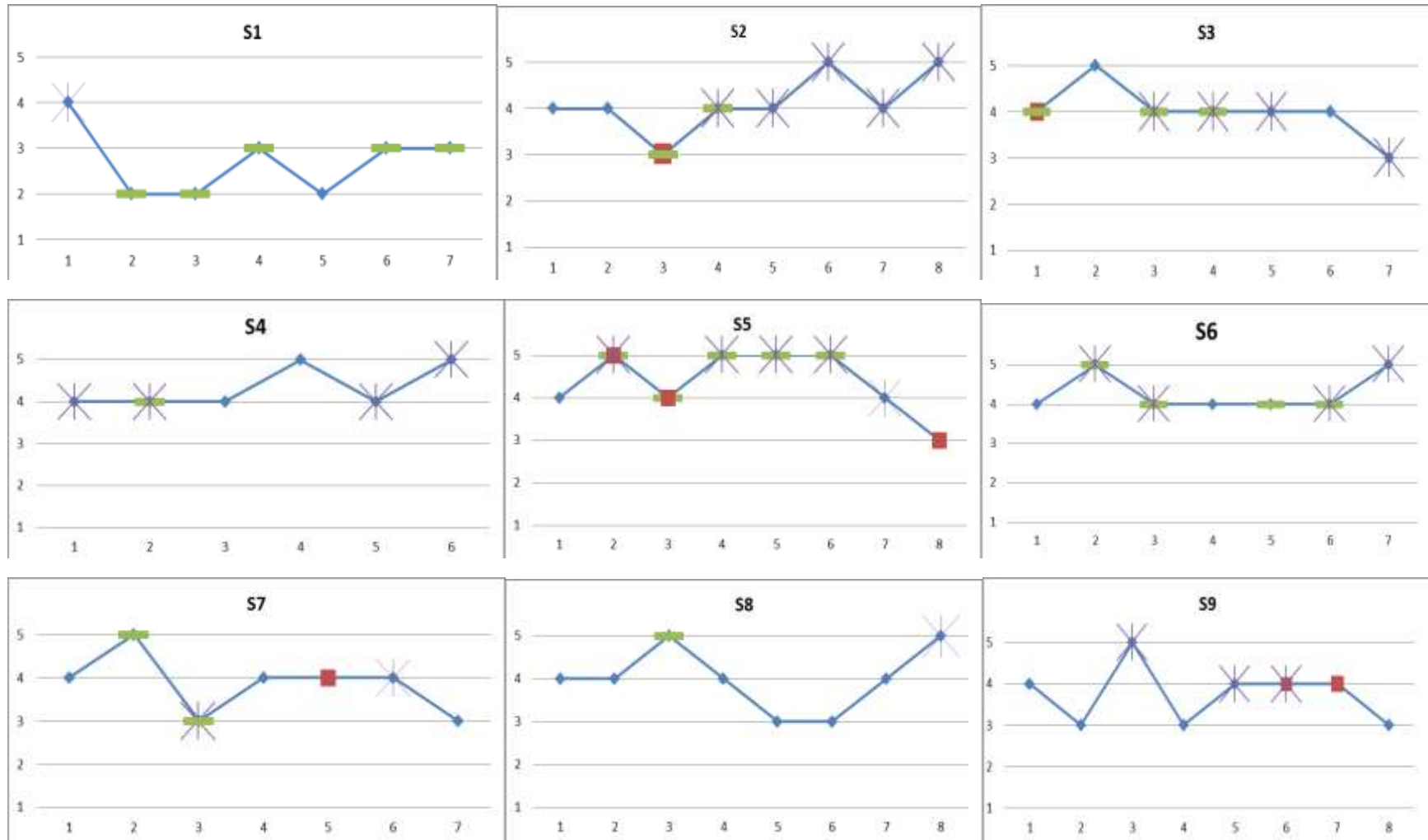


Figura.8. Trayectoria de razonamiento geométrico sobre la congruencia de la pareja 3 en las 9 sesiones de la secuencia de ambiente de aprendizaje. Nota: la gráfica se lee de izquierda a derecha en forma ascendente y S1-S9 significan las sesiones. En el eje Y se muestran los cinco niveles de razonamiento del 1 al 5 que fueron presentados en la Tabla 4 y los tipos de gesto ■ = atributos; ■ = propiedades y * = relaciones. En el eje X se muestran las observaciones que se realizaron por sesión que varían de 1 a 8, y cada observación es en un intervalo de 5 minutos.

En el análisis de variabilidad inter-sesión se logró evidenciar en la Figura 8 que la pareja 3 fluctuó sus niveles de razonamiento entre el 3 y 5, y presentaron cambios a través de las sesiones en 3 momentos importante de variabilidad (Ver Figura 8): 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 cuando se cambió de las tareas de *exploración* a la de *resolución de problemas de formas simples*, la pareja 3 no volvió a utilizar el nivel 2 de razonamiento implícito en que solo lograban identificar los triángulos pero no realizaban relaciones entre ellos y dentro de un mismo triángulo. Los niveles de razonamiento a partir de la sesión 2 empezaron a oscilar entre 3 y 5, es decir, que pasaban los niños de reconocer relaciones parciales entre los triángulos, a realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma y tamaño para explicar la congruencia en niveles superiores como el 5;

2) en el paso de la sesión 4 a la 5 cuando se les presentaron a la pareja 3 las últimas tareas de las *figuras simples* (sesión 4) y las primeras tareas de *figuras compuestas* (sesión 5 y 6), la pareja presentó una relativa estabilidad al permanecer durante tiempos largos de las observaciones de esas sesiones (2 a 3 momentos de observación) en niveles de razonamiento de mayor complejidad como el 4 y 5, es decir, que la pareja realizó relaciones entre los triángulos enfocado en forma, tamaño o ambos para explicar la congruencia; 3) en el paso de la sesión 6 a la 7 y hasta la sesión 9 cuando se aumentó la cantidad de triángulos en la sesión 7 (6 triángulos), en la sesión 8 (8 triángulos) y en la sesión 9 (10 triángulos) y se cambió el tipo de triángulo a no isósceles en la última sesión, la pareja 3 presentó una mayor variabilidad entre los niveles porque fluctuaba su razonamiento entre los niveles 3 y 5, es decir, retornaron la pareja 3 a niveles menos avanzados como el 3 en que reconocían relaciones parciales entre las partes de los triángulos.

La variabilidad intra-sesión de esta pareja 3 en la Figura 8 se evidenció en todas las sesiones, y se caracterizó por oscilar entre los niveles de razonamiento 3 y 5 en más de la

mitad de las sesiones (sesiones 2, 3, 5, 7 8 y 9), es decir, que los niños pasaban de un razonamiento implícito de los triángulos enfocados solo en relaciones iniciales o comparaciones parciales en un mismo triángulo, a realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma y tamaño para explicar la congruencia. En las sesiones restantes (sesiones 6 y 4) los niveles de razonamiento de la pareja 3 oscilaron entre 4 y 5 al realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma, tamaño o ambos para explicar la congruencia.

Sin embargo, hay sesiones que fueron más variables y presentaron mayores cambios entre los niveles de razonamiento en la pareja 3: 1) la sesión 1 fue variable debido a que la pareja 3 cuando se le presentó *las tareas exploratorias* empezaron en un nivel superior como el 4 que implicaba que realizaban relaciones entre las partes de los triángulos enfocado en forma y tamaño, pero a partir de la observación 2 y en el transcurso de la sesión los niveles de razonamiento de la pareja fluctuaron entre 2 y 3, que implicó que ellos solo identificaban que la figura era un triángulo o realizaban relaciones entre las partes de un mismo triángulo; 2) En la sesión 2 cuando se les presentó las primeras tareas de *figuras simples* a la pareja 3, ellos empezaron en un nivel de razonamiento 4 que fue el más usado durante la sesión al identificar relaciones entre las partes del triángulo y entre los triángulos enfocado en forma y tamaño, y sólo en el momento de observación 3 evidenciaron un nivel de razonamiento 3 porque realizaron relaciones entre las partes de un mismo triángulo. Sin embargo, la pareja 3 terminó la sesión en un nivel de razonamiento 5 en que reconocían relaciones entre las partes dentro de los triángulos y entre ellos enfocado en forma y tamaño para dar explicación de la congruencia.

3) En la sesiones 8 y 9 la pareja 3 presentó una mayor variabilidad, es decir, fluctuaron sus desempeños entre niveles 3 y 5, al pasar solo de identificar relaciones entre

las partes de un solo triángulo y relaciones parciales entre triángulos, a realizar comparaciones que denotaban relaciones entre varios triángulos que daban alusión a forma y tamaño. No obstante, la sesión 9 fue la más variable en la pareja posiblemente por el cambio del tipo de triángulo que era no isósceles y por el aumento de la cantidad de triángulos a 10.

En la Figura 8 se evidencia sesiones de baja variabilidad (sesiones 3, 5, 4, 6 y 7) al presentar la pareja 3 estados de relativa estabilidad, es decir, la pareja estaba por un tiempo prolongado en niveles de razonamiento altos como 4 o 5 al enfocarse en describir relaciones entre las partes de un mismo triángulo y entre ellos dando alusión a la forma o el tamaño como en el nivel 4 o del tamaño y la forma en el nivel 5.

En lo que respecta al uso del gesto inter-sesión por parte de la pareja 3, se logró identificar que en toda la secuencia del ambiente de aprendizaje emergieron los 3 tipos de gestos. Los gestos de atributos que refieren a cualquier característica de un triángulo la pareja 3 lo usó en las sesiones 2, 3, 5, 7 y 9. Los gestos de relaciones entre las partes de más de dos triángulos aparecieron en todas las sesiones de la secuencia de aprendizaje. Los gestos de propiedades aparecieron en todas las sesiones menos en la sesión 9.

La pareja 3 tuvo cambios en el uso del gesto durante la trayectoria entre las sesiones: 1) En el paso de la sesión 1 a la 2 la pareja 3 empezó a usar el tipo de gestos de atributos en niveles de razonamiento de 3 a 5, es decir, pasaban los niños de realizar relaciones entre las partes de un mismo triángulo a identificar relaciones entre las partes de ambos triángulos enfocados en forma y tamaño; 2) En el paso de la sesión 4 a la 5 cuando se le presentó a la pareja 3 el cambio tareas de *resolución de problemas de formas simples a formas compuestas*, aumentó el uso de gestos de relaciones y propiedades por parte de ellos, apareciendo en co-ocurrencia estos tipos de gestos en niveles de razonamiento 4 y 5;

y 3) en el paso de la sesión 6 a la 7, los niños disminuyeron el uso de los gestos de atributos, relaciones y propiedades para resolver las ultimas tareas.

En el análisis intra-sesión de la pareja 3 el uso de gestos de relaciones y propiedades apareció en algunas sesiones durante la trayectoria como un precursor del cambio en los niveles de razonamiento sobre la congruencia, por ejemplo: 1) en la sesión 2 cuando usó la pareja 3 el gesto de relaciones en el momento de observación 5 posiblemente este fue un precursor del cambio de un nivel de razonamiento 4 a 5, es decir, los niños pasaron de identificar relaciones entre las partes de los triángulos enfocada en la forma o el tamaño, a dar explicaciones que generan relaciones entre las partes que dan cuenta de forma y tamaño para explicar la congruencia (se amplía la descripción en el análisis cualitativo del gesto en las Figuras 20 y 21); y 2) en la sesión 6 en el momento de observación 6 cuando los niños utilizaron los gestos de relaciones y propiedades posiblemente estos fueron precursores de cambio de un nivel de razonamiento de nivel 4 a 5, es decir, pasaron los niños a realizar comparaciones que denotan relaciones entre varios triángulos que dan alusión a forma y tamaño (se amplía la descripción en el análisis cualitativo del gesto en la Figura 23).

En conclusión, en relación a las trayectorias de razonamiento sobre la congruencia entre las 3 parejas, se logró evidenciar que las parejas presentaron momentos de cambio a partir de la variabilidad con el cambio de tareas, es decir, los cambios más predominantes en los niveles de razonamiento que utilizaron las 3 parejas estuvo en concordancia con el cambio de tarea: 1) en el paso de la sesión 1 a la 2 cuando se cambió de las tareas *exploratorias a la de resolución de problemas simple*, y 2) en el paso de la sesión 4 a la 5 cuando se cambió de tareas de las situaciones de *resolución de problemas de formas simples a formas compuestas*.

En relación a la variabilidad inter-sesión, la pareja que presentó una variabilidad alta fue la 2, debido a que utilizó niveles de razonamiento sobre la congruencia entre los niveles 2 y 5 a lo largo de la trayectoria, es decir, los niños iban de un razonamiento implícito en que solo reconocían que las formas presentadas eran triángulos identificando sus partes o atributos sin establecer relaciones entre las partes, a realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma o tamaño para explicar la congruencia. La pareja 3 presentó una variabilidad media porque a lo largo de la trayectoria en la variabilidad inter-sesión emergió los 3 niveles de razonamiento, es decir, en la mayoría de las sesiones los niveles de razonamiento fueron entre 3 y 5, que implicaba que los niños pasaban de realizar relaciones entre las partes de un mismo triángulo a describir relaciones entre las partes de los triángulos enfocados en forma y tamaño.

Sin embargo, la pareja 1 presentó una variabilidad baja porque en la mayoría de las sesiones los niveles de razonamiento fueron entre 4 y 5, es decir, pasaron de identificar relaciones entre las partes de los triángulos enfocada en la forma o el tamaño, a dar explicaciones que generaban relaciones entre las partes que daban cuenta de forma y tamaño para explicar la congruencia.

Por otro lado, en las 3 parejas de niños apareció el uso del gesto como un posible precursor del cambio en los niveles de razonamiento en momentos específicos dentro de las sesiones. Además, el uso del gesto no fue igual en las 3 parejas, es decir, en la pareja 1 el uso de los tipos de gestos fue constante durante toda la trayectoria, pero en la pareja 2 y 3, su uso disminuía después de la sesión 4 o 5. El tipo de gesto que menos utilizaron los niños fue el gesto de atributos y los más usados fueron los gestos de relaciones y propiedades.

7.4. Análisis cualitativo del gesto

En este apartado se presenta el análisis enfocado el rol del gesto (relaciones, propiedades o atributos) por parte de las 3 parejas, es decir, el rol del gesto como precursor de cambio o el rol gesto comunicativo en los niveles de razonamiento sobre la congruencia. La forma en que se identificó el rol del gesto fue mediante diálogos y secuencia de imágenes de las 3 parejas. En esos diálogos las acciones se presentan (entre paréntesis), los gestos de mano se presentan {entre llaves con el texto subrayado}, las notas para el lector se presentan [entre corchetes] y las expresiones se presentan en formato normal dentro del fragmento. La identificación de las letras que aparecen en los fragmentos para la pareja 1 fueron J: niño 1, V: niña 2; para la pareja 2: MI: niño 1, M: niño 2; y la pareja 3: J: niño 1, E: niño 2. En todos los casos la sigla I fue para la investigadora.

7.4.1. Uso del gesto en la pareja de niños uno.

Las Figuras 9 y 10 representan cómo el gesto fue promotor del cambio en la sesión 1, es decir, al pasar de un nivel de razonamiento 4 a 5.

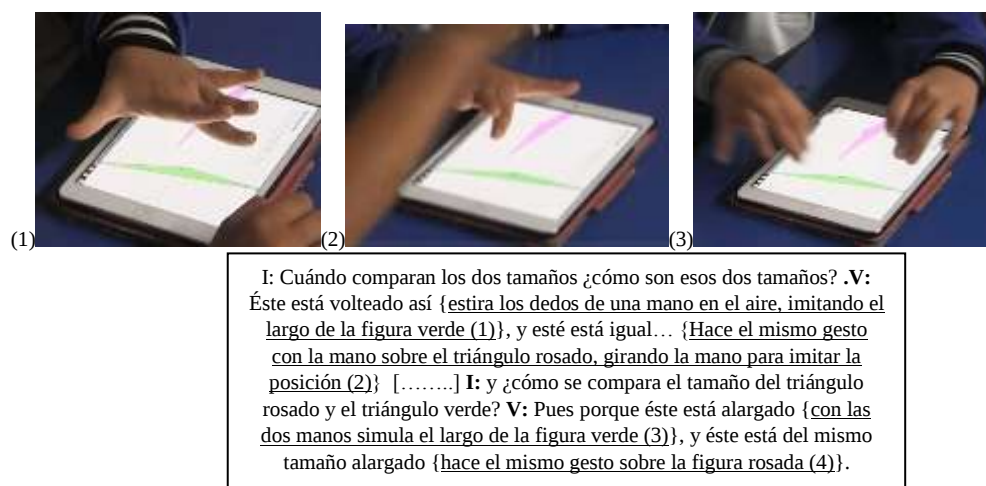


Figura 9. Uso de gesto Pareja 1- sesión 1, en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia.

En la Figura 9, la pareja 1 demostró que mediante el uso de la secuencia de gestos de relaciones, ellos identificaron relaciones entre los dos triángulos enfocadas en la comparación de la igualdad del tamaño como uno de los indicadores importantes del nivel de razonamiento 4, es decir, que la pareja 1 reconoció la igualdad entre los triángulos en la comparación entre las partes, en especial del largo para dar cuenta del tamaño.

Mediante el uso de los dedos y la verbalización la pareja 1 comunicó el razonamiento sobre la congruencia, es decir, uno de ellos demostró con su dedo índice y pulgar la misma distancia entre una punta y la otra de ambos triángulos, y ambos niños usaron expresiones como “*este está alargado, y este está del mismo tamaño alargado*”. A pesar de que los triángulos tuvieran posiciones diferentes dentro de la rejilla los niños mostraron que las propiedades eran las mismas.

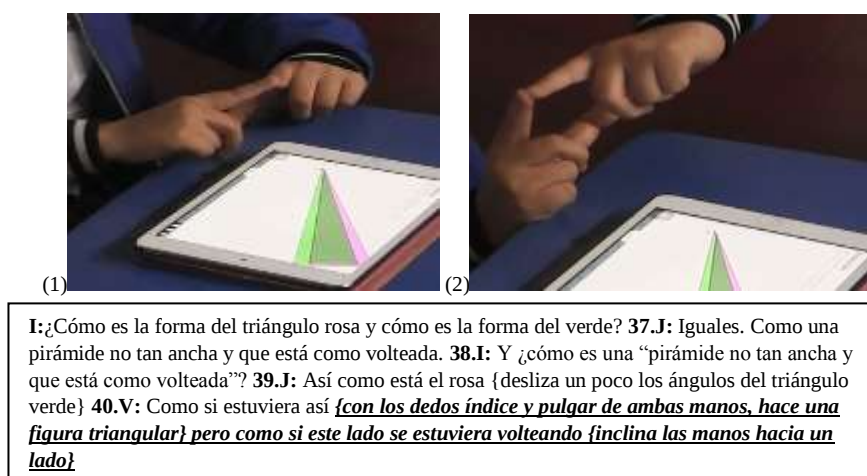


Figura 10. Uso de gesto Pareja 1- sesión 1, en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia.

En la Figura 10, la pareja 1 demostró un nivel de razonamiento 4 sobre la forma de los triángulos a pesar de las transformaciones en el espacio, es decir, la congruencia en este estudio tuvo un enfoque de transformación, y en esta ocasión los niños identificaron que los

triángulos en el plano se desplazaron generando cambios de posición y orientación de ambos al mismo tiempo, pero conservaban su misma forma.

La pareja 1 reconoció la transformación que implicaba esas rotaciones y translaciones en los triángulos, al identificar que un triángulo era igual al otro cuando representaron con su dedo índice y pulgar de ambas manos una figura triangular, y especificaron la orientación y posición hacia donde estaban ubicados ambos triángulos (hacia la derecha)

Lo anterior, también demostró que el uso de la tecnología por parte de la pareja 1 fue un promotor del razonamiento intuitivo en el momento en que ellos transformaron los triángulos con sus dedos para argumentar sus ideas mediante la ejecutabilidad de múltiples representaciones, es decir, la pareja 1 usó varias formas de representación como es lo gestual y lo verbal. A su vez, se evidenció el proceso de coacción que permitió a la pareja 1 guiar y ser guiado de manera simultánea por la tarea dinámica cuando dieron sus explicaciones a partir de la retroalimentación que generó la situación de manera visual y háptica.

En relación al proceso de cambio, las Figuras 9 y 10 evidenciaron que el uso de la secuencia de gestos de relaciones que emergieron en la pareja 1 fueron posiblemente precursores de cambio de un nivel de razonamiento 4 a 5; lo cual se corrobora con el análisis anterior de las trayectorias de razonamiento de la pareja 1 en el paso de la observación 6 a la 7 de la sesión 1 (ver Figura 6-S1). Se expone un fragmento de la pareja 1 que evidenció relaciones entre las partes de los triángulos que dieron cuenta de forma y tamaño de un nivel de razonamiento 5 para explicar la congruencia en un siguiente momento de la sesión:

V: Sí son idénticos. .I: ¿por qué son idénticos? .V: Porque los dos si tienen el mismo centímetro y el mismo ancho .I: ¿cuál es el mismo centímetro y el mismo ancho? .V: El mismo ancho es lo de adentro que está igual de ancho {hace una figura con las dos manos en el aire}, y los lados está igual, y los centímetros. .I: Entonces él les preguntaría “¿cómo así que los lados están iguales?” ¿Cuáles son los lados iguales? J: Mire, lo nuevo para acá {desliza uno de los puntos del triángulo verde} y el otro también se mueve para acá (señala el triángulo rosado yendo en la misma dirección) .I: ¿Cuál lado? .J: El izquierdo mueve para acá (sigue sosteniendo el punto del triángulo), y también mueve su izquierdo. Los lados siempre están iguales.

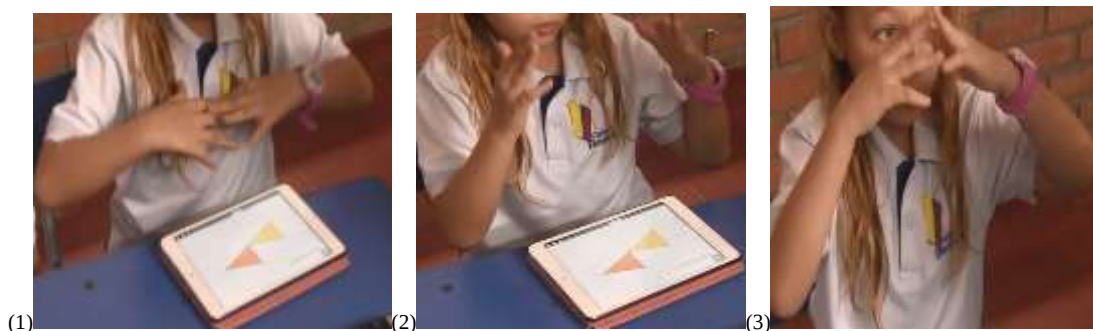


I: Ahora cuénteme la estrategia que utilizaron **J:** La misma, Las puntas las pusimos en la misma posición: la punta del triángulo la gris en la misma posición de la punta del triángulo café. Pusimos la punta de la gris en la misma posición de la café {junta los dedos de las manos en el aire haciendo un ángulo} Así lo pusimos idéntico, y aquí (señala parte izquierda de la pantalla donde están los marcadores de tamaño) porque dice que son del mismo centímetro, el mismo lado. **V:** Y los puntos ayudan a medir el mismo centímetro, y el largo que están los lados del triángulo.

Figura 11. Uso de gesto Pareja 1- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de resolución de problemas de formas simples.

En la Figura 11 en la tarea N1 de resolución de problemas de formas simples, los niños evidenciaron el ángulo de los triángulos cuando ellos dijeron que “la punta del triángulo gris está en la misma posición del triángulo café. Pusimos la punta del triángulo gris en la misma posición de triángulo café”, y uno de los niños lo representó con un gesto de propiedades con las manos al juntar los dedos de las palmas de ambas manos en el aire en forma de ángulo dando cuenta de un razonamiento de nivel 4, es decir, se enfocaron en relaciones entre los lados de los triángulos que daba alusión a la forma e hicieron énfasis en el ángulo. En este caso el gesto cumplió un rol comunicativo y evidenció el razonamiento en sí mismo embebido en el cuerpo, es decir, cuando la pareja 1 usó el gesto

y la verbalización para explicar el concepto de ángulo y la forma, ellos representaron mediante sus dedos y las manos estos dos conceptos que referían a un tipo de razonamiento de nivel 4 que implicaba realizar relaciones entre las partes de los triángulos enfocados en la forma.



I: porque que creen que esos dos triángulos son idénticos:: J: por el cm V: no yo creo que los hace idéntico por los puntos porque esto esta como en orden alfabético porque esta como así a,b,c,d,e,f (toca los puntos de los dos triángulos) I: está bien pero que más los hace idénticos aparte de las letras V: pues los bordes I: cuales son los bordes J: los puntos V: los bordes de abajo van con los bordes de abajo {con las manos en paralelo ubicadas en forma horizontal una al lado de la otra las une entre los dedos (1)} y los bordes de los lados {coloca las dos manos paralelas una al lado de la otra y después las una con los dedos formando la punta del triángulo (2)} para que este igual {realiza con el dedo índice y pulgar de la mano derecha y la mano izquierda un triángulo en el aire (3)} J: pero es que este tiene el de abajo y los lados {coloca la mano paralela al lado de la otra (2)} V: los bordes {realiza con el dedo índice y pulgar de la mano derecha y la mano izquierda un triángulo en el aire (3)}

Figura 12. Uso de gesto Pareja 1- sesión 3 en la tarea N2 de la situación de la situación de resolución de problemas de formas simples.

En la Figura 12 en la tarea N2 de resolución de problemas de formas simples, la pareja 1 realizó una secuencia de gestos de relaciones que hace alusión a un nivel de razonamiento 4, es decir, ellos identificaron relaciones entre las partes de los triángulos enfocados en la forma. Uno de los niños ubicó las manos en paralelo en forma horizontal una encima de la otra para representar la base de ambos triángulos, después colocó una mano paralela a la otra para representar los lados y finalmente unió sus manos con los dedos para formar la punta de los triángulos y el ángulo.

Los niños en este momento de la sesión que usaron el gesto de relaciones estaban en un nivel 4 de razonamiento que se describió anteriormente, pero ese uso de gestos posiblemente fue un precursor de cambio en los siguientes momentos de la sesión a un

nivel de razonamiento 5, es decir, ellos pasaron a realizar relaciones entre las partes de los triángulos enfocado en forma y tamaño para dar cuenta de la congruencia. Lo anterior, se corrobora con la trayectoria de razonamiento de la pareja 1 explicadas en el apartado anterior (ver Figura 6-S3), porque cuando emergió el uso del gesto de relaciones en el momento de observación 2 la pareja 1 pasó de un nivel de razonamiento 4 a 5 en el momento de observación 3.

Para ejemplificar cómo la pareja 1 evidenció un razonamiento de nivel 5 que implicaba relaciones entre los triángulos que daban alusión a forma y tamaño, se presenta un fragmento en el momento de observación 3: “ **I:** listo entonces en resumen que es lo que los hace idénticos a esos dos triángulos **J:** los hace idénticos los cm, los lados, las puntas, **V:** y los más importante que los ayuda a ser idénticos **J:** Son los cms **V:** No serian el orden alfabético de los puntos que están conectados con lo cms y las líneas de los lados... Son idénticos porque tienen los lados iguales, aunque esto (señala los triángulos) aunque lo movamos tendrá los mismos lados nunca cambia (arrastra el triángulo naranja de derecha a izquierda y agranda en la pantalla) **I:** y como son los mismo lados? **J:** Son tres lados, son tres lados, pero nunca van a cambiar los lados, siempre un triángulo va a tener 3 lados nunca van a cambiar, (señala los triángulos), nunca cambiara el cm o la longitud **I:** Nunca cambiara el cm de que? **V:** de los lados **I:** Entonces lo que los hace idéntico son los mismos cm de los lados? **V:** si [anteriormente habían contado cuantos cuadros tenia cada lado al comprarlos para medir la longitud de cada uno]



24.J: Esto es lo ancho y esto es lo largo {traza una línea horizontal en la parte base de la figura compuesta(1)} y traza una línea vertical en el lado izquierdo de la figura compuesta(2)}

Figura 13. Uso de gesto Pareja 1- sesión 6 en la tarea N5 de la situación de resolución de problemas de formas compuestas.

En la Figura 13 se presenta un apartado de la sesión 6 de la tarea N5 de resolución de problemas de formas compuestas. La pareja 1 mostró un razonamiento de nivel 4, es decir, los niños dieron explicaciones de relaciones entre las partes de la figura compuesta que daban cuenta de tamaño para explicar la congruencia. En este sentido, los niños expresaron el ancho y el largo entre las figuras compuestas para explicar mediante el tamaño porque la figura compuesta que habían creado era idéntica a la referente.

Uno de los niños dijo “*esto es el ancho y esté es el largo*”, y generó gestos de propiedades al trazar con su dedo índice una línea imaginaria horizontal y posteriormente una línea imaginaria vertical. En este caso el gesto cumplió un rol comunicativo y evidenció el razonamiento en sí mismo embebido en el cuerpo, es decir, cuando la pareja 1 usó el gesto y la verbalización para explicar el concepto de ancho y largo, ellos representaron mediante sus dedos y las manos estos dos conceptos que referían a un tipo de razonamiento de nivel 4.

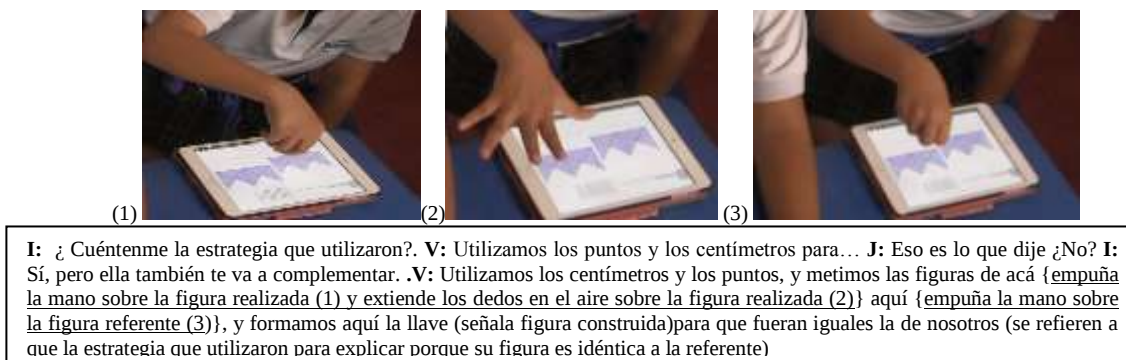


Figura 14. Uso de gesto Pareja 1- sesión 7 en la tarea N6 de la situación de la situación de resolución de problemas de formas compuestas.

En la Figura 14 la pareja 1 evidenció un razonamiento de nivel 4 y usaron el gesto de relaciones, es decir, ellos realizaron relaciones entre las partes de la figura compuesta enfocada en la forma. Uno de los niños representó su mano empuñada como si fuera la figura primero en la figura de referencia y después en la figura creada por ellos, y dijo *“formamos aquí la llave (señala figura construida) para que fuera igual a la de nosotros”*. Este tipo de gestos usados por la pareja 1 posiblemente fueron precursores de cambio de un nivel de razonamiento 4 a 5; y sí se corrobora con la trayectoria de razonamiento de la pareja 1 explicadas en el apartado anterior (Ver Figura 6-S7), se evidencia que cuando emergió el uso del gesto de relaciones en el momento de observación 5 posiblemente fue un precursor del cambio de un nivel de razonamiento 4 a 5, es decir, los niños identificaron el principio de igualdad entre las figuras compuestas por triángulos al comparar sus partes y realizar relaciones entre ellas; y posteriormente pasaron a un nivel de razonamiento de 5 en el momento de observación 6.

A continuación se presenta un párrafo de la pareja 1 que evidenció el nivel de razonamiento 5 en el momento de observación 6, donde la pareja 1 identificó el largo y el ancho mediante el conteo cuando compararon cada una de los lados de las figuras

construida por ellos y la referente que hacían alusión a la forma y tamaño para dar cuenta de la congruencia:

“J: este es el largo ... Ven yo te digo cuál es el que inicia (coge el lápiz) Éste es el que inicia (Señala punto inferior del lado derecho de la figura construida), y éste es el que termina (Señala punto superior del lado derecho) El que inicia es que tiene el punto en la línea de abajo y el que termina es el que tiene su punto en la línea de arriba (...)10.V: 1, 2, 3 (Cuenta señalando el lado izquierdo de la figura construida) 11.J: No, aquí (señala en la figura original) El lado de la otra 12.V: 1, 2, 3, 4 (Cuenta en el lado derecho de la figura construida) 13.J: No, empieza desde acá (Señala punto superior del lado derecho de la figura original) 14.V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (Cuenta señalando la parte derecha de la figura original) J: Listo. Son idénticas, Ahora mide lo ancho a ver, mira, **lo ancho sería** desde aquí (señala punto inferior derecho de la figura construida) hasta aquí (señala punto inferior izquierdo de la figura construida) Cuenta éste (señala figura realizada), y luego cuenta éste (señala figura base) 19.V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 (Cuenta señalando toda la parte inferior de la figura construida) 20.J: ¿17? 21.V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16... (Cuenta señalando toda la parte inferior de la figura base) 22.J: ¿Diez y qué? 23.V: 1, 2, 3, 4, 5, 6... (Vuelve a contar parte inferior de la figura realizada) 24.J: Eso ya fue 17 aquí (señala la figura) 25.V: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17. (Continúa el conteo) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 (Vuelve a contar parte inferior de la figura original).(...)entonces Son idénticos por las unidades de medida que acabo de contar [se refiere al conteo de ancho y largo].por los lados y todos los triángulos de adentro miden los mismo.

7.4.2. Uso de gesto de la pareja de niños dos.

A continuación se presentan los gestos que aparecieron en las explicaciones de la pareja 2 que cumplieron un rol del gesto comunicativo o como precursor del cambio en los niveles de razonamiento.

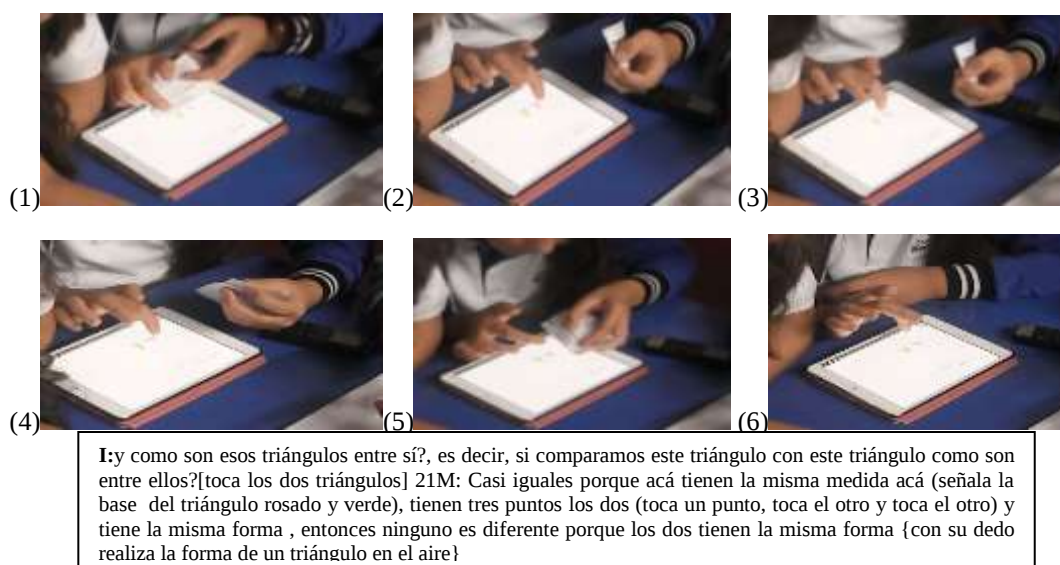


Figura 15. Uso de gesto Pareja 2- sesión 1 en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia

En la Figura 15 se presenta un apartado de la sesión 1 de la situación de exploración de congruencia. La pareja 2 mostró un razonamiento de nivel 4, es decir, los niños dieron explicaciones de relaciones entre las partes de la figura total que daba alusión a forma para explicar la congruencia. En este sentido, los niños expresaron la cantidad de puntos que tenía cada triángulo cuando tocaron cada una de las puntas, identificaron la medida igual de uno de los lados de ambos triángulos, realizaron un gesto con el dedo de un triángulo en el aire y uno de los niños dijo “ninguno es diferente porque los dos tienen la misma forma” para explicar mediante la forma porque los dos triángulos eran idénticos.

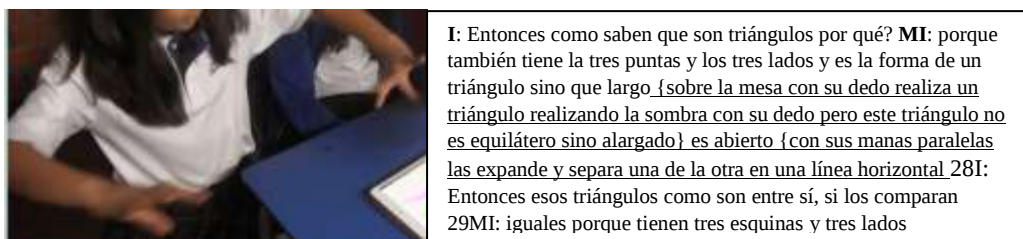


Figura. 16. Uso de gesto Pareja 2- sesión 1 en la tarea exploratoria 2 de la situación de exploración de congruencia.

La Figura 16 complementa el gesto realizado por la pareja 2 sobre la forma en la Figura 15, es decir, la pareja mostró a partir del gesto de relaciones un nivel de razonamiento 4 sobre la congruencia al realizar relaciones entre las partes de los triángulos enfocada en la forma a pesar de las transformaciones de los triángulos, es decir, uno de los niños delineó con su dedo índice un triángulo sobre la mesa y dijo *“porque tienen las tres puntas, los tres lados y la forma de un triángulo pero más abierto”*, y representó al final con sus manos en paralelo una línea horizontal al separar y expandir las manos. En otras palabras, a pesar de que los niños habían generado cambios en la posición y orientación de los triángulos, ellos identificaron el principio de igualdad cuando reconocieron que su forma era igual a pesar de haber una secuencia de transformaciones en ellas. A su vez, la pareja intentó identificar el tamaño de los triángulos al representar con sus manos el largo de estos, donde el gesto de relaciones representó en las manos un concepto embebido como el largo en sí mismo, pero que la pareja 2 no evidencio en el habla.

Por último, estos gestos de relaciones usados por la pareja 2 presentados en las Figuras 15 y 16 posiblemente fueron precursores de cambio en sus nivel de razonamiento, es decir, al contrastarlo con el análisis anterior de las trayectorias de razonamiento de la pareja (ver figura 7 S1) se identifica que estos gestos de relaciones emergieron en la trayectoria de la sesión de la pareja 2 en el momento de observación 4, posiblemente

siendo estos un precursor de un cambio de un nivel de razonamiento 4 a 5 cuando la pareja paso al momento de observación 5.

Se expone un fragmento que evidenció en la pareja 2 un nivel de razonamiento 5 en el momento de observación 5, cuando ellos dieron cuenta del tamaño y la forma al referirse a la longitud de cada uno de los lados comparándolos con la medida de su dedo, decir que *miden lo mismo* e identificar que tienen 3 lados y 3 puntas:

“I: Como son los triángulos si los comparan entonces? MI: yo le diría que son los mismos triángulos (...) tienen tres lados y tres puntas pero que uno esta volteado. I: pero si uno esta volteado porque son los mismos triángulos? MI: porque aquí mide lo mismo y aquí también mide lo mismo {con su dedo índice lo coloca de abajo hacia arriba sobre el lado izquierdo del triángulo verde y sobre el mismo lado paralelo del triángulo rosado} porque en cada esquina miden lo mismo. I: en cual esquina me muestras MI: mira aquí miden lo mismo (señala el lado derecho del triángulo rosado) aquí miden lo mismo (señala el lado paralelo del triángulo verde) I: ok, entonces en cada esquina (señala el lado derecho del triángulo verde) ¿esto son esquinas? MI: no lados M: lados. 42I: entonces ustedes dirían que son dos triángulos que son los mismo por qué tienen? :MI: tienen los mismos 3 lados y cada lado mide igual.

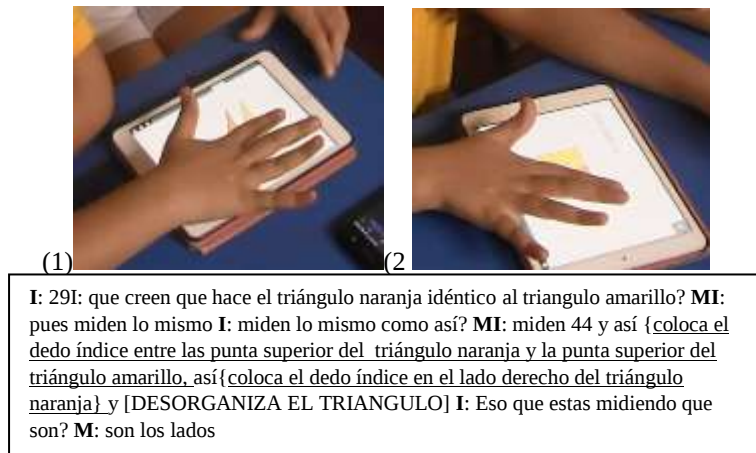
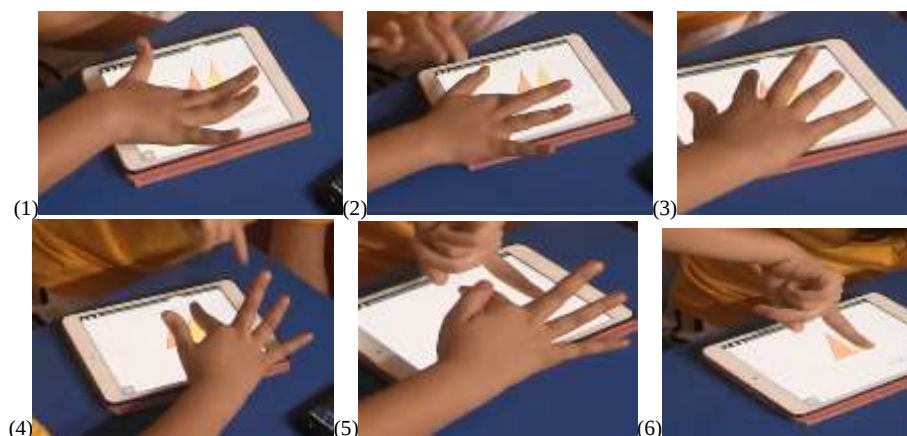


Figura 17. Uso de gesto Pareja 2- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de figuras simples.

En la Figura 17 se presenta un apartado de la sesión 2 de la tarea N1 de figuras simples. La pareja mostró un razonamiento de nivel 4, es decir, los niños lograron generar una explicación de razonamiento avanzado que implicaba que ellos dieron explicaciones de relaciones entre las partes de la figura total que daban cuenta del tamaño para explicar la congruencia. Los niños expresaron una relación de igualdad entre los lados de los triángulos al compararlos cuando dijeron “*pues miden lo mismo*” en el momento en que se les preguntó que creen que hace idéntico a los triángulos, y realizaron con su dedo un gesto de relaciones para medir los lados aunque se enfocaron en 2 lados, es decir, usaron el dedo como medida de la longitud de cada lado.

Este tipo de gesto de relaciones que realizaron la pareja 2 posiblemente fue un precursor de un cambio en los niveles de razonamiento de nivel 4 a 5, es decir, al contrastar con el análisis anterior de las trayectorias de razonamiento de la pareja (ver figura 7-S2), este tipo de gesto emergió en el momento de observación 2 de la trayectoria de la sesión 2 en un nivel de razonamiento 4, siendo posiblemente un precursor de cambio a un nivel de razonamiento 5. Para evidenciar este cambio del nivel de razonamiento en la pareja se presenta en la posterior Figura 18 un nivel de razonamiento 5 en relación con una secuencia de gestos de relaciones que complementa los presentados en la Figura 17.



I: Que creen que hace el triángulo naranja idéntico al amarillo. M: o sea los lados {coloca el dedo índice en el lado izquierdo del triángulo amarillo} 4MI: Yo mido aquí este lado no más {coloca el dedo índice entre en la base del triángulo amarillo} que este mida la misma {coloca el dedo índice en la base del triángulo naranja} que este {coloca el dedo índice en el lado derecho del triángulo naranja} y este {coloca el dedo índice en el lado derecho del triángulo amarillo-paralelo} y que este {coloca el dedo índice en el lado izquierdo del triángulo naranja} y este {coloca el dedo índice en el lado izquierdo del triángulo amarillo-paralelo} midan lo mismo M: {coloca el dedo índice en el lado izquierdo del triángulo naranja} {coloca el dedo índice en el lado izquierdo del triángulo amarillo-paralelo}

Figura 18. Uso de gesto Pareja 2- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de figuras simples.

En la Figura 18 se evidenció el cambio de la pareja 2 con el uso de gestos de relaciones a un nivel de razonamiento 5 al contrastarlo con la Figura 17, es decir, los niños dieron explicaciones sobre relaciones entre las partes que dan cuenta de forma y tamaño para explicar la congruencia. En este sentido, los niños usaron su dedo como una unidad de medida cuando midieron cada uno de los 3 lados del triángulo de referencia con el que construyeron y dijeron “*que miden lo mismo*” refiriéndose a cada uno de los lados

Cuando la pareja 2 usó los gestos de relaciones estos cumplieron dos roles: 1) el rol de ser comunicativo porque las relaciones matemáticas estaban embebidas en las manos y los dedos que representaron el proceso de medición; y 2) el rol de precursor de cambio porque lograron en sus explicaciones en esa sesión dar cuenta de la congruencia en un nivel de razonamiento 5, al complementarlos con los gestos que había ocurrido en un momento de observación anterior de la sesión presentado en la Figura 17.

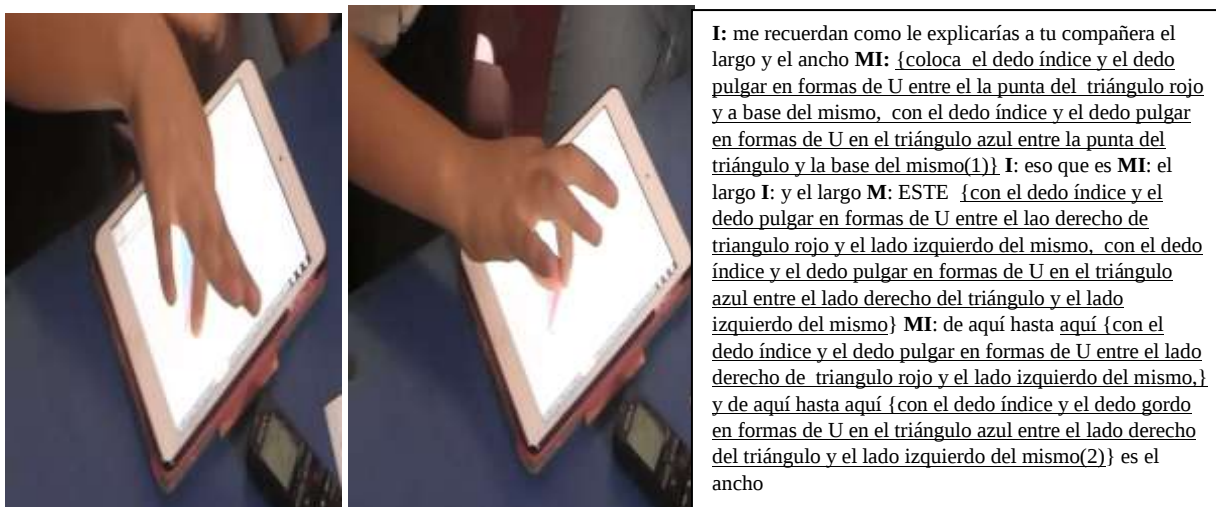


Figura. 19. Uso de gesto Pareja 2- sesión 4 en la tarea N3 de la situación de resolución de problemas de formas simples.

En la Figura 19 en la tarea N3 de resolución de problemas de formas simples, la pareja 2 evidenció uso de gestos de relaciones en nivel de razonamiento 4, es decir, los niños realizaron relaciones entre las partes de los triángulos pero enfocado en el tamaño al identificar ellos el ancho y el largo entre los triángulos congruentes. La pareja 2 usó el gesto y la verbalización para explicar estos 2 conceptos y evidenciar el tamaño, es decir, el gesto cumplió un rol comunicativo al representar la pareja mediante sus dedos este tipo de razonamiento embebido. Uno de los niños colocó el dedo índice y el dedo pulgar en formas de U entre el la punta del triángulo rojo y la base del mismo, y posteriormente realizaron el mismo gesto en el triángulo azul y dijo “*este es el largo*”. Para explicar el ancho uno de los niños dijo “*de aquí hasta aquí*” y colocó el dedo índice y el dedo pulgar en formas de U entre el lado derecho y el lado izquierdo del triángulo rojo; y dijo nuevamente “*de aquí hasta aquí?*”, y colocó el dedo gordo en formas de U en el triángulo azul entre el lado derecho y el lado izquierdo del triángulo.

7.4.3. Uso de gesto en la pareja de niños tres.

A continuación se presentan los gestos que aparecieron en las explicaciones de la pareja 3 que cumplieron un rol del gesto comunicativo o como precursor del cambio en los niveles de razonamiento.

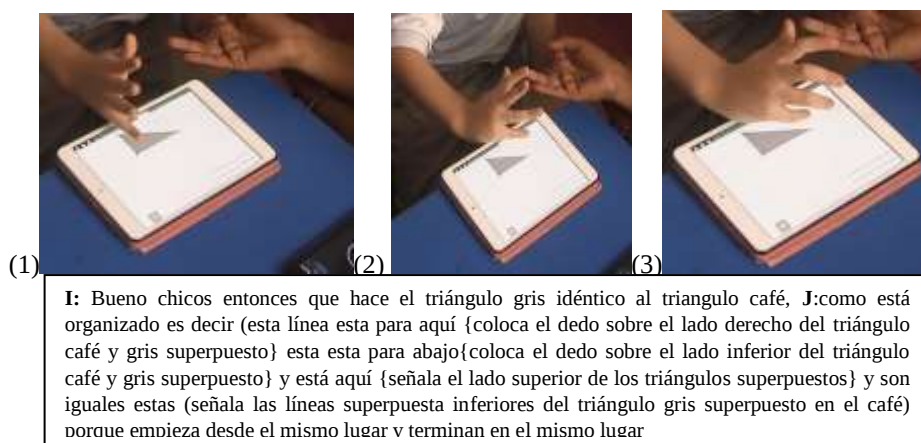


Figura 20. Uso de gesto Pareja 3- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de resolución de problemas de formas simples.

La Figura 20 representa la tarea N1 de resolución de problemas de formas simples. En esta figura la pareja 3 mostró un razonamiento de nivel 4, es decir, los niños dieron explicaciones de relaciones entre las partes de la figura total que daban cuenta del tamaño para explicar la congruencia. Los niños expresaron un razonamiento sobre el tamaño a partir de una relación de igualdad entre los lados de los triángulos (que ellos llamaban líneas) cuando realizaron con su dedo un gesto de relaciones para medir los lados uno por uno de los triángulos al compararlos, es decir, usaron el dedo como medida de la longitud de cada lado en los triángulos superpuestos, y dijeron “*como esta organizado*” en el momento en que se les preguntó qué creen que hace idéntico a los triángulos.

Este caso permite evidenciar cómo la tecnología tuvo una participación en el razonamiento de la pareja 3 mediante el proceso de coacción que permitió a la pareja guiar y ser guiado de manera simultánea por la situación, al generarles la actividad

retroalimentación visual para ellos dar sus explicaciones sobre el porqué los triángulos eran idénticos a partir del tamaño. A su vez, la multimodalidad de representaciones que permite este tipo de tecnologías facilitó a la pareja 3 en su proceso comunicativo el habla, los gestos y las acciones en el momento de sus explicaciones y ejecuciones.

Este tipo de gestos de relaciones que usó la pareja 3 posiblemente fue un precursor de cambio en su razonamiento de un nivel 4 a 5, es decir, al contrastar con el análisis de las trayectorias de razonamiento de la pareja 3 (ver figura 8-S2) este tipo de gesto emergió en el momento de observación 7 en un nivel de razonamiento 4 siendo posiblemente precursor de un cambio de nivel de razonamiento a 5. Para evidenciar este cambio del nivel de razonamiento en la pareja 3 se presenta en la posterior Figura 21 un nivel de razonamiento 5 acompañado de una secuencia de gestos de relaciones que se complementan con los realizados en la Figura 20.

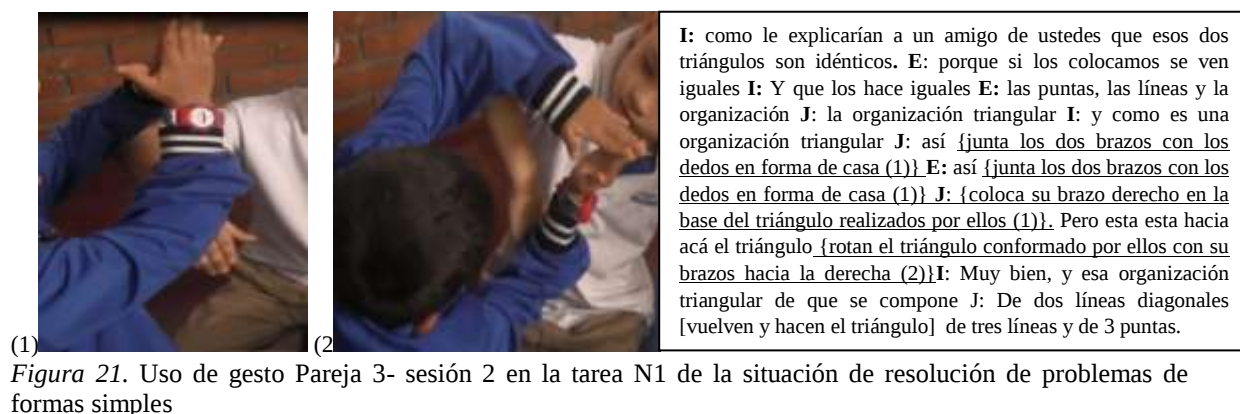


Figura 21. Uso de gesto Pareja 3- sesión 2 en la tarea N1 de la situación de resolución de problemas de formas simples

La Figura 21 de la tarea N1 de resolución de problemas de formas simples representa el último intervalo de observación de la pareja en la sesión. Se evidenció un cambio en el nivel de razonamiento de la pareja 3 después de haber usado el gesto de relaciones y estar en un nivel de razonamiento 4 en la Figura 20, es decir, ellos cambiaron a un nivel 5 en este último intervalo porque pasaron a realizar relaciones entre las partes de los dos triángulos enfocadas en forma y tamaño. Esta pareja 3 mostró un trabajo en

conjunto para dar sus explicaciones a través de gestos del por qué los triángulos son idénticos a pesar de su orientación. Así, los niños representaron juntos la forma del triángulo con los brazos y las manos colocando la posición del triángulo hacía un lado para especificar la orientación, que representaba a ambos triángulos congruentes.

La pareja 3 también dijo que los triángulos los hacia iguales las puntas, las líneas y la organización (esto representaba para ellos la orientación y posición hacia donde estaba dirigido los triángulos). En este sentido, los niños apoyados con los gestos y las verbalizaciones dieron cuenta del concepto de congruencia con un enfoque de transformación que implicó el reconocimiento por parte de ellos de los triángulos en movimiento, y que a pesar de la rotación o la translación aplicado a uno de los triángulos ambos cumplían con el principio de igualdad de misma forma y tamaño.



.J: Bueno ¿Cómo es este triángulo comparado con éste triángulo? (Señala triángulo interno al lado derecho en la figura realizada y señala el mismo triángulo en la figura original) E: Porque lo medimos .J: ¿Cómo creen que son entre sí , como lo midieron? E: Triangulares .J: Son igualitos I: ¿Son igualitos? ¿Por qué son igualitos? .J: Porque miran hacia el mismo lado {Coloca el brazo en forma horizontal en el aire con la mano hacia la izquierda}.I: ¿Cómo así “miran hacia el mismo lado”? .E. Porque miran así {junta los dos brazos estirados apuntando hacia la izquierda} .J: Miran hacia la izquierda los dos.

Figura 22. Uso de gesto Pareja 3- sesión 5 en la tarea N4 de la situación de resolución de problemas de formas compuestas.

La Figura 22 representa la tarea N4 de resolución de problemas de formas compuestas de la pareja 3. usaron tipo de gestos de relaciones cuando realizaron comparaciones de las partes entre los triángulos acompañado de la verbalización. El nivel de razonamiento de los niños fue de 4, es decir, ellos se enfocaban en relaciones entre las partes para dar cuenta de la forma de los triángulos al realizar en conjunto los niños con sus brazos un triángulo.

Los niños comunicaron el criterio de igualdad a partir de los gestos cuando representaron la forma aunque con sus palabras hicieron referencia solo a la dirección. En este sentido, el gesto cumplió un rol comunicativo en la pareja 3 y evidenció un desfase entre el gesto y el habla, porque en este caso el gesto de la pareja comunicó un razonamiento embebido sobre la forma de ambos triángulos como un criterio de igualdad al representar con sus manos y brazos un triángulo, mientras que con la verbalización la pareja comunicó solo la orientación al decir “*miran hacia la izquierda los dos*”.

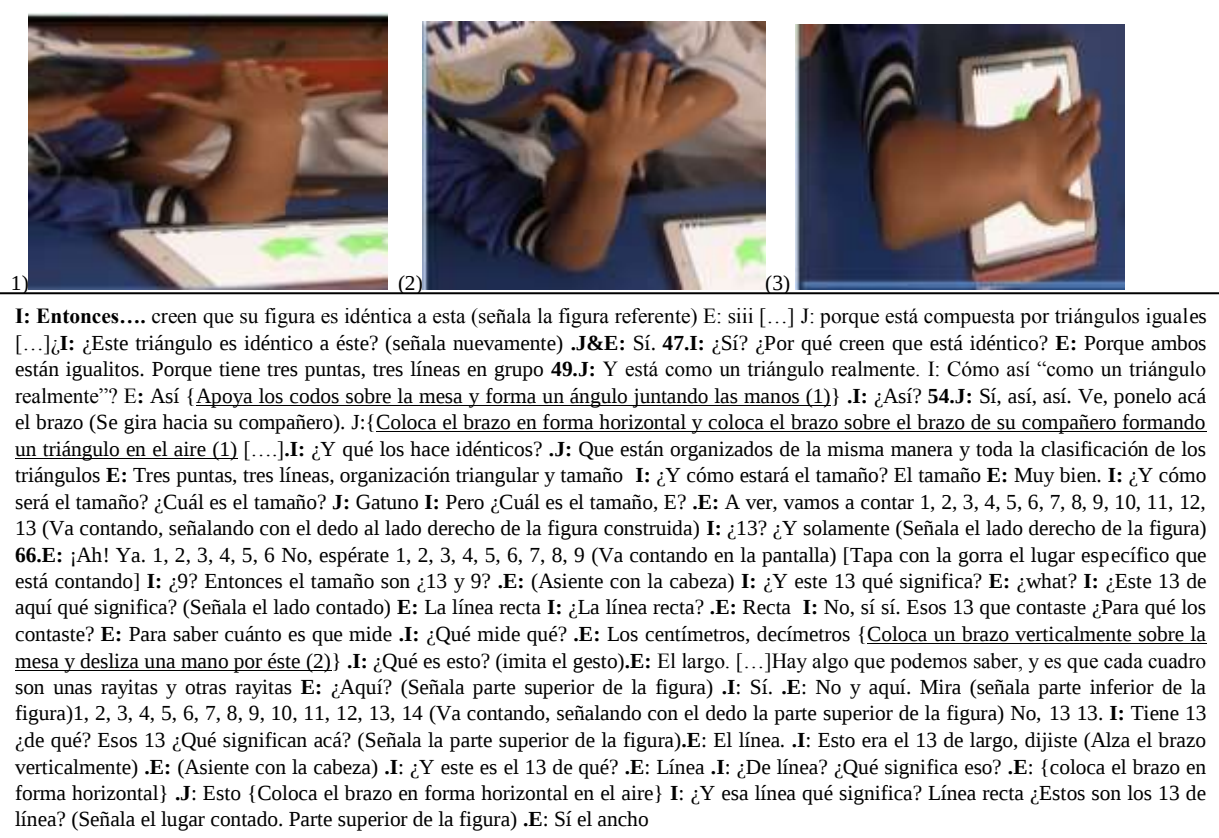


Figura 23. Uso de gesto Pareja 3- sesión 6 en la tarea N5 de la situación de resolución de problemas de formas compuestas

En la Figura 23 de la tarea N5 de resolución de problemas de formas compuestas, la pareja 3 usó una secuencia de gestos de propiedades en relación con la verbalización al final de la sesión que evidenció un nivel de razonamiento 4 al enfocarse ellos en relaciones entre las partes de los triángulos enfocados en la forma. Los niños realizaron de manera

conjunta un triángulo con las manos que componían la figura compuesta dando alusión a la forma del triángulo. La pareja 3 siguió usando los gestos en la sesión y evidenció un cambio en el nivel de razonamiento 4 al 5, es decir, al unir el gesto anterior que representaba la forma en la Figura 22 (con los brazos realizaron un triángulo), con los gestos que representaron el tamaño (brazo horizontal el ancho y brazo vertical el largo) en la Figura 23, los niños pasaron a realizar relaciones de las partes pero ahora enfocado en tamaño y forma al final de la sesión que denota un nivel de razonamiento 5.

En este sentido, uno de los niños dijo que los 13 cuadros de la cuadrícula que había contado al lado derecho de la figura compuesta era el largo, y lo representó con un gesto de propiedades al colocar su brazo verticalmente sobre la mesa y deslizar su mano por éste. Posteriormente, la pareja 3 describe el ancho de ambas figuras cuando uno de los niños contó señalando con los dedos la parte superior de la figura compuesta hasta 13, y colocó el brazo en forma horizontal en el aire sobre el iPad representando un gesto de propiedades.

En conclusión, al comparar los gestos de las 3 parejas se pueden evidenciar dos roles que cumplió el gesto: 1) como precursor de cambio, ya que el uso de gesto de relaciones y en algunas ocasiones de propiedades en las 3 parejas fueron posiblemente precursores de cambios intra-sesión en los niveles de razonamiento sobre la congruencia de 4 a 5, es decir, pasaron los niños de identificar relaciones entre las partes de los triángulos enfocada en la forma o el tamaño, a dar explicaciones que generan relaciones entre las partes que dan cuenta de forma y tamaño para explicar la congruencia; y 2) un rol comunicativo, puesto que las 3 parejas utilizaron los gestos de relaciones y propiedades en su mayoría para evidenciar conceptos que hacían alusión a la congruencia en relación a la forma y el tamaño. Por ejemplo, usaron gestos para representar el largo y el ancho para evidenciar el tamaño.

Las 3 parejas usaron los gestos y la verbalización para dar cuenta de su razonamiento sobre la congruencia. La mano fue el principal canal para apoyar la verbalización en las parejas de niños en sus explicaciones conceptuales como ancho, largo, lados, ángulo y forma. Los gestos de relaciones en la pareja 1 y 3 hicieron referencia a la igualdad en relación a la orientación y posición de las figuras mediante el gesto, uno llamándoles organización (pareja 3) y otros refiriéndose de derecha a izquierda (pareja 1). La pareja 1 realizó alusión mediante el gesto de propiedades a los ángulos e intercesiones de los triángulos congruentes como una manera de ser idénticos.

8. Discusión

El presente estudio identificó y caracterizó las trayectorias de razonamiento sobre la noción de congruencia y de las estrategias de medición de triángulos congruentes en 3 parejas de niños de 7 años, trabajando en un AGD en un período corto de tiempo; al igual que examinó el rol del gesto comunicativo o como precursor de cambio en los niveles de razonamiento. Los resultados que se obtuvieron en los niveles de razonamiento de los niños y el uso de las estrategias de medición, revelaron cambios en las trayectorias intra e inter-sesión en las 3 parejas sobre sus nociones de la congruencia.

Los resultados que evidenciaron las 3 parejas sobre la congruencia en la secuencia de actividades exploratorias y de resolución de problemas en el AGD, mostro que los niños de 7 años son sensibles a las nociones sobre la congruencia y lo pueden demostrar al resolver este tipo de situaciones. Los niños fueron generando sus nociones sobre la congruencia dentro de las actividades y a través de la secuencia de aprendizaje. Sin embargo, la manera como las trayectorias de razonamiento sobre la congruencia y las estrategias de medición de las 3 parejas se desarrollaron, fueron diferentes en la secuencia de aprendizaje. La variabilidad intra e intersesión identificadas en las trayectorias de cada una de las 3 parejas fueron indicadores de esas diferencias.

Solo existen algunos estudios que caracterizan de manera sistemática el razonamiento geométrico temprano referido a la noción de congruencia y el uso de estrategias de medición de figuras congruentes, como el de Beilin et al. (1982), Clements et al. (2001), Otálora (2016, 2017). Sin embargo, no se encontró en la búsqueda realizada algún estudio enfocado en el uso del método microgenético para evidenciar procesos de cambio en los niveles de razonamiento sobre la congruencia y las estrategias de medición. En este sentido, este estudio contribuye en la comprensión de este tema en contraste con los

cuatro hallazgos de los estudios anteriores, y la posibilidad de nuevas evidencias en esta área de investigación.

Beilin et al. (1982), en su estudio sugieren que para los niños pequeños de 7 años es difícil el concepto de congruencia, debido a que la mayoría de los niños de su muestra comparaban solo una parte de la forma y no tenían en cuenta realizar comparaciones entre las partes y otras dimensiones como altura, ancho y forma. Sin embargo, en los resultados de este estudio las parejas sí evidenciaron reconocer este tipo de dimensiones debido a que en sus niveles de razonamiento oscilaban de 3 a 5, y fueron variables intra e intersesión, es decir, ellos pasaban de identificar relaciones entre las partes de un solo triángulo, a dar explicaciones sobre relaciones entre las partes que dan cuenta de forma y tamaño para explicar la congruencia.

En el estudio de Beilin et al. (1982) no lograron evidenciar estas dimensiones posiblemente porque los investigadores utilizaron una única tarea cerrada de selección múltiple, donde los niños tenían que elegir la figura que fuera congruente y solo tenían en cuenta para evidenciar su razonamiento sobre la congruencia, un solo desempeño del niño. Por el contrario, este estudio se enfocó en un análisis microgenético para evidenciar el razonamiento de los niños sobre la congruencia, al realizar una secuencia de situaciones de aprendizaje con tareas que iban aumentando su nivel de dificultad, que permitieron evidenciar en los niños esos cambios en sus razonamientos, e identificar si las parejas realmente tenían o no nociones sobre la congruencia. En efecto, en los resultados de este estudio, sí se logró evidenciar que las 3 parejas en su proceso comunicativo mostraron un razonamiento sobre la congruencia y momentos de cambios en las trayectorias de las sesiones.

Las 3 parejas a través de las situaciones presentadas y preguntas realizadas, lograron generar significados que hacían alusión al concepto de congruencia a través del habla, las acciones y los gestos de las manos cuando se les solicitaba dar explicaciones de las soluciones de las tareas que realizaban en la secuencia. Los niños comunicaron frases como “son iguales porque tienen la misma forma o mismo tamaño”; y también mediante secuencia de gestos hacían alusión a la forma, al ángulo, al largo, al ancho y tamaño.

Uno de los hallazgos encontrados en este estudio y que tienen una correspondencia con lo reportado por Otálora (2016, 2017), es que los niños de 7 años son capaces de generar estrategias de medición que son variables entre las sesiones y dentro de las sesiones; y ellos al realizar las situaciones de resolución de problema y de exploración dieron cuenta de su razonamiento sobre la congruencia, lo cual se contrapone a los expuestos por Beilin et al. (1982). En este estudio se clasificaron las estrategias como cualitativas, viso-espaciales y cuantitativas, para realizar trayectorias de las estrategias de medición que utilizaron los niños, y que permitió extender lo encontrado por esta autora, encontrándose puntos de convergencias en las estrategias utilizadas como alineación de puntos entre los triángulos, superposición, conteo, uso de línea de simetría en espejo y seguimiento de marcadores de tamaño.

Se logró identificar cambios en momentos de variabilidad en las 3 parejas intra e inter-sesión, porque lograron utilizar estrategias cada vez mas efectivas para la resolución y explicación de las tareas, por ejemplo, para las parejas 1 y 3 el tipo de estrategia cualitativa de superposición fue la más efectiva para ellos, y para la pareja 2 fue la cualitativa de alineación entre los puntos de los triángulos. El indicador importante del cambio en estas parejas fue el uso fluctante entre estrategias, el cambio de las tareas presentadas entre el

paso de la sesión 1 y 2 y el paso de la sesión 4 y 5, y la co-ocurrencia de 2 o 3 estrategias en un mismo momento o entre las situaciones (Siegler, 2006).

La pareja 2 utilizó las 3 estrategias en las situaciones de aprendizaje en AGD; las de tipo cualitativas y cuantitativas las usaron durante toda la situación de aprendizaje, pero también utilizaron estrategias viso-espaciales entre la sesión 2 y la sesión 7. Además, en las 3 parejas hubo co-ocurrencia de 2 o 3 de estrategias en una misma sesión o con una tarea específica, siendo más predominante esta co-ocurrencia entre estrategias en las parejas 2 y 3 que en la 1.

Ng y Sinclair (2015) han señalado que el uso de tecnologías interactivas promueve la observación de objetos geométricos mediante el dinamismo, al favorecer la representación y el razonamiento en los niños al ir las figuras transformándose. En este sentido, este estudio estuvo enfocado en evidenciar el concepto de congruencia desde una perspectiva dinámica, y por ende, se propuso una secuencia de situaciones de aprendizaje en AGD que permitió identificar que los niños mediante las transformaciones de las figuras, la retroalimentación en tiempo real, y la producción constante de signos gestuales cuando ellos trabajaban en pareja, fue posiblemente un precursor en los niños de un uso variable de estrategias de medición y de niveles de razonamiento que hacían alusión a forma, tamaño, ancho y largo para encontrar la congruencia entre las figuras compuestas y los triángulos.

Un aporte de este estudio, es que las 3 parejas mostraron representaciones de las configuraciones matemáticas de congruencia entre los triángulos al utilizar este tipo de tareas en AGD, que posiblemente mediaba la aparición de una variabilidad entre los niveles de razonamiento y las estrategias de medición de estos niños de 7 años de edad. Por ejemplo, Beilin et al. (1982) utilizaron un entorno estático de manipulación física (figuras de madera) para evidenciar procesos de congruencia en los niños pequeños, y ellos sólo

utilizaron un número muy limitado de acciones discretas en estas figuras, no logrando evidenciar en su proceso comunicativo de gesto, habla y acciones, razonamiento sobre la congruencia. A su vez, Clements y Sarama (2014), utilizaron un entorno digital llamado *LOGO* para enseñar el concepto, y encontraron que los niños podían acceder a este aunque con restricciones, debido a que este entorno era discreto y no permitía la transformación continua y simultánea de las figuras congruentes. Sin embargo, en este estudio y en el de Otálora (2016, 2017), la naturaleza dinámica y palpable de las tareas tienen un rol importante cuando las parejas de niños describen e identifican relaciones invariantes en la congruencia.

Igualmente, es importante aclarar que este estudio implementa situaciones de resolución de problema y de exploración de congruencia aplicadas en tecnología dinámica al igual que los de Otálora, sin embargo tiene una diferencia favorable con la autora, dado que se introdujo un tipo diferente de tarea en que los niños debían componer figuras usando triángulos congruentes, lo cual generó mayores niveles de complejidad llevando a los niños a realizar mayores relaciones para explicar la congruencia entre las figuras, es decir, ellos identificaron que las figuras estaban compuestas por triángulos congruentes o *idénticos*, que eran la misma cantidad de triángulos y aparte que las figuras compuestas por esos triángulos eran idénticas entre sí, al identificar su largo, ancho, cantidad de lados y longitud de estos, que daban alusión a forma y tamaño. Este tipo de tareas influyó de manera diferente en las 3 parejas, esto debido a que por ejemplo, la pareja 2 no logró resolver a partir de la sesión 7, los otros niveles de esta situación de resolución de problemas de figuras compuestas.

Las 3 parejas de este estudio evidenciaron principios que proporcionan este tipo de tecnologías y que posiblemente promovieron la aparición de los niveles de razonamiento y

estrategias de medición: 1) ejecutabilidad de múltiples representaciones: las 3 parejas transformaron los objetos matemáticos y los representaron haciendo uso de múltiples representaciones como el habla, los gestos y las acciones, en la resolución de las tareas y para dar sus explicaciones sobre la congruencia; y 2) el proceso de coacción: las 3 parejas guiaron y fueron guiados de manera simultánea por el entorno del software dinámico en que estaban diseñadas las tareas, puesto que este entorno les generó retroalimentación visual y háptica cuando solucionaban las tareas y daban sus explicaciones. Este proceso de coacción también lo evidenciaron en su estudio Moreno, Hegedus y Kaput (2008), a partir de la situación que implementaron en el software.

Clements y Sarama (2014) exponen que los niños de manera gradual transitan de considerar solo alguna parte de la figura, a efectuar relaciones entre las partes de la figura incluyendo relaciones espaciales, para después considerar relaciones entre las partes de varias figuras, y que los niños de 7 años pueden determinar la congruencia mediante la comparación de todos los atributos y relaciones espaciales (misma forma y tamaño al comparar sus lados y ángulos). En este sentido, este estudio va por esta misma vía al haberse enfocado en las trayectorias de razonamiento sobre la congruencia en las 3 parejas, es decir, se evidenciaron que los niños de 7 años también lograban realizar relaciones parciales y totales entre las propiedades de las figuras, pero se diferenciaban las parejas en la variabilidad presentada inter-sesión en sus niveles de razonamiento, por ejemplo, la pareja 1 tuvo niveles de variabilidad baja, la pareja 2 alta y la pareja 3 media.

Las 3 parejas de este estudio evidenciaron también en sus trayectorias intra-sesión que si tienen esos razonamientos que exponen las autoras Clements y Sarama (2014) a los 7 años, por ejemplo, la pareja de niños 2, en un momento de la sesión 3 (Ver Figura 10) ellos lograron definir la comparación entre los triángulos como un todo y realizar relaciones de

las partes entre figuras, pero después solo realizaban las relaciones entre un solo triángulo en sus explicaciones para decir por qué una figura o un triángulo era idéntico al otro, realizando fluctuaciones entre los niveles de razonamiento entre 2 y 5.

Sin embargo, la variabilidad que evidenciaron las 3 parejas, permite identificar que los niños no mantienen constantes en el uso de un nivel de razonamiento o de una estrategia, sino que dentro de una misma sesión o dentro de las sesiones ellos presentan cambios; y se vislumbra como un proceso natural que ellos en sus trayectorias tengan fluctuaciones entre niveles más y menos avanzados cuando resuelven las tareas o están dando sus explicaciones.

Se identificaron momentos de cambio en las trayectorias de estrategias de medición y de razonamiento sobre la congruencia que tienen en común: 1) el cambio del tipo de situaciones: cuando las 3 parejas pasaron de la sesión 1 a la 2 en el cambio de las tareas *exploratorias* a las de *resolución de problemas de figuras simples*, las parejas presentaron una mayor o menor variabilidad en los niveles de razonamiento y uso de estrategias de medición. Del mismo modo, cuando pasaron las 3 parejas de la sesión 4 a 5, al cambiar de las tareas de *figuras simples a figuras compuestas*, promovieron posiblemente que los niños presentaran una mayor o menor variabilidad tanto en el uso de las estrategias como en los niveles de razonamiento; 2) el aumento de complejidad de las tareas presentadas en las situaciones de *resolución de problemas de figuras simples y figuras compuestas*: en cada sesión había un factor que hacía la tarea más compleja, por ejemplo, las 3 tareas presentadas de formas simples variaba dependiendo de cuántos lados pasaban por los ejes x o y del plano cartesiano, es decir, entre menos lados del triángulo tocaran los ejes más se dificultaba la tarea; y en las tareas de formas compuestas, el aumento gradual de cantidad de triángulos congruentes a componer para crear las figuras, generaba en los niños realizar mayores relaciones para resolver las tareas y dar sus explicaciones: y 3) el rol del

investigador: en este caso el investigador no enseñó a los niños, sino que formulaba preguntas sobre las representaciones visuales dinámicas con énfasis en los aspectos definitorios de la congruencia, que exigían que los niños razonaran sobre el concepto.

Los niños de este estudio demostraron en trayectorias de niveles de razonamiento el uso del gesto y su rol. Los niños evidenciaron cambios a través de la secuencia de gestos y la verbalización. Por ejemplo, la pareja 1 intra-sesión mediante el uso de gesto y habla (Ver Figura 9 y 10) pasaron de un nivel de razonamiento 4 a 5, es decir, razonaban sobre la congruencia solo en la forma o el tamaño hasta que integraron estos dos conceptos para dar explicaciones sobre “por qué los triángulos eran idénticos”.

En las figuras de las trayectorias de razonamiento de las 3 parejas, en algunos momentos de las sesiones, el uso de gestos de relaciones y propiedades fueron posiblemente precursor de cambios entre los niveles de razonamiento superiores (Ver Figura 6, 7 y 8). Como expone Siegler (2007) los niños a menudo usan enfoques menos avanzados en un ensayo y luego regresan a unos más avanzados en los posteriores, incluso cuando la misma situación problema se presenta en días próximos en el tiempo; como presentaron estas 3 parejas, denotando variabilidad y sus procesos de cambio.

Los niños hicieron uso del gesto como un acto material de creación al representar con la mano un razonamiento matemático que no logran decir mediante el habla o que lo acompañaba (Malaforius, 2013; Radford, 2014; Sinclair et al., 2013), por ejemplo, los niños usaron secuencias de gestos con las manos, que les permitieron comunicar e identificar a los otros (investigador y el par) la manera en que ellos estaban razonando sobre la congruencia para generar la construcción, composición y verificación tanto en las tareas de exploración, de resolución de problemas de figuras simples y figuras compuestas. En este estudio se logró evidenciar que el gesto en sí mismo es el conocimiento matemático

embebido en el cuerpo del niño (Radford, 2014) y que puede representar una *creación matemática* (Clements & Sarama, 2013; Sinclair et al., 2013).

Se podría aportar con este estudio que el rol del gesto fue comunicativo y precursor del cambio. El rol del gesto como precursor del cambio demuestra que los niños a pesar de que no lograban expresar su razonamiento de manera explícita sí había un razonamiento intuitivo, y que mediante el gesto dieron cuenta que estaba el razonamiento en sí mismo embebido en el cuerpo, por ejemplo, en las manos y los dedos, siendo posiblemente los gestos precursores de que los niños llegaran a razonamiento de niveles superiores como se evidenció en la pareja 1 (ver Figuras 9,10 y 12), en la pareja 2 (Ver Figuras 15, 16, 17 y 18) y en la pareja 3 (Ver Figuras 20 21 y 23).

El rol del gesto comunicativo se evidenció debido a que las 3 parejas complementaron el habla con los gestos o los utilizaron cuando no encontraban las palabras para decir lo que están pensando de manera verbal (Ver Figuras 11, 13, 19 y 22), representando mediante acciones creaciones en sus cuerpos, para demostrar relaciones matemáticas sobre la congruencia (Malaforius, 2013; Clements & Sarama, 2014; Radford, 2014).

Limitaciones y futuras direcciones

En el objetivo de implementar y diseñar una secuencia de situaciones de un ambiente de aprendizaje en el software Geometer's Sketchpad en un AGD para identificar en las 3 parejas a partir la solución de las tareas y su proceso comunicativo las estrategias de medición y su razonamiento sobre la congruencia; se encuentra una limitación en el componente comunicativo ya que no se analizó que papel tenía el trabajo en conjunto entre pares en el momento de identificar las trayectorias de las estrategias de medición y de razonamiento geométrico sobre la congruencia. Es decir, no se hizo hincapié en cómo el razonamiento del otro y sus cuestionamientos ayudaron a movilizar el aprendizaje entre ambos niños cuando trabajan en pareja, que es un punto importante para ver el razonamiento como una unidad dinámica en un proceso comunicativo. Este aspecto no fue incluido como parte de los objetivos del estudio por limitaciones de tiempo, sin embargo, se sugiere que sea incluido en futuros estudios que avancen en el tema.

Hay limitaciones que hacen que los resultados obtenidos con este trabajo sean de corte preliminar: 1) el tamaño de la muestra que se tomó es sólo de 6 niños de 7 años trabajando en parejas; 2) los análisis fueron de corte cualitativo y cuantitativo enfocado solo en estadística descriptiva, es decir, no se pueden generalizar los resultados a otras poblaciones. Sin embargo, estas limitaciones se asumen con el fin de favorecer otros aspectos con respecto a la profundidad del análisis de los datos a nivel microgenético, que permitan brindar un panorama sobre el razonamiento de los niños pequeños; y 3) a pesar de que se realizó una situación controlada, y el investigador realizó una entrevista de tareas para no quedarse solo en las acciones de los niños y aumentar su proceso comunicativo, en

algunos momentos en que el investigador realizó preguntas por fuera de las que estaban estructuradas en la entrevista, estas influenciaron posiblemente las respuestas de los niños.

El papel del gesto en el proceso de cambio de los niveles de razonamiento sobre la congruencia en este estudio se logró evidenciar. Sin embargo, es importante que se generen técnicas de análisis más detalladas en investigaciones futuras para detallar aspectos sobre el rol de gesto, es decir, se deberían enfocar en utilizar técnicas cualitativas y cuantitativas que faciliten la comprensión de este fenómeno. Hay que tener en cuenta que el gesto en el razonamiento geométrico en especial sobre el concepto de congruencia no ha tenido amplia investigación, y las técnicas que se evidencian para identificar el rol del gesto en el cambio son pocas en las investigaciones que hay hasta el momento.

9. Conclusiones

Este estudio es importante como un antecedente de referencia para futuras investigaciones en 3 aspectos importantes: 1) permite ampliar un panorama sobre las estrategias de medición entre triángulos congruentes, por ejemplo, se realizó una clasificación en niveles para obtener las trayectorias de análisis de las estrategias, es decir, viso-espaciales, cualitativas y cuantitativas. Se identificó que los niños pequeños de 7 años utilizaron estrategias avanzadas como las cuantitativas, privilegiando las de conteo y también cualitativas como la superposición. Se corroboró que los niños de 7 años, utilizaron diversas estrategias de medición que se han evidenciado en otros estudios como los de Beilin et al. (1982) y Otálora (2016, 2017), por ejemplo, emparejamiento de bordes, conteo, superposición, uso de línea de simetría, utilización de marcadores, alineación e inspección visual sin verificación. A su vez, se identificó que los niños realizan co-ocurrencia de varias estrategias cuando están resolviendo una tarea o dando una explicación. Por último, que se identificó cambios en el uso de las estrategias por parte de los niños, al fluctuar su uso entre los diversos tipos de estrategias y a su vez coordinar estrategias menos avanzadas con una más avanzada cuando resolvieron la tarea y generaron una explicación.

2) En el razonamiento geométrico sobre el concepto de la congruencia, se identificó variabilidad en los momentos que hubieron cambios en los niveles de razonamiento en cada una de las 3 parejas intra e intersesión. Se evidenció que en niños de 7 años mediante su proceso comunicativo, hicieron alusión a la congruencia en altos niveles de razonamiento (4 y 5) al mencionar conceptos como forma, ancho, alto, ángulo y tamaño. Los niños de estas edades fueron capaces de realizar relaciones entre las partes no solo de un triángulo,

sino entre ellos y dar cuenta de por qué eran idénticos. Cada una de las parejas evidenció variabilidad en sus niveles de razonamiento que fluctuaron intra e intersesión. La pareja 2 fue la más variable en sus niveles de razonamiento intrasesión al fluctuar entre el 2 y 5 en casi las mitad de las sesiones, es decir, que los niños iban de un razonamiento implícito en que solo reconocían que las formas presentadas eran triángulos identificando sus propiedades sin establecer relaciones entre las partes, a realizar relaciones entre los triángulos enfocados en forma y tamaño para explicar la congruencia.

3) Los roles que tuvo el gesto en los niveles de razonamiento fue comunicativo y como precursor de cambio. El rol del gesto comunicativo se identificó mediante la secuencia de gestos de atributos, relaciones y propiedades que apareció en la trayectoria de razonamiento de las 3 parejas, pero el uso por parte de ellos del gesto no siempre fue precursor de un cambio de nivel de razonamiento, sino que evidenció un proceso comunicativo, es decir, los gestos eran el razonamiento en si mismo sobre la congruencia embebidos en el cuerpo al representar con las manos y los brazos las parejas conceptos como ancho, largo, longitud, ángulo, lados, entre otros, que hacían alusión a forma o tamaño para referirse a la congruencia. En el rol del gesto como precursor de cambio, se evidenció que los gestos más usados cuando pasaban las parejas de nivel de razonamiento fue el de relaciones, y estuvo presente en las 3 parejas cuando pasaron de un nivel de razonamiento 4 a 5. Sin embargo, vale la pena ampliar la información al respecto, dado que se encontraron, pero aún no se puede afirmar con exactitud dichos hallazgos. En este sentido, sería importante que la información sobre el gesto como precursor de cambio fuese ampliada y se realizarán investigaciones futuras, utilizando los hallazgos aquí presentados con poblaciones más grandes y hacer un seguimiento al uso del gesto.

10. Referencias Bibliograficas

- Beilin, H., Klein, A. & Whitehurst, B. (1982). Strategies and structures in understanding geometry [Research report]. New York, NY: City University of New York.
- Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (2001). Logo and geometry [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10, i+1-177.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.
- Guevara, M., van Dijk, M., & van Geert, P. (2016). Microdevelopment of peer interactions and scientific reasoning in young children/Microdesarrollo de la interacción entre pares y el razonamiento científico en niños pequeños. *Infancia y Aprendizaje*, 39(4), 727-771.
- Guevara, M. G., & Puche, R. N. (2010). ¿Se desarrolla y cambia la psicología del desarrollo hacia los sistemas dinámicos no lineales? *Avances en Psicología latinoamericana*, 27(2), 327-342.
- Goldin-Meadow, S. (2001). Giving the mind a hand: Role of gesture in cognitive change. In J. McClelland & Siegler, R. (Eds.). *Mechanisms of Cognitive Development*. Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum Associates.
- Goldin-Meadow, S., & Iverson, J. M. (2010 Chapter 21) Gesturiss Across the Life Span. (pp. 755- 791)
- Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Paradigmas que compiten en la investigación cualitativa. *Handbook of Qualitative Research*.
- Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., Naqvi, S., & MacKinnon, S. (2017). Enhancing Children's Spatial and Numerical Skills through a Dynamic Spatial Approach to Early Geometry Instruction: Effects of a 32-Week Intervention. *Cognition and Instruction*, 35(3), 236-264.
- Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and symbolic reasoning in mathematics: making connections with computers?. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(1), 59-84.
- Hegedus, S. (2013). Young children investigating advanced mathematical concepts with haptic technologies: Future design perspectives. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1&2), 87-108

- Jackiw, N. (1991, 2009). The Geometer's Sketchpad computer software (version 1; version 5). *Emeryville, CA: Key Curriculum Press*
- Karmiloff-Smith, A. (1994). Más allá de la modularidad: la ciencia cognitiva desde la perspectiva del desarrollo. *Madrid: Alianza*.
- Kuhn, D. (1995). Microgenetic study of change: What has it told us?. *Psychological Science*, 6(3), 133-139
- Larreamendy, J., Puche, R., & Restrepo, A. (2008). Claves para pensar el cambio: Ensayos sobre psicología del desarrollo.
- Malafouris, L. (2013) How things shape the mind. The extended Mind. Massachusetts *Institute technology*. United States of America.
- Marmolejo Avenia, G. A., & Vega Restrepo, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, 24(3), 7-32.
- Moreno-Armella, L. U. I. S., & Santos-Trigo, M. A. N. U. E. L. (2016). The use of digital technology in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. In *Handbook of international research in mathematics education*(pp. 607-628). Routledge.
- Moreno-Armella, L., Hegedus, S. & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99-111.
- Ng, O. L., & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM*, 47(3), 421-434.
- Otalora, Y (2016) Capitulo 4 Young Children Understanding Congruence Of Triangles Within A Dynamic Multi-Touch Geometry Environment. En *Proceedings of the Thirty-Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Arizona , College of Education. Tucson, Arizona.
- Otálora, Y. (2017). *Young Children's Understanding Of Congruence And Similarity Within Collaborative Dynamic Multi-Touch Geometry Environments*. Tesis Doctoral. University of Massachusetts Dartmouth. Unpublished dissertation

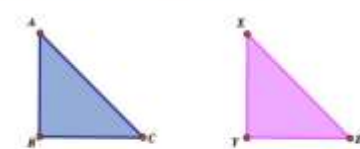
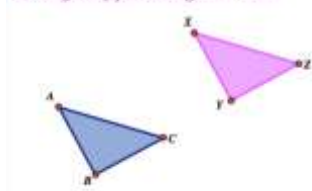
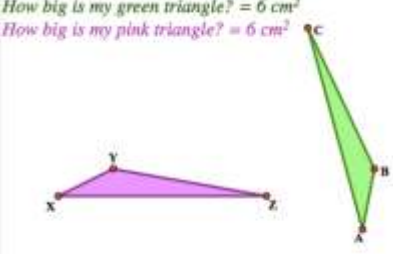
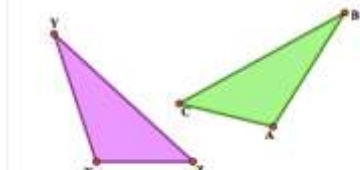
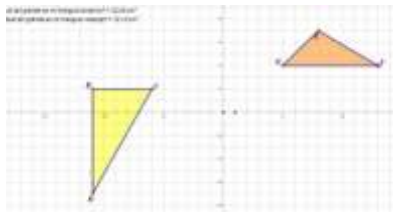
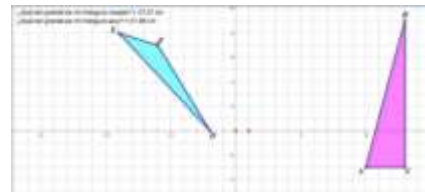
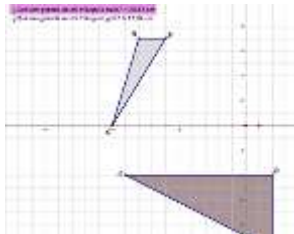
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.
- Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1999). Learning to spell: Variability, choice, and change in children's strategy use. *Child development*, 70(2), 332-348.
- Rosselli, M. (2015). Desarrollo neuropsicológico de las habilidades visoespaciales y visoconstruccionales. *Revista Neuropsicología, Neuropsiquiatría y Neurociencias*, 15(1175-200).
- Ross, S.M. (2007). Introducción a la Estadística. En: *Introducción a la Estadística*. (Págs. 1-10). Barcelona: Editorial Reverte.
- Sinclair, N., & Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education*, 10(2), 135-150.
- Sinclair, N., De Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM*, 45(2), 239-252
- Schuler, J. (2001). Symmetry and young children. *Montessori Life*, 13(2), 42-48.
- Siegler, R y Crowley, K. (1991). The Microgenetic Method, a direct means for Studying Cognitive Development; *Carnegie Mellon University*.
- Siegler, R.S. (2006). Microgenetic analyses of learning. In W. Damon, R. Lerner, D. Kuhn & R.S. Siegler (Eds.) *Handbook of child psychology: Vol 2. Cognition, perception, and language* (6th edn). Hoboken, NJ: Wiley
- Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *The origins of cognitive skills* (pp. 229-293). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Siegler, R. S., & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ: Erlbaum
- Shusterman, A., Lee, V. & Spelke, E. (2008). Young children's spontaneous use of geometry in maps. *Developmental Science*, 11, F1-F7.
- Spelke, E. S., Gilmore, C. K., & McCarthy, S. (2011). Kindergarten children's sensitivity to geometry in maps. *Developmental Science*, 14(4), 809-821.

- Lee, S. A., & Spelke, E. S. (2011). Young children reorient by computing layout geometry, not by matching images of the environment. *Psychonomic bulletin & review*, 18(1), 192-198.
- Tran, D., Reys, B. J., Teuscher, D., Dingman, S., & Kasmer, L. (2016). Analysis of curriculum standards: An important research area. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2), 118-133.
- Van Geert, P., & Van Dijk, M. (2002). Focus on variability: New tools to study intra-individual variability in developmental data. *Infant Behavior and Development*, 25(4), 340-374.
- van Geert, P., & van Dijk, M. (2015). The intrinsic dynamics of development. *Emerging Trends in the Social and Behavioral Sciences: An Interdisciplinary, Searchable, and Linkable Resource*, 1-16.
- Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a socio-cultural practice and theory of education*. Cambridge University Press.

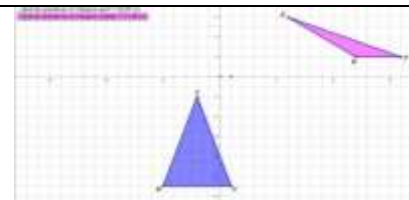
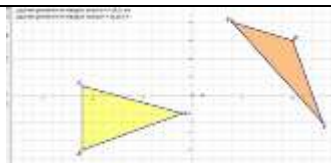
11. Anexos

Anexo 1.

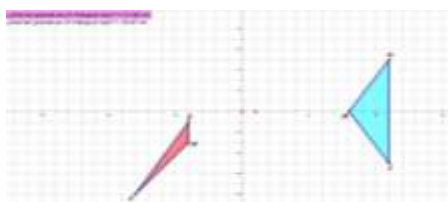
Esquema de las tareas

Situación 1. Exploratoria 1		
Tarea 1. Exploratoria de congruencia	How big is my blue triangle? = 12 cm^2 How big is my pink triangle? = 12 cm^2 	How big is my blue triangle? = 7 cm^2 How big is my pink triangle? = 7 cm^2 
Situación 2: Exploratoria 2		
Tarea 1. Exploratoria de congruencia	How big is my green triangle? = 6 cm^2 How big is my pink triangle? = 6 cm^2 	How big is my green triangle? = 12 cm^2 How big is my pink triangle? = 12 cm^2 
Situación 3: Resolución de problemas “formas simples”		
Tarea N1 Resolución de problemas: congruencia (Ángulo recto)	N 1-T1	N1-2
		
	N1- 3	
		
Tarea N2-. Resolución de	N2- 1	N2-2

problemas: congruencia (Dos lados diferentes)

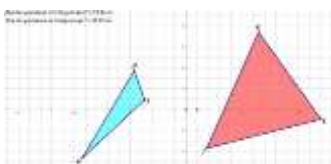


N2-3

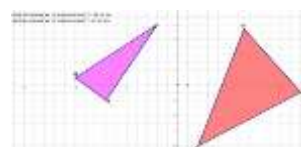


Tarea N3 (tres tareas)-. Resolución de problemas: congruencia (Isósceles un lado sobre el eje)

N3-1



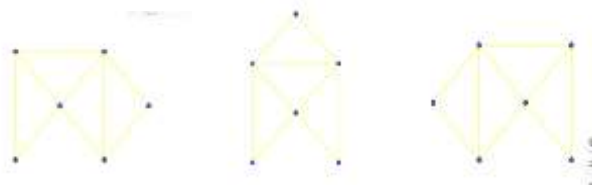
N3-2



Situación 4: Resolución de problemas “formas compuestas”

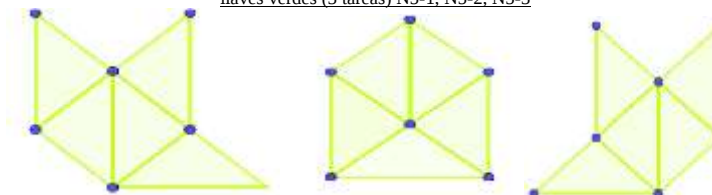
Tarea N4 (tres tareas)-. Resolución de problemas: congruencia (4 triángulos congruentes)

llaves amarillas (3 tareas): N4-1, N4-2, N4-3



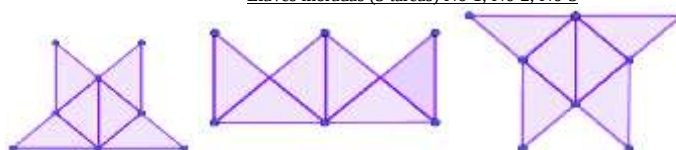
Tarea N5 (tres tareas)-. Resolución de problemas: congruencia (5 triángulos congruentes)

llaves verdes (3 tareas) N5-1, N5-2, N5-3



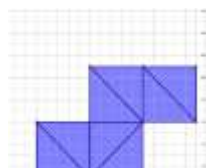
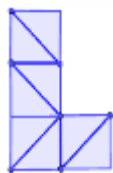
Llaves moradas (3 tareas) N6-1, N6-2, N6-3

Tarea N6 (tres tareas)-. Resolución de problemas: congruencia (6 triángulos congruentes)



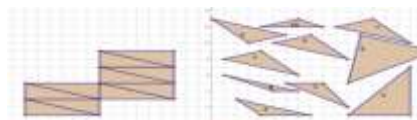
Resolución de problema sobre congruencia: Llaves azules (3 tareas) N7-1, N7-2, N7-3

Tarea N7 (tres tareas)-. Resolución de problemas: congruencia (8 triángulos congruentes)



Tarea N8 (tres tareas)-. Resolución de problemas: congruencia (10 triángulos congruentes no isósceles)

Comprensión del concepto de congruencia entre triángulos rectos no isósceles



Anexo 2-

Análisis cognitivo de tarea (ACT)

Análisis de la estructura y la demanda cognitiva de situación del ambiente de aprendizaje construyendo las Llaves del Castillo Mágico

Situación	Estructura general de la tarea	Demanda cognitiva de la tarea
Situación 1. Exploratoria 1	Exploración de congruencia Exp N1: <u>Procedimiento:</u> se muestran a los niños dos triángulos congruentes de color azul y rosado. Se pide a los niños que arrastren el triángulo azul en la pantalla y digan qué pasa con el triángulo rosado cuando mueven el triángulo azul. Posteriormente deben resolver preguntas de seguimiento enfocadas en rotación (¿Qué sucede con el triángulo rosado cuando giras el triángulo azul?), en dilatación (¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando haces el triángulo azul más grande?) reducción (¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando haces el triángulo azul más pequeño?) en traslación (¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando deslizas el triángulo azul?), en tamaño (¿Cómo se compara el tamaño del triángulo rosado con el tamaño del triángulo azul?) en forma (¿cómo se comparan la forma del triángulo rosado a la forma del triángulo verde?) <u>Elementos estructurantes:</u> Las figuras son dos triángulos dinámicos de ángulo recto, el triángulo azul se mueve y se transforma en relación al rosado, es decir, cuando el rosado se transforma, el azul también lo hace paralelamente, cambiando a la misma orientación y tamaño. Hay marcadores de tamaño (cuanto es el área de cada triángulo) y una red o cuadrícula.	Funcionamiento cognitivo exigido: Descubrir a partir de los resultados de cambio de movimiento tales como orientación o posición de los triángulos, que estos no afectan el tamaño y la forma de igualdad entre ellos. Desempeño ideal: Los niños logran entender que después de múltiples transformaciones continuas, que los triángulos siempre tienen la misma forma y tamaño entre sí, que son propiedades de triángulos congruentes
Situación 2: Exploratoria 2	Exploración de congruencia Exp N2 <u>Procedimiento:</u> Se pide a los niños que arrastren el triángulo verde y digan qué pasa con el triángulo rosado. De allí en adelante son las mismas preguntas de seguimiento de Exp N1, <u>Elementos estructurantes:</u> Las figuras son dos triángulos dinámicos, el triángulo verde se mueve y se transforma completamente en relación al rosado, cambiando su orientación y posición entre sí, llegando al caso de ser superpuestos los dos	Funcionamiento cognitivo exigido: Descubrir a partir de los resultados de cambio de movimiento tales como orientación o posición de los triángulos, que estos no afectan el tamaño y la forma de igualdad entre ellos Desempeño ideal: Los niños logran entender que después de múltiples transformaciones continuas, que los triángulos siempre tienen la misma forma y tamaño entre sí, que son propiedades de triángulos congruentes

	triángulos, pero conservando la misma estructura geométrica en relación a sus propiedades: N° de lados, N° de puntas, ángulos y distancias	
Situación 3: Resolución de problemas “formas simples”	Tarea N1 (N1-T1, N1-T2, N1-T3) Procedimiento: Para cada tarea (T1, T2, T3), se muestran a los niños dos triángulos no congruentes uno estático y otro dinámico de diferente color. Se pide a los niños que hagan el triángulo dinámico idéntico al triángulo estático, para que posteriormente piensen y digan la estrategia que usaron. Pidiéndoles explicación y justificación de porque son idénticos ambos triángulos después de transformar uno de ellos igual al otro. Elementos estructurantes: Las figuras son dos triángulos no congruentes uno dinámico y otro estático (referente). El triángulo dinámico debe ser transformado para tener forma idéntica al triángulo estático (referente). El triángulo referente tiene un ángulo recto y dos lados sobre el eje X o Y. La red o cuadrícula con el plano cartesiano y los marcadores de tamaño siempre son visibles para ser utilizados como herramienta.	Funcionamiento cognitivo exigido: Crear una estrategia con los recursos que ofrece la actividad y la utilización de ideas anteriores identificadas durante las actividades Razonamiento sobre los principios de congruencia entre triángulos en una operación de transformación dinámica: 1) Comprensión del principio de conservación de los triángulos, identidad del objeto a partir de la comparación de dos figuras y sus propiedades. Y 2) Reconocimiento del principio de igualdad entre los triángulos independientemente de la posición y/o orientación. Desempeño ideal Los niños son capaces de utilizar una estrategia para lograr que dos triángulos sean congruentes entre sí.
	Tarea N2(N2-T1, N2-T2, N2-T3) Procedimiento: el mismo del nivel 1. Elementos estructurantes: igual que en el nivel 1, en este caso el triángulo referente es un triángulo isósceles con dos lados y ángulos iguales. Dos lados pasan sobre uno de los ejes sea Y o X.	Funcionamiento cognitivo exigido: igual que en el nivel 1, además de reconocer las propiedades del triángulo referente del nivel 2 (dos lados y ángulos iguales) Desempeño ideal: Los niños son capaces de utilizar una estrategia para lograr que dos triángulos sean congruentes entre sí.
	Tarea N3 (N3-T1, N3-T2-2, N3-T3) Procedimiento: el mismo del nivel 1. Elementos estructurantes: el mismo del nivel 1, pero el triángulo referente es obtuso, al tener tres lados y ángulos diferentes y dos lados pasan sobre uno de los ejes.	Funcionamiento cognitivo exigido: Igual que en el nivel 1, además de reconocer las propiedades del triángulo referente del nivel 3 (tres lados y ángulos diferentes) Desempeño ideal: Los niños son capaces de utilizar una estrategia para lograr que dos triángulos sean congruentes entre sí.
Situación 4: Resolución de problemas “formas compuestas”	Tarea N4 (N4-1, N4-2, N4-3) Procedimiento: En cada tarea se les dice a los niños que su misión es construir con los 4 triángulos (dinámicos no congruentes) una llave idéntica a la del boceto (la llave referente conformada por cuatro triángulos estáticos). Posteriormente “piensen y digan la estrategia que usaron”, pidiéndoles explicación y justificación de porque son idénticos ambas llaves y los triángulos entre sí con que la construyeron. Enfocadas en preguntas de seguimiento sobre forma (¿Podrían comparar las formas de los dos triángulos y decirme qué observan?) tamaño (¿Podrían comparar la longitud de estos dos lados de los dos triángulos? ¿Qué notan?) Solo si los niños no lo refieren espontáneamente. Elementos estructurantes: Deben transformar 4 triángulos dinámicos no congruentes utilizando procesos como traslación, rotación y reflexión en congruentes para construir una figura paralela a la llave referente presentada que está conformada por cuatro triángulos isósceles congruentes estáticos. La red o cuadrícula con el plano cartesiano y los marcadores de tamaño siempre son visibles para ser utilizados como herramienta.	Funcionamiento cognitivo exigido: igual que en línea base, además de reconocer las propiedades de la cantidad de triángulos, color y composición de la forma a crear (boceto y llave de cuatro triángulos amarillos) Desempeño ideal: Los niños son capaces de utilizar una estrategia para lograr que todos los triángulos sean congruentes entre sí, y con ellos construir una figura compuesta realizando combinaciones de patrones y relaciones de las unidades para que sea idéntica a llave referente compuesta por triángulos estáticos.
	Nivel 5 (N5-T1, N5-T2, N5-T3) Procedimiento: Mismo procedimiento del nivel 4. Elementos estructurantes: mismo que el nivel 4, pero	Funcionamiento cognitivo exigido: el mismo del nivel 4, además de reconocer las propiedades de la cantidad de triángulos, color y composición de la forma a crear (boceto y

cambia el color a verde, aumenta la cantidad de triángulos rectángulos a cinco para las tres tareas (los dinámicos y los estáticos que conforman la llave referente) y por ende las formas de las llaves.	llave conformada por cinco triángulos congruentes) Desempeño ideal: Los niños son capaces de utilizar una estrategia para lograr que los 5 triángulos sean congruentes entre sí, y con ellos construir una figura compuesta realizando combinaciones de patrones y relaciones de las unidades para que sea idéntica a llave referente compuesta por triángulos estáticos.
Nivel 6 (N6-1, N6-2, N6-3) Procedimiento: Mismo procedimiento del nivel 4. Elementos estructurantes: mismo que el nivel 4, pero cambia el color a morado, aumenta la cantidad de triángulos rectángulos a 6 para las tres tareas (los dinámicos y los estáticos que confirman la llave referente) y por ende las formas de las llaves. Tiene ocultos los marcadores de tamaño de los triángulos no congruentes con que debe formar la llave.	Funcionamiento cognitivo exigido: mismo del nivel 4, además de reconocer las propiedades de la cantidad de triángulos, color y composición de la forma a crear (boceto y llave de 6 triángulos azules). Desempeño ideal: Los niños son capaces de utilizar una estrategia para lograr que todos los 6 triángulos sean congruentes entre sí, y con ellos construir una figura compuesta realizando combinaciones de patrones y relaciones de las unidades para que sea idéntica a llave referente compuesta por triángulos estáticos.
Nivel 7 (N7-1, N7-2, N7-3) Procedimiento: Mismo procedimiento del nivel 4. Elementos estructurantes: mismo que el nivel 6, pero cambia el color a azul, aumenta la cantidad de triángulos rectángulos a 8	Funcionamiento cognitivo exigido: mismo del nivel 6, además de reconocer las propiedades de la cantidad de triángulos, color y composición de la forma a crear (boceto y llave de 8 triángulos morados). Desempeño ideal: Los niños son capaces de utilizar una estrategia para lograr que todos los 8 triángulos sean congruentes entre sí, y con ellos construir una figura compuesta realizando combinaciones de patrones y relaciones de las unidades para que sea idéntica a llave referente compuesta por triángulos estáticos.
Eval N1: Procedimiento: mismo del nivel 1, en este caso solo tiene una tarea. Elementos estructurantes: mismo del nivel 1, pero el triángulo referente es obtuso al tener tres lados y ángulos diferentes, donde uno de ellos es mayor a 90°. Dos lados pasan sobre el eje Y. La intención es mirar cómo los niños realizan utilizando diversas estrategias y más avanzadas.	Funcionamiento cognitivo exigido: mismo del nivel 1, además de reconocer las propiedades del triángulo referente del nivel 3 (tres lados y ángulos diferentes, uno es mayor a 90°) Desempeño ideal: Los niños utilizan una estrategia para lograr que dos triángulos sean congruentes entre sí.
Eval N2: Mismo procedimiento del nivel 4, en este caso solo tiene una tarea y son triángulos rectos. Elementos estructurantes: mismo que el nivel 4, pero cambia el color a café, aumenta la cantidad de triángulos a 10 (que conforma el boceto de la llave y los no congruentes con que debe construir la llave idéntica) y por ende las formas de las llaves. Tiene ocultos los marcadores de tamaño de los triángulos no congruentes para formar la llave.	Funcionamiento cognitivo exigido: mismo del nivel 4, además de reconocer las propiedades de los triángulos no isósceles, la cantidad, color y composición de la forma a crear (boceto y llave de diez triángulos cafés). Desempeño ideal: Los niños utilizan una estrategia para lograr que todos los triángulos sean congruentes entre sí, y que con ellos pueden crear la llave idéntica a la del boceto, logrado a partir de proceso de composición y descomposición.

Anexo 3

Protocolo de la secuencia de ambiente de aprendizaje “construyendo las llaves del castillo mágico”

INTRODUCCIÓN

-Hola, y gracias por participar. Mi nombre es Jazmín, y trabajaré con ustedes en este espacio. Vamos hacer un juego sobre matemáticas en el iPad, que se llama “construyendo las llaves del castillo mágico” donde van a tener unas figuras que pueden arrastrar y jugar con ellas.

Este juego tiene una historia y se las voy a contar: “Había una vez en un lugar muy lejano, un castillo que ha estado gobernado por un dragón grande y fuerte, pero nadie ha podido entrar al castillo porque tiene muchas puertas y sólo tenemos partes de las llaves para abrirlas y ¡¡¡ Poder ver qué hay escondido detrás de cada una!!! Por eso me van ayudar a construir las llaves. Hay unas que son sencillas, pero también hay otras que son más duras y tienen varias partes para construirla”.

Situación 1. Exploratoria 1

Protocolo para la actividad 1: congruencia exploratorio

(Muestro un dibujo con dos triángulos congruentes, uno es de color rosa el otro es azul)

Indicador principal

1. investigación:

-Me gustaría que arrastres el triángulo azul en la pantalla y **me** dice qué pasa con el triángulo rosado cuando mueves el triángulo tal (simultaneidad)

Basado en el contenido preguntas de seguimiento

2. pedir explicación (hacer explícitos los resultados de la encuesta):

-¿Qué piensan? -Diganme, ¿qué pasa con el triángulo rosado al mover el triángulo azul?

3. enfoque en rotación:

-ahora giren el triángulo azul y me dices qué pasa con el triángulo rosado.

-¿Qué sucede con el triángulo rosado cuando giras el triángulo azul?

4. enfoque en estiramiento:

Ahora vuelvan el triángulo azul más grande y dime qué sucede con el triángulo rosa.

-¿Qué pasa con el triángulo rosa cuando haces el triángulo azul más grande?

5. enfoque en reducción:

Ahora vuelvan el triángulo azul más pequeño y diganme qué sucede con el triángulo rosado.

-¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando haces el triángulo azul más pequeño?

6. enfoque en traslación:

- Ahora deslicen el triángulo azul y dime qué sucede con el triángulo rosado.

-¿Qué pasa con el triángulo rosado cuando deslizan el triángulo azul?

7. Enfoque en el tamaño: (Solo si los niños no se refieren espontáneamente)

-Compararon los tamaños de los dos triángulos?
¿Que notaron? O ¿Cómo se compara el tamaño del triángulo rosado con el tamaño del triángulo azul?

8. enfoque en la forma: (sólo si los niños no refieren espontáneamente)

-Comparar las formas de los dos triángulos. ¿Qué observan? O -¿cómo se compara la forma del triángulo rosa a la forma del triángulo verde?

9. Centrarse en los marcadores de tamaño:

¿Para qué creen que son estos números? O ¿Cuál creen que es el propósito de estos números?

-Comparar los dos números -¿qué notan?

-Me gustaría que arrastraran los puntos del triángulo azul y me digan qué pasa con los números.

-¿Qué notan al comparar los dos números?

Otro seguimiento de preguntas (se entrelazan con el contenido basado en preguntas de seguimiento)

¿-Podría mostrarme allí (señalando el iPad) lo que está explicando?

-¿Qué piensan sobre... ¿(mencionar tema)?

-¿Qué piensan sobre lo que ella dijo?

-¿Me podrían mostrar (o hablar) lo que ella o él está explicando?

Situación 2. Exploratoria 2

Protocolo para la actividad 2: congruencia exploratorio

(Muestro un dibujo con dos triángulos congruentes, uno es de color rosa el otro es verde)

1. Investigación:

-Me gustaría que arrastren el triángulo verde y me digan qué pasa con el triángulo rosado.

Basado en el contenido preguntas de seguimiento

2. Pedir explicaciones (haciendo explícitos los resultados de la investigación):

-¿Qué piensan? Díganme qué sucede con el triángulo rosado cuando mueves el triángulo verde.

3. Centrarse en el tamaño: (Solo si los niños no se refieren a él de forma espontánea)

-Compararon los tamaños de los dos triángulos? O ¿Cómo se compara el tamaño del triángulo rosa con el tamaño del triángulo verde?

4. enfoque en la forma: (sólo si los niños no refieren espontáneamente)

-Compararon las formas de los dos triángulos. ¿Que notaron? O, ¿cómo se compara la forma del triángulo rosa con la forma del triángulo verde?

5. enfoque en los marcadores de tamaño:

¿Díganme para qué creen que son estos números? O ¿Cuál creen que es el propósito de estos números?

-Compararon los dos números: ¿qué notaron?

-Me gustaría que arrastraran los puntos del triángulo verde y me digan qué pasa con los números.

-Compararon los dos números -¿qué notaron?

Otro seguimiento de preguntas (se entrelazan con el contenido basado en preguntas de seguimiento)

- ¿-Podrían mostrarme allí (señalando el iPad) lo que está explicando?
- Qué piensan sobre... ¿(mencionar tema)?
- ¿Qué piensan sobre lo que ella dijo?
- ¿Me podrían mostrar (o hablar) lo que ella o él está explicando?

Situación 3: Resolución de problemas “formas simples”

Tarea N1-T1-T3¹

(Muestro un triángulo amarillo y el otro naranja)

1. resolución de problemas:

-Me gustaría que hicieran el triángulo naranja idéntico al triángulo amarillo. Piensen y diganme una estrategia (o cómo harías) para hacer que el triángulo naranja sea idéntico al triángulo amarillo.

Basado en el contenido preguntas de seguimiento (después de la solución)

2. pedir explicación (haciendo explícita la estrategia):

¿- Háblenme de la estrategia que usaste (o estás usando)?

3. pedir justificación:

¿Creen que el triángulo naranja es idéntico al triángulo amarillo?

-¿Qué creen que hace que los dos triángulos sean idénticos?

Otro seguimiento de preguntas (se entrelazan con el contenido basado en preguntas de seguimiento)

- ¿-Podrían mostrarme allí (señalando el iPad) lo que está explicando?
- Qué piensan sobre... ¿(mencionar tema)?
- ¿Qué piensan sobre lo que ella o él dijo?
- ¿Me podrían mostrar (o hablar) lo que ella o él está explicando?

Situación 4: Resolución de problemas “formas compuestas

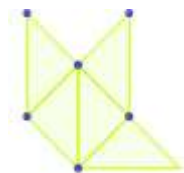
Tarea N4- T1-T3²

-Resolución de problemas

(Muestro un boceto de la llave conformada por los cinco triángulos al lado izquierdo con una frase que hace alusión al tamaño que tienen c/u de los triángulos congruentes que conforman la figura, y al lado derecho los cinco triángulos verdes con que deben construir la llave, enumerados del 1-5 en una cuadrícula)

¹ Estas son las mismas preguntas para las tareas N2 y N3 de la situación de resolución de problemas de figuras simples. Lo único que cambia sería lo estructurante de la tarea que se presentó en el ACT.

² Estas son las mismas preguntas para las tareas que van de la N5 hasta la N8. Lo único que cambia sería lo estructurante de la tarea que se presentó en el ACT.



Así debería ser la llave que abre una de las puertas del castillo mágico. Su misión es construir esta llave idéntica con esos triángulos ¿Cómo lo harían? Piensen en una estrategia.

Seguimiento después de la solución

1. Pedir explicación (hacer explícita la estrategia)

-¿Háblenme de la estrategia que usaron o están usando?

2. Pedir justificación

-¿Cómo es este triángulo comparado con este triángulo (señalar los triángulos que el niño modifico)?

[Son iguales porque tienen el mismo tamaño, textura, lados y puntas]

*Enfoque en la forma: (sólo si los niños no refieren espontáneamente)

-Comparen las formas de los dos triángulos. ¿Qué observan?

[Tienen tres lados, tienen el mismo tamaño cada lado]

*Enfoque en el tamaño: (Solo si los niños no se refieren espontáneamente)

-Compara los tamaños de los dos triángulos? ¿Qué notan?

*¿Pueden comparar estos dos lados de este triángulo con el otro triángulo?

[Los dos lados de los triángulos son iguales]

*¿Pueden comparar estos dos puntas de este triángulo con el otro triángulo?

[Ambos triángulos tienen las mismas puntas/ son iguales]

*¿Son iguales o son diferentes?

*¿creen que la llave que crearon es igual a la que está ya construida?

*¿Qué creen que hace que su llave sea idéntica a la figura de la llave que está allí (señalar la figura de construcción)?

Otro seguimiento de preguntas (se entrelazan con el contenido basado en preguntas de seguimiento)

¿-Podría mostrarme allí (señalando el iPad) lo que está explicando?

-¿Qué piensan sobre... ¿(mencionar tema)?

-¿Qué piensan sobre lo que ella o él dijo?

-¿Me podrían mostrar (o hablar) lo que ella o él está explicando?

Anexo 4

Rejilla de seguimiento durante las sesiones

Situación	Tarea	Sesión	Termino	
Situación 1-Exploración de congruencia 1	Exploración de congruencia “formas dinámicas”	1	Si	No
Situación 2- Exploración de congruencia 2	Exploración de congruencia “formas dinámicas”	1	Si	No
Situación 3 Resolución de Problemas de congruencia “Formas simples” Tareas N3 a N4	Ítem N1-1	2	Si	No
	Ítem N1-2		Si	No
	Ítem N1-3		Si	No
	Ítem N2-1	3	Si	No
	Ítem N2-2		Si	No
	Ítem N2-3		Si	No
	Ítem N3-1	4	Si	No
	Ítem N3-2		Si	No
	Ítem N3-3		Si	No
Situación 4 Resolución de Problemas de congruencia “Formas compuestas” Tareas N4 a N8	Ítem (N4-1)	5	Si	No
	Ítem N4-2		Si	No
	Ítem N4-3		Si	No
	Ítem (N5-1)	6	Si	No
	Ítem N5-2		Si	No
	Ítem N5-3		Si	No
	Ítem N6-1)	7	Si	No
	Ítem N6-2		Si	No
	Ítem N6-3		Si	No
	Ítem (N7-1)	8	Si	No
	Ítem N7-2		Si	No
	Ítem N7-3		Si	No
	Ítem N8-1	9	Si	No
	Ítem N8-2		Si	No
	Ítem N8-3		Si	No

Anexo 5

Asentimiento informado

ASENTIMIENTO INFORMADO

Hola,

Tú has sido invitado a participar en un proyecto de investigación de la Universidad del Valle. Tus padres ya fueron informados sobre tu participación. En este documento te informaremos que tu participación es voluntaria, el objetivo que tenemos y lo que tendrías que hacer para ayudarnos con nuestro trabajo.

Como investigadores de la Universidad del Valle, queremos aprender sobre cómo crear mejores espacios educativos para que los niños puedan acceder más fácil al conocimiento. Para esto, tú nos ayudarás a resolver una actividad con el Ipad con la cual podrás jugar y en ocasiones nosotros te guiaremos. Durante estas sesiones tendremos cámaras grabando las actividades que tú realizas.

No tienes que aparecer en las grabaciones si tú no lo quieres. Si acaso no quieres esto, nos puedes avisar para no guardar tus grabaciones y nadie se enojara contigo. Esta hoja es para que la guardes.

Anexo 6

FORMATO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

Cordial saludo,

Su hijo/a ha sido invitado/a a participar en el proyecto de investigación de trabajo de grado *“Trayectorias de razonamiento geométrico y estrategias de medición de congruencia en niños pequeños utilizando Ambientes de Geometría Dinámica”*. Enmarcado en el proyecto “Desarrollo de Principios Conceptuales sobre Diseño de Ambientes de Aprendizaje para el Acceso Inclusivo al Pensamiento en STEM –Ciencias, Tecnologías, Ingenierías & Matemáticas- en Escuelas y Museos”, del grupo de investigación Cognición Científica y Matemática de la Universidad del Valle. Comedidamente le solicitamos leer y firmar el presente **consentimiento informado**, el cual le informa a usted las condiciones de la participación de su hijo/a en las actividades, con el fin de que usted tome una decisión informada sobre si acepta que su hijo/a participe o no. Usted puede sentirse libre de preguntar al personal del proyecto, cualquier inquietud que tenga sobre éste (Los contactos están al final del formato).

Objetivo del proyecto:

El propósito de este proyecto es promover el uso de ambientes de aprendizaje que propicien el desarrollo del razonamiento geométrico en edades tempranas (7 a 8 años), a través del juego en contexto de educación formal y escolar.

Procedimiento:

Si usted acepta que su hijo/a haga parte del proyecto, este se realizará directamente con su hijo/a en las instalaciones de la institución educativa en la que se encuentra inscrito su hijo/a. A él/ella se le pedirá jugar con un Ipad para construir las llaves de un castillo mágico. Esta actividad estará guiada todo el tiempo por un miembro del proyecto. Esta actividad dura máximo 60 minutos, durante 8 sesiones.

Riesgos y beneficios:

La participación en el juego del proyecto no tiene ningún riesgo, porque es un escenario interactivo. Sus beneficios son: 1) Para los niños, porque la experiencia en la actividad facilita su aprendizaje de las matemáticas al mismo tiempo que se divierte; 2) Para la sociedad, porque de la investigación mostrará implicaciones educativas positivas para promover el aprendizaje de las matemáticas; y , 3) Para el proyecto, porque nos permitirá examinar la pertinencia de principios educativos de los juegos implementados para la educación matemática temprana de los niños.

Confidencialidad y protección de su privacidad:

El nombre de su hijo/a nunca será divulgado. Se usará un pseudónimo. La información será guardada confidencialmente en la Universidad del Valle por los investigadores. Las respuestas que su hijo/a provea en la aplicación serán grabadas en formato audiovisual y habrá registro fotográfico de la misma, **solo si usted lo permite**. Asimismo, se busca que el material audiovisual y fotográfico que se derive de la aplicación pueda usarse para fines académicos en artículos de investigación y en eventos de carácter científico. Para ello, debe colocar una X abajo en la casilla adicional destinada para permitir la grabación y el registro fotográfico.

Compensación:

No habrá compensación económica por participar en este proyecto.

Información y contacto para preguntas:

Jazmín Hernández es la encargada de la investigación de trabajo de grado y la que orientará la actividad. Es psicóloga y estudiante de Maestría de tercer semestre, de la Universidad del Valle. Ese proyecto será enmarcado en el Centro de Investigaciones en Psicología, Cognición y Cultura. Para preguntas relacionadas con el proyecto puede llamarla al teléfono 32261313216 o escribirle al email jazmin.hernandez@correounivalle.edu.co

Yenny Otálora es la directora y supervisora del proyecto macro de investigación. Es profesora nombrada tiempo completo de la Universidad del Valle. Es psicóloga y magíster en Psicología de la Universidad del Valle. Y es magister y PhD en Educación Matemática con énfasis en Educación en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemática, de la Universidad de Massachusetts, en U.S.A. La docente tiene amplia trayectoria en investigación. Para escribirle al email yenny.otalora@correounivalle.edu.co

Participación voluntaria:

La participación de su hijo/a en este proyecto es voluntaria. Usted tiene el derecho de decidir si acepta o no su participación y de retirarlo/a en cualquier momento sin ninguna consecuencia negativa. Si tiene preguntas sobre los derechos de su hijo/a como participante o sobre el proyecto, o quejas, o comentarios, o cualquier otro asunto relacionado con el proyecto, por favor contactar a la estudiante Laura o la docente Yenny en el teléfono o correo electrónico ofrecido. ¡Muchas gracias por permitir a su hijo/a participar en este proyecto!

CONSENTIMIENTO

He leído la información ofrecida sobre el proyecto y tengo suficiente información para tomar una decisión acerca de la participación de mi hijo/a en el proyecto. Yo doy mi consentimiento para que el/ella participe:

Nombre del padre, madre o acudiente: _____

Fecha: _____ Hora: _____ Firma: _____

Nombre de su hijo/a _____

Acepta que su hijo/a sea grabado durante la aplicación?

Sí: ____ No: ____ No aplica: ____

¿Acepta que le sean tomadas fotografías durante la aplicación, que puedan eventualmente ser publicadas en artículos de investigación y eventos académicos, únicamente con fines académicos y científicos?

Si: ____ No: ____ No aplica: ____